

ELECTRON SPIN

Basta guardare al singolo elettrone ed in particolare al suo spin: voglio poter manipolare lo spin tramite impulsi RF e voglio leggere tramite spin-to-charge conversione il valore del qbit.

Ho dei vantaggi rispetto allo spin del nucleo:

- > è integrabile CMOS
- > è molto scalabile (100 nm x 100 nm)
- > tempo di coerenza lungo grazie allo spin del nucleo pari a \gg nel silicio (o germanio) arricchito $\frac{T_1}{T_2} \approx 10^3$

ma anche degli svantaggi:

- > ho il rumore che mi impone dei limiti

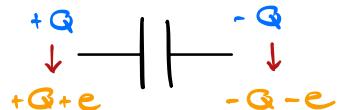
COULOMB BLOCKADE

ammiriamo di avere un condensatore C

l'energia immagazzinata in C è:

$$E = \int VI dt = \int V \cdot C \frac{dV}{dt} dt' = C \int V dV = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

ora ammiriamo che un elettrone passi da sx a dx di C; allora la carica varia di:

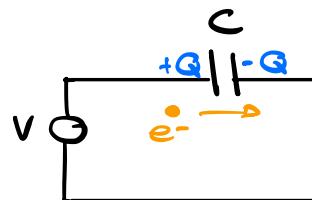


quindi l'energia finale e la variazione valgono:

$$\bar{E}_f = \frac{(Q+e)^2}{2C}$$

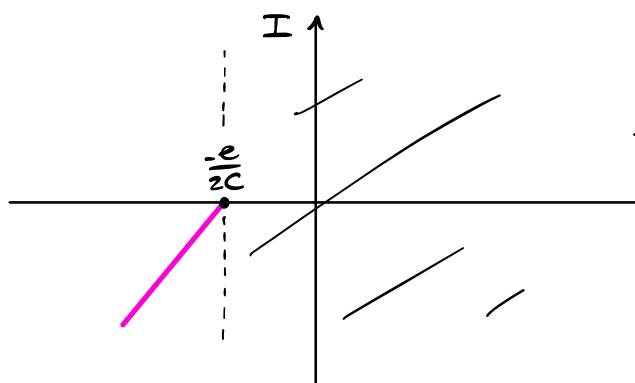
$$\Delta E = \bar{E}_f - \bar{E}_i = \frac{(Q+e)^2 - Q^2}{2C} = \dots = \frac{e}{C} \left(Q + \frac{e}{2} \right)$$

e deve essere negativa: $\Delta E < 0 \Leftrightarrow Q < -\frac{e}{2}$



Da ora in poi ricavo la tensione che devo avere per vincere l'e⁻:

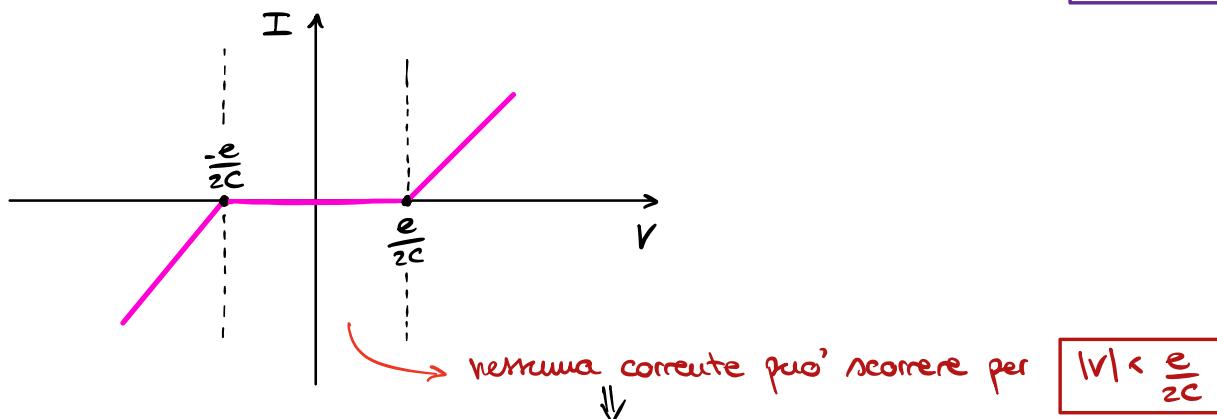
$$V < -\frac{e}{2C}$$



$V > -\frac{e}{2C}$ allora non passa alcun e⁻
e quindi non ho corrente

Spontaneo l'elettrone da dx a sx e svolgendo i calcoli ottengo

$$V < \frac{e}{2C}$$



tal effetto e' detto COULOMB BLOCKADE e rappresenta l'energia minima da fornire per vincere la repulsione coulombiana degli elettroni dall'altra parte e si verifica in dispositivi molto piccoli (tipo i quantum dots) causando un incremento (idealmente ∞) della resistenza a bassa tensione (e bassa capacita')

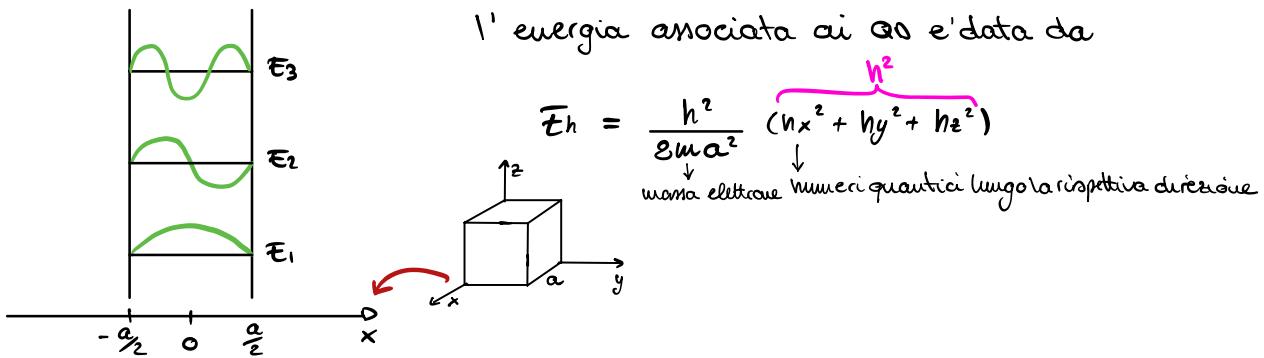
$\approx C \approx 5 \text{ fF}$ allora: $V = \frac{e}{2C} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{10 \cdot 10^{-15} \text{ F}} = 16 \mu\text{V}$ (l'effetto non e' visibile normalmente)

$$\Delta E \approx 16 \mu\text{eV} \ll kT$$

$\uparrow @RT$ ($kT \approx 25 \text{ meV}$) \rightarrow e quindi l'elettrone passa sempre indipendentemente dalla tensione

QUANTUM DOT

un punto quantico e' una nanostruttura a 0D (nessa dimensioni) formato da un cristallo di semiconduttore confinato in ogni direzione da un altro semiconduttore con banda proibita maggiore (che quindi puo' essere anche un isolante)



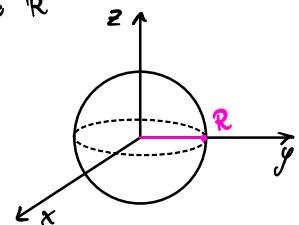
Il concetto e' quello di confinare un singolo elettrone ($n_x = n_y = n_z = 1$) nello stato fondamentale e manipolare lo spin.

Per semplicita nei calcoli supponiamo il QD sferico di raggio R

$$\Rightarrow \text{la capacit\^a} e' C = 4\pi\epsilon_0 R = 10 \text{ fF}$$

$$\Rightarrow \text{l'energia di carica} e' E_C = \frac{e^2}{2C} \approx 70 \mu\text{eV} (\gg kT)$$

i quantuni computer non sono @RT
ma sono raffreddati a $T \approx 3 \text{ mK} \Rightarrow kT \approx 0,25 \mu\text{eV}$

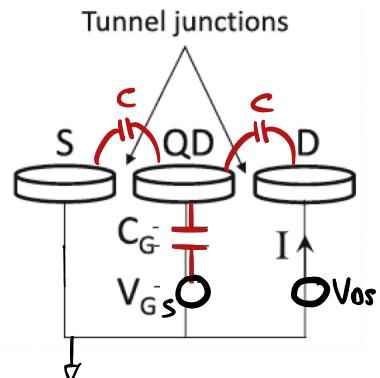


SINGLE ELECTRON TRANSISTOR (SET)

Il SET e' un dispositivo elettronico basato sull'effetto di bloccaggio columbiani e formato da un QD, separato da SOURCE e DRAIN da giunzioni tunnel. Il potenziale elettrico del QD puo' essere manipolato tramite il contatto di GATE, che e' accoppiato capacitivamente.

> l'energia elettrostatica del QD con $N e^-$ in eccedenza e':

$$E(N) = \frac{(C_G V_G - N e)^2}{2C_\Sigma} \quad \text{Somma capacit\^a del QD: } C_\Sigma = 2C + C_G$$



> l'energia necessaria per aggiungere l'ultimo e^- (potenziale chimico) e':

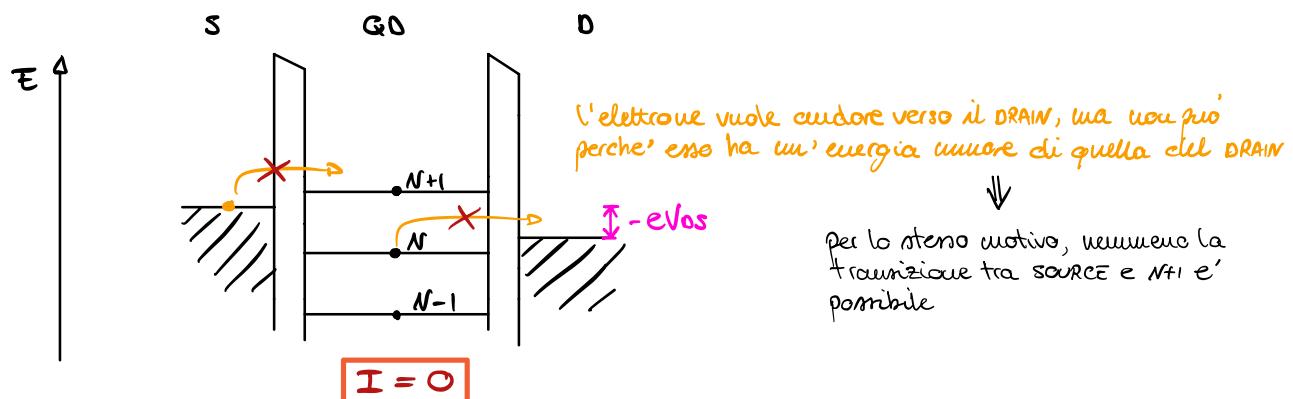
$$\mu(N) = E(N) - E(N-1) = \frac{e}{C_\Sigma} [e(N - \frac{1}{2}) - C_G V_G]$$

Se aggiungo un elettrone l'energia aumenta di $\Delta\mu = \frac{e^2}{C_\Sigma}$ detta ADDITION ENERGY

Di solito l'energia termonica non è in grado di fornire questa energia. Posso quindi avere due casi:

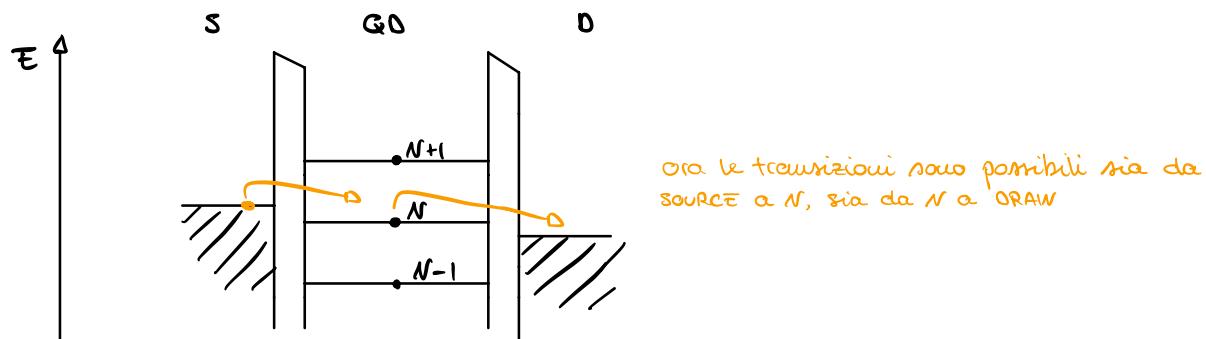
- se $\mu_s < \mu_{(N+1)} \wedge \mu_d > \mu_N$, allora l'elettrone non può passare né da SOURCE a QD né da QD a DRAIN
- se $\mu_s > \mu_{(N+1)} > \mu_d$, allora può avvenire il tunnel $S \rightarrow QD \rightarrow D$

V_g può essere usato per spostare il potenziale in su o in giù



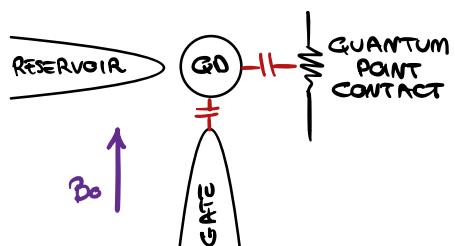
\Rightarrow in questa configurazione ho $\cancel{I} \neq 0$ corrente che scorre tra DRAIN e SOURCE

Se aumento la V_{GS} , also i livelli del QD e le cose cambiano:



\Rightarrow in questo caso ho $I \neq 0$

Il dispositivo è implementato secondo il seguente schema a lato:

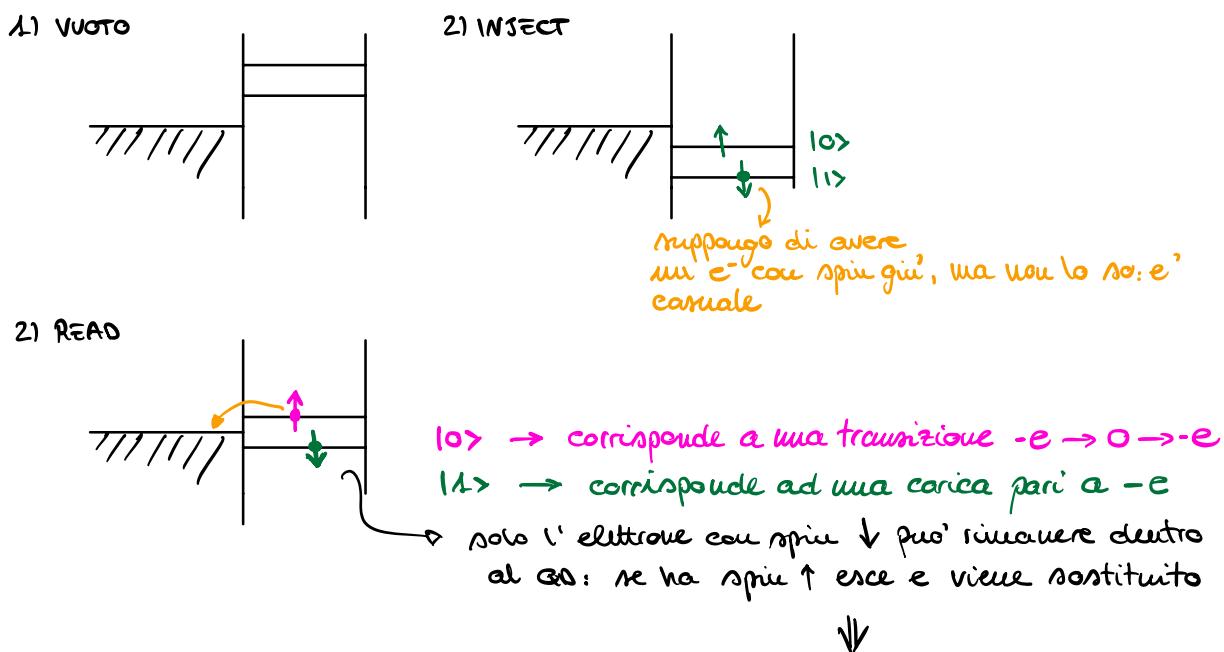


Il QD puo' servire come spin qbit e puo' essere

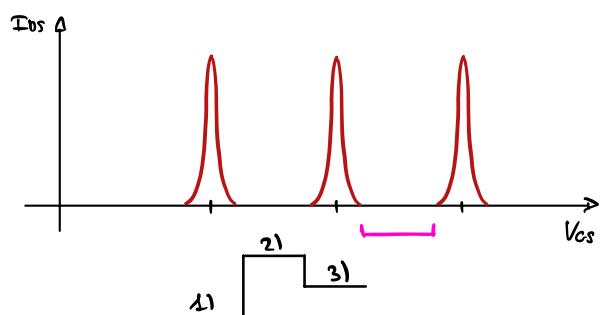
◦ **INIZIALIZZATO**: il singolo elettrone puo' essere intrappolato tramite tunnelling e bloccaggio di Coulomb all'interno del QD

◦ **LETTTO**: applicando un grande campo magnetico B che induce lo splitting di Zeeman per gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e poi applicando una tensione V_{ds} che consente selettivamente solo il tunnel dalla stato $|0\rangle$ (a E maggiore). Tale tecnica e' chiamata **CONVERSIONE SPIN-TO-CHARGE**

◦ **CONTROLLATO**: tramite ESR con porte a singolo e doppio qbit



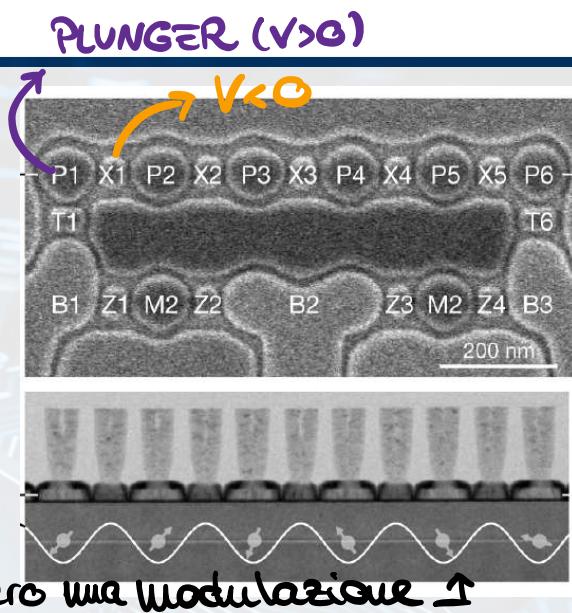
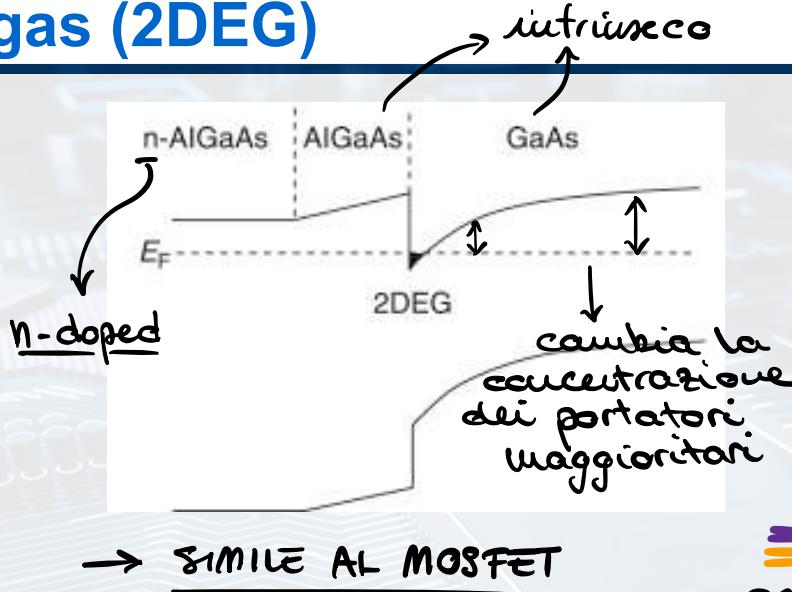
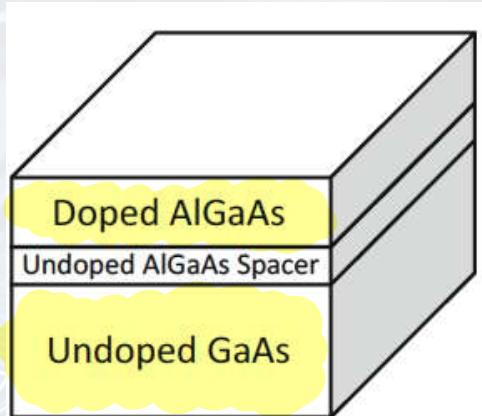
Vedro' una corrente del tipo:



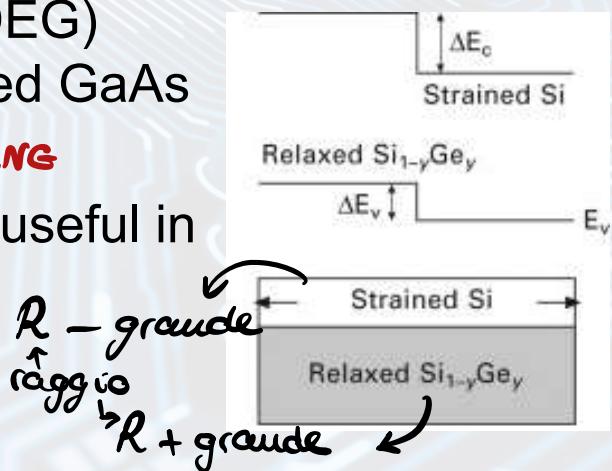
il tempo impiegato e' n $100 \mu\text{s} \ll T_2^*$



2D electron gas (2DEG)

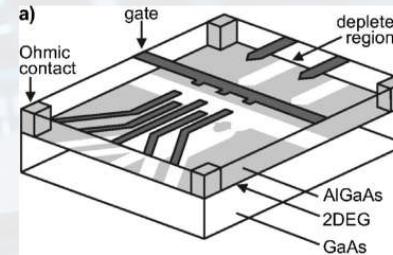
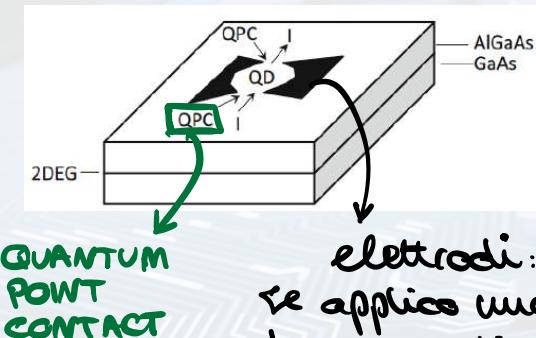


- Typical spin qubit implementation = 2D electron gas (2DEG) such as the one formed at the interface between undoped GaAs and **doped AlGaAs** *ridotta solo da FONONI e SCATTERING*
- No doping in the GaAs to ensure high mobility, which is useful in high electron mobility transistors (HEMT) *>> della mobilità'*
- Similarly, qubits can be formed in SiGe/Si(QW)/SiGe *→ posso avere larghezze diverse*

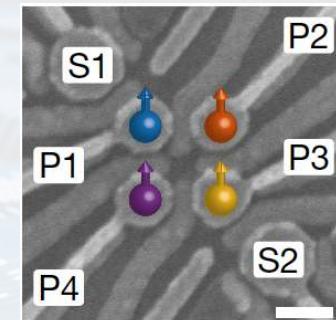
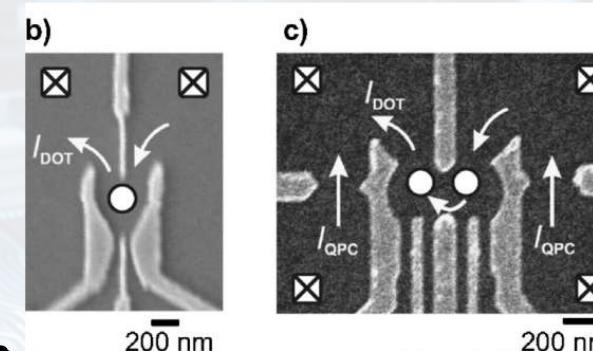




Electrostatic QD



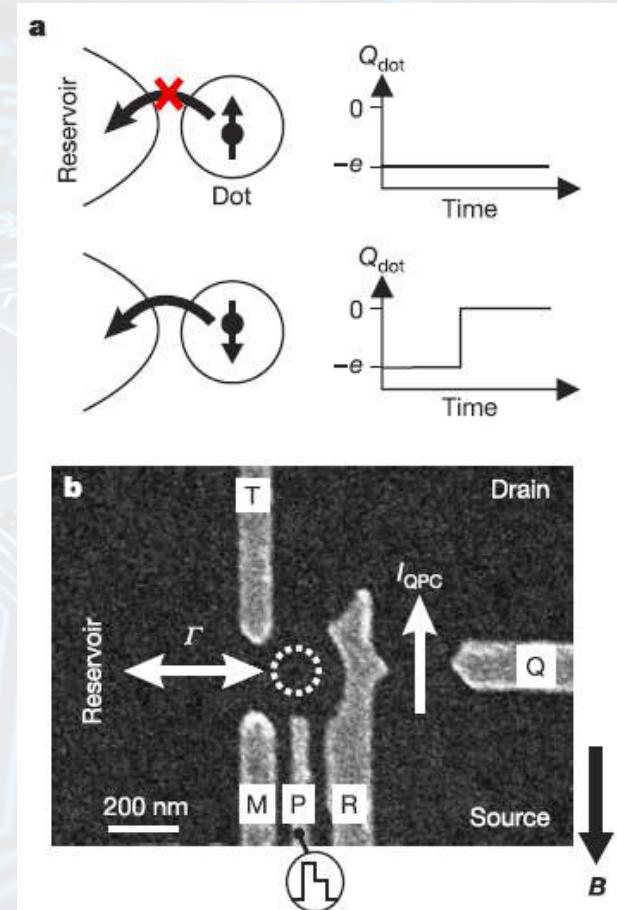
elettrodi:
Se applico una tensione, genero una
barriera di potenziale $\sim \sim \rightarrow$ una sorta di vulcano...



- A top gate can be used as barrier gate ($V_G < 0$) to repel electrons from the 2DEG by creating a barrier potential
- Plunger gates ($V_G > 0$) can be formed to locally trap electrons
- Gate constrictions can form a quantum point contact (QPC) serving as tunneling channels to trap/detrap electrons in the QD
- Single, double or multiple QD structures can be formed

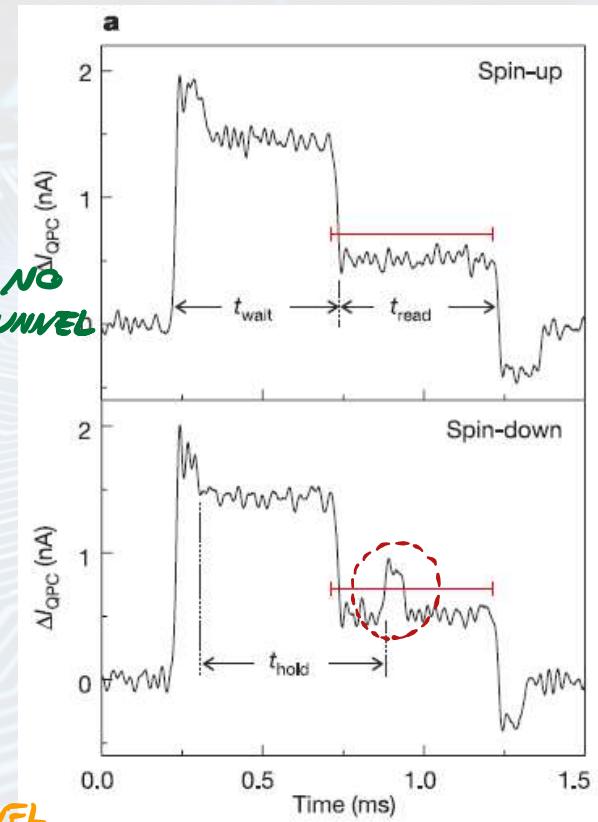
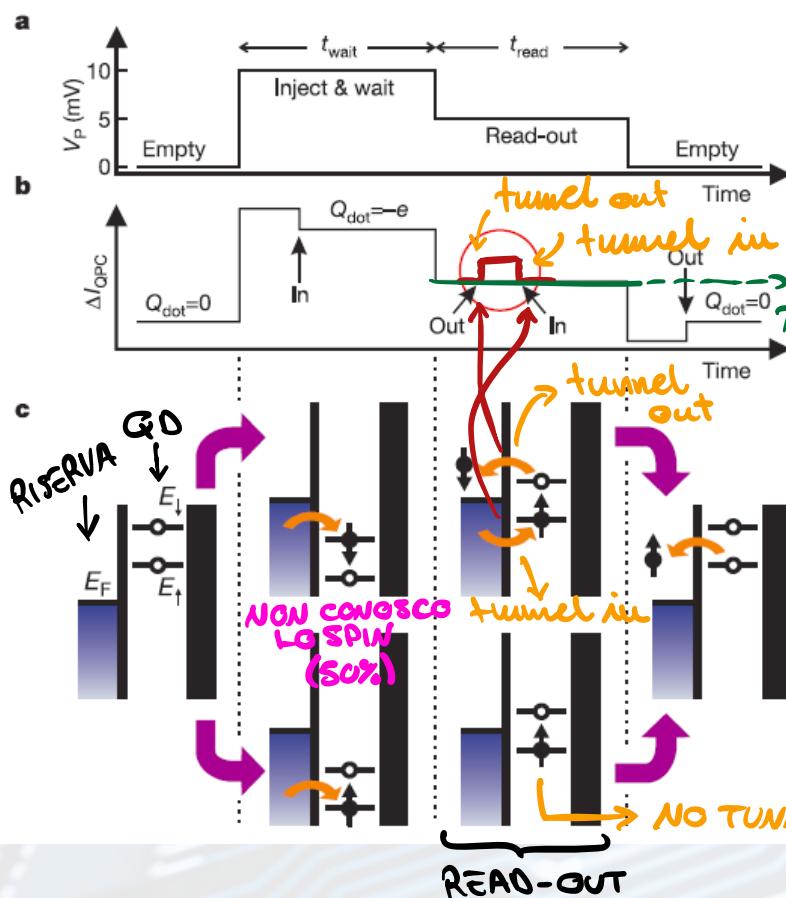
Spin-to-charge conversion

- Read by spin-to-charge conversion
 - Tune the dot potential so that only the spin-down state $|1\rangle$ can tunnel
 - Probe the dot charge after tunneling
- The quantum dot was obtained by depleting a 2DEG in GaAs/AlGaAs heterostructure
 - T, M, R define the dot by depletion
 - P controls the dot potential with respect to the reservoir
 - Long relaxation time $T_1 = 0.85$ ms at $B_0 = 8$ T



J. M. Elzerman, et al., Nature 430, 431 (2004)

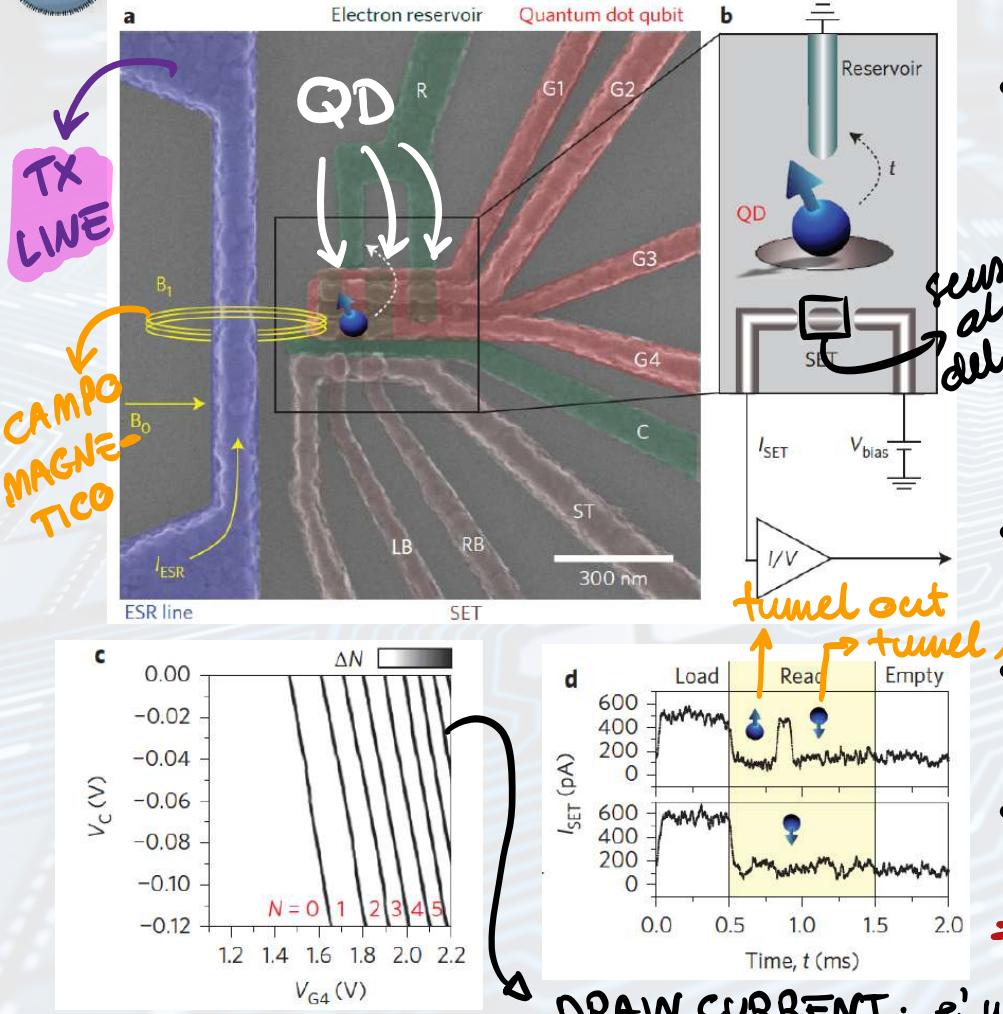
Spin-to-charge read/initialization



- Spin up: no read current peak during tread
- Spin down: a current peak appear randomly during t_{read}
- The same protocol is used for both qubit readout and initialization
- Read/initialization errors might be due to thermal broadening in the reservoir

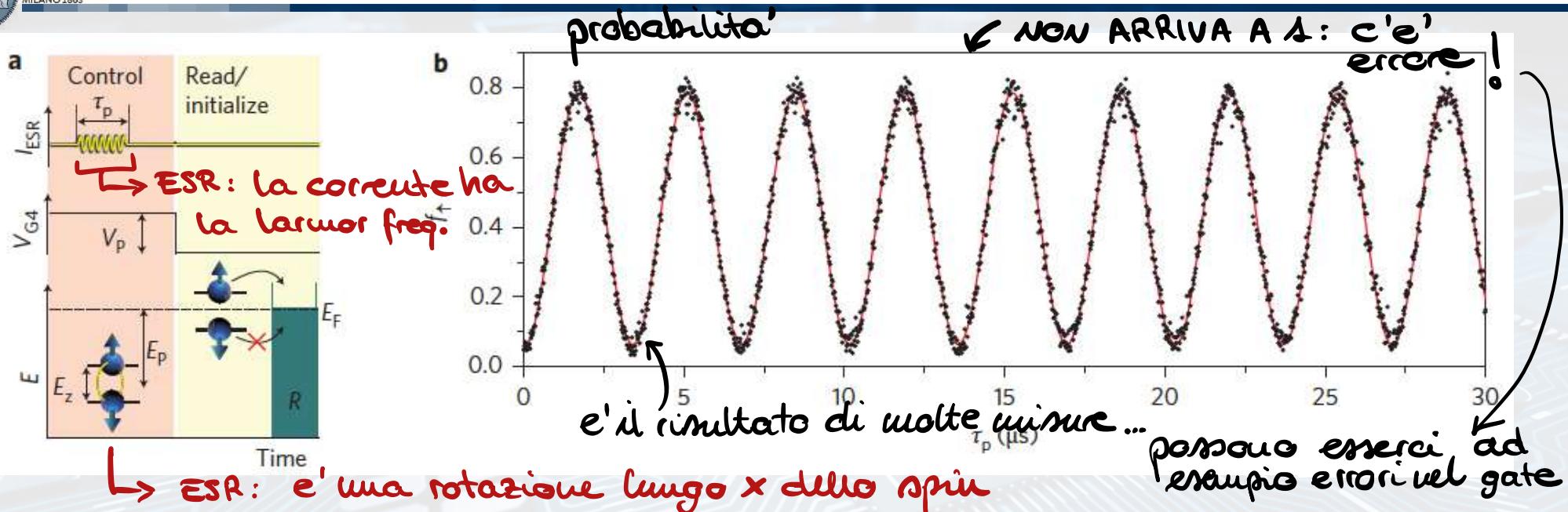
J. M. Elzerman, et al., Nature 430, 431 (2004)

Spin control by ESR → ELECTRON SPIN RESONANCE



- Qubit in epitaxially-grown, isotopically enriched ^{28}Si ($< 880\text{ppm}$ of ^{29}Si) includes
 - On-chip transmission line for ESR
 - Reservoir for initialization/read
 - Gates for electrostatic control
 - **SET** for sensing
 - SET stability diagram indicate gate/drain biasing needed to initialize/read
 - Initialize/read by spin-to-charge conversion
 - Gate voltage V_G is tuned to yield a tunneling time of about $100\ \mu\text{s}$
- spin
=> dopo l'inizializzazione ho scoperne ↓
- M. Veldhorst, et al., Nature Nanotech. 9, 981 (2014)
- DRAIN CURRENT: e' una linea perche' il QD e' accoppiato capacitivamente e tale Cc >> delle altre ... ?

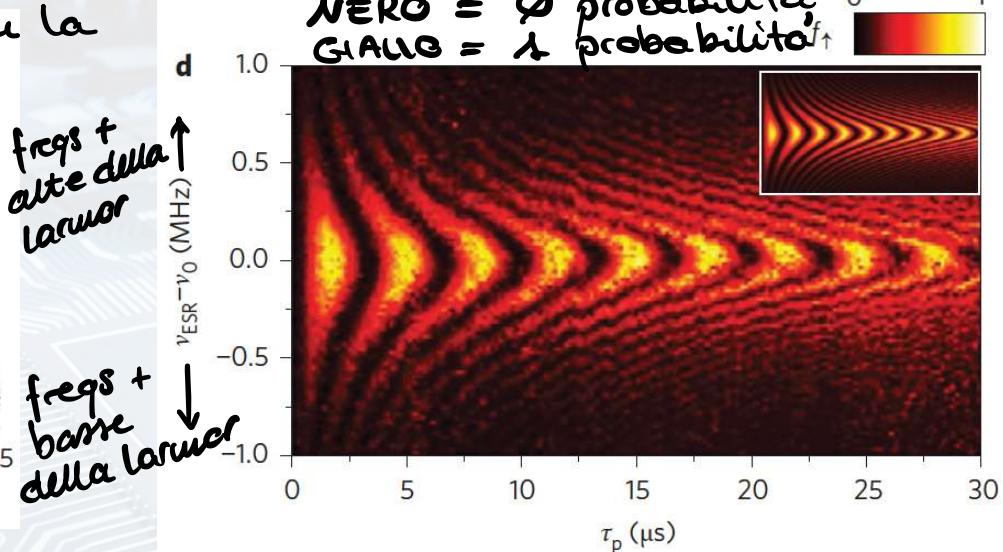
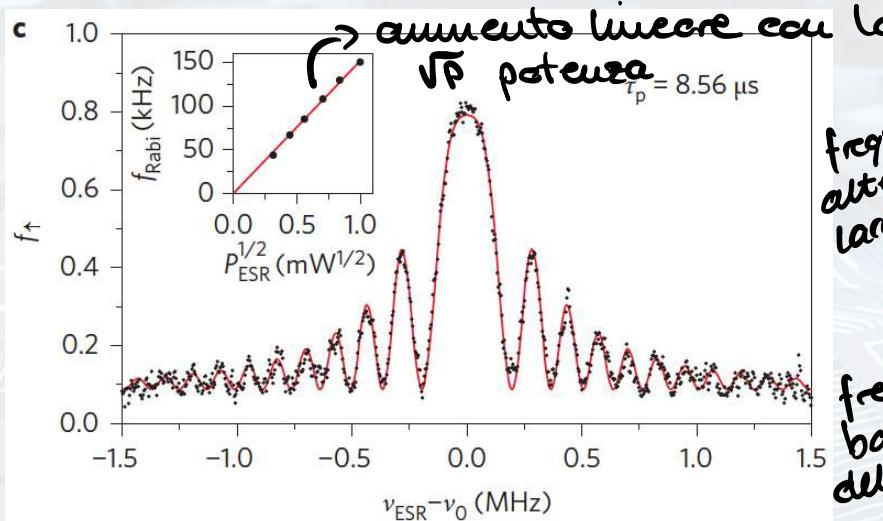
Spin control by ESR



- During the control time, the qubit states are below the Fermi level in the reservoir
- The RF pulse in the transmission line generates an oscillating B_1 -field for ESR
- Resonance at the Larmor frequency $\nu_0 = g^* \frac{\mu_B B_0}{h} = 39.1$ GHz with $B_0 = 1.4$ T, $g^* \approx 1.998$ accounts for the electron effective mass in the QD

M. Veldhorst, et al., Nature Nanotech. 9, 981 (2014)

Amplitude and frequency of ESR



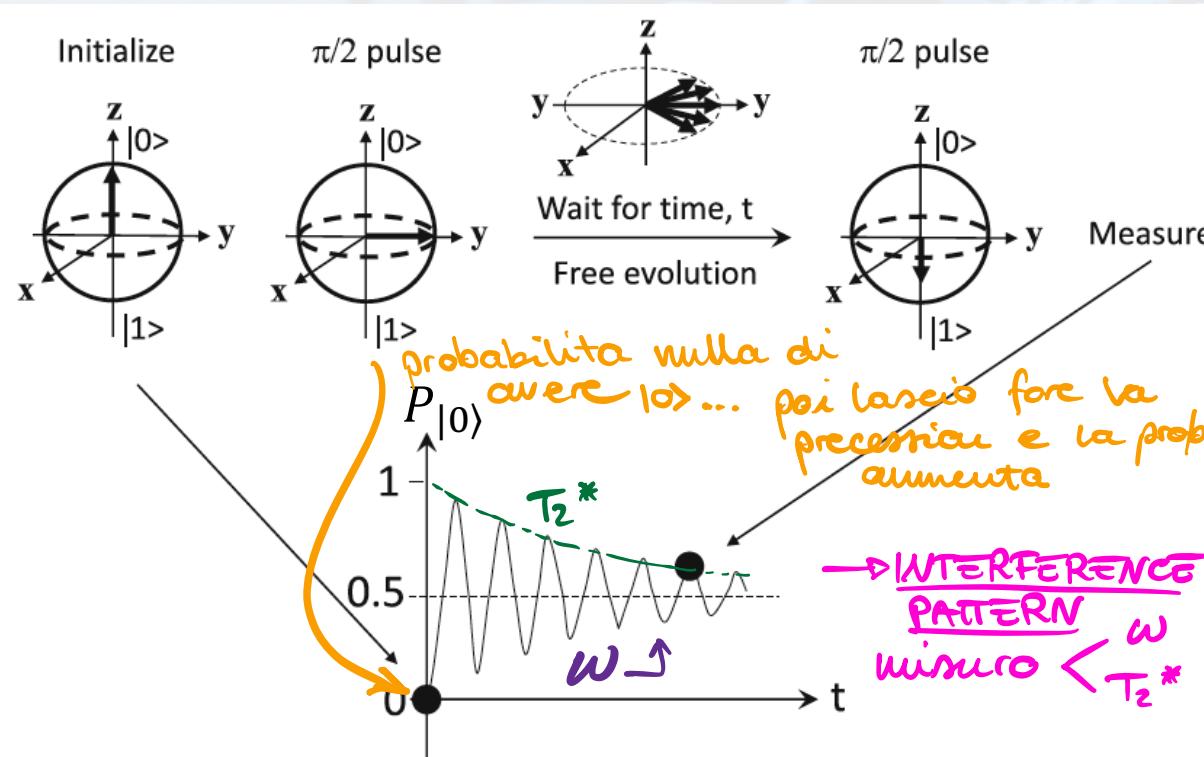
- ESR decays quickly with the detuning frequency $\nu_{\text{ESR}} - \nu_0$
- The Rabi frequency Ω is proportional to $B_1 \sim \sqrt{P_{\text{ESR}}}$
- The Chevron pattern shows Rabi oscillations as a function of the frequency mismatch, according to the Rabi formula:
$$P(t_{\text{MW}}, \Delta\omega) = \frac{\omega_R^2}{2[\omega_R^2 + \Delta\omega^2]} [1 - \cos(\sqrt{\omega_R^2 + \Delta\omega^2} t_{\text{MW}})]$$

M. Veldhorst, et al., Nature Nanotech. 9, 981 (2014)



- Quality factor Q
 - Defined as the number of qubit operations (quantum gates) before coherence is lost
 - Typically we would like $Q \sim 10^3$
 - Q can be estimated as the ratio between the dephasing time T_2^* and the manipulation time T_π
 - Typically assessed by T_2^* measured by Ramsey experiment
- Quantum fidelity
 - Defined as the ‘accuracy’ of a quantum gate
 - pomo avere mismatch nelle frequenze ... nel tempo ... rotazioni di esempio $\frac{\pi}{2}$ + errore
 - e.g., an X gate operated on state $|0\rangle$ leads to state $|1\rangle$, but reading the final state would still yield a small probability of reading $|0\rangle$
 - typically measured with randomized benchmarking (RB)

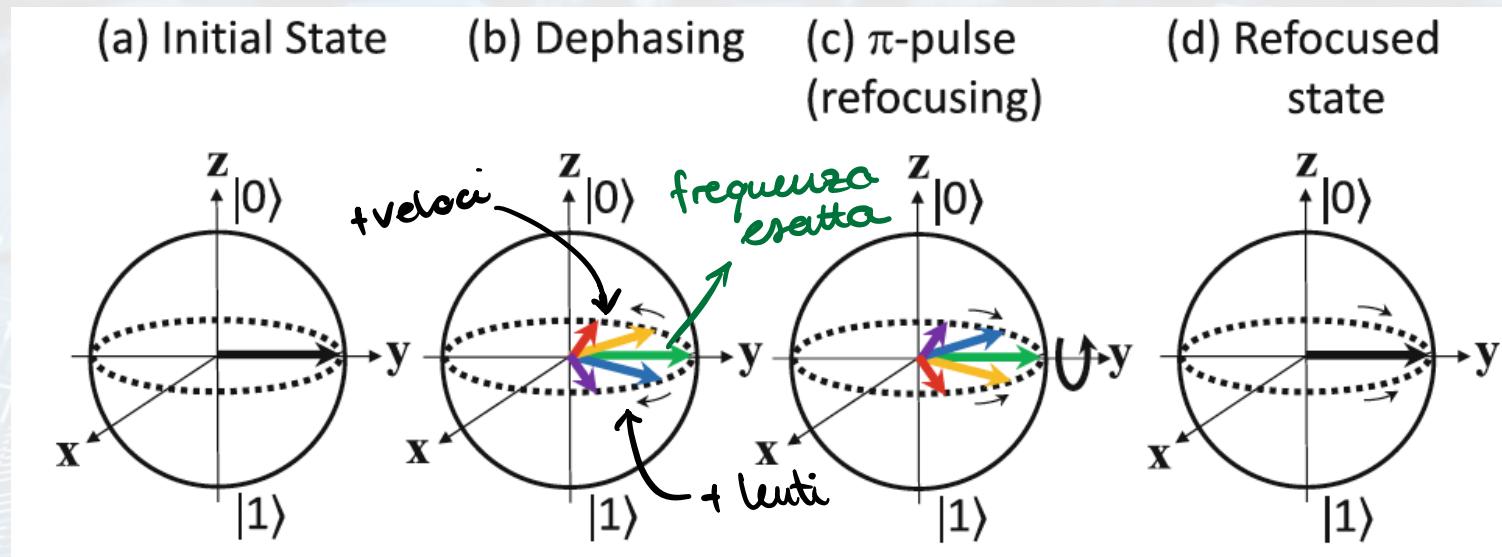
Ramsey experiment



$\Delta = \omega - \omega_0$ la frequenza reale è leggermente diversa da quella di Larmor e va misurata: posso definire un errore (Δ)

- Ramsey experiment:
- Initialize to $|0\rangle$
- Rotate $\frac{\pi}{2}(x)$ attorno x
- Wait for time t
- Rotate $\frac{\pi}{2}(x)$
- Measure the probability $P_{|0\rangle}$
- Due to precession, $P_{|0\rangle}$ oscillates with the Larmor frequency
- $P_{|0\rangle}$ also decays due to the dephasing time T_2^*

Hahn echo visto anche nei nuclear spin

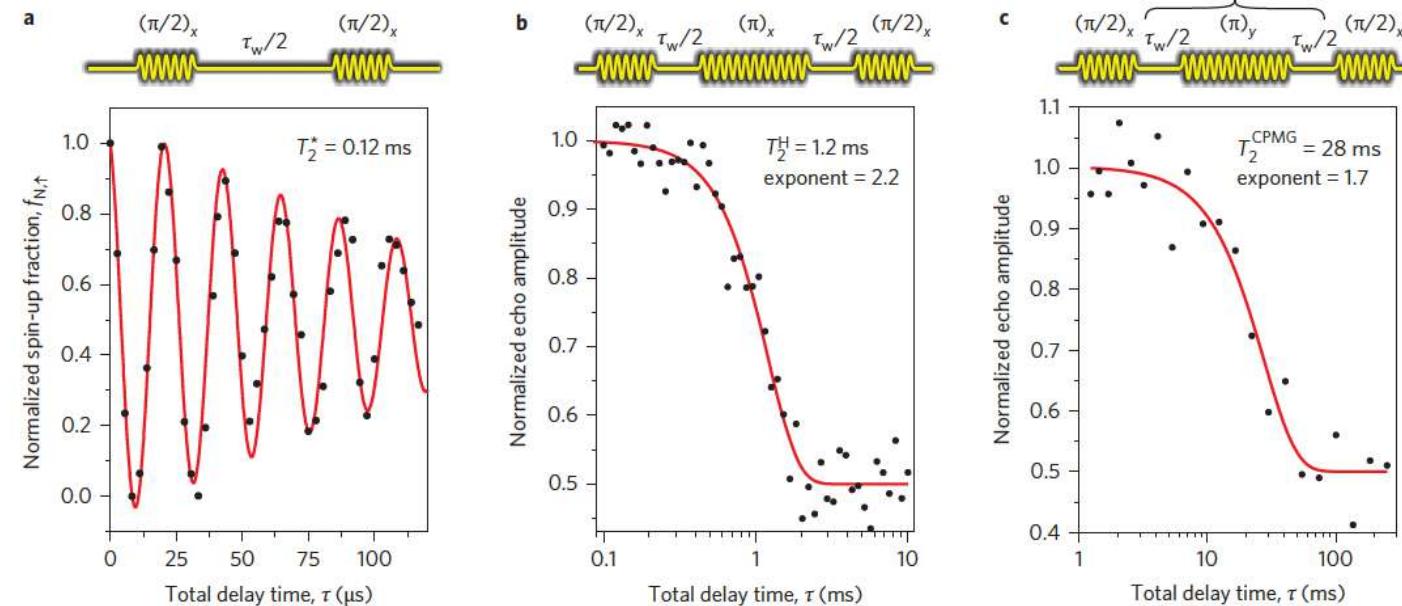


- T_2^* applies to an ensemble measurement:
 - measurement of a large number of physical qubits like in NMR
 - repeated measurements on a single qubit
- A single measurement is usually characterized by time T_2
- T_2 can be distinguished from T_2^* by Hahn echo, i.e., a Ramsey experiment with an added $\pi(y)$ rotation for refocusing



Ramsey experiments on spin qubit

- misurare la we eratta
- misurare T_2^*



- Ramsey experiment reveal $T_2^* = 0.12 \text{ ms}$
- Hahn echo experiment indicate $T_2^H = 1.2 \text{ ms}$
- Hahn echo is repeated N times in the Car-Purcell-Meiboom-Gill (CPMG) experiment, yielding $T_2^{CPMG} = 28 \text{ ms}$

M. Veldhorst, et al., Nature Nanotech. 9, 981 (2014)

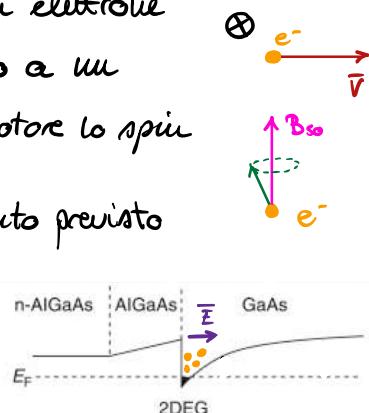
INTERAZIONI

1) SPIN-ORBITA (EFFETTO DRESSELHAUS)

Supponiamo di avere un campo elettrico \vec{E} e un elettrone che si muove con velocità \vec{v} , allora esso è soggetto a un campo magnetico B_{SO} che genera precessione e fa ruotare lo spin

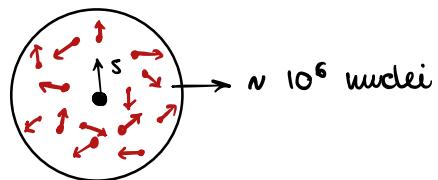
\Rightarrow ha un random-walk del suo stato attorno al punto previsto

ad esempio, il campo elettrico è presente nel QD \rightarrow



2) ACCOPPIAMENTO IPERFINE

è dovuto alla debole interazione magnetica tra gli elettroni e il nucleo dell'atomo nel materiale ospite: nel QD, l'elettrone ha un certo spin ed è immerso in atomi con nuclei che hanno un loro proprio spin. Questo genera un



macro campo magnetico che genera una rotazione dello spin dell'elettrone

il ^{28}Si ha 14 neutroni e 14 protoni e ha $I=0$

\Rightarrow non ha interazioni ... molto bello; ma questo è solo il 92% del silicio in natura ... il restante è dato maggiormente da

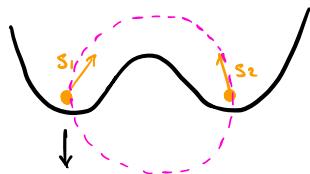
^{29}Si 14 p. 15 n $I = \frac{1}{2}$ 5%

^{30}Si 14 p. 16 n $I = 0$ 3%

\Rightarrow perciò "purificare" il silicio (**DISARRICCHIMENTO**) per avere solo 28 o 30 per non introdurre l'interazione coi nuclei

\Rightarrow i QD contengono solo ^{28}Si

3) EXCHANGE INTERACTION



→ se il secondo spin si trova all'interno del campo magnetico allora esso interagisce col campo indotto dal primo spin

il primo spin genera un campo magnetico

$$\mu^2 = \gamma s_1 \cdot B \propto s_1$$

⇒ l'energia potenziale è data da: $V_2 = -\mu^2 \cdot B$ → si vede l'interazione

⇒ per "calibrare il sistema" devo agire sulla barriera di potenziale interposta fra le due valle per far sì che l'energia potenziale sia corretta

$$U = \int \hat{\sigma}_{21}^z \otimes \hat{\sigma}_{22}^z = \hat{H}_{\text{int}} \Rightarrow \text{può essere espresso tramite l'operatore; quindi ho}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{\text{int}}$$

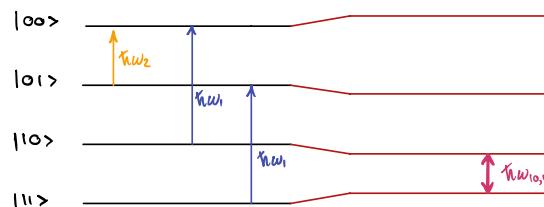
$$= \frac{\hbar \omega_1}{2} \hat{\sigma}_{21}^z \otimes \hat{I} + \frac{\hbar \omega_2}{2} \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_{22}^z + \int \hat{\sigma}_{21}^z \otimes \hat{\sigma}_{22}^z$$

$$\hat{\sigma}_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix} + \int \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_2 + \frac{2J}{\hbar} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 - \omega_2 - \frac{2J}{\hbar} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 + \omega_2 - \frac{2J}{\hbar} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 - \omega_2 + \frac{2J}{\hbar} \end{pmatrix}$$

se $J=0$ non ho interazioni ⇒ ho uno splitting del secondo qbit



se $J>0$ allora ho un ulteriore termine < $\rightarrow 0$ per $|100>$ e $|111>$
< 0 per $|101>$ e $|110>$

il flip tra $|110> \rightarrow |111>$ } e' il CNOT e lo ottengo di solito con una
 $|111> \rightarrow |110>$ rotazione di rabi con J-coupling

SUPERCONDUCTING CIRCUITS

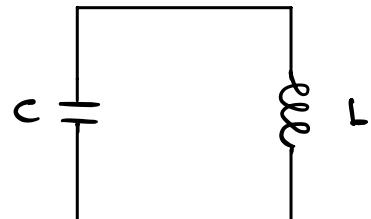
In alcune circostanze, un circuito elettrico può mostrare effetti quantistici che possono essere sfruttati per il calcolo quantistico; alla base di questi circuiti c'è il resonatore LC.

Ha dei **vantaggi** (produzione microelettronica classica, lunga coerenza) e degli **svantaggi** (scaling difficile e area grande).

LC RESONATOR

Consideriamo un oscillatore LC senza perdite ($R=0$) con

- capacità C
- induttanza L



In questi circuiti la corrente oscilla mentre l'energia viene scambiata tra C e L quindi trasferita continuamente tra campo elettrico e campo magnetico \Rightarrow è un **oscillatore**

$$\text{ENERGIA ELETTROSTATICA} \quad U_C = \int VI dt = \int C \frac{dv}{dt} V dt' = \int CV dt = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\text{ENERGIA MAGNETICA} \quad U_L = \int VI dt = \int L \frac{dI}{dt'} I dt' = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad \text{flusso del campo magnetico}$$

$$\Rightarrow U_{\text{tot}} = U_1 + U_2 = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad \text{è l'energia totale dell'oscillatore}$$

Tale oscillatore LC può essere visto come un **quantum harmonic oscillator (QHO)**:

$$\text{l'hamiltoniano corrispondente è } \hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}$$

\Rightarrow posso vedere un parallelismo con un analogo oscillatore meccanico (SHO) dato ad esempio da una molla attaccata ad una cuolla



SHO	LC circuit
$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$	$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}$
\hat{p}	\hat{Q}
\hat{x}	$\hat{\Phi}$
m	C
k	$1/L$
$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{Q} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \Phi}$
$\omega_o = \sqrt{k/m}$	$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

dalla tabella ricavo che $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ sono coniugate e analogo lo sono $[\hat{Q}, \hat{\Phi}] = i\hbar$

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

l'operatore di carica lo posso anche scrivere come $\hat{Q} = -i\hbar \frac{d}{d\Phi}$

e la frequenza di risonanza è $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

introduciamo il flusso normalizzato

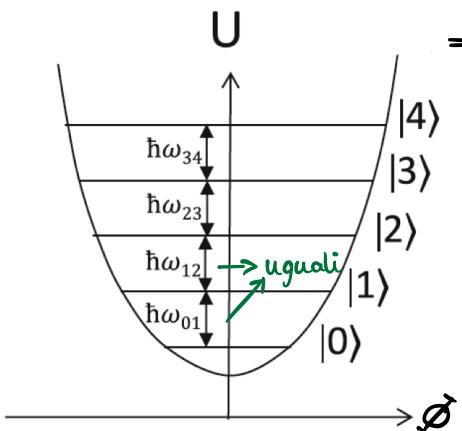
$$\text{diventa } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2C} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}$$

energia potenziale

$$\Rightarrow \hat{H} = -\frac{4e^2}{2C} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{E_L}{2L} \phi^2$$

$$\Rightarrow \hat{H} = -4E_C \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{E_L}{2} \phi^2$$

e' un secondo modo per scrivere l'Hamiltoniano



$$\Rightarrow \text{l'energia potenziale diventa } U(\phi) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\phi^2}{2L}$$

ϕ è lo sfasamento

l'energia di ogni livello è data da

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$$

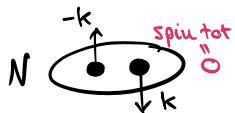
\Rightarrow nasce un PROBLEMA dal fatto che **non sono uguali** perché non so più che transizione sto facendo

In questo genere di circuiti la resistenza $R=0$ grazie all'effetto **superconduttivo** del circuito portato a temperatura $T < T_c$ temperatura critica

\Rightarrow la resistenza porta perdite e introduce scattering che introduce sfasamento

N.B. anziché esprimere la carica come Q puo' essere comodo usare $2Ne$

$$Q = 2Ne$$



\hookrightarrow e' il numero di paia di elettroni: in uno stato superconduttivo vedremo che gli elettroni si accoppiano...

COOPER-PAIR \rightarrow e' un bosone e non un fermione!

SUPERCONDUTTIVITÀ'

i metalli posti ad una temperatura minore di una temperatura critica hanno una resistenza pari a zero → **importante per la coerenza!**

⇒ può scorrere corrente anche senza tensione applicata al metallo

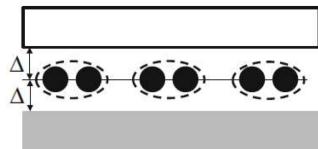
⇒ ogni metallo ha la sua temperatura critica T_c (Al: $T_c = 1,2 \text{ K}$; Nb: $T_c = 9,2 \text{ K}$)

⇒ le frequenze dei gbit sono $\sim 10 \text{ GHz}$, cioè $T = \frac{h f}{k} = 0,5 \text{ K}$

TEORIA BCS è una teoria proposta per spiegare la supercondutività: essa è un effetto quantistico di **condensazione delle coppie di cooper** che si misano a comportare come dei bosoni (**BOSE CONDENSATION**)

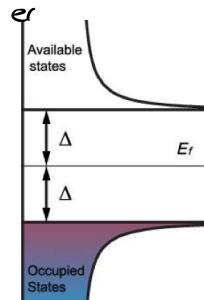
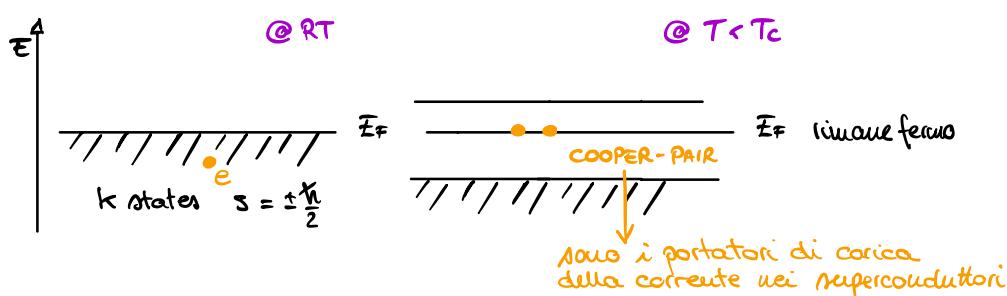
↓
i bosoni possono occupare lo stesso stato energetico anche se hanno lo stesso spin

e' uno stato legato fra due elettroni (o lacune) che si può realizzare grazie all'intervento di qualche forza attrattiva che vince la repulsione



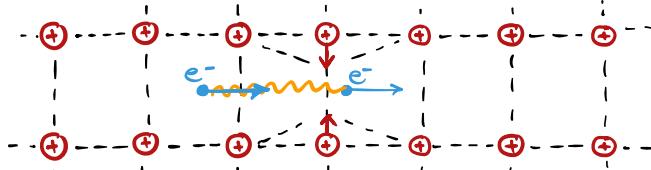
sono due elettroni con spin opposto che formano una **quasi-particella** con spin = 0
⇒ è un bosone

⇒ a basse temperature si formano coppie di Cooper nel livello di F cui



possiamo annunire che se un elettrone si muove allora induce cariche positive che a loro volta fanno sì che il secondo elettrone della coppia si muova come il primo

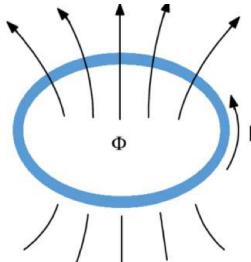
questo è vero ne gli atomi e i nuclei non vibrano...! ($T < T_c$)



si genera una zona a densità di carica paritativa maggiore

RELAZIONE TRA FLUSSO E FASE

perche' tutte le coppie sono condensate
nello stesso livello ↑



la funzione d'onda f/coppia di cooper e' la stessa e vale:

$$\psi = \sqrt{n_s} e^{i\phi} \quad \text{e' l'unico stato}$$

↓
durezza delle cf con carica ze

possiamo ricavare la fase del loop dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint \bar{A} \cdot d\bar{l} \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Stokes} \quad \text{potenziale vettore} \quad \bar{B} = \nabla \times \bar{A} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \end{aligned}$$

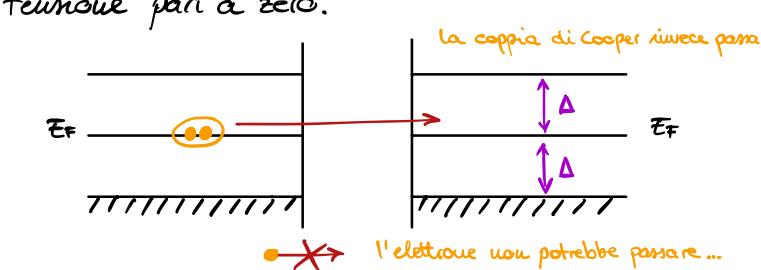
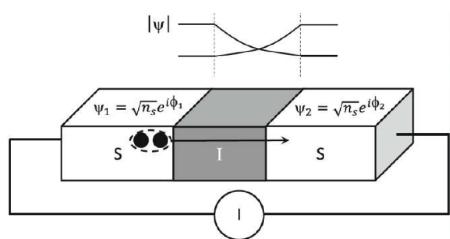
la fase di un quanto deve essere un multiplo intero di 2π

$$\Rightarrow 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n \quad \Rightarrow \boxed{\Phi = n \Phi_0}$$

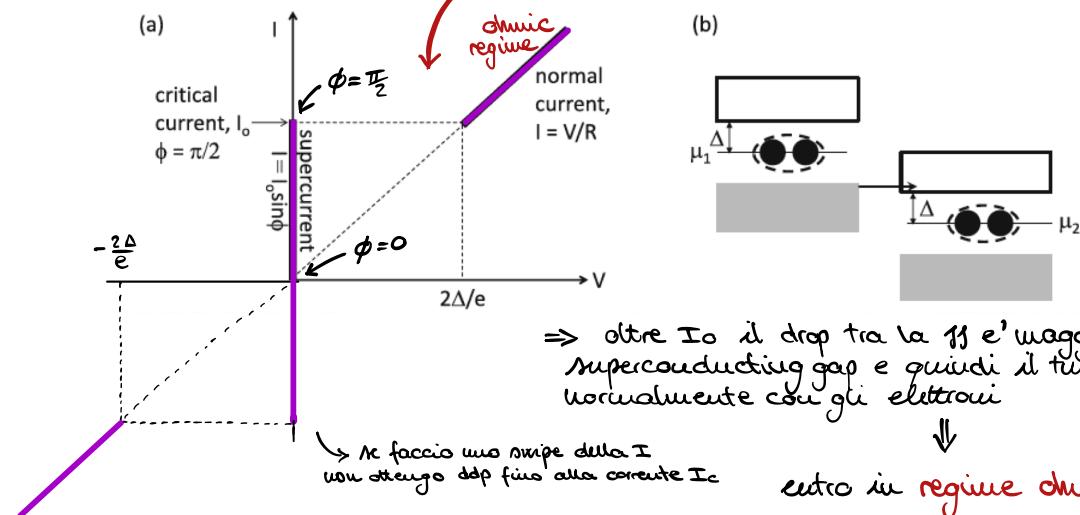
JOSEPHSON FUNCTION

la giunzione josephson e' composta da due strisce di superconduttori separate da un dielettrico. Alla base del suo funzionamento c'e' l'effetto tunnel delle coppie di Cooper.

Al bassa temperatura ($T < T_c$) si generano coppie di Cooper che possono trasportare corrente senza caduta di potenziale: essa genera una corrente anche con una tensione pari a zero.



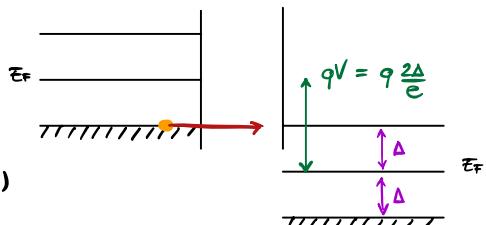
ha una caratteristica I-V:



possiamo derivare le due equazioni di Josephson:

$$\text{corrente critica} \\ \textcircled{1} \quad I = I_0 \sin \phi \\ \downarrow \text{corrente CP @ } V=0$$

differenza di forze tra le coppie nel superconduttore a dx e a sx (c'è un $\Delta\phi$)



$$\textcircled{2} \quad V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt}$$

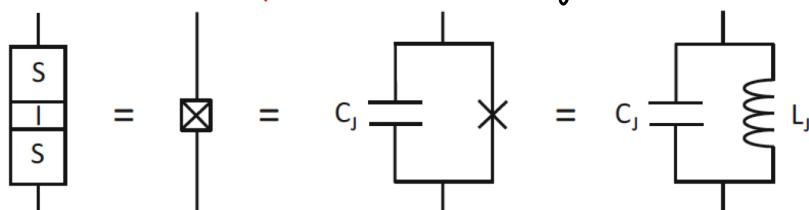
in questo caso l'elettrone puo' generare corrente e tale corrente diventa lineare con la tensione ottenendo un regime dinamico

si verifica quando la fase attraverso la jj oscilla @ ω: se applico una tensione, la fase varia linearmente (e viceversa)

NON DIPENDE DAL MATERIALE

=> la corrente oscilla a una frequenza che dipende dalla tensione applicata

Ricaviamo ora il circuito equivalente della giunzione:



$$C_J = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{t_{ox}}$$

ad esempio, Al_2O_3 : $\epsilon_r = 9$ e $A = 1 \mu\text{m}^2$ ha $C_J = 80 \text{ fF}$

dalle due relazioni di J. posso poi ricavarci: $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\chi}{2e I_0 \cos \phi} \frac{dI}{dt}$

=> ottengo la

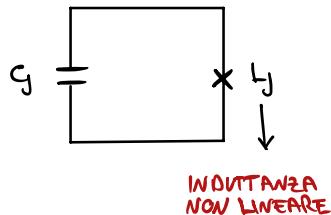
$$L_J = \frac{\chi}{2e I_0 \cos \phi} = \frac{L_0}{\cos \phi}$$

L'energia potenziale ai capi della jj vale:

$$U_J = \int_0^t VI dt = \int_0^t \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 \sin \phi \frac{d\phi}{dt} dt' = \int_0^\phi \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 \sin \phi d\phi = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 (1 - \cos \phi)$$

e' la I_c della jj
 $\overbrace{\quad}^{E_J}$
JOSEPHSON ENERGY
 $= E_J (1 - \cos \phi)$

quindi il resonatore e' dato da

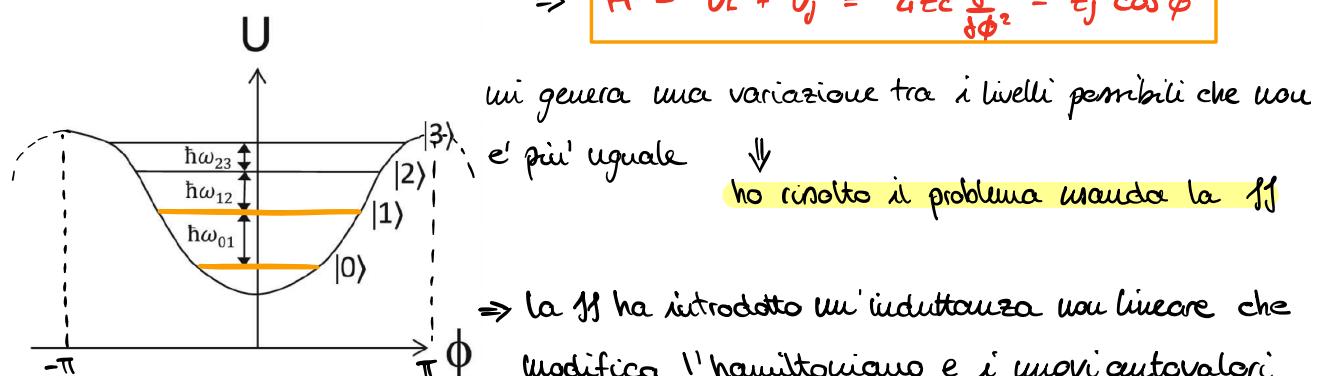


e l'Hamiltoniano diventa:

$$\hat{H} = U_C + U_L = 4E_C \hat{N}^2 + \frac{E_L}{2} \phi^2$$

con $\hat{N} = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$ e con $E_C = \frac{e^2}{2C}$ energia di carica
della capacità

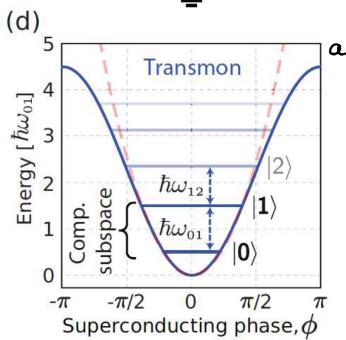
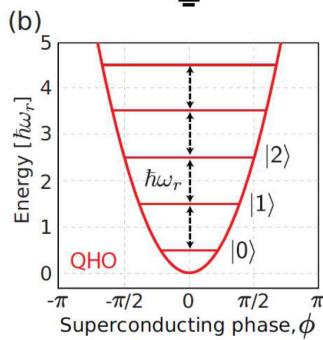
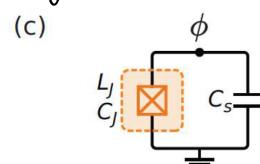
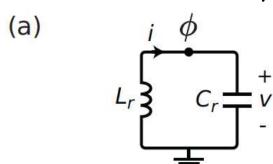
$$\Rightarrow \hat{H} = U_L + U_J = 4E_C \frac{\dot{\phi}^2}{\delta \phi^2} - E_J \cos \phi$$



⇒ la jj ha introdotto un'induttanza non lineare che modifica l'hamiltoniano e i nuovi autovalori

non sono più equispaziati ⇒ riesco a selezionare i due stati base |0> e |1>

Quindi la jj introduce **ANARMONICITÀ** consentendo di avere un sistema a due livelli dotato al funzionamento con qbit. Segue lo schema riassuntivo dei due casi:

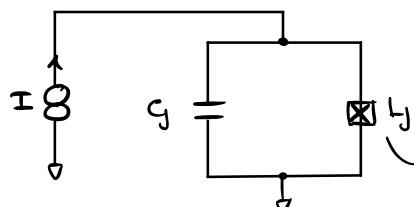


SUPERCONDUCTING QBITS

Un qbit a superconduttore possono essere sviluppati sulla base dell'**oscillatore anarmomico** visto precedentemente in diversi modi (phase/charge, capacitive/inductive, fixed/variable frequency, ...) e tra questi il più popolare è il **transmon**.

Potremo avere tre tipologie di qbit basati sulla JJ:

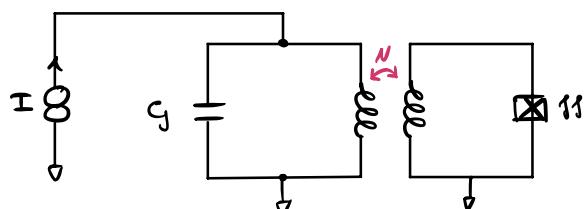
PHASE QBIT



è formato da una singola JJ con bias DC in corrente (I_B)

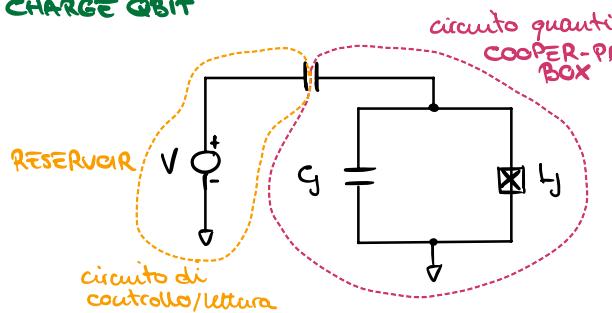
sostituisce l'induttore dell'LC con una JJ

FLUX QBIT



è formato da una singola JJ con bias dal flusso proveniente da un campo magnetico esterno

CHARGE QBIT



circuito quantitativo:
COOPER-PAIR BOX

è formato da una singola JJ con bias DC in tensione (accoppiato capacitivamente)

→ Attenzione circuito in due modi:

1) COOPER-PAIR BOX $E_J \ll E_C$

2) TRANSMON $E_J \gg E_C = \frac{q^2}{2C}$ aumento C!

Analizziamo quest'ultima configurazione e calcoliamo l'hamiltoniano:

> il numero intero di coppie CO è: $N = \frac{Q}{2e}$

> il numero di coppie CO indotte dalla capacità è: $N_g = \frac{C_g V_g}{2e}$ (non-intero)

$$\Rightarrow \hat{H} = 4E_C(N - N_g)^2 - E_J \cos \phi = 4E_C \left(-i \frac{d}{d\phi} - N_g \right)^2 - E_J \cos \phi$$

energia di carica energia x aggiungere una cp energia potenziale

↳ N_g possiamo sceglierlo tramite V_g

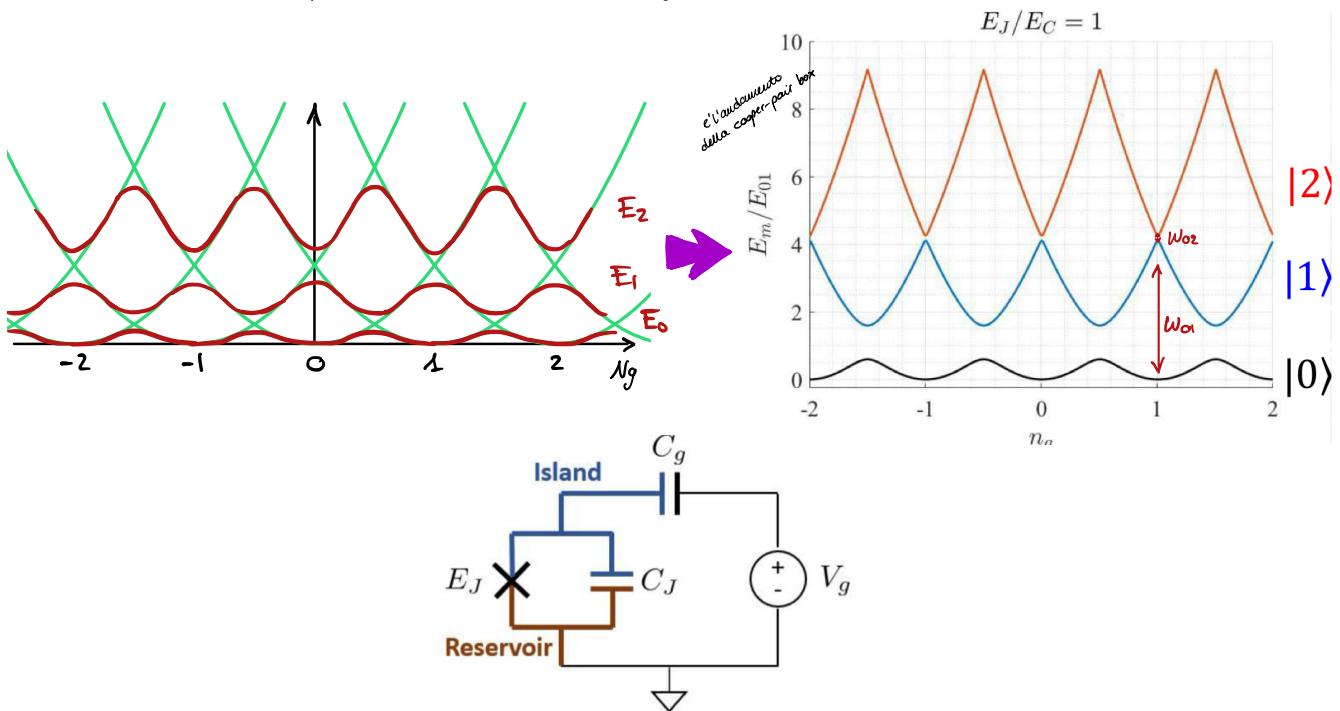
COOPER-PAIR Box

perche' anziche' avere una sequenza di coppie di cooper in eccita nell'isola

la cooper-pair box e' un qbit di carica (charge qbit) con $E_J \ll E_C$

la carica e' un buon numero quantico
e la leggo tramite un SET

gli autovalori li posso ricavare come segue:



Per ottenere le massime prestazioni e' utile negliere un intero o un semi-intero di N_g

Integer N_g	Large ω_{01}	Easy to initialize, no thermal excitation
	$\omega_{01} \approx \omega_{02}$	Difficult control
Half-integer N_g	$\omega_{01} \neq \omega_{02}$	Easy control
	$\frac{\partial E}{\partial N_g} \approx 0$	Low sensitivity to N_g (charge) noise

perche' anziche' avere un andamento ondulatorio di E , non lo facciamo piatto?

per farlo introduco il **TRANSMON** in cui la capacitza' e' molto grande, tale da

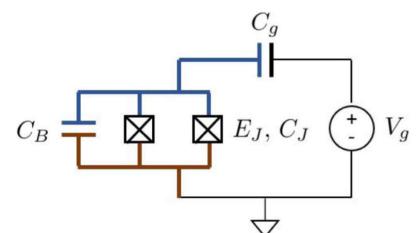
avere $E_J \gg E_C \Rightarrow$ i livelli di energia sono **circa piatti**

Pomo poi migliorare la cooper-pair box **usando due TJs**

in parallelo per consentire la regolazione della frequenza

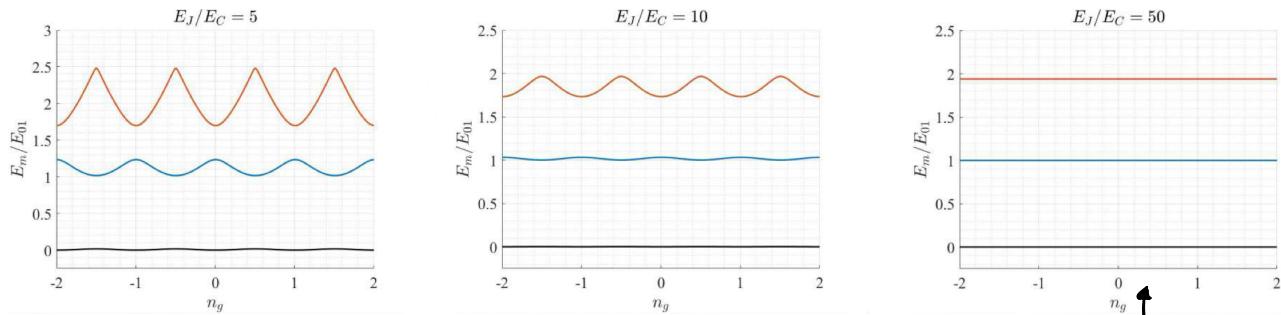
(SQ10) o aggiungere una grande capacitza' C_B (**TRANSMON**)

che puo' essere usata sia con lo SQ10, sia con la TJ singola



TRANSMON

è l'abbreviazione di *transmission line shunted plasma oscillation* ed è una Cooper-pair box con una *capacità C* molto grande tale da avere: $\tau_J \gg \tau_C$



- la fase diventa un buon numero quantico
- ho minore sensibilità al rumore di carica: grazie all'andamento piatto
- ho un tempo di coerenza lungo: $T_{coh} = 100 \mu s$

però ho anche degli svantaggi, e il più significativo è la *small anharmonicity*, che posso ricavare di seguito, partendo dall'energia:

$$E_n \approx \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \underbrace{\frac{\epsilon_c}{12}}_{\text{harmonic contrib.}} \underbrace{(6n^2 + 6n + 3)}_{\text{non-harmonic contrib.}}$$

calcoliamo le frequenze degli intervalli fra i livelli energetici:

$$\omega_{01} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \omega_0 - \frac{\epsilon_c}{12\hbar} (6+6+3-0-0-3) = \omega_0 - \frac{\epsilon_c}{\hbar}$$

$$\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega_0 - \frac{\epsilon_c}{12\hbar} (24+12+3-6-6-3) = \omega_0 - 2 \frac{\epsilon_c}{\hbar}$$

$$\omega_{23} = \dots = \omega_0 - 3 \frac{\epsilon_c}{\hbar}$$

spero il rapporto e' detto $\eta = \frac{\epsilon_c}{\hbar}$

aumentando la capacità nel trasmettore ϵ_c diminuisce e η pure: ottengo una *small anharmonicity* \Rightarrow è un problema

quando voglio passare da $|0\rangle$ a $|1\rangle$ induco anche una transizione tra $|1\rangle$ a $|2\rangle$ perché le energie sono molto simili e quindi quando scelgo C devo fare un *trade-off* tra *inhomogeneity* e *coherence time*.

$$\text{NON-HARMONICITY: } d = \frac{\omega_{01} - \omega_{02}}{\omega_{01}} \propto \sqrt{\frac{E_C}{E_J}}$$

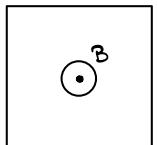
→ visto che la dipendenza è sotto radice c'è una lenta dipendenza di T_{coh} che mi dimostra essere esponenziale

ad esempio: $\omega_{01} \approx 5 - 30 \text{ GHz}$ } $\frac{\Delta\omega}{\omega_{01}} \approx 9\%$
 $\Delta\omega \approx 200 \text{ MHz}$

per fare ciò è stato progettato lo **SQUID** che misura il flusso magnetico concatenato
 SUPERCONDUCTING QUANTUM INTERFERENCE DEVICE
 (dispositivo superconduttore a interferenza quantistica)

in questo caso ho una relazione tra flusso e fase data dalla circuazione

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} \phi \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n \quad (\text{già vista})$$

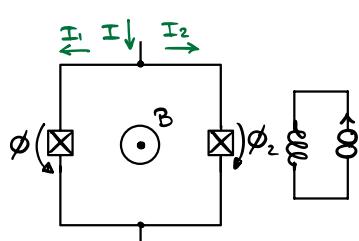


ma se aggiungo una jj al superconductive loop si genera una discontinuità

$$\phi(\square) + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n \Leftrightarrow \boxed{\phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

pomo trascurare il veleno visto
che è un angolo

Adesso ho due jj, ho che: $I = I_1 + I_2 = I_0 \sin \phi_1 + I_0 \sin \phi_2$



$$= I_0 (\sin \phi_1 + \sin \phi_2)$$

$$= I_0 \cdot 2 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad (\text{PROSTAFERESI})$$

$\phi_1 - \phi_2$ è lo sfasamento totale $\phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ e no:

$$= 2I_0 \cos(\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}) \sin(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2})$$

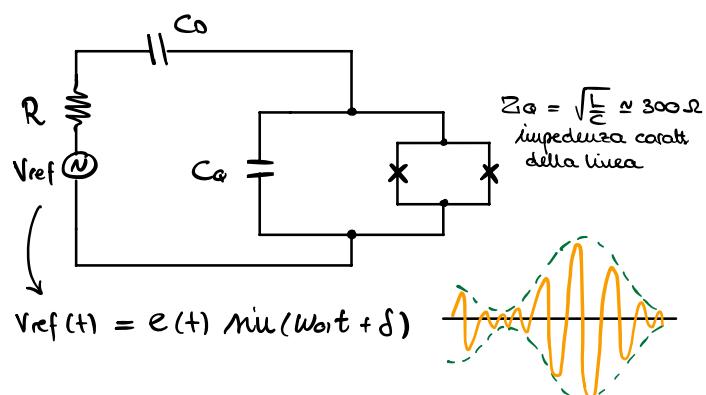
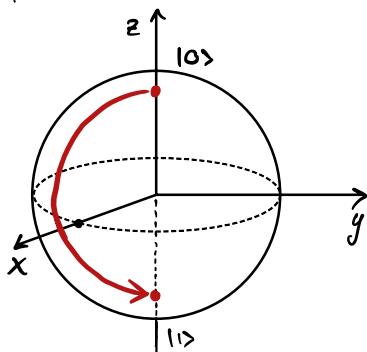
I_0, eq ϕ_{eq}

 $= I_0, \text{eq} \sin \phi_{\text{eq}} \Rightarrow \bar{E}_j = \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi}$

Variando il campo magnetico B posso variare \bar{E}_j

\downarrow
Variando Φ_e posso controllare \bar{E}_j e quindi la frequenza: *tunable transmon*

X-Y GATE \Rightarrow rotazione lungo l'asse x o lungo l'asse y che richiede un trasferimento di energia per indurre la rotazione di Rabi da $|0\rangle$ a $|1\rangle$
 \Rightarrow posso usare un accoppiamento capacitivo con una tensione @ RF $V_{\text{ref}}(t)$, come segue:



L'hamiltoniano è dato da:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \omega_0 \hat{\phi}_z - \frac{e(t)}{2} \frac{C_0}{C_0 + C_q} \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_q}} (\hat{\phi}_x \cos \delta + \hat{\phi}_y \sin \delta)$$

partitore capacitivo

premesso: uno nuovo interruttore a questo terreno

I: in-phase
Q: in-quadrature

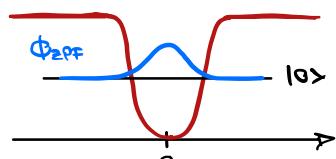
$Q_{\text{RF}} : \text{è una carica (ZERO POINT FLUCTUATION CHARGE)}$

La Q_{RF} non è una carica reale, ma è la variazione della carica in Z_q

Similmente a quanto succede nell'ESR nel caso dello spin qbit, la tensione applicata provoca la rotazione attorno all'asse:

$\rightarrow x \propto \delta = 0$ (solo componente in fase, I)

$\rightarrow y \propto \delta = \frac{\pi}{2}$ (solo componente in quadratura, Q)

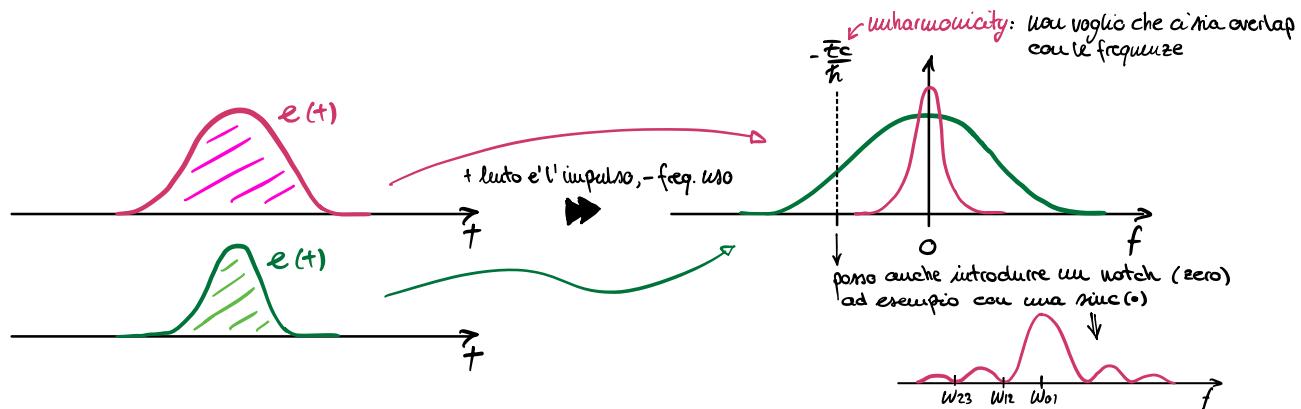


L'angolo di rotazione è dato da:

$$\phi = \frac{C_0}{C_0 + C_q} \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_q}} \int_0^t -e(\tau) d\tau$$

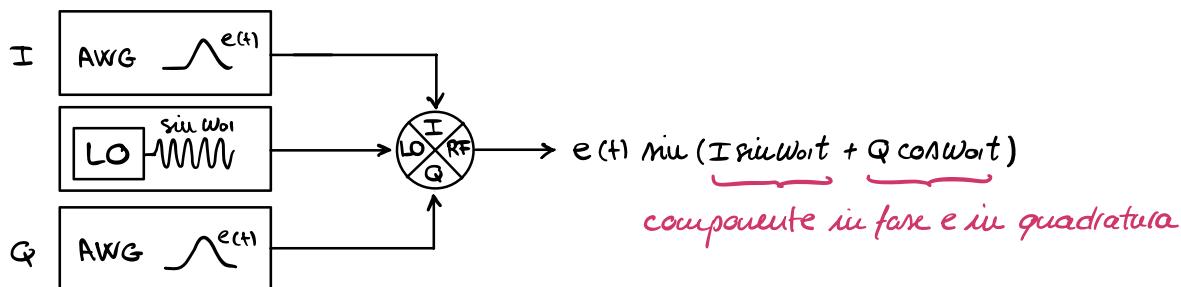
ad esempio, posso generare un gate $\hat{\phi}_x$ con $\delta = 0$ e $\phi = \pi$:

$$\text{e infatti: } \hat{U} = e^{-i \frac{1}{2\hbar} \frac{C_0}{C_0+C_Q} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}} \hat{\sigma}_x \int_0^t -e(\tau) d\tau} = e^{-i \frac{\phi}{2} \hat{\sigma}_x} = \hat{R}_x(\phi) !$$

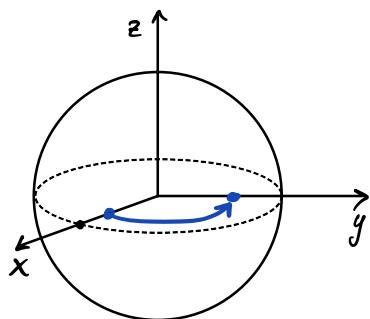


uso una gaussiana perché l'integrale non ne altera la forma; non è obbligatorio ma è un caso molto utilizzato...

Ottengo uno schema finale che è il seguente



Z GATE → rotazione attorno all'asse z e corrisponde ad un aumento di $\frac{\pi}{2}$ nella fase: quindi possiamo tradurre una rotazione z in un cambio di fase delle rotazioni x e y; ad esempio per avere X_ϕ seguito da X_ϕ^ϕ abbiamo:



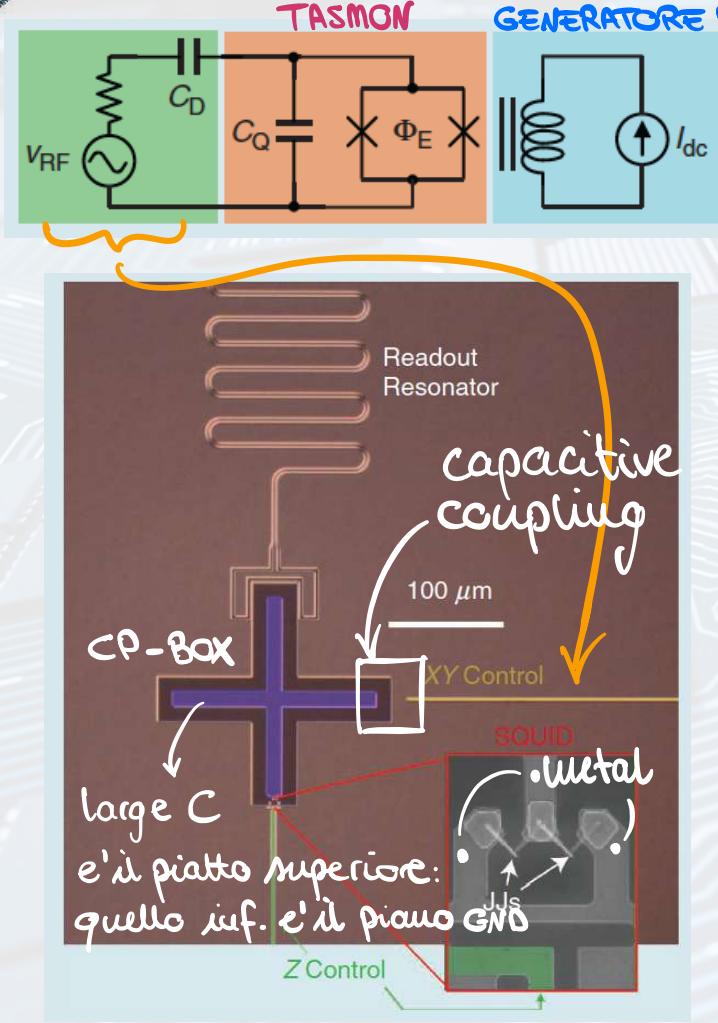
$$X_\phi^\phi X_\phi = Z_{-\phi} X_\phi Z_\phi X_\phi \rightarrow \text{VIRTUALE}$$

oppure può essere ottenuto come $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$
variando Δw_0 per un tempo
di gate pari a $t = \frac{\phi}{\Delta w_0}$

⇒ corrisponde ad un cambiamento della velocità angolare: ha un **tuning della frequenza**

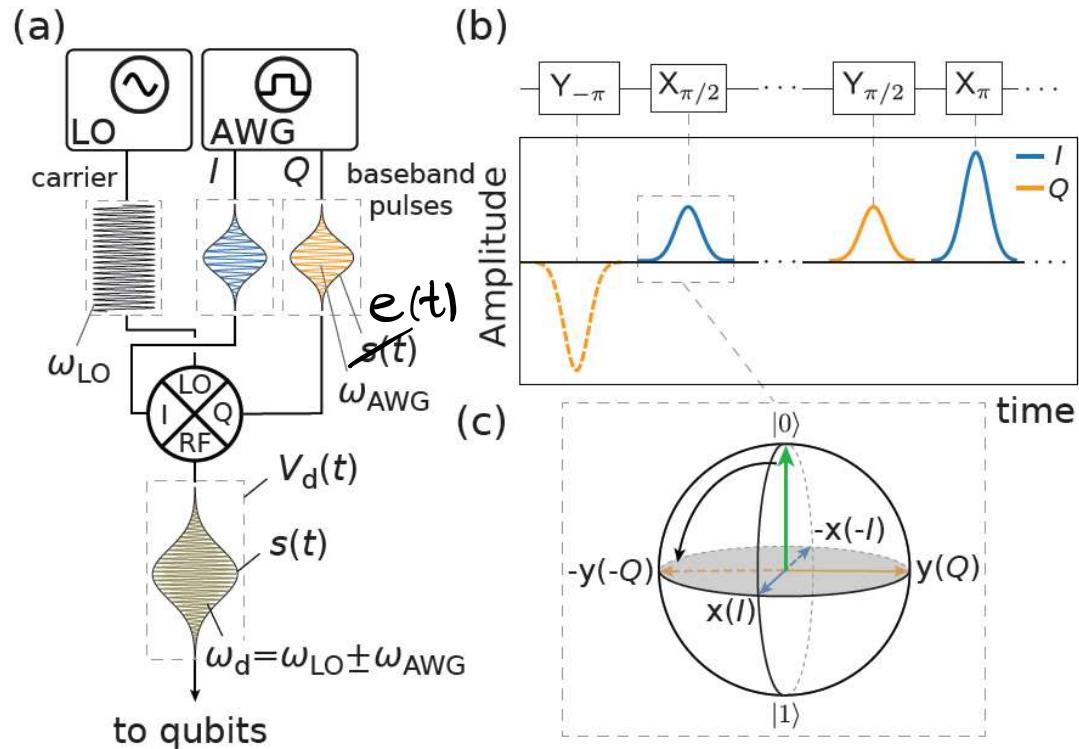


Superconducting qubit



- The cross-shaped qubit capacitance (Cooper pair box) is:
 - capacitively coupled to the XY coplanar waveguide (CPW) line
 - Inductively coupled to the Z CPW line
- The SQUID includes two JJs for flux-bias coupling
- JJs are typically made of Al/Al₂O₃/Al and patterned with electron beam lithography
- The substrate is sapphire or high-resistivity silicon
- JJ uniformity is typically around 1% range, i.e. ~30 MHz variation in the qubit frequency

Control setup



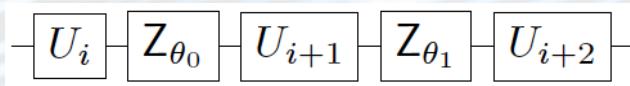
- LO = local oscillator with low phase noise
- I and Q features the same frequency but I and Q phases
- IQ mixer for mixing the LO with the pulses generated by the arbitrary waveform generator (AWG):
 - Baseband I is multiplied to the in-phase component of the LO
 - Baseband Q is multiplied to quadrature component of the LO
- For frequency multiplexing, the LO is tuned close to the qubit frequency, finer adjustment is provided by the AWG such that $\omega_{LO} + \omega_{AWG} = \omega_{01}$ where various ω_{AWG} are generated to match the various qubit frequencies
- Gate sequence is executed as a sequence of AWG pulses



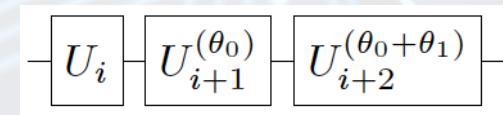
- x -rotation and y -rotation only differ by a reference phase
- For instance, Y can be obtained in two ways:
 - Applying a pulse to the Q port
 - Applying the same pulse to the I port after a phase increase of $\frac{\pi}{2}$
- Note: a phase increase of $\frac{\pi}{2}$ corresponds to a z -rotation, therefore we can translate a z -rotation in a change of phase of the following x - and y -rotations
- For instance, to operate a X_θ followed by a X_θ^ϕ , namely another X_θ but with a phase ϕ relative to the first one, we can execute:

$$X_\theta^\phi X_\theta = Z_{-\phi} X_\theta Z_\phi X_\theta$$

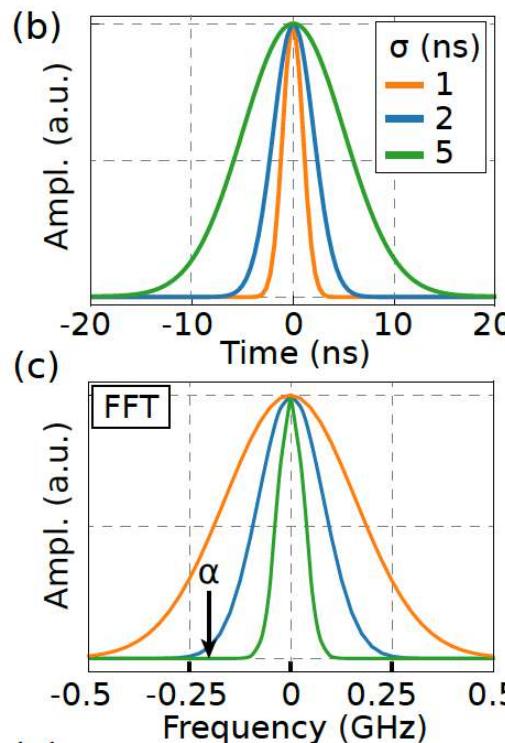
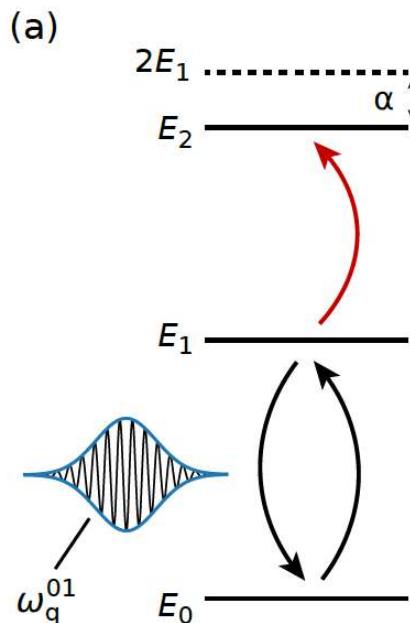
- Conversely, a Z_θ gate can be executed by adding phase θ to all the following gates, thus reducing the number of gates and improving the fidelity, namely:



is equivalent to



Mitigating leakage



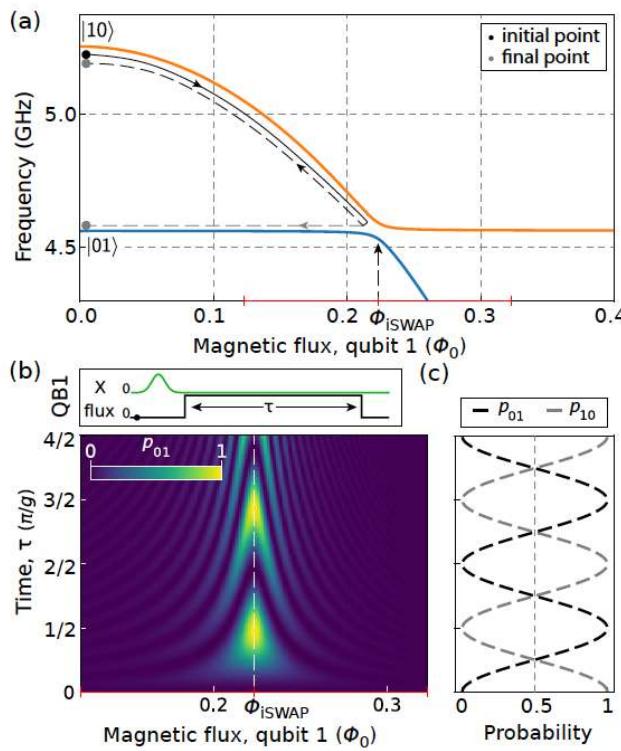
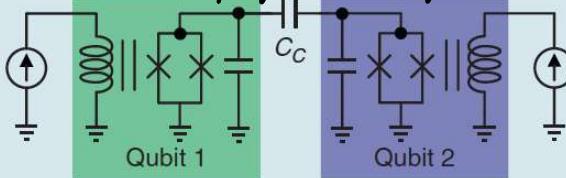
- The qubit frequency ω_{01} is just few % different from the higher excitation frequency ω_{12}
- This can lead to leakage, e.g., the partial occupation of state 2 during a Rabi oscillation between 0 and 1
- This is because the finite pulselength leads to some frequency overlap with ω_{12} although the pulse is tuned at ω_{01}
- In addition, phase errors can arise due to the repulsion between energy transitions $\hbar\omega_{01}$ and $\hbar\omega_{12}$
- Leakage and phase errors can be mitigated by pulse engineering such as the derivative reduction by adiabatic gate (DRAG) or other techniques aimed at creating a notch at ω_{12}



2-qubit gates

2 TASIONI ACCOPPIATI CAPACITIVAMENTE

varicando la corrente su un L
può variare la freq. di quel qbit



- A 2-qubit gate like *SWAP* (or *iSWAP*, or \sqrt{iSWAP}) can be carried out by capacitively coupling two qubits for a given time to enable an energy exchange (see also [QCD07](#))
- For instance, starting from state $|10\rangle$, one can tune the frequency of qubit 1 to equal qubit-2 frequency via the magnetic flux Φ_0 (Z port)
- Note that the degeneracy is removed at this point by avoided crossing
- Here, Rabi oscillations occur with a frequency which depends on the coupling capacitance and frequency detuning, thus enabling transition from $|10\rangle$ to $|01\rangle$
- By controlling the Z-line pulselength, one can achieve *iSWAP* or \sqrt{iSWAP}

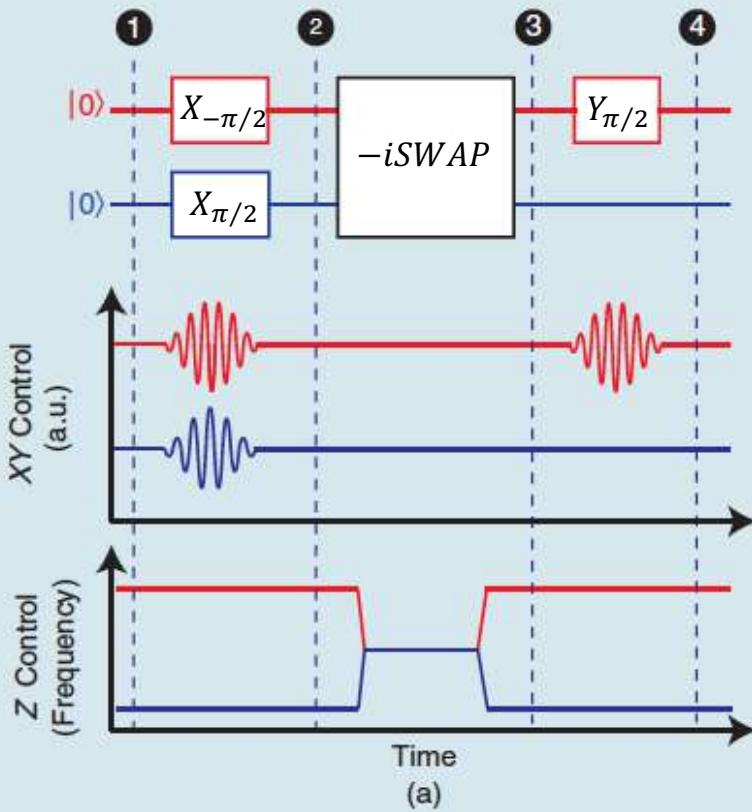


- The resulting 2-qubit operator is:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -i \sin \Omega t & 0 \\ 0 & -i \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

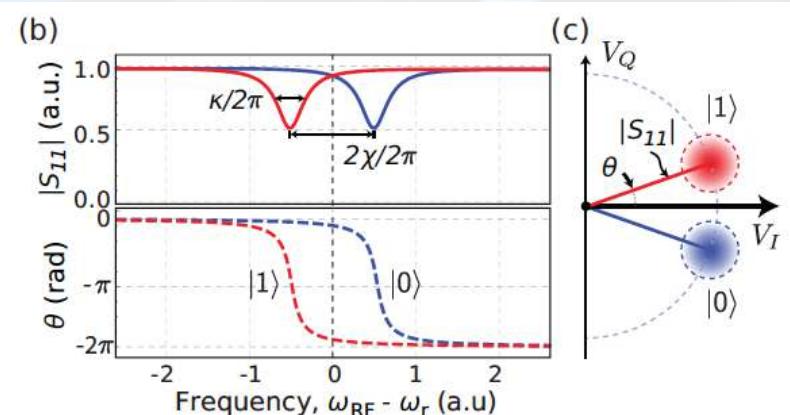
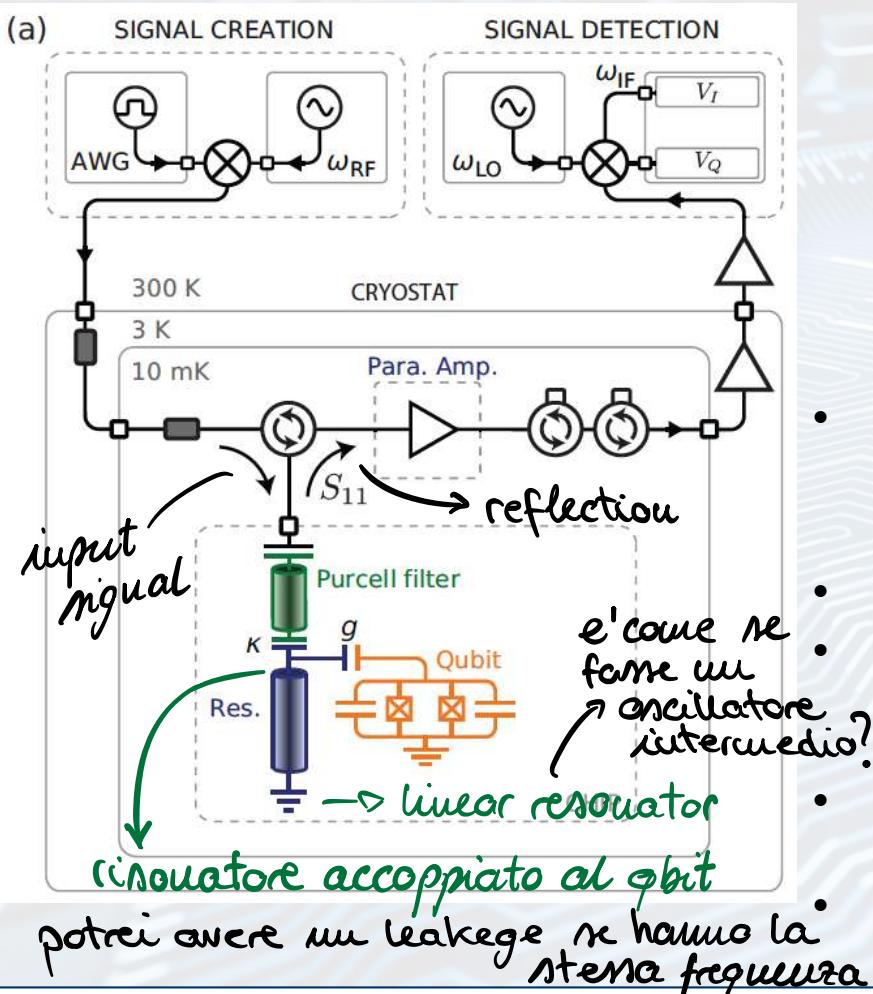
- where the swap frequency $\Omega = \frac{\kappa}{\hbar}$ depends on the coupling κ (slide 16, QCD07)
- For $\Omega t = \frac{\pi}{4}$, we have $U = \sqrt{iSWAP'}$
- For $\Omega t = \frac{\pi}{2}$, we have $U = -iSWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- The operator causes swap with an additional $-\frac{\pi}{2}$ shift which creates *entanglement*, i.e., starting from an initial composite state, the final state cannot be decomposed anymore

Example → ul dettaglio...



- The two qubits are first initialized in state $|0\rangle$, thus corresponding to state $|00\rangle$
- $X_{-\pi/2}$ is applied to qubit 1 leading to $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$
- $X_{\pi/2}$ is applied to qubit 2 leading to $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$
- This corresponds to superposition, leading to the composite state $\frac{1}{2}(|00\rangle - i|01\rangle + i|10\rangle + |11\rangle)$
- $-iSWAP$ is applied leading to entanglement, namely state $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle + \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle$
- Finally, gate $Y_{\pi/2}$ is applied to qubit 1 to create interference resulting in Bell state $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Dispersive readout of the transmon qubit



- Anharmonic oscillator → state-dependent L :
 - low L for state $|0\rangle$
 - high L for state $|1\rangle$
- Thus impedance reflectivity can reveal the qubit state
- To prevent energy leakage from the qubit during computation, the probe pulse is sent to a LC oscillator capacitively coupled to the qubit
- The read frequency is chosen in-between the two resonances to maximize the phase difference
- A band-pass Purcell filter is used with a notch at the qubit frequency to minimize energy leakage



- Cooper pair box and transmon are the most popular superconducting qubits thanks to **easy fabrication and flexibility**
- The transmon features an excellent T_2^* by large shunting capacitance
- Tunable frequency transmon available via the SQUID, although prone to flux noise
- Fixed frequency transmon is less affected by flux noise, although the operating frequency depends on manufacturing process
- **Initialization, control and readout of the transmon is carried out by RF pulses**



	Electron spin (quantum dot)	Superconducting	Trapped ion	Neutral atom	Electron spin (single donor)	NV center
Coherence time t_{coh}	400 μ s	100 μ s	10 s	1 s	100 ms	20 ms
Gate time t_{gate}	200 ns	40 ns	50 μ s	100 μ s	200 ns	25 μ s
$N=t_{coh}/t_{gate}$	2,000	2,500	200,000	10,000	500,000	800
Fidelity: 1qubit 2qubit read	99.5% 99% 99%	99.99% 99.9% 99%	99.999% 99.9% 99.99%	99% 90% 99.9%	99.5% 90% 95%	99.5% 90% 94%
Largest algorithm		53 qubits	30 qubits			
Companies	HRL, <u>Intel</u>	<u>Google</u> , <u>IBM</u> , Rigetti, <u>D-Wave</u> (annealing)	Honeywell, Ion-Q	ColdQuanta, Pasqual, Atom Computing	Silicon quantum computing	

la prima ad avere
commercializzato
i quantum computer