

QUANTUM CIRCUITS AND DEVICES

**Prof. Daniele Ielmini
A.A. 2023/24**

Burattini Michelangelo

ESSENTIAL Quantum MECHANICS

Schrodinger equation 1926 :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x,t) \right] \Psi(x,t) = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

↓
dipendente dal tempo

$\Psi(x,t)$ e' la funzione d'onda
e' la soluzione dell'equazione

per una dimensione, ma puo' essere estesa anche al 3D;
il primo termine e' detto

HAMILTONIAN FACTOR $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x,t)$

↳ operatore matematico
nella meccanica quantistica

l'elettrone e' trattato come un'onda e non come una particella

Born's postulate (1927) \rightarrow densita' di probabilita' di trovare la
particella con funzione d'onda $\Psi(x,t)$

$P(x,t) dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx \in \mathbb{R}$

↳ probabilita' di trovare la particella
tra x e $x+dx$ al tempo t ↳ e' anche detta "ampiezza di probabilita"

↓
completo cay.

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \Leftarrow$ della probabilita'

Le soluzioni dell'equazione d'onda non forniscono una predizione
deterministica del moto delle particelle

\rightarrow Non posso conoscere la posizione nemmeno se conosce velocita' e la
posizione per $t=0$ Heisenberg, 1927



tutta la meccanica
quantistica
è solo la
probabilità e non
è deterministica

la funzione d'onda ci fornisce solo un'informazione
probabilistica (principio di indeterminazione di Heisenberg)



$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

perlo calcolare il valore atteso \rightarrow per un numero $N=+\infty$ di misure

perche calcolare per $N \rightarrow +\infty$ misure cose perche aspettavvi

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx \quad \text{come posizione (attesa)}$$

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi dx \quad \text{come momento (attesa)}$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$\hat{\cdot}$ = "operator", come anche per \hat{H}

→ non e' una funzione di x , ma e' un operatore di cui dx

OPERATOR ogni grandezza fisica (osservabile) puo' essere rappresentata come un operatore

energia totale \downarrow
momento \downarrow
posizione \downarrow

$$\hat{K} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{energia cinetica}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{d}{dt} \quad \text{energia totale}$$

$$\hat{K} = -i\hbar \frac{d}{dx} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) / 2m = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

→ possiamo vedere l'equazione di Schrödinger come conservazione dell'energia con gli operatori

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\text{cinetica potenziale}} + V(x,t) = i\hbar \frac{d}{dt}$$

e' un autovettore in uno spazio funzionale

l'autofunzione e' una funzione che se "operata" tramite un operatore restituisce la funzione stessa moltiplicata per uno scalare detto autovalore

proprietà: ogni operatore \hat{O} possiede AUTORIVI e AUTOFUNZIONI

$$\hat{O}\psi_n = \alpha_n \psi_n \quad \text{come per l'algebra matriciale } (\hat{A}\vec{x} = \lambda \vec{x})$$

autovalore \uparrow \Rightarrow autovalore
autofunzione \downarrow \hookrightarrow autovettore

Ψ_n rappresenta un set di funzioni ortonormali e quindi il prodotto scalare fra due di queste funzioni è la **DETA DI KRONIGER**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \psi_j dx = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

proprietà commutativa $\hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi \neq 0$ generalmente non vale!

ma possiamo definire un **commutatore**: $[A, B] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

esempio: $[x, p_x] = x (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi)$
 $= \cancel{-i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}} + i\hbar \psi + \cancel{i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}} = i\hbar \psi$ **commutatore**
 $\Rightarrow [x, p_x] = i\hbar$

per i non-zero commutatori vale la proprietà $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Ψ TEMPO-INDIPENDENTE

per semplicità ipotizzo che $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$

↑ parte dipendente dello spazio
↓ dipendente dal tempo

quindi è possibile solo se $V(x,t) = V(x)$ (potenziale indipendente dal tempo)
 allora, otengo sostituendo la seguente espressione:

$$(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x))\psi(x)\varphi(t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\right)\varphi(t) = i\hbar \psi(x) \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

dividendo per $\psi(x)\varphi(t)$ ottengo

$$\underbrace{\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)}{\psi(x)}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{i\hbar \frac{d\varphi}{dt}}{\varphi(t)}}_{g(t)}$$

$f(x) = g(t) = \Xi$ costante

la parte spaziale diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = \tilde{E}\psi(x)$$

autovalori

$$\hat{H}\psi = \tilde{E}\psi \Rightarrow + \text{ generalmente } \hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad n \in \mathbb{N}$$

la parte temporale diventa:

$$\frac{d\psi}{dt} = -i \frac{\tilde{E}_n}{\hbar} \psi(t) \quad \text{che ha come soluzione } \psi(t) \propto e^{-i \frac{\tilde{E}_n t}{\hbar}} = e^{-j\omega t}$$

la soluzione totale è data dalla sovrapposizione delle due precedenti:

$$\Psi(x,t) = \psi_n(x) e^{-j\omega t}$$

(BASIS STATE \rightarrow una sola funzione)
STATIONARY STATE

in realtà poi la soluzione + generale contiene tutti gli stati base:

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-j\omega t} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\tilde{E}_n}{\hbar}$$

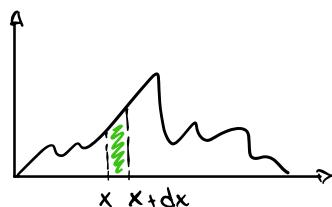
↓

probabilità di ampiezza di misurare la mia particella in quel
determinato stato base (ψ_n)

$$\rightarrow \sum_n |c_n|^2 = 1 \quad \text{dove } |c_n|^2 \text{ è la probabilità corrispondente}$$

=> quindi un algoritmo quantico deve essere tale da trovare lo stato base con cui' elevata probabilità (es. 99,9%)

la probabilità $p(x)dx = |\Psi|^2 dx$



FREE PARTICLE

ipotizzo il potenziale non solo indipendente dal tempo, ma pure costante

$$V(x,t) = V(k) = V = \text{costante}$$

allora:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi = E \Psi \quad \text{con } E > 0 \quad \text{e } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

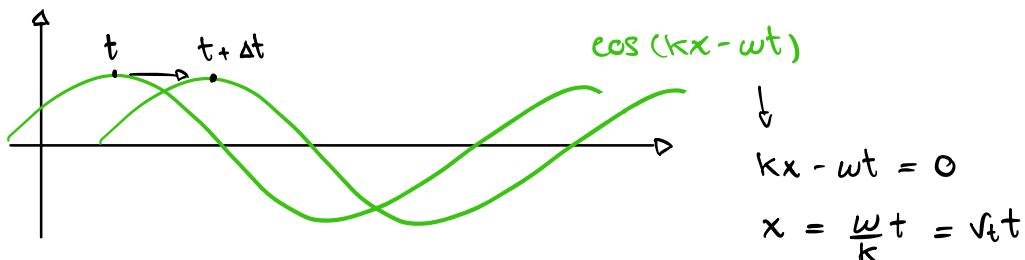


$$\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{la rappresento con Euler}$$

e quindi: $\Psi(x,t) = \Psi(x) \varphi(t)$ dove $\varphi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ come visto

$$= A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

che e' la rappresentazione di due onde (TRAVELLING WAVE)



l'altra onda viaggia in direzione opposta

se calcolo il modulo al quadrato $|\Psi|^2 = |A|^2$ \rightarrow e' costante e quindi non ho informazioni sulla posizione della particella; posso dire che

$$\Delta x = \infty \Rightarrow \Delta p \Delta x \gg \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p = 0$$

$p = \hbar k$ (venerà dimostrato
nel seguito)

consideriamo l'auto funzione dell'operatore :

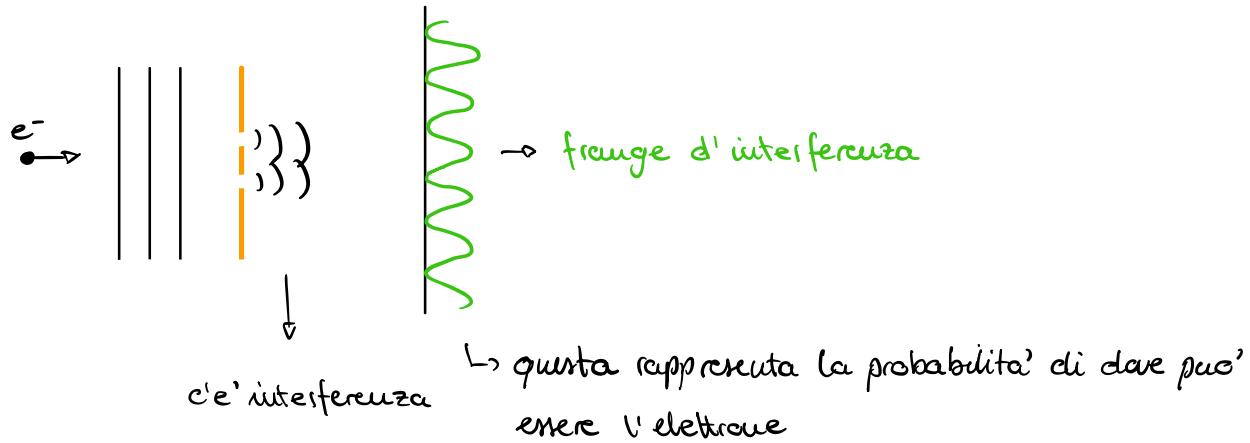
$$-i\hbar \frac{d}{dx} \Psi = p_x \Psi$$

\uparrow
 e^{ikx}

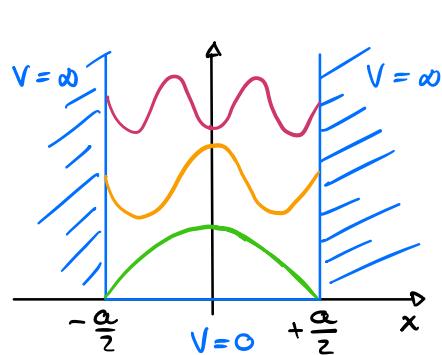
$$\Rightarrow -i\hbar ik \Psi = p_x \Psi \Rightarrow p_x = \hbar k$$

che posso sostituire in $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$ che e' la definizione di
ENERGIA CINETICA

esempio ①



esempio ②



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi = E\Psi$$

$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2}}_{\text{finito}} \quad \underbrace{V\Psi}_{\infty} \quad \underbrace{E\Psi}_{\text{finito}}$

allora $\Psi = 0$ altrimenti l'uguaglianza e' tra parti finite e infinite e non vale
⇒ non ha dipendenza dal tempo

→ l'onda e' confinata all'interno della barriera di potenziale : e' un corpo fermo all'interno

→ e' una funzione pari $\Psi(-x) = \Psi(x) = A \cos kx$ con $a = \frac{\lambda}{2}$

ma posso immaginarmi anche + periodi interi (,) e quindi più generalmente posso dire che

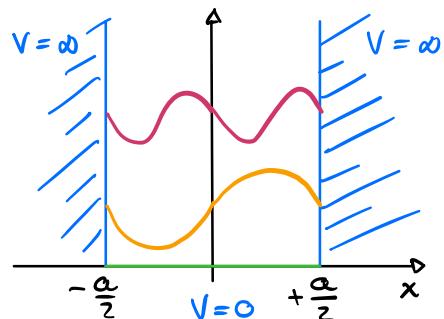
$$a = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = n \frac{\pi}{a}$$

n DISPARI: n = 1, 3, 5, ...

ma posso avere anche il caso in cui l'onda è un seno e quindi è una funzione dispari:

$$\Psi(-x) = -\Psi(x) \rightarrow \Psi(x) = B \sin kx \quad \text{e} \quad a = n \frac{\lambda}{2}$$

con n = PARI = 2, 4, 6, ...

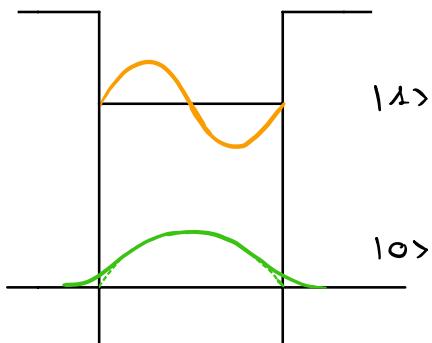


$$\tilde{E}_n = \frac{n^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} n^2$$

\downarrow

aumenta con n^2

da questi esempi possiamo derivare il **QBIT** come segue:



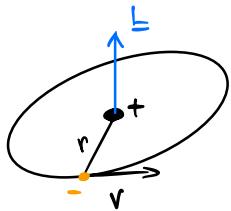
$\left. \begin{array}{l} \text{'KET'} \\ \text{DIRAC NOTATION} \end{array} \right\}$

posso generare un **qbit** tramite sovrapposizione di questi due stati

SPIN

prima introduciamo il momento angolare:

l'elettrone viaggia attorno al nucleo (protone) a distanza r e con velocità tangenziale v

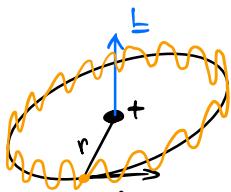


allora definisco il momento angolare come:

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

\hookrightarrow quantità di moto dell'elettrone
 \hookrightarrow posizione particella (elettrone)

Se partiamo ad un approccio quantico posso descrivere l'elettrone come un'onda



$$\rightarrow |\Psi|^2 = 0 \text{ O.I.}$$

\hookrightarrow raggiunge il punto iniziale l'onda è in fase (ha interfe-
renza costruttiva)

DE BROGLIE

$$\Rightarrow 2\pi r = n\lambda \stackrel{\downarrow}{=} n \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\hbar}{p} = n \frac{\hbar}{p}$$

$$pr = n \frac{\hbar}{2\pi} = nh$$

ma non è esatto perché abbiamo fatto delle approssimazioni

unità fondamentale
del momento angolare
 $(\frac{\hbar}{2\pi})$

\rightarrow ma $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ il momento angolare è quantizzato

$$L = nh$$

BOHR

quindi non tutte le "orbite" sono possibili, ma solo alcune che sono quantizzate (multipli interi di una base)

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{dove } l = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \text{quantizzazione del modulo}$$

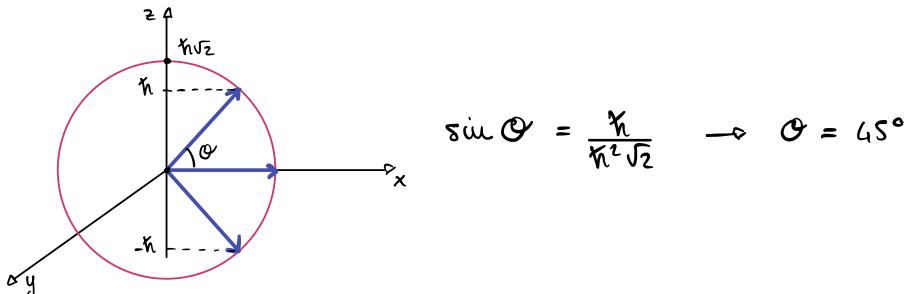
$$L_z = \hbar m \quad \text{dove } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$$

otteniamo così due **NUMERI QUANTICI**, l e $m \rightarrow$ numero quantico magnetico
 \downarrow
 numero quantico

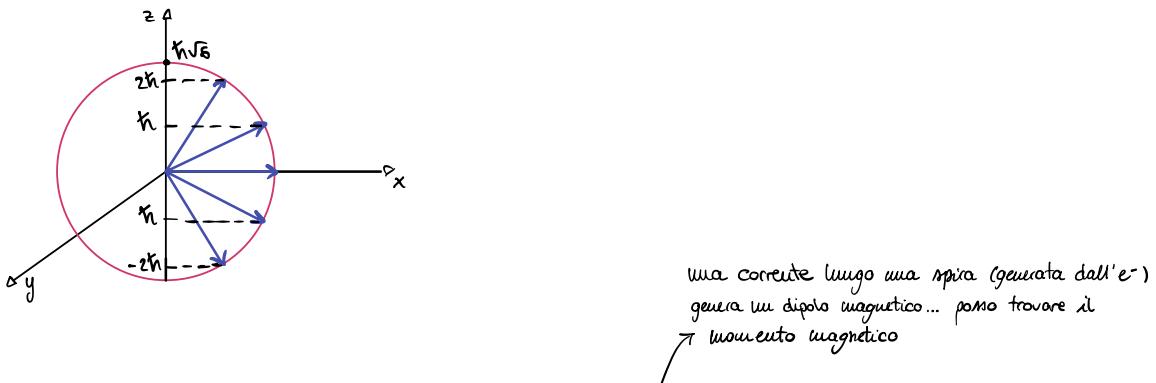
in base a l posso avere diverse orbite: $0 \rightarrow s$, $1 \rightarrow p$, $2 \rightarrow d$

esempio: $l=0 m=0 \rightarrow L=0 l_z=0$

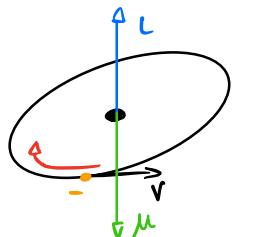
$$l=1 m=0, \pm 1 \rightarrow L=\hbar\sqrt{2} l_z=0, \pm \hbar$$



$$l=2 m=0, \pm 1, \pm 2 \rightarrow L=\hbar\sqrt{6} l_z=0, \pm \hbar, \pm 2\hbar$$



per trovare la relazione che lega L al **MOMENTO MAGNETICO μ** considero:



$$I = \frac{q}{2\pi r} v \quad \text{corrente}$$

$$A = \pi r^2 \quad \text{area orbita}$$

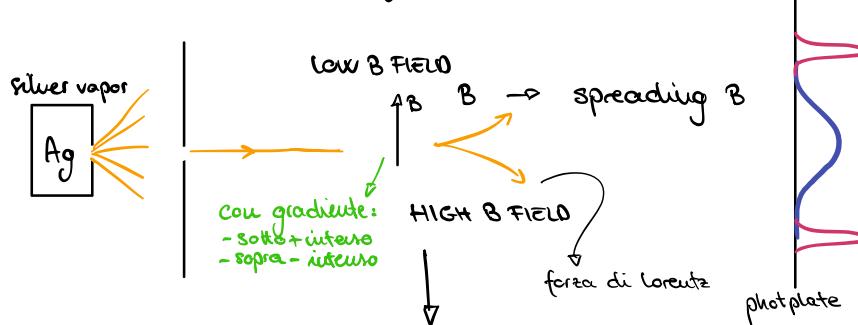
$$\mu = IA = \frac{q}{2\pi r} \frac{v}{m} \pi r^2 = L \frac{q}{2m} \quad \text{con } q \neq 0 \text{ carica elettronica}$$

ottengo così che

$$\boxed{\mu_z = \frac{q}{2m_e} L_z}$$

STERN - GERLACH (SG) → l'esperimento dimostra la natura ondulatoria della materia (e degli elettroni) e il loro spin

L'esperimento si configura come segue:

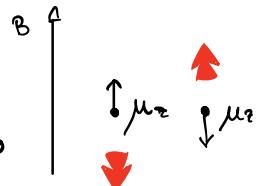


fuccio cari':



aspettativa → se forte B
riflessi a random...
caso osservato

$\nabla = -\mu \cdot B$ → se μ è lungo B ho che $V_2 = -\mu B_2$
analogamente posso avere il caso ^{estremo} in cui il verso è opposto



il caso reale ci mostra che esiste uno spin

=> l'esperimento mostra che μ è quantizzato

l'esperimento dimostra che il momento magnetico è quantizzato e che quindi $\mu \neq 0$ anche per un atomo che ha un μ (in teoria) = 0
=> esso è generato dallo spin

$$\mu_z = \frac{g}{2m} L_z \quad \text{ma } L_z \text{ può assumere solo un numero dispari di stati}$$

\downarrow

$L_z = 0 \rightarrow 1 \text{ stato}$

$L_z = 0, \pm 1 \rightarrow 3 \text{ stati}$

$L_z = 0, \pm 1, \pm 2 \rightarrow 5 \text{ stati}$

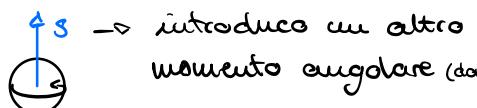
può assumere 2 stati

=> la relazione non va bene :

l'Ag ha 47 elettroni = 46 + 1
lo spin si annulla (sono accoppiati x Pauli)



=> SPIN UP o SPIN DOWN
rispetto alla direzione
del campo magnetico
interno all'atomo !



(ruota attorno al proprio asse)

componente lungo z: la rotta soggetta alla forza...

$$S^2 = \hbar^2 S(S+1)$$

e

$$S_z = \hbar s_z$$

$$s_z = -S, -S+1, \dots, S-1, S$$

è il modulo dello spin, anche detto
INTRINSIC ANGULAR MOMENTUM

$$S_1 \rightarrow s_z = 0, \pm 1$$

BOSONI → sono particelle caratterizzate da numeri interi di s :

ad esempio: $s=0 \rightarrow$ particella $\alpha = \text{He}^{2+}$

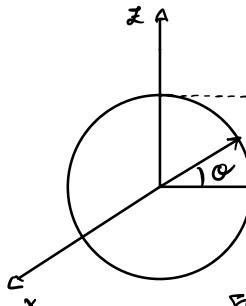
$s=1 \rightarrow$ fotoni

...

- ↓
- statistica di Boltzmann
- non vale il principio di esclusione di Pauli

FERMIONI → sono particelle caratterizzate da numeri semi-interi di s :

ad esempio: $s=\frac{1}{2}; s_z = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rightarrow$ elettroni (anche protoni e neutroni)



$$S = \frac{\hbar}{2} \sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- i fermioni seguono la statistica di Fermi - Dirac
- portano sempre una massa
- vale sempre il principio di esclusione di Pauli

\Rightarrow max e- spin: $(\frac{1}{2}\hbar)$

Calcoliamo il magnetone di Bohr:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{n,p} = \frac{m}{1836} \Rightarrow$$

dipende dalla particella

$$\mu_z = g \underbrace{\frac{q}{2m}}_{\gamma} s_z \Rightarrow \mu_z \propto \frac{q}{m} s_z$$

γ = GYROMAGNETIC RATIO

$$\mu_z = \pm g \cdot \frac{q}{2m} \cdot \frac{\hbar}{2} = \pm \mu_B$$

BOHR MAGNETON

$$9,27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$$

$$\frac{\hbar}{2} = mvr$$

↳ si ricava il raggio dell'elettrone considerandolo una sfera

$$\text{carica di energia } E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow r \approx 10^{-15} \text{ m (fm)}$$

Se calcolo v con i dati ricavati: $v = 10^{10} \text{ ms}^{-1} > 10^8 \text{ ms}^{-1} = c$

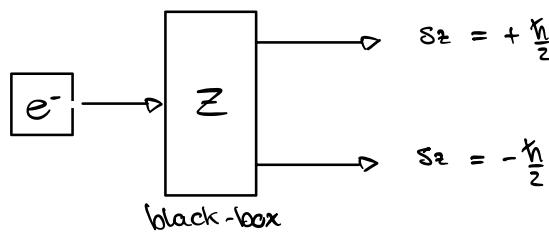
non è possibile che vada + veloce della luce nel vuoto

\Rightarrow lo spin è una proprietà della particella, proprio come la massa e la carica

\rightarrow e' sbagliato il modello $v > c \times$ ne calcolo la velocità di rotazione, otengo un valore di $2 \cdot 10^{10}$ m/s > c e quindi la rotazione non puo' avvenire a tale v!

\rightarrow e' sbagliato il modello dove la particella gira ma ne resta! e quindi lo spin è solo una proprietà (lo considero al pari della massa o della carica: una proprietà dell'e⁻) \rightarrow e' una proprietà che mi descrive come se la particella gira ne resta

torriamo all'esperimento:



probabilità:

50%
50%

possiamo vedere l'esperimento come un filtro che seleziona lo spin dell'e⁻

\rightarrow SPIN UP
 \rightarrow SPIN DOWN

lo spin è random

$$|\Psi\rangle = \alpha |z_+\rangle + \beta |z_-\rangle$$

\hookrightarrow autofunzione degli autovalori positivi

$$|z_+\rangle \rightarrow Sz = +\frac{\hbar}{2}$$

$$|z_-\rangle \rightarrow Sz = -\frac{\hbar}{2}$$

"KET" $|0\rangle$
"BRA" $\langle 0|$

$$\hat{S}_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$$\hat{O}|\Psi\rangle = O|\Psi\rangle$$

↓
autofunzione ↓
autovalore

$$\Rightarrow \hat{S}_z |z_+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle$$

sono le due soluzioni

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \hat{S}_z |z_-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

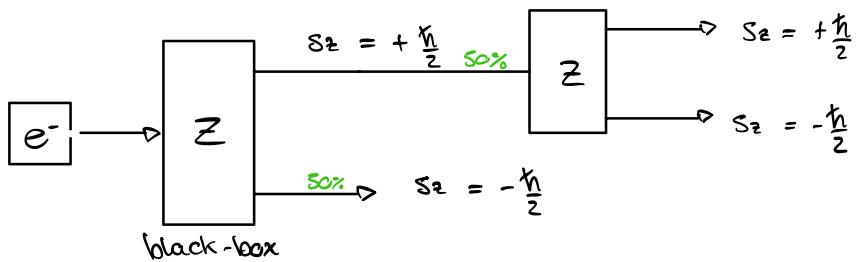
stessa probabilità

$|\Psi\rangle$ è la descrizione di ogni elettrone nel box e⁻ (c'è la sovrapposizione degli stati)

\Rightarrow quando effettuo la misura setto uno stato e distruggo la sovrapposizione degli stati \rightarrow ne fisco uno che non puo' più variare

\rightarrow ecco perche' in un quantum computer non posso leggere il dato durante il calcolo

aggiungo all'perimento un'altra black-box:

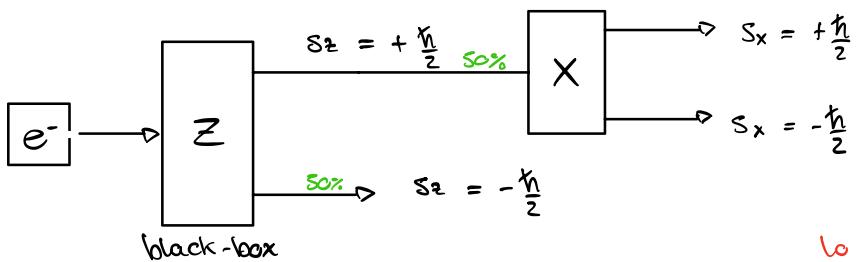


probabilità'

100% → lo spin non puo' variare

0%

ma ne cambio la black-box (il 3^o dell'perimento)



probabilità:

50%

50%

lo spin dato da Z non ha stati in comune con X



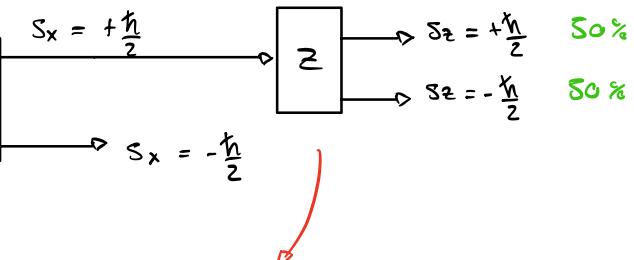
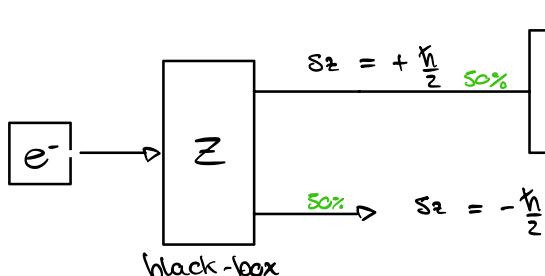
$$\Rightarrow |z_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_+\rangle + |x_-\rangle)$$

Z e' dato dalla sovrapposizione degli stati di X → che hanno il 50% di probab.

$$\Rightarrow |z_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_+\rangle - |x_-\rangle)$$

⇒ per il principio di indeterminazione, quando misuro una direzione e conosco lo spin, perturbo l'ellisse e quindi non posso dire nulla dello spin lungo altre direzioni

... ne lo rifaccio una terza volta



ne riguardo ancora a Z ottengo la

stessa probabilità che avevo all'inizio

di ottenere i due stati → in questo caso dico che

non c'e' memoria di quanto

foste succoso col primo filtro

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + |z_-\rangle)$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - |z_-\rangle)$$

ricaviamo, facendo alcuni calcoli, l'operatore di Pauli:

$$\hat{S}_x |x_+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |x_+\rangle$$

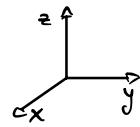
$$\hat{S}_x |x_-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |x_-\rangle$$

$$\hat{S}_y |y_+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |y_+\rangle$$

$$\hat{S}_y |y_-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |y_-\rangle$$

$$\hat{S}_z |z_+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle$$

$$\hat{S}_z |z_-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle$$



voglio sostituire x_+, x_-, \dots con qualcosa di più tangibile

trascrivo in matrici:

$$z_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |\psi\rangle = \alpha |z_+\rangle + \beta |z_-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

affinché valga la relazione di prima ho che $S_z \mid S_z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{e } \hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ottengo 4 equazioni su } a, b, c, d \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

provo con la prima:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... e con la seconda:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la stessa cosa puo' essere fatta anche per x:

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + |z_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - |z_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricavo

$$\boxed{\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

verifico

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_+}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_-}$$

e anche per y :

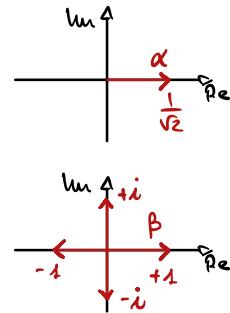
$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + i|z_-\rangle)$$

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - i|z_-\rangle)$$

da cui ottengo l'operatore

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

\rightarrow mi accorgo subito che



che posso verificare, come fatto prima...

Pomo definire un nuovo operatore definito **OPERATORE DI PAULI** come:

$$\text{operatore di Pauli} = \frac{\text{spin operator}}{\frac{\hbar}{2}}$$

che chiamiamo $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \rightarrow \text{ho bisogno di un quarto: l'identità}$$

proprietà:

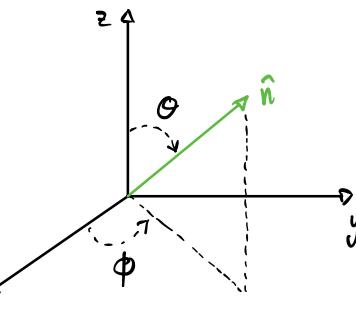
- $XY = iZ$
- $YX = -iZ$
- $ZY = iX$
- $X^2 = I$
- $Y^2 = I$
- $Z^2 = I$

... DIREZIONE ARBITRARIA

$$n_x = \sin\theta \cos\phi$$

$$n_y = \sin\theta \sin\phi$$

$$n_z = \cos\theta$$



possiamo ricavarci σ_n come combinazione lineare di $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$\sigma_n = \sin\theta \cos\phi \sigma_x + \sin\theta \sin\phi \sigma_y + \cos\theta \sigma_z$$

$$\begin{aligned} &= \sin\theta \cos\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \cos\phi - i \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\phi + i \sin\theta \sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

calcolo il determinante: $\det(\sigma_n - \lambda I) = \dots$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -(\cos\theta + \lambda) \end{pmatrix} = -\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

possiamo ricavarci così gli autovettori:

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -(\cos\theta + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta e^{i\phi} n_1 = (\cos\theta + 1) n_2$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta e^{i\phi}} = \dots = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}} \Rightarrow |n_+> = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1, \text{ analogamente, ottengo } |n_-> = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

anch'esso sono la sovrapposizione di due stati:

$$|n_+> = \cos \frac{\theta}{2} |z_+> + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |z_->$$

$$|n_-> = \sin \frac{\theta}{2} |z_+> - e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |z_->$$

BLOCH SPHERE (e' l'interpretazione fisica di quanto appena fatto)

Possiamo esprimere oggi stato come: $|\Psi\rangle = \cos \frac{\Theta}{2} |z_+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\Theta}{2} |z_-\rangle$

$$|n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \\ \sin \frac{\Theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \\ \sin \frac{\Theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta=0 \\ \phi=0 \end{array} \right.$$

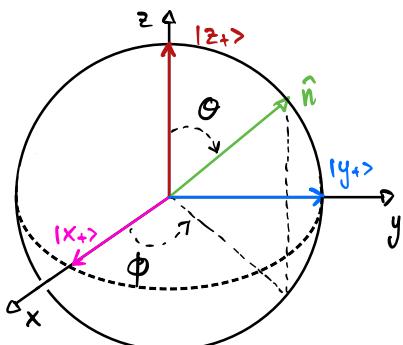
$$|z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta=\pi \\ \phi=0 \end{array} \right.$$

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + |z_-\rangle) \text{ vale } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = 0$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - |z_-\rangle) \text{ vale } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \pi$$

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + i|z_-\rangle) \text{ vale } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - i|z_-\rangle) \text{ vale } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \frac{3\pi}{2}$$



QBIT

è il bit di informazione elementare nel **quantum computing**

QBIT = quantum bit che rappresenta uno stato quantico

$$|\Psi\rangle = \alpha|z_+\rangle + \beta|z_-\rangle \quad \begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{matrix}$$

$$2 \text{ QBITS: } (\alpha_1|0\rangle_1 + \beta_1|1\rangle_1)(\alpha_2|0\rangle_2 + \beta_2|1\rangle_2) =$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\alpha_1 \alpha_2}_{\alpha_{00}} |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \underbrace{\alpha_1 \beta_2}_{\alpha_{01}} |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \underbrace{\beta_1 \alpha_2}_{\alpha_{10}} |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \underbrace{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_{11}} |1\rangle_1 |1\rangle_2 \\ &= \alpha_{00}|0\rangle_1 |0\rangle_2 + \alpha_{01}|0\rangle_1 |1\rangle_2 + \alpha_{10}|1\rangle_1 |0\rangle_2 + \alpha_{11}|1\rangle_1 |1\rangle_2 \end{aligned}$$

$$\text{e vale: } |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$$

3 QBITS: ... + lungo ... ! perché aumenta esponenzialmente

1 qbit \rightarrow 2 parametri

2 qbits \rightarrow 4 parametri ...

n qbits \rightarrow 2^n parametri

INNER PRODUCT

$$\begin{array}{ll} \text{KET} & |\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ \text{BRA} & \langle\Psi| = [(\langle\Psi|)^T]^* = \langle\Psi|^+ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{coniugato trasposto} \\ \uparrow \\ \} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{notazione introdotta da Dirac per} \\ \text{descrivere uno stato quantico} \end{array}$$

$$\text{quindi se } |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad \langle\Psi| = (\alpha^*, \beta^*)$$

$$\Rightarrow \text{BRAKET: } \langle\Psi|\Psi\rangle = (\alpha^* \beta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha^* \alpha + \beta^* \beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\langle 0|0\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \} \text{normalizzazione}$$

$$\langle 1|1\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \} \langle B|A \rangle: \text{probabilità di misurare A nello} \\ \text{stato B}$$

$$\langle 0|1\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \} \text{ortogonalità}$$

$$\langle 1|0\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

OUTER PRODUCT

$$|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} (\alpha_2^* \ \beta_2^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2^* & \alpha_1 \beta_2^* \\ \beta_1 \alpha_2^* & \beta_1 \beta_2^* \end{pmatrix}$$

esempio:

$$\hat{X} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

composite state: example

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{e' normalizzato} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pure:} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{anche il vettore ottenuto dalla composizione dei due qbit precedenti e' normalizzato (basta calcolo)}$$

se compongo qbits normalizzati ne ottengo uno che e' anch'esso normalizzato

ENTANGLED STATES (Stati intrecciati)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

se misuro il primo qbit $|0\rangle$ allora al 100% anche il secondo avra' quello misura $|0\rangle$

$$|00\rangle$$

BELL STATES sono 4 Stati a correlazione massima di due qbit e seguono l'EPR...

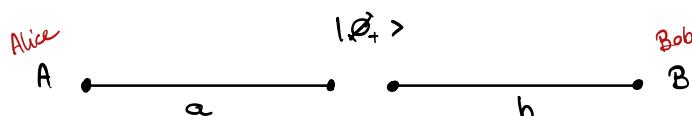
$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

EPR : Einstein - Podolsky - Rosenberg



A fa la misura e ottiene spin up $|0\rangle$
allora forza B a misurare $|0\rangle$

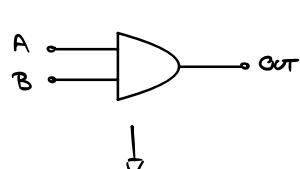
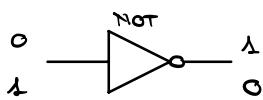
lo stato di Bob dipende da quello che ha letto Alice ed è uguale a quest'ultimo:

In prima ipotesi si potrebbe pensare che se non comunicano, allora anche Bob minaccia lo stato in maniera casuale, ma comunicando, scoprirebbe che c'è sempre lo stesso di quello che minaccia Alice.

→ l'informazione e' trasmessa istantaneamente **più veloce della luce**: in realtà non e' una vera informazione perché essa e' casual e non e' scelta e quindi il paradosso di Einstein non viene smentito → A e B devono comunicare per sì o no.

A e B devono comunicare per smentire il random e quindi tale comunicazione non puo' averluce alla velocita' della luce

QUANTUM GATE



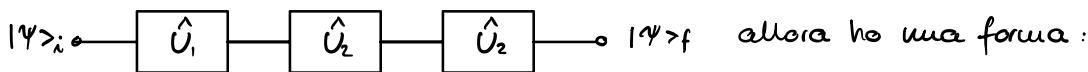
| A | B | OUT |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- in quantum computing questo è un problema
- se ho 2 input allora devo avere 2 output
- conoscendo l'output devo poter conoscere l'input

introduciamo un quibit gate, con un generico operatore \hat{U} :

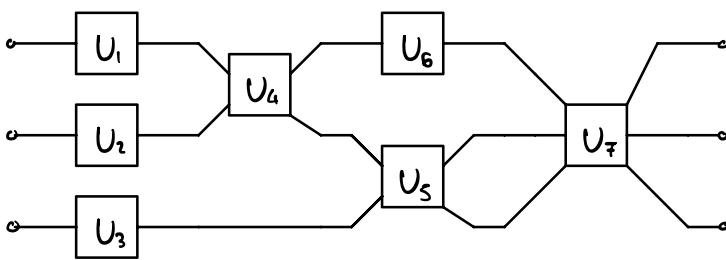


oppure posso avere una catena:



$$|\Psi_f\rangle = |\hat{U}_3 \hat{U}_2 \hat{U}_1 |\Psi_i\rangle \quad (\text{l'ultimo e' il primo})$$

oppure anche una cosa del genere:



$U = \text{unitary}$

$$U^\dagger = U^{-1}$$

$$U^\dagger U = I$$

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U^\dagger U = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a^*c + b^*d \\ c^*a + d^*b & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \quad \text{da cui otteniamo le seguenti eq.}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad a^*c + b^*d = 0$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad c^*a + d^*b = 0$$

e quindi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono ORTONORMALI

$$\Rightarrow U|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

\Rightarrow l'operatore mantiene l'ortogonalità

$$\Rightarrow U|\beta\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} |\beta\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

fra i vettori \Rightarrow posso sempre fare l'operazione inversa \Rightarrow operatore hermitiano

Ne considero:

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \quad \text{da cui derivo che}$$

$$\left| \begin{array}{l} a^* = a \quad \text{REALE} \\ d^* = d \quad \text{REALE} \\ b^* = c \\ c^* = b \end{array} \right.$$

dimostrazione ...

$$U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|U|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \lambda$$

$$\langle\lambda|U^\dagger = \langle\psi|\lambda^*$$

$$\langle\psi|U^\dagger|\psi\rangle = \lambda^*$$

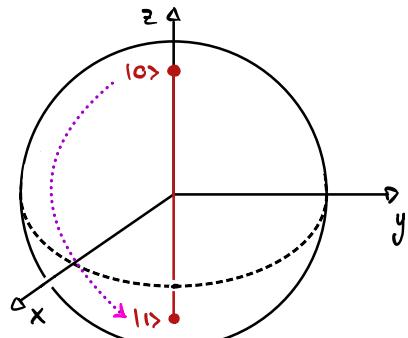
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se } \lambda^* = \lambda \text{ allora } U^\dagger = U$$

\rightarrow se un operatore è misurabile, allora è hermitiano.
(il gate di fase non è hermitiano)

Δ PAULI GATES

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

detto NOT o BITFLIP



$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

detto PHASE SHIFT e BITFLIP

$$Y|0\rangle = i|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

detto PHASE SHIFT

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= |0\rangle \\ Z|1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δ HADAMARD

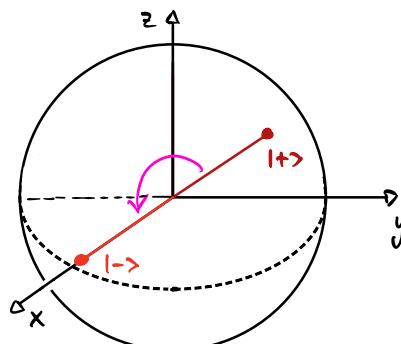
fa compiere una rotazione antioraria attorno all'asse del biorect x,z

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$$

$$\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |->$$

e posso derivare l'operatore

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{z})$$



Δ PHASE GATE

e' non-hermitiano (segue dimostrazione)

$$\hat{R}_\phi |0\rangle = |0\rangle$$

$$\hat{R}_\phi |1\rangle = e^{i\phi} |1\rangle \quad \text{da cui ricava}$$

$$\hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

se $\phi = \pi$ allora $R_\phi = Z$

$$\text{se } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ allora } S = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

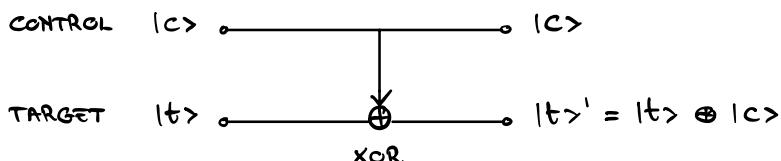
\hookrightarrow l'espressione evidenzia la simmetria

$$\text{se } \phi = \frac{\pi}{4} \text{ allora } T = R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

e quindi posso introdurre $U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} & U_{02} & U_{03} \\ U_{10} & \cdots & & \\ \vdots & & & \cdots \end{pmatrix}$ una matrice + grande per ampliare il numero di operazioni che posso svolgere

posso introdurre Δ CONTROLLED NOT :



| $ C\rangle$ | $ t\rangle$ | $ t'\rangle'$ |
|-------------|-------------|---------------|
| $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$ |
| $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ 1\rangle$ |
| $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ |
| $ 1\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$ |

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Δ CLONING STATE

→ posso clonare solo gli stati base e non quelli formati dalla sovrapposizione di stati

(NO CLONING THEOREM)

$$\hat{U}_{\text{copy}} |\Psi\rangle_1 |0\rangle_2 \stackrel{?}{=} |\Psi\rangle_1 |\Psi\rangle_2 \quad \text{dove } |\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$$

$$\Rightarrow \hat{U}_{\text{copy}} (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) |0\rangle_2 = \hat{U}_{\text{copy}} (\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \text{ BASIS STATE}$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle_1 |\Psi\rangle_2 = (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1)(\alpha|0\rangle_2 + \beta|1\rangle_2) = \dots \text{ COMPOSITE STATE}$$

$$\text{ma comp.state} \neq \text{basisstate} \Rightarrow \hat{U}_{\text{copy}} |\Psi\rangle_1 |0\rangle_2 \neq |\Psi\rangle_1 |\Psi\rangle_2 \quad \text{c.v.d.}$$

Δ CONTROLLED Z

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

| $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ +\rangle'$ |
|-------------|-------------|--------------|
| $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$ |
| $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$ | $ 1\rangle$ |
| $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$ |
| $ 1\rangle$ | $ 1\rangle$ | $- 1\rangle$ |

Δ SWAP

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ci permette di
invertire i qbit:

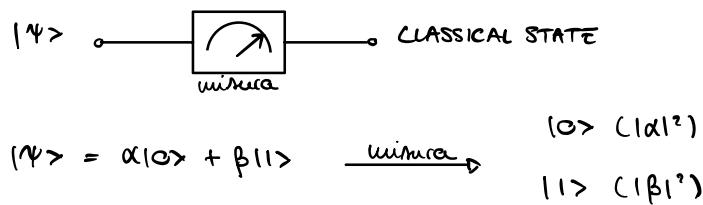
$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |10\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |01\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |11\rangle \end{aligned}$$

→ molto utile in quantum computing perché mi permette di manipolare i bit come preferisco... ?

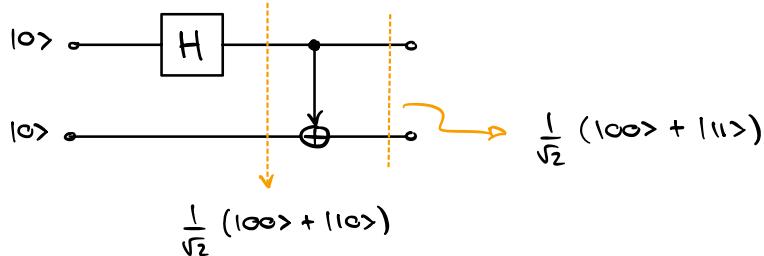
⇒ seguono i gate che lavorano con **3 qbits** e sono definiti da una matrice di 8×8 elementi. Tra questi il + famoso è il **TOFFOLI GATE**

Δ TOFFOLI GATE definito come $\text{CCNOT} = \dots$ la matrice è sulle slide!

△ MISURA



△ BELL CIRCUIT



MATRICI DI ROTAZIONE

su' operazione sul singolo qbit e' una rotazione ... come faccio a farla?
come progetto un circuito che manipoli e ruoti i qbits?... Consideriamo:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle \text{ e' un generico qbit sulla sfera}$$

$$\hat{R}_x = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e' una rotazione antioraria di } \theta \text{ attorno all'asse x}$$

$$\hat{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e' una rotazione antioraria di } \theta \text{ attorno all'asse y}$$

$$\hat{R}_z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{e' una rotazione antioraria di } \theta \text{ attorno all'asse z}$$

Proviamo a costruire queste rotazioni a partire dai Pauli operators combinandoli:

$$\hat{R}_x = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{R}_y = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y$$

formula di eulero $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

prima riscriviamo $\hat{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_z$

=> hanno tutti la stessa formula posso generalizzare con:

$$\hat{R}_n = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_n = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_n}$$

↓
eulero

F. DI EULERO
 $|\cos \theta + i \sin \theta| = e^{i\theta}$

dimostrazione: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ allora $e^{\hat{\theta}} = \hat{I} + \hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}^2}{2!} + \frac{\hat{\theta}^3}{3!} + \dots$

\uparrow

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_x = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

| ↓
pari dispari $\sin \frac{\theta}{2}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\theta}{2})^{2n}}{(2n)!} \hat{I} - i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\theta}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \hat{\sigma}_x$$

| ↓
 $\cos \frac{\theta}{2}$

Lo ho applicato due volte lo stesso Pauli operator otengo un'identità
(che posso applicare infinite volte)

$$= \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x \quad \rightarrow \text{mi ricavo la stessa formula di partenza}$$

c.v.d.

Ogni trasformazione puo' essere ottenuta come sequenza di tre rotazioni:

Se applico 3 rotazioni: $\begin{matrix} z, y, z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \lambda & \theta & \phi \end{matrix}$ (e' una convenzione possibile quella z, y, z)

Pomo definire $\hat{U}(\theta, \phi, \lambda) = R_z(\phi) R_y(\theta) R_z(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 &= \left(e^{-i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right) \left(e^{-i\frac{\lambda}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \left(e^{-i\frac{\phi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda+\phi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi-\lambda}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda-\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda+\phi}{2}} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\lambda} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\lambda+\phi)} \end{pmatrix} \right)}_{\text{porto fuori la fase "comune"} e^{-i\frac{\lambda+\phi}{2}}} e^{-i\frac{\lambda+\phi}{2}}
 \end{aligned}$$

definisco questo operatore:

$$\hat{U}_3(\theta, \phi, \lambda) = \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\lambda} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\lambda+\phi)} \end{pmatrix} \right)$$

Tabella riassuntiva dell'operatore \hat{U}_3 :

| θ | ϕ | λ | \hat{U}_3 |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 0 | 0 | 0 | \hat{I} |
| π | 0 | π | $\hat{\sigma}_x$ |
| π | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\hat{\sigma}_y$ |
| 0 | 0 | π | $\hat{\sigma}_z$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 | π | \hat{H} |

Variando gli angoli λ, θ, ϕ posso, tramite le tre rotazioni, generare qualunque operatore a 1 qbit che avevo visto in precedenza

EVOLUZIONE NEL TEMPO DI UN SISTEMA QUANTISTICO

Cerchiamo di capire il significato fisico dell'espressione: $\hat{R}_x(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_x}$ partendo dall'equazione di Schrödinger tempo-dipendente

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi\rangle \quad \text{che posso risolvere:}$$

$$\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = -i\frac{\hat{H}}{\hbar}|\Psi\rangle \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\Psi(0)\rangle$$

$\frac{df}{dt} = -\alpha f \Rightarrow f(t) = e^{-\alpha t} f(0)$

definendo $\hat{U} = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$

Ne considero $|\Psi(0)\rangle$ il mio stato iniziale: $|\Psi(0)\rangle = |\Psi\rangle_i$;

Ne considero $|\Psi\rangle$ lo stato finale $|\Psi\rangle_f = |\Psi\rangle_{f,i}$ dopo aver applicato \hat{U} , allora:

$$|\Psi\rangle_f = \hat{U}|\Psi\rangle_i$$

ma ne considero che \hat{U} è una rotazione, allora:

$$e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} = e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z} = e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}\hat{\sigma}_z}$$

Lo trasforma in una velocità angolare $\rightarrow \theta = \omega_0 t$

e ricavo: $\hat{H} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z$

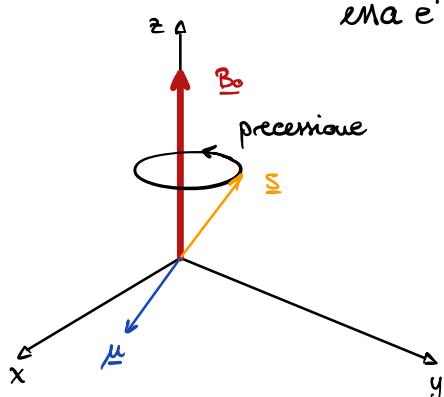
$\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z \rightarrow \hat{S}_z$ spin operator

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$$

\Rightarrow quindi tale rotazione può essere fatta usando un campo magnetico costante!

PRECESSIONE

è la rotazione dei momenti magnetici attorno al campo \underline{B}
ma è indotta da un campo \underline{B} :



momento magnetico: $\mu = \gamma S = g \frac{q}{2m} S$

vale ≈ 2 per gli elettroni
gyromagnetic ratio < 0

momento torcente: $\underline{N} = \mu \times \underline{B}_0 = \gamma S \times \underline{B}_0$
dato da B_0
genera un movimento giroscopico

$$= -\gamma B_0 \times S$$

≈ 0 rispetto al prodotto perché cambio segno

Ne ho un momento torcente, allora cambia il momento angolare come: $\frac{dS}{dt} = \underline{N}$

$$\Rightarrow B_0 \frac{dS}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} (\underline{B}_0 \cdot S) \quad \text{il modulo rimane costante}$$

\Rightarrow Ne la derivata è 0 anche l'angolo è costante

LARMOR PRECESSION

possiamo definire una frequenza detta *Larmor frequency* che calcolo come:

$$\omega_0 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{ds}{dt \sin \theta} = \frac{-\gamma B_0 s \sin \theta}{s \sin \theta} = -\gamma B_0$$

FREQUENZA DI LARMOR DELLA PRECESSIONE

calcoliamo l'Hamiltoniano:

$$\hat{H} = -\mu \cdot \underline{B}_0 = -\gamma \underline{s} \cdot \underline{B}_0 = -\gamma B_0 \hat{s}_z = \omega_0 \hat{s}_z$$

↓
proiezione di \underline{s} lungo \underline{B}_0

\rightarrow e' quello che volevo trovare!
e' la stessa espressione che avevo visto prima e di cui cercavo un metodo di implementazione...

possiamo poi ricavarci gli autovalori E & stato base $|10\rangle$ e $|11\rangle$ partendo da:

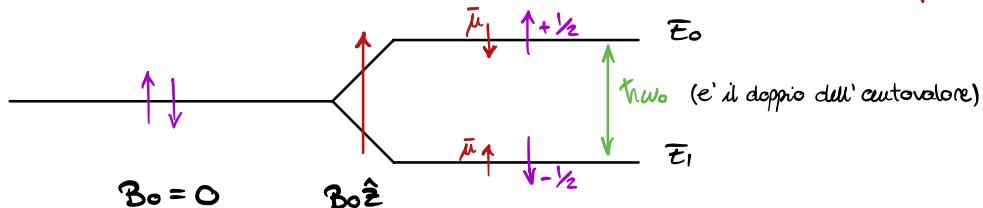
$$\hat{H}|1\rangle = E|1\rangle \quad \text{e ottengo che essi valgono:}$$

$$\Delta \quad \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow E_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} \text{ per } |10\rangle$$

$$\Delta \quad \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow E_1 = -\frac{\hbar \omega_0}{2} \text{ per } |11\rangle$$

ottengo un'effetto di split dello spin, detto **ZEEMAN SPLIT o EFFECT**:

↳ separazione dei livelli energetici a causa di un campo magnetico esterno



la soluzione all'eq. di Schrödinger $\hat{H}|1\rangle = -i\hbar \frac{d}{dt}|1\rangle$ puo' essere scritta come:

$$|1\rangle = c_0|10\rangle e^{-i\frac{\hbar\omega_0 t}{\hbar}} + c_1|11\rangle e^{-i\frac{\hbar\omega_1 t}{\hbar}}$$

coefficientsi complessi che indicano la probabilita'
di avere uno stato piuttosto che l'altro
 $|c_1|^2 + |c_0|^2 = 1$
trascuro già la fase globale... l'espressione completa e' nelle slides

ammesso: $c_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ $c_1 = \sin \frac{\theta}{2}$

$$|1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |10\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\omega_0 t} |11\rangle$$

che e' proprio lo stato di sovrapposizione sulla Bloch Sphere con $\phi = \omega_0 t$

\Rightarrow se applico un campo magnetico B_0 per un tempo t diretto lungo l'asse z , allora il qbit ruoterà di un angolo $\phi = \omega_0 t$, con $\omega_0 = -\gamma B_0$ attorno a tale asse

\Rightarrow periamo calcolare le proiezioni dello spin lungo i vari assi:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \omega_0 t$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \omega_0 t$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

queste due componenti variano durante la rotazione attorno a z , la cui componente invece rimane costante

non dipende da $\omega_0 t$

contestualizziamo i valori e valutiamo il campo B necessario per avere la rotazione:

$$\Delta E = \hbar \omega_0 = -\hbar \gamma B_0 = -2 \frac{\hbar}{2} g \frac{9}{2m} B_0 = 2 \mu_B B_0$$

Bhar magnetou \rightarrow dove $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$

applicando un campo $B_0 = 1 \text{ T}$ (molto grande) ottengo: $\Delta E \approx 120 \mu\text{eV}$

che va confrontato con l'energia termica: la temperatura deve essere tale da non variare lo stato del qbit (rumore termico minore)

$$kT \ll \Delta E \Rightarrow T \ll \frac{\Delta E}{k} = 1,34 \text{ K} \quad \text{e puo' essere accettabile}$$

$$\text{calcolo anche } \omega_0 = \frac{\Delta E}{\hbar} \approx \frac{2 \cdot 10^{-23} \text{ J}}{10^{-34} \text{ Js}} = 200 \text{ Grads}^{-1} \quad \text{e' molto elevata ...}$$

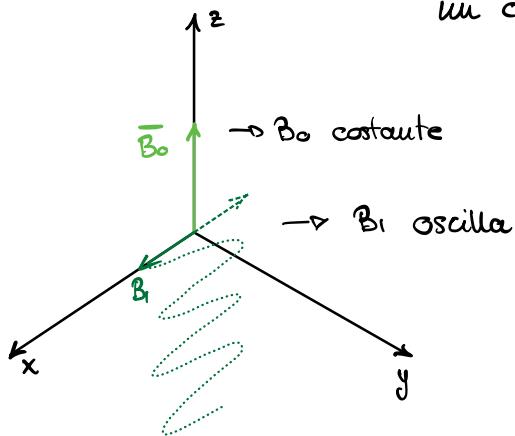
$$\text{e ho quindi un periodo } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 30 \text{ ps} \rightarrow \text{e' impossibile accendere un campo di 1T per dei ps}$$

PROBLEMA!

Come faccio ad implementare questa rotazione tramite un dispositivo reale? La precedente soluzione non è implementabile realisticamente e devo trovare un'alternativa più fattibile. Tale alternativa è data dall'electron spin resonance, che è quella usata nei quantum computer. Contestualmente a questo abbiamo le Rabi oscillations, utile per manipolare il nucleo qbit states nella Bloch Sphere.

ELECTRON SPIN RESONANCE

ammisso di applicare un campo magnetico DC lungo z per avere lo split e un campo magnetico AC lungo x per far ruotare le spine



la formula di B e' la seguente:

$$B = B_0 \hat{z} + B_1 \cos(\omega t + \delta) \hat{x}$$

$B_1 \ll B_0$ es.: $B_1 = 10^{-3} B_0$

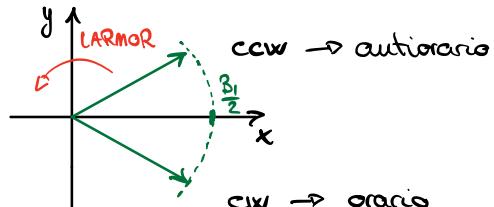
$$\omega_0 = -\gamma B_0 \approx \text{Grad s}^{-1}$$

↓
frequenza di precessione

B_0 induce la precessione di Larmor attorno all'asse z @ $\omega_0 = -\gamma B_0$;
inoltre posso scomporre il campo oscillante B_1 in due vettori che ruotano in direzioni opposte

$$B_{\text{car}} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega t + \delta) \hat{x} + \frac{B_1}{2} \sin(\omega t + \delta) \hat{y}$$

$$B_{\text{car}} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega t + \delta) \hat{x} - \frac{B_1}{2} \sin(\omega t + \delta) \hat{y}$$



⇒ ccw si muove nella stessa direzione del vettore di spin: in questo sistema di riferimento ruotante e' come se avessi un nuovo campo costante (DC)

⇒ cw, al contrario, si muove (nel sistema di riferimento ruotante ccw) con velocità doppia pari a $2\omega_0$

↳ nella scala dei tempi che useremo noi questa rotazione va così veloce che la media sarà nulla

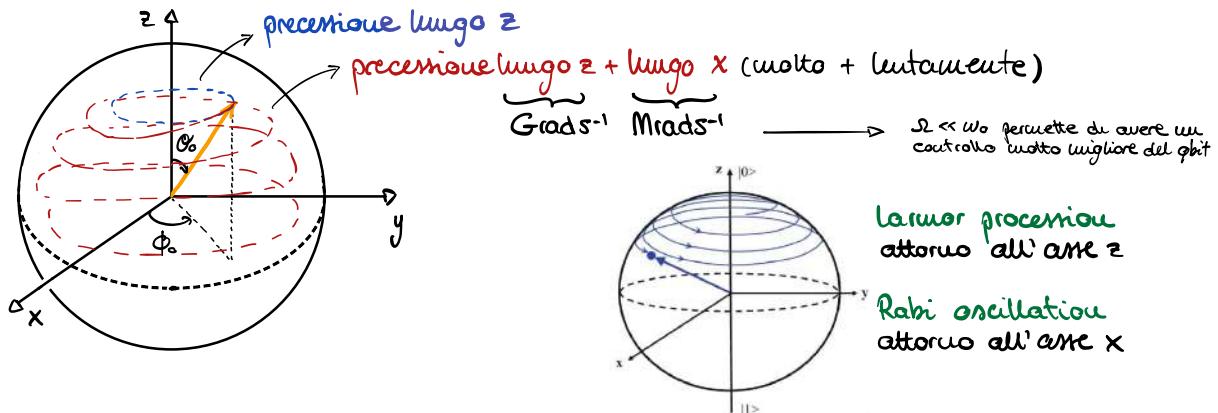
↳ ROTATING WAVE APPROXIMATION (vale l'asse che sceglieremo)

il ccw field, che come sopra scritto e' come se fosse DC, genera una precessione attorno all'asse x con una frequenza detta **RABI FREQUENCY** pari a:

$$\Omega = -\gamma \frac{B_1}{2}$$

$\approx \text{MHz s}^{-1}$ → e' molto "lento" e riesce a controllarlo meglio

fisicamente quello che succede e':



quindi posso scrivere il qbit come segue:

$$|\Psi\rangle = \underbrace{\cos \frac{\phi_0 + \omega t}{2} |0\rangle + \sin \frac{\phi_0 + \omega t}{2}}_{\text{RABI } (\text{Mrads}^{-1}) \hat{x}(\hat{y})} e^{i(\phi_0 + \omega_0 t)} \underbrace{|1\rangle}_{\text{LARMOR } (\text{Grads}^{-1}) \hat{z}}$$

\downarrow
se oscillano lungo y avrei lo stesso effetto attorno a quell'asse

la rotazione attorno ai 3 assi posso sempre ottenere la somma composta di due rotazioni, come già visto: ecco perché ho solo l'asse x e l'asse z.

in maniera rigorosa: $\hat{H} = -\gamma \frac{\hbar}{2} \Omega_z \hat{B}_0 = \mu_B B_0 \hat{\Omega}_z$ (e' il campo statico nel tempo)

autovettori

$$|0\rangle \rightarrow +\mu_B B_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$|1\rangle \rightarrow -\mu_B B_0 = -\frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i \frac{\Omega_z t}{\hbar}} \\ \beta e^{-i \frac{\Omega_z t}{\hbar}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GLOBAL PHASE OUT}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{i \omega_0 t} \end{pmatrix}$$

consideriamo ora una perturbazione applicata espressa con \hat{H}' :

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{H} + \hat{H}') |\Psi\rangle = i \hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle$$

ma se $\hat{H}' \ll \hat{H}$ la perturbazione e' debole e posso dire che:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) e^{-i \frac{\Omega_z t}{\hbar}} \\ \beta(t) e^{-i \frac{\Omega_z t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

ora α e β dipendono dal tempo e non sono più costanti

$$V = -\gamma \underline{S} \cdot \underline{B} = \mu_B B_1 \cos(\omega t + \delta) \hat{\Omega}_x$$

ottengo questo risultato considerando

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= \mu_B B_0 \hat{\sigma}_z = \mu_B \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & -B_0 \end{pmatrix} \\ \hat{H}' &= \mu_B B_1 \cos \omega t \hat{\sigma}_x = \mu_B \begin{pmatrix} 0 & B_1 \cos \omega t \\ B_1 \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \hat{H} + \hat{H}' = \mu_B \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \cos(\omega t + \delta) \\ B_1 \cos(\omega t + \delta) & -B_0 \end{pmatrix}$$

sostituendo la forma di \hat{H}' in Schrödinger ottengo per la prima riga:

$$\underbrace{\mu_B B_0 \alpha(t) e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t}}_{\varepsilon_0} + \mu_B B_1 \cos(\omega t + \delta) \beta(t) e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t} = i\hbar \frac{d\alpha(t)}{dt} e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t} + \underbrace{\varepsilon_0 \alpha(t) e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t}}_{\varepsilon_0}$$

x la seconda riga:

$$\mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t} - \underbrace{\mu_B B_0 \beta e^{i \frac{\omega}{\hbar} t}}_{\varepsilon_0} = i\hbar \frac{d\beta}{dt} e^{-i \frac{\omega}{\hbar} t} + \underbrace{\varepsilon_0 \beta e^{i \frac{\omega}{\hbar} t}}_{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \mu_B B_1 \beta \cos(\omega t + \delta) e^{i\omega t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \beta (e^{i(w+w_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(w-w_0)t} e^{-i\delta})$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\beta}{dt} = \mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i\omega t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \alpha (e^{i(w-w_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(w+w_0)t} e^{-i\delta})$$

affinché' funzioni deve essere risonante alla frequenza di Larmor: $w = w_0$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \mu_B B_1 \beta \cos(\omega t + \delta) e^{i\omega t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \beta (e^{i(w+w_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(w-w_0)t} e^{-i\delta})$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\beta}{dt} = \mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i\omega t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \alpha (e^{i(w-w_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(w+w_0)t} e^{-i\delta})$$

↓
a frequenza molto elevata che puo' encce (RWA)
tralasciando

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{-i\delta} \beta \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{-i\delta} \frac{d\beta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{i\delta} \alpha \quad \longrightarrow \quad = -\left(\frac{\mu_B B_1}{2\hbar}\right)^2 \alpha = -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \alpha$$

pongo $\Omega = \frac{\mu_B B_1}{\hbar}$

da cui ricavo $\alpha(t) = \cos \frac{\Omega t}{2}$

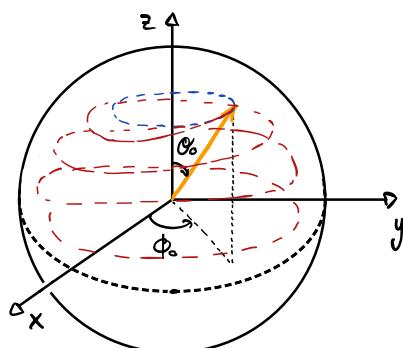
mentre il secondo termine lo ottengo come: $\beta = i \frac{d\alpha}{dt} e^{i\delta} = -i \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\delta}$

e quindi:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} e^{-i\frac{\omega_0 t}{\hbar}} \\ -i \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\frac{\omega_0 t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$\text{se } \delta=0 \Rightarrow |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} \\ -i \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} \quad \text{trascurando la fase globale}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} \\ \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\delta t} \end{pmatrix}$$



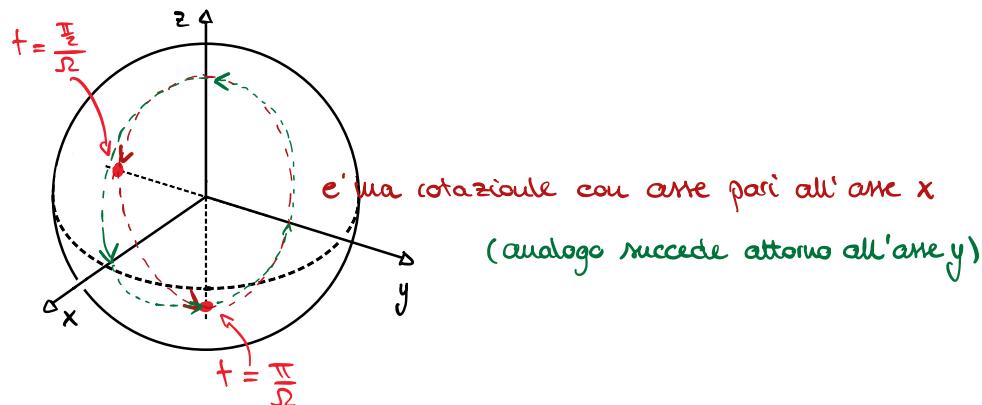
quanto dimostra che ho precessione lungo z e lungo x, come avevo supposto all'inizio

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)e^{i(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}|1\rangle$$

STATI TEMPO-DIPENDENTI

assumiamo che $t = \frac{\pi}{\Omega}$ $\Rightarrow |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow$ sono due componenti uguali (in modulo)

al contrario, se $t = \frac{\pi}{\Omega}$ $\Rightarrow |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$



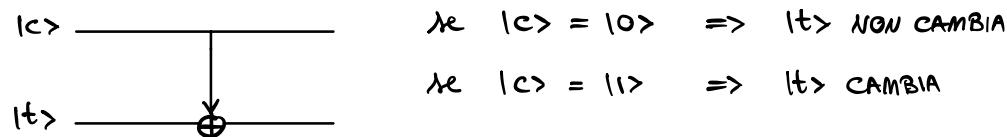
\Rightarrow per creare ogni tipo di rotazione ci bisogna due rotazioni "elementari" attorno a due assi (in questo caso x e y)

RICAPITOLANDO:

1 QBIT GATE \rightarrow **ESR** e cui servono un numero minimo di QC
(Universal Set of quantum gates) \rightarrow i pezzi del lego

2 QBIT GATE \rightarrow **CNOT** ma qui serve almeno anche un gate x 2 qbit

CNOT e' essenziale in alcuni circuiti (es.: nel circuito di Bell)



ed e' caratterizzato dalla matrice: $\text{CNOT} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|c\rangle$ e' il **controllo**: controlla l'uscita del circuito

$|t\rangle$ e' l'**ingresso**: rimane lo stesso se $|c\rangle = |0\rangle$, altrimenti flippa nel valore opposto

Cerchiamo di capire come costruire fisicamente un 2-qbit gate (come già abbiamo fatto per la rotazione precedentemente...) partendo dalla **SWAP** e proseguendo poi con il **2-qbit coupling**

SWAP

lo swap per 2 qbit e' definito come

$$|x_1\rangle|x_2\rangle = |x_2\rangle|x_1\rangle$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow |11\rangle$$

dove la matrice e': $\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(come già visto)

Ho anche altre configurazioni della swap, che sono:

$$i\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

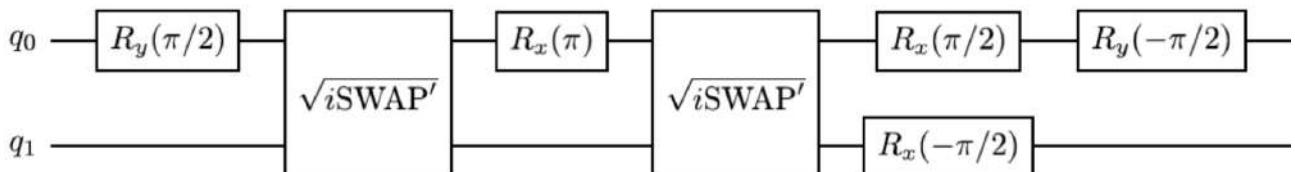
$$\sqrt{i\text{SWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e posso verificare che $\sqrt{i\text{SWAP}} \cdot \sqrt{i\text{SWAP}} = i\text{SWAP}$

$$\sqrt{i\text{SWAP}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ da questa ricavo il CNOT gate
e' di minor interesse perché e' naturalmente implementato in due resonatori a superconduttori capacitivi

per ricavarvi il CNOT gate dallo $\sqrt{i\text{SWAP}'}$ devo usare il seguente circuito:



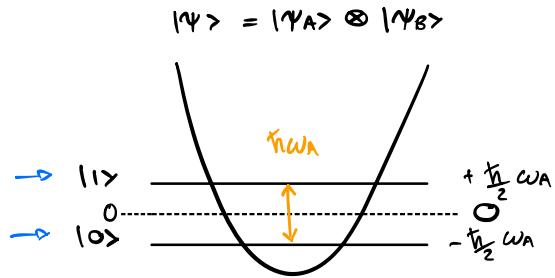
calcolando ho un'espressione del tipo:

$$\text{CNOT} = [I \otimes R_y(-\frac{\pi}{2})] [R_x(-\frac{\pi}{2}) \otimes R_x(\frac{\pi}{2})] \sqrt{i\text{SWAP}'} [I \otimes R_y(\pi)] \sqrt{i\text{SWAP}'} [I \otimes R_y(\frac{\pi}{2})]$$

ora vediamo come ottenere uno $\sqrt{i\text{SWAP}'}$ tramite un "semplice" circuito.

2 - QBIT COUPLING

consideriamo i seguenti
2-qbit state dinaccoppiati:

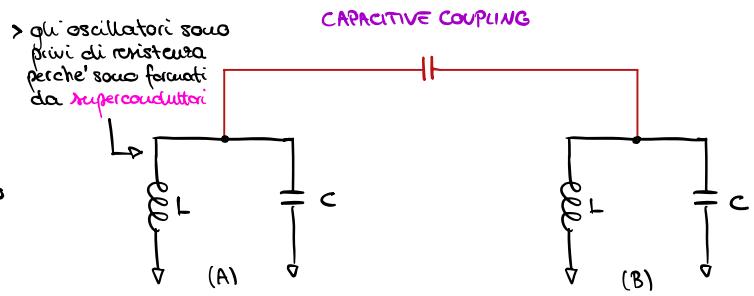


Se i 2-qbit hanno frequenze diverse, allora essi sono **dinaccoppiati**, ad esempio gli stati base $|10\rangle$ e $|11\rangle$; qui stanno dipende dall'eq. di Schrödinger tempo-dipendente

$$\begin{aligned}\hat{H}_A |\Psi_A\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_A\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{H}_A = -\frac{\hbar}{2} \omega_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \omega_A}{2} \\ \hat{H}_B |\Psi_B\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_B\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{H}_B = -\frac{\hbar}{2} \omega_B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{(\omega_B \ 0)} = -\frac{\hbar \omega_B}{2}\end{aligned}$$

Se hanno la stessa frequenza, invece, ho **accoppiamento**:

- $|\Psi_A\rangle$ transita da $|1\rangle$ a $|0\rangle$
- $|\Psi_B\rangle$ transita da $|0\rangle$ a $|1\rangle$
- \Downarrow
- cioè $|\Psi_{10}\rangle \rightarrow |\Psi_{01}\rangle$
- Ne entrambi sono nello stesso stato
- allora non ha transizioni

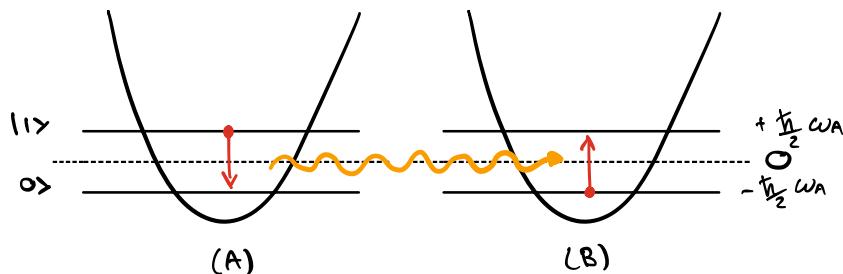


In questo caso posso scrivere i due stati come $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{H} &= \hat{H}_A \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_B = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_B \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A + \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A - \omega_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_A + \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A - \omega_B \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Per avere accoppiamento devo avere $\Delta = \omega_A - \omega_B \rightarrow 0$

I 2-qbit vicini sono posti a due livelli differenti vicini, come segue:



se entri hanno la stessa frequenza e quindi non accoppiati, allora puo' succedere:

- $|\Psi_A\rangle$ passa da $|1\rangle$ a $|0\rangle$
- $|\Psi_B\rangle$ passa da $|0\rangle$ a $|1\rangle$

"grazie" alla transizione di un fotone da (A) a (B)

(Se entrambi sono nello stesso stato questo non puo' succedere)

=> quello che succede e' uno **SWAP** e ora lo dimostriamo analiticamente, partendo dall' Hamiltoniano dei 2-qbit:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A + \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A - \omega_B & \textcolor{red}{K} & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{K} & -\omega_A + \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A - \omega_B \end{pmatrix}$$

a cui devo aggiungere due termini **K** di **coupling** per un motivo fisico che non dimostriamo;

consideriamo il seguente stato **disaccoppiato**: $|\Psi\rangle = c_1 |\Psi_{01}\rangle + c_0 |\Psi_{10}\rangle$

Se consideriamo ora l'equivalente ma **accoppiato** allora c_1 e c_0 dipendono dal tempo:

$$|\Psi\rangle = \underbrace{c_1(t)}_{\text{NON ACCOPPIATO}} |\Psi_{01}\rangle + \underbrace{c_0(t)}_{\text{NON ACCOPPIATO}} |\Psi_{10}\rangle$$

analizzo ora la forma matematica di questi due termini

NB

NON ACCOPPIATO c_1 \longrightarrow $c_1(t)$ ACCOPPIATO

NON ACCOPPIATO c_0 \longrightarrow $c_0(t)$ ACCOPPIATO

Moltre, la dipendenza dal tempo non e' solo per C_{01} e C_{10} , ma anche per

$$|\Psi_{01}\rangle = |10\rangle e^{i \frac{w_A - w_B}{2} t} !$$

facciamo la derivata del primo termine:

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{01}(t) |\Psi_{01}\rangle - \cancel{k} C_{01}(t) \frac{w_A - w_B}{2} |\Psi_{01}\rangle = -\frac{\hbar}{2} (w_A - w_B) C_{01} |\Psi_{01}\rangle + \cancel{k} |10\rangle \langle 01| C_{10} |\Psi_{10}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (0010) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0010 \\ 0100 \\ 0100 \\ 0000 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow la derivata di C_{01} dipende da C_{01} e C_{10}

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{10}(t) |\Psi_{10}\rangle + \cancel{k} C_{10} \frac{w_A - w_B}{2} |\Psi_{10}\rangle = \cancel{k} |10\rangle \langle 01| C_{01} |\Psi_{01}\rangle + \frac{\hbar}{2} (w_A - w_B) C_{10} |\Psi_{10}\rangle$$

\Rightarrow vale la stessa cosa (infatti sono accoppiati !!!)

ricordando che $|\Psi_{10}\rangle = |10\rangle e^{-i \frac{w_A - w_B}{2} t}$
 e che $|\Psi_{01}\rangle = |01\rangle e^{i \frac{w_A - w_B}{2} t}$

Allora:

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{01} e^{-i \frac{w_A - w_B}{2} t} |10\rangle = k C_{10} e^{-i \frac{w_A - w_B}{2} t} |10\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{10} e^{-i \frac{w_A - w_B}{2} t} |10\rangle = k C_{01} e^{i \frac{w_A - w_B}{2} t} |10\rangle$$

Ottengo così due equazioni:

$$\Rightarrow \left\{ i\hbar \frac{d}{dt} C_{01} = k C_{10} e^{iat} \right.$$

$$\Rightarrow \left. i\hbar \frac{d}{dt} C_{10} = k C_{01} e^{-iat} \right.$$

che risolviamo facendo la derivata:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} C_{01} = i\hbar k \frac{d}{dt} C_{10} e^{iat} - \Delta \hbar k C_{10} e^{iat} \\ -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} C_{10} = i\hbar k \frac{d}{dt} C_{01} e^{-iat} + \Delta \hbar k C_{01} e^{-iat} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} C_{01} = k^2 C_{01} - i\hbar^2 \Delta \frac{d C_{01}}{dt} \\ -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} C_{10} = k^2 C_{10} + i\hbar^2 \Delta \frac{d C_{10}}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} C_{01} - i\Delta \frac{dC_{01}}{dt} + \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 C_{01} = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} C_{10} + i\Delta \frac{dC_{10}}{dt} + \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 C_{10} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} C_{01} + \Omega^2 C_{01} = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} C_{10} + \Omega^2 C_{10} = 0 \end{array} \right.$$

la soluzione per entrambe le equazioni e' del tipo:

$$c_0, c_{01}(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

e ho le seguenti condizioni iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{01}(0) = A \\ \frac{d}{dt} C_{01}(0) = B\Omega = -i\frac{k}{\hbar} C_{10}(0) = -i\Omega C_{10}(0) \end{array} \right.$$

da cui derivo che la soluzione al sistema e':

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{01}(t) = C_{01}(0) \cos \Omega t - i C_{10}(0) \sin \Omega t \\ C_{10}(t) = -i C_{01}(0) \sin \Omega t + C_{10}(0) \cos \Omega t \end{array} \right.$$

che posso scrivere in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} C_{01}(t) \\ C_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -i \sin \Omega t \\ -i \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01}(0) \\ C_{10}(0) \end{pmatrix}$$

La 2-qbit matrix vale:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -i \sin \Omega t & 0 \\ 0 & -i \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui posso ricavare che

$$- \text{re } \Omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{U} = \sqrt{iSWAP} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4\Omega} = \frac{\pi\hbar}{4k}$$

$$- \text{re } \Omega t = \frac{\pi}{4}\pi \Rightarrow \hat{U} = \sqrt{iSWAP}$$

\Downarrow

\Rightarrow la porta logica \sqrt{iSWAP} puo' essere fatta intonizzando i qbit alla stessa frequenza per un tempo t e poi deintonizzandoli alle frequenze iniziali \Rightarrow e' semplice farlo

DI VINCENZO CRITERIA

abbiamo cinque criteri che possono essere applicati (tranne l'ultimo) anche ai computer tradizionali introdotti nel 1998; essi sono:

1) SCALABLE PHYSICAL SYSTEM WITH WELL DEFINED QUBITS

(un sistema fisico scalabile con qbit ben definiti)

SUPERCONDUCTIVE CIRCUITS

li manipola per avere
due stati diversi
- corrente che circola cw/ccw

ELECTRON

Varia la polarizzazione
 $\pm 15^\circ$
- ORIZZONTALE o VERTICALE...

ATOMIC NUCLEUS

\hookrightarrow (spin $\uparrow \downarrow$)

PHOTONS

Varia lo spin o l'energia
($\uparrow\downarrow$) (GND o ECCITATO)

2) INITIALIZE QUBITS (inizializzazione del registro dei qbit)

→ voglio fissare le condizioni iniziali (di solito: $|0\rangle$) per sapere da dove parto



"ground state"

- 1 — di solito è lo stato ad energia più bassa e lo posso fare
- 0 — espettando un tempo t sufficientemente lungo e molto maggiore del ENERGY RELAXATION TIME T_1

3) READ QUBIT : alla fine del calcolo devo essere in grado di leggere ogni qbit

→ posso avere ad esempio una conversione spin-to-charge

4) MANIPULATE WITH UNIVERSAL SET OF QUANTUM GATES

(capacità di implementare porte quantistiche universali)

↓
ne abbiamo molti (O), ma il più famoso è il gruppo di Clifford (H, S e CNOT)

↪ e' il minimo set che dobbiamo avere da cui generiamo gli altri... se ne manca una delle 3 allora non ho + un set universale

5) LONG DECOHERENCE TIME (lunga durata dei qbit)

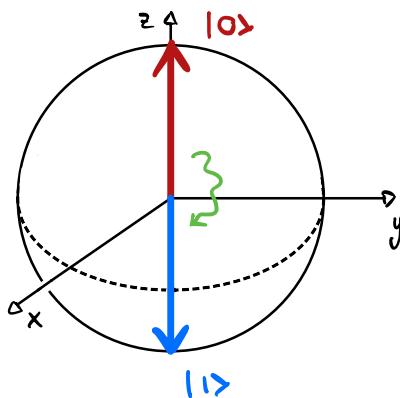
→ diversamente dagli altri, non puo' essere applicato ad altri computer tradizionali, ma e' specifico del **quantum-computing**

essenzialmente implica che: la vita del qubit deve essere lunga se comparata alla durata dell'algoritmo, che consiste in un certo numero di gate N

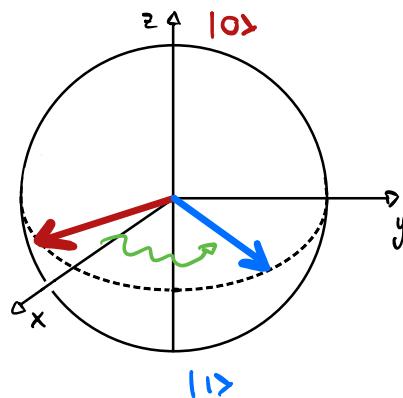
↳ questo vuol dire maximizzare il rapporto $N_g = \frac{t_{coh}}{t_{gate}}$ ($10^3, 10^4$)

$$\frac{\text{tempo di coerenza}}{\text{tempo di porta quantistica}}$$

Abbiamo decoerenza perché abbiamo una naturale perdita di energia dovuta a fenomeni radiativi o non radiativi (scattering) o a perturbazioni esterne provenienti dall'ambiente. Ho due principali fonti di incoerenza:



come definire un
LONGITUDINAL RELAXATION TIME T_1



come definire un
TRANSVERSAL RELAXATION TIME T_2
↳ dovuto allo sfasamento

NUCLEAR SPIN

è molto usato in biomedicina, anche come metodo per l'imaging (RMN)

Si basa sul fatto che anche il nucleo è simile agli elettroni ed è formato da

| | carica | spin | |
|----------|--------|-----------------|------------------------------|
| PROTONI | +e | + $\frac{1}{2}$ | → definisce l'elemento |
| NEUTRONI | Ø | + $\frac{1}{2}$ | → varia in base agli isotopi |

N.B.: sia protoni che neutroni sono fermioni e hanno spin pari a $\pm \frac{1}{2}\hbar$

ad esempio possiamo avere vari isotopi (+, o - stabili) di uno stesso elemento:

| | protoni | neutroni |
|-----------------|---------|----------|
| ^1H | 1 | 0 |
| ^2H | 1 | 1 |
| ^3H | 1 | 2 |
| ^{12}C | 6 | 6 |
| ^{16}O | 8 | 8 |

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

e' lo spin di ogni protone o neutrone

protoni e neutroni riempiono i livelli di energia nucleare con spin \uparrow e \downarrow in maniera simile a quanto fanno gli elettroni negli orbitali atomici

$$\begin{matrix} s_2 \uparrow \downarrow & p_2 \uparrow \uparrow \\ s_1 \uparrow \downarrow & \end{matrix} \quad \leftarrow$$

Se combiniamo protoni e neutroni ottengo lo SPIN TOTALE DEL NUCLEO I :

| | protoni | neutroni | I |
|------------------|---------|----------|--------------------------|
| ^1H | 1 | 0 | $\frac{1}{2} \leftarrow$ |
| ^2H | 1 | 1 | $1 \leftarrow$ |
| ^3H | 1 | 2 | $\frac{1}{2} \leftarrow$ |
| ^{12}C | 6 | 6 | $\emptyset \leftarrow$ |
| ^{16}O | 8 | 8 | $\emptyset \leftarrow$ |
| ^{28}Si | 14 | 14 | $\emptyset \leftarrow$ |

> se ho un numero pari ma di protoni che di neutroni, allora lo spin totale è $I = 0$

> se ho un numero dispari di protoni e/o di neutroni, allora lo spin totale è $I \neq 0$

$$S^2 = \hbar^2 I(I+1)$$

$$S_z = m\hbar$$

con $m = -I, -I+1, \dots, I-1, I$

mentre gli elettroni erano tutti uguali, questi nuclei sono tutti diversi e quindi hanno anche valori di γ diversi, presenti nella tabella sottostante.

$$\mu_z = \gamma S_z = \gamma \frac{\hbar}{2} = \mu_B \quad (\text{era la stessa } \gamma \text{ per tutti gli elettroni})$$

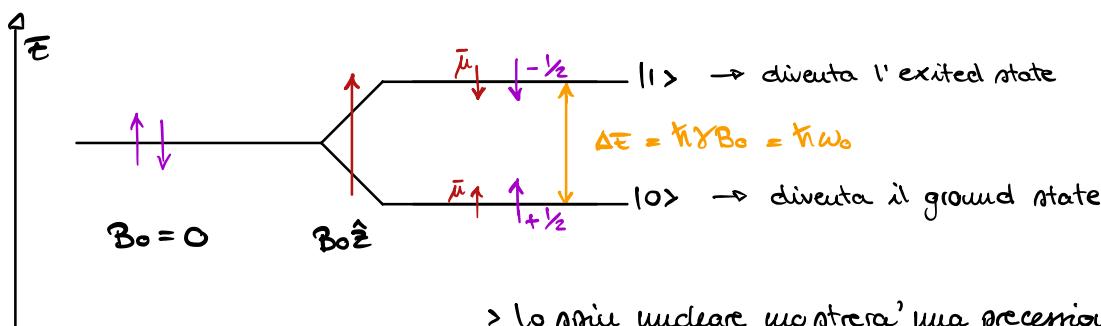
| | protoni | neutroni | I | $\gamma [10^6 \text{ rad/T}_S]$ |
|--------------------|---------|----------|---------------|---------------------------------|
| ${}^1\text{H}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 26,8 |
| ${}^2\text{H}$ | 1 | 1 | 1 | 4,1 |
| ${}^3\text{H}$ | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 22,5 |
| ${}^{12}\text{C}$ | 6 | 6 | \emptyset | ... |
| ${}^{16}\text{O}$ | 8 | 8 | \emptyset | ... |
| ${}^{28}\text{Si}$ | 14 | 14 | \emptyset | ... |

$$\omega_0 = \gamma B_0$$

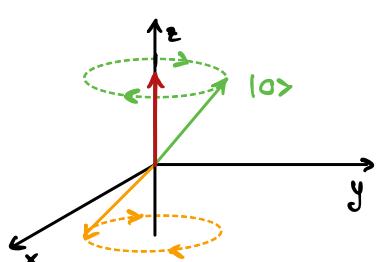


larmor-frequency diversa per ogni isotopo anche dello stesso elemento

Assumiamo di avere un sistema e di applicare un campo magnetico, allora anche i nuclei subiranno l'effetto **ZEEMAN** come avveniva per gli elettroni, ma con la differenza che lo spin e il momento hanno la stessa direzione (e non quella opposta, come per gli elettroni):



> lo spin nucleare mostrerà una precessione oraria, anziché antioraria come aveva l'elettrone, a frequenza ω_0 unica \forall isotopo



> Inoltre, ogni atomo sperimentera' un campo magnetico diverso per la schermatura degli e-

Quanto appena descritto è vero se siamo a temperature basse | $kT \ll \Delta E$

Supponiamo di lavorare a temperatura ambiente ($@RT$: room temperature), cioè sotto l'ipotesi di $kT \approx \Delta E$



all'equilibrio vale la **distribuzione di Boltzmann** che indica la probabilità di essere in uno stato piuttosto che in un altro:

$$\frac{P_{11>}}{P_{10>}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \stackrel{@RT}{\approx} \frac{1}{e^2}$$



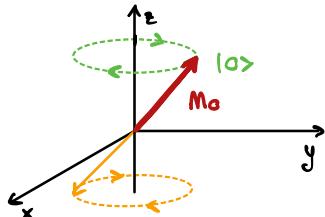
dipende da ΔE che dipende dal campo magnetico

posso dire che all'equilibrio termodinamico ho:

$$P_{11>} \approx 10\%$$

$$P_{10>} \approx 90\% \Rightarrow \text{ho una popolazione maggiore di spin che punta } |0\rangle$$

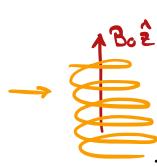
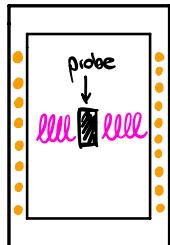
posso definire un campo magnetico macroscopico:



→ è il principio di funzionamento della RISONANZA MAGNETICA NUCLEARE (RMN)

NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE

Genero un campo magnetico con un solenide mantenuto sotto la temperatura critica



grazie all'elio liquido (H_2)

\Rightarrow RESISTENZA $R = \emptyset$

→ se alimento con corrente genero un campo magnetico
 B_0 interno e lungo \hat{z} ($N \cdot 10 T$)

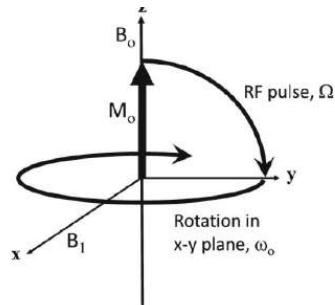
Dentro ho una **RF probe**: un solenoide che applica un campo magnetico a radiofrequenza del tipo: $\vec{B}_1 \cos \omega t \hat{x}$ → diretto lungo l'asse x , per la manipolazione dello spin

se il campo magnetico è alla stessa frequenza di risonanza della frequenza di precessione, allora genera una rotazione lungo l'asse x

Quindi ho:

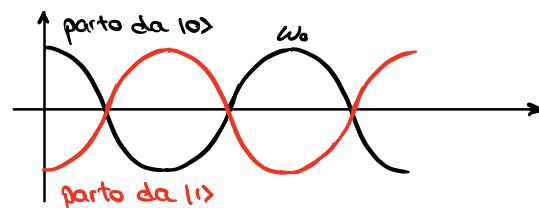
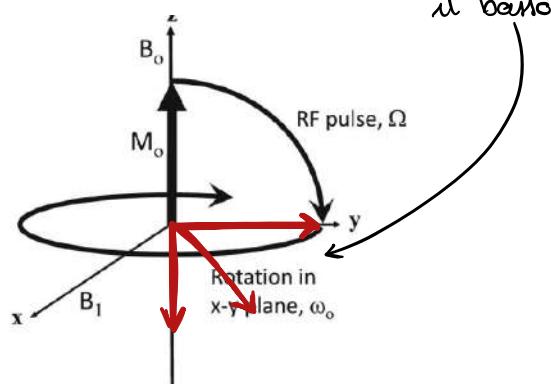
- > campo magnetico DC lungo l'asse z che causa una precessione oraria dello spin a una frequenza di **Larmor** ω_0
- > campo magnetico RF lungo l'asse x che causa una precessione oraria alla frequenza di **Rabi** $\Omega = \frac{\gamma}{2} B_1$
- ⇒ Solo gli atomi con una frequenza di Larmor corrispondente a quella selezionata verranno ruotati

$$\rightarrow \text{Ne voglio ruotare di } 90^\circ: t_{RF} = \frac{\pi}{\Omega}$$



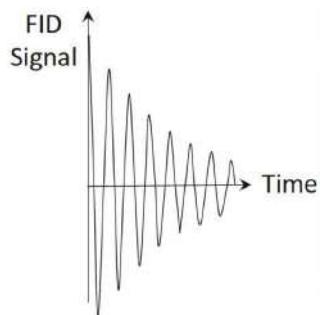
Per leggere sfrutto la **LEGGE DI FARADAY-NEUMAN - LENZ** inducendo una tensione sulla sonda RF pari a:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightarrow \text{leggo il campo magnetico lungo } y \text{ che decrece ruotando verso il basso}$$



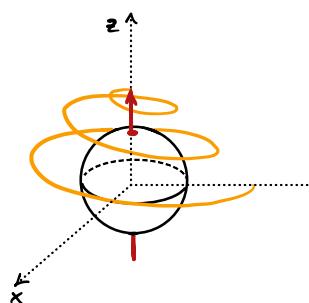
A seconda di dare parte ho una fase diversa: tale misura è detta **FID**, cioè free induction decay

il segnale osservato dalla sonda è del tipo:



→ il gbit torna a $|0\rangle$ e lungo \hat{y} non ha rotazione

→ ha un decadimento esponenziale a causa di un **riallineamento spontaneo** che riporta allo stato fondamentale; tale decadimento è detto **decadimento dell'induzione libera FID** che avviene in un tempo T_1 RELAXATION



$$M_z = M_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

→ impiega T_1 per riallinearsi al campo dc

Tale riallineamento verso $|0\rangle$ è dovuto alla **perdita di energia**

Lungo x e y ha rilassamento secondo $M_x, M_y = M_0 e^{-\frac{t}{T_2}}$ a causa di due effetti:

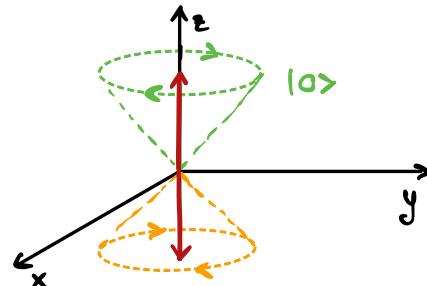
1) riammanto longitudinale ($T_1 \approx$ giorni)

2) **dephasing** di tutte le componenti ($T_2 \approx$ secondi) $\rightarrow T_2$ DECAY

$\Rightarrow T_2 \ll T_1$ e quindi il dephasing domina questo

+ veloce; esso è dovuto principalmente a **DISOMOGENEITÀ**

DEL CAMPO MAGNETICO B :



Se non è (realmente) uniforme all'interno della camera: quindi anche M_0 non è uniforme

→ ha distorsioni e non ha rotazioni precise, ma ha una distribuzione casuale attorno alle posizioni aspettate

\Rightarrow posso effettuare un **REPHASING** tramite una

tecnica detta **QUANTUM ECHO**

