

Risposte alle domande di teoria di Signal Recovery

Un ringraziamento speciale va ad Andrea Baraldi, a Simone Baratto e a Simone Messina che mi hanno aiutato nella revisione e scrittura di alcune parti del documento.

In questo file ho cercato di rispondere a tutte le domande di teoria disponibili all'Anno Accademico 2024/2025 estratte dai temi d'esame di Signal Recovery da quando Rech tiene il corso.

NB: in questo file potrebbero esserci errori, imprecisioni, parti che potrebbero essere riscritte meglio etc. In caso vogliate contribuire in qualsiasi modo, contattatemi via la mail riportata.

Filtro Ottimo (Matched Filter)

2024 giugno 14, Problema 1, punto c): "Dimostrare in dettaglio come è possibile progettare il **filtro ottimale** nel caso di segnali accompagnati da solo rumore bianco e nel caso in cui il rumore non sia bianco."

- c) Demonstrate in detail how it is possible to design the optimal filter in the case of signals accompanied by only white noise and in the case in which the noise is not white.

Premesso che la teoria generale del filtraggio dice che *un massimo valore ottenibile per il SNR* esiste sempre e può essere ottenuto tramite filtri lineari, abbiamo due condizioni necessarie per progettare il filtro ottimale:

1. È necessario che il rumore sia bianco, altrimenti nell'espressione del rumore non si riesce ad avere esclusivamente l'area della funzione peso al quadrato (quindi il valore nell'origine dell'autocorrelazione del filtro) a cui applicare la *disuguaglianza di Schwartz* per massimizzare il SNR.
2. È necessario conoscere la forma del segnale in ingresso del filtro ottimo, altrimenti non si riesce ad applicare il risultato della *disuguaglianza di Schwartz*. Questa condizione può essere esplicitata scrivendo il segnale come la sua area A per la sua forma d'onda normalizzata $b(t)$ come

$$y(t) = A \cdot b(t) \quad \text{dove} \quad \int_{-\infty}^{\infty} b(t) dt = 1$$

per progettare il filtro ottimo, dobbiamo valutare che *il segnale acquisito in uscita dal filtro* è

$$u(t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha) w_m(\alpha) d\alpha = A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} b(\alpha) w_m(\alpha) d\alpha = A \cdot k_{bw}(0)$$

ricorda che:

$$\text{definizione di autocorrelazione: } k_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) g(\alpha + \tau) d\alpha$$

→ quindi l'integrale scritto sopra è esattamente $k_{bw}(0)$ poiché $\tau = 0$

mentre il rumore in uscita da un filtro, acquisito all'istante t_m è

$$\overline{n_u^2(tm)} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yy}(\alpha) k_{ww}(\alpha) d\alpha = S_B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} w_m^2(\alpha) d\alpha = S_B \cdot k_{ww}(0)$$

ricorda che:

$$\text{definizione di autocorrelazione: } k_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) g(\alpha + \tau) d\alpha$$

→ quindi l'integrale scritto sopra è esattamente $k_{ww}(0)$ poiché $\tau = 0$ e le due funzioni nell'integrale sono la funzione peso

dunque il SNR è

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{A^2}{S_B} \cdot \frac{k_{bw}^2(0)}{k_{ww}(0)}$$

a questo punto applichiamo la proprietà delle autocorrelazioni basata sulla disuguaglianza di Schwartz

$$k_{bw}^2(0) \leq k_{bb}(0) \cdot k_{ww}(0) \quad \rightarrow \quad \frac{k_{bw}^2(0)}{k_{ww}(0)} \leq k_{bb}(0)$$

quindi realizziamo che la massima cross-correlazione è ottenuta quando segnale e funzione peso hanno la stessa forma. In tal caso si parla di *matched filter*.

A questo punto il risultato può essere esteso al caso in cui ci sia del rumore non bianco, nel dettaglio, al *matched filter* deve essere aggiunto un filtro sbiancatore che trasformi il rumore da non bianco a bianco.

Ovviamente bisogna tenere conto del fatto che il filtro sbiancatore potrebbe cambiare la formula del segnale in ingresso quindi il *matched filter* deve essere progettato con la forma in uscita dal filtro sbiancatore.

Filtraggio Analogico vs. Digitale

2021 Aprile 29, Problema 1, punto 3): "Considerando un segnale costante e solo rumore bianco, fornire un confronto, da un punto di vista teorico, tra **filtraggio analogico e digitale** nel dominio del tempo in funzione della frequenza di campionamento."

2024 Aprile 11, Problema 1, punto c): "Considerando un segnale costante e solo rumore bianco, fornire un confronto, da un punto di vista teorico, tra **filtraggio analogico e digitale** nel dominio del tempo in funzione della frequenza di campionamento."

- c) Considering a constant signal and only white noise, provide a comparison, from a theoretical point of view, between analog and digital filtering in the **time domain** as a function of the sampling frequency.

Confrontiamo un *gated integrator* ed *discrete time integrator* con $DC\ Gain = 1$ in modo da poter confrontare solo il rumore in uscita. Nel caso in cui il rumore sia bianco e il rumore sia a banda larga e *che il tempo di correlazione del rumore $2T_n$ (nell'approssimazione a triangolo dello spettro del rumore bianco) sia molto più breve rispetto al tempo di sampling T_s* si può verificare come nel caso in cui il rumore sia a banda larga (quindi sostanzialmente bianco) e i campioni di rumore siano incorrelati, il fattore di miglioramento è

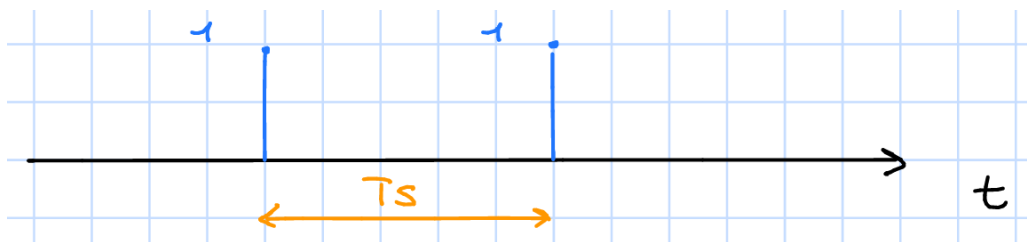
- $\left(\frac{S}{N}\right)_y = \sqrt{\frac{T_G}{2T_N}} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_x$ del *gated integrator*
- $\left(\frac{S}{N}\right)_y = \sqrt{N} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_x$ del *discrete integrator*

potremmo essere indotti a pensare che quindi aumentando il numero di campioni N (quindi riducendo T_s) sia possibile ottenere con un filtro a tempo discreto un fattore di miglioramento maggiore rispetto a quello del filtro a tempo continuo. Il punto fondamentale è che questo tipo di modello è valido solo quando i campioni di rumore sono *incorrelati*, altrimenti il fattore di miglioramento non è più \sqrt{N} ma è diminuisce.

Nel dettaglio, possiamo confrontare le due situazioni ed evidenziare il caso di campioni incorrelati e campioni correlati facendo un passo indietro e applicando la formula generale che vale a tempo continuo (la funzione a tempo discreto può essere pensata come una funzione a tempo continuo dove tra i vari campioni la $w(\alpha) = 0$) (supponiamo per semplicità della trattazione che la funzione peso sia data da due campioni $N = 2$ entrambi di peso 1)

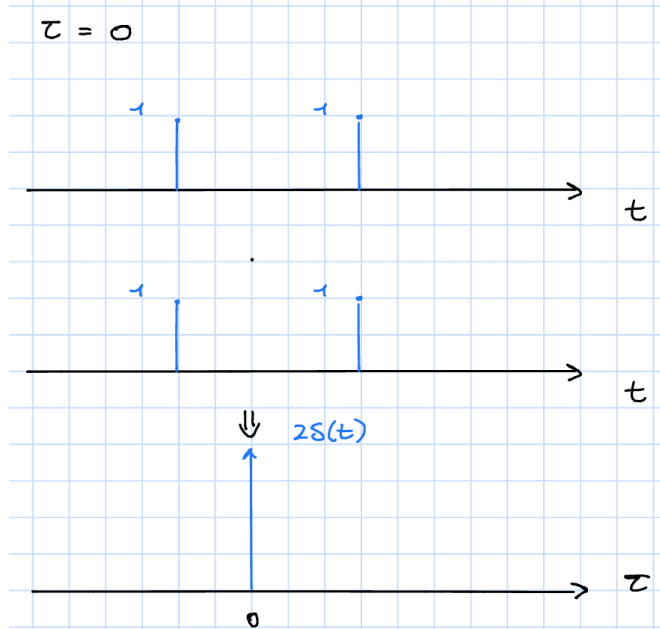
il segnale raccolto ha sempre la stessa forma, quindi $s_y = \sum_{k=0}^N s_x \cdot P$

la funzione peso è

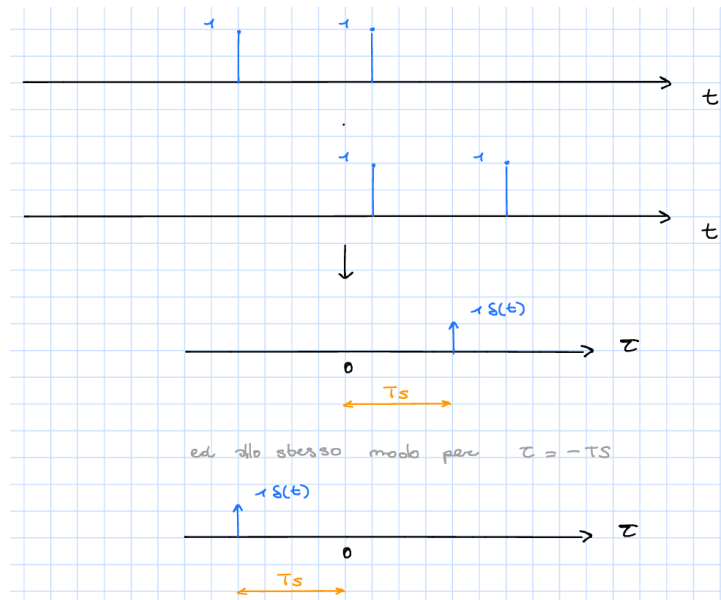


calcoliamo graficamente la sua $K_{ww}(\tau)$

per $\tau = 0$

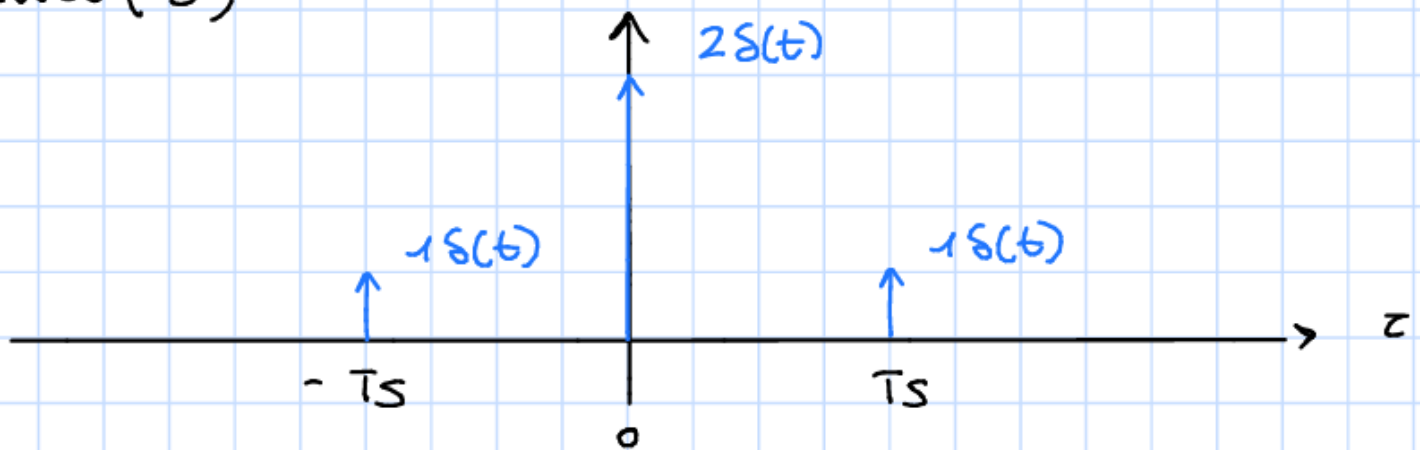


per $\tau = \pm T_s$

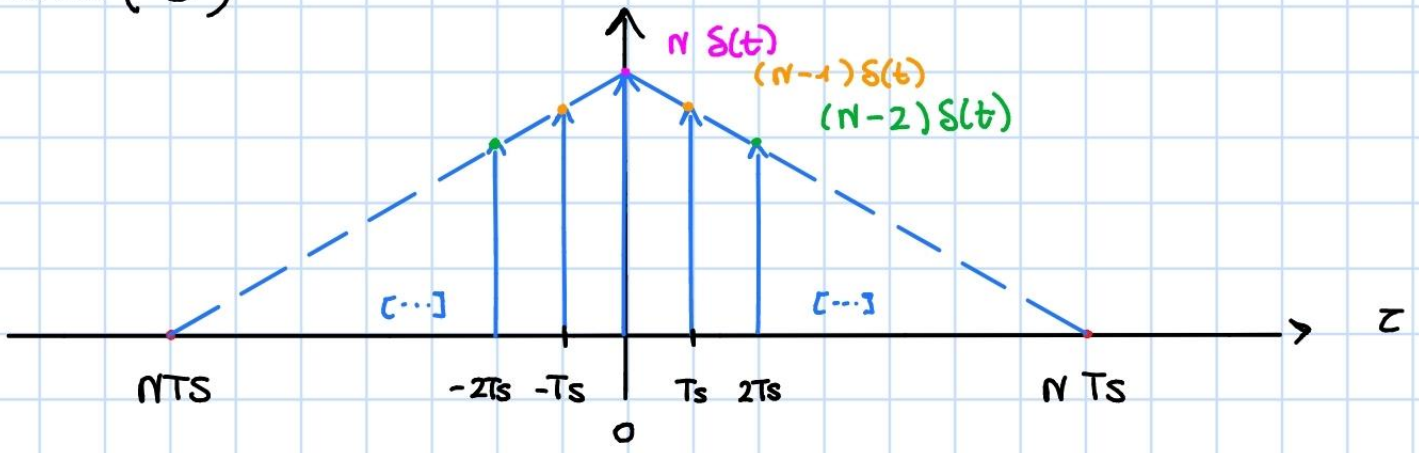


quindi l'autocorrelazione complessiva è

$k_{ww}(\tau)$

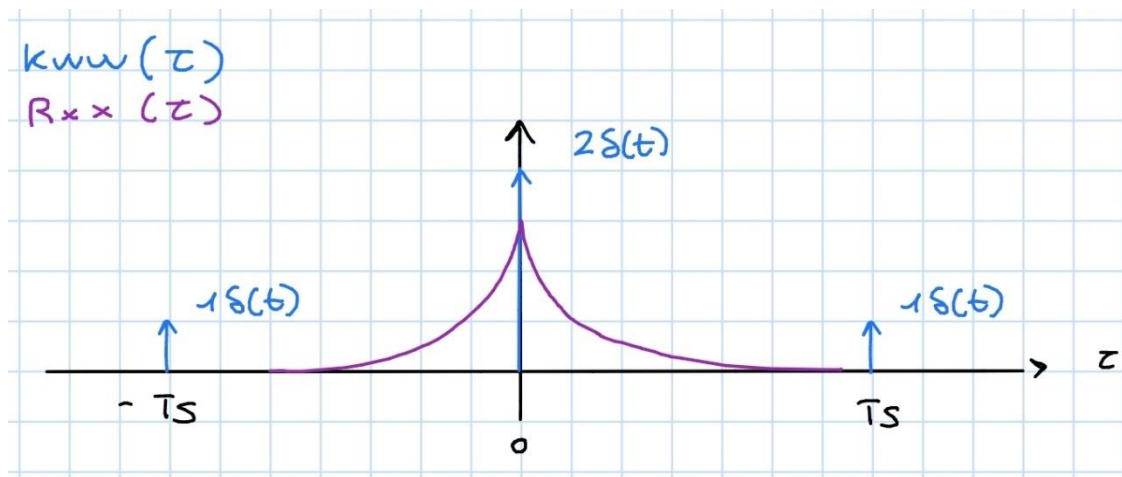


l'idea può essere estesa al caso in cui si prendano più campioni

$K_{ww}(\tau)$ 

il rumore raccolto invece è descritto dalla relazione $\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot K_{ww}(\tau) d\tau$ e si può svolgere graficamente l'integrale mettendo sulla stessa scala dei tempi $R_{XX}(\tau)$ e $K_{ww}(\tau)$

→ nel caso in cui i campioni siano incorrelati significa che

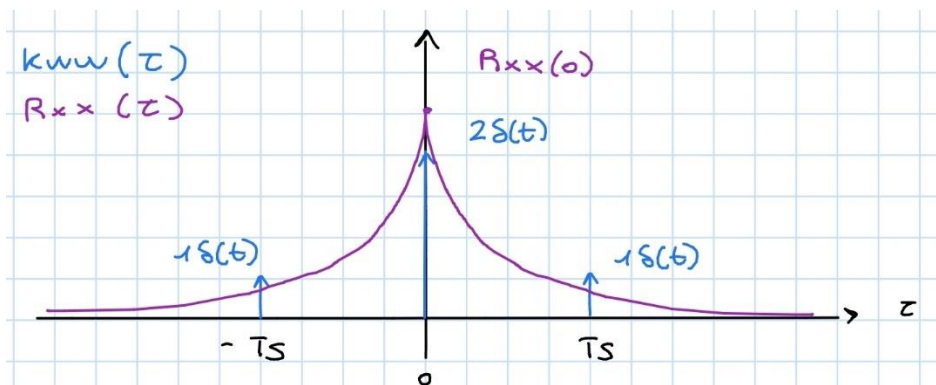


$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot K_{ww}(\tau) d\tau = R_{XX}(0) K_{ww}(0) = S_b 2f_n 2 = \overline{n_x^2} \cdot 2$$

quindi il fattore di miglioramento è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{s_x \cdot 2}{\sqrt{\overline{n_x^2} \cdot 2}} = \frac{s_x}{n_x} \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{2} \rightarrow IF = \sqrt{2} = \sqrt{N}$$

ma se i campioni di rumore sono correlati



Il valore dell'autocorrelazione per $\tau = T_s$ è non nullo e quindi la moltiplicazione tra le delta e l'autocorrelazione da contributo non nullo

$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot K_{WW}(\tau) d\tau = R_{XX}(0)K_{WW}(0) + R_{XX}(0)e^{-\frac{T_s}{\tau_{noise}}} \cdot K_{WW}(\pm T_s)$$

e quindi il fattore di miglioramento è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{s_x \cdot 2}{\sqrt{\overline{n_x^2} \cdot (\text{qualcosa più grande di } 2)}} \rightarrow IF < \sqrt{2} \rightarrow IF < \sqrt{N}$$

supponendo f_s infinita e quindi N infinito, ci riconduciamo al caso analogico, per cui otteniamo il fattore di miglioramento “limite” del DTI.

2024 Febbraio 2, Problema 1, punto c): "Prendendo come esempio un generico integratore a porta, descrivere in dettaglio (da un punto di vista teorico) nel dominio del tempo la differenza tra il rapporto segnale-rumore ottenibile con **filtraggio analogico e digitale** al variare della frequenza di campionamento."

vedi sopra

2019 Luglio 11, Problema 1, punto d): "Spiegare, sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza, come un **filtro digitale** può approssimare un filtro analogico in termini di S / N al variare della frequenza di campionamento."

2024 Luglio 8, Problema 1, punto c): "Teoricamente confrontare nel dominio della frequenza un **integratore a porta** e un **integratore a tempo discreto** al variare della frequenza di campionamento, calcolando, sempre nel dominio della frequenza, il guadagno rispetto all'SNR in ingresso per frequenze molto basse e molto alte."

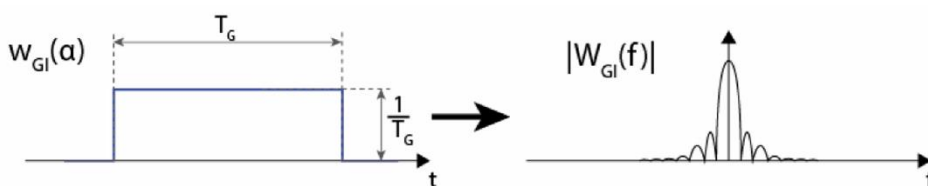
- c) Theoretically compare in the frequency domain a gated integrator and a discrete time integrator as the sampling frequency varies, calculating, again in the frequency domain, the gain with respect to the input SNR for both very low and very high frequencies.

↑ per la trattazione generale vedere risposta sopra, qui vengono riportate solo le differenze tra dominio del tempo e in frequenza

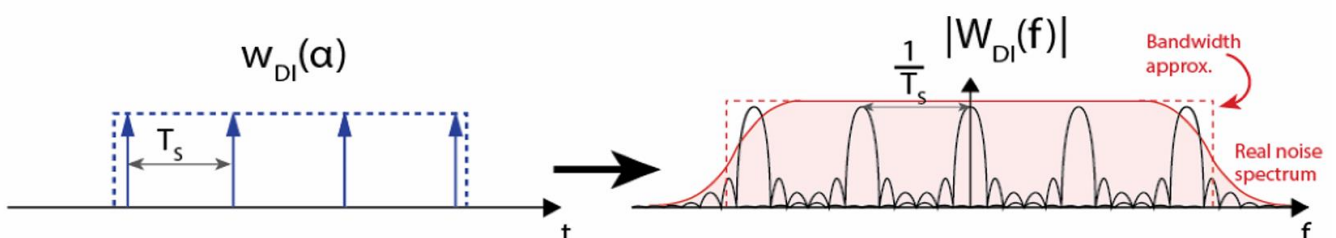
nel dominio della frequenza lo spettro di un *discrete gated integrator* è un seno cardinale con il primo zero in $\frac{1}{T_G}$ ripetuta ogni $\frac{1}{T_s}$.

Dato che il rumore in uscita è proporzionale all'area dello spettro del filtro:

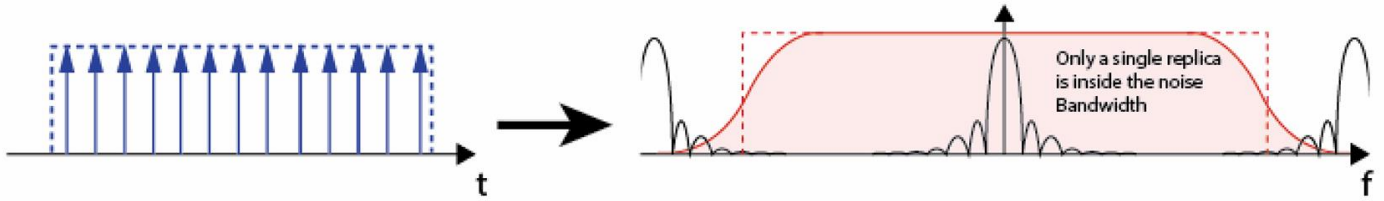
- quando utilizziamo un filtro analogico il rumore in uscita è proporzionale all'area di un singolo seno cardinale



- quando utilizziamo un filtro digitale ma la frequenza di campionamento è tale per cui i campioni di rumore sono incorrelati, il rumore in uscita è proporzionale all'area dei diversi seni cardinali all'interno della banda



- quando utilizziamo un filtro digitale ma la frequenza di campionamento è tale per cui i campioni di rumore sono correlati, il rumore in uscita è proporzionale all'area di un singolo seno cardinale più l'area delle "code" dei seni cardinali al di fuori della banda. La prestazione è migliore rispetto a quella di un filtro digitale con campioni incorrelati ma comunque peggiore di un filtro analogico, in quanto in tal caso non avremmo l'area delle code delle repliche



realizziamo dunque che aumentando il numero di campioni possiamo migliorare il rapporto segnale rumore ma in ogni caso il limite superiore sarà la prestazione ottenuta con un filtro analogico.

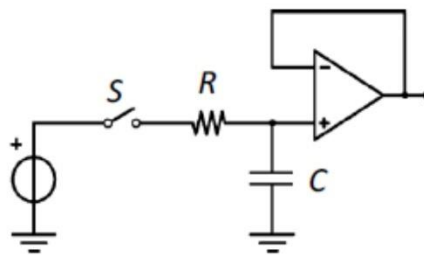
Rumore $1/f$ - Tecniche di Filtraggio Specifiche (Integratori, CDS, CDF)

2022 Agosto 29, Problema 1, punto 3): "Confrontare da un punto di vista teorico l'azione filtrante che si può ottenere utilizzando un **integratore boxcar** e quella ottenibile utilizzando un **integratore ratemeter**."

3) Compare from a theoretical point of view the filtering action that can be obtained using a boxcar integrator and the one achievable using a ratemeter integrator.

Il *boxcar integrator* (BI) è un filtro a parametri non costanti che, se dimensionato adeguatamente, implementa due funzioni:

1. acquisizione di campioni con *gated integrator*
2. media pesata esponenzialmente dei campioni



per come è costruito il *boxcar integrator*, il condensatore non può scaricarsi se non si sta acquisendo un campione ma solo quando stiamo campionando. Per questo motivo, dopo un'acquisizione, il valore campionato precedentemente si riduce di un fattore $e^{-\frac{T_G}{T_F}}$ dove:

- T_G è il tempo di integrazione del *gated integrator*, quindi il tempo in cui viene alternata la chiusura ed apertura dell'interruttore
- T_F è la costante di tempo in cui complessivamente, dopo è una serie di acquisizioni, la funzione peso va a zero. Questo tempo è fissato dalla costante di tempo RC del *boxcar integrator*

nota: ovviamente $RC \gg T_G$ altrimenti il condensatore si scarica completamente in una chiusura dell'interruttore e implementiamo sostanzialmente un sample and hold

un filtro RCI e il BI hanno l'autocorrelazione con lo stesso valore nell'origine, quindi

$$K_{wwB}(0) = K_{wwRC}(0) = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2T_F}$$

possiamo dire inoltre che

$$\overline{n_y^2} = S_B \cdot K_{wwB}(0) = S_B \cdot \frac{1}{2T_F} = \overline{n_x^2} \cdot \frac{T_n}{T_F}$$

questo poiché per un *RCI* abbiamo definito una banda equivalente di rumore, ossia la banda che può essere utilizzata per calcolare la densità spettrale di rumore quadratico medio in uscita semplicemente moltiplicando per tale banda, nel dettaglio per un *RCI* è

$$\overline{y^2} = S_{wb} \cdot \frac{1}{2T_f} = S_{wb} 2f_n \text{ dove } f_n = \frac{1}{4T_f} = \frac{\pi}{2} f_p \rightarrow S_{wb} = \overline{y^2} \cdot 2T_f$$

e dato che nel caso precedente stiamo considerando un rumore bianco che passa attraverso un filtro passabasso che ne limita la banda abbiamo T_n

quindi il *SNR* in uscita può essere scritto come

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_F}{T_N}}$$

un altro modo per vedere ed ottenere il miglioramento del *SNR* è quello di vedere il *boxcar integrator* come la cascata di due filtri, ognuno con il proprio fattore di miglioramento, nel dettaglio

1. un *gated integrator* con stessi T_G e T_F del *boxcar integrator*, il quale da un fattore di miglioramento di $\sqrt{\frac{T_G}{2T_n}}$
2. una media pesata esponenzialmente dei campioni raccolti con fattore di attenuazione $r = e^{-\frac{T_G}{T_F}} \approx 1 - \frac{T_G}{T_F}$ che dà un ulteriore fattore di miglioramento $\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}}$

facendo il prodotto dei due fattori di miglioramento ottengo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} \cdot \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_F}{T_N}}$$

posso fare le affermazioni precedenti perché l'implementazione di un *discrete time exponential averager* ci porta ai seguenti risultati

$$w_K = e^{-\frac{kT_s}{T_e}}$$

dove

- $T_s = \frac{1}{f_s}$ è la frequenza di sampling del filtro a tempo discreto
- T_e è la costante di tempo dell'*exponential averager*
- k sono gli istanti di tempo discreti $k \in [1; \frac{\text{tempo in cui prelevo i campioni}}{\text{tempo di sampling}}]$

di conseguenza il segnale prelevato è

$$s_y = s_x \cdot P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r^k = s_x \cdot P \cdot \frac{1}{1-r} = s_x \cdot G$$

mentre il noise prelevato (se i campioni di rumore sono incorrelati) è

$$\overline{n_y^2} = \overline{n_x^2} \cdot P^2 \cdot \frac{1}{1 - r^2}$$

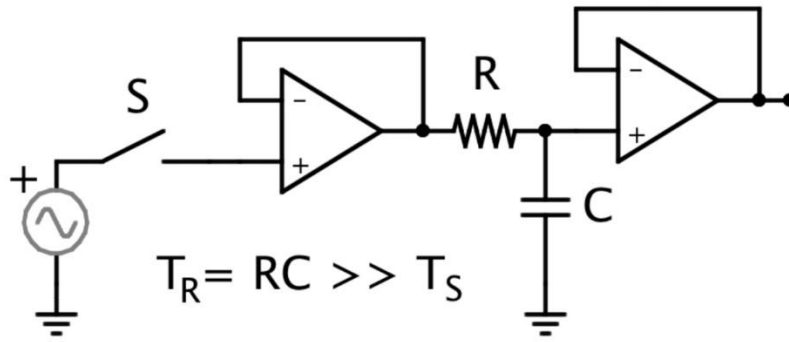
di conseguenza il rapporto segnale rumore migliora di

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{s_y}{\sqrt{\overline{n_y^2}}} = \frac{s_x \cdot P}{1 - r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\overline{n_x^2} P^2}{1 - r^2}}} = P \cdot s_x \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\overline{n_x^2} P^2 (1 - r)^2}{(1 - r)(1 + r)}}} = \frac{s_x}{\sqrt{\overline{n_x^2}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + r}{1 - r}} \approx \frac{s_x}{\sqrt{\overline{n_x^2}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - r}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - r}}$$

che è il miglioramento dovuto all'*exponential averager*

Notare come il fattore di miglioramento dovuto al *boxcar integrator* non dipende dal rate dei samples, ma dalla media dei campioni ottenuta su un preciso numero di samples, non su un intervallo temporale.

Il *ratemeter integrator* è simile al *boxcar integrator* ma ha una differenza sostanziale: il fattore di miglioramento del SNR dipende dal rate dei samples, è una media su un intervallo temporale.



come possiamo notare dallo schematico del circuito, si nota immediatamente che il punto a bassa impedenza dell'uscita del buffer d'uscita consente al condensatore di scaricarsi appena l'interruttore viene aperto ed il segnale non viene integrato. Questo significa che le repliche acquisite hanno un peso che decresce esponenzialmente come

$$r = e^{-\frac{T_S}{T_R}}$$

dove T_R è la costante di tempo del *ratemeter integrator*.

Anche nel caso del *ratemeter integrator* esso può essere pensato come la cascata di due filtri, ognuno con il proprio fattore di miglioramento:

1. un *gated integrator* che dà un fattore di miglioramento di

$$\sqrt{\frac{T_G}{2T_n}}$$

2. una media pesata esponenzialmente dei campioni che dà un fattore di miglioramento

$$\sqrt{\frac{1 + r}{1 - r}} = \sqrt{\frac{2}{1 - r}} = \sqrt{\frac{2T_R}{T_S}} = \sqrt{2T_R f_S}$$

quindi complessivamente il miglioramento dato dal *RI* è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} \cdot \sqrt{2T_R f_S} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{f_S T_G \cdot \frac{T_R}{T_n}}$$

2023 Luglio 3, Problema 1, punto c): "Il rumore $1/f$ viene eliminato con un azzeramento all'inizio della misurazione. Descrivere in dettaglio dal punto di vista teorico come funziona il **CDF**, la sua funzione di ponderazione e l'effetto sul rumore dei suoi diversi parametri" (la domanda è troncata nella fonte precedente, ma si riferisce al Correlated Double Sampling).

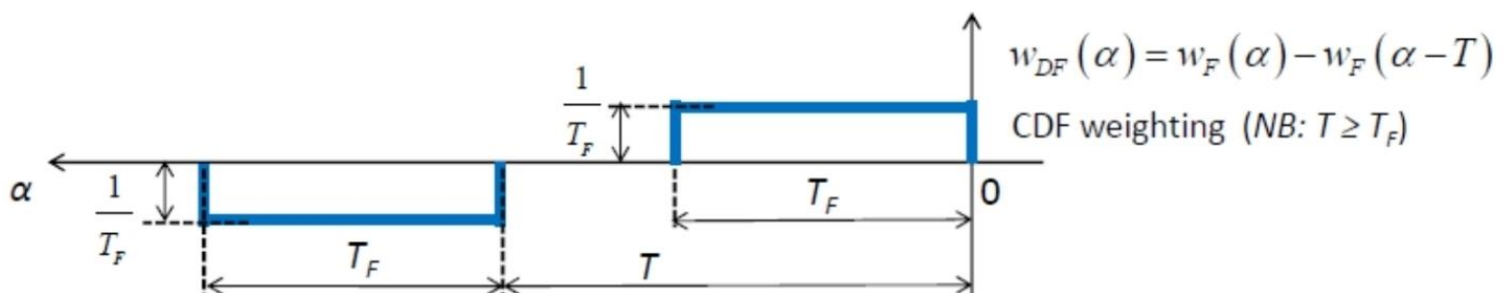
2023 Settembre 6, Problema 1, punto c): "Descrivere in dettaglio dal punto di vista teorico come funziona il **CDF**, la sua funzione di ponderazione e l'effetto sul rumore bianco dei suoi diversi parametri."

- c) Describe in detail from the theoretical point of view how the CDF works, its weighting function and the effect on the white noise of its different parameters.

Uno dei problemi legati al *CDS* è che per rumori con tempo di correlazione breve l'effetto ottenuto è quello di raddoppiare la quantità di rumore che viene integrata. L'approccio che può essere utilizzato per cercare di risolvere il problema è quello di filtrare passa-basso e integrare solo in una porzione di frequenze (e non su tutto lo spettro come nel caso del *CDS*), in modo da ridurre la banda su cui viene integrato anche il rumore. Il *CDF* è l'implementazione di questo approccio con due *gated integrator* (anche se in realtà può essere esteso ad ogni tipo di filtro passa-basso) per il filtraggio del *white noise* (ossia il rumore con tempo di correlazione breve citato in precedenza). La misura del segnale viene quindi ottenuta come la differenza dei campioni prelevati. In questo modo combiniamo un *CDS* con un filtro passa-basso ed otteniamo i seguenti effetti:

- il filtro passa-basso taglia le componenti ad alta frequenza del rumore ad ampio spettro con frequenza $f_F = \frac{1}{2\pi T_F}$
- il *CDS* taglia le componenti di rumore a bassa frequenza $f_{iD} = \frac{1}{2\pi T} \rightarrow$ questa viene approssimata con la distanza tra i due centri dei *gated integrators* e si ottiene f_{iEQ}
- il filtraggio passa-basso applicato al primo campione riduce il contributo di rumore tra i limiti della banda

Descriviamo dunque la funzione peso di un *CDF* implementato con un *gated integrator* con tempo di acquisizione T_G



possiamo dunque scrivere la funzione peso come

$$w_F(t) = -\frac{1}{T_F} \text{rect}\left(\frac{t + T + \frac{T_F}{2}}{T_F}\right) + \frac{1}{T_F} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{T_F}{2}}{T_F}\right)$$

di conseguenza i nuovi contributi di rumore sono (approssimando l'area della funzione nel plot lineare-logaritmico)

$$\sigma_{\frac{1}{f}} \approx \sqrt{S_V f_C \left[\ln \left(\frac{f_{n,eq,GI,1}}{f_{i,eq}} \right) + \ln \left(\frac{f_{n,eq,GI,2}}{f_{i,eq}} \right) \right]}$$

$$\sigma_W \approx \sqrt{S_V [(f_{n,eq,GI,1} - f_{i,eq}) + (f_{n,eq,GI,2} - f_{i,eq})]}$$

dove

$$f_{n,eq,GI} \approx \frac{1}{2T_F}$$

2025 Febbraio 5, Problema 1, punto 3): "Da un punto di vista teorico, descrivere la funzione di peso di un filtro **CDS** nel dominio del tempo e i suoi effetti sul rumore in funzione del tempo di correlazione."

3) From a theoretical point of view, describe the weight function of a CDS filter in the time domain and its effects on the noise as a function of the correlation time.

2018 Agosto 28, Problema 1, punto D):

D) Explain in detail the concept, the weighting function and the low frequency cut-off of the CDS (Correlated Double Sampling). Describe the effect of the CDS on band-limited white noise with a time domain analysis.

La funzione peso di un *CDS* nel dominio del tempo è

$$w_B(t) = \delta(t) - \delta(t + T)$$

per capire qual è l'effetto del *CDS* sul rumore in base al tempo di autocorrelazione del rumore (T_n) dobbiamo calcolare la potenza del rumore in uscita dal filtro. Dalla trattazione teorica sappiamo che essa può essere calcolata come

$$\overline{n_B^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) k_{ww}(\tau) d\tau$$

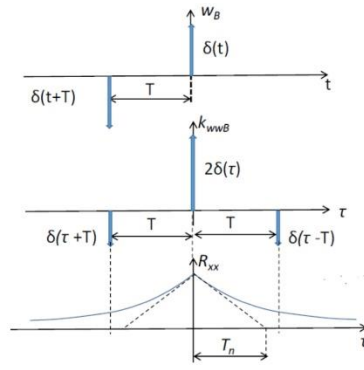
per renderci conto di come agisce sul rumore in base al tempo di correlazione valutiamo due tipi di rumore specifici:

- *white noise* in quanto idealmente ha tempo di autocorrelazione nullo, ma generalmente si ha un limite alla banda dato da un effetto passabasso (per esempio quello di un preamplificatore) e questo dà un tempo di correlazione piuttosto breve
es. rumore bianco che passa attraverso un preamplificatore con banda 100MHz dà tempo di correlazione $5\tau_{preamp} = 5 \cdot \frac{1}{2\pi f_{PA}} = 8 \text{ ns}$
- $\frac{1}{f}$ noise in quanto idealmente ha tempo di correlazione infinito, però l'effetto passa-alto intrinseco dato dallo zero setting dei sistemi limita il tempo di correlazione che è comunque esteso

Nel caso del rumore bianco limitato in banda, l'autocorrelazione del rumore è uno spettro Lorentziano

$$R_{xx}(\tau) = \overline{n_x^2} e^{-\frac{|\tau|}{T_n}}$$

calcolando l'autocorrelazione per via grafica ed applicandola all'autocorrelazione otteniamo

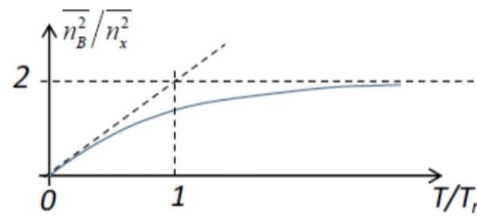


ossia $\overline{n_b^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) k_{wwB}(\tau) d\tau = 2R_{xx}(0) - R_{xx}(T) - R_{xx}(T) = 2 R_{xx}(0)(1 - e^{-\frac{T}{T_n}})$

dove

- $R_{xx}(0)$ è $\overline{n_x^2}$ ossia il valore dell'origine della funzione nel dominio del tempo, quindi l'area dello spettro
ossia $\sqrt{S_V \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{PA}}$ per il rumore bianco
- T è il tempo che passa quando prendiamo il primo sample ed il secondo sample del CDS

possiamo valutare poi il rapporto tra rumore in uscita ($\overline{n_b^2}$) ed il rumore in ingresso ($\overline{n_x^2}$) in funzione del rapporto tra tempo che intercorre tra i due samples (T) e il tempo di correlazione del rumore (T_n). Otteniamo dunque



realizziamo dunque che

- se il tempo che intercorre tra le due misure (T) è molto minore del tempo di correlazione del rumore (T_n), il rumore in uscita raddoppia, ci troviamo a regime dell'esponenziale
- se il tempo di correlazione del rumore (T_n) è molto maggiore rispetto al tempo che intercorre tra le due misure (T), il rumore è fortemente attenuato, ci troviamo verso l'origine del grafico

$$\overline{n_b^2} \approx \overline{n_x^2} \cdot 2 \frac{T}{T_n} \ll \overline{n_x^2}$$

quindi lo zero-setting introdotto dal CDS riduce un'azione passa-alto che riduce significativamente il contributo del rumore $\frac{1}{f}$ mentre il contributo del rumore bianco viene sostanzialmente raddoppiato.

Photodetectors

2025 Febbraio 05, Problema 2, punto a):

Problem 2

A periodical pulsed laser emits rectangular pulses at 400nm featuring a repetition rate of 100kHz. The duration of each pulse is **20ns**. The light signal is sent towards targets placed in turbid water and photodetectors are used to locate such objects by measuring the time of flight of the light pulses. A 100% reflection from the target and no attenuation from the water can be assumed for simplicity. The signal readout consists of a preamplifier featuring

$$R_{IN} = 50\Omega, \sqrt{S_V} = \frac{2nV}{\sqrt{Hz}}, \sqrt{S_I} = \frac{0.5pA}{\sqrt{Hz}}.$$

- 1) Being able to choose between a photodiode and a phototube, discuss what would be the most appropriate detector for this application. Describe the best filtering action that is necessary to extract the information carried by each pulse **individually** and evaluate the minimum laser power that has to be sent towards the target to detect the position of the target. Use reasonable values for any omitted parameter.

“discutere quale sia il sensore più appropriato per questa applicazione”

Nel momento in cui dobbiamo scegliere un tipo di *photodetector* più appropriato significa che dobbiamo valutare quale categoria si adatta meglio alle richieste del problema. In questo caso vogliamo trovare il sensore che garantisca la potenza minima per rilevare la posizione dell’oggetto, dunque vogliamo avere la miglior *photon detection efficiency*.

Il segnale è a $\lambda = 400 \text{ nm}$, dunque sappiamo che per un *phototube*, assumendo di usare la miglior categoria possibile, nel range $350\text{nm} - 800\text{nm}$ un *phototube* di categoria S20 ha $\eta_D \approx 20 \%$.

Per un *photodiode* ha la seguente *photon detection efficiency*:

$$\eta_D = (1 - R) \cdot e^{-\frac{t_n}{L_a}} \cdot (1 - e^{-\frac{t_d}{L_a}})$$

non abbiamo tutti i dati a disposizione, dunque facciamo una serie di ipotesi ragionevoli:

- a queste lunghezze d’onda, $R \approx 10\% \rightarrow R \approx 0.1$ se viene usato un *anti – reflection layer*, altrimenti $R \approx 30\% \rightarrow R \approx 0.3$
- la *silicon absorption length* si ricava dal grafico specifico, per $\lambda = 400 \text{ nm}$ è 10^{-5} cm dunque 100 nm
- consideriamo una *zona neutra* profonda 100 nm
- consideriamo una *zona svuotata* profonda almeno $5L_a$ quindi almeno 500 nm

otteniamo

```

5 % reflection coefficient of Si
6 R = 0.1;
7 % absorption length @400nm
8 La = 100e-9; %[m]
9 % neutral zone depth
10 wn = 100e-9; %[m]
11 % depletion layer depth
12 wd = 500e-9; %[m]
13 %
14 ped = (1-R)*exp(-wn/La)*(1-exp(-wd/La))

```

Command Window

```

ped =
    0.3289

```

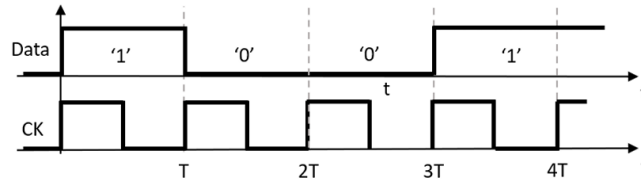
circa il 30% dunque il fotodiodo è migliore.

2025 Gennaio 09, Problema 2, punto c):

Problem 2

A transmission system for encrypted messages consists of two channels: an optical channel for data and an electrical channel for a periodical synchronization signal, i.e. a clock. The two signals are sketched in the figure below. The transmission frequency is 100Mbit/s ($T=10\text{ns}$) and the optical signal is produced by a laser emitting at 514nm. The detection module exploits a PMT featuring a gain of 10^6 and an excess noise factor of 1.5. The readout electronics consists of an amplifier featuring an input impedance $R_{IN} = 1\text{k}\Omega$, a bandwidth limited by a single pole $f_{PA} = 1\text{GHz}$ and a wideband input-referred noise generator with unilateral current spectral density $\sqrt{S_I} = 2\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}$. The residual constant background radiation is of about $2 \cdot 10^9$ photons/s. In order to minimize the errors, a minimum $SNR_{MIN} = 3$ is required.

- 1) Choose a filter suitable for maximizing the signal to noise ratio and eliminating the problem of background radiation. In these conditions calculate the minimum optical power of the laser required assuming that there are no optical losses in the transmission path.
- 2) Discuss and quantitatively evaluate how the response to point 1) would change in the following two cases:
 - a. The transmission rate is reduced to 10Mbit/s
 - b. The transmission rate is increased to 1Gbit/s
- 3) Describe quantitatively and in detail the differences between a PMT and an APD from the application point of view.



“Descrivere quantitativamente ed in dettaglio le differenze tra un *PMT* ed un *APD* dal punto di vista dell'applicazione”

2018 Gennaio 21, Problema 2, punto D):

D) Describe the excess noise factor of a PMT: what is it and what is its origin?

Un limite di fotodiodi e fototubi è che spesso la sensibilità è limitata dal rumore dell'elettronica che è dominante rispetto a quello del sensore. *APD* ed i *PMT* sono stati progettati per ovviare a questo problema: introducono un guadagno interno sul numero di elettroni prodotti una volta che un fotone incide sulla loro area sensibile. Il segnale del sensore aumenta ed anche il rumore prodotto, ma complessivamente il *SNR* migliora poiché il rumore limitante è ancora quello dell'elettronica a fronte di un segnale significativamente più alto.

Nei *PMT* l'amplificazione avviene sfruttando la cascata di n *dinodi* che ogni volta che un elettrone incide su un dinodo, esso emette g (dove $g \in [5; \approx 25]$) elettroni secondari. Mettendo in cascata n dinodi l'effetto risultante è che la corrente all'anodo diventa

$$I_A = g^n I_k = G I_K$$

G è l'amplificazione sul segnale ed è un parametro fondamentale dei *PMT*.

A causa di alcune particolari caratteristiche fisiche (per esempio il fatto che l'emissione di elettroni secondari dai dinodi non è deterministica), il guadagno del *PMT* non ha un unico valore costante ma ha una distribuzione statistica.

L'effetto complessivo sul rumore non è quello di essere amplificato G^2 ma va fatta un'analisi più accurata.

Definiamo le grandezze:

- guadagno medio \bar{G}
- varianza del guadagno σ_G^2
- varianza relativa del guadagno $v_G^2 = \frac{\sigma_G^2}{(\bar{G})^2}$

ricorda: la varianza relativa è una misura di quanto la grandezza sia variabile in relazione al valore medio. È una misura normalizzata della dispersione, che ci permette di comparare la variabilità su dataset diversi, anche se hanno scale diverse o diverse unità di misura.

$$\text{varianza relativa} = \frac{\text{varianza}}{\text{valore medio}^2}$$

effettuiamo l'analisi statistica della varianza del guadagno in uscita, ricordando che

- la *varianza della cascata di più eventi statisticamente indipendenti* è la somma della varianza relativa di ogni stadio, diviso il prodotto di tutti i valori medi relativi a tutti gli stadi precedenti
- tutte le emissioni sono indipendenti quindi il *valore medio* è il *prodotto dei valori medi*

la varianza del rumore in uscita è

$$\sigma_u^2 = v_u^2 N_u^2 = \frac{1}{N_p} (1 + v_G^2) N_u^2 = \frac{1}{N_p} (1 + v_G^2) \bar{G}^2 N_p^2$$

dato inoltre che le emissioni primarie di elettroni hanno valore medio N_p e varianza $\sigma_p^2 = N_p$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N_p} (1 + v_G^2) \bar{G}^2 N_p^2 = (1 + v_G^2) \bar{G}^2 N_p = (1 + v_G^2) \bar{G}^2 \sigma_p$$

quindi realizziamo che:

il rumore in uscita non è esclusivamente rumore in ingresso per guadagno al quadrato ma c'è un ulteriore fattore, l'excess noise factor

ed è

$$F = (1 + v_G^2)$$

nei *PMT* questo valore è contenuto ed è circa $F \in [1.5, 2]$.

Questo valore ridotto di F permette di utilizzare i *PMT* per rilevare sino al singolo elettrone in *modalità digitale* o in *modalità analogica* dove viene prodotta una corrente proporzionale al numero di fotoni che incidono sul sensore.

Gli *APD* invece a loro volta aumentano il numero di elettroni prodotti per singolo fotone incidente poiché se un fotone incide con sufficiente energia nella zona svuotata si crea una coppia elettrone-lacuna che attiva un meccanismo a valanga.

[da rivedere perché scritto di merda di getto] Questo avviene solo se il fotodiodo è polarizzato al di sotto della tensione di breakdown, ossia quel valore per cui il campo nel diodo è tale da accelerare a sufficienza i portatori per far sì che anche i portatori liberi creati vadano a loro volta a creare un impatto ionizzante, che liberi una coppia elettrone-lacuna. []

Il fattore di moltiplicazione della corrente è

$$M = \frac{j_m}{j_i} = \frac{1}{1 - I_i}$$

dove I_i è l'integrale della probabilità che un portatore libero abbia una collisione ionizzante nella zona svuotata.

Allo stesso modo dei *PMT*, il fattore di moltiplicazione M non ha un unico valore definito ma ha può variare significativamente in base a temperatura, punto di lavoro e altre caratteristiche del sistema, anche in questo caso bisogna definire

- \bar{M} valore medio del fattore di moltiplicazione (ossia il guadagno)
- σ_M^2 varianza del guadagno
- v_M varianza relativa del guadagno

Sul fotodiodo incidono N_p portatori con la loro relativa varianza $\sigma_p^2 = N_p$ ed otteniamo in uscita un numero di elettroni pari a $N_u = MN_p$ e varianza σ_u^2 . Anche in questo caso, considerando gli eventi in cascata si può definire un fattore di rumore in eccesso definito come

$$F = (1 + v_m^2)$$

Qui risiede la differenza fondamentale tra *APD* e *PMT*: gli *APD* hanno una varianza molto più elevata anche per valori di M non elevati, in quanto il processo di valanga è più complicato di una serie di emissioni a cascata e perché l'elettrone che causa un impatto ionizzante non viene assorbito ma rimane libero. Nel dettaglio, mentre per i *PMT*, F raggiunge al massimo 2.5. Per gli *APDs*, $F = 2$ è il valore minimo che si possa ottenere ed aumenta significativamente con l'aumentare del guadagno, nel dettaglio un modello semplificato prevede che il fattore di rumore sia

$$F \approx M \left(1 - (1 - k) \left(1 - \frac{1}{M} \right)^2 \right)$$

dove k è il rapporto tra elettroni generati e lacune generate. Nel caso in cui il processo di reazione positiva sia dominante, si può addirittura arrivare alla situazione dove

$$F \approx M$$

Dunque mentre con i *PMT* solitamente si hanno valori di $F < 2$ per $M > 10^5$, valori tipici per gli *APD* sono $F \leq 5$ per $M \approx 500$.

2024 Gennaio 17 Problema 2, C): Descrivi in dettaglio il funzionamento di un PMT descrivendo vantaggi e svantaggi rispetto a una semplice soluzione fototubo.

c) Describe in detail the operation of a PMT describing advantages and disadvantages compared to a simple phototube solution.

Spesso nelle applicazioni dove le sorgenti di luce sono a bassa potenza, la sensibilità del sistema è limitata dalla quantità di rumore dovuta all'elettronica del circuito rispetto al rumore del sensore, ad esempio un fototubo. Un'idea per migliorare il rapporto segnale rumore potrebbe essere di amplificare il segnale prodotto dal sensore (e di conseguenza anche il rumore associato) ed ottenere complessivamente un *SNR* migliore in poiché è ancora il rumore dell'elettronica ad essere limitante, che è lo stesso di prima a fronte di un segnale che è G volte.

Questo concetto viene implementato modificando la struttura di un fototubo introducendo una catena di *dinodi*, ossia dispositivi tali che ogni volta che un elettrone incide su un dinodo con sufficiente energia, esso emette $g > 1$ elettroni secondari. A loro volta, gli elettroni secondari emessi dal primo dinodo vengono fatti rimbalzare su un altro *dinodo* ed esso emette g^2 elettroni secondari. Costruendo una catena di dinodi è possibile produrre un segnale

$$I_A = G I_K$$

dove

$$G = \prod_{0}^k g_k$$

I vantaggi di utilizzare un *PMT* rispetto ad un fototubo sono

- i *PMT* grazie al loro guadagno interno hanno una sensibilità molto più alta rispetto a quella di un fototubo
- generalmente si riesce ad ottenere dunque un miglior *SNR* per i motivi precedentemente elencati

Gli svantaggi sono:

- il guadagno non è ben definito ma fluttua statisticamente dato che i dinodi non emettono in maniera deterministica gli elettroni ma hanno una certa variabilità statistica
- le variazioni del guadagno creano un *fattore di rumore in eccesso*, cioè rispetto al rumore di un fototubo, dove il rumore è dovuto all'emissione primaria di un elettrone σ_p^2 , il rumore di un *PMT* non è moltiplicato esclusivamente per il *guadagno medio* del *PMT* al quadrato \bar{G}^2 ma vi è anche un *fattore di rumore in eccesso* $F \approx [1.5; 2]$
- la loro risposta è molto veloce, in quanto hanno una capacità parassita molto ridotta

Lock-in amplifiers

- c) Describe in detail, from theoretical point of view, both in the time domain and in the frequency domain, how it is possible to obtain the weighting function of a Lock in amplifier.

2018 Luglio 10, Problema 2, punto C):

C) Describe into details the weighting function in the time domain and the frequency behavior of a lock-in amplifier with a sinusoidal reference and with a square wave reference.

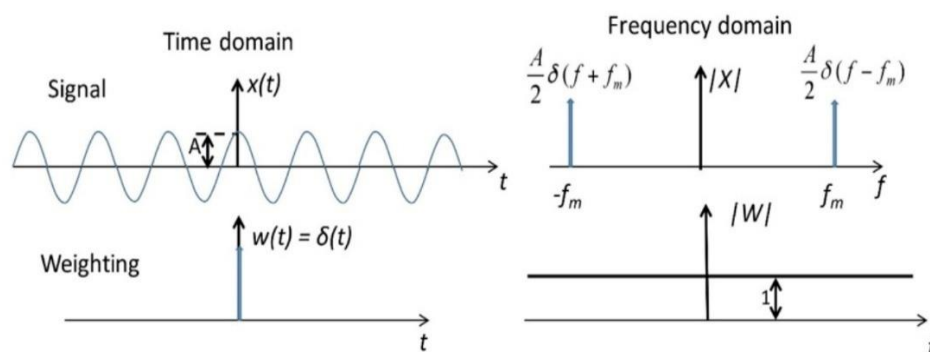
L'idea da non perdere di vista è quella di acquisire l'ampiezza di un segnale che per qualche motivo è al di sotto del *noise floor*. Per incrementare il *SNR* l'idea è quello di muoverlo verso una porzione dello spettro lontano dalle frequenze dove sono le sorgenti di rumore. Abbiamo bisogno di due segnali fondamentali per effettuare questa operazione:

- la *portante* ossia il segnale che permetterà di muoverci dalle basse frequenze dove abbiamo molto rumore
- il *segnale di riferimento* che avrà stessa frequenza e fase della portante

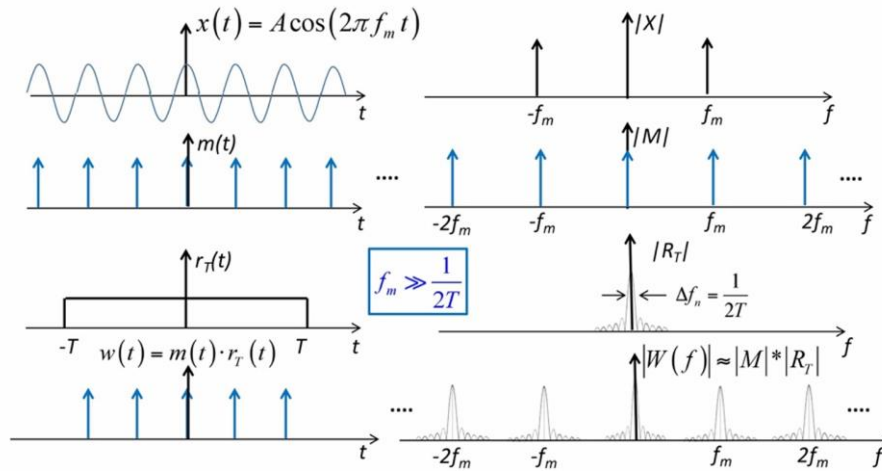
Il risultato della *modulazione* è dunque uno spostamento della banda del segnale in quella della portante.

Ci sono poi tre passaggi intermedi che ci portano a costruire il *lock – in amplifier* che ci fanno comprendere il perché delle nostre scelte:

1. *campionamento del singolo picco* tramite un *sample and hold*: grazie al segnale di riferimento, acquisiamo nel picco ed otteniamo l'ampiezza del segnale. Il problema è che in questo modo non abbiamo azione filtrante, dato che stiamo acquisendo con una delta e la sua trasformata è una costante su tutte le frequenze.

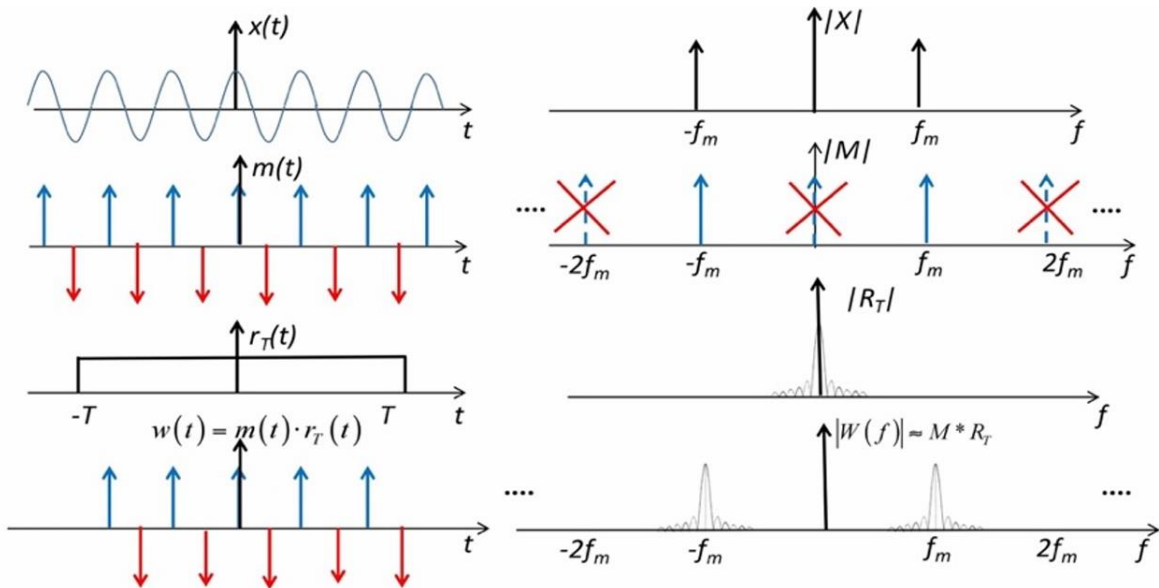


2. *campionamento sincrono su N picchi* del segnale: possiamo considerare l'acquisizione di N campioni come l'applicazione di un *gated integrator* nel caso migliore. La funzione peso applicata è il prodotto tra quella di un *GI* e quella del campionamento, otteniamo quindi:

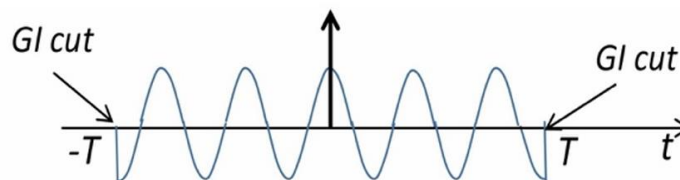


è migliore perché campioniamo a f_m , però abbiamo ancora le repliche a multipli pari e dispari di f_m ed abbiamo ancora la banda a *DC*, che è estremamente problematica in quanto introduce il rumore $\frac{1}{f}$.

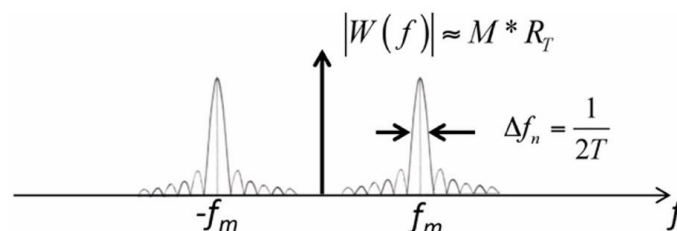
3. *campionamento sincrono con eliminazione della component continua*, sommando *picchi negativi e positivi*: in questo modo dato che è un segnale dispari eliminiamo la componente continua e tutte le repliche pari. La criticità è che campioniamo comunque tutte le repliche a multipli dispari di f_m .



4. *modulazione sinusoidale*: utilizzando un segnale sinusoidale per la modulazione ed un *GI* per il filtraggio passabasso possiamo ottenere la seguente funzione peso nel dominio del tempo



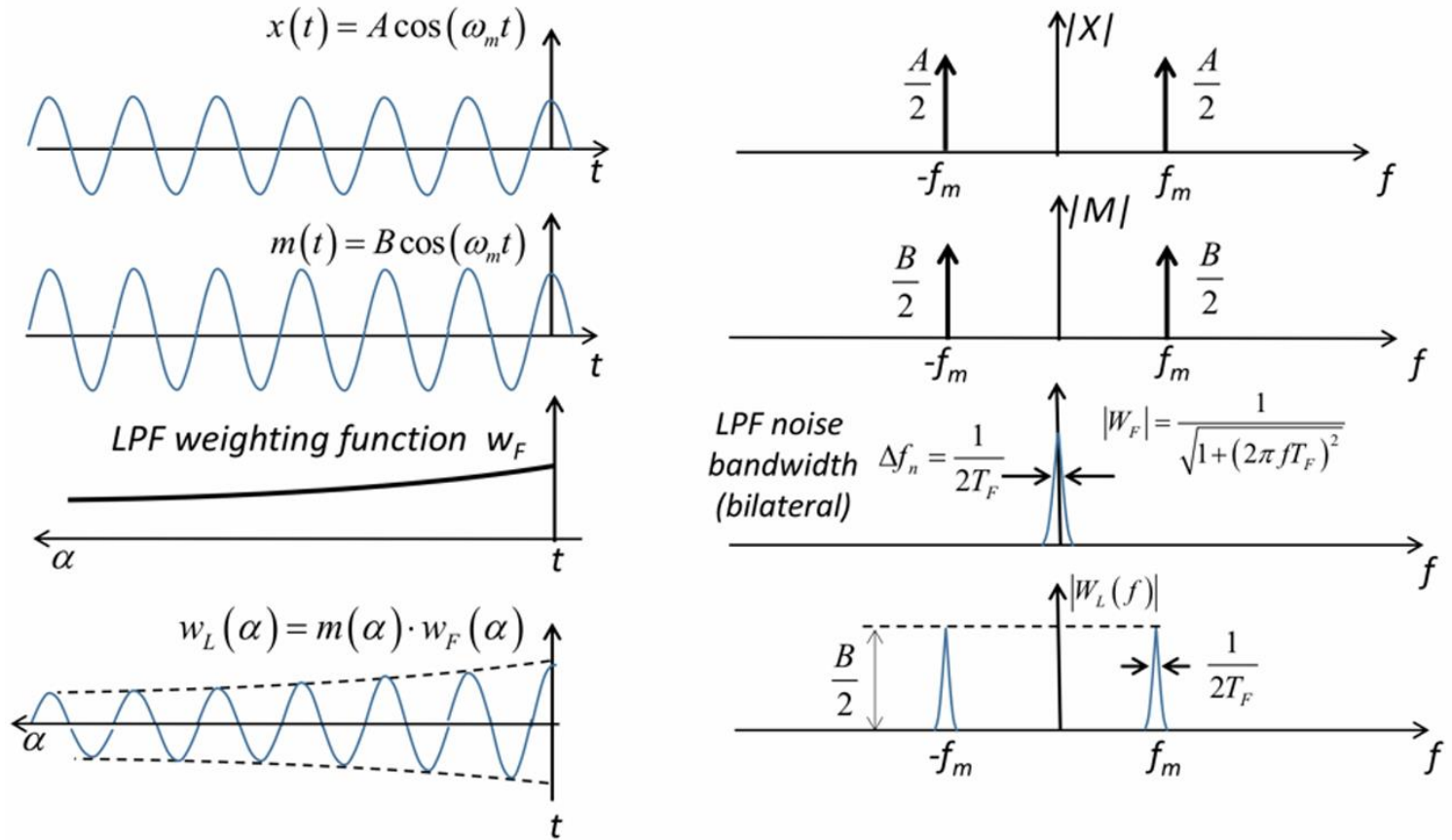
e di conseguenza in frequenza



possiamo riassumerne le caratteristiche fondamentali:

- f_m : frequenza della portante, scelta da noi con la portante
- Δf_n : frequenza sulla quale integriamo il segnale modulato, scelto liberamente da noi con la finestra d'integrazione del GI

La criticità di utilizzare un GI come filtro passabasso è che l'ampiezza A può essere letta solo a tempo discreto. Sostituendo il *gated integrator* con un filtro RC possiamo ottenere una funzione $A(t)$ continua nel tempo. Ciò che cambia è esclusivamente la Δf_n ed ovviamente la forma del segnale modulato in frequenza, che non sarà più un seno cardinale ma uno spettro *lorentziano*.



ricordando che, dalle definizioni sappiamo che

$$y(t) = \int_0^\infty x(\alpha) m(\alpha) \cdot w_F(\alpha) d\alpha$$

quindi la *weighting function* del LIA complessivamente è

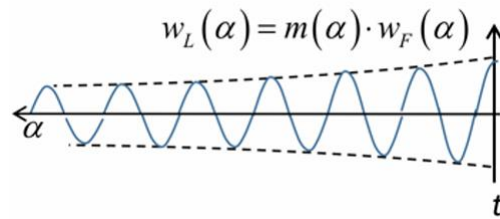
$$y(t) = \int_0^\infty x(\alpha) \cdot w_{LIA}(\alpha) d\alpha \rightarrow w_{LIA}(\alpha) = m(\alpha) \cdot w_F(\alpha)$$

dove

- $w_F(\alpha)$ è la funzione peso del filtro scelto
- $m(\alpha)$ è la funzione portante

quindi

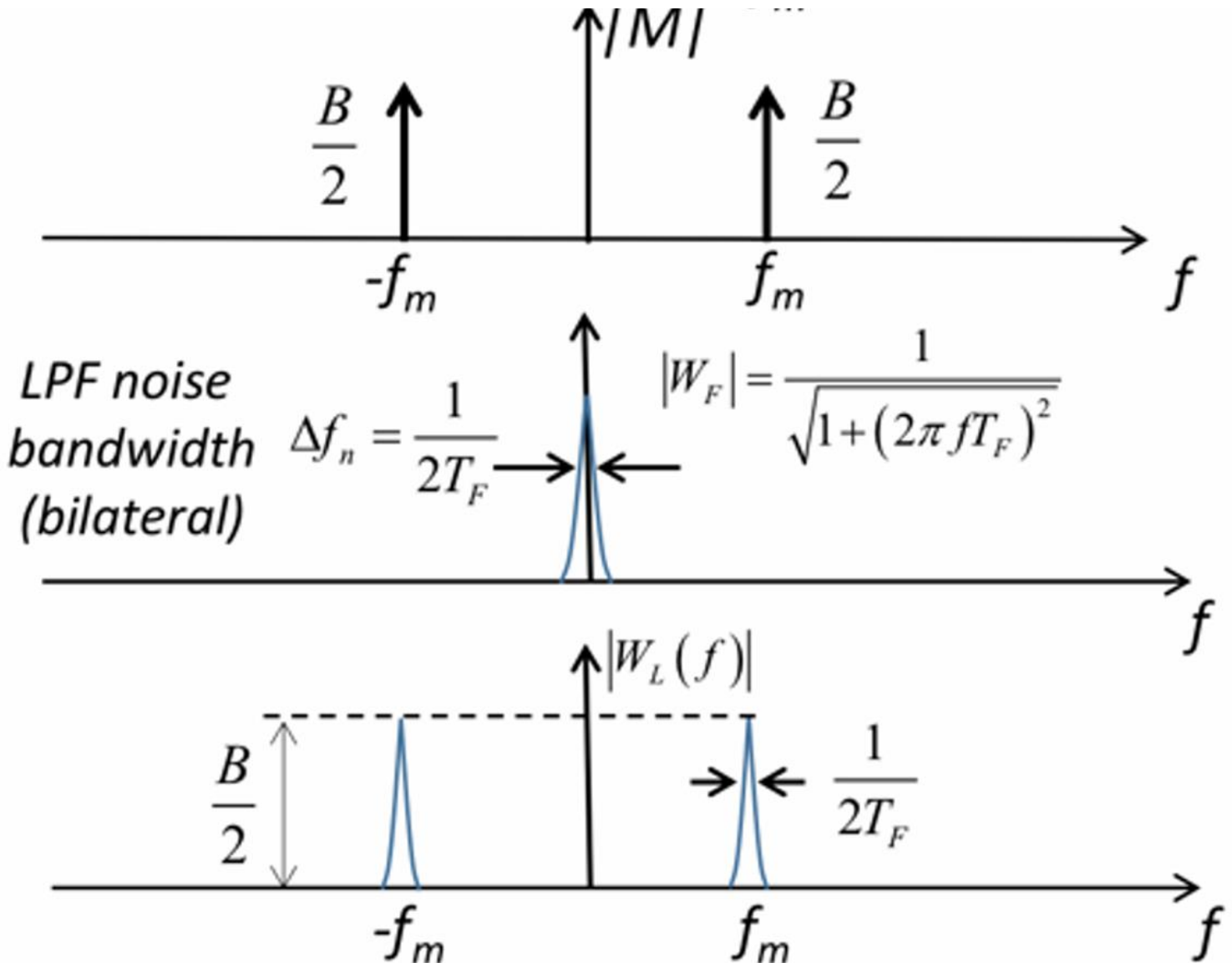
$$w_{LIA}(\alpha) = B \cos(\omega_m \alpha) e^{-\frac{\alpha}{\tau}}$$



Ora che abbiamo esplorato la funzione peso nel dominio dei tempi, possiamo calcolare quella in frequenza

$$|W_{LIA}(f)| \approx |M(f)| * |W_F(f)|$$

dunque



aggiungo il calcolo del SNR anche se non è esplicitamente richiesto nella domanda almeno la trattazione è completa

Calcolo del *SNR* del *LIA*

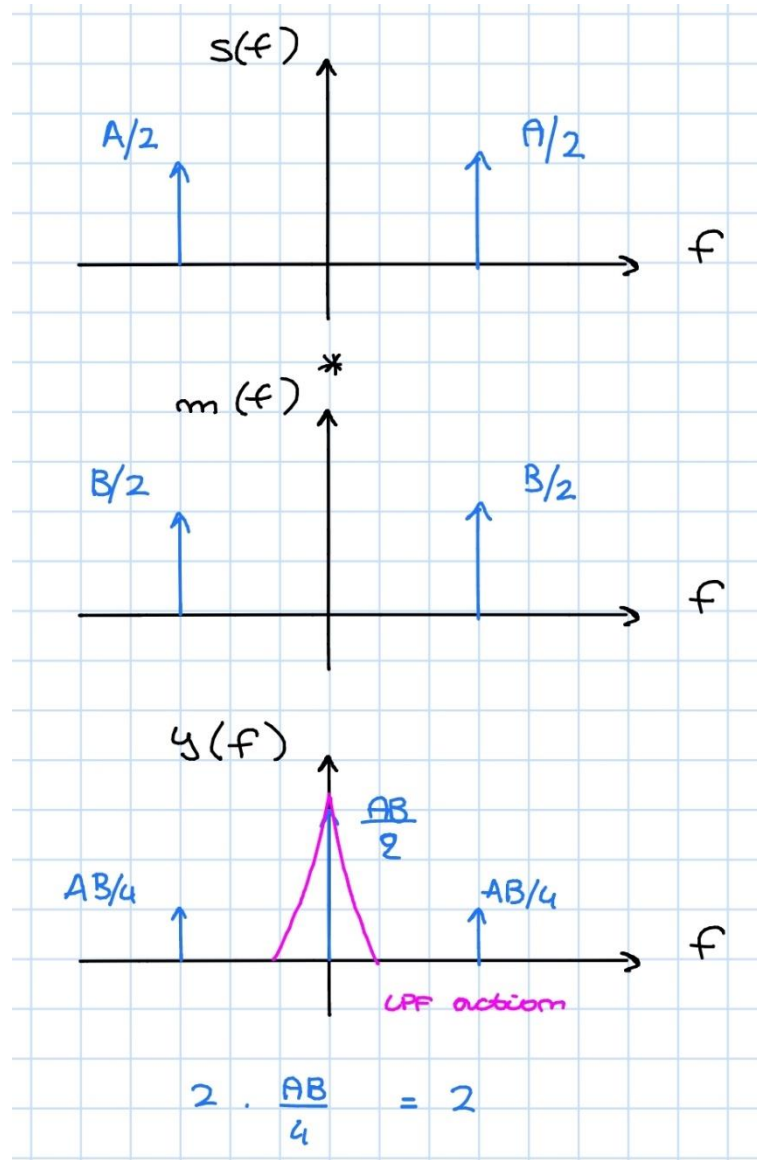
$$y(t) = \int_0^\infty s(t) \cdot m(t) \cdot w_F(t) dt$$

dove

- $s(t)$ segnale che stiamo modulando, se il segnale fosse sinusoidale $s(t) = A \cos(\omega_m t)$
- $m(t)$ ossia il segnale di riferimento $m(t) = B \cos(\omega_w t)$
- $w_F(t)$ quindi funzione peso del filtro

$$y(t) = \int_0^\infty A \cos(\omega_m) B \cos(\omega_m) \cdot w_F(t) dt$$

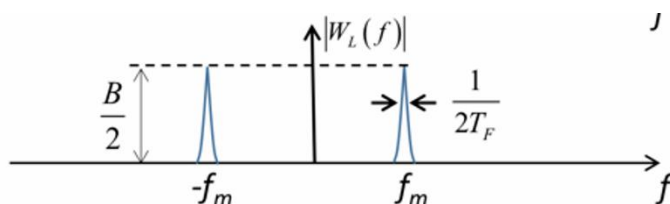
è più semplice visualizzare il caso in frequenza, nel dettaglio



quindi il segnale in uscita è

$$y(t) = 2 \frac{A}{2} \cdot \frac{B}{2} = \frac{B}{2} A$$

il rumore in uscita può essere facilmente calcolato sempre in frequenza, pensandolo come l'area del prodotto del modulo della funzione peso al quadrato e l'autocorrelazione del rumore



$$\rightarrow \overline{n_{yL}^2} = 2 \left(\frac{B}{2}\right)^2 \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f_n = \frac{B^2}{2} \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f_n$$

quindi il SNR risulta

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{LIA} = \frac{y_s}{\sqrt{\overline{n_{yL}^2}}} = \frac{A}{\sqrt{2 S_{Bb} \Delta f_n}}$$

2023 Giugno 19, Problema 2, punto c):

Problem 2

A mechanical piece is subject to both compression and bending forces. Using strain gauges, we want to study only the bending component which has a maximum frequency of 100Hz. The available amplifier is characterized by a single pole ($f_p=100\text{MHz}$) and two input-referred noise sources with unilateral spectral densities $S_V = \left(\frac{2nV}{\sqrt{\text{Hz}}}\right)^2$ and $S_I = \left(\frac{1pA}{\sqrt{\text{Hz}}}\right)^2$. The readout electronics is biased at 3.3V.

- Design, size and describe a suitable measurement setup. Quantify the minimum measurable strain assuming that one strain gauge can dissipate a maximum of 0.1mW.
- Assuming that there is also a $1/f$ component with a corner frequency of 1kHz and that the measurement can last 1h, check what the effect is on the minimum measurable strain being able to use only a continuous power supply. Explain in detail from a theoretical point of view how the result was obtained and under what assumptions.
- Supposing now to be able to modulate the supply voltage, calculate how the answer to point b changes, also providing a detailed comparison between the sine wave and the square wave modulation in terms of achievable signal to noise ratio.

Analisi approfondita delle differenze tra modulazione con onda quadra o modulazione sinusoidale.

calcolo del SNR della modulazione sinusoidale fatto in precedenza

In alcuni casi può essere utile utilizzare una modulazione ad onda quadra, poiché è un tipo di modulazione che richiede circuiti meno complessi di quelli per la modulazione sinusoidale e con limiti alle performance meno importanti.

Ciò che stiamo cambiando è la funzione di riferimento, che non è più una senoide ma un'onda quadra a valore medio nullo.

Ricordiamo che la trasformata di un'onda quadra è la trasformata di un rettangolo campionata ogni f_m .

La funzione peso finale del *lock in amplifier* è dunque la funzione di riferimento e la funzione peso del filtro passabasso.

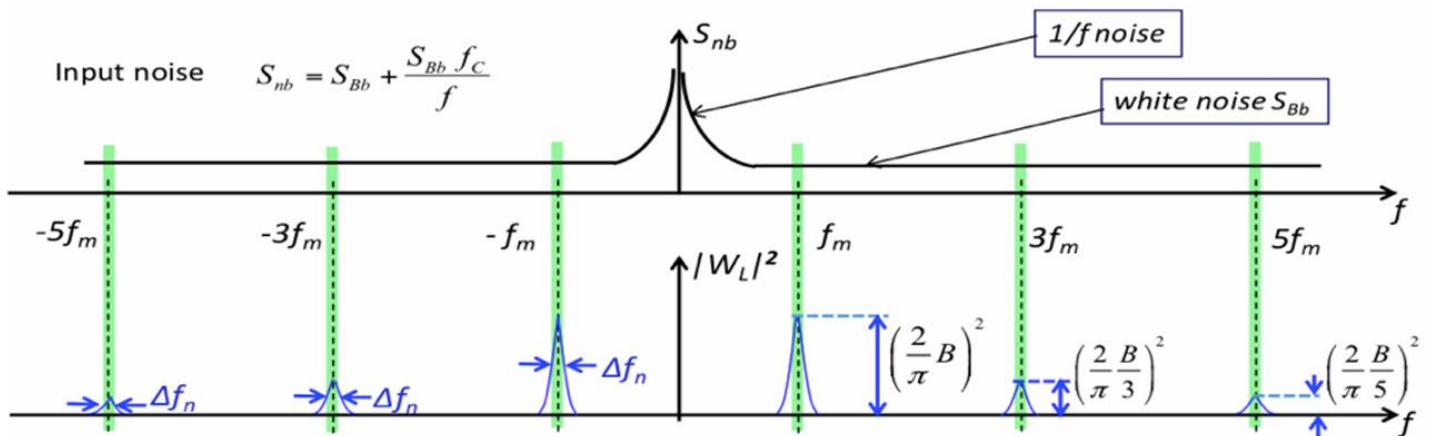
calcolo del rumore (valido sia per segnali sinusoidali, che rettangolari ecc...)

Per calcolare il rumore raccolto in questo caso applichiamo la tipica formula

$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{in}(f) |W_f(f)|^2 df$$

siccome abbiamo sia rumore $\frac{1}{f}$ che rumore bianco, la densità in ingresso S_{in} è

$$S_{in} = S_{Bb} + \frac{S_{Bb} f_c}{f}$$



ogni finestra d'integrazione raccoglie rumore, scalata per la sua ampiezza e questo dà un fattore (serie convergente)

$$\overline{n_y^2} = 2 \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f \cdot \left(\frac{2}{\pi} B\right)^2 \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] = 2 \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f \cdot \left(\frac{2}{\pi} B\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{8} = B^2 \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f$$

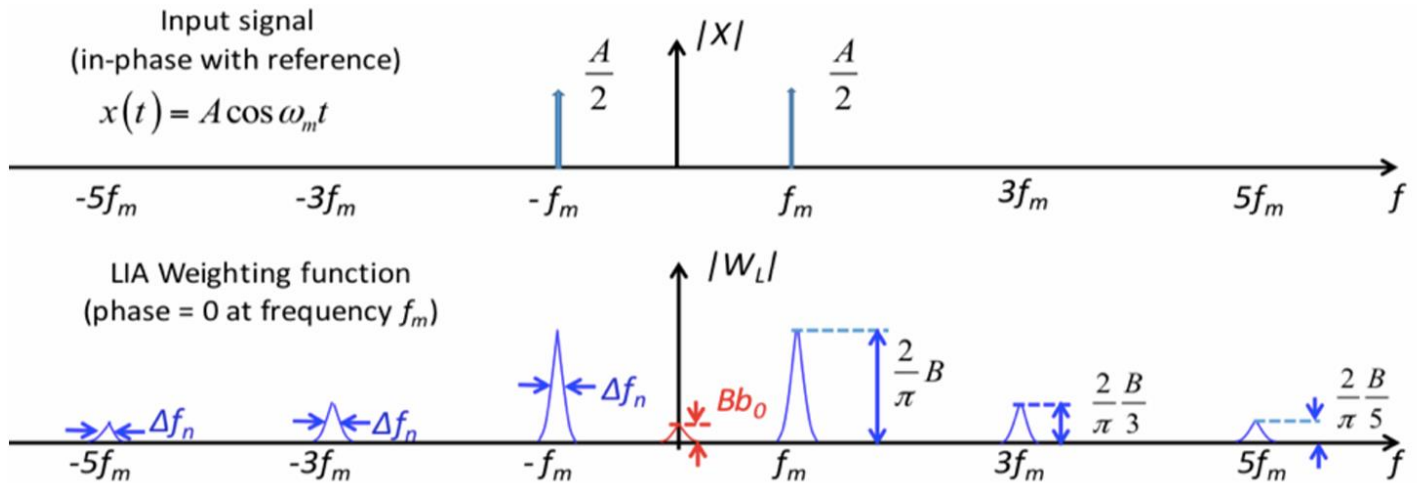
dove

$$\frac{\pi^2}{8} \cong 1,11$$

per effettuare un confronto con la modulazione sinusoidale, bisogna valutare quanto è il segnale raccolto e quanto vale il SNR

segnale sinusoidale con modulazione triangolare

Per calcolare la quantità di segnale raccolto dobbiamo calcolare l'area del prodotto tra le trasformate della funzione sinusoidale e la trasformata della funzione sinusoidale.

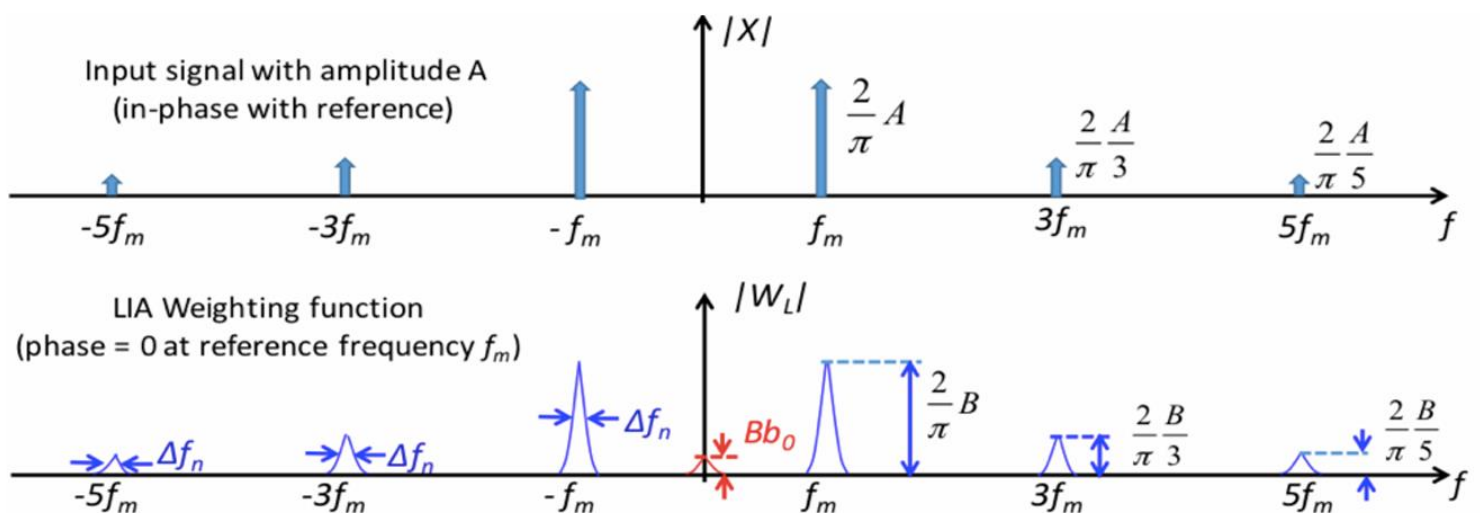


l'area è chiaramente

$$y(t) = 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{2}{\pi} B = \frac{2}{\pi} AB$$

segnale rettangolare con modulazione rettangolare

Calcoliamo inoltre il segnale raccolto nel caso in cui il segnale sia rettangolare. Otteniamo



$$y(t) = 2 \left[\frac{2}{\pi} A \frac{2}{\pi} B \right] \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right] = 2 \left[\frac{2}{\pi} A \frac{2}{\pi} B \right] \left(\frac{\pi^2}{8} \right) = AB$$

quindi è possibile calcolare i SNR e otteniamo

2019 Luglio 11, Problema 2 Domanda D):

4) Being able to choose between a square and a sinusoidal wave for both the modulation and the reference signal, discuss and evaluate how the signal to noise ratio changes in the 4 possible cases.

Vanno combinati i risultati precedentemente trovati

	SINUSOIDAL Reference	SQUAREWAVE Reference
SINUSOIDAL Signal amplitude A power $P = \frac{A^2}{2}$ A_{\min} minimum measurable amplitude (at $S/N=1$)	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\sqrt{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\frac{\pi}{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$ $= \frac{\sqrt{P}}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$
	$A_{\min} = \sqrt{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n} = \mathbf{1,41}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$	$A_{\min} = \frac{\pi}{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$ $= \mathbf{1,57}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$
SQUAREWAVE Signal amplitude A power $P = A^2$ A_{\min} minimum measurable amplitude (at $S/N=1$)	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$
	$A_{\min} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n} = \mathbf{1,11}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$	$A_{\min} = \sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$

2025 Febbraio 05 Problema 2, 3):

Da un punto di vista teorico, descrivi in dettaglio il concetto di NEP e la sua utilità.

3) From a theoretical point of view, describe in detail the concept of NEP and its usefulness.

NEP è un acronimo che sta per “**N**oise **E**quivalent **P**ower” è una figura di merito che tiene conto della sensibilità del sensore e della corrente di buio dello stesso. Nel dettaglio, la *NEP* definisce il limite inferiore alla sensibilità del sensore imposto dal rumore dello stesso e non dall’elettronica utilizzata per estrarre il segnale. Essa corrisponde alla minima potenza ottica che deve incidere sul segnale per avere un segnale misurabile.

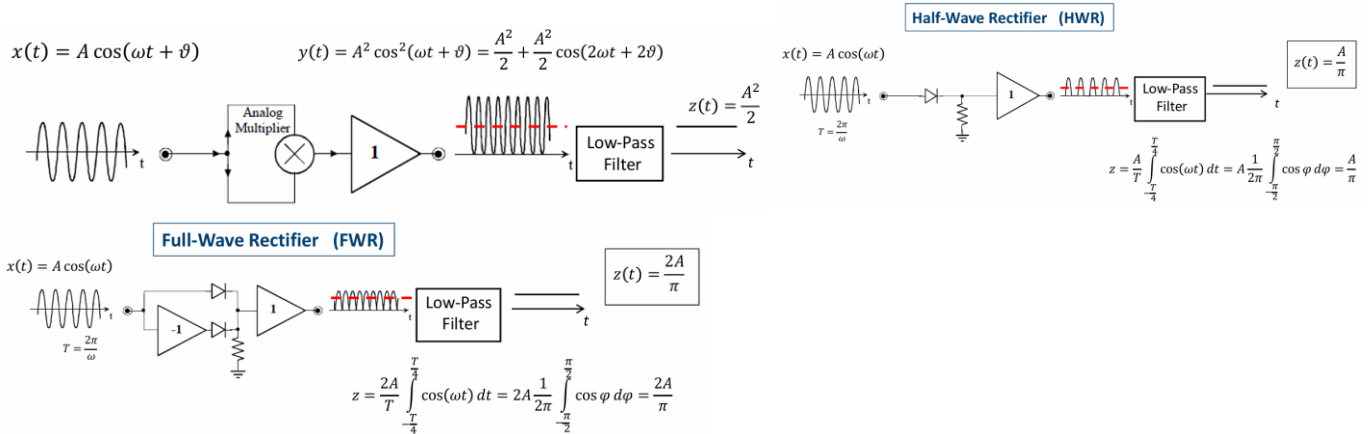
$$NEP = P_{p,min} = \frac{I_{p,min}}{S_D} = \frac{\sqrt{2qj_B}\sqrt{A_D}\sqrt{\Delta f}}{S_D}$$

dove

- $2qj_B$: shot noise dovuto alla corrente di buio (si usa la densità di corrente per evidenziare la dipendenza dall’area del sensore)
- A_D è l’area del fotosensore (solitamente si sceglie un’area di 1 cm^2)
- Δf banda unilatera in cui consideriamo il segnale, solitamente viene scelta una banda di 1 Hz

2025 Gennaio 09 Problema 1, 3): Discuti in dettaglio i vantaggi e gli svantaggi del filtraggio sincrono e asincrono per il recupero dell'ampiezza di una sinusoide.

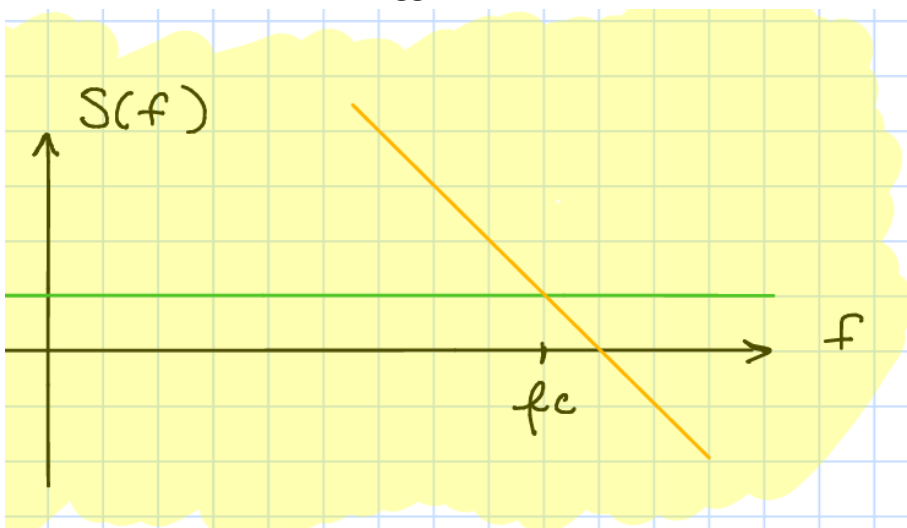
- filtraggio **asincrono**: le tecniche di filtraggio asincrono *non utilizzano un segnale di riferimento* che indichi il momento in cui sono presenti i picchi del segnale. Sono filtri il cui segnale di uscita è una misura della potenza del segnale più quella del rumore. Sono sostanzialmente costituiti da qualche sorta di modulatore che rende il segnale esclusivamente positivo e con un filtro passa-basso viene fatta la media del quadrato del segnale in ingresso.



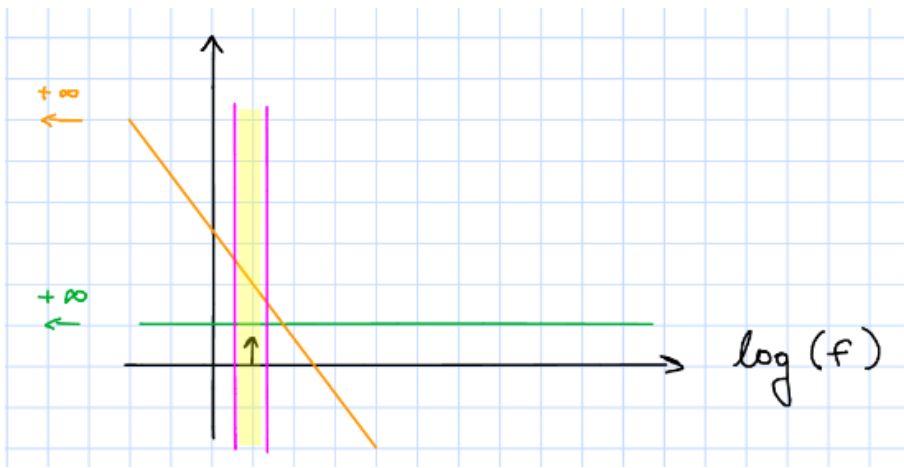
Bisogna tenere in considerazione che il filtro passa-basso riduce il contributo dei rumori a banda larga (migliorando il rapporto segnale-rumore), il punto è che *questo è vero se e solo se il segnale in ingresso ha già un SNR elevato*, per questo motivo queste configurazioni vengono utilizzate in seguito a qualche filtro che incrementi in precedenza il rapporto segnale-rumore. Se il SNR del segnale in ingresso è minore di 1, queste configurazioni non possono essere utilizzate per recuperare il segnale.

- filtraggio **sincrono**: le tecniche di filtraggio sincrono *utilizzano un segnale di riferimento*. Quando è necessario incrementare significativamente il rapporto segnale-rumore, soprattutto nei casi in cui $SNR < 1$ è obbligatorio utilizzare una tecnica di filtraggio sincrono. Il miglioramento è dato dal fatto che tramite la *modulazione* si può spostare il segnale in un range di frequenze dove i contributi di rumore sono significativamente minori e si può integrare un segnale a banda stretta, in questo modo il rumore raccolto è significativamente più basso e la quantità di segnale raccolto è sempre la stessa.

Rumore raccolto senza filtraggio a banda stretta



Rumore raccolto con filtraggio a banda stretta



Strain Gauges

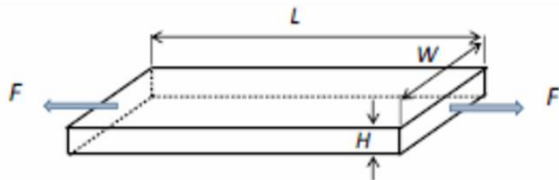
2024 Luglio 08 Problema 2, A): Descrivi in dettaglio il principio fisico dell'estensimetro e le sue caratteristiche.

- a) Describe in detail the physical principle of the strain gauge and its characteristics. Then describe a suitable setup to produce an electrical signal proportional to the force applied to the piston.

2024 Febbraio 02 Problema 2, C): Spiega in dettaglio come funziona un estensimetro e in particolare il significato del fattore di gauge e come può essere calcolato da un punto di vista fisico.

- c) Explain in detail how a strain gauge works and in particular the meaning of the gauge factor and how it can be calculated from a physical point of view.

Il principio di base dietro agli “*strain gauges*” o in italiano “*estensimetri*” è che una resistenza può cambiare il proprio valore nel momento in cui delle deformazioni meccaniche vengono applicate ad essa. La grandezza che andiamo ad estrarre è la *variazione relativa delle dimensioni del resistore* a causa della forza applicata.



Se applicando una forza L varia, R varia e quindi possiamo a ritroso comprendere quanto sia la variazione relativa di L misurando il cambiamento di R .

$$R = \rho \cdot \frac{L}{WH} \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Quando una forza viene applicata, il dispositivo è sottoposto ad uno *stress*, che può essere definito come la *densità di forza applicata per unità d'area*

$$N = \frac{F}{A}$$

L'applicazione di una forza cambia la resistenza per effetto delle deformazioni meccaniche e per un effetto *piezoresistivo*. Per entrambi gli effetti sono definite delle grandezze ed equazioni che descrivano il fenomeno:

- “*young modulus*” (E): lega la deformazione con lo stress: $\varepsilon [\%] = \frac{N \left[\frac{N}{m^2} \right]}{E \left[\frac{N}{m^2} \right]}$. Il regime lineare vale solo per le deformazioni reversibili, altrimenti quando si entra in regime plastico le equazioni cambiano.
- “*poisson module*” (ν): modella la deformazione a causa della variazione (relativa) di lunghezza e larghezza a causa dello sforzo applicato

$$\frac{\Delta W}{W} = -\nu \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\Delta H}{H} = -\nu \cdot \varepsilon$$

dato che $A = W \cdot H$ devo fare la derivata del prodotto per calcolare la variazione relativa dell'area $\frac{dA}{A}$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dW \cdot H + dH \cdot W}{WH} = \frac{dW}{W} + \frac{dH}{H} = -v\varepsilon - v\varepsilon = -2v\varepsilon$$

- “piezo resistivity coefficient” (β): nel momento in cui una deformazione viene applicata ad una resistenza, c'è una variazione relativa della sua resistività, questo coefficiente ne tiene conto

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta N = \beta E\varepsilon$$

Definite tutte le grandezze che legano la variazione relativa di un parametro con la deformazione, possiamo calcolare la variazione relativa della resistenza partendo dalla seconda legge di Ohm e ottenere un unico coefficiente che legni variazione della resistenza con deformazione.

$$R_0 = \rho_0 \cdot \frac{L_0}{A_0}$$

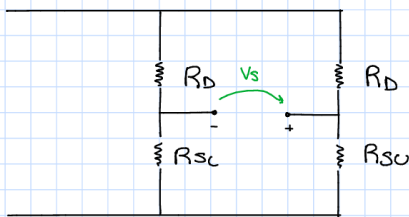
$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho_0} + \frac{dL}{L_0} - \frac{dA}{A_0} = \beta E\varepsilon + \varepsilon + 2v\varepsilon$$

si definisce “fattore di deformazione”

$$G = \beta E + 1 + 2v = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon}$$

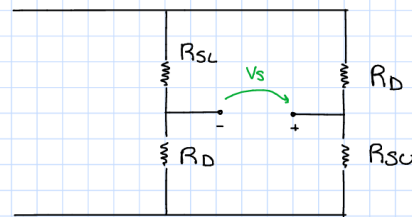
Un estensimetro viene implementato con una resistenza a serpentina orientata con il lato più lungo nella direzione di dove vogliamo misurare la deformazione.

CONFIGURATION for BENDING (only)

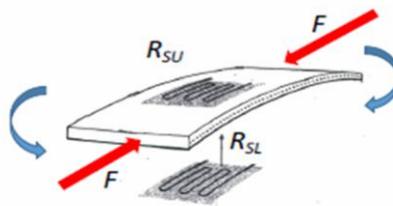


$$V_s = \frac{1}{2} V_A G \varepsilon$$

CONFIGURATION for COMPRESSION/ELONGATION



$$V_s = \frac{1}{2} V_A G \varepsilon$$



Aspetti Generali di Signal Recovery

2024 Giugno 14 Problema 2, C): Spiega in dettaglio cos'è la SER di un fotocatodo e come può essere calcolata a partire dalle specifiche del rivelatore.

- c) Explain in detail what the SER of a photocathode is and how it can be calculated starting from the detector specifications.

2019 Agosto 30 Problema 2, D):

- d) Describe the meaning of the SER of the phototube. Explain how it is possible to calculate it and the effect of the use of a grid to improve the value.

Il principio fondamentale di funzionamento di ogni fotorilevatore è: una radiazione elettromagnetica interagisce con una l'area sensibile del rivelatore un portatore viene generato. Il portatore libero, sotto l'effetto

di un campo elettrico, si muove verso l'elettrodo e una carica di segno opposto viene indotta. Se gli elettrodi sono in un circuito chiuso, una corrente viene indotta. Questo comportamento può essere studiato ed analizzato tramite il teorema di Shockley-Ramo, che semplifica significativamente la trattazione fisica.

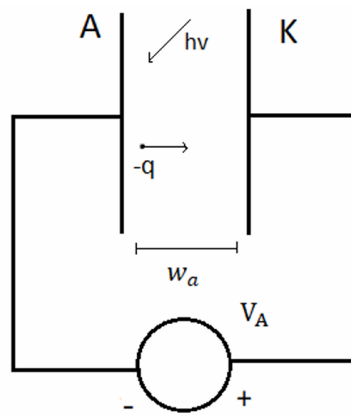
Il teorema dice che

$$i_c = qE_v \cdot v_c$$

dove il prodotto è il *prodotto scalare* ed E_v è il campo che esisterebbe nella posizione della carica se le seguenti condizioni fossero sempre verificate

- l'elettrodo è a potenziale unitario
- tutti gli altri elettrodi sono al potenziale di riferimento
- tutte le cariche esterne sono rimosse

Questo teorema viene utilizzato per trovare la *SER* ossia la “**S**ingle **E**lectron **R**esponse” in un fototubo. Il setup che si andrà ad analizzare è il seguente

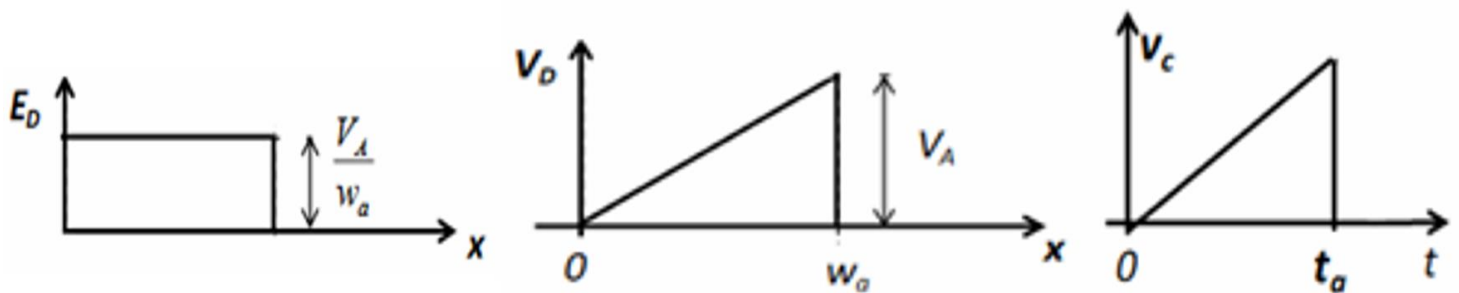


Analizziamo il contesto:

- il potenziale è fissato dal generatore $\rightarrow E_d = V_A/w_a$ campo tra i due conduttori
- sulla carica agisce l'accelerazione $\rightarrow a_c = \frac{F}{m_e} = \frac{qE_d}{m_e} = \frac{qV_A}{w_a} \cdot \frac{1}{m_e}$
- integrando l'accelerazione possiamo trovare la velocità $\rightarrow v(t) = \int a_c dt = \frac{qE_d}{m_e} t + v_0$

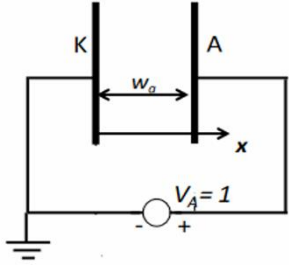
v_0 può essere ragionevolmente supposta a 0

possiamo visualizzare graficamente la condizione del sistema



ovviamente la velocità del portatore crolla a 0 appena ha percorso lo spazio w_a ed ha raggiunto l'anodo.

v_c verrà calcolata in seguito



Applichiamo ora le condizioni del teorema in modo da ottenere il campo E_v . Il setup sperimentale viene modificato applicando le condizioni sopracitate e possiamo ottenere il campo $E_v = \frac{1}{w_a}$.

A questo punto possiamo utilizzare la relazione data dal teorema

$$i_c = qE_v v_c = qE_v \cdot q \frac{E_d}{m_e} t = qE_v \cdot \frac{qV_A}{w_a m_e} t = \frac{q^2 V_A}{m_e w_a^2} t$$

possiamo fare due osservazioni a seguito di questo risultato

- la corrente cresce linearmente
- la corrente avrà forma triangolare in quanto andrà a 0 appena il portatore raggiunge l'anodo

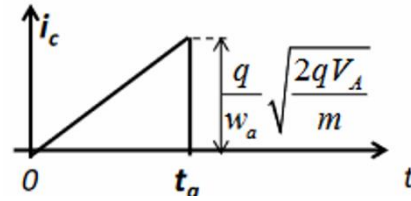
per avere un'idea del contenuto in frequenza della *SER* abbiamo bisogno di sapere quanto è il tempo di attraversamento del fototubo t_a e possiamo capire come varia la risposta in funzione della tensione di polarizzazione del fototubo V_A .

Integrando la velocità riusciamo ad ottenere la legge di moto del portatore

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{qE_d}{2m_e} t^2 + x_0 \quad ; \quad x_0 = 0$$

t_a è l'istante di tempo in cui $x(t)$ è uguale a w_a . Possiamo risolvere dunque

$$\frac{qE_d}{2m_e} t_a^2 = w_a \rightarrow t_a = \sqrt{\frac{2m_e w_a}{qE_d}} = \sqrt{2 \frac{m}{q} \cdot \frac{w_a}{\sqrt{V_A}}}$$



gli unici gradi di libertà che abbiamo sono w_a e V_A , con i valori tipici $w_a \approx 1\text{cm}$; $V_A \approx 100\text{V}$ otteniamo un tempo nella scala dei nanosecondi, dunque una risposta con contenuto in frequenza nell'ordine dei $\approx 100\text{MHz}$.

Sarebbe auspicabile ottenere una risposta in frequenza più veloce, ma questo richiederebbe di aumentare V_A e ridurre w_a , ma ciò potrebbe a campi elettrici molto intensi.

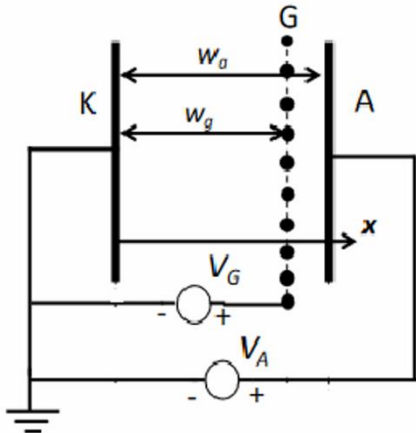
Il problema può essere risolto con l'introduzione di una *griglia* all'interno del fototubo, questo poiché la

tensione V_G agisce come controllore per il *flusso di elettroni* attraverso il dispositivo.

L'idea è non aumentare il campo elettrico all'interno del dispositivo perciò imponiamo che

$$\frac{V_G}{w_g} = \frac{V_A}{w_a} \rightarrow V_G = V_A \frac{w_g}{w_a}$$

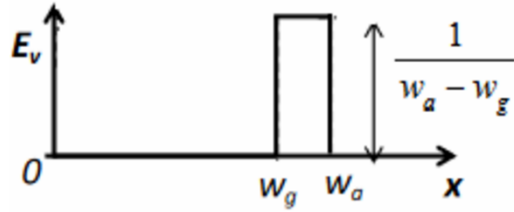
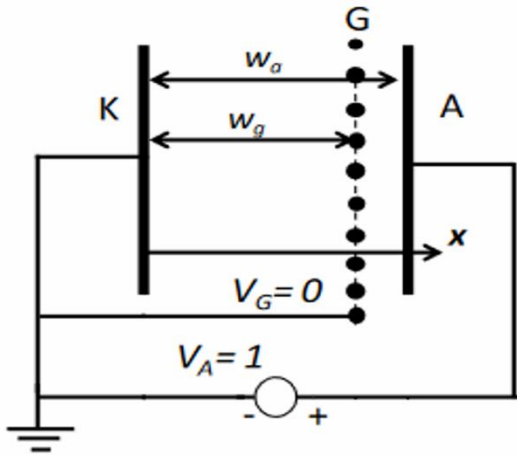
dato che non abbiamo cambiato il campo totale all'interno del dispositivo, il moto del portatore libero non cambia, quindi



$$v_c(t) = q \frac{E_d}{m_e} t \cdot u_x$$

il sistema sembra lo stesso, ma la differenza sostanziale sta nel fatto che la griglia *scherma l'anodo dall'induzione di carica*. Infatti, applicando le condizioni del teorema il campo E_v è 0 fino a w_g ma diventa

$$E_v = \frac{1}{w_a - w_g} \text{ appena il portatore supera la griglia.}$$



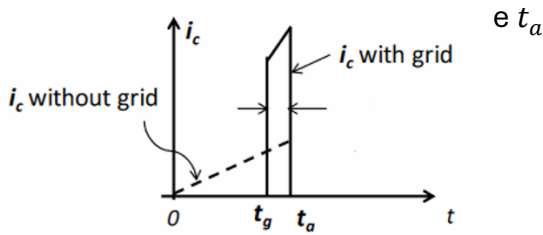
Possiamo quindi applicare il teorema

$$i_c(t) = q E_v v_c(t)$$

ricapitolando

- l'elettrone si muove con lo stesso moto di prima
- ciò che cambia è la corrente che io vedo all'anodo ed il suo valore di picco

questo poiché al posto di w_a nel valore di picco ora ho solo $w_a - w_g$, di conseguenza lo spazio percorso tra t_g



$$t_g = \sqrt{\frac{2m_e w_g}{q E_d}} = \sqrt{2 \frac{m}{q} \frac{w_g}{V_G}} \quad \text{e} \quad t_a = \sqrt{2 \frac{m}{q} \cdot \frac{w_a}{\sqrt{V_A}}}$$

In questo modo per avere la risposta in frequenza ci vuole $t_g - t_a$ il più breve possibile.

$$t_a - t_g = \sqrt{2 \frac{m}{q} \left(\frac{w_a}{\sqrt{V_A}} - \frac{w_g}{\sqrt{V_A \frac{w_g}{w_a}}} \right)} = \sqrt{2 \frac{m}{q} \frac{w_a}{\sqrt{V_A}} \left(1 - \frac{\sqrt{w_g}}{\sqrt{w_a}} \right)} = t_a \left(1 - \frac{\sqrt{w_g}}{\sqrt{w_a}} \right)$$