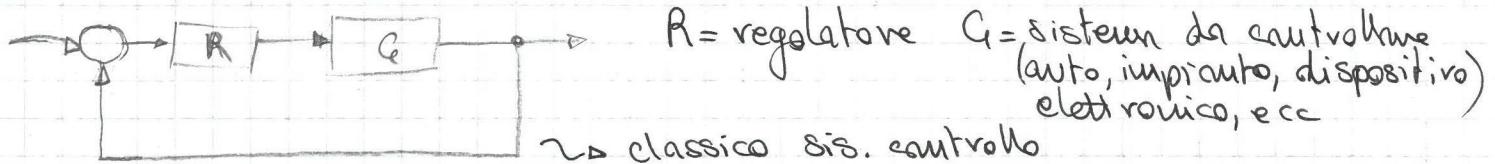


FONDAMENTI DI AUTOMATICA



Peculiarità dei sis di controllo

- Sis fisico - 1 o più variabili da controllare - 1 o + var per influenzare il sis - specifiche di andamento volto (desiderato) del sis
- L'automatica è basata sulla descrizione matematica della realtà, perciò è indipendente dalla tecnologia

Problema di controllo: impostare funzionamento desiderato a sistema assegnato
 Il sis assegnato è anche chiamato ^{sis}sotto controllo, dovrà essere descritto in modo matematico

Funzionamento desiderato: alcune variabili del sis vengono desiderate dal valore

più o meno uguale rispetto a cosa impone l'utente
Variabili di controllo: sono le var di "azione"

~~permettono~~ Se le variabili sotto controllo

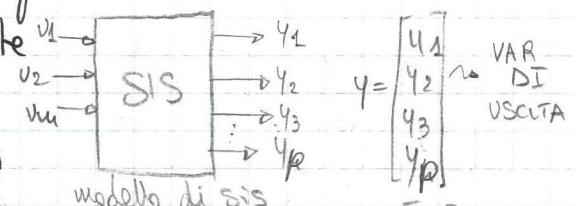
sono uguali al valore desiderato, equivale a dire $y = y_0$
 in cui y_0 è un valore prefissato

Definisco, oltre ai vettori di input e out, il vettore dei disturbi

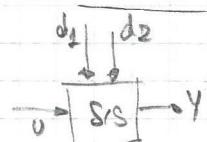
$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$ i disturbi non possono essere controllati

$u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $d \in \mathbb{R}^r$ $u = u(t)$, $y = y(t)$, $d = d(t)$ in cui

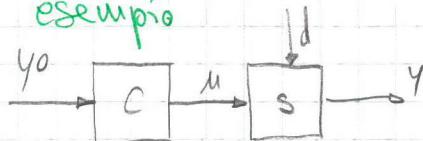
se $t \in \mathbb{R}$ - allora è a tempo continuo
 $\in \mathbb{N}$ - discerto



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \text{ VAR DI INGRESSO}$$



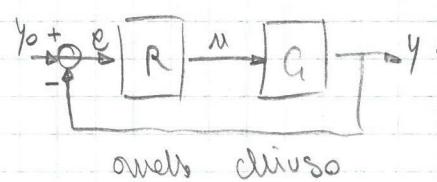
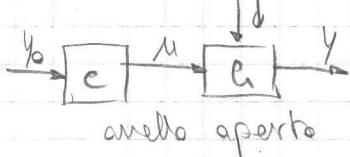
Esempio



Determinare u : $y(t) \approx y_0(t)$ sono specifiche quantitative

Introduciamo il controllo ad anello aperto ed il

controllo ad anello chiuso



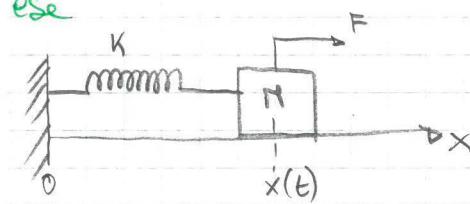
Anello aperto: si hanno problemi di 1) disturbi
2) errori di modello

→ problemi di

ROBUSTEZZA

Anello chiuso: si hanno prob di 1) Ha bisogno di sensori (per la retroazione)

ese



2) prestazione (è un sis reattivo, → spazio tempo
si hanno dei limiti di prestazioni)

Problema di controllo: sis sotto controllo
+ comportamento voluto $\rightarrow x(t) = x_0$

All'equilibrio abbiamo che $F = -Kx \quad x = -\frac{F}{K}$

dovendo progettare il sis di controllo ad anello aperto:

~~scelgo~~ scelgo $F = Ku$, u = nominale (potrei non conoscere perfettamente il valore della cost. elastica K)

Riscriro $x = \frac{Ku x_0}{K}$

se $Ku = K \quad x = x_0$ situaz. nominale

se $Ku \neq K \quad x \neq x_0 \rightarrow$ se $x = \frac{Ku}{K + \Delta K} x_0$ allora

$$x = x_0 - \frac{\Delta K}{Ku + \Delta K} x_0$$

\downarrow valore voluto \downarrow valore modificabile (errore)

ΔK è la perturbazione (quanto K è distante dal nominale)

Progetto invece il controllo ad anello chiuso:

$$F = -\alpha(x - x_0) \quad \alpha > 0 \quad \text{se } x > x_0 \rightarrow F < 0 \quad x = \frac{1}{K} F = \frac{1}{K} \alpha (x_0 - x) \rightarrow$$

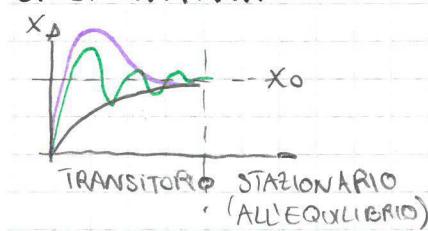
$$\text{se } x < x_0 \rightarrow F > 0$$

$$\rightarrow x = \frac{\frac{\alpha}{K} x_0}{1 + \frac{\alpha}{K}} x_0 = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{K}}\right) x_0 \quad \text{Abbiamo anche qui un errore, ma è dipendente anche da } \alpha \text{ che è del controllo}$$

Potrei rendere piccolo a piacere questo errore. Se $\alpha \rightarrow \infty \quad x \sim x_0$

Mi domando quanto tempo è necessario ad arrivare al risultato e come

ci si arriva:



Abbiamo la parte transitoria e quella all'equilibrio

Nel caso di anello aperto \rightarrow uso info a priori sul modello

" " " " " chiuso \rightarrow uso info istantanea (letta sul momento)

Classificazione dei sistemi

Sistemi statici: y è legata algebricamente a $u \Rightarrow y = f(u)$

perciò questo è anche un legame istantaneo

Esistono sis statici tempo invariante e tempovariante: $y = f(u, t)$
 $\rightarrow y = f(u)$

es di tempo variante: $y^1 = \sin(3t) + u$

es di tempoinvar: $y^2 = u$ in cui $u = \sin(3t) \Rightarrow f = (u(t))$

c'è una dipendenza esplicita ① e una indiretta ②

Esistono sis SISO: single in single out $y = f(u)$ in cui $u \in \mathbb{R}$

MIMO: multiple in multiple out $y = f(u)$ in cui $u \in \mathbb{R}^n$

Esistono sis lineari e non lineari.

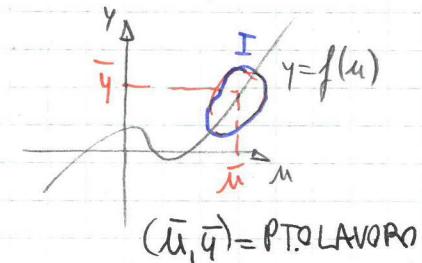
funzione lineare \rightarrow 3 principi di sovrapp. di cause ed effetti:

(si ha in uscita una comb. lin. delle var di INPUT)

Sis non lineari $y = f(u, t)$, se tempo variante

Vediamo nel caso SISO (tempo invariante), la y è:

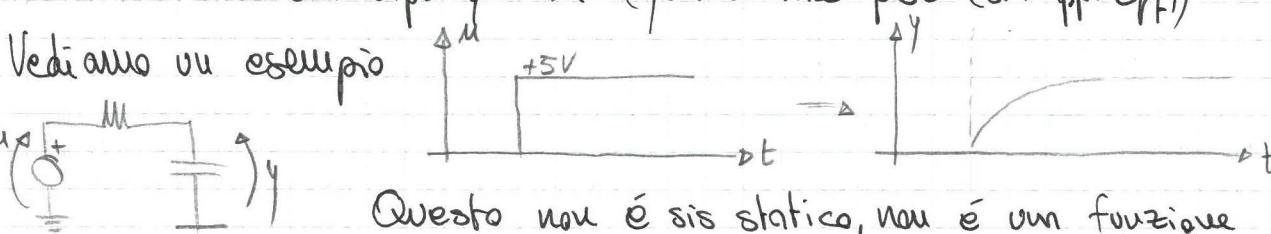
I sis statici non lineari possono essere linearizzati prefissando un pto ed un suo intorno.



$$y \approx \bar{y} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{u}} (u - \bar{u}) \quad y - \bar{y} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{u}} (u - \bar{u}) \quad \boxed{dy = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{u}} du} \rightarrow$$

\rightarrow è sis lin. del tipo $y = Ku$ (quindi vale pse (sovrapp. eff))

Vediamo un esempio



Questo non è sis statico, non è una funzione algebrica l'uscita rispetto all'entrata. È come se ci fosse una "memoria" nel sis.

Quella è la tensione ai capi di C (la curva inganghiata) $u \rightarrow S \rightarrow y$
 es: serbatoio con due portate di entrata ed uscita.

L'uscita è il livello del serbatoio. Non è sis lineare

Fisse W_1 e W_0 , cosa det. algebricamente?

$Q = A \cdot h \cdot \rho_{zadernit} \Rightarrow$ quantità di fluido nel serbatoio
~~conseguente~~

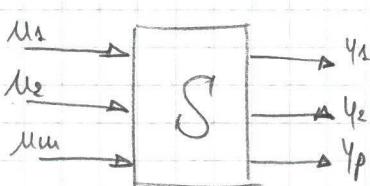
Se $w_1 = w_0 \rightarrow Q$ è costante $\dot{Q} = 0$

Se $w_1 > w_0 \rightarrow \dot{Q} > 0$ ($\dot{Q} = w_1 - w_0$)

Se $w_1 < w_0 \rightarrow \dot{Q} < 0$ ($\dot{Q} = w_1 - w_0$)

La variazione viene determinata algebricamente dagli ingressi. L'uscita h dipende staticamente da Q $\rightarrow h = y = \frac{Q}{A \cdot p}$

Sistemi dinamici



Def: variabili di stato = sono le variabili interne la si

conoscenza a $t=t_0$ è la minima info necessaria per determinare $y(t) \forall t \geq t_0$ visto $u(t) \forall t \geq t_0$

Rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \rightarrow \text{eq di stato}$$

$u(t)$: variabili di ingresso

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \rightarrow / \parallel \text{uscita}$$

$y(t)$: = d'uscita

classificazioni dei sis dinamici

$x(t)$: = di stato $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

• Per vedere la temporaneità, basta che almeno una delle

eq dipenda direttamente dal tempo. In caso contrario, è temporale (questa è la stessa def ~~temporale~~ temporale per i sis statici).

• MIMO/SISO: sempre stessa def dei sis statici.

(Le variabili di stato sono indipendenti da questa classificazione)

• Ordine ~~di cardinalità~~ delle variabili di stato

• Sis strettamente propri VS propri: se l'eq di uscita non dipende esplicitamente da u \Rightarrow è sis strettamente proprio

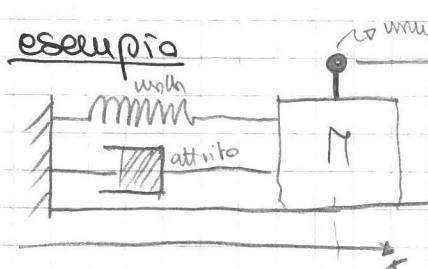
$$\text{es } y(t) = 3x + 4u$$

Sis lin VS Sis non lineare

Sis lin se sia f che g sono lineari in u e x

Sis-din.lin $\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u$ in cui A è unt. $[n \times n]$, B è $[n \times m]$

$$y(t) = C(t)x + D(t)u \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$



è ovviamente sis dinamico. Di che ordine?

2: ho bisogno di due variabili di stato:
posizione e velocità.

$$M\ddot{x} = -Cx - Kx + u$$

L'attrito \rightarrow flessibile

è di ordine due perché vedo subito che non si ferma a \dot{x} , un a \ddot{x} .

Abbiamo un'eq diff di 2° grado, da lì la determinazione dell'ordine del sis.

Posizione: x_1 , Velocità: $x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{M}(-Cx - Kx + u)$

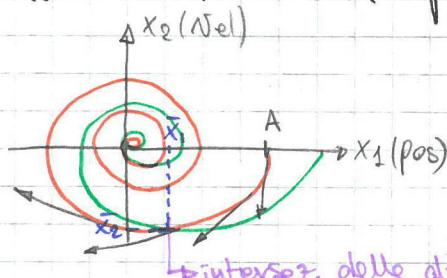
$$\rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-Cx_2 - Kx_1 + u) \rightarrow \text{eq diff di 1° grado}$$

Ho ridotto l'eq di 2° grado in due di 1° grado. L'eq di uscita è $y = x_1$

È inoltre strettamente proporzionale al tempo iniziale, SISO, lineare. Riscrivo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & \frac{C}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u$$

Ho riscritto la mia rappresentazione attraverso matrici e ho un sis. lin.



Come evolve il sis in base alle condizioni di pos e vel?

Fisicamente, se $x_2 = 0$ allora $x_1 = 0 \rightarrow$ non succede niente

Nel pto A $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}$

Questo grafico prende il nome di "diagramma delle fasi" e permette di capire graficamente come si evolve il sis. Ciò è molto comodo per sis maggiori del 1° ordine

Nell'intersez delle due traiettorie, nel pto di intersez avrei due possibili traiettorie. Questo viola la def di variabili di stato data. E quindi?

Se x_1 e x_2 sono veramente variabili di stato, allora le due traiettorie non si possono intersecare. Dico determinare l'evoluzione del sis in maniera univoca, solo attraverso le variabili di stato

Scelta delle variabili di stato

Dato un sis di ordine n ho infinite scelte di variabili di stato

$$\frac{d^u}{dt^u} y = \varphi \left(\frac{dy^{u-1}}{dt^{u-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, u \right) \quad \text{Verdiamo i criteri per la scelta:}$$

$$x_1 = y, x_2 = \frac{dy}{dt}, x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, x_u = \frac{d^{u-1}y}{dt^{u-1}} \quad \rightarrow \text{CRITERI EURISTICI}$$

\rightarrow Nel momento in cui faccio... 5

questa scelta, l'eq delle var. stato. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $x_n = \varphi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, u)$

$y = x_1$ è l'eq conseguente di uscita

Criteri euristici

la var. stato è la meccanica del sis. contiene l'info necessaria per ricostruire l'andamento del sistema

es: nei sis elettrici a colpo d'occhio contiamo i condensatori e induttori (che non siano indipendenti) e determiniamo l'ordine. Correnti e tensioni risp su induttore e induttore condensatore sono var. stato

es: nei sis elettrici meccanici abbiano come var l'energia cinetica (Nel) e quella potenziale (posiz)

es: nei sis termici temperatura / entalpia

es: ≈ ≈ idraulici $\begin{cases} \text{potenziale} \rightarrow \text{pressione fluido} \\ \text{cinetica} \rightarrow \text{portata fluido} \end{cases}$

es

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad X_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 4x_2 \\ 10x_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{contiene la stessa info di } X_A \\ (\text{è come cambiare l'unità di misura,}) \\ (\text{moltiplicando per un coeff}) \end{array}$$

es:



u = corrente IN y = tensione OUT

Sis del 2° ordine $x_1 = N_c$ $x_2 = i_L$

$$\begin{cases} L \dot{x}_2 = x_1 \\ i_R = \frac{x_1}{R} \\ R \dot{x}_1 = u - \frac{x_1}{R} - x_2 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{①}} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC} x_1 - \frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Scelgo ora (diversamente da priun) $x_2 = i_L$ $x_1 = i_3$

Per esprimere lo stesso sis devo modificare un attimo la situazione:

$$i_R = x_1 - x_2 \quad y = R i_R = R(x_1 - x_2) \quad C \dot{y} = u - x_1 \quad L \dot{x}_2 = y \quad \xrightarrow{\text{gioco un po'}}$$

$$\xrightarrow{\text{①}} \begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{R}{L} (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_1 = \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{RC} u \\ y = R(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sono tornato ad} \\ \text{una rappresentazione analoga a quella} \\ \text{di priun. Queste eq ①, ② sono} \end{array}$$

Lo stesso sis con varie variabili di stato diverse.

Scegliendo con metodo le var di stato semplificano calcoli \rightarrow furba

scelta

esempio: **SIS. ORDINE INFINTO** L'info inviata dall'autore a te viene ricevuta dal satellite nel tempo $t_0 + \Delta t$. Prima di quell'istante il satellite riceve info mancante per $t \leq t_0$.

Abbiamo perciò un "storia" del sistema. Di che info ho bisogno per conoscere $y(t)$ tra $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$?

Necessito, ovviamente, di $u(t) \forall t \in [t_0 - \Delta t, t_0]$

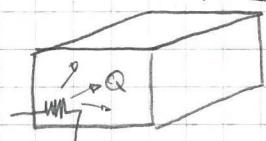
Per def di var di stato, conosco già $u(t)$ da $t \geq t_0$, un ~~per~~ per analizzare il sis in quell'istante ha bisogno di sapere la "storia" precedente.

Se non conosco la storia, posso ipotizzare di avere inf variabili prima di t_0 . Non è sempre vero che ci sia $u(t)$ nullo prima e dopo la trasmissione del segnale, ecco perché serve una ricostruzione di ciò che c'era in precedenza. (le variabili possono essere infinite perché ho infiniti istanti di tempo).

1) Esis di ordine inf 2) Solo i sis a ordine finito sono scrivibili mediante eq. stato

esempio: scatola con resistenza positiva in un angolo

$u = Q$ (calore come ingresso)



Ipotizzo $n=1 \rightarrow$ temperatura uniforme

Se inizio a scaldare l'angolo, ho voglia di var di stato perché ogni volumetto infinitesimale avrà una sua temperatura (il calore si diffondono più piano nella scatola). Ho ∞^3 variabili (a causa delle coordinate x, y, z).

In questo caso sono necessarie eq. diff alle derivate parziali.

Se suppongo di dividere la temperatura che si diffondono in 4 volumi della scatola, ottengo $n=4$. Così facendo, "segmento" lo spazio, lo rendo discreto.

$$\bar{T} = \frac{1}{C} (Q - Q_e) \quad Q = \text{calore entrante} \quad Q_e = \text{uscita}$$

La capacità termica (aria) Approssimo Q a $Q = R \cdot I^2 = u$
d'entrata temperatura

$$Q_e = K (\bar{T}_{int} - T_{ext})$$

$$\dot{x} = \frac{1}{C} (u - K(x - T_e)) \quad y = x \quad T_e = \text{disturbo}$$

Def Dato un sis dinamico, noti $x(t_0) = x_0$ e $u(t) \forall t \geq t_0$, si def

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) & \bullet \text{il} \underline{\text{movimento dello stato}}, \text{la soluzione } x(t) \quad t \geq t_0 \\ y = g(x, u, t) & \bullet \text{il} \underline{\text{movimento dell'uscita}}, \text{la sol. } y(t) \text{ per } t \geq t_0 \end{cases}$$

In analisi, il movimento dello stato è l'int. gen della eq di stato, mentre il movimento d'uscita è la sol. finita con l'int. gen. (protratto nel tempo)

Considero ora un sis dinamico tempinv: sono varianti al v. assoluto del tempo. Perciò conviene avere $t_0 = 0$ \circledast

Def movimenti di eq (per sis.din.tempinv): dato un sis din tempinv:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \text{ con } u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq t_0 = 0 \rightsquigarrow \circledast \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Si dice stato/movimento di equilibrio dello stato di equilibrio

la condiz. iniziale $x(t) = \bar{x} : x(t) = \bar{x} \quad \forall t > 0$ Analogamente, devono esistere il movimento di uscita di eq è $y(t) = \bar{y} : y(t) = \bar{y} \quad \forall t > 0$ per prendere il nome di movimenti

Oss: non è detto che gli stati di eq esistano

es:

$$x = \begin{bmatrix} \text{POS} \\ \text{VEL} \end{bmatrix}$$

Se ho forza costante una molla, Esiste inoltre se metto il sis in quello stato, esso riunisce in quello stato? No, il sis si sposta con $F = \text{cost}$

$$\begin{cases} (\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\ \text{cercato} \\ \text{dato} \end{cases}$$

$$\text{es: } n=1 \quad \dot{x} = f(x, u) \quad \bar{u} = k$$

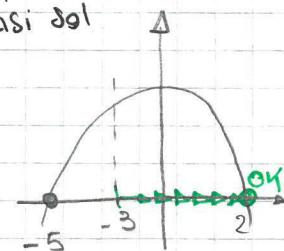
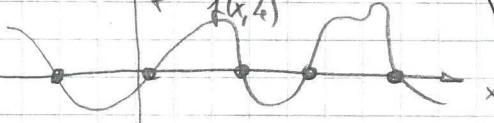
Ho 5 equilibri (quando $f = 0$)

Se parso \bar{x} tc $f = 0$ sono già in eq. Ma se uno è in eq?

Nel disegno, se parto da $\bar{x} = -3$, so già che \bar{x} si sposta, se

che x cresce (peso trascinante) e quindi va verso destra, fermandosi a 2 "riunendo intrappolato" nello stato di eq.

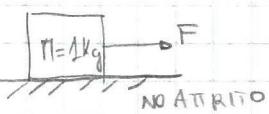
Vediamo il caso di sis. lineari.



Sis linn tempiuv (LTI)

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{impone } \dot{x} = Ax + B\bar{u} \text{ nel caso di } u(t) = \bar{u} \\ y = Cx + Du & \text{Ottengo } Ax = -B\bar{u} \end{cases}$] sis lineare risolvibile algebricamente
 se $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$]! equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$
 se $\det A = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \infty & \text{sol} \\ \infty & \text{sol} \end{cases}$

es



$$\ddot{\vec{x}} = F \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 11 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det A = 0$$

$$\text{Se } \bar{u}=0 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ma qui serve per l'eq}} \begin{cases} x_2 = 0 \text{ ~arbitrariamente} \\ x_1 = \text{qualsiasi} \end{cases} \Rightarrow \text{ha 1 sola eq}$$

Qualunque C.I caratterizzata da x_2 (velocità) = 0 è un op $\rightarrow \exists \infty$ equilibri.

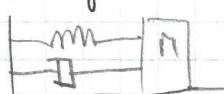
$$\text{de } \bar{\mu} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \bar{\mu} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \beta = \bar{\mu} \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \theta = n^\circ \cos t \neq 0 \\ \text{assuré} \end{array}$$

Soluzione, le eq non valgono d'accordo

Riassunto stato di eg

$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & \text{considero } u(t) = \bar{u} \text{ costante, lo stato di eq } \ddot{x}: x(t) = \bar{x} \forall t > 0 \\ y = g(x, u) & \text{uscita di eq } \ddot{y} \text{ e' p corrispondente a } \bar{x}, \bar{u} \Rightarrow \ddot{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$

Esempio



$$\begin{aligned} u(t) &= \bar{u} \text{ constante} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{\eta} x_1 - \frac{C}{\eta} x_2 + \frac{1}{\eta} u \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -\frac{K}{\eta} x_1 - \frac{C}{\eta} x_2 + \frac{1}{\eta} u = 0 \end{array} \right. \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{K}{\Pi} x_1 + \frac{1}{\Pi} \bar{\mu} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{K} \bar{\mu} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{equilibrio}}$$

Formula di Lagrange

È un'espressione analitica per il movimento di sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{ho bisogno inoltre di } u(t) \forall t \geq t_0$$

$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) d\tau$

$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B u(\tau) d\tau + D u(t)$

Calcolo di un movimento per sis LTI data $x(t_0)$. È la sol di vney diff.

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \quad \text{iu cui } A \text{ é uma matriz}$$

* movimento libero * movimento forzato (è presente solo l'ingresso) (forzato dall'esterno)
 (è presente solo la CI x0)

Solamente solo dn CT x

→ dipende solo da μ/E

Per il moto libero e forzato le dipendenze sono lineari, perché
uno è solo un coeff che moltiplica, l'altro è all'interno dell'integrale,
perciò la variaz può essere solo lin.

Indico libero/forzato con i pedici x_L e $x_F(t)$

~~$$M(t) = M_1(t) + M_2(t)$$~~
$$M(t) = M_1(t) + M_2(t) \quad ? \text{ copia}$$

es: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 4u(t) \\ y(t) = 5x(t) + 3u(t) \end{cases}$? moto stato? uscita Applico Lagrange:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \\ &= 0 \cdot 2 + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \cdot 4 e^{-\tau} d\tau = 2e^{3t} + 4 \int_0^t e^{3t-4\tau} d\tau = \\ &= 2e^{3t} + 4e^{3t} \left[-\frac{1}{4} e^{-4\tau} \right]_0^t = 2e^{3t} - \frac{4}{4} e^{3t} (e^{-4t} - e^0) = 3e^{3t} - e^{-t} \end{aligned}$$

Abbiamo trovato il moto del moto stato. Facciamo la prova del g,
differenziamo ciò che abbiamo trovato $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(3e^{3t} - e^{-t})}{dt} = 9e^{3t} + e^{-t}$
Sost $x(t)$ in $\dot{x}(t) = (9e^{3t} + e^{-t}) + 4e^{-t} = 9e^{3t} + e^{-t}$
 $y(t) = 5(3e^{3t} - e^{-t}) + 3e^{-t} = 15e^{3t} - 2e^{-t} \rightarrow$ moto uscita
Somma p. degli effetti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, u \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}^2 \text{ un sis SISO}$$

caso 1. $u(t) = 0 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ho due metodi

1) $e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 1.2) Chiamo $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ → scrivo in 2 vettori

Poiché vale sovrapp effetti: $x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

posso anche scrivere $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

caso 2. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) \neq 0$

1) $x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$ 1.2) Scopro $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ in 2 funzioni

es $u(t) = 4 \sin(wt) = 2 \sin(wt) + 2 \sin(wt) \rightarrow x_F(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)} B \cdot 2 \sin(w\tau) d\tau +$
 $\int_0^t e^{-A(t-\tau)} B \cdot 2 \sin(w\tau) d\tau$

$$\text{caso 3. } x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u(t) = \underbrace{3 \sin(t)}_{M_1(t)} + \underbrace{5 \cos(t)}_{M_2(t)} \quad \Rightarrow \text{abbiamo sia iugresso che C.I.}$$

$$X(t) = X_L(t) + X_{F_1}(t) + X_{F_2}(t)$$

↳ causato da $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ↳ causato da $M_1(t)$ ↳ causato da $M_2(t)$

Perciò possiamo vedere come trattare i sis TITI.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{Consideriamo il sis strettamente proprio.}$$

Possa a rete e codifica le frasi in di

Posso a rigori applicare la formula di Lagrange,

OPPURE usare la sovrapp. cause ed effetti:

$$\dot{x} = Ax \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u_1 \quad \dot{x} = Ax \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} u_2 \text{ ottengo che si ha}$$

$$\overbrace{x_B(t)}^A \rightarrow x(t) = x_A(t) + x_B(t)$$

Rappresentazioni equivalenti.

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ s'or rapp} \quad \begin{aligned} x &= Ax + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u_1 \\ x &\stackrel{(2)}{=} Ax + \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} u_2 \end{aligned}$$

$$\text{Secondo Lagrange } x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{CI}} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \rightarrow \text{ingresso}$$

$$X(t) = X_L(t) + X_{F_m}(t) + X_{F_M}(t)$$

L = movimento libero
 F = \rightarrow forzato

\hookrightarrow considerando CI null $\rightarrow x(0) = 0$ $\Rightarrow *$

Dobbiamo essere sicuri di non considerare la condiz. init per più di 1 volta.

Se ci limitiamo a sis LTI $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ quando cambiano le var di stato, decidiamo un nuovo vettore chiamato $z \in \mathbb{R}^n$ lo stesso ordine del vettore x
 $z = h(x) \rightarrow z = Tx \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es: (T è un'nuova mat. di rappresentazione).

$$n=2 \rightarrow z_1 = t_{11}x_1 + t_{12}x_2 \\ z_2 = t_{21}x_1 + t_{22}x_2 \quad \left. \right\} \Rightarrow z = Tx$$

Dero stare atento a un'utopieva un det $T \neq 0$ (sempre una arrebbie utilitar)

$$z = Tx \quad x = T^{-1}z \quad \dot{x} = T^{-1}\dot{z} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + Bu \\ y = C\tilde{z} + Du \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \\ \dot{y} = CT^{-1}z + Du \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \text{ dove } \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \dot{y} = \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} \\ \tilde{D} = D \end{cases}$$

Sono passato da un sis all'altro con var. stato diverso. La relazione ingresso/uscita è del tutto identica tra i due sis.

Perciò dato un sis ^{un} ci sono modi di rappresentare il sis (ovvero scegliere A, B, C, D)

Per calcolare l'exp di una matrice cerco un diag $T \Delta A T^{-1} = A_D \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{bmatrix}$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_u = \lambda_u z_u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - \dots \\ \vdots \\ \dot{x}_u = \dots \end{cases}$$

es: univice triangolare

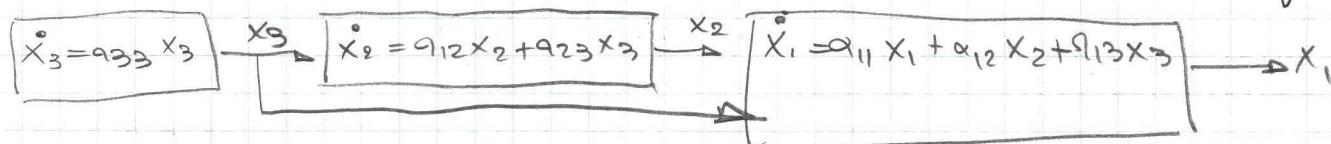
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{33}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{le eq non sono} \\ \text{decoppilate} \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \quad x_3(t) = e^{a_{33}t} x_{30}$$

$$\dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad x_3 \text{ è nota, è ingresso}$$

$$x_2(t) = e^{a_{22}t} x_{20} + \int_0^t e^{a_{22}(t-\tau)} a_{23}x_3(\tau) d\tau$$

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad x_2, x_3 \text{ sono noti e considerati come ingressi}$$



- Sistemi diagonali - calcolo scalare parallelo

« sistemi triangolari - calcolo scalare è sequenziale

Stabilità

Vedi allo priun intuitivamente la stabilità del sistema

Ci sono due tipi di stabilità: INSIABILE

stab. att. lyapunov (legata agli stati)
stab. ingresso/uscita

STABILIO



Def: norma euclidea $x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Def: intorno circolare di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($B_r(x_0)$) $x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r$
e di raggio r

$\dot{x} = f(x(t), u(t))$ considero $u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq 0$ (costante)

$x(0) = x_{00}$ (condizione iniziale iniziale) Considero x_{00} equilibrio

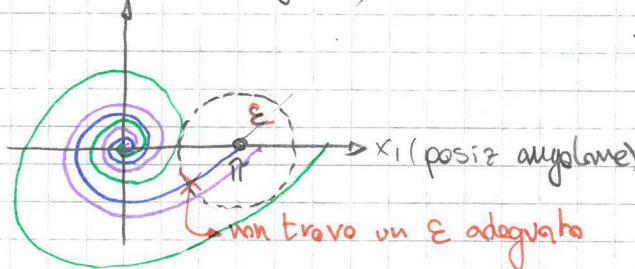
Perciò se $x_{\text{ou}} \in \text{equilibrio}$ $x(t) = x_{\text{ou}}$.

Invece $x(t) = x_{\text{op}} \neq x_{\text{ou}}$ (condizione iniziale perturbata)

Il movimento x_{ou} si dice stabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon} > 0 : \forall x_{\text{op}} \quad \|x_{\text{op}} - x_{\text{ou}}\| < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow \|x_p(t) - x_{\text{ou}}\| < \varepsilon \quad \forall t$$

es:



Abbiamo un pendolo in posizione di equilibrio. È instabile?

Sì perché ho trovato un ε per cui non è valida la condiz. di stabilità

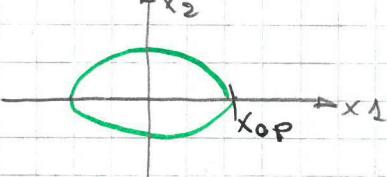
Le diverse traiettorie mostrano come le variazioni di stato siano componenti.

Def: un equilibrio è instabile se non è stabile

Def: il movimento è asintoticamente stabile $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_p - x_{\text{ou}}\| = 0$

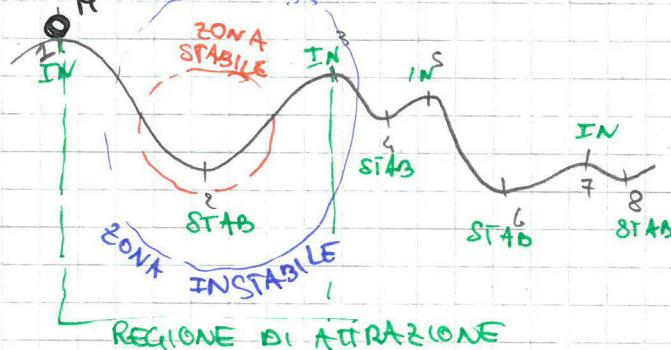
Le traiettorie convergono verso l'eq.

Nel caso in cui non ci siano dissipazioni di alcun tipo ($F_{\text{ext}} = 0$ nel pendolo):



es: abbiamo 8 eq:

Il punto finale = pto init



Bacino/regione di attrazione ~~di equilibrio~~ di equilibrio asintoticamente stabile:

$x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_p - x_{\text{ou}}\| \rightarrow 0$ Mi interessa che esista questo bacino quando parlo di stabilità

LTI (stabilità)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad 1) \text{ Fissiamo } u(t) = \bar{u} \rightarrow \text{movim. equil nullo (}x_{\text{ou}}\text{)}$$

$$x(0) = x_{\text{op}} \rightarrow x(t) = x_p(t) \text{ movim. perturbato}$$

$$\dot{x}_n = Ax_n + Bu \text{ con } x_n(0) = x_{\text{ou}} \rightarrow x_n(t) = x_{\text{ou}}$$

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu \text{ con } x_p(0) = x_{\text{op}} \quad (\text{stiamo considerando } B = \text{cost})$$

$$\dot{x}_p - x_n = \dot{x}_p - \dot{x}_n = A(x_p - x_n) + B(\bar{u} - u) \rightarrow \text{sostituisco}$$

$$\dot{x} = A\delta x$$

sia LTI diverso da quello di partenza, descrive/caratterizza la stabilità



$\delta x(0) = x_{0p} - x_{0n} = \text{perturbazione iniziale}$

δx rappresenta la distanza dall'equilibrio. Se

- $\delta x \rightarrow \text{inst}$
- $\delta x \rightarrow \text{asint stabile}$
- $\delta x = \text{cost} \rightarrow \text{semplice stabile}$

Il sis $\dot{x} = A\delta x$ non dipende dall'ingresso

L'equilibrio non dipende da A , oppure in maniera differente, non dipende da B . L'andamento non dipende da $\delta x_n(0)$. Di conseguenza:

nel caso di sis LT1: l'ingresso non influenza la stabilità, B non influenza la stabilità, perciò la stabilità dipende solo da A .

La stabilità non dipende dall'equilibrio \Rightarrow stabilità del sistema (posso dire ciò solo nel caso del sis LT1)

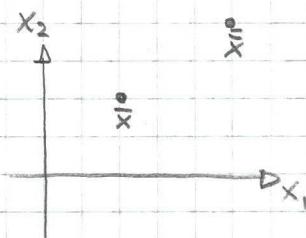
Se A è Asint. stab. \Rightarrow il bacino di attrazione è \mathbb{R}^n

LTI AS (Asintoticamente Stabili)

1) Se sposto il sis dall'equil., ritorna all'eq.

2) Dato $u = \text{cost} \Rightarrow \exists!$ equilibrio \rightarrow uno e un solo equilibrio

DIM (per assurdo): $\bar{x} \neq \tilde{x}$ \bar{x}, \tilde{x} sono entrambi equilibri



Se lascio evolvere il sis liberamente non posso avere 2 eq.

Avere 1! eq vuol dire che $\det A \neq 0$, perché $\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow Ax = -Bu$ quell'eq ammette 1! soluz quando $\det A \neq 0$.

Posso dire che se $\det A = 0 \Rightarrow$ sis NON AS (non esiste 1 sola eq)

AS $\Rightarrow \exists!$ eq $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

3) Il movimento dipende Asint solo da $u(t)$ $x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

dipende da $u(t)$
 \Rightarrow per $t \rightarrow \infty$ se sis AS

4) Se applico $u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi } 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases} \Rightarrow y(t) \rightarrow 0$

\rightarrow è un altro modo per dire che è AS
 input limitato \rightarrow uscita limitata \rightarrow uscita limitata

5) Dato un ingresso limitato \Rightarrow uscita limitata $|u(t)| \leq K \forall t \Rightarrow \exists h: |y(t)| \leq h \forall t$

La stabilità si suddivide in -intervi (delle var. di stato)

1/0 capo 5

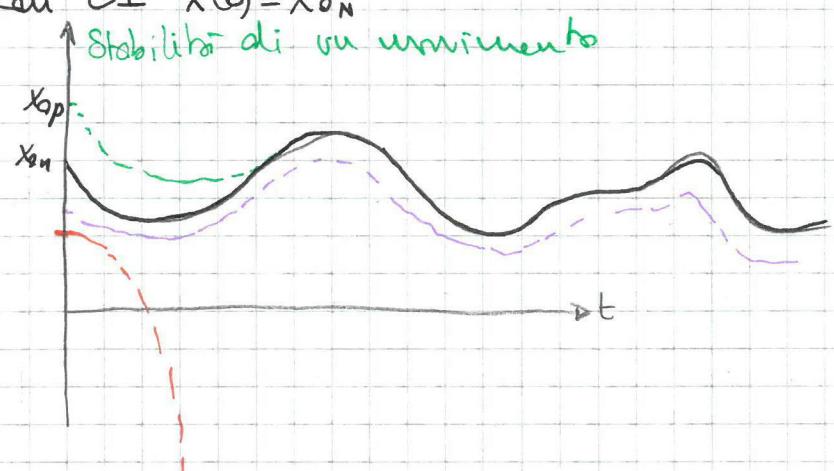
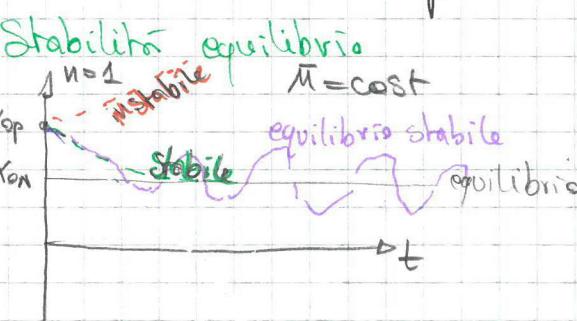
Sistemi LTI instabili

- 1) $\exists x_0 : e^{At}x_0 \rightarrow \infty$ (la divergenza non si verifica per forza per tutte le CI)
- 2) $u(t) = \bar{u}$ $\begin{cases} \text{e } x(0) \neq \text{equilibrio} \end{cases} \Rightarrow$ Lo stato $x(t)$ diverge (basta una variabile di stato che diverge per dire che lo stato diverge)
- Ese:
- $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 & \dot{x}_2 &= -x_2 + u & y &= x_2 & u &= \bar{u} \text{ costante} \\ x_1(t) &= e^t x_{10} & & & & & \text{CI} \begin{cases} x_{10} = 0 & x_1(t) \rightarrow \infty \\ x_{20} = \bar{x} & x_2(t) \rightarrow \bar{x} \end{cases} \\ x_2(t) &= e^{-t} x_{20} + \bar{u}(1 - e^{-t}) & & & & & y \rightarrow \bar{y} \\ y &= x_2 & & & & & \end{aligned}$$
- $$\text{CI} \begin{cases} x_{10} = 1 & x_1(t) = e^t \\ x_{20} = 2 & x_2(t) = e^{-t} \cdot 2 + \bar{u}(1 - e^{-t}) \end{cases} \rightarrow \text{diverge}$$

Non c'è equivalenza tra stabilità interna e relazione I/O

Stabilità di un movimento

Invece di considerare $x_N(t) = x_N$ (equilibrio) passa a $x_N(t) = \text{tempo} r$, ovvero il movimento di $\dot{x} = f(x, u_N)$ con CI $x(0) = x_{0N}$



Assunzione

SIS NON LIN \rightarrow proprietà di stabilità o equilibri di movimenti

SIS LIN \rightarrow proprietà di stabilità del sistema \leftrightarrow alle caratteristiche di A

$$\dot{\delta}x = A\delta x \text{ dove } \delta x(t) = x_p(t) - x_u(t) \quad \text{AS} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}| = \infty$$

Potrei dividere le caratteristiche di A in

instabile $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}| = \infty$

semplicemente stabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}| = C \neq 0$$

Ese:

$$n=1 \quad \dot{x} = a \delta x \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \begin{cases} a < 0 & \text{AS} \\ a = 0 & \text{INST} \\ a > 0 & \text{SEMPL. ST.} \end{cases}$$

AS	SS	INST
$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$

$n > 1$ consideriamo la stabilità per casi maggiori di 1

$\hookrightarrow A$ diagonalizzabile $\dot{z} = T x \quad z = A \Delta z$

$$A \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ z_n = \lambda_n z_n \end{array} \begin{array}{l} \text{se } \lambda_i < 0 \forall i \Rightarrow AS \\ \text{se } \exists \lambda_i > 0 \Rightarrow \text{INSTABILE} \\ \text{se } \exists \lambda_i \leq 0 \Rightarrow SS \end{array}$$

Vediamo con A una diag una triangolare abblocchi:

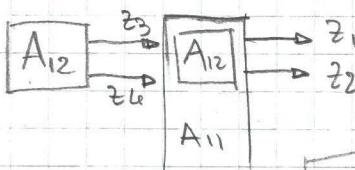
$$\dot{x} = Ax \quad z = Tx \quad \det(T) \neq 0$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ 0 & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} z$$

An sono untrici:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

untrici
(triangolare a blocchi)



$$z_n = e^{A_{11}t} z_{n-1} \quad z_{n-1} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + \alpha_{n-1,n} z_n \quad z_{n-2} = \lambda_{n-2} z_{n-2} + h(z_n, z_{n-1})$$

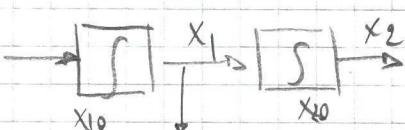
$\lambda_n < 0$
 $\lambda_{n-1} < 0$
 $\lambda_1 < 0$ } AS se $\exists \lambda_i > 0 \Rightarrow$ instabile (cresce tutto a catena, ciò è chiamato l'instabilità)

Se ho un autovettore $\exists! \lambda = 0$ e tutti gli altri < 0 :

considero due autovettori $\lambda = 0$ consecutivi (es $\lambda_{n-5}, \lambda_{n-6} = 0$)

$$\hookrightarrow \int \dot{x} dt = \int u dt \quad x(t) - x(0) = \int_0^t u(r) dr$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(r) dr \quad \text{Se ne metto due in serie}$$



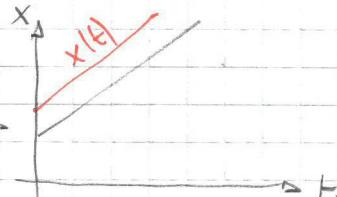
Così x_2 sta integrando un valore costante \rightarrow diverge

x_1 non diverge Se, quindi, ho 1 autovettore nullo \rightarrow SS

Se ne ho due consecutivi corro il rischio di avere instabilità.

Se $\dot{x} = M$ con $M = 0 \rightarrow$ equil $x = 0$

$$\text{con } \bar{\mu} \neq 0 \text{ così } x(t) = x_0(t) + \bar{\mu} t \rightarrow$$



pur crescendo indefinitivamente $x(t)$, non si ottiene

della traiettoria minima che sto studiando, fx rimane costante \rightarrow SS

Se, ancora, ne metto due insieme integro la 2^a cost. e x_2 diverge.

Def più appropriata di modi di un sis (Ripasso)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A \text{ è diagonalizzabile} \quad A\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Possiamo calcolare i modi con la form. Lagrange, in cui compare l'exp di unt.

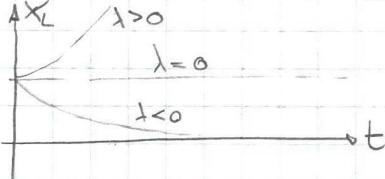
In base ai casi, posso calcolare l'exp di unt. $e^{At} = T_\Delta^{-1} e^{\Delta t} T_\Delta$

e^{At} = scrivibile come comblin (detta da T_Δ^{-1} e T_Δ) di termini $e^{\lambda_i t}$
 $e^{\lambda_i t} \rightarrow$ modo del sis

So che X_L è anch'esso un comblin di $e^{\lambda_i t}$ e la cond. init,

perciò i modi del sis rappresentano i "molti fondamentali" che vanno a costituire il comportamento del sistema. So che $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $\det(\lambda I - A) \Rightarrow$ ammette n radici complesse

se $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow e^{\lambda t}$



$\lambda < 0 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$
 $\lambda = 0 \rightarrow$ const per $t \rightarrow \infty$
 $\lambda > 0 \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$

Se tutti i modi tendono ~~verso zero~~ verso zero a zero $\rightarrow X_L$ non può far altro che tendere a zero perché è comblin

Se invece solo 1 diverge allora x_1 diverge e così via

se $\lambda \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ (se risolvo una radice trovo sempre complessi) coniugati

Ha senso per i numeri complessi parlare di segno di numero complesso?

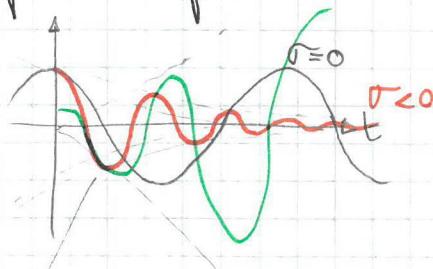
No. È necessario trovare un'ulteriore definizione:

posso scrivere $e^{\lambda t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)]$
in cui $\lambda \in \mathbb{C}$

adé quando calcolo T_Δ^{-1} e T_Δ

Dato che ho complessi coniugati, facendo un comblin ~~scompare~~ il complesso.

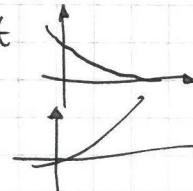
La parte importante del modo complesso perciò è la parte reale $e^{\sigma t}$



Ho sbagliato
la frequenza nel disegno,
sono in realtà tutte uguali
(stessa ω)

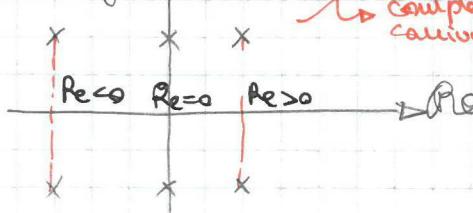
$\sigma = 0 \rightarrow \cos \omega t$

$\sigma < 0 \rightarrow e^{\sigma t} \cos \omega t$ in cui $e^{\sigma t}$



$\sigma > 0 \rightarrow e^{\sigma t} \cos \omega t$ in cui $e^{\sigma t}$

\rightarrow comparsi coniugati



Criteri degli autovetori:

Dato $\dot{x} = Ax + Bu$

Teorema: il sis è AS $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$

Teorema: se $\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow A \text{ è instabile}$ (oss: non vale il contrario)

questo è il caso in cui uno dei modi è instabile \Rightarrow complesso instabile \Rightarrow sis instabile

Teorema: se $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0, \text{Ma} = Mg \Leftrightarrow A \text{ è s.s.}$

(ovviamente se anche un solo $\lambda_i = 0$ ha $\text{Ma} \neq Mg \Rightarrow$ sis instabile)

Quest'ultimo Th si basa sulla diagonalizzazione di A. Infatti se A è diagonalizzabile, il sis non tornerà alla condiz iniziale, alcuni stati non torneranno alla condiz iniziale ma rimarranno perturbati un po' di più.

In altri casi dovrà triangolare la matrice

$$\begin{array}{c} z_1 \\ \rightarrow z_2 \\ \downarrow \lambda_i=0 \\ z_3 \end{array} \quad z = Tx \quad \dot{z} = Ad_z z$$

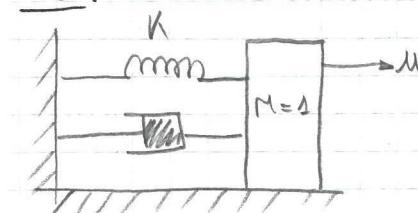
In questo caso con un autovettore nullo abbiamo il comportamento dell'integratore. Nel caso di z_2 integratore (ha $\lambda_i = 0$) $\dot{x} = 0x + u \quad x = \int_0^t u(\tau) d\tau$

Se infilo in z_2 una costante, l'integratore me lo fa divergere.

Quindi z_3 deve fornire costanti $\rightarrow z$, non deve essere integratore.

La divergenza però non è in maniera exp ma lineare \rightarrow INST. DEBOLE

Esempio:



$$\ddot{x} = -Kx - cx$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Kx_1 - cx_2 + u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -c \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ K & \lambda + c \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + c) + K = 0 \quad \Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + K = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4K}}{2}$$

• $K=0, c=0$ (no molle e no attrito) $\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2$ se $\Delta_A(\bar{\lambda}) = 0$ calcolando gli autovettori trovo che $\text{Ma} \neq Mg$ e quindi il sis è instabile

Vediamo un'osservazione sul polinomio minimo ammattibile:

DSS: POL. MIN. ANNULLANTE

data A con autovalori λ_i , dire che $m_A(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ equivale a dire che λ_i è radice semplice del polinomio minimo annullante.

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda^{-1} + \dots + \alpha_n \lambda^{n-1} \rightarrow \text{posso scriverlo raccogliendo le sue radici:}$$
$$\textcircled{*} = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\alpha_n}$$

Così rappresento i termini che hanno ~~λ^k~~ $\alpha_i = \text{moltiplicità algebrica}$

$$k = n \iff \alpha_i = 1 \forall i \rightarrow \text{tutti gli autovalori hanno } m_A = 1 \quad \boxed{\Delta_A = \text{pol. caratteristico}}$$

Ho scritto il polinomio caratteristico in maniera diversa.

Esso è anche il polinomio annullante per $A \rightarrow \Delta_A(A) = 0$ mat. nulla

Se sosto a λ dell'espressione $\textcircled{*}$ la matrice A trovo la matrice nulla.

$$\Psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{b_1} (\lambda - \lambda_2)^{b_2} \dots (\lambda - \lambda_K)^{b_K} \rightarrow \text{polinomio minimo annullante,}$$

la base è identica rispetto al pol. caratteristico. Quello che cambia è la moltiplicità algebrica b_k rispetto ad α_k .

Se $b_i = 1 \iff \lambda_i$ è radice semplice $\Rightarrow \Psi(A) = 0$

ed in particolare è il polinomio di grado minore ~~\neq~~ di tutti gli annullanti.

Se la radice che mi interessa compare come radice semplice $\rightarrow m_A = m_g$

come trovo Ψ ? So di sicuro che Δ_A è annullante, perciò posso da lì e scendo di grado. Nel mio caso ho bisogno di sapere che $b_i = 1$ e nient'altro, così posso controllare la moltiplicità algebrica rispetto a quella geometrica

es:

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2 \text{ è il pol. min. annullante?}$$

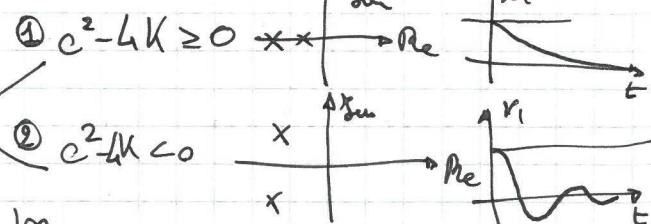
$$\text{candidato 1)} (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \quad \text{candidato 2)} (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) \quad \text{candidato 3)} (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Sostituisco $\lambda = A$ e faccio i conti e vedo quando ottengo zero

Torniamo all'esercizio precedente

- $K > 0, c > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4K}}{2}$$



In entrambi i casi vedo che $\text{Re} < 0$ perciò ho

stabilità. ①: tiro la molla, la molla va direttamente a zero (Attrito molto elevato)

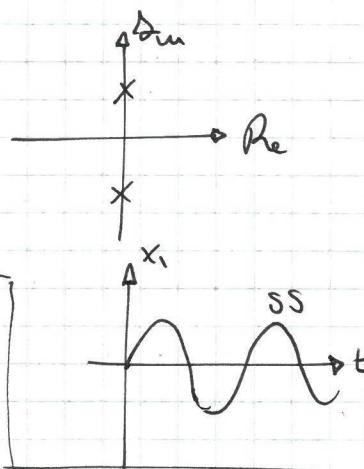
②: tiro la molla, sistema ~~scatta~~ oscilla e si ferma (Attrito dei contributo minore rispetto a ①)

Fisicamente: ① l'attrito dà un componente così forte che non si ha abbastanza inerzia per sormaelongare

- $C = 0, K > 0$ (no attrito) abbiano zero attrito quindi la molla è libera di oscillare senza mai fermarsi \rightarrow SS

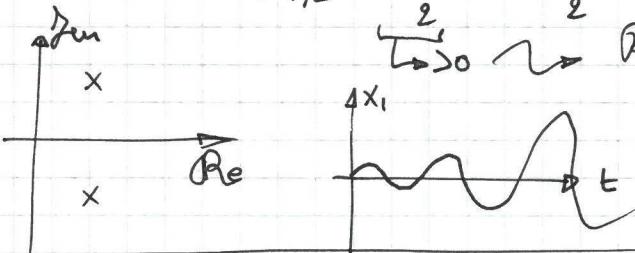
$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{-4K}}{2} = \pm \sqrt{-K} \rightsquigarrow \text{Re} = 0 \rightarrow \text{complex conjugati sull'origine}$$

Ovviamente ho $M_a = Mg = 1 \Rightarrow$ SS



- $c < 0, K > 0$ no ~~scatta~~ attrito negativo? Invece di frenare

accelera $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4K}}{2} \rightsquigarrow \text{Re} > 0 \rightarrow \text{INSTABILE}$



Il calcolo degli autovettori per matrici più grandi di 3×3 diventa tedioso.

es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$? per quali valori di a, b il sis è AS?

con calcolatrice o a mano è un suicidio calcolare gli autovettori.

Ci sono modi per analizzare la stabilità senza il calcolo degli autovettori

Analisi STABILITÀ senza il calcolo degli autovettori

Regola 1) Se A è triangolare \rightarrow gli autovettori sono sullo diag. principale di conseguenza non ho bisogno di calcoli (oss: vale anche per le mat. a blocchi) \rightsquigarrow l'autovettore triangolare $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \{ \text{autovettore } [A_{11}] \cup \text{autovettore } [A_{22}] \}$

Regola 2) $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ dove $\text{Tr} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ [La traccia è uguale alla somma degli autovettori]

data $\text{Tr}(A) > 0$ $\text{Tr} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ Se $\text{Tr}(A) > 0 \Rightarrow A$ instabile

Regola 3) $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ condiz. necessaria per avere AS è che $\det A \neq 0$

AS $\Rightarrow \det A \neq 0$ oppure se $\det A = 0 \Rightarrow$ sis non AS

Regola 4) Criterio di Routh-Hurwitz

data $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \Delta_A(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$

tutte le radici di $\Delta_A(\lambda) = 0$ hanno $\text{Re}(\lambda) < 0$ \Leftrightarrow gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono diversi da zero e concordi.

* ciò vuol dire che il sis è AS

$$\Delta_A(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \alpha_3 \lambda^{n-3} + \dots + \alpha_n$$

La tabella di Routh è un tabella di $n+1$ righe:

1 ^a colonna				(indici pari, mettiamo zero quando manca l'indice)			
α_0	α_2	α_4	α_6				
α_1	α_3	α_5	α_7	(indici dispari, " " " " ")			
h_1	h_2	h_3					
K_1	K_2	K_3					
l_1							

$l_i = -\frac{1}{K_1} \det \begin{pmatrix} h_i & h_{i+1} \\ K_1 & K_{i+1} \end{pmatrix}$

Costruiamo un algoritmo così fatto

H, K sono elementi già calcolati attraverso la formula l_i . Mi baso sulle due righe superiori per calcolare il valore attuale l_i . Procedo fino a costruire $n+1$ righe

es: $\Delta_A = \alpha_0 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$ sis del 2° ordine

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1(\alpha_2) & h_2 & & \end{array} \right| \quad h_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\alpha_1} (\alpha_2 \alpha_1) = \alpha_2$$

h_2 non è necessario perché sono già in n+1 righe
Nota che nella 1ª colonna c'è α_0, α_1 e α_2

Per i sis del 2° ordine la condizione necessaria e sufficiente per avere stabilità assiomatica \Leftrightarrow i coeff $\Delta_A(\lambda)$ sono concordi e non nulli

es $\Delta_A(\lambda) = s^3 + 3s^2 + 5s + 1$ $\left| \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & & \\ K_1 & & & \end{array} \right| \quad h_1 = -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{14}{3}$

$h_2 = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$K_1 = -\frac{1}{14} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{14}{3} & 0 \end{pmatrix} = +\frac{14}{3} \left(+\frac{14}{3} \right) = 1$

Prima colonna: $1, 3, \frac{14}{3}, \cancel{1}, \cancel{1}$

Vedo che sulla 2ª colonna ci sono elementi tutti concordi e $\neq 0 \Rightarrow$ sis AS
Stabilità dei movimenti dei sistemi unlivani.

1) linearizzazione:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\bar{x}, \bar{u}) = \text{equilibrio} \quad f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \quad \delta x = x - \bar{x} \quad \delta u = u - \bar{u}$$

$$\dot{\delta x} = \dot{x} = f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u$$

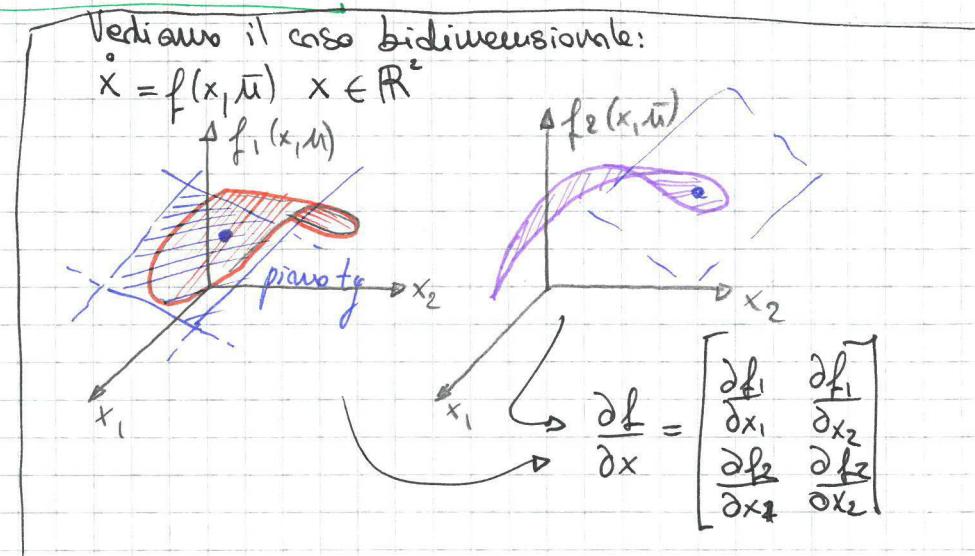
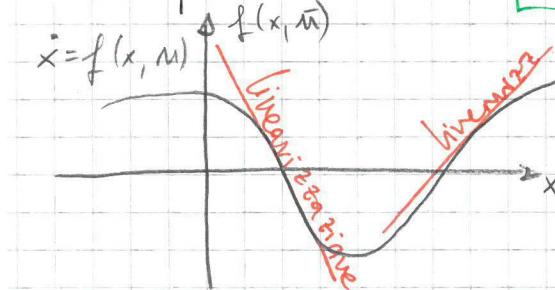
$$\dot{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \quad \boxed{\dot{\delta x} = A_L \delta x + B_L \delta u} \quad \text{f ha struttura di un sis lin}$$

$\dot{\delta x}$ è anche detta linearizzazione di $\dot{x} = f(x, u)$ intorno a (\bar{x}, \bar{u})

Posso anche linearizz. l'eq di osata

$$\dot{y} = g(x, u) - g(\bar{x}, \bar{u}) \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u - g(\bar{x}, \bar{u})$$

Posso perciò scrivere $\dot{y} = C_L \delta x + D_L \delta u$



Esempio

$$Q = (Q_0 - Q_0) \cdot \frac{1}{\rho \cdot S} \quad \rho = \text{densità} = 1 \quad S = 10 \text{ m}^2$$

Q_0 non è controllabile, dipende dalla tubatura e dal serbatoio
da u . So che l'uscita dipende dalla quantità nel serbatoio.

Sperimentalmente (quantitativamente) $Q_0 = \alpha \cdot \sqrt{h}$ pongo $\alpha = 1$ per semplificare
perciò $x = h$ $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{10} \sqrt{x} + \frac{1}{10} u \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$ sis non lin perde la radice quadrata

bugo $\bar{u} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{10} x^{1/2} + \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 1$ \Rightarrow il mopt. eq $\rightarrow (\bar{x}, \bar{u}) = (1, 1)$

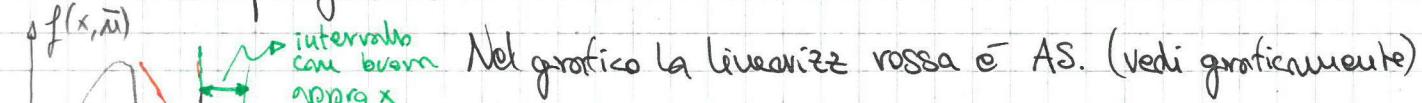
$$A_L = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \left. \frac{\partial \left(\frac{1}{10} \sqrt{x} + \frac{1}{10} u \right)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = -\frac{1}{20}$$

L'eq linearizzata

$$B_L = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \frac{1}{10} \quad C_L = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = 1/2 \quad D_L = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = 0$$

Otengo $\begin{cases} \dot{x} = (-1/20)x + (1/10)u \\ \dot{y} = (1/2)f_x + (0)u \end{cases}$ \Rightarrow il sis linearizzato risulta essere AS.

Posso concludere qualcosa sul sis non lineare ora che ho info sul sis linearizzato?
forcio un esempio grafico:



Posso concludere (tenendo conto che la linearizz introduce buon approx) che il sis non lin è anch'esso AS

es:
 $J\ddot{\theta} = -Mg l \sin(\theta) - K\dot{\theta} + c$ \rightsquigarrow ipotetica coppia applicata esternamente
 ↗ coppia del peso ↗ forza d'attrito $x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta}$

$$J = Ml^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 + \frac{c}{Ml^2} \end{cases}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 + \frac{c}{Ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Se voglio lin, devo trovare l'equilibrio. Supponiamo $\bar{u} = 0$

$$f(x, \bar{u}) = 0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in cui } f = 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$$

$\pi/2$ rivela i due equilibri, penso verso il basso e verso l'alto

Ora linearizziamo per bene:

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \bar{x}_1 & -\frac{K}{\pi l^2} \end{bmatrix} \quad B_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\pi l^2} \end{bmatrix}$$

equilibrio 1

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{K}{\pi l^2} \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l} & \lambda + \frac{K}{\pi l^2} \end{bmatrix} = \lambda \left(\lambda + \frac{K}{\pi l^2} \right) + \frac{g}{l} = \lambda \left(\lambda + \frac{K}{\pi l^2} \right) + \frac{g}{l} \Rightarrow$$

$= \Delta_{A_L} \rightsquigarrow$ polinomio caratteristico di A_L

Posso applicare il crit. di Routh nel caso del 2° ordine.

tutti i coeff $\lambda \left(\lambda + \frac{K}{\pi l^2} \right) + \frac{g}{l}$ sono $> 0 \Rightarrow$ il sis linearizzato è AS.

equilibrio 2

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \Rightarrow A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{K}{\pi l^2} \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{g}{l} & \lambda + \frac{K}{\pi l^2} \end{bmatrix} = \lambda \left(\lambda + \frac{K}{\pi l^2} \right) - \frac{g}{l} = \Delta_{A_L}$$

in questo caso ho un valore $\leq 0 \Rightarrow$ sis lin è INSTABILE

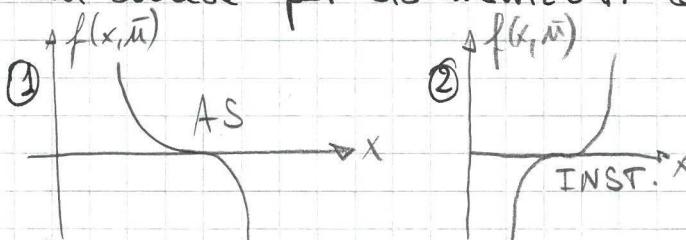
quindi anche con piccole perturbazioni dell'equilibrio, il sistema divergerà.

Dato $\dot{x} = f(x, u)$ con $f \in C$ e con (\bar{x}, \bar{u}) equilibrio, posso def un sis linearizzato attorno all'equilibrio \Rightarrow nell'intorno (\bar{x}, \bar{u}) $\delta \dot{x} = A_L \delta x + B_L \delta u$

Teorema 1) Se A_L è AS $\Rightarrow (\bar{x}, \bar{u})$ è AS per il sis non lin

Teorema 2) Se $\exists i$; autovalore di A_L con $Re(\lambda_i) > 0 = \Delta(\bar{x}, \bar{u})$ è INST. per sis non lin

Cosa succede per sis linearizzati con $\lambda_i = 0$?



Entrambe le f hanno tangente $\rightarrow 0$ per $(x, u) \rightarrow (\bar{x}, \bar{u})$, perciò le due f :

dalla origine allo stesso sis un dato stabilità diverse. Non sono in grado di stabilire un stabilità locale, devo vedere cosa accade attorno.

La linearizzazione per quindi non permette di ~~stabilire~~ analizzare instabilità

Def: dato un \bar{x} un f. scalare $V(x)$ è f. continua con anche le sue derivate prime continue è detta localmente:

- definita positiva se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(\bar{x})$
- semidefinita positiva se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_R(\bar{x})$
- definita negativa se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) < 0 \quad \forall x \in B_R(\bar{x})$
- semidefinita negativa se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_R(\bar{x})$

Queste def sono globali se $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$

$V(x)$ è quindi la nostra "energia" candidata. Vediamo come usarla.

Teorema di Lyapunov

Dato $\dot{x} = f(x) \quad f \in C^1$ e \bar{x} sia pto eq:

se $\exists V(x) \in C^1$ che sia def. positiva,

se $\dot{V}(x)$ è semidef. negativa lungo le traiettorie del sis intorno a \bar{x} \Rightarrow

$\Rightarrow \bar{x}$ è STABILE

corollario: se $\dot{V}(x)$ è def. negativa, allora \bar{x} è AS

(oss: se "l'energia" diminuisce o rimane costante \Rightarrow sis stabile, se invece l'energia decresce sempre (def negativa), allora abbiamo un ritorno a sempre lo stesso pto di equilibrio).

Stiamo dando uno sguardo più ampio a cosa succede al pto di equilibrio.
es: pendolo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2} \end{cases} \quad \text{considero } u=0 \text{ e } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{calcolato prima})$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\pi l^2 x_2^2}_{\text{energia cinetica}} + Mgl(1 - \cos x_1) \quad \begin{array}{l} \text{velocità} \\ \text{dipende dalla} \\ \text{posizione} \end{array}$$

$$\text{per def so che } \dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, \bar{u}) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \hline \frac{\partial V}{\partial x} & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 \end{bmatrix} = \left[Mgl \sin x_1 \quad Ml^2 x_2 \right] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{Ml^2} x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= Mgl x_2 \sin x_1 - Mgl x_2 \sin x_1 - Kx_2^2 =$$

$$= -Kx_2^2 = \underline{\underline{\dot{V}(x)}}$$

perché l'energia
dipende dalla
stato che a sua
volta dipende dall'

$$V(x) = -Kx_2^2 \begin{cases} < 0 & \text{se } K > 0 \text{ def neg (ha attrito per } K > 0) \\ \leq 0 & \text{se } K = 0 \text{ semidef neg (non ha attrito } K = 0) \end{cases}$$

Vedo subito che se non ho attrito \rightarrow sis oscillante stabilmente \Rightarrow sis STABILE (Non Asintoticamente).

Se invece ho attrito vedo che è AS anche fisicamente

Rappresentazione del sistema ingresso/uscita $\xrightarrow{\text{Trasformata di Laplace}}$

Potrò studiare il sis senza dover passare per le variabili di stato?

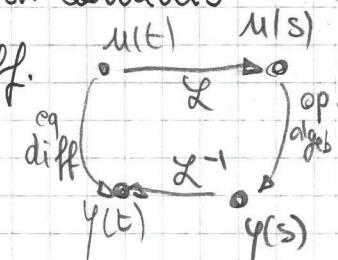
Fin'ora abbiamo studiato $u \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y$ e abbiamo risolto come $u \rightarrow$ eq di stato $\rightarrow y$ $\xrightarrow{\text{risolvo eq diff}}$ Voglio ora muovermi più le variabili interne. Bisogna introdurre primi dei concetti.

Si vuole definire uno spazio alternativo in cui ho un ingresso e calcolare l'uscita di un sis dinamico tramite operazioni algebriche. Passo da dominio del tempo (risolvo tramite eq. diff) al DOMINIO DELLE TRASFORMATE (risolvo tramite eq algebriche oppure operazioni).

Ovviamente devo trovare l'antitrasformata per tornare al dominio del tempo. Tutto ciò per evitare di risolvere l'eq. diff.

\mathcal{L} è operatore trasformata di Laplace

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ in cui $s \in \mathbb{C}$



F = funzione di Laplace che rappresenta la $f(t)$ trasformata

Def $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = \mathcal{L}[f(t)]$ se esiste finito

La trasformata esiste per un ins. limitato di funzioni:

se data $f(t)$ $\exists \sigma_0 \in \mathbb{R}$: $\int_{0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ (esiste finito) $\Rightarrow \exists \mathcal{L}[f(t)]$ $\Re(s) > \sigma_0$

Potrò trasformare anche f che divergono a partire che l'esponentiale vien sulla f , così che io possa integrare e avere il $\mathcal{L}[f(t)]$ finito.

$$\text{es: } f(t) = e^{-t} \text{ per } t \geq 0 \quad F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{1}{s+1} \cdot [e^{-(s+1)t}]_{0^-}^{\infty}$$

$$\text{ess: } e^{-(s+1)t} = e^{-(\Re(s)+j\Im(s))t} = e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} = e^{-\sigma t} \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t]$$

$$= -\frac{1}{s+1} \left[e^{-(s+1)t} \right]_0^\infty = -\frac{1}{s+1} [0 - 1] = \frac{1}{s+1}$$

se $\operatorname{Re}(s) > -1$

Impulso $\operatorname{imp}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{imp}_\varepsilon(t) = \operatorname{imp}_{\infty}(t) = f(t)$

con $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \rightsquigarrow$ l'area sotto la funzione dell'impulso è 1

$$\mathcal{L}[S(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ e^{-st} & \text{per } t=0 \text{ e quindi vale 1} \end{cases} = 1$$

$\log e^{-st} = 1 \cdot S(t)$

Perciò $\mathcal{L}[f(t)] = 1$

Segnali Causici

$$\operatorname{scal}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad \mathcal{L}[\operatorname{scal}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{scal}(t) dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$\operatorname{rau}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ t & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad \mathcal{L}[\operatorname{rau}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{rau}(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \int \frac{1}{s} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$\int f dg = fg - \int g df \rightsquigarrow \int f dt = f(t) - f(0)$

Proprietà di $\mathcal{L}[f(t)]$

a) Linearietà: $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$

es: $\mathcal{L}[3e^{-t} + 4\operatorname{scal}(t)] = \frac{3}{s+1} + \frac{4}{s} = \frac{7s+4}{s(s+1)}$

b) Trasformazione nel tempo (ritorno)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}[F(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$

DH: $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{st} f(t-\tau) dt = \begin{matrix} q=t-\tau \\ dq=dt \\ t=q+\tau \end{matrix} = \int_{-\tau}^\infty e^{sq} f(q) dq = e^{-s\tau} \int_0^\infty e^{sq} f(q) dq = e^{-s\tau} F(s)$

c) Trasformazione in s $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

es $\mathcal{L}[e^{at} \operatorname{scal}(t)] = \frac{1}{s-a}$

Esercizio: $\cos(wt) = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]$

$\mathcal{L}[\cos(wt) \cdot \operatorname{scal}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \operatorname{scal}(t)\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} \operatorname{scal}(t)] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-j\omega t} \operatorname{scal}(t)] =$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega} = \frac{1}{2} \frac{s+j\omega + s-j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$\mathcal{L}[\sin \omega t \cdot \text{scal}(t)]$ sapendo che $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2}$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

5) Cambio di scala nel tempo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(a \cdot s) \quad \text{con } a > 1$$

5) Derivazione in frequenza

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad \text{es } f(t) = t \cdot \text{scal}(t) = \text{raun}(t)$$

$$\mathcal{L}[t f(t)] = \frac{1}{s^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)$$

6) Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s F(s) - f(0^-) \quad \begin{array}{l} \text{(se la derivata} \\ \text{di } f(t) \text{ è trasformabile)} \\ \text{secondo Laplace} \end{array}$$

DIM:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f \cdot \frac{-1}{s} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \textcircled{*} + \frac{f(0^-)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}[f'(t)]$$

$$f = f(t) \quad df = f' dt \quad dg = e^{-st} dt \quad g = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\int f dg = fg - \int g df$$

$$\text{perciò } F(s) = \frac{f(0^-)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$$

6b) Derivaz. nel tempo di ordine superiore

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^-) = s \left[s \mathcal{L}[f(t)] - f(0^-) \right] - f'(0^-) = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^k}{dt^k} f(t)\right] = s^k F(s) - s^{k-1} f(0^-) - s^{k-2} \left. f'(t) \right|_{0^-} - s^{k-3} \left. f''(t) \right|_{0^-} - \dots - \left. f^{(k-1)}(t) \right|_{0^-}$$

7) Integrale nel tempo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(r) dr\right] = \frac{F(s)}{s} \quad \text{assumendo } f \text{ integrabile da } 0 \text{ a } \infty$$

Autotestorante

Vediamo il metodo per calcolare \mathcal{L}^{-1} approssimato.

$F(s) \rightarrow$ caratteristiche fondamentali

Teorema valore iniziale

$$\text{Hp } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \text{Th } f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (\text{se } f \text{ finito})$$

DPR:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$sF(s) = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0^+)$$

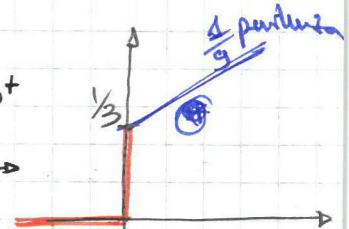
$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0^-) \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\int_0^{0^+} f'(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0^-) \right) + f(0^+)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} f(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0^-) = f(0^+) - f(0^-) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0^+) =$$

$$= f(0^+) + \int_{0^+}^\infty \lim_{s \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} dt = f(0^+)$$

\Leftrightarrow se $f(t)$ trasf. con Laplace $\rightarrow f(t)$ limitata in 0^+

$$F(s) = \frac{s+4}{3s^2+11s+10} \quad f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+4)}{3s^2+11s+10} = \frac{1}{3} \rightarrow$$



Se faccio $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$

$$f'(t) \Big|_{0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + 4s^2}{3s^2 + 11s + 10} = \text{discontinuità}$$

tolgo solo il

per togliere
la discontinuità.

Pero posso modificare un attimo la funzione, come $\tilde{F}(s) = F(s) - \frac{1}{3}$ (a discontinuità).

$$\tilde{f}'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[\tilde{F}(s) - \frac{1}{3}] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^3 + 4s^2}{3s^2 + 11s + 10} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\tilde{f}'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - \frac{1}{3}] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{s^2 - 4s}{3s^2 + 11s + 10} - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{9} \text{ derivata prima di } f \text{ evalutata in } 0^+ \oplus$$

Teorema del valore finale

$$H_p \quad 1) \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

|| 2) $F(s)$ i valori di s che annullano il denominatore $R e s < 0$ sono singolarità

∇ Th $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

es

$$F(s) = \frac{s+b}{3s^2 + 11s + 10} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \frac{s^2 + bs}{3s^2 + 11s + 10} = 0$$

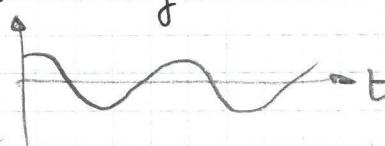
os

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + w^2} \quad \text{Teo valore finale } \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \frac{s^2}{s^2 + w^2} = 0 \text{ per } w \neq 0$$

Posso dire che $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + w^2}\right] = 0 ? \Rightarrow$

∇ I valori che annullano il den sono $s = \pm jw \rightarrow$ non posso applicare il Teo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + w^2}\right] = \cos wt \sin(t)$$



Esempio con Laplace

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t) \quad y(0) = 0 \quad u(t) = \sin(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = ? \quad & \mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) - y(0) & \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \mathcal{L}[-y(t) + u(t)] =$$

$$\Rightarrow sY(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} \quad Y(s)(s+1) = \frac{1}{s} \quad Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Applicando le proprietà, abbiamo scritto l'uscita senza op. diff.

Ora antitrasformo, scomponendo $Y(s)$ con i fratti semplici

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1) + sB}{s(s+1)} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \sin(t)[1 - e^{-t}]$$

Sviluppo di Heavyside

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad \text{supponendo il caso in cui } n \geq m$$

① D(s) ha radici reali semplici

$$D(s) = a_n (s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n) \Rightarrow F(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s-p_n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha_i}{s-p_i} \right] = \alpha_i e^{p_i t} \cdot \text{scal}(t)$$

es:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1} = \frac{A+B}{s+1} = \text{non va bene perché non è radice semplice}$$

Autotrasformata di segnali con polinomi non semplici

Abbiamo $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha_i}{(s-p_i)^k} \right] = \alpha_i e^{p_i t} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \text{scal}(t)$

es nel caso di $k=2$ $\mathcal{L}^{-1} = \alpha_i t e^{p_i t} \text{scal}(t)$

② D(s) ha radici reali multiple

$$D(s) = a_n (s-p_1)^k (s-p_2) (s-p_3) \Rightarrow F(s) = \frac{\alpha_1}{(s-p_1)^k} + \frac{\alpha_2}{(s-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s-p_1)} + \dots + \frac{\alpha_m}{(s-p_m)}$$

③ $n=m$ $F(s) = \frac{s+1}{s+2} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_0 s + 2\alpha_0}{s+2} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = -1 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{-1}{s+2} + 1 \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -e^{-2t} \text{scal}(t) + \delta(t)$$

Quando ho $n=m \Rightarrow$ devo considerare un termine extra nella decomposizione

④ D(s) ha radici complesse coniugate

$$F(s) = \left(\frac{1}{s-p} \right) \left(\frac{1}{s-\bar{p}} \right) = \frac{1}{s^2 + b^2} = \frac{1}{(s-\sigma + j\omega)} \cdot \frac{1}{(s-\sigma - j\omega)} \quad \begin{aligned} \sigma &= \operatorname{Re}(p) \\ w &= \operatorname{Im}(p) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[K_1 \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right] = K_1 e^{\sigma t} \cos(\omega t) \cdot \text{scal}(t) \rightarrow \text{ricavato da } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{w^2 + s^2} \right] = \cos(\omega t) \text{scal}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[K_2 \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right] = K_2 e^{\sigma t} \sin(\omega t) \cdot \text{scal}(t) \rightarrow \text{ricavato da } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \sin(\omega t) \text{scal}(t)$$

Nel caso in cui $D(s) = a_n (s-p_1) \dots (s^2 + bs + c)$ $F(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \dots + K_1 \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} + K_2 \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$
in cui $\sigma = \operatorname{Re}(\bar{p})$ in cui $\bar{s}^2 + b\bar{s} + c = 0$ e $\omega = \operatorname{Im}(\bar{s})$

esempio

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + \dots}{s(s+6)(s+1)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + \dots}{s(s+6)(s+1)}$$

$$+ s(6\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3) + 6\alpha_1$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = -1/5 \\ \alpha_3 = -2/15 \end{cases} \quad f(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^{-6t} - \frac{1}{5} e^{-t} \right) \text{scn}(t)$$

es

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)^2} = \frac{\alpha_1}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+1} = \frac{\alpha_{12}(s+1)^2 + \alpha_{11}s(s+1)^2 + \alpha_{22}s^2 + \alpha_{21}s^2(s+1)}{s^2(s+1)^2} =$$

$$(s^4) \rightarrow \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -3 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_{21} = 3 \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

$$(s^3) \rightarrow \alpha_{12} + 2\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{21} = 0$$

$$f(t) = (2t - 3 + t e^{-t} + 3e^{-t}) \text{scn}(t)$$

$$(s^2) \rightarrow 2\alpha_{12} + \alpha_{11} = 1$$

$$(s') \rightarrow \alpha_{12} = 2$$

es

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \dots$$

$$\frac{\alpha_1 s + \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ \alpha_1 = h \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -h \end{cases}$$

$$f(t) = h \text{scn}(t) - e^{-t} \text{scn}(t) + f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \begin{cases} e^{-t} \text{scn}(t) \\ e^{-t} \forall t \geq 0 \end{cases}$$

es

$$F(s) = \frac{3s-4}{(s^2+2s+5)(s+2)} \quad \bar{s}_1 = -2 \quad \bar{s}_{2,3} = -1 \pm 2j \quad = \frac{\alpha}{s+2} + K_1 \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + K_2 \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{s^2 + 2\alpha s + 5\alpha + K_1(s+1)(s+2) + K_2 \cdot 2(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + K_1 = 0 \\ 2\alpha + K_1 + 2K_1 + 2K_2 = 3 \\ 5\alpha + 2K_1 + 4K_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ K_1 = 1/2 \\ K_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{-2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t) = (-2e^{-t} + 2e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t) \text{scn}(t)$$

Trasformata di Fourier

Dato $f(t)$ definito per $-\infty < t < \infty$ se $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ allora $F(j\omega)$ è detta trasformata di Fourier

$$\exists$$
 anche l'autotrasformata $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

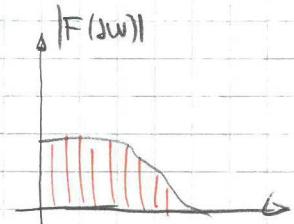
Data una trasformata di Laplace, quella di Fourier non è altro che Laplace con $s = j\omega \rightarrow$ è Laplace valutato lungo l'asse immaginario

Proprietà della trasformata di Fourier

$$1) F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} \text{ per segnali } f(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall t \leq 0$$

$$2) F(-j\omega) = \bar{F}(j\omega) \quad \text{indotta come } \mathcal{L}[F(j\omega)]$$

$$3) f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \text{fase di } F(j\omega)) d\omega$$



Possiamo vedere il segnale nel dominio del tempo come somma di componenti sinusoidali con un certo modulo ed una certa fase

Rappresentazione I/O \rightarrow Funzione di Trasferimento

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + Bu &\rightarrow \mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s) \\ y = Cx + Du &= sX(s) - AX(s) = BU(s) + x(0^-) \\ &= (sI - A)X(s) = BU(s) + x(0^-) \quad \text{multiplico a sx e dx per } (sI - A)^{-1} \end{aligned}$$

Non è detto che $(sI - A)$ sia invertibile (Nota: è funzione univocale e non univoca perché abbiamo s all'interno). L'inversione esiste quasi sempre.

Non è invertibile per numero n finito di valori di $s \rightarrow$ è genericamente invertibile

$$X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) + (sI - A)^{-1} \cdot x(0^-) \quad \text{scelgo di considerare } x(0^-) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad Y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = G(s)u(s) \quad \text{Funzione di trasferimento del sis}$$

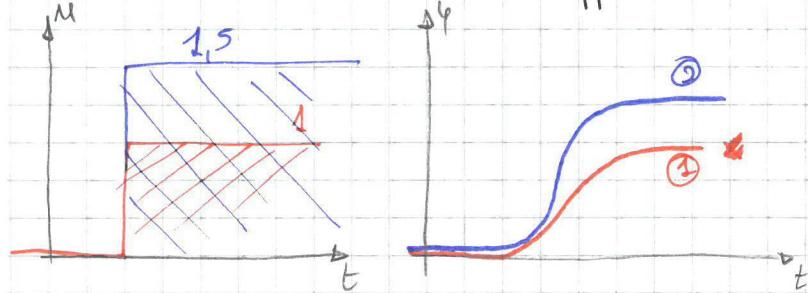
Possiamo definirla in due modi

$$1) FdT = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$2) FdT = G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} \quad \text{quando la C.I. è nulla}$$

La seconda definizione può essere utile per andare ad avere risultati senza costruire il modello matematico. Devo avere CI. nulle ed un sis lin.

Possiamo vedere se un sis lin applicando diversi scalini:



→ Il sis è lin se
 $\textcircled{2} = 1,5 \textcircled{1} \rightarrow$ se c'è una relazione
 lin in-out, guardandola sperimentalmente

Anche se le CI $\neq 0$, se il sis è AS allora le CI tenderanno in
 maniera assintotica a zero (movimento libero) quindi posso anche non necessariamente avere $CI = 0$. Perciò ho 3 possibili:

• calcolo $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ • moltiplico $y(s) = G(s)U(s)$ • calcolo $\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = y(t)$

Il punto 1,3 sappiamo già fatti (il 3 tramite Heaviside).

Vediamo come calcolare il ptg 2:

Esempio

$$U(s) \xrightarrow{G(s)} Y(s) = \frac{1}{s+3} \quad u(t) = e^t \operatorname{sen}(t) \quad ? y(t).$$

$$\mathcal{L}[e^t \operatorname{sen}(t)] = \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\text{c } \frac{1}{s}} \frac{1}{s-1} \rightarrow y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$$

↳ trasformazione deln trasformatore

$$\text{Perciò } y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3) + B(s-1)}{(s-1)(s+3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \dots \\ B = \dots \end{array} \right\} \rightarrow y(t) = \frac{1}{4} (e^t - e^{-3t}) \operatorname{sen}(t)$$

Vediamo che l'uscita nel tempo ha due termini che sono i modi del sis + i modi di ingresso → izy pizi

cs

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad A = 0 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 0 \quad G(s) = C(s - A)^{-1} B + D \Rightarrow$$

$$\rightarrow 1(s-0)^{-1} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{s}$$

Nota: $\frac{1}{s}$ è $\operatorname{sen}(t)$ nel caso di un segnale. Nel caso dell'interpretazione di un'operatore di sistema (fdt), $\frac{1}{s}$ è l'integrazione

es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = [0]$$

$$C(s) = C(SI - A)^{-1} B + \cancel{D} = [1 \ 0] \cancel{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = [1 \ 0] \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} [s \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \rightsquigarrow \text{integro due volte}$$

VB:

$$\frac{1}{s^2} \text{ come segnale} = \text{RAMPA} \quad \frac{1}{s^2} \text{ come sis} = \text{DOPPIO INTEGRATORE}$$

Intuisco che la fdt sarà sempre scrivibile come $\frac{\text{NUMERATORE}(s)}{\text{DENOMINATORE}} = C(s)$

In cui il DEN è figlio diretto del det $(SI - A)$

ma $(SI - A)$ è legato direttamente al polinomio caratteristico *lungo*

es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_2 + 5u \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1] \quad D = 5$$

$$C(s) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5$$

$$= \frac{1}{s(s+2)+4} [0 \ 1] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \begin{bmatrix} -4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 = \frac{-8 + s + 5(s^2 + 2s + 4)}{s^2 + 2s + 4} \neq \frac{5s^2 + 11s + 12}{s^2 + 2s + 4} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

grado $N(s) = 2 \rightsquigarrow$ il grado 2 è legato al passaggio * in cui il termine noto viene moltiplicato per il $D(s)$.

Non c'è modo di ottenere grado $N(s) >$ grado $D(s)$ perché abbiamo appena visto che $N(s)$ è legato a $D(s)$. Se uno avesse avuto il termine noto D , avremmo avuto $N(s)$ di grado 1

Verdiamo un altro metodo risolutivo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (n \geq m)$$

è un'eq. diff. di ordine n

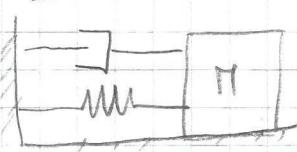
Calcolo FdT ($x(0)=0$) $\Rightarrow \frac{dy}{dt^i} \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall i \leq n-1$

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \dots + b_0 u(s)$$

$$y(s) (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = u(s) (b_m s^m + \dots + b_0)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

es



y = posizione

$$M\ddot{y} = -K_y - c\dot{y} + u \quad (M\ddot{y} + K_y + c\dot{y}) = u$$

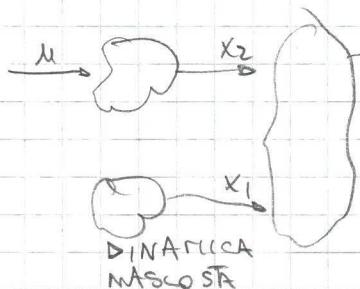
$$(Ms^2 + cs + k) y(s) = u(s) \quad \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms^2 + cs + k} \quad \text{→ trovato } G(s)$$

cs

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad G(s) = C(SI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

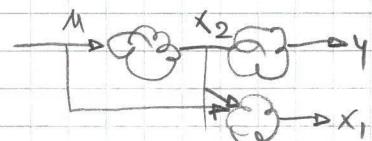
$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad \text{CANCELLAZIONE!}$$



In questo caso ho un polo nascosto, che si riflette nell' $G(s)$ come cancellazione di un zero e un polo

es

$$C(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(s+1)}{(s-1)} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$



L'atto algebrico della cancellazione porta ad una perdita di informazione contenuta nella rappresentazione degli spazi di stato.

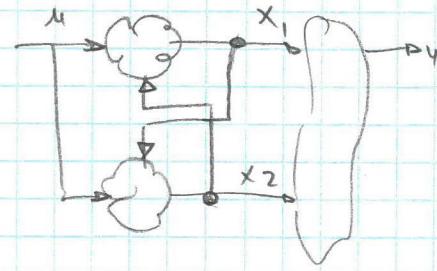
Nota: se non ho cancellazioni nel calcolo del FdT, il sis è detto completamente raggiungibile e osservabile

Nell'ultimo esempio infatti, x_2 non è osservabile a causa della cancellazione.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ -26 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -13x_1 + 7x_2 + 5u \\ x_2 = -26x_1 + 13x_2 + 9u \\ y = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$



Così a prima vista, dallo schema, sembra di essere

di fronte ad un sis perfettamente raggiungibile, un calcolando $G(s) = c(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1} = \frac{N(s)}{D(s)}$
C'è stata ovviamente una cancellazione, perciò:

Se e solo se c'è cancellazione \Rightarrow sis non osservabile

Dallo schema possiamo dedurre che esso non è affidabile come "test" di raggiungibilità. A cosa a capire meglio cosa succede. L'unico test veritiero è solo mediante il calcolo di $G(s)$

Osservazioni e definizioni su FdT

1) $G(s)$ è sempre scrivibile come $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$

2) $D(s)$ può sempre essere reso monico: il 1° termine $a_n = 1$, quindi:

$$G(s) = \frac{\frac{b_m}{a_n} s^m + \dots + \frac{b_0}{a_n}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}}$$

⊗ il nuovo " a_n " è uinario

3) Se $m < n$ il sis è strettamente proprio ($D=0$)

Se $m = n$ il sis è proprio ($D \neq 0$)

Se $m > n$ il sis è improprio ↗

4) POLE di $G(s)$: valori di s t.c. $|G(s)| = \infty$ (sono le radici di $D(s)$)

5) ZERI di $G(s)$: i valori di s t.c. $|G(s)| = 0$ (sono le radici di $N(s)$) ↗ SINGolarità

6) Se \bar{s} è polo di sis \Rightarrow è autovettore di A (non vale l'opposto perché ci

pô essere una cancellazione, posso farlo solo quando sis completamente raggiungibile)

7) Se \bar{s} è autovettore di A e sis è perfettamente raggiungibile e osservabile \Rightarrow

\bar{s} è polo di $G(s)$

8) Cancellazioni \rightarrow critiche $\operatorname{Re}[\bar{s}] \geq 0$

→ non critiche $\operatorname{Re}[\bar{s}] < 0$

Sfibilità interna

Sfabilità Bibo (Bounded in/bounded out)

Se AS interamente stabile \Rightarrow Bibo STABILE

AS interamente stabile \Leftrightarrow Bibo STABILE + cancellazioni sono non critiche

$$\text{INST} \Leftrightarrow \text{BIBO INST}$$

$$\text{INST} + \text{una ho cancellazione} \Rightarrow \text{BIBO INST}$$

Rappresentazione delle FdT

$$1) G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0} \text{ no monico}$$

$$2) G(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i)}$$

\rightarrow poli e zeri in evidenza

ρ = costante di trasferimento

z_i = zeri p_i = poli

$$3) G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^q (1 + s T_i)}{\prod_{i=1}^r (1 + s \tilde{T}_i)}$$

\rightarrow evidenza delle costanti di tempo

T_i e \tilde{T}_i = costanti di tempo degli zeri e dei poli

g = tipo della FdT

μ = guadagno generalizzato

$$\tilde{T}_i = -\frac{1}{p_i} \quad T_i = -\frac{1}{z_i}$$

es

$$G(s) = \frac{4s+4}{s^2+2s-8}$$

zeri: $\tilde{T}_1 = -2$ poli $s^2 + 2s - 8 = 0 \Rightarrow \tilde{p}_1 = 2 \quad \tilde{p}_2 = -4$

$$= \frac{4(s+1)}{(s-2)(s+4)} = \frac{4(1+s)}{-2 \left(1 - \frac{s}{2}\right) \cdot 4 \left(\frac{s}{4} + 1\right)} = -\frac{1}{2} \frac{(1+s)}{\left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{4}\right)}$$

$\rightarrow \mu$: guadagno generalizzato

$$\frac{s+3}{s^2-2s} = \frac{s+3}{s(s-2)} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\rightarrow \mu = -\frac{3}{2}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{\left(1 - \frac{s}{2}\right)}$$

$\frac{1}{ss}$ in cui g è il tipo della FdT

Klaus

Cosa intendiamo per guadagno generalizzato?

$$G(s) \xrightarrow{u} [G] \rightarrow y \quad u = \text{cost}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{con l'ingresso costante} \rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \rightsquigarrow L^{-1} \text{ e poi } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y} \text{ valore finale}$$

Posso anche usare un'autovariazione \rightarrow teorema val. finale $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot s$

perciò se $\exists \bar{y}$ allora $\bar{y} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ \rightsquigarrow valore finale dipendente da un valore specifico della FdT

Questo valore è $G(0) = \text{guadagno del sis}$ in questa scrittura

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\substack{\text{regime} \\ \text{transitorio}}} \underbrace{\frac{\prod (s + s_i)}{\prod (1 + s_i)}}_{\substack{\text{transitorio}}} = \rho \frac{(s - z_i)}{(s - p_i)} \quad \text{Abbiamo il vantaggio di separare} \rightarrow \text{tra regime e transitorio}$$

Il tipo del sis gli mi tiene conto dei poli all'origine $\rightarrow P_R = 0$

Realizzazione di un FdT

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{C(sF - A)^{-1}B + D} [G(s)] \quad I/O \rightarrow \text{posso tornare indietro?}$$

Il percorso inverso è di quanto REALIZZAZIONE: data FdT cerco A, B, C, D che abbiano come FdT quella di partenza.

• Ho infinite A, B, C, D nella realizzazione perché, da come visto in precedenza, basta avere un cambio variabile e ho ∞ rappres. in spazio di stato.

• Inoltre ho anche il fatto della cancellettazione, non presente in $G(s)$ quindi non posso "recuperare" l'informazione persa durante il passaggio. Infatti

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{(s - p_i)}{(s - p_i)} \quad \Rightarrow U(s) \text{ non cambia da } G(s)$$

Tornando indietro, ho due rappres. diverse.

Def: Una realizzazione (A, B, C, D) si dice MINIMA se $n = \text{grado del denominatore di } G(s)$

Una realizzazione minima è completamente raggiungibile e osservabile \Leftrightarrow CANCELLAZIONI NO

Forme canoniche di Realizzazione

1) Forma canonica di controllo

Definisco $G(s)$ come $G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} + d$ terme nullo

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

\rightarrow SIS

es

$$G(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^2 + 4s + 3} + 2 = \frac{2s^2 + 1 - 2s^2 - 8s - 6}{s^2 + 4s + 3} + 2 = \frac{-8s - 5}{s^2 + 4s + 3} + 2$$

$\begin{matrix} b_1 & b_0 \\ a_1 & a_0 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$

2) $C_c(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + d$

La forma canonica di osservabilità è

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_o = \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

Per verificare: $A_o = A_c^T \quad B_o = C_c^T \quad C_o = B_c^T \quad D_o = D_c$ \rightarrow Vale solo per SIS SISO

Osservabilità canonica

$$G(s) = C_o(sI - A_o)^{-1}B_o \quad G(s) = G(s)^T \quad G(s)^T = [C_o(sI - A_o)B_o]^T = B_o^T((sI - A_o)^{-1})^T C_o^T =$$

$$= C_c(sI - A_c^T)^{-1}B_c = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$$

$$\begin{cases} A_o = A_c^T \\ B_o = C_c^T \\ C_o = B_c^T \\ D_o = D_c \end{cases}$$

$$Z = T_x$$

con T non singolare
vale anche per
SIS MIMO

\rightarrow Abbiamo una dualità

Solo per SIS

Sistemi a blocchi

Abbiamo la serie/parallelo/retroazione

• Serie $\xrightarrow{u_1} [S_1] \xrightarrow{u_2} [S_2] \rightarrow y_2 \rightsquigarrow u_1 = u \quad y_2 = y \quad u_2 = y_1$

$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \Rightarrow G_1(s)$ per semplicità dei conti particolarmente $D_1 = D_2 = 0$

$S_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow G_2(s)$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$

→ Nuova rapp. spazio di stato in cui $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$

Gli autovetori del sis completo = {autovetori}_{S₁} ∪ {autovetori}_{S₂} (A causa della matrice A) che è triangolare a blocchi

La serie non cambia le proprietà di stabilità

$y_1(s) = G_1(s) U_1(s)$ $\Rightarrow y_2(s) = G_2(s) U_2(s) \Rightarrow Y(s) = G_1(s) G_2(s) U(s)$ prodotto delle FdT

$G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \cdot \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$

Esempio

$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + u \\ y = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{cases} \rightarrow G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$ → non ho auto cancellaz.

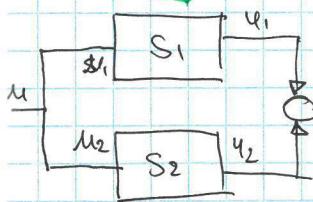
$S_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ y = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \rightarrow G_2(s) = \frac{s-1}{s^2 + 6s + 3}$ → numero g/a ci sono cancellaz.

$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \cdot \frac{s-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ → cancellazione → La serie risulta

in un sis non più regolare oss.

La cancellazione mi avvisa che devo avere più info per controllare il sis perché così come la situaz. attuale le info sono tali da non poter controllare tutto in maniera chiara.

• Parallello



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

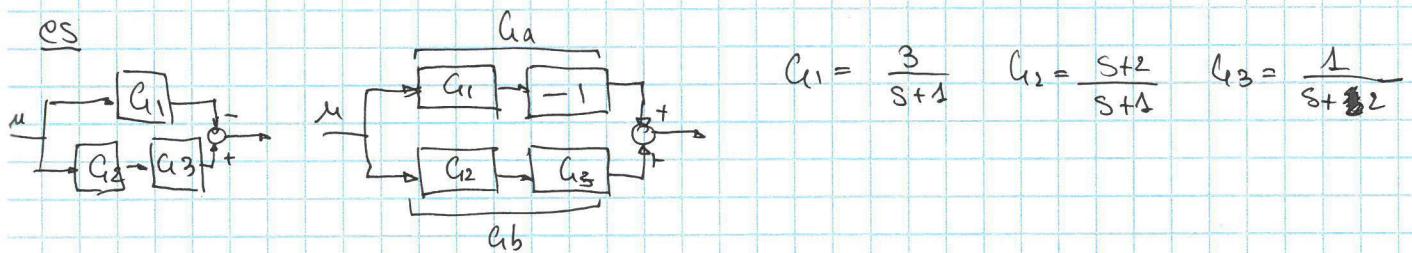
Come nella serie, mantiene la stabilità di A perché gli autovettori sono A_1 e A_2 grazie alla diagonalità della matrice A \Rightarrow non cambia le proprietà di stabilità.

$$Y(s) = C_1(s) U_1(s) + C_2(s) U_2(s) = U(s) \underbrace{[C_1(s) + C_2(s)]}_{G(s)} \rightarrow \text{saturn}$$

$$C_p(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s) D_2(s) + N_2(s) D_1(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$

Per avere una cancellazione, deve esserci un termine comune agli addendi che sia poi raccoglitibile e cancellabile con un termine del denominatore.

Possiamo pure combinare serie e // delle fati:



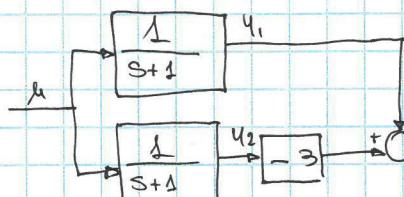
$$G_a = \frac{-3}{s+1} \quad G_b = \frac{8+s}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \quad \text{cancellaz. non critica (polo con Re<0 \rightarrow no prob)}$$

$$\cancel{G} \quad G = \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{s+1} \quad \cancel{\text{il raccoglimento } (-3+1) \text{ ha provocato una cancellazione da qualche parte}}$$

Ho perso uno stato nel sis che non è ass. nell'uscita

Ho lo stesso ingresso $\rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow$ ho l'informat. ridondante. Sto perdendo il grado di libertà

corrispondente alla C.I. I due shorti, all'uscita risultano uniformanti, ma all'inizio potrebbero avere CI diverse.

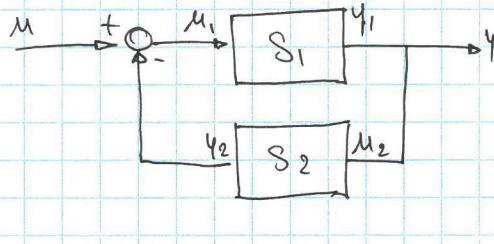


Infatti la rappres I/O suppone (e implica) che le CI siano tutte \rightarrow

ecco il motivo della cancellazione anche se non è totalmente esplicita eliminando termini di $N(s)$ e $D(s)$ (infatti abbiamo raccolto in un'unica non critica)

Retroazione

$$y = y_1 \quad M_1 = M - y_2 \quad M_2 = y_1$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - C_2 x_2) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

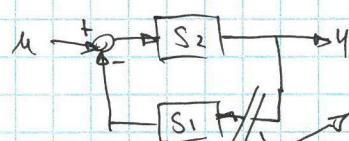
$$Y(s) = Y_1(s) = G_1 U_1(s) = G_1 (U(s) - Y_2(s)) = G_1 (U(s) - Y(s) \cdot G_2)$$

$$Y(s) = \frac{G_1}{1 + G_2 G_1} U(s) \quad G(s) = \frac{\text{linea di audata}}{1 + \text{FdT dell'anello}} \quad \text{è la def generalizzata}$$

I) \oplus = retroazione negativa \ominus = retroazione positiva \rightarrow determinante del nodo sommazione

linea di audata = modo diretto per andare da ingresso a uscita, ignorando la retroazione

FdT ad anello = taglia l'anello chiuso (prima bisogna identificarlo) e calcola la FdT nel pto di taglio. Così facendo non c'è più retroazione \rightarrow si riuniscono solo serie e paralleli:



\rightarrow taglio e vedo che S_2 è in serie a $S_1 \rightarrow G_1 \cdot G_2$

La FdT ad anello vale anche per sistemi a blocchi più complessi

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{linea di audata}}{1 + \text{FdT dell'anello}} = \frac{C_1}{G_1 G_2 + 1} = \frac{N_1}{D_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{N_2 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2}$$

i poli sono S t.c. $D_1 D_2 + N_1 N_2 = 0$ \rightarrow i poli non si conservano più

\rightarrow Non ci sono cancellazioni tra poli e zeri. Ci sono cancellazioni diverse nelle retroazioni. Queste sono passaggi algebrici che non dimenticano l'informazione tot.

Attraverso la retroazione posso: SIS STABILI CON INSTABILI \rightarrow STABILIZZAZIONE
SIS ~~INSTABILI~~ CON SIS STAB \rightarrow generare instabilità

es

$$G(s) = \frac{G_1 \cdot (G_2 + G_3)}{1 + G_1(G_2 + G_3)G_4 G_5}$$

Risposte a ingressi canonici

DATA UNA $G(s)$ calcolare alcune proprietà della risposta allo scatto, senza calcolarla

in forma chiusa

μ

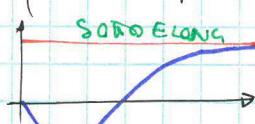
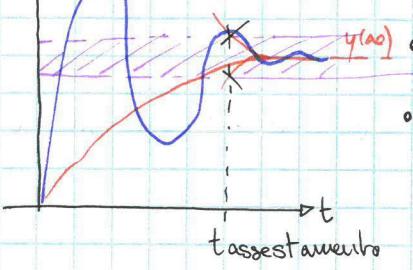
PROPRIETÀ

$u(\infty)$

- $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

- tempo di assestamento $t.a$: $|y(t) - y(\infty)| \leq \varepsilon y_\infty \quad \forall t > t.a$ \Rightarrow tassestamento

- oscillazioni? Se sì: ? periodo (frequenza) ? sovraccarico dell'oscillaz?



1) Integratore $G(s) = \frac{1}{s}$



è un rampa con $y(t) = \mu \cdot t$

2) Sis con 1 polo $G(s) = \frac{1}{s+T}$ $p = -\frac{1}{T} < 0 \Rightarrow AS$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \cdot \frac{1}{s} = \mu$$

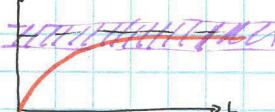
$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) \cdot \frac{1}{s} = 0$$

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu}{s} + \frac{1}{s+T} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{T}} = \frac{A \left(s + \frac{1}{T} \right) + Bs}{s \left(s + \frac{1}{T} \right)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{A}{T} = \frac{\mu}{T} \end{cases}$$

$$A = \mu \quad B = -\mu$$

$$y(t) = \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



Calcoliamo il tempo d'assestamento $y(t_a) = 0,99\mu \quad \mu(1 - e^{-\frac{t_a}{T}}) = 0,99 \mu$

$$t_a = -\frac{\ln(0,01)}{\approx 4,6} T \quad t_a \approx 5 T$$

3) Due poli reali coincidenti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$$

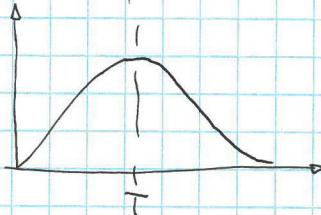
$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu}{(1+sT)^2} = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s}{(1+sT)^2} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \mu$$

Hansipide $\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT} + \frac{C}{(1+sT)^2} \right] = \left[\mu - \mu e^{-\frac{t}{T}} - \mu \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \text{sen}(t)$
 è un sis del 1° ordine

Oltre alla parte del 1° ordine abbiamo un punto $+\mu \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, analizziamo:



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) = 0 \quad \text{per } t=T$$

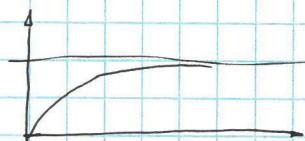
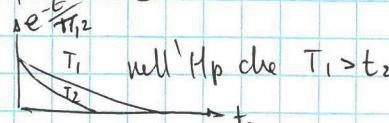


4) Poli reali distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad T_1 \neq T_2 \quad T_1, 2 > 0 \quad \mu > 0$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y(\infty) = \mu \quad y(s) = \frac{A}{s+T_1} + \frac{B}{s+T_2}$$

$$y(t) = \mu \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\frac{-t}{T_2}} \right] \text{sen}(t)$$



$$ta = 5 \frac{T_2}{T_1 - T_2} \rightarrow \text{cinque volte il tempo maggiore (il più lento)}$$

$$e^{-\frac{t}{T_1}} \text{ dominio} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

5) Poli reali distinti e uno zero

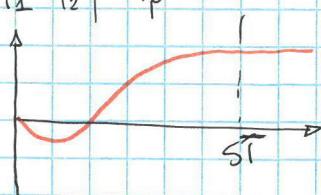
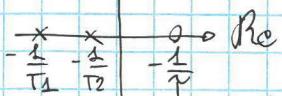
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

caso $\gamma < 0$

valore init

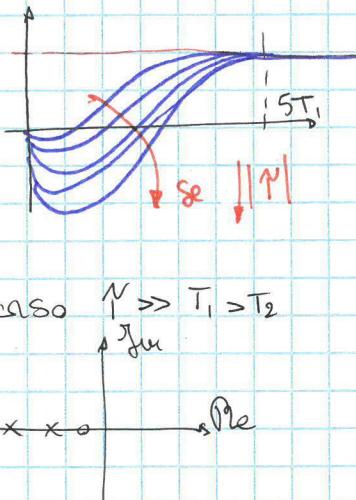
$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s^2}{T_1 T_2} = \frac{\mu \gamma}{T_1 T_2}$$



abbiamo un sottoesborazione un il tempo d'assestamento non cambia

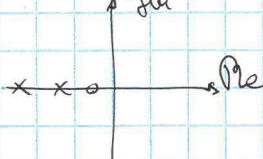
Questo è detto comportamento a fase non minima



più c'è alto γ , più abbiano sovraettagione

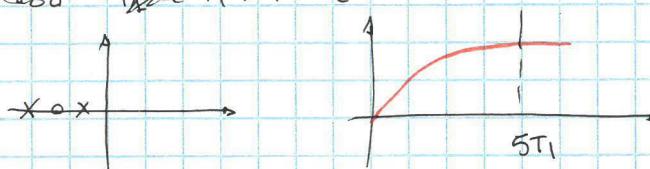
Sto giro ottengo un sovraettagione

- caso $\gamma \gg T_1 > T_2$



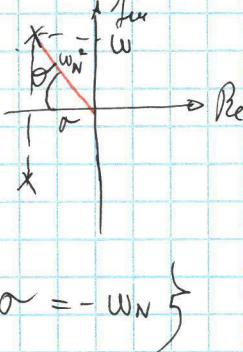
Più sale γ , più la risposta scatta verso l'alto

- caso $T_1 > \gamma > T_2$



Questo è il caso più semplice

b) Poli complessi e coniugati



$$\operatorname{Re}[\text{pole}] = \sigma \quad \operatorname{Im}[\text{pole}] = \pm j\omega$$

$$D(s) = (s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega) = \\ = s^2 - 2\sigma s + \frac{(\omega^2 + \sigma^2)}{\omega_N^2}$$

$$\omega_N = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \quad \text{pulsazione naturale} \\ \cos(\theta) = \frac{\sigma}{\omega} \quad \text{soranzamento}$$

$$\sigma = -\omega_N \frac{j}{\zeta}$$

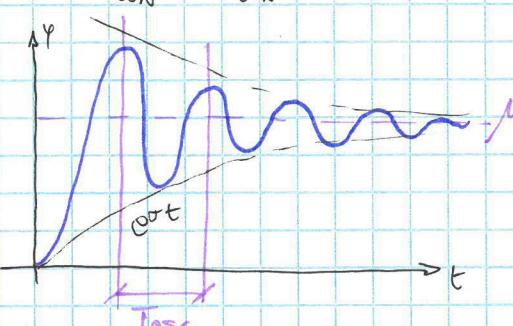
$$\omega^2 = \omega_N^2 - \sigma^2 = \omega_N^2 - \omega_N^2 \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1} = \omega_N^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1}\right) \quad \omega = \omega_N \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1}}$$

$$D(s) = \omega_N^2 \left(\frac{1}{\omega_N^2} s^2 + 2 \frac{\zeta}{\omega_N} s + 1 \right)$$

$$G(s) = \frac{\mu}{\frac{s^2}{\omega_N^2} + 2 \frac{\zeta s}{\omega_N} + 1}$$

$$y(t) = \mu \left[1 - e^{-\sigma t} \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) \right] \sin(\omega t)$$

$$T_{ASSEST} = \frac{5}{\sigma} \quad \sigma = -\omega_N \frac{j}{\zeta} \rightarrow T_{AS} = +\frac{5}{\omega_N \frac{j}{\zeta}} \\ \text{cartesiano} \quad \text{polare}$$

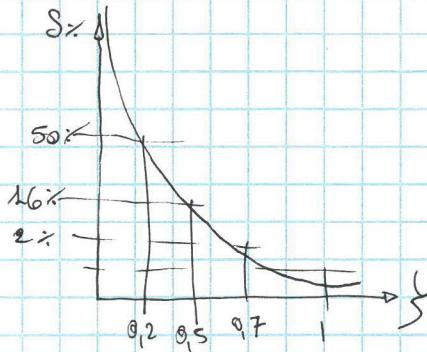


$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_N \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

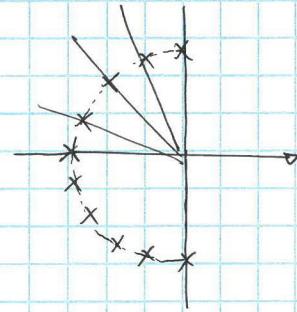
$$\#_{osc} = \frac{T_A}{T_{osc}} = \frac{5}{\omega_N \frac{j}{\zeta}} \frac{\omega_N \sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$S\% = 100 e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad \text{dipende solo dalla soranzamento}$$

sovraettagione percentuale



Quanto minore alle dimensioni le oscillazioni più avvicina sempre di più verso due poli completamente immaginati



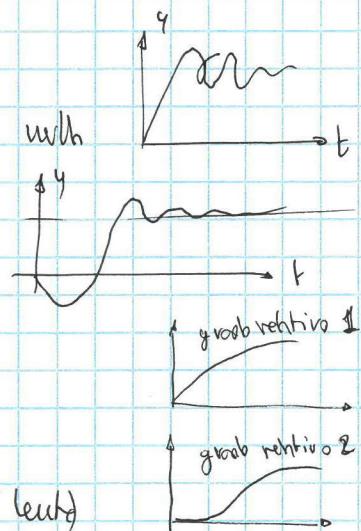
A $\zeta = 0.7$ se la sottrazione è maggiore le oscillazioni sono troppo lunghe per essere visibili (n^o oscillaz < 1)

per $\zeta < 0.7$ abbiano oscillazioni

$$7) \tilde{G}(s) = \frac{\mu(1+sT)}{s^2 + 2\zeta\frac{\mu}{\omega_n} s + 1}$$

Se la zera è stabile una succede molti

Se invece la zera è instabile:



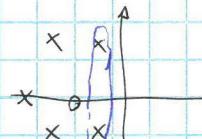
Aprossimazione poli dominanti

Dato $G(s)$ voglio trovare $\tilde{G}(s)$

- valore finale $\bar{y} = v.f. G$ ($\mu = \bar{\mu}$)
- iniziali $\bar{y} = v.i. G$ (conservare grado relativo $\bar{y}_i = 0$)
- trascurare (uguali poli dominanti mantenere le costanti di tempo più lenti)
- oscillare (uguali ω_n e ζ dei poli dominanti)
- sopra/sottoadattata (zeri a destra del polo dominante)

es:

Partiamo dalla mappa dei poli e degli zeri nel piano complesso.

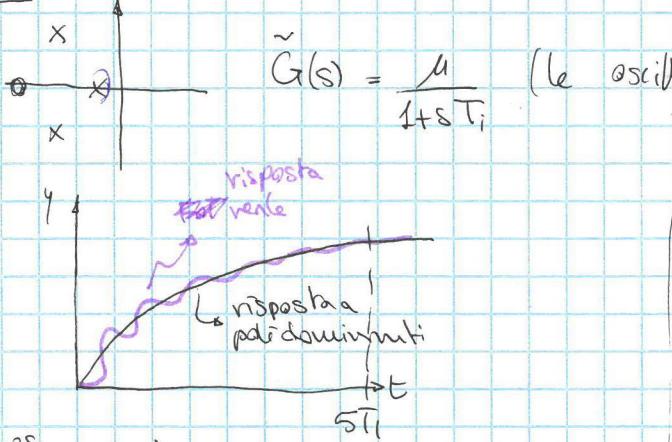


Assumo che il guadagno di quel $F(s)$ è $G(s) = \mu$

Ho grado rel. 4 quindi uno zero che mi preoccupi. (Lo zero uno è determinante, perciò):

$$\tilde{G}(s) = \mu \frac{1}{s^2 + 2\zeta\frac{\mu}{\omega_n} s + 1}$$

es:



$$\tilde{G}(s) = \frac{\mu}{1+sT_1} \quad (\text{le oscillazioni spariscono prima della fine transitorio})$$

$$\text{es } G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+5)} \quad \tilde{G}(s) = \frac{3}{(s+2)}$$

$$\text{es } \tilde{G}(s) = \mu \frac{(1+sT_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

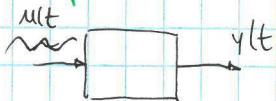
Ritardo di tempo

$$\rightarrow [G_0] \rightarrow y(t) \quad y(t) = u(t - T_{\text{RITARDO}}) \quad Y(s) = U(s) e^{-sT_{\text{RIT}}}$$

$$G_D = e^{-sT_{\text{RIT}}} \quad \text{posso combinare più sis con le stesse regole!}$$

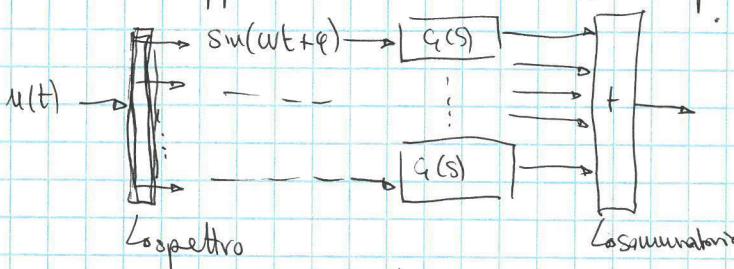
$$\rightarrow [G_1] \rightarrow [RIT] \rightarrow [G_2] \rightarrow G_{\text{TOT}}(s) = G_1(s) \cdot e^{-sT_{\text{RIT}}} \cdot G_2(s)$$

Risposte a ingressi sinusoidali



È utile studiare questa risposta perché segnali alteranti e periodici possono essere sovrapposti con i criteri.

Vale la sovrapposiz delle cause ed effetti perché è un sis lin.



Consideriamo $u(t) = e^{\gamma t} \sin(\omega t)$ e non è autorev di A

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \exists \text{ una } C_1 \text{ t.c. } x(t) = \underbrace{\hat{x}(0)}_{[e^{\gamma t}]} e^{\gamma t} ? \quad \text{condiz iniz } \hat{x}(0)$$

$$\dot{x}(t) = \hat{x}(0) \cdot \int e^{\gamma t} dt = A \hat{x}(0) e^{\gamma t} + B e^{\gamma t} \quad (\because I - A) \hat{x}(0) = B$$

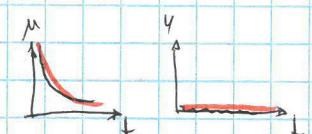
$$\text{Se } \hat{x}(0) = (\gamma I - A)^{-1} B \text{ allora è vero che } x(t) = \hat{x}(0) e^{\gamma t}$$

$$y = Cx + Du = C(\gamma I - A)^{-1} B e^{\gamma t} + D e^{\gamma t} = [C(\gamma I - A)^{-1} B + D] e^{\gamma t} \Rightarrow e^{\gamma t} \text{ la FdT vnlhlna}$$

$$\text{per } s = \gamma \Rightarrow = G(\gamma) e^{\gamma t}$$

Vediamo il significato degli zeri:

$$\rightarrow [G(s)] \rightarrow \text{Zeri di } G(s) \quad u(t) = C \frac{f(t)}{G(s)} \quad \exists ! \hat{x}(0) = C(\gamma I - A)^{-1} B$$



Se ho un ingresso un exp che ha come coefficiente lo zero, in uscita non si vede niente

Questo è il potere bloccante degli zeri

Ho ora l'ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ $\tilde{u}(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ mi aspetto che

l'uscita sia $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1 + j \tilde{y}_2$ dove $\tilde{y}_1 = \text{uscita di } G(s) \text{ con ingresso } \cos(\omega t)$
 $\tilde{y}_2 = \text{uscita di } G(s) \text{ con ingresso } \sin(\omega t)$

Perciò se ho $u(t) = \sin(\omega t)$ allora $y(t) = \text{Im}[\tilde{y}(t)]$

$$1) \text{ considero } \tilde{x} = e^{j\omega t}$$

$$2) \text{ scelgo } \tilde{x}(0) = (\text{j}\omega I - A)^{-1}B \Rightarrow \tilde{y}(t) = G(j\omega)e^{j\omega t} \quad G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$3) y(t) = \text{Im}[\tilde{y}(t)] = \text{Im}[|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} e^{j\omega t}] = |G(j\omega)| \text{Im}[e^{j\{\omega t + \angle G(j\omega)\}}] = \\ = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Teorema della risposta in frequenza

Hp ① Sia $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$

② (A, B, C, D) sis LTI t.c. $j\omega$ non sia autovalore di A

$$\exists! x(0) = (j\omega I - A)^{-1}B \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \psi) \text{ dove } Y = |G(j\omega)|U \quad \psi = \varphi + \angle G(j\omega)$$

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \stackrel{a}{=} \text{Risposta in frequenza del sis (R.F.)}$$

corollario se il sis è AS (A è AS) ~~allora~~ $\Rightarrow y(t) \rightarrow Y \sin(\omega t + \psi) \quad \forall x(0)$

3) $G(j\omega)$ funzione complessa di variabile reale ω

2) $G(s)$ f complesso di var complessa

3) R.F. è def per tutti i sis lin.

$$\text{es } G(s) = \frac{1}{s+T} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

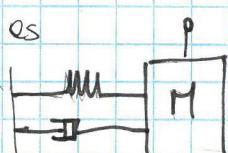
modulo

se $\omega^2 T^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)| \approx 1$
 se $\omega^2 T^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega T}$

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

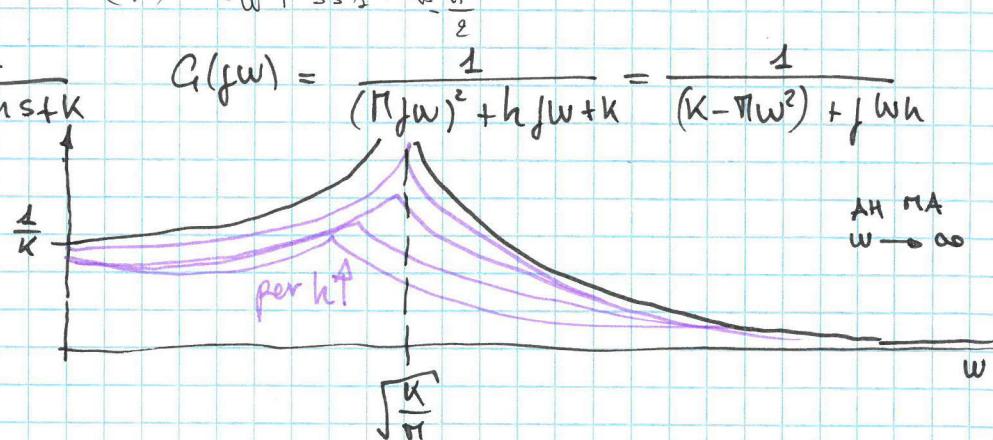
$$\angle [G(j\omega)] = -\angle [1+j\omega T] = -\alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{1} \right)$$

$\omega T \ll 1 \rightarrow 0$
 $\omega^2 T^2 \gg 1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$



$$G(s) = \frac{1}{M s^2 + h s + K}$$

Questo quanto applica una forza sinusoidale



Il fenomeno è detto di risonanza

Ripasso della teoria

- definizione del problema di controllo

- controllo A.A : modello unidimensionale, tempi risposta, disturbi'
- controllo A.C: robustezza, stabilizzazione in retroazione

- classificazione dei sis: statico/dinamico (con def variabile di stato)

SIS / MTC

ordine

lin / non lin

temp.var / temp.invar

proprio / strett. proprio

$$\text{SIS DIN} \rightarrow \text{def movimento, calcolo } \rightarrow x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

exp di matrice

A diagonale
 A diagonalizzabile $T^{-1} \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} T$
 A triangolare / tri. a blocchi/
~~non diagonalizzabile~~

Rappresentazioni equivalenti $\dot{x} = Ax$ con $\det T \neq 0$

linearizzazione

STABILITÀ → definizioni (stab, inst, as), stabilità alla Lyapunov o interva

SIS LIN → 3 teoremi $\forall \lambda_i: \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff A \text{ stab}$

senza calcolo autovalori Routh

per 2° ordine $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$
 a_0, a_1, a_2 concordi $c > 0$

STAB per i non lin: stabilità degli equilibri linearizzazione

teorema di Lyapunov

- trasformata di Laplace - definizione $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} f(t) dt$

- proprietà: (linearietà / traslat. nel tempo / derivaž nel tempo / integrale nel tempo)

- trasformate notevoli:

$$\frac{1}{s^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sin(t) \quad (\text{impulso, rampa, scoline})$$

$$\frac{1}{s-a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \text{scal}(t)$$

$$\frac{1}{(s-a)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \text{scal}(t)$$

$$\frac{w}{(s-a)^2 + w^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \sin(wt) \cos(t)$$

$$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \cos(wt) \text{scal}(t)$$

- teorema V.I, V.F
- antitrasformante con Heavyside: poli semplici/multipli/complessi / con strettamente connessi / proprio

FdT: obj: → calcolo di A,B,C,D)

→ rapporto tra trasformate di Laplace $C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

• osservabilità e controllabilità $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
se ci sono cancellazioni → non oss e controllabile
senza → perfettamente oss e controll

cancellazioni → critiche
non critiche

Stabilità FdT e interna

- rappresentaz. di FdT: polinomi estesi / singolarità o costanti di tempo raccolte

- Calcolo risposte allo scalino: integrazione / singole poli / poli multipli coincidenti / poli c.c.

effetto degli zeri

→ approx poli dominanti: t. ass/v. f / v. i / oscillaz periodo
n° oscillaz
sopra-sotto ebang
ampiezza relativa
del picco

- Risposta in frequenza

- teorema (Carrolliano) ← NB il Carrolliano

- effetto bloccante degli zeri

- calcolo $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ → modulo

→ fase

es tipico " dato $G(s)$ A.S, calcolare l'uscita a regime con $u(t) = \sin(\omega t)$ "

- Schemi a blocchi: serie/ parallelo/ retroazione stabilità

Rappresentazione grafica risposta in frequenza

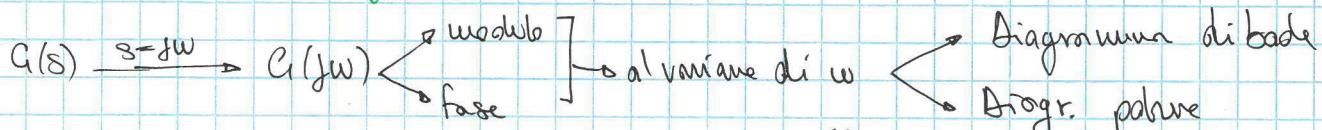


Diagramma di bode
Diagr. polare

Diagramma di Bode del modulo

$$|G(jw)| \xrightarrow{20 \log_{10}} |G(jw)| = |G(jw)| \text{ dB}$$

w è considerato su scala log

$$\text{Se } |G(jw)| = 1 \sim |G(jw)| \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^2} \prod_i \frac{(1 + s\tau_i)}{(1 + sT_i)} \prod_i \left(1 + \frac{\beta_i s + s^2}{\alpha_i^2} \right)$$

$$G(jw) = \frac{\mu}{jw^2} \prod_i \frac{(1 + jw\tau_i)}{(1 + jwT_i)} \prod_i \left(1 + \frac{\epsilon \beta_i jw - w^2}{\omega_n^2} \right)$$

$$|G(jw)| = \frac{|\mu|}{|s^2|} \prod_i \frac{|1 + jw\tau_i|}{|1 + jwT_i|} \prod_i \left| 1 + \frac{\epsilon \beta_i jw - w^2}{\omega_n^2} \right|$$

$$|G(jw)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |\mu| - 20 \log_{10} |jw|^2 + \sum_i 20 \log_{10} |1 + jw\tau_i| - \sum_i 20 \log_{10} |1 + jwT_i| +$$

$$+ \sum_i \left| \log_{10} \left| 1 + \frac{\epsilon \beta_i jw - w^2}{\omega_n^2} \right| \right| - \sum_i 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{\epsilon \beta_i jw - w^2}{\omega_n^2} \right|$$

Casi

$$1) G(jw) = \mu \quad |G(jw)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |\mu| \text{ è una retta}$$

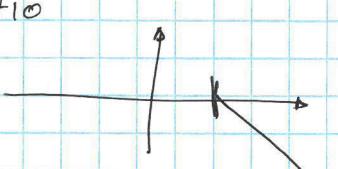
Se $\mu > 1 \quad |G(jw)|_{\text{dB}} > 0$

$$2) G(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow G(jw) = \frac{1}{|jw|^2} \quad |G(jw)|_{\text{dB}} = -20 \cdot \log_{10} |jw|$$

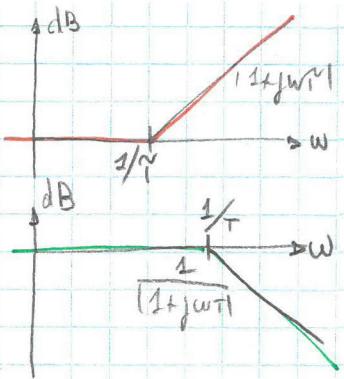
Se $\mu < 1 \quad |G(jw)|_{\text{dB}} < 0$

$$3) G(s) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow |G(jw)|_{\text{dB}} = +20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+w^2T^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1+w^2T^2}$$

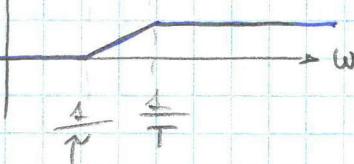
$$|G(jw)|_{\text{dB}} = \begin{cases} 0 \text{ dB per } w \ll \frac{1}{T} \\ -20 \log_{10} |wT| = -20 \log_{10} |w| + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{T} \right| \text{ per } w \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



$$4) G(s) = \frac{1+sT}{1+sT} \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \left| \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T} \right|$$



Sommendo i due grafici:



$$5) G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} \quad G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} j}$$

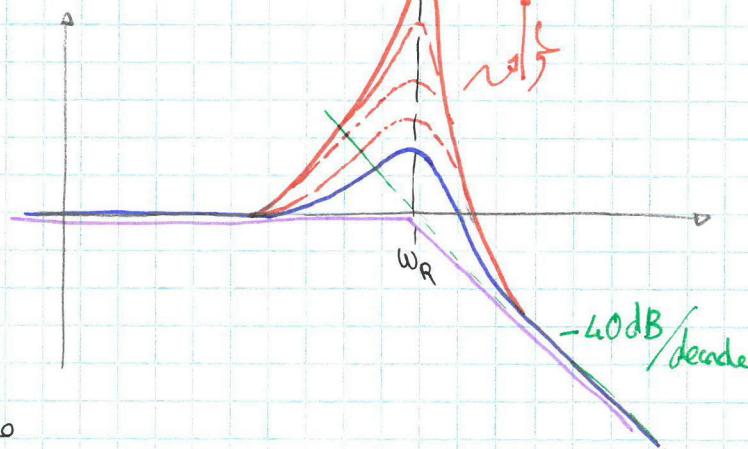
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left| \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} j} \right|^2$$

Vediamo il comportamento asintotico al massimo:

$$\omega \rightarrow 0 \quad |G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \omega_R &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \textcircled{2} \quad |G(j\omega_R)| &= \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned} \quad \text{picco}$$



Per ξ elevate, posso mantenere l'approx del diagramma di Bode asintotico (in blu)

①, ② rivelano che non è vero che c'è un picco di risonanza sempre, infatti:

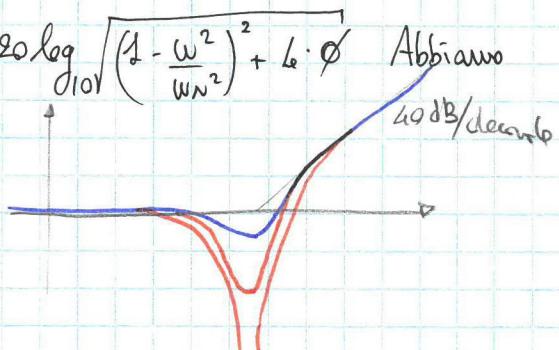
$$\text{La risonanza è presente se } 1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,70$$

Se lo smorzamento è elevato, non ottengo risonanze e quindi il diag. Bode asintotico è un ottimo approx. Ma uno che $\downarrow \xi$, la risonanza viene enfatizzata.

Cosa succede al modulo quando $\xi = 0$ $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4 \cdot 0 \right)$ Abbiamo un asintoto verticale

6) $G(s) = \text{zeri complessi e coniugati} \Rightarrow \text{antirisonanza}$

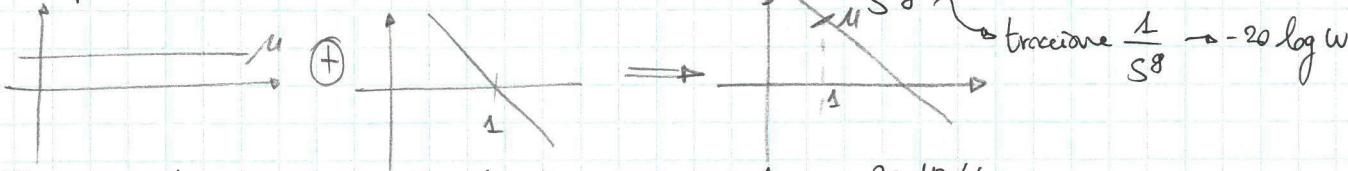
Il comportamento è esattamente analogo.



Regole di tracciamento del modulo dei diagrammi di Bode

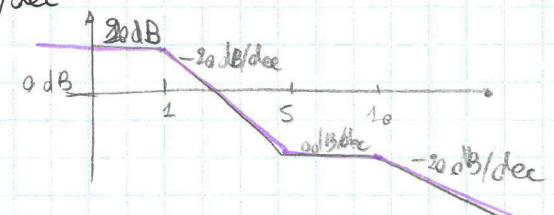
1) G deve essere scritta come $\textcircled{1} G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod (s + s_i)}{\prod (1 + sT)} \frac{\prod (1 + 2\frac{\beta_i}{\alpha_i} s + \frac{s^2}{\alpha_i^2})}{\prod (1 + 2\frac{\zeta_i}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2})}$

2) Si parte dalle basse frequenze, $w \rightarrow 0$ Abbiamo $\frac{\mu}{s^g}$ traccia $|\mu| \text{ dB}$



3) Incremento $w \rightarrow$ se incontra zero \Rightarrow guadagno 20 dB/dec

es: $G(s) = 10 \frac{(1+0.2s)}{(1+s)(1+0.1s)}$ zero in $= -5 \text{ rad/s}$ poli in $= -1 \text{ rad/s}, -10 \text{ rad/s}$



Regole di tracciamento della fase

Data $G(s) \textcircled{1}$, la fase è $\angle[G(jw)] = \angle[\mu] - \angle(jw) - \sum \angle(1+jw\tau_i) + \sum \angle(1+jw\tilde{\tau}_i)$

$$-\sum \angle(1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} jw - \frac{w^2}{\omega_n^2}) + \sum \angle(1 + \frac{2\beta_i}{\alpha_i} jw - \frac{w^2}{\alpha_i^2})$$

guadagno DC

1) $\angle(\mu) \circ$ se $\mu > 0$

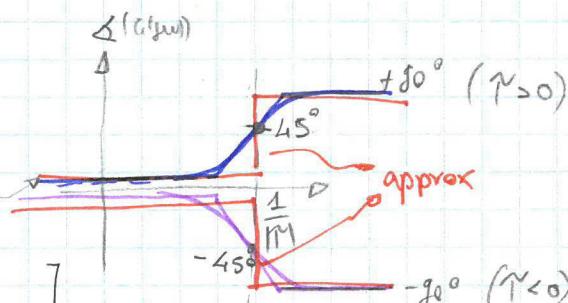
$$\pm 180 \text{ se } \mu < 0$$

polo originale

2) $\angle\left(\frac{1}{jw}\right) = -\angle(jw) = -90^\circ$

3) $\angle(1+jw\tilde{\tau}_i) = \alpha \operatorname{tg}(w\tilde{\tau}_i)$

approx $\angle(1+jw\tilde{\tau}_i) = \begin{cases} 0 & \text{per } w = \frac{1}{\tilde{\tau}_i} \\ 90^\circ & \text{se } \tilde{\tau}_i > 0 \\ -90^\circ & \text{se } \tilde{\tau}_i < 0 \end{cases} \quad \text{per } w > \frac{1}{\tilde{\tau}_i}$



3b) $\angle\left(\frac{1}{(1+jw\tau)}\right) = \angle(1+jw\tau) \text{ opposto dello zero}$

Possiamo costruire una tabella:

$\operatorname{Re} < 0$	$\operatorname{Re} > 0$
polo -90°	$+90^\circ$
zero $+90^\circ$	-90°

$$\text{polo comp. causale}$$

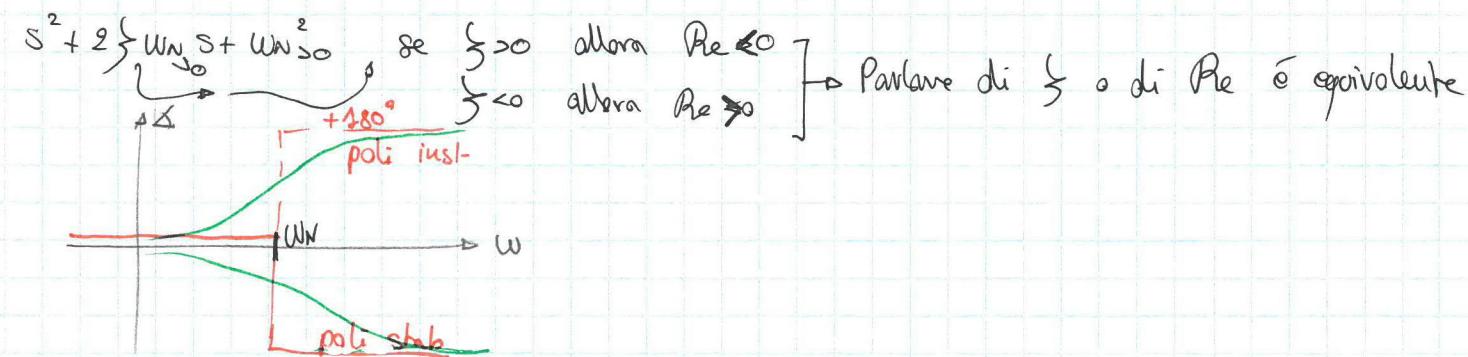
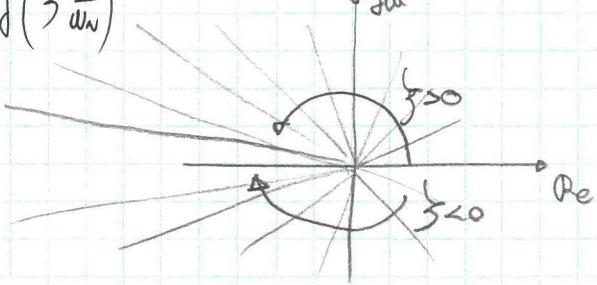
$$L \left[\frac{1}{1 + 2 \frac{\zeta \omega}{\omega_n} s - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] = - \angle \left[1 + 2 \frac{\zeta \omega}{\omega_n} s - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = - \arctg \left(\frac{2 \frac{\zeta \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) = - \arctan \left(\frac{\Re e}{\Im m} \right)$$

Pero vogliamo ragionare graficamente

$$\omega = 0 \quad \angle(\dots) = 0$$

$$\omega = \infty \quad \angle(\dots) = \cancel{-180^\circ}$$

	$\Re e < 0$	$\Re e > 0$
ω_n	-180°	+180°
zero c.c.	180°	-180°

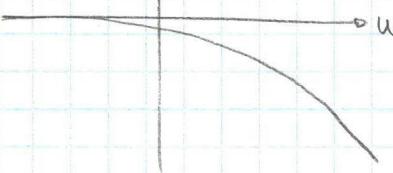


Ritardo e^{-sT}

$$G(jw) = e^{-jwT}$$

$$F(s) = G(s) e^{-sT} \Rightarrow \text{il diagramma di Bode del modulo sono} \\ \text{quelli di } G(s)$$

$$4 e^{-jwT} = -\omega T$$

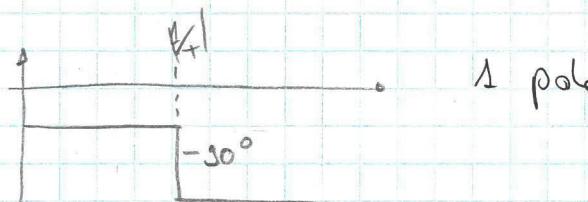
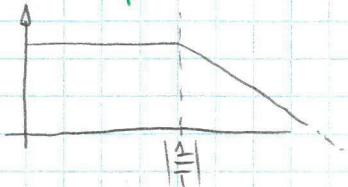


Def sis a fase minima

Essi sono sis: ^①AS, ^②tutti gli zeri hanno $\Re e < 0$, ^③non ci sono ritardi.

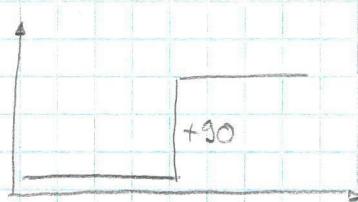
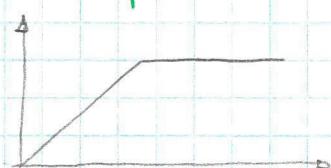
Dato il diagramma del modulo, posso ricostruire quello delle fasi solo per questi sis.

Filtro passa basso



Vengono preservate le variazioni "lente" del segnale. Le armoniche più ad alta freq vengono attenuate.

Filtro passa alto



zero nell'origine + polo

Filtro passa banda

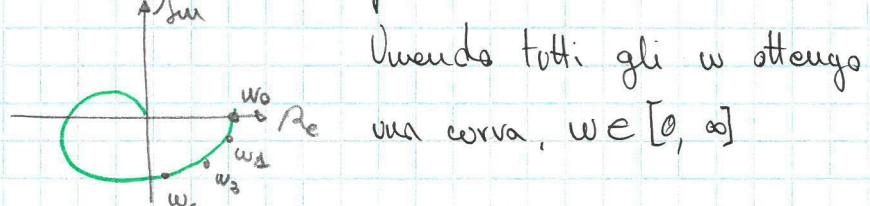
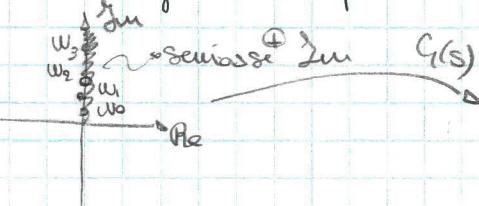
È un serie tra passa basso e passa alto: zero nell'origine + 2 poli

Filtro stop banda

È l'inverso del BP, es $G(s) = \frac{s^2 + w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$] filtro notch

Rappresentazione grafica dei diagrammi polari:

$G(s)|_{s=jw}$ Def: l'immagine del semiasse $\text{Im } s$ positivo attraverso $G(s)$

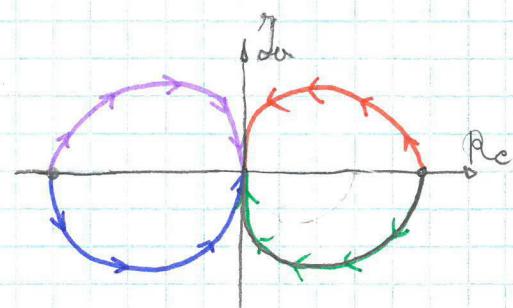
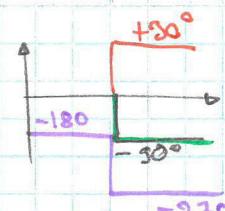
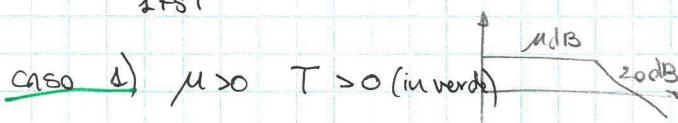


Def è la curva $G(jw)$ sul piano complesso, punteggiata in w (traccia un punto per ogni variazione di w)

Il diagramma polare contiene le stesse info del diagramma di Bode.

Esempi:

$$G(s) = \frac{\mu}{s+T}$$



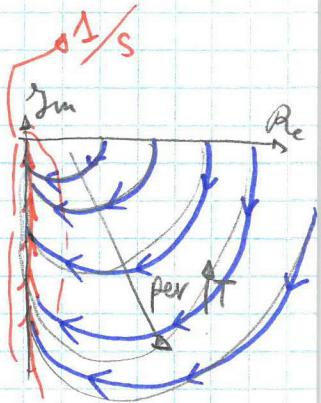
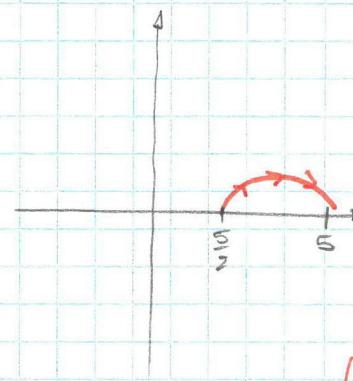
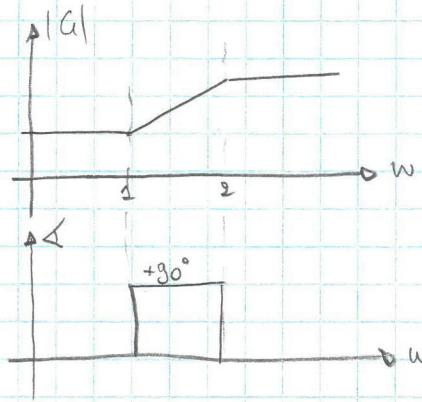
Caso 2) $\mu > 0 \quad T < 0$ (in rosso)

Caso 3) $\mu < 0 \quad T > 0$ (in blu)

Caso 4) $\mu < 0 \quad T < 0$ (in blu)

es

$$G(s) = 5 \frac{s+1}{s+2}$$

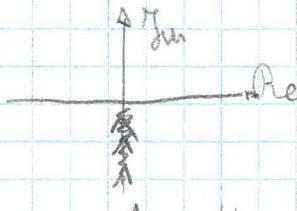
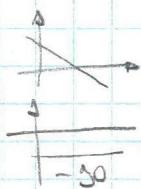


è il semiasse perché
è come se fosse un
polo estremizzato

$$G(s) = \frac{T}{1+sT} \text{ con } T \rightarrow \infty$$

es

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

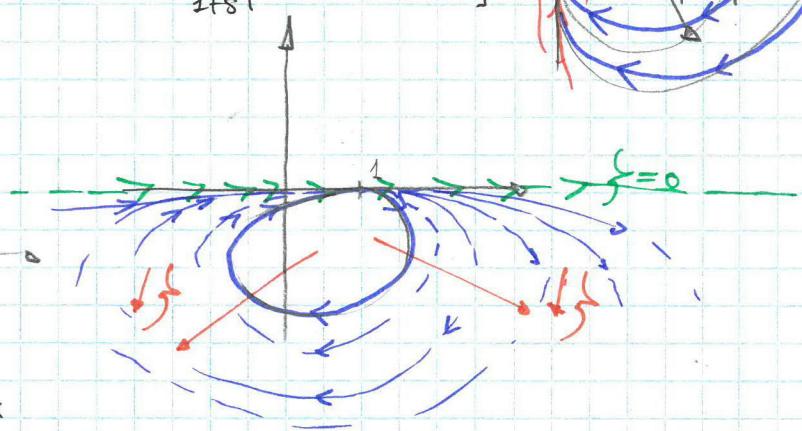
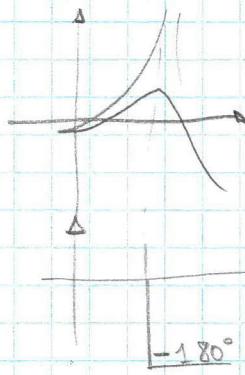


è il semiasse perché
è come se fosse un
polo estremizzato

$$G(s) = \frac{T}{1+sT} \text{ con } T \rightarrow \infty$$

es

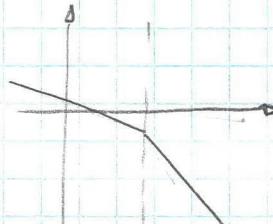
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{j}{\omega_N}s + \frac{1}{\omega_N^2}s^2}$$



Se $\zeta = 0$ il diagramma polare è l'asse x

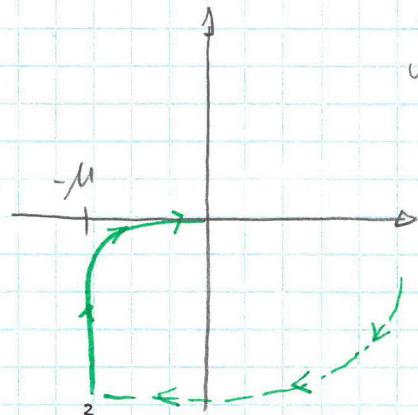
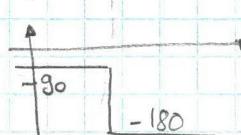
es

$$G(s) = \frac{\mu}{s(s+1)} \quad \mu > 0 \quad |\mu| < 1$$



$$\begin{aligned} w \rightarrow \infty & \quad \varphi = -180^\circ \\ w \rightarrow 0 & \quad \varphi = 0^\circ \\ 1 \cdot 1 & \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Polo con $\operatorname{Re} = 0 \rightarrow$ non posso
basarmi solo sui diag. Bode

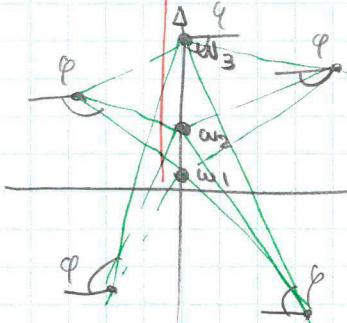


$$G(jw) = \frac{\mu}{jw(jw+1)} = \frac{\mu}{-w^2+jw} \quad \rightarrow \quad G(jw) = \underbrace{\frac{w^2\mu}{w^4+w^2}}_{\operatorname{Re}} + j \underbrace{\frac{\mu w}{w^4+w^2}}_{\operatorname{Im}}$$

$\lim_{w \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(jw)] = -\mu$ la parte reale rimane fissa a $-\mu$ mentre

$\lim_{w \rightarrow 0} \operatorname{Im}[G(jw)] = -\infty$ la parte immaginaria tende a $-\infty$

$$|G| = |G(jw)| = |k| \frac{\prod |\omega - z_i|}{|\prod (\omega - p_i)|} \quad \varphi = \arg [G(jw)] = \varphi_k + \sum \angle(\omega - z_i) + \sum \angle(\omega + p_i)$$



Punto w sull'asse reale di Im , vedo la lunghezza di tutti i vettori da ogni polo e zero e sommo le fasi per zeri, sottraggo fasi per poli, invece delle somma lunghezze vettori per avere il modulo totale del diagramma. Vediamo se c'è una singolarità posta sull'asse Im :

Questo è detto metodo dei vettori, OS: poli complessi coniugati, dobbiamo passare attorno alla singolarità per vedere $w \rightarrow \infty$

Per passare la singolarità, la regola è che si passa sempre a destra

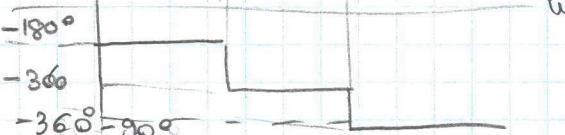
$$\varphi_B = -\varphi_{p_1}^B - \varphi_{p_2}^B = -(-90^\circ) - 90^\circ = 0^\circ$$

$$\varphi_A = -\varphi_{p_1}^A - \varphi_{p_2}^A = -180^\circ \quad \text{perché il cerchietto è di raggio infinitesimo, per cui } C \text{ si avvicina sempre di più verso l'asse } \text{Im}$$

$$\varphi_C = -\varphi_{p_1}^C - \varphi_{p_2}^C = -(0^\circ) - (90^\circ) = -180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{es } G(s) &= \frac{s-5}{s^2+4} & G(0) &= -\frac{5}{4} & G(\infty) &= 0 \\ &\text{Polo } z_1 = -2j && & & \\ &\text{Polo } z_2 = 2 && & & \\ &\text{Zero } p_1 = -400j && & & \\ &\text{Zero } p_2 = -200j && & & \\ &\varphi_B = \varphi_{z_1}^B - \varphi_{p_1}^B - \varphi_{p_2}^B = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) - (-90^\circ) - (-90^\circ) = 160^\circ && & & \\ &\varphi_C = \varphi_{z_1}^C - \varphi_{p_1}^C - \varphi_{p_2}^C = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) - (0^\circ) - (90^\circ) = -20^\circ && & & \\ &\varphi_A = \varphi_{z_1}^A - \varphi_{p_1}^A - \varphi_{p_2}^A = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) - (0^\circ) - (90^\circ) = 70^\circ && & & \\ &\text{NB: attenzione all'uso della calcolatrice per il calcolo dell'arcotangente} && & & \end{aligned}$$

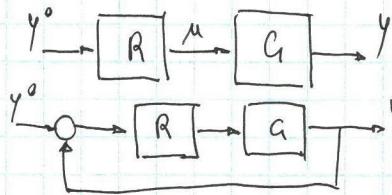
tangente nell'origine pari a -90° (vedi la fase finita in Boole)



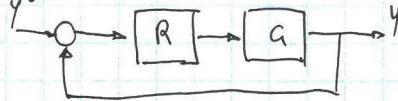
I

Introduzione ai sistemi di controllo (sis LTI, eventualmente NL linearizzati)

• Anello aperto



• Anello chiuso



1) Requisiti primari

• Stabilità (asintotica)

• Precisione dinamica $y(t) = y_0$ durante transizioni

• Precisione statica $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$

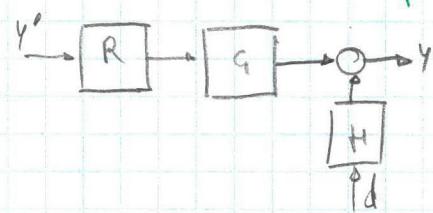
2) Requisiti secondari: > modellazione nell'azione di controllo (usare sis sovradimensionati per il controllo è praticamente inutile e costoso, mentre sforzo massimo rendimento)

• robustezza del sis di controllo (giusto comportamento anche con incertezze di G): garanzia delle proprietà (requisiti primari) anche in presenza di incertezze sul modello

B) Problema di analisi: dati $R, G \Rightarrow$ valutare i requisiti (detti anche proprietà) che caratterizzano

4) Problema di sintesi: contrario dell'analisi, avendo dato G si progetta e sintetizza R il progetto di R può non essere unico a causa delle sensibilità in gioco o metodi diversi.

Controllo ad anello aperto



$$\frac{Y}{Y_0} = RG = 1 \Rightarrow Y = Y_0 \rightsquigarrow \text{è un filtro "passa tutto" idealmente}$$

$$\frac{Y}{d} = H = 0 \rightsquigarrow \text{idealmente si vuole avere } H \text{ come filtro "passa niente"}$$

Se $RG = 1 \Rightarrow R = G^{-1}$ nella pratica ci sono problemi di realizzazione di ciò

Problema 1) Cancellazioni illecite (critiche)

$$G(s) = \frac{s+1}{s-1} \Rightarrow \text{se } R = G^{-1} \quad R = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow RG = \frac{s+1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = 1$$

Non si può fare la cancellazione critica perché comporta instabilità, il pezzo del sis diventa non osservabile.

Oss: qualunque $G(s)$ instabile non può essere controllato in Anello Aperto, perché questo controllo non riuscirà mai a stabilizzare un G instabile

Problema 2) Realizzabilità di R

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(2s+1)(0.1s+1)} \Rightarrow R = \frac{0.1(2s+1)(0.1s+1)}{(s+1)}$$

$$\begin{matrix} \text{canc. non critica} \\ \nearrow \\ \cancel{\text{canc. critica}} \end{matrix}$$

Non abbiamo cancellazioni critiche un n° zeri > n° poli \Rightarrow sis improprio ovvero non può essere realizzato nella realtà

Possiamo avere solo sis G propri

Allora andiamo a cercare un FdT che non costituisca un filtro passa tutto, un quasi: \Rightarrow rendo proprio e realizzabile R, per esempio aggiungendo un polo ad alta frequenza (tutto quello che succede a HF è praticamente frutto di ciò che succede a LF, se pongo un polo HF un influenza il sis più di tanto. Se fosse LF potrei avere risultati catastrofici perché influenzo praticamente tutto il sis, si sceglie il wile minore) posso per esempio aggiungere un polo un decade dopo l'ulti: un singolarità, se prendiamo l'ultimo es abbiamo $R = G^{-1}$. $\frac{1}{0,01s+1} \Rightarrow Y = R \cdot C = \frac{1}{0,01s+1}$

Non abbiamo più un filtro passa tutto un è un filtro passa basso.

Problema 3) Sarsa robustezza

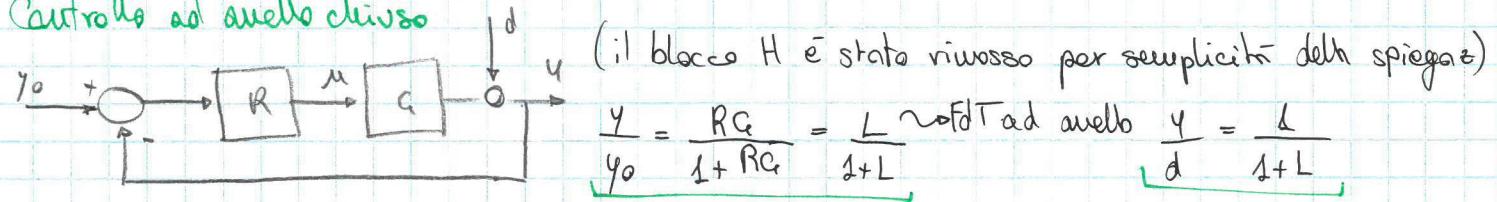
$$G(s) = \frac{(10 + \Delta)(1 + s)}{(2s + 1)(1 + 0,1s)}$$

~~R~~ R, considerando $\Delta = 0 \Rightarrow Y = R \cdot C = \frac{1 \pm \Delta}{0,01s + 1}$ vienne il passa basso di prima

$F_{dt}^{ideale} = 1 \neq F_{dt}^{reale}$ anche a pulsazione nulla \rightarrow

Abbiamo problemi anche per LF. L'anello aperto non avviene sempre

Controllo ad anello chiuso



Abbiamo un controllo sul disturbo, influenzandolo. Non succede con l'anello aperto.

1) Senza conoscere i disturbi, lo schema di controllo in anello chiuso permette di "gestirli"

Stabilità di sis con retroazioni

Per essere realizzabile, grado $D_L(s) >$ grado $N_L(s)$ (senza è improprio), l'unica sol dell'eq è con grado $D_L =$ grado N_L , perciò $L(s) \overset{\text{ha}}{\underset{\text{non}}{\sim}} \text{ordine } D_L$

$$1 + L(s) = 0 \rightarrow s_{1,2,3,\dots} \text{ poli del sis anello chiuso}$$

$$\frac{N_L(s)}{D_L(s)} = 0 \Rightarrow D_L(s) + N_L(s) = 0 \text{ bisogna azzerare il polinomio}$$

ordine di $L(s) \leq 2 \Rightarrow D_L(s)$

Per essere realizzabile, grado $D_L(s) >$ grado $N_L(s)$ (senza è improprio), l'unica sol dell'eq è con grado $D_L =$ grado N_L , perciò $L(s) \overset{\text{ha}}{\underset{\text{non}}{\sim}} \text{ordine } D_L$

Se $L > 2 \Rightarrow s^3 + s^2 + s + 1 = 0 \rightarrow$ dovrei calcolare i diversi coefficienti con Routh (diventa un casino)

Se $L \leq 2 \Rightarrow as^2 + bs + c = 0 \rightarrow$ ricavo a,b,c semplicemente perché nel caso di 2° ordine per stabilità assoluta a,b,c ~~hanno~~ hanno segno concorde e > 0

Per $L > 2$ ci sono altri criteri

Criterio di Nyquist

Permette di studiare la stabilità senza il calcolo esplicito degli autovariori (e soprattutto senza ricorrere a Routh)

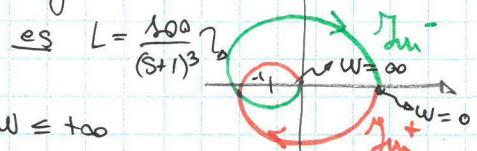


Diagramma di Nyquist: rappresentazione $G(j\omega)$ per $-\infty \leq \omega \leq +\infty$

In pratica disegno il diagramma polare anche per i ~~se~~ settori semiassi Im^+ .

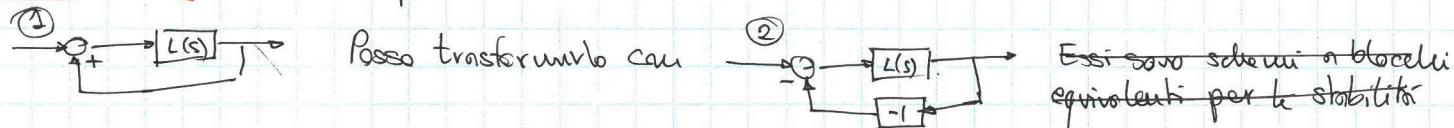
Basta tracciare il ~~diagramma~~ complesso coniugato del diagramma polare Im^+ . Già viene fatto con l'invertire (specchiare) il diagramma polare rispetto all'asse x .

Il criterio di Nyquist: H_p : la presenza di sis retroazionanti negativamente

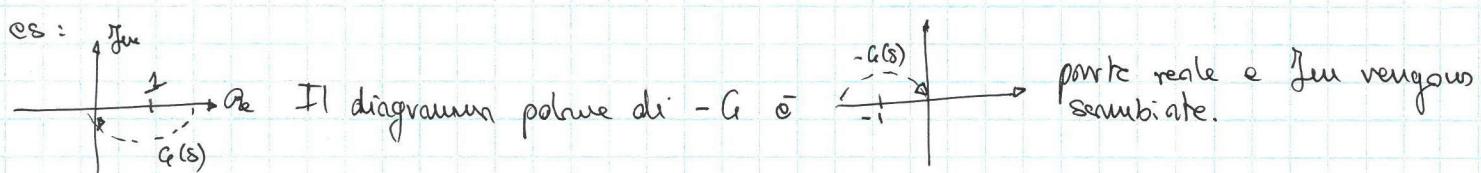
$p = \text{n}^\circ \text{ di poli instabili di } L(s)$ $n = \text{n}^\circ \text{ di giri del diagramma di Nyquist attorno al pto } -1$
contati positivi se in senso antiorario. \rightarrow

Abbiamo un condiz necessaria e suff di AS del sis retroazionario: $n = p$ con n ben definito

Esempio 1: retroazione positiva



Per la stabilità ② è equivalente a ③



Allora il n° di giri che $-G(s)$ compie attorno a -1 equivale al n° di giri che G compie attorno a 1 .

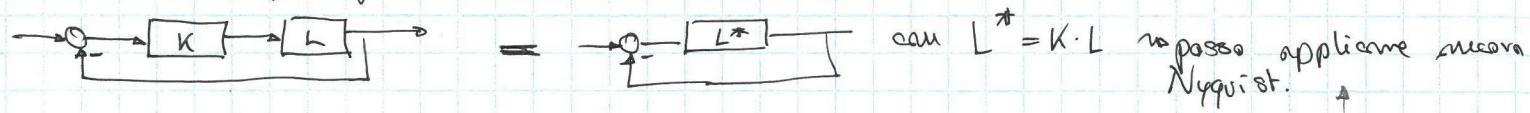
Allora per la retroazione positiva dati:

il diagramma di Nyquist di G

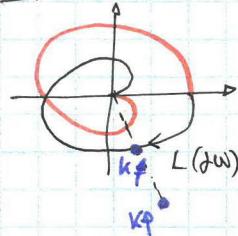
N è il n° di giri antiorari attorno a 1 \rightarrow AS $\Leftrightarrow \begin{cases} n = p \\ n \text{ ben definiti} \end{cases}$

P è il n° di poli di G con $\text{Re} > 0$

Esempio 2: "guadagno ad anello"

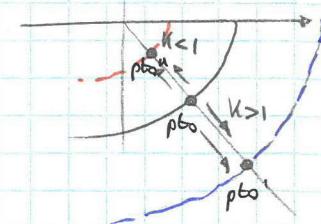


es

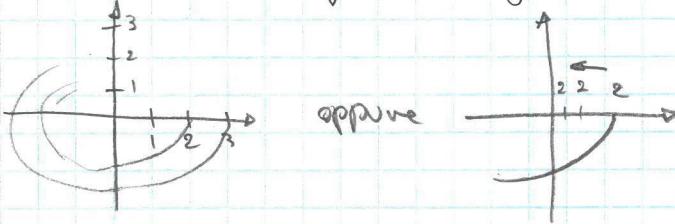


Se $K > 1$ sposta il pto del diagramma lungo il raggio
in pratica "gattingo" il diagramma

Se $0 < K < 1$ "restringe" il diagramma



Potrei moltiplicare per K in un'area grafica senza cambiare gli assi, oppure posso tenere fisso il disegno e "immaginare" di cambiare la scala degli assi.



Il mio interesse è vedere cosa succede attorno

Riformula il criterio

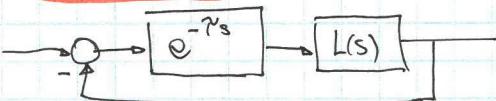
$0 < K < \infty$: Γ diagramma di Nyquist di $L(s)$ (Nb: $w_0 \in \Gamma^*$)

Nel n^o di giri antiorari di Γ intorno a $-1/K$ (dovuto al rigonfiamento)

Più n^o di poli con $\operatorname{Re} s > 0$ di $L(s)$

Allora AS $\Leftrightarrow \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

Estensione 3: "ritorno ad quello" • Γ diag di $e^{-T_s} L(s)$



• n^o di giri di Γ attorno -1

• p^o di poli di $L(s)$ con $\operatorname{Re} s > 0$

STABILITÀ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{def} \\ u=p \end{cases}$

Stabilità robusta

Modello nominale: la migliore descrizione della realtà che ho deciso di usare \rightarrow

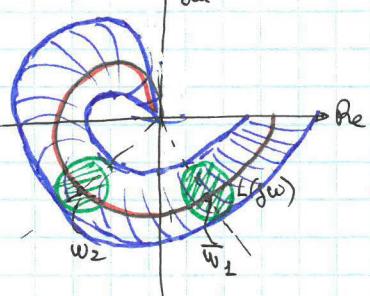
Hp: il sis nominale è AS in questo chiuso

Obiettivo: dare degli indicatori che quantificano quanto posso aspettarmi da un sis valga

anche com il sis vero.

$$\tilde{L}(s) = \underbrace{\underline{L}(s)}_{\text{sis vero}} + \underbrace{f L(s)}_{\text{sis nominale}} \quad \text{assumo che } |f L(s)| \leq \Delta(s) \quad \text{quindi il suo modulo è limitato entro un valore limite } \Delta(s) \quad (\text{prò variazione in funzione di } s \text{ vedi al fine in blu che si ripercorre})$$

Cosa succede al diagramma polare? Il cerchio verde attorno a w_0 è quello che mi indica la "variazione" del diagramma attorno ad un valore w_0 fissato.
raggio cerchio \uparrow incertezza



Potrei fare lo stesso discorso per tutti gli w e mi ritrovo una regione dello spazio nel piano complesso

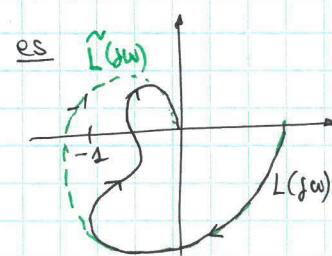
Passo da 1 curva sola ad una famiglia di curve.

Se voglio essere sicuro che il sis sia robustamente stabile

Il criterio deve essere soddisfatto su tutte le curve

Consideriamo il caso in cui:

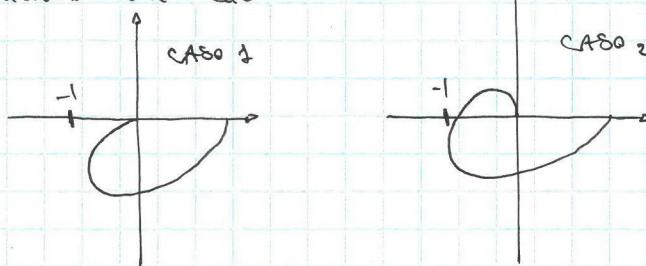
- modello nominale AS
- $L(s)$ non ha poli con $\operatorname{Re} s > 0$
- $\tilde{L}(s)$ non ha poli con $\operatorname{Re} s > 0$ $\forall f$



Se faccio variazione $\tilde{L}(s)$ a tal punto da "scavalcare" -1, allora abbiamo l'instabilità.

Più ci avviciniamo umanamente a -1, più è probabile che l'incertezza faccia scavalcare $\tilde{L}(s)$

Vediamo dei casi:

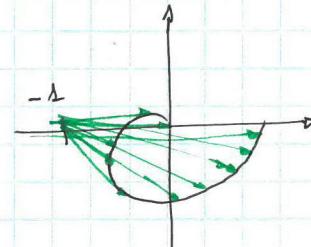


Il caso 1 è meglio del caso 2 perché ci vuole incertezza maggiore per destabilizzare il sistema.

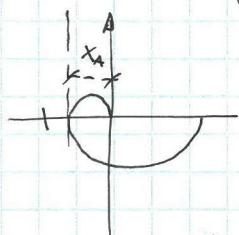
Il caso 1 è più robusto.

Indice di robustezza 1) Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_w |1 + L(jw)| = \text{minima distanza tra } -1 \text{ e } L(jw)$$



Indice 2) Margine di guadagno



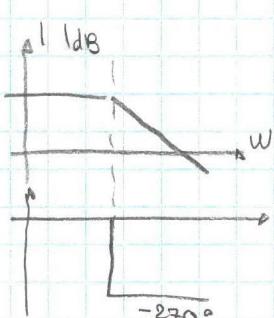
$$K_m = \frac{1}{|X_A|}$$

$$\omega_{\bar{\alpha}} : \angle [L(j\omega_{\bar{\alpha}})] = -180^\circ$$

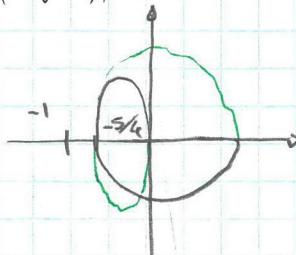
$$X_A = |L(j\omega_{\bar{\alpha}})| \quad K_m = \frac{1}{|L(j\omega_{\bar{\alpha}})|} = -|L(j\omega_{\bar{\alpha}})|_{dB}$$

es

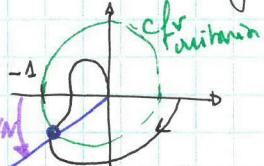
$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3} \quad \angle L(j\omega_{\bar{\alpha}}) = -180^\circ = -3 \arctg(\omega_{\bar{\alpha}}) \quad \omega_{\bar{\alpha}} = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$



$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_{\bar{\alpha}})|} = \frac{(\sqrt{1+3})^3}{10} = \frac{4}{5} < 1$$



Indice 3) Margine di fase



$$\omega_c : |L(j\omega_c)| = 1$$

$$\varphi_c : \angle [L(j\omega_c)] \quad \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

Margine di fase: rappresenta robustezza ai ritardi in anello $\tilde{L}(s) = e^{-sT} L(s)$

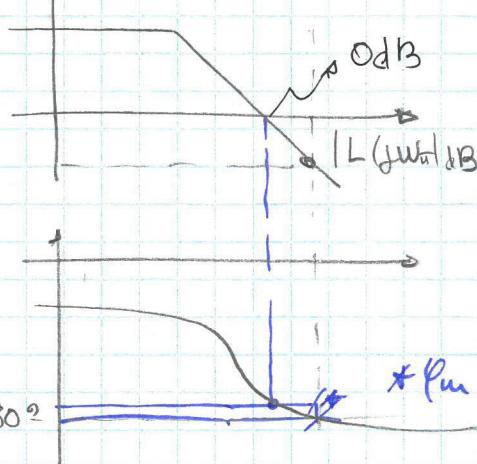
$$\text{es } L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)} \quad |L(j\omega)| = 1 = \frac{10}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \quad \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2} = 10$$

$$\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2} = 10$$

$$4\omega^2 + 5\omega + 1 = 100 \quad \omega_c \approx 2,09 \quad \tilde{\omega} = \omega^2 \quad \varphi_c = -\arctg(\omega_c) - \arctg(2\omega_c) = -64,5^\circ - 74,6^\circ = -141,11^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - 141,1^\circ = 38,9^\circ > 0$$

Vediamo un esempio con il diag. Bode

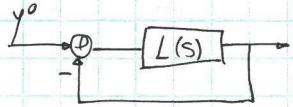


Vedo graficamente $K_m = -|L(j\omega_m)|_{dB} > 1$

il margine di fase è la sottrazione di 180° e della fase con guadagno 0dB

Criterio di Bode

È spesso molto difficile tracciare un diagramma di Nyquist. Perciò ci affidiamo ad un criterio che sfrutta i diagrammi di Bode



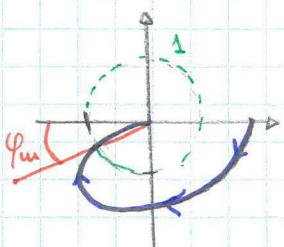
Condizione di applicabilità

$$1) P=0$$

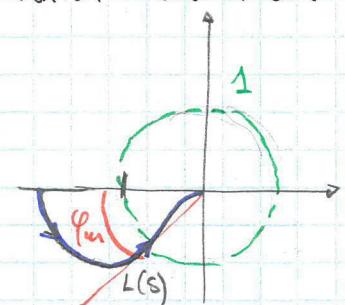
2) Il diagramma di Bode di $L(s)$ taglia l'asse a 0dB una sola volta, e questo taglio avviene all'alto verso il basso (\circ con pendenza negativa, es. -20 dB/dec)

Allora possiamo dire che A_S in questo caso $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$ (guadagno generalizzato di $L(s)$)

Dm: Sappiamo per Nyquist che $P=0 \Leftrightarrow n=0$. Il taglio unico, tradotto nel diagramma polare, vuol dire che io entro nella cfr di modulo 1 una sola volta. Sono in una condizione del tipo:

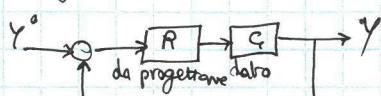


Ho bisogno di $\mu > 0$ perché potrei ritrovarmi nella condizione a destra:
Se devo il diagramma, ho già attorno a -1 e ciò non va bene per il crit. Bode.



Il nostro obiettivo è progettare il sis di controllo, in cui R è il blocco da progettare

AI fini della stabilità, abbiamo visto che ci interessa $L(s) = R \cdot G$



Vediamo un solo taglio e la fase probabilmente sarà $> 180^\circ$ quindi $\phi_m > 0$ e $\mu > 0$ perché punto con fase 0. Perciò se questo esempio in questo caso è A_S , per noi è molto robusto, siamo vicini all'instabilità.

Per migliorare fin posso "traslare" il grafico verso il basso, diminuendo il guadagno.

Oppure posso mettere uno zero per guadagnare 20 dB/dec e rendermi g_2

La divisione del gradino nel diagramma polare equivale allo "sgomfiamento" della caratteristica. Con la zero è più difficile.

I diagrammi di Bode sono più facili e precisi da tracciare dei diagrammi polari.

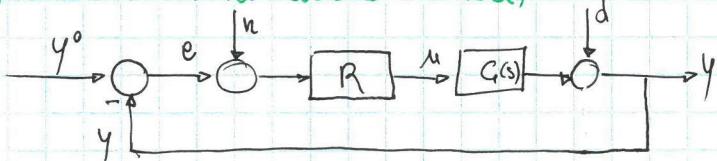
Corollario sul criterio di Bode: Criterio di Bode per sis a fase minima.

- $\mu > 0$ è verificato automaticamente
 - forte legame tra bule modulo e fusi

AS. stabile \leftarrow se il diagramma di Bode del wadolo taglia l'asse OdB con sola
in ambo chiuso Volta con pendenza -20 dB/dec

Infatti per avere il taglio -20 dB/dec , prima della WadB ho un polo in più di tutti gli altri zeri. Questi poli e zeri sono tutti con $\Re z < 0$ perché saranno in un sis a fase minima. Il polo residuo fornirà sfasamento di 90° quindi abbiamo automaticamente un buon margine di fase.

Prestazioni in ambito clinico



Il regolatore R è affetto all'ingresso da disturbo n che si somma all'errore e
 Abbiamo un ulteriore disturbo. $n = \text{rumore di misura}$ $d = \text{disturbo}$ → casualmente sono molto diversi. Matematicamente sono due ulteriori ingressi

non è "un'illusione" di misura, legato al senso che può avere un offset di misura, una reale

Il disturbo "d" invece è una condizione reale che agisce sul sistema nella realtà.

(es: $\gamma =$ offset del telemetro che misura 18° invece di 20° ; d = finestra aperta \Rightarrow si passa realmente da 18° a 20°)

Abbiamo 3 ingressi (y^0, n, d) e 3 uscite (y, e, u)

$$\rightarrow S(s) = \frac{1}{1 + RG} = \frac{1}{1 + L} \text{ rispetto a day}$$

Audiamo a calcolare le FdT rispetto ai vari ingressi e varie uscite (prendo due pti dello schema abbondi)

$$\rightarrow S(s) = \frac{1}{1+s} \text{ rispetta a } y^{\circ} \rightarrow e$$

$$S(s) = \frac{1}{1+E} \text{ rispetto a } d \rightarrow e$$

$\frac{1}{1+L}$ è detta "funzione di sensibilità"

$$D_n \quad y^o \rightarrow y \quad F(s) = \frac{AC}{s+AC} = \frac{L}{1+L} \quad \text{no funzione di sensibilità couple mentone}$$

Edu infine $\left. \begin{array}{l} y^o \rightarrow M \\ u \rightarrow M \\ -d \rightarrow M \end{array} \right\} Q(s) = \frac{R}{1+RG} = \frac{R}{1+L}$ « funzione di sensibilità del controllo »

Vediamo: $S(s) + F(s) = \frac{1}{1+L} + \frac{L}{1+L} = 1$ » S e F sono complementari perché si sommano

L'errore risulta essere (per la sovrapposizione degli effetti)

$E(s) = S(s) \cdot Y(s) - S(s) \cdot D(s) - F(s) \cdot N(s)$, per questo essere si vuole avere un piccolo errore \rightarrow

$\|E(s)\| \ll 1$ considerando y^o e n qualsiasi per fare piccolo E , ~~ma~~ possa fare piccoli S e F , un $S+F=1$ perché sono complementari. Dopo bilanciare S e F per avere un compromesso. S descrive l'effetto della variazione di un disturbo, mentre F mi dice quello della misura.

Se $S+F=1 \iff S(j\omega) + F(j\omega) = 1 \quad \forall \omega$

Quindi a frequenza, dopo bilanciare le due sensibilità, in base alle specifiche di progetto

Precisione statica ($t \rightarrow \infty$)

Staticamente, S e F sono di mio interesse. Q non è molto utile.

Staticamente il valore di u è determinato da G e uno da R , perciò studiamo le altre funzioni.

1) Studio $S(s)$ $y^o = \frac{A}{s^r} \quad E(s) = S(s) \cdot \frac{A}{s^r} = \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{A}{s^r}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{A}{s^r} \quad \text{in cui } L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^n (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^m (1+s\tau_i)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^p \left(\frac{s^2}{\omega_i^2} + \frac{2\beta_i s}{\omega_i} + 1 \right)}{\prod_{i=1}^q \left(\frac{s^2}{\omega_i^2} + \frac{2\zeta_i s}{\omega_i} + 1 \right)}$$

convergerà a 1 per $s \rightarrow 0$

Perciò semplifico e ottengo $c_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+\frac{\mu}{s^g}} \cdot \frac{A}{s^{r-1}}$

Esempi

$r=1 \quad y^o = A \sin(t) \quad c_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^g}{s^g + \mu} \cdot A \begin{cases} g=0 & c_\infty = \frac{A}{1+\mu} \\ g \geq 1 & c_\infty = 0 \\ g < 0 & c_\infty = A \end{cases}$

$r=2 \quad y^o = A \text{ rampalt} \quad c_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^g}{s^g + \mu} \cdot \frac{A}{s^1} \begin{cases} g < 1 & c_\infty = \infty \\ g = 1 & c_\infty = A/\mu \rightarrow \text{integrazione} \\ g \geq 2 & c_\infty = 0 \quad \rightarrow \text{doppio o int} \end{cases}$

$S(s)$ a regime è tc per cui:

1) Il comportamento di c_∞ dipende solo da μ, g, A

2) per avere $c_\infty \rightarrow 0$ è necessario che $g \geq r$

Oss: con lo scalino, possiamo mettere un integratore per avere errore 0.

Ci aspettiamo però complicazioni della $F(s)$. Sarebbe meglio un integratore, ottenendo $g=0 \rightarrow e \propto = \frac{A}{s+L}$ riducendo l'errore con L abbastanza grande invece di un int.

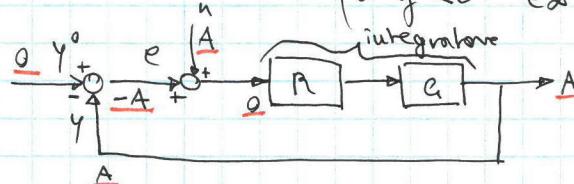
2) Studio $F(s)$ ($n \rightarrow e$) $N(s) = \frac{A}{s^r}$ $E(s) = \frac{L}{s+L} \cdot \frac{A}{s^r}$

$$e \propto = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A/s^r}{1 + \frac{L}{s^r}} \cdot \frac{A}{s^r}$$

es

$$r=1 \quad n(t) = A \sin(t) \quad e \propto = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A \cdot 1}{1 + s^1} \begin{cases} \text{se } g=0 & e \propto = A/\mu_{\mu+1} \\ \text{se } g \geq 1 & e \propto = A \\ \text{se } g < 0 & e \propto = 0 \end{cases} \rightarrow \text{caso opposto rispetto a prima, abbiamo la complementarietà tra } S(s) \text{ e } F(s)$$

Vediamo un'oss:



Vedendo a transitorio esaurito abbiamo:

$g=1 \rightarrow$ integratore - AS stab. in questo caso \rightarrow tutti i segnali perciò convergono ad un valore

Ma abbiamo un integratore puro, se voglio l'uscita stabile, l'ingresso dovrà per forza essere zero (se fosse un costante l'uscita sarebbe ~~zero~~ la costante integrata quindi diventa zero).

Per avere zero errore avere $y = A$, quindi $n = A$ che somma ed entra su R , divenuta zero. Il rumore di misura viene scambiato come riferimento. Non siamo infatti in grado di separare la frequenza del rumore dal riferimento.

Se il progetto è fatto bene, il rumore risultante sarà senza componenti a bassa freq.

Oss: l'integratore è dinamico, devo tenere conto della storia passata, se uno fosse così potrei avere delle transizioni in alto. Infatti si sta studiando un equilibrio dovuto per effetti precedenti, ecco perché y vale "unicamente" A , perché se uno fosse così non saremmo più in situazione di equilibrio.

I diversi casi possono essere riassunti in delle tabelle:

φ_{∞}	ϑ	0	1	2
$y^*(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{1+\mu}$	0	0
	$\frac{A}{s^2}$	00	$\frac{A}{\mu}$	0
	$\frac{A}{s^3}$	00	00	$\frac{A}{\mu}$

Oss: nella realtà gli ingressi a parabola non vengono mai utilizzati.

φ_{∞}	ϑ	0	1	2
$N(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A \cdot \mu}{\mu + 1}$	A	A
	$\frac{A}{s^2}$	00	00	00
	$\frac{A}{s^3}$	00	00	00

Oss: gli ae sono dovuti a dei derivatori, puri essi in realtà ignorano sia l'errore di misura ma ignorano anche i riferimenti stessi, ammissibili.

Ecco fatto tutto il necessario per avere la precisione statica date alcune condizioni specifiche di progetto. Oss: per progettare il sis di controllo ha bisogno di indicazioni su cosa aspettarci come ingresso

Precisione dinamica

Mi interessano le risposte in frequenza delle sensibilità $S(j\omega)$, $F(j\omega)$, $Q(j\omega)$

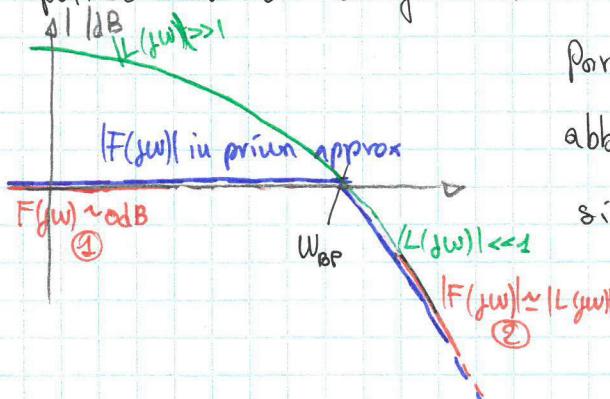
Funzione di sensibilità complementare

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \begin{cases} y^* \rightarrow y \\ -n \rightarrow y \\ -n \rightarrow e \end{cases} \quad F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \quad \text{Studiamo il modulo}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \textcircled{1} & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \quad |F(j\omega)| = |L(j\omega)| \quad (|1+L(j\omega)| \approx 1) \\ \textcircled{2} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \quad |F(j\omega)| = 1 \quad (|1+L(j\omega)| \approx |L(j\omega)|) \end{cases}$$

approssimazione
a poli dominanti

Ipotizziamo un diagramma di Bode del modulo e di $F(j\omega)$:



Portando agli estremi ① e ②, mi posso fare un'idea abbastanza precisa sulla forma di $F(j\omega)$ che, da come si vede, ha la forma di un passa-basso (tratto blu).

W_{bp} : frequenza di "Banda Passante"

Si nota che $\omega_{BP} = \omega_c$ perché $L(s)$ taglia l'asse dB

Vogliamo analizzare cosa succede nell'intorno di ω_{BP}

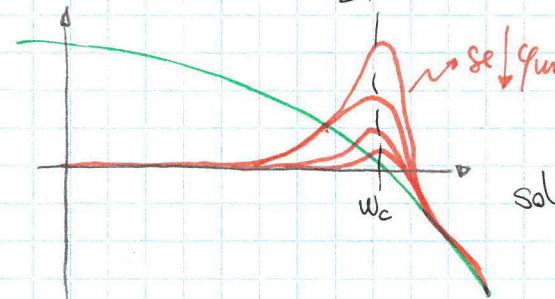
$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + 1 \cdot \text{e}^{j\phi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos\phi_c + j\sin\phi_c|} = \frac{1}{(1 + \cos^2\phi_c + \sin^2\phi_c)^{1/2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos\phi_c}} = \text{dalla trigonometria } \cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha) \quad \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{socche } \phi_m = 180 - |\phi_c|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\phi_m)}} \quad \text{solo nel caso in cui } \phi_m > 0 \quad (\text{secondo il criterio di Bode, uno ha senso analizzare le prestazioni per sis inst } (\phi_m < 0)))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\phi_m}{2})}} \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\sin(\frac{\phi_m}{2})} \rightarrow \text{una mma che phi diminuisce il modulo si modifica em:}$$



In priun approx avevamo un passo basso, ora

otteneriallo in seconda approx una risonanza dettata

solo dal margine di fase (invece di 1 polo ho due poli)

$$\text{Considero un } \tilde{F}(j\omega) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2} \quad \text{cerco una } \xi \text{ tale per cui } |\tilde{F}(j\omega_c)| = |F(j\omega_c)|$$

Cerco una Fdt del secondo ordine che approx bene la funzione di sensibilità

complementare vicino al pto ω_c .

$$|\tilde{F}(j\omega_c)| = \left| \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2} \right| = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin\frac{\phi_m}{2}} \rightarrow \xi = \frac{\phi_m}{2} \sqrt{\frac{1}{180^\circ}}$$

$$\xi \approx \frac{\phi_m}{100} \quad \text{espresso in gradi}$$

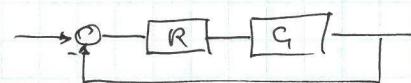
$$\tilde{F}(j\omega) = \frac{\omega_c^2}{(j\omega_c)^2 + 2\xi\omega_c j + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{-\omega_c^2 + \omega_c^2 + 2\xi\omega_c^2 j}$$

Se $\phi_m > 75^\circ$ la risposta allo scalino di $F(s)$ uno ha oscillazioni $\Rightarrow T_{Ass} = 5/\omega_c$

Se $\phi_m < 75^\circ$ " " " " mutue oscillazioni $\Rightarrow T_{Ass} = 5/\xi\omega_c$

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi^2}} \quad S := 100, e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

esempio



Cu $R=1$ abbiamo sis As

Cu $R=0$, sabbiamo instabilità un \rightarrow velocità

$$\text{Se } \varphi_m > 75^\circ \quad T_{Ass} = \frac{5}{\omega_c}$$

$$\text{Se } \varphi_m < 75^\circ \quad T_{Ass} = \frac{5}{\omega_c \zeta}$$

Penso $\uparrow \omega_c$ (alzare il guadagno) per avere $\uparrow T_{Ass}$, ma se $\uparrow \omega_c$ troppo, rischio di ricadere $\varphi_m < 75^\circ$ e quindi diminuire la stabilità e introdurre oscillazioni.

Una modifica del sis RC ci permette di fare "stime" di cosa succede in questo caso.

Funzione sensitività

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} = \begin{cases} \frac{1}{|F(j\omega)|} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

$S(j\omega)$ è invertito per $|L(j\omega)|$ perché in dB il reciproco corrisponde al segno negativo. Abbiamo un passo alto

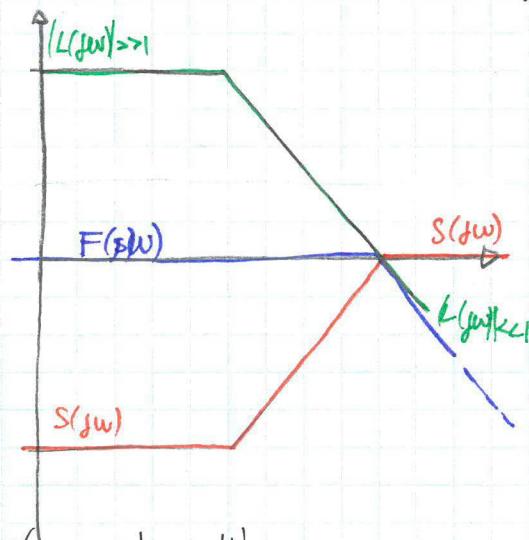
Ci piace che sia passo alto perché S è legato a $y_o \rightarrow e$, $d \rightarrow e$, $d \rightarrow y$

Qui si minimizza il disturbo su errore e uscita e il riferimento sull'errore.

Però vedo che la reiezione è limitata in base alla banda di L

Guardando $F(j\omega)$ ($y_o \rightarrow y$, $u \rightarrow y$, $n \rightarrow e$), per avere un buon riferimento seguimento del riferimento nella banda passante, un sono allo stesso tempo più sensibili all'errore a causa dell'influenza di u sull'uscita e l'errore.

Se u ha componenti armoniche che finiscono in banda, abbiamo la riflessione di ciò direttamente in y . Se sono armoniche HF, ha più reiezione.

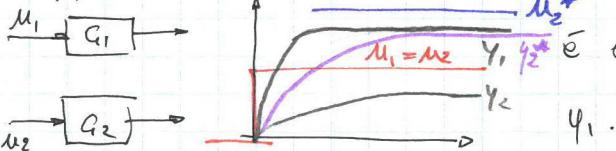


Funzione di sensibilità del controllo

$$Q = \frac{R}{1+RC} = \frac{R}{1+RC} \cdot \frac{G}{G} = F \cdot G^{-1} \quad Q(j\omega) \approx \begin{cases} 1/(G(j\omega)) & \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

($y^* \rightarrow u$, $u \rightarrow y$, $-d \rightarrow u$)

Supponiamo ora due funzioni G , con guadagni diversi M_1 e M_2

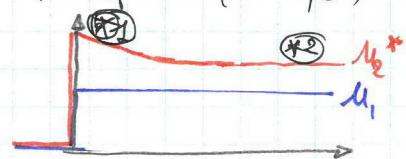


Ora tengo fisso y_1 e cerco di far muovere y_2 come y_1 (voglio accelerarlo)

Bisognerà quindi cambiare l'ingresso. Ho bisogno quindi di u_2^* più ampio di u_1 .

y_2 verrà quindi scritta verso l'alto, ma non sta raggiungendo la stessa risposta (vedi y_2^*)

Dovrò applicare un ingresso un po' sotto forma di scalino



Se mi ricordo ad un caso in cui le risposte sono simili,

posso fare delle analisi. es: l'auto che, per avere le stesse prestazioni dell'auto 1, dovrà consumare più carburante $\textcircled{2}$ all'infinito, ma dovrà immettere ancora più carburante alla partenza $\textcircled{3}$.

Sapendo che G è fisso, il controllore deve compensare ciò che vuole G , quindi l'impatto della sua azione di controllo è situato al "consumo" di ingresso.

E se un u_2^* ha un overboost rispetto a u_2 , quindi devo avere per forza un costo. (Oss: rallentando u_2 posso decidere di rallentare ulteriormente il sistema - meno consumi)

es: accelerazione ottimale di un braccio meccanico. Se tiro un impulso iniziale per fare muovere velocemente il braccio, posso fare danni meccanici o la coppia che imponevo non può essere soddisfatta dal motore \rightarrow azione in risposta più lenta

Il mio obiettivo è accelerare la risposta di G , quindi progetto R in modo che

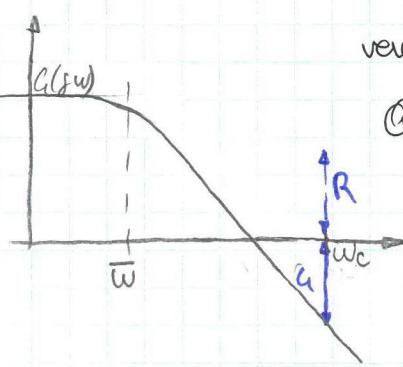
vegga spostata $\bar{\omega}$ fino a raggiungere una ω_c voluta.

Quanto dovrà valere R per avere $\bar{\omega} = \omega_{crit}$?

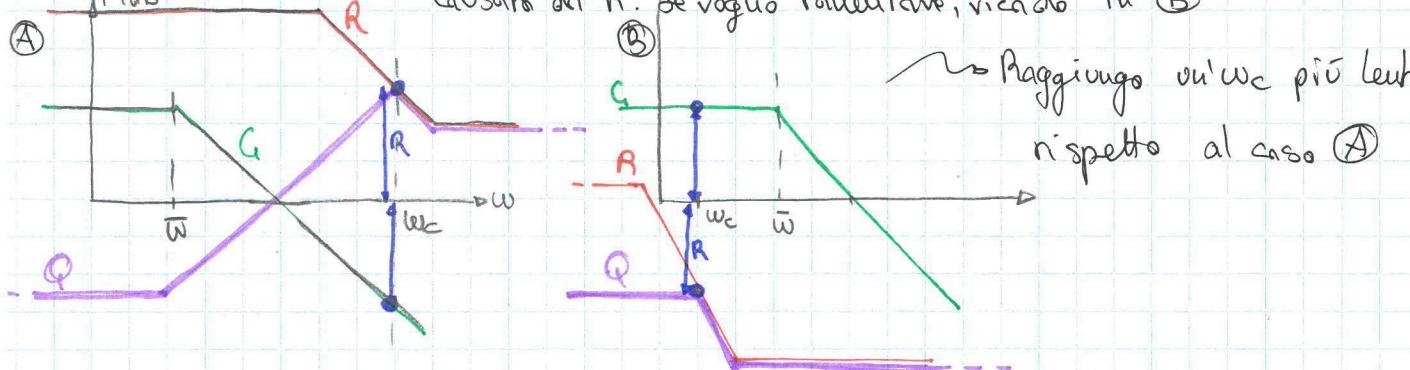
$L = R G$ quindi ho bisogno che per $\omega = \omega_c$ ho bisogno

che R sia l'opposto di G per compensare la caratteristica

Posso quindi amplificare senza poli o zeri così da trasformare la caratteristica.



Nella bassa frequenza, se ho un gerardo un'aggiore migliore la sensibilità complementare posso ipotizzare un R: se a 80 dB (A) abbiamo un Q conseguente all'accorciamento della risposta causata da R. Se voglio rallentare, ricado in (B)



Per HF: nel caso (A) Q amplifica le HF \rightarrow eccitazione un'aggiore della variabile controllata
 nel caso (B) Q filtra ulteriormente le HF \rightarrow eccitaz. minore per u
 (OSS caso (A): ha addirittura un picco di eccitazione per le HF oltre che amplif. normale)

Generalmente: se voglio qualcosa di performato lo progetto instabile ad anello aperto e lo stabilizzo in retroazione (OS: aereo militare da caccia, amplificatore con buon stabilità (vedi FdE))

OS

$$R = \frac{1}{s} \quad C = \frac{1}{(0,1s+1)^2} \quad y^0 = L \text{ ramp}(t) \quad u = 0,1 \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\dot{u} = 2 \sin(\bar{\omega}t) \quad \bar{\omega} = 0,1 \text{ rad/s} \quad L(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(0,1s+1)^2} \rightsquigarrow \text{Boole:}$$

$$M = 1 \quad g = 1 \quad \text{poli 10 rdd/s (2 poli stabili)}$$



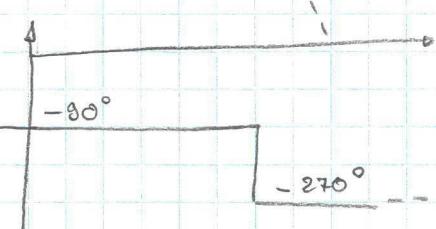
1) Calcolo errore a regime

$$E_{y^0} = S(s) \cdot \frac{L}{s^2} \quad \text{in } w_i \quad S(s) = \frac{1}{1+L} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(0,1s+1)^2}} =$$

$$= \frac{s(0,1s+1)^2}{s(0,1s+1)^2 + 1} = \frac{s(0,1s+1)^2}{0,01s^2 + 0,2s^2 + s + 1}$$

$$E_{y^0} = \frac{4(0,1s+1)^2 \cdot 4}{s^2(0,1s^3 + 0,2s^2 + s + 1)}$$

$$E_{y^0\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} E_{y^0} \cdot s = \frac{4(0,1s+1)^2}{0,01s^3 + 0,2s^2 + s + 1} = 4$$



$$\text{Ecc. totale } E_u = F(s) \cdot \frac{0,1}{s} = \frac{1}{\underbrace{(s(0,1s+1)^2 + 1)}_{F(s)}} \cdot \frac{0,1}{s} \quad E_{u\infty} = 10,1$$

$$E_d = S(s) \cdot D(s) \quad d(t) \rightarrow 2|S(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \angle[S(j\bar{\omega})])$$

① $S(j\bar{\omega}) = \frac{1}{1+L(j\bar{\omega})} \approx \frac{1}{1+L(0,1)} \approx 0,1$ guardando il diagramma di boole \Rightarrow prim. approx

② $S(j\bar{\omega}) = \frac{1}{1+L_0} \approx \frac{1}{1+1} \approx 0,5$ sec. appross

③ $S(j\bar{\omega}) = \frac{1}{1+L(j\bar{\omega})} \Rightarrow$ calcolo il modulo amplificante $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{101}}$

Progetto di un sistema di controllo

Sintesi del regolatore

Problema) Ante: $G(s)$ e andamenti presenti y^o , d , n

→ Si vuole progettare R tc in quello chiuso valgano determinate proprietà (che corrispondono alle prestazioni).

Specifiche (Requisiti)

1) Stabilità in quello chiuso in condizioni nominali

2) Stabilità robusta (in condizioni perturbate): criterio di Nyquist

Criterio di Bode → $\mu > \bar{\mu}$ \Rightarrow determinanti valori $K_m > K$

Assumo che il crit. Bode sia applicabile. Le sue condizioni

siano: $p=0$, $L(s)$ taglia 0dB una sola volta dall'alto verso il basso.

→ Se $G(s)$ ha un polo instabile non posso applicare il Crit. Bode perché anche $L(s)$ ha un polo instabile.

3) Precisione statica $e_{ao} = 0$ oppure $e_{ao} < E_{max}$] per valutare dobbiamo necessariamente conoscere y^o , n , d

4) Precisione dinamica e inseguimento del riferimento ("quanto bene segue $y^o(t)$ ") \rightarrow in maniera informale $y(t) \approx y^o(t)$, formalmente verifichiamo: Tasse, oscillazioni, S:

5) Attenuazione del disturbo $\frac{Y}{d} = S = \frac{1}{1+L}$ si considera d come disturbo di ampiezza D e pulsazione w con $w < w_d \rightarrow d(t) = D \sin(wt)$ e si richiede che l'effetto di d su y sia attenuato di un fattore

6) Attenuazione del rumore $\frac{Y}{n} = \frac{L}{1+L} = F$ consideriamo $n = N \sin(wt)$ e che $w > w_n$ (il rumore va ad agire a HF e il disturbo agisce a LF) si richiede che l'effetto di n su y sia attenuato di un fattore

7) Moderazione della variabile di controllo $Q = \frac{R}{1+L}$ vorrei che $|u|$ (che è l'azione di controllo) sia minore di un valore a partire da $w_{u_{max}}$ (non voglio avere una variabile di controllo con componenti troppo elevate: causano vibrazioni dannose il sis o possono avere uno scadente modello e quindi uno scadente sis controllo)

8) A realizzabile: poli \geq zeri (che A non sia improprio).

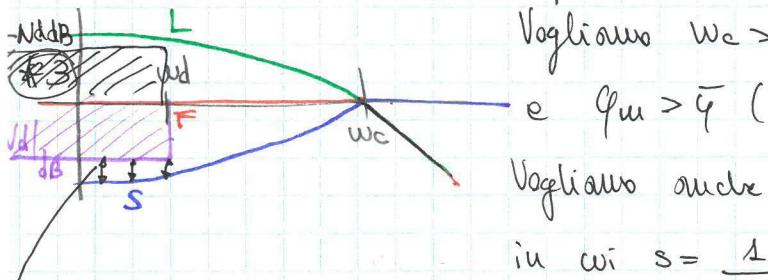
Il 1° e l'ultimo requisito devono essere sempre considerati anche se non sono spesso citati dal testo.

Possiamo cercare di rappresentare i requisiti come vincoli sul diagramma di Bode.

Una rappresentabilità grafica buona è per i requisiti 4, 5, 6, 7.

es: precisione dinamico: $\begin{cases} \text{lass} \\ \text{oscillaz} \\ \text{s:} \end{cases} \xrightarrow{\text{legati alla pulsazione + poli dominanti in quello stesso e dello smorzamento che introducono}} \text{Vogliamo } \omega_c > \bar{\omega}$

traduciamo ① in $\omega = \omega_c$ (pulsaz. critica) e ② in $\zeta \approx \frac{\varphi_m [\text{gradi}]}{100}$. Vediamo



Vogliamo $\omega_c > \bar{\omega}$
e $\varphi_m > \bar{\zeta}$ (a cui è legato ζ)

Vogliamo anche $\omega < \omega_d$ (per il disturbo) $\Rightarrow |S(j\omega)| < N_d$ per $\omega < \omega_d$

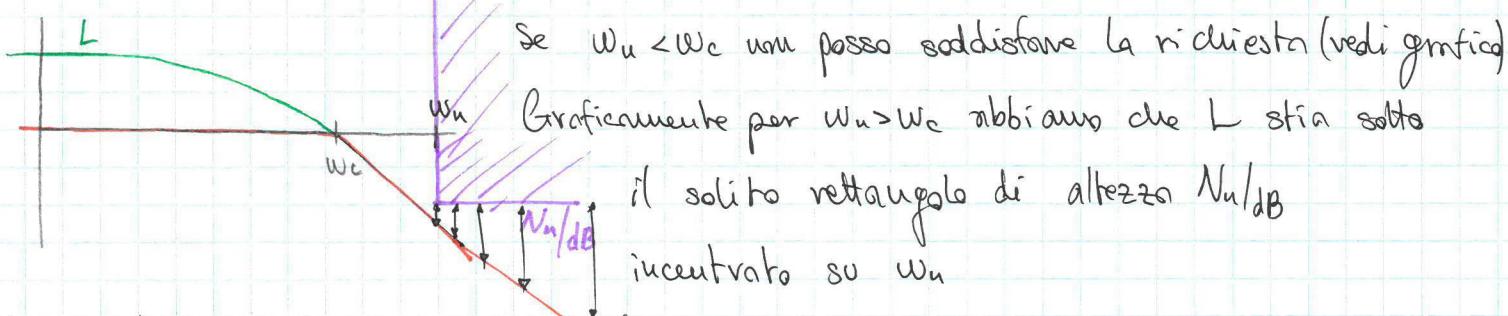
$$\text{in } \omega_i \quad S = \frac{1}{1+L} \quad \text{e} \quad F = \frac{L}{1+L}$$

Voglio che S passi sotto un rettangolo con base da $-\infty$ a ω_d e altezza N_d/dB

Qss: se $\omega_d > \omega_c$ non esisterebbe un modo di soddisfare questo requisito.

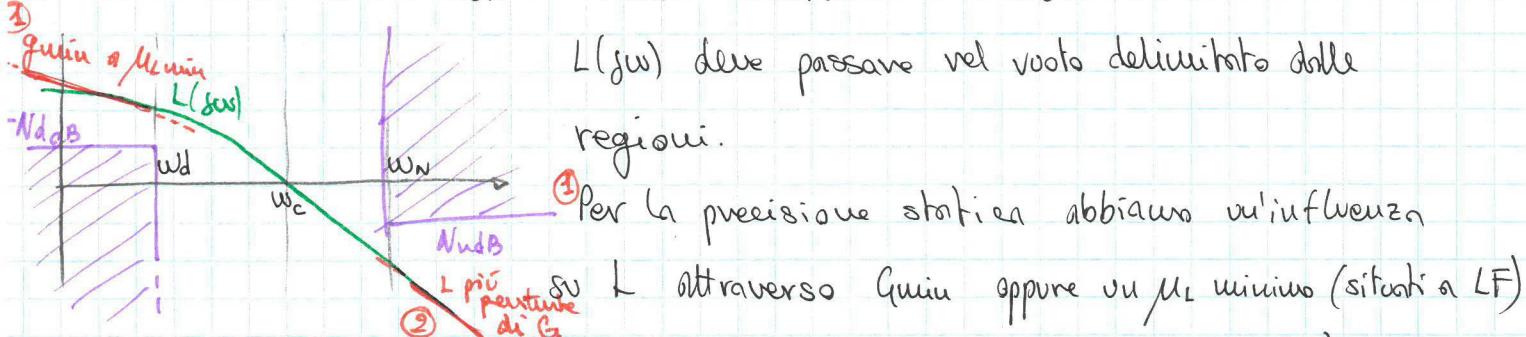
cioè si traduce che L stia sopra un rettangolo (situazione non ben specificata)

Vediamo ora l'attenuazione del rullore ($\omega > \omega_u$)



NB: N_d/dB e N_d/dB sono $< 0 \text{ dB}$ (ovviamente)

Riconducendo L a F , vediamo che L non può passare attraverso la regione stabilità dalla ω_u a N_d/dB . Unendo disturbo e rullore su L :



In fine, per avere la ~~realizzabilità~~ realezzabilità come viene tradotta graficamente?

Se abbiamo poli o maggiori o uguali degli zeri, abbiamo all'intuito che L deve essere più pendente di G o ugualmente pendente

φ_m non è rappresentato graficamente $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ $\varphi_c = \angle [L(j\omega)]$

Perciò:

- 1) Si progetta il modulo
- 2) Si verifica la φ_m attraverso la nostra L condizione.
- 3) Se φ_m non è adeguato, riiprogetto il modulo iterativamente per mettere a posto φ_m .

Progetto di un sistema (nel caso di applicabilità del criterio di Boole)

$$R(s) = \underbrace{\frac{M_R}{S^{gr}}}_{R_{\#1}} \cdot \underbrace{\frac{\prod (1+sT_{R_i})}{\prod (1+sT_{L_i})}}_{R_{\#2}} = R_{\text{STAT}}(s) \cdot R_{\text{DINAM}}(s) \rightarrow \text{Progetto in ordine: } R_1(s) \cdot R_2(s)$$

- 1) Progetto R_1 curandosi solo dei requisiti statici $\rightarrow R_1$ fissato e non più modificabile
- 2) Progetto R_2 " " " " dinamici $\rightarrow R_2$

Nel 1) assumo che il sis sia As in questo modo, verifico ~~poi~~ poi la stabilità solo giungendo al passo 2)

Esercizio

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+30s)(1+100s)} \quad (\text{con costanti: tempo in evidenza})$$

$$\varphi^o = \operatorname{sgn}(t) \quad |d(t)| = 2 \operatorname{sgn}(t) \quad w_c > 0,05 \text{ rad/s} \quad \varphi_m > 35^\circ \quad \operatorname{leal} \leq 0,1$$

Iniziamo con $R_1(s) \rightarrow$ progetto statico:

$$|\operatorname{leal}| = |\operatorname{e}_{y^o}(\infty) + \operatorname{e}_d(\infty)| \quad \text{io so che } |\text{somma}| \leq \text{somma dei moduli} \quad (\text{disug triang})$$

perciò, sapendo che il valore assoluto è sp. non lineare, posso porre la condizione sulla somma dei moduli, mantenendo la linearità

$$|\operatorname{leal}| = |\operatorname{e}_{y^o}(\infty)| + |\operatorname{e}_d(\infty)| \leq 0,1 \quad \text{sapendo che } G(s) = \frac{M_R}{S^{gr}} \cdot \frac{\prod (1+sT_{R_i})}{\prod (1+sT_{L_i})} \xrightarrow{\text{per LF}}$$

$$\operatorname{e}_{y^o}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_R \cdot M_L}{S^{gr+gg}}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{M_R \cdot 10}{S^{gr}}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S^{gr}}{1 + 10/M_R} \quad \begin{cases} \frac{1}{S^{gr+1}} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{e}_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{2}{1 + 10/M_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Posso fare 2 scelte nel progetto statico $g_R \geq 1 \Rightarrow \operatorname{leal} = 0 < 0,1 \quad \checkmark$

$$g_R = 0 \Rightarrow \operatorname{leal} < \frac{3}{1 + 10/M_R} < 0,1 ?$$

$$\text{Devo verificare che } \frac{3}{10/M_R + 1} < 0,1 \text{ per vero} \Rightarrow M_R \geq 2,9$$

nel caso ① setto un tipo positivo e me ne sto alla Mr

Nel caso ② ho grado zero e quindi devo assumere di avere un $Mr \geq 2,9$ che garantisca $|Z_{\text{real}}| < 0$

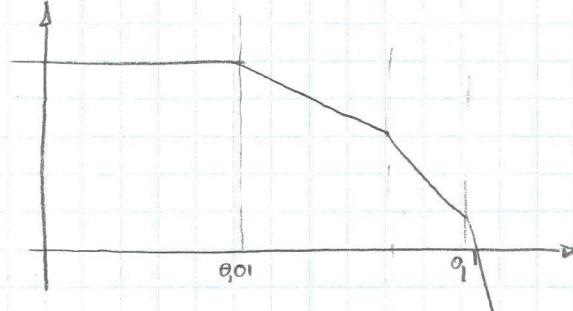
Scegliamo il caso ②, in cui $Mr \geq 2,9$ quindi scelgo per esempio $Mr = 10$

$$R_1(s) = 10$$

$$\text{Progettiamo } R_2(s) = \frac{(1+10s)}{(1+s)}$$

1) Considero $R_2(s) = 1$ e guardo $L(s)$

Vedendo il diag. bode $w_c = 0,15 \text{ rad/s} > 0,05 \text{ rad/s}$
L'aspecifica



calcolo $\varphi_c = \angle L(jw_c) = -40^\circ < 0$ vero in buone

2) Progetto R_2 in termini di sis a fase unita

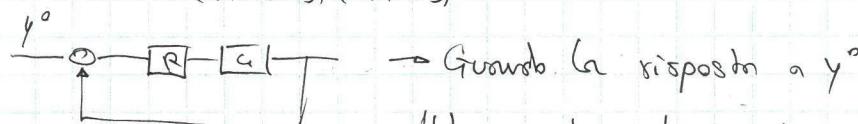
Dopo introdurre dei poli per la realizzabilità, con un polo di 1000 ha pendenza

$$\varphi_c = -\arctg\left(\frac{1000}{0,1}\right) - 2 \arctg(5,0,1) = -89^\circ - 2 \cdot 27^\circ = -143^\circ \approx 0,2 \text{ rad/s}$$

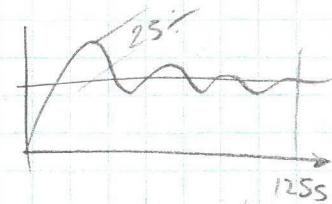
$$\varphi_u = 180 - 143^\circ = 37^\circ > 35^\circ \text{ vero}$$

$$L^*(s) = \frac{100}{(1+100s)(1+5s)^2} = C_1 R = \frac{10}{(1+10s)(1+100s)(1+30s)} \cdot 10 \cdot \frac{\pi(1+5s)}{\pi(1+s)} \rightarrow R_2(s) \Rightarrow$$

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+30s)(1+100s)}{(1+100s)(1+5s)^2} \text{ ho cancellato i poli inutili}$$



Abbiamo due poli complessi conjugati dominanti



$$T_{\text{ss}} = \frac{5}{w_n} \approx 125 \text{ s} \quad w_n = 0,1 \text{ rad/s} \Rightarrow \zeta = 0,37 \quad \Delta\gamma = 100 \text{ e}^{-\frac{5}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \approx 25\%$$

Vediamo invece il caso 1) $R_2(s) = \frac{Mr}{s} \cdot R_1(s)$ $L(s)$ ha $w_c = 0,1 \text{ rad/s}$ con $\varphi_c < 0$

Quindi $\varphi_u < 0 \Rightarrow$ instabile

Se introduco zeri stabili in $L(s) \Rightarrow$ uno zero dà contributo di $+90^\circ$

Poniamo per esempio $R_2(s) = 1 + 100s$ Quindi $R(s) = \frac{Mr}{s} \cdot (1+100s) \rightarrow$

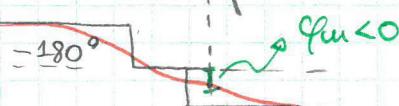
$$\rightarrow L(s) = \frac{10Mr}{s} \cdot [(1+10s)(1+30s)]^{-1}$$



Con $Mr = 1$ $w_c \approx 0,3 \text{ rad/s}$

Abbiamo ancora instabilità $\varphi_u < 0$

talgo un altro polo



$$R_2(s) = (1+100s)(1+30s) \quad L_2(s) = \frac{10\mu R}{s(1+10s)} \quad \text{non è realizzabile (al momento)}$$

Disegniamo il diagramma di Bode e vediamo che $\varphi_m > 0$ un è molto vicino a 0°

Non sto ancora rispettando il requisito di 35°

Dato che con l'unico polo riunito a $0,1$ ottengo $\varphi_m = 45^\circ$, traslo (ω_n/μ)

per spostare W_c a $0,1$ $R(s) = \frac{(1+100s)(1+30s)}{s} \cdot \underbrace{0,01}_{\text{traslazione verso il basso di } 40 \text{ dB}}$

Non è ancora realizzabile tho, aggiungiamo un polo ad HF tipo $(1 + \frac{1}{0,1s})$

$R(s) = \frac{(1+100s)(1+30s)}{s(1+0,1s)}$ ho il controllore realizzabile e ottengo $W_c = 0,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\varphi_m \approx 45^\circ$

Inconvenienti nella progettazione di W_c ad alte frequenze

Cosa succede se W_c è troppo alta? Abbiamo degli inconvenienti:

- 1) In HF Q ha modello molto alto \rightarrow il controllore ecciterà il sis ad alta frequenza
ciò corrisponde ad eccessive ~~eccitazioni~~^{sull'eccitazione} di tipo meccanico o elettrico
- 2) Stiamo lavorando con dei modelli \rightarrow sono buone approx a LF. Se andiamo a HF potenzialmente il modello utilizzato non è affidabile. es: a LF possiamo ignorare induttanze e capacità parassite. Se usiamo il modello senza parassite in HF, il gioco si complica e rischia di andare ad eccitare risonanze che ci sono ma che non ho considerato nel mio modello.
- 3) Risolto di ritardarlo in quello (es controllore digitale che introduce latenza a causa del ritardo introdotto dal clock) che hanno ~~generalmente~~ zero contributi al modello ma contribuiscono sulla fase con $-W_c \cdot T \cdot \frac{180}{\pi}$, ho la W_c fissa come senza ritardo ma la fase cala ancora di più
- 4) Non abbiamo tenuto conto del rumore di misura HF \rightarrow incertezze.

Trattamento del ritardo in fase di progetto

$$G(s) = \frac{10}{s+1} e^{-0.1s}$$

progettare $R(s)$ con $10\omega < 0,1$ per $\varphi^o = \text{sgn}(t) \cdot 1$

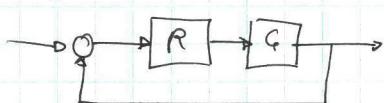
$$\varphi_{\mu} = 75^\circ \Rightarrow T_{AS} = \frac{5}{\omega_u} \quad \Delta\% = 100e^{-\frac{\omega_u}{T_{AS}}} \quad T_{AS} \leq 16,5s \quad \Delta\% \leq 10\%$$

Trovò (equaz $\Delta\%$) con $\Delta\% < 10\% \Rightarrow \zeta \geq 0,55 \Rightarrow \varphi_{\mu} \geq 55^\circ$ circa

Calcolo la ω limite tramite T_{AS} $\omega_c = 0,55 \text{ rad/s}$

Ho tratto T_{AS} e $\Delta\%$ in richiesta ω_c e φ_{μ} utilizzabili per il progetto.

Progetto statico:



$$\text{Considero } R_1 = \frac{\mu_R}{s g_r} \quad \omega_{AS} = \sqrt{\frac{1}{1 + 10 \mu_R}} \quad \text{se } g_r = 0$$

$$\text{Ovvio} \quad \left| \frac{1}{1 + 10 \mu_R} \right| < 0,1 \quad \mu_R > \frac{3}{10} \quad \text{sceglie} \quad \mu_R = 1$$

Progetto dinamico: $\omega_c > 10 \text{ rad/s}$ se non consideriamo il ritardo abbiamo $\varphi_{\mu} \approx 90^\circ$
($180 - 84^\circ$)

inserendo il ritardo (bisogna considerarlo nel calcolo della fase)

$$\varphi_c = -\text{atg}(1 \cdot 10) - \angle e^{-0.1j\omega} = -\text{atg}(10) - 10 \cdot 0,1 \cdot 180/\pi = -84^\circ - 57^\circ \approx -141^\circ$$

→ punto su piano complesso al modul o uguale a fase $0,1\omega$

$$\varphi_{\mu} = 180 - 141^\circ = 39^\circ < 55^\circ$$

desiderati → non va bene

Guardiamo solo il ritardo $\varphi_c = -\omega_c \cdot 0,1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad \varphi_{\mu} \geq 60^\circ$

Se $\varphi_c > -120^\circ \quad -\omega_c \cdot 0,1 \cdot \frac{180}{\pi} > -120^\circ \quad \underline{\omega_c < 21 \text{ rad/s}}$ → Abbiamo un vincolo legato dal ritardo

Se prima potevamo raggiungere qualsiasi ω_c , ora, a causa del ritardo, abbiamo una limitazione di ω_c a meno che non venga trattato il ritardo in altri modi.

L'unica speranza di modifica per controllori del generatore è la riduzione della banda passante.

Per esempio posso progettare $R_2(s)$ per cancellare il polo che causa $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ e sostit. con un polo a più bassa frequenza → contributo minore del ritardo.

$$R_2(s) = \frac{s+1}{1+10s} \rightarrow \text{Abbiamo il nuovo polo, ottenendo } \omega_c = 1 \text{ rad/s} \quad (\text{un decade dopo})$$

Il contributo del polo sarà sempre circa -84° (piano sempre una decade dopo)

$$\varphi_{\mu} = \cancel{-84^\circ} - 0,1 \cdot 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cancel{- 57^\circ} \rightarrow \varphi_{\mu} = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ > 55^\circ$$

$$\underline{\text{es}} \quad C(s) = \frac{s-s}{s+10s} \quad R = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s-1)} \quad L = \frac{10}{s(1+10s)}$$

R ha un polo instabile perché faccia una cancellazione critica

$$Q = \frac{R}{1+Ra} = \frac{40}{S} \cdot \frac{1}{(1-S)} \cdot \frac{8(10S+1)}{10S^2+8+10} \quad \text{no risveglio di prob instabile}$$

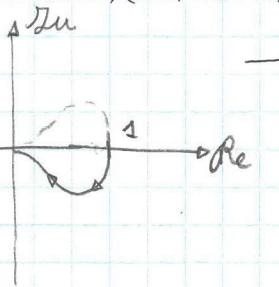
Ho un polo instabile in quella \rightarrow NIENTE BODE

\Rightarrow Non si possono cancellare singolarità instabili

- Se la singol. è un zero \Rightarrow "ci progetta intorno" \rightarrow vincolo aggiuntivo nella L
 - Se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ \Rightarrow zero usare Nyquist

es :

$$C(s) = \frac{1}{(s+1)(-0.1s+1)} \quad \text{pole in } -1 (\text{stable}), 10 (\text{unstable})$$

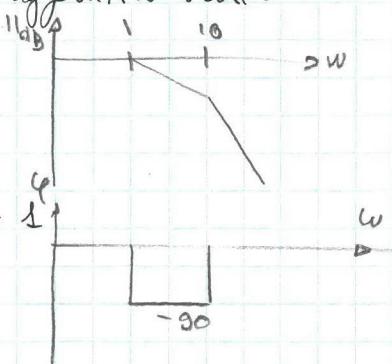


→ Sicuramente uno passo stabilizzante

caso $\bullet R = 1 \rightarrow n \neq p \Rightarrow$ non è stabile

- $R = K$: se $K > 0$ non può stabilizzarlo

Se Kc < 1 vedi corollario criterio Nyquist \rightarrow canto i giri intorno a 1, non più a -1



Case - $s < K < 0 \rightarrow$ no stable

Caso $K < -1$ → gestis il diagramma un altro il pto 1

Faccio -1 giri attorno al pto 1, ma $-1 \neq 1$ \Rightarrow No simb.

Non ho modo di stabilizzare l'anello chiuso con solo K

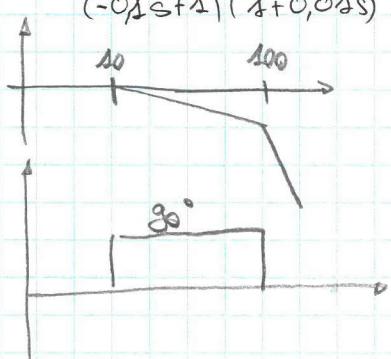
Se invertissi i giri passando da $-s$ a s , avrei stabilità. Manipolo la fase per far avvenire ciò, manipolando il polo stabile.

$$R(s) = -2 \frac{(s+1)}{(1+0,04s)}$$

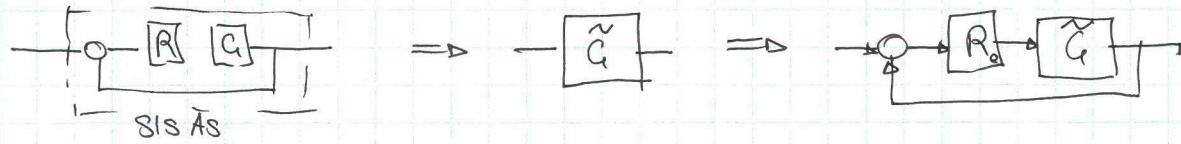
cancelazione
unisce la condizione $K < -1$
sposta il polo a più alta frequenza di quello instabile



$n = p$ $\lambda = \Delta \Rightarrow$ sis stabilizzato



Piaceva a gravitare solo la stabilità con Nyquist. Come faccio a voler avere delle buone prestazioni? O allora voglio ottenere prestazioni specifiche



Metto una nuova retroazione perché so che \tilde{G} è A.S.

Controllori PID

Sono controllori in commercio già realizzati.

PID = proporzionale, integrale, derivativo. $U = U_p + U_I + U_D$

$U_p = K_p \cdot e$ azione proporzionale all'errore (no poli/zeri)

$$U_I = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \text{dominio nel tempo, che ce ne facciamo?}$$

$$U_D = K_D \frac{de}{dt}$$

Trasformiamo nel dominio delle frequenze $\xrightarrow{C} R \xrightarrow{U}$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_I \cdot \frac{1}{s} + s K_D = \frac{s K_p + K_I + K_D s^2}{s} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$

PID IDEALE NON REALIZZABILE

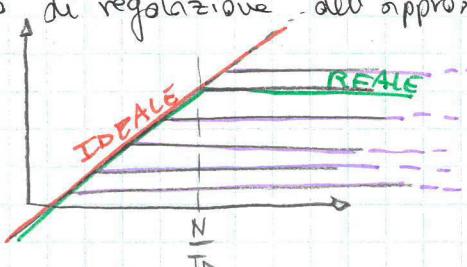
perché a rigore non posso calcolare la derivata di un segnale (ho bisogno del suo futuro). La derivata a rigore è anticipatrice. Posso implementare un PID reale aggiungendo un polo HF $R_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{s T_I} + \frac{s T_D}{1 + T_D \cdot s} \right)$

Ho una diversa parametrizzazione di K_D e K_I

$$T_I = \frac{K_p}{K_I} \quad T_D = \frac{K_D}{K_p} \quad \text{In ambito industriale si trovano entrambe le parametrizzazioni}$$

N = parametro aggiuntivo di regolazione dell'approx dell'azione derivativa

• Derivativa $\frac{s T_D}{1 + \frac{T_D \cdot s}{N}}$

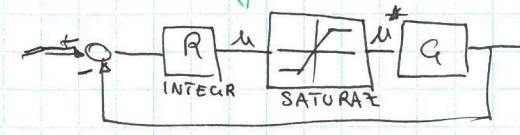


N mi dà l'idea dell'approx di quanto l'approx usata sia ad alta frequenza.

Posso ~~ricaudarci~~ ricaudrmi alla taratura del PID se so che durante il progetto di R so di poter usare solo due zeri, un polo nell'origine e uno spostato.

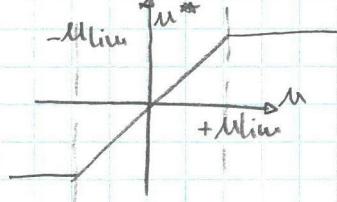
Carica integrale

Se integro (aumento il valore di u troppo) e arrivo alla saturazione, non ho più controllo sopra la saturazione.



Entro più del massimo poss.
Entro ~~per tempo~~ → blocco unitario

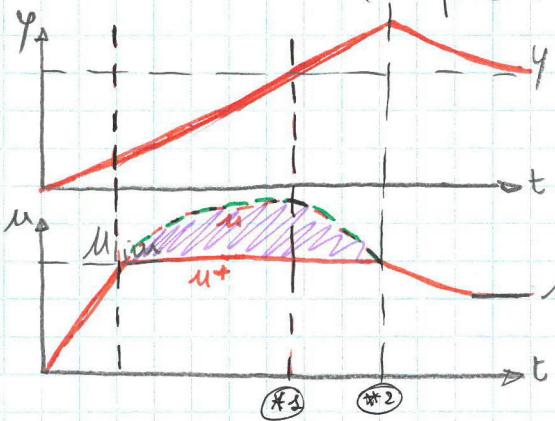
es: limitazioni nell'aumentare la coppia di un



Dentro Minuti → blocco unitario

Fuori Minuti → saturazione

(non posso dare più di tot al blocco di controllo)



Consideriamo ora un regolatore di tipo integrale

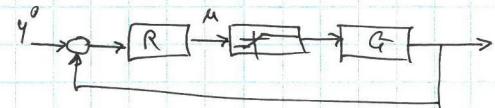
$$R(s) = \frac{K_I}{s}$$

①: l'uscita supera il valore assegnato y^* , ma il controllore è già saturo da un po'. Ci vuole un po' di tempo prima che esso torni giù ②

L'area blu è la carica integrale, ha un variabile di controllo che cresce con quella reale riunite fissa. È come se avessi aperto l'anello. Il feedback introduce un peggioramento delle prestazioni non rappresentabile con il diag Bode. Se va male, rischia anche l'instabilità invece che la diminuzione delle prestazioni.

Controllori PID (anti wind-up)

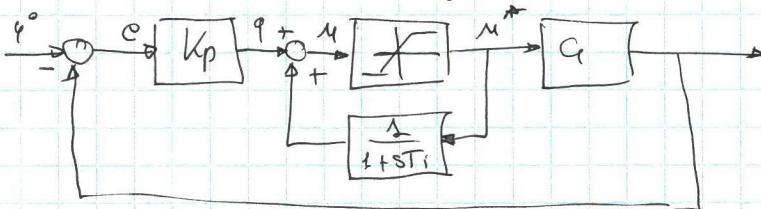
- carica integrale < il controllore ha azione integrale
l'attuatore ha saturazione



Come risolviamo questo problema guardando i PID?

La parte derivativa una soffre della carica integrale

$$R_{PI} = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

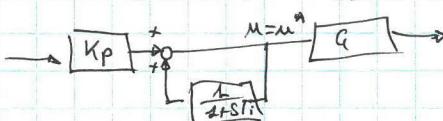


Questa è un'azione proporzionale integrale con antiwindup

Dobbiamo convincerci che esso funzioni come da specifica quando u è in sat ①

e dobbiamo convincere che risolva il discorso della saturazione ②

$$\textcircled{1} \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$



$$\frac{dF(s)}{ds} = K_p \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{1+sT_i} = K_p \cdot \frac{1+sT_i}{s+1+sT_i}$$

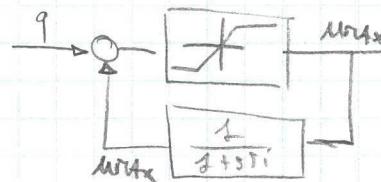
$$= K_p \cdot \frac{1+sT_i}{sT_i}$$

→ è uguale a $R_{PI} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$ ✓ funziona normalmente

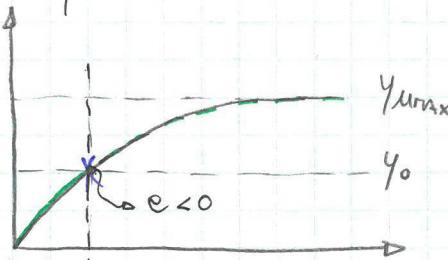
② Abbiamo ora invece ~~$u = u_{max}$~~ $u = u_{max}$ perché $e > 0$ per molto tempo

Abbiamo un punto in cui $e < 0$

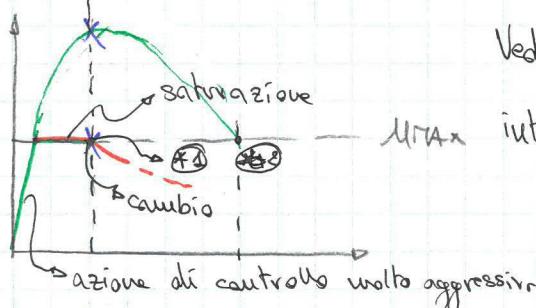
Allora $q < 0$ che ~~è~~ si somma a u_{max} . Ottengo $u = u_{max} + q \xrightarrow{< 0}$



Che giunto causa $u < u_{max} \rightarrow$ mi ricordo al caso senza saturazione



(e cambia segno perché ho una y maggiore di quella che vorrei del riferimento)

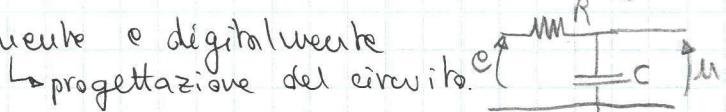


Vediamo che ① è molto più rapido di ② ed interviene. L'antiwindup interviene prima

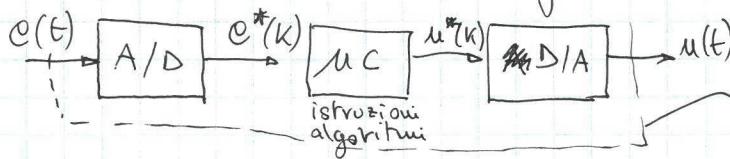
Realizzazione digitale

Partiamo dall'Hp di avere già risolto la FdI $R(s)$, come lo costruisco digitalmente?

Possiamo generalmente realizzarlo analogicamente e digitalmente



Vediamo la realizzazione digitale (molto versatile)



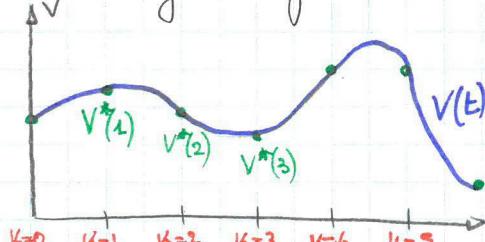
Voglio che tutto ciò si comporti come un $\sim R(s)$. Posso cambiare molto facilmente i parametri (cosa che è difficile analogicamente)

Sto lavorando digitalmente \rightarrow tempo discreto $\rightarrow R(\text{digitale}) \sim R(s)$ vera e propria

Campionatore

$V(t) \rightarrow$ segnale generico

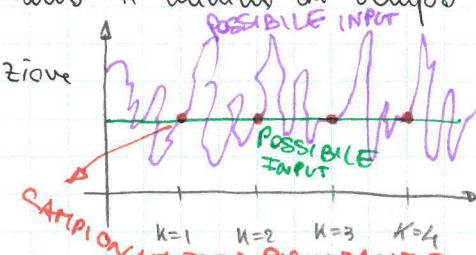
$$V^*(k) = V(t_k) \text{ dove } t_k = t_0 + kT \text{ in cui } k = 0, 1, 2, \dots$$



$$t_0, t_0+T, t_0+2T, t_0+3T, t_0+4T$$

Va bene il tempo T ? Vediamo il minimo di tempo per avere una rappresentazione affidabile di $V(t)$

Vediamo che uno è detto che il campionamento sia fedele



Sappiamo che possiamo rappresentare $V(t)$ tramite Fourier

$$V(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(jw)| \sin(wt + \angle V(jw)) dw \quad \Rightarrow \text{tutti segni}$$



Se prendo $V(t) = \sin t$ che frequenza dovo avere per distinguere

da un segnale costante? Con frequenza di campionamento

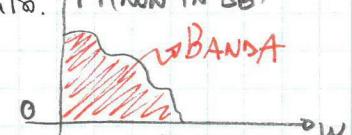
corrispondente al mezzo periodo, distinguo il seno dal segnale costante (ma non lo distinguo con pulsazioni più elevate)

Dato un pulsaz massim ω_{MAX} , se $T < \frac{\pi}{\omega_{MAX}}$ \Rightarrow non perdo informazioni

Teorema di Shannon

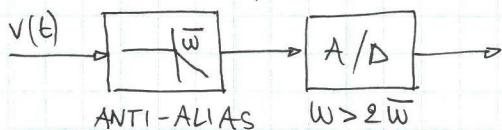
Dato un segnale $v(t)$ a banda limitata da ω_{MAX} , esso è ricostruibile univocamente dalla sua versione campionata $V(k) = V(t_k)$ se $\omega_N > \omega_{MAX}$ dove $\omega_N = \frac{1}{2} \omega_s$ (pulsazione di Shannon)

In cui $\omega_s = \text{pulsazione di sampling} = \frac{2\pi}{T}$ tempo di campionamento. $\uparrow \uparrow \text{(Non in dB)}$
(Oss: ω_N è anche detta pulsazione di Nyquist)



In realtà ho sempre rumore HF quindi $\omega > \omega_{MAX} \Rightarrow$ USO FILTRO ANTI ALIAS

Se $V(t)$ non è quindi a banda limitata, è necessario introdurre il filtro anti alias.



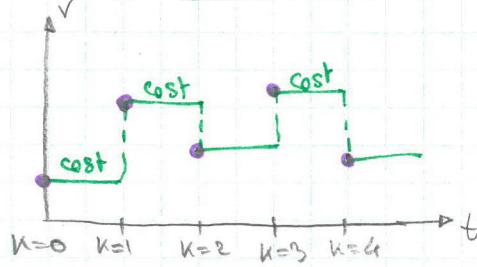
Se bypasso MC e oh A/D riconverto D/A, se rispetta Shannon, mi ritrovo in uscita un segnale fedele all'entrata.

Decampionatore ideale

$V(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(k) \frac{\sin(\omega_N t - k\pi)}{\omega_N t - k\pi}$ per l'idealtà, ho bisogno di valori passati e futuri (tralasciando l'impossibilità di $-\infty$ e $+\infty$ perché sono questi indici di passato futuro). Questo è nel caso del tempo reale. Se volessi convertire un file audio so perfettamente i campioni passati e futuri nel file.

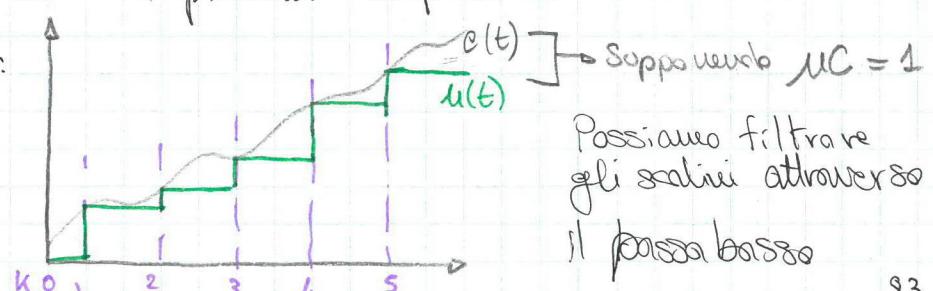
Per azioni di controllo quindi il decampionatore ideale non è realizzabile,

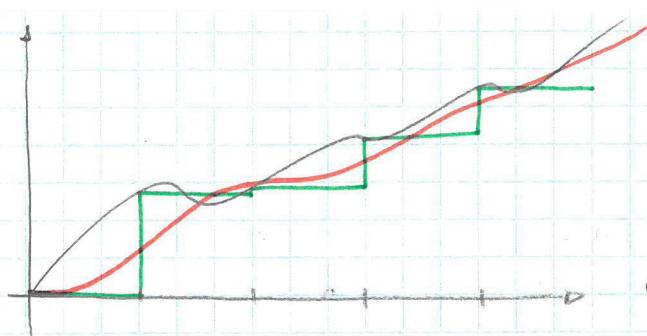
uso il mantenitore di ordine zero: mantiengo il segnale costante fino a che



non arriva il prossimo campionatore

es:





Vediamo che l'uscita filtrata rispetto all'ingresso risulta ritardata. Ho infatti un ritardo di mezzo periodo di campionamento dovuto al fatto che uno so passato / futuro.

Di conseguenza ho un ritardo in ambo \Rightarrow diminuzione di margine di fase
Dove tenere conto del ritardo in ambo nella progettazione del controllore.

Il controllore è una serie di istruzioni che calcolano $u^*(k)$ a partire da $c^*(k)$

$$c^*(k) \xrightarrow{\text{SCATOLA RAGIONE}} u^*(k) \rightarrow \text{Questi sono sis a tempo discreto.}$$

Rappresentazione per sis a t. discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \rightarrow \text{movimento libero e movimento forzato}$$

Il movimento libero ha l'equivalente di Lagrange calcolabile iterativamente

$$u(k) = 0 \quad x(0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= Ax_0 \\ x(2) &= Ax_1 = A^2x_0 \\ x(3) &= Ax_2 = A^3x_0 \end{aligned} \quad \rightarrow x_L(k) = A^k x_0$$

Movimento forzato

$$x(0) = 0 \quad u(k) \neq 0$$

$$x(1) = Ax_0 + Bu_0 = B_u_0$$

$$x(2) = Ax_1 + Bu_1 = ABu_0 + Bu_1$$

$$x(3) = Ax_2 + Bu_2 = A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$$

$$x_F(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h} B u(h)$$

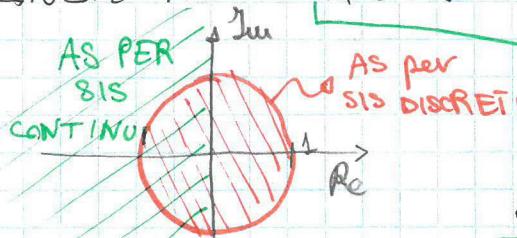
Vale comunque la sovrapposizione delle cause e degli effetti

Dati x_L e x_F possiamo ricavare le condizioni di stabilità:

$$\text{es } x(k+1) = \alpha x(k) \rightarrow \text{esso scalare } x_L(k) = \alpha^k x_0$$

prendo $|\alpha| < 1$ per avere convergenza

CONDIZ AS: $\text{AS} \Leftrightarrow \forall \lambda \lambda \text{ è autovettore di } A$ quindi



$$|\lambda| < 1$$

$$\text{Data } A: |\lambda_i| \leq 1 \text{ e } \forall \lambda_i: |\lambda_i| = 1 \text{ w.g. } (\lambda_i) = \omega_n(\lambda_i)$$

SEMPLICE STABILITÀ

Trasformata Zeta

Def: sia dato $v(k) = \{v(0), v(1), v(2), v(3), \dots\}$ la sua trasformata zeta è

$$V(z) = v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^{-k} \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

Impulso a tempo discreto

$$i_{\text{imp}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[i_{\text{imp}}(k)] = 1 + 0z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} = 1$$

- Esponenziale a TD

$$v(k) = a^k \quad \mathcal{Z}[a^k] = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

La serie geometrica converge a $\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ se $|z| > a$

La serie geometrica converge a $\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ se $|z| > a$ è la serie geometrica equivalente dell'asse di convergenza del caso continuo (vedi trasformata Laplace)

è simile nel caso continuo $v(t) = e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}$

- Scalino a TD

$$sca(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k > 0 \\ 0 & \text{per } k \leq 0 \end{cases} \rightarrow \text{è equivalente a un exp discreto in cui } a=1$$

$$\mathcal{Z}[sca(k)] = V(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

PROPRIETÀ TRASFORMATA ZETA

1) Linearità $v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k) \rightarrow V(z) = \alpha V_1(z) + \beta V_2(z)$

2) Anticipo $V_2(k) = v_1(k+1) \quad \nabla_2(z) = z[V_1(z) - v_1(0)]$

3) Ritardo $V_2(k) = v_1(k-1) \quad \nabla_2(z) = z^{-1}[V_1(z)]$

es $\nabla_2(k) = v_1(k+1)$ (Δ in anticipo)

$$\begin{aligned} V_2(z) &= v_1(0) + v_1(1)z^{-1} + v_1(2)z^{-2} + \dots = v_1(1) + v_1(2)z^{-1} + v_1(3)z^{-2} + \dots = \\ &= (v_1(1)z^{-1} + v_1(2)z^{-2})z + v_1(0)z - v_1(0)z \\ &= (\nabla_1(z) - v_1(0))z \end{aligned}$$

$\Rightarrow z$ operatore di anticipazione

es Ritardo è come l'anticipo un "rigirato" $\rightarrow z^{-1}$ operatore di ritardo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \mathcal{Z}[x(k+1)] = z[x(z) - x(0)] = Ax(z) + Bu(z) \rightarrow$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad \rightarrow (zI - A)x(z) - Ax(z) = Bu(z) \rightarrow$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = (x(z) - x(0))z \quad \rightarrow (zI - A)x(z) = Bu(z) + zx(0) \rightarrow$$

$$\rightarrow x(z) = (zI - A)^{-1}Bu(z) + (zI - A)^{-1}z^x(0)$$

$$\Rightarrow y(z) = [(zI - A)^{-1}B + D]u(z)$$

considera $x(0)$
se null
ottengo \Rightarrow

possiamo vedere in ultimis punti che $y(z) = C(z) \cdot u(z)$ in cui $C(z)$ è la FdT del sistema a T.D. Vediamo il parallelismo con il tempo continuo.

$C(z) = C(sI - A)^{-1}B + D$ Anche nel TD $C(z)$ è possibile scrivibile come $\frac{N(z)}{D(z)}$

Vale lo stesso ragionamento per poli e zeri.

$$y(z) = C(z) u(z)$$

$$\frac{C(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0} \quad y(z) D(z) = N(z) u(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow (z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0) y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) \cdot u(z)$$

$$y(z) \cdot z^m + y(z) \cdot a_{m-1} z^{m-1} + \dots = \boxed{\text{le}(z) b_m z^m + u(z) b_{m-1} z^{m-1}} \rightarrow \text{autotrasformo}$$

$$y(z) z^m \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(K+u) \quad \left[\text{seguale traslato nel dominio del tempo di un passo} \right]$$

$$u(z) z^m \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} u(K+u) \quad \rightarrow \text{sfrutto la linearità della trasformata}$$

$$y(K+u) + a_{m-1} y(K+u-1) + \dots = b_m u(K+u) + b_{m-1} u(K+u-1) + \dots$$

$$y(K+u) = -a_{m-1} y(K+u-1) + \dots + b_m u(K+u) + b_{m-1} u(K+u-1) + \dots \quad \rightarrow$$

→ questa rappresentazione è detta equazione alle differenze

(che è una eq differenziabile nel caso di sis tempo continuo)

I valori all'istante precedente dipendono dai valori passati:

Questa eq è sia la def del sis, sia l'algoritmo di calcolo del sis (grazie ai valori passati posso calcolare i valori successivi da buttare fuori)

es

~~$$C(z) = \frac{z+3}{z^2 + 0,5z + 1} = \frac{y(z)}{u(z)}$$~~

$$y(z) \cdot (z^2 + 0,5z + 1) = u(z)(z+3) \quad z^2(y(z)) - 0,5z(y(z)) + y(z) = z u(z) + 3 u(z) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$$y(K+2) - 0,5(y(K+1)) + y(K) = u(K+1) + 3 u(K) \quad \text{traslo l'asse del tempo di 1 passo}$$

$$y(K+1) - 0,5 y(K) + y(K-1) = u(K) + 3 u(K-1)$$

Se sono all'istante K , il prossimo valore dell'uscita è:

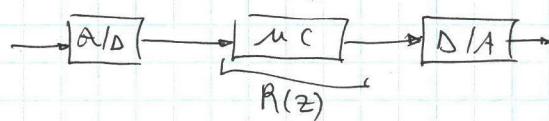
$$y(K+1) = 0,5 y(K) - y(K-1) + u(K) + 3 u(K-1)$$

Implementations in pseudocode:

while (1) {

- read μ
 - $y_{\text{new}} = 0,5 y - \mu_{\text{old}} + \mu + 3\mu_{\text{old}}$
 - $y_{\text{old}} = y$
 - $y = y_{\text{new}}$
 - $\mu_{\text{old}} = \mu$

Scelta di $R(z)$

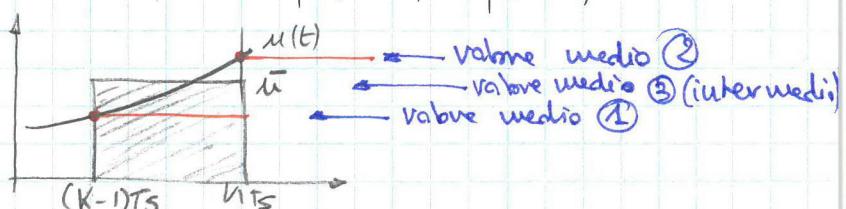


progetto digitale
 $R(\bar{z}) = ?$ progetto $R(s)$ (cautivo) e dopo
 discretizza in $R(z)$

Nel 2° caso una visci revo mai ad avere $R(z) \approx R(s)$ per a causa del ritardo introdotto da campionatori e multeutori

Discretizzazione

$$u \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow y \quad y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{voglio un } R(z) \text{ tc } y^*(K T_s) \approx y(K T_s)$$



Se $\bar{M}(k)$ = valore medio di $M(t)$ con

$t \in [(k-1)T_s, kT_s]$ però, per essere definito il momento zero

$$y^*(k) = y^*(k-1) + \tilde{m}(k) T_S \quad \text{in } w_i \quad \tilde{m}(k) = (1-\alpha) m^*(k-1) + \alpha m^*(k) \quad \text{in } w_i \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Definisco il valore come una combinazione lineare dei due
 ④ $\alpha = 0 \quad \tilde{\mu}(k) = \mu^*(k-1) \rightarrow$ Eulero in avanti o esplicito

$$③ \alpha = \frac{1}{2} \quad \tilde{\mu}(k) = \frac{\mu^*(k-1) + \mu^*(k)}{2} \rightarrow \text{faccio un'approx trapezoidale} \rightarrow \text{Tustin}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = Ts \frac{\alpha z + (1-\alpha)}{z - 1} = Ts \frac{\alpha + (1-\alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

$$\frac{1}{S} \longrightarrow T_S \quad \frac{\alpha + (1-\alpha) z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

tempo discrete

tempo contínuo

Possiamo ricavare un derivatore invertendo con il reciproco:

$$S \rightarrow \frac{z-1}{Ts(\alpha z + (1-\alpha))} \Rightarrow \text{trasformazione bilineare}$$

Permette di trasformare la variabile s nella variabile z

Perciò dato $R(s) \rightarrow R(z) = R \left(\frac{z-1}{Ts(\alpha z + (1-\alpha))} \right)$

Abbiamo le proprietà della discretizzazione

- Se $R(s)$ è razionale, $R(z)$ è razionale (se parto da LTI arrivo a ~~LTI~~ $\xrightarrow{\text{discretizzazione}} s \in \mathbb{S}$ in αT_D)
- Se $R(s)$ è propria (di ordine n) $\Rightarrow R(z)$ è propria di ordine n purché $R(s)$ non abbia poli esattamente in $\bar{s} = \frac{1}{\alpha Ts}$
- $R(s)$ con singolarità in \bar{s} $\xrightarrow{\text{discretizzazione}} R(z)$ ha singolarità in $\bar{z} = \frac{1 + (1-\alpha)Ts \cdot \bar{s}}{1 + \alpha Ts \cdot \bar{s}}$ una reale
- Zeri di campionamento: La discretizzazione ha il potere di creare zeri aggiuntivi (vedi la $s \rightarrow \frac{z^n - 1}{p^n}$) un poli aggiuntivi

- La mappatura è 1:1 per i poli \Rightarrow condizioni di stabilità
- (tot poli in s \Rightarrow tot poli discretizzati) senza poli in più

- caso Euler in avanti $\alpha=0$
 $\xrightarrow{\text{discretizzazione}}$ i poli vengono spostati i poli
- caso Euler indietro $\alpha=1$

- caso Tustin $\alpha=0,5$



Con questo caso rischia di non conservare la stabilità portando da un sis AS nel continuo

mentre una mappatura è nella cfr di raggio 0,5 centrata in 0,5

La mappatura arriverà in tutta la cfr di raggio 1

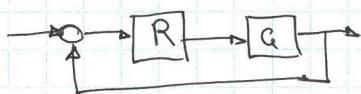
Solo con Euler in avanti devo verificare di mantenere la stabilità, negli altri casi la stabilità viene automaticamente mantenuta.

Ora parto da $R(s)$ che soddisfa i requisiti, ~~scegliere~~ possiamo tenere conto di:

1) Scelta del tempo di campionamento 3) Calcolo dei ritardi aggiuntivi

2) Discretizzazione di $R(s)$

1) Dovrò soddisfare ~~l'equazione~~ trovando la W_{MAX} necessaria



Dovrò normalmente scegliere $W_s \geq W_c$ (ideale)

In pratica si sceglie $W_s > 10 W_c$ con anche $W_s < 50 W_c$

Non è da esagerare con la pulsaz MAX per motivi di: costo, mi basta un piccolo errore di conto per avere casini se ho T_s piccolo (posso rischiare di uscire dalla cfr 1 a causa di incertezze), se prendo W_s intelligentemente sto abbondantemente all'interno della cfr

~~2) fai 2) Decido Eulero avanti/indietro /Tustin e mantenere A_s~~

3) $\hat{f}_m = f_m - W_c \frac{T_s}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ perdita di fase dovuta al campionamento

Dobbiamo aggiungere anche $(-W_c \frac{T_{CALC}}{T} \cdot 180 - \angle [Filtro anti-alias])$
per precisione, questa \rightarrow tempo di rec per i conti
aggiunta viene però trascurata.

CS discretizzazione con Tustin

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s^2 - 4s + 3} & s &= \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} & C(z) &= \frac{1}{\frac{4}{(T_s)^2} \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} - 8 \frac{z-1}{z+1} + 3} = \\ &= \frac{T_s^2 (z^2 + 2z + 1)}{4z^2 - 8z + 4 - 8T_s z + 8T_s + 3T_s^2 (z^2 + 2z + 1)} & = & \frac{T_s^2 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 (4 \cdot 8T_s + 3T_s^2) + (6T_s^2 - 8) z + 4 + 8T_s + 3T_s^2} \end{aligned}$$

zeri di campionamento