

ELEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE E TRASFORMATE

Andrea
Bertazzoni
886586
AA. 2019/20/

SPAZI DI FUNZIONI

Spazio Vettoriale

Ω è un insieme, $\mathcal{F}_\Omega = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$

$$\left. \begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{queste operazioni} \\ \text{sono garantite in uno} \\ \text{spazio vettoriale} \end{array}$$

$C^0(a, b) = \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$ è uno spazio vettoriale

Criterio di riconoscimento dei sottospazi

X è uno sp. vett. su \mathbb{R}

$X_0 \subseteq X$, allora X_0 è un sottospazio vettoriale di X se
 $\forall x, y \in X_0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in X_0$
 combinazioni lineari di elementi del sottospazio sono ancora elementi del sottospazio

Esempi:

$X_1 = C^1(a, b)$ è uno sp. vett.? SÍ

$X_2 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}, f(x) \geq 0 \ \forall x\}$? NO

$X_3 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ periodica}\}$? NO

f_1 T_1 -periodica f_2 T_2 -periodica $f_1 + f_2$ T -periodica se $T = nT_1 = mT_2$
 $\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ Se $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$ $n, m = 1, 2, 3, \dots$
 allora $f_1 + f_2$ non è periodica

Spazio Vettoriale Normato

Sia X uno sp. vett su $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

Dico che è uno sp. vett normato se è definita una funzione: $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty)$ con queste proprietà:

- 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in X$ (proprietà di annullamento)
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ (proprietà di omogeneità)
- 3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (diseguaglianza triangolare)

Esempi: \mathbb{R}^n

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\begin{cases} \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} & (\text{norma Euclidea}) \\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| & \text{o Pitagorica} \\ \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \\ \|x\|_4 = \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4} \end{cases}$$

In uno spazio vettoriale normato di dimensione finita, tutte le norme sono tra loro equivalenti, cioè.

se $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sono 2 diverse norme su X (di dim. finita)
allora $\exists c_1, c_2$ t.c.:

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x$$

Negli sp. vett. di dim. infinita, non sempre esiste una norma, e se ne esistono tante, non sempre sono equivalenti fra loro.

Spazi Vettoriali Normati di Funzioni

$C^0[a, b]$ → l'intervallo chiuso è importante $\|f\|_{C^0[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ norma naturale

Per il teo. di Weierstrass, $\forall f \in C^0[a, b], \|f\|_{C^0} < \infty$

$$1. \|f\|_{C^0} = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$2. \|\lambda f\|_{C^0} = \max_{x \in [a, b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_{C^0}$$

$$3. f, g \in C^0[a, b], \forall x \in [a, b] \quad |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$$

Più in generale, se K è un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^n , $C^0(K)$ è uno sp. vett. normato con $\|f\|_{C^0(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|$

In $C^0[a, b]$ posso definire anche: $\|f\|_{L^1[a, b]} = \int_a^b |f(x)| dx$ norma integrale $< +\infty$

$$1. \|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx = 0 \text{ e } f \text{ continua} \Rightarrow f = 0$$

$$2. \|\lambda f\|_{L^1} = \int_a^b |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|_{L^1}$$

$$3. |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\hookrightarrow \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx$$

$$\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$$

(i.e. NON EQUIVALENTI, c'è uno spazio INFINITO)

$\|\cdot\|_{C^0}$ e $\|\cdot\|_{L^1}$ sono 2 norme MOLTO DIVERSE fra di loro!

$C'[a,b] = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile e continua}\}$ è uno sp. vett.

$\|f\|_{C^0}, \|f\|_{L^1}$ sono norme ammissibili in $C'[a,b]$

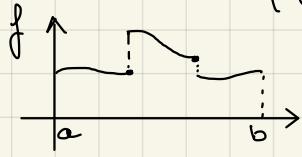
$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \|f'\|_1$ è una norma?

1. $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = \text{const.} (\text{non necessariamente } 0)$

non rispetta la proprietà di annullamento!
NON è una NORMA!

$\|f\|_{C'[a,b]} = \|f\|_{C^0[a,b]} + \|f'\|_{C^0[a,b]}$ è una norma? → SÍ

$R(a,b) = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è (limitata e) Riemann-integrabile}\}$



$\|f\|_{C^0[a,b]}$ è una norma ✓
 $\|f\|_{L^1[a,b]}$ NON è una norma ✗
 (non rispetta la proprietà 1)

a integrale unico e finito
 (limitata, non per forza continua)

Spazi di funzioni continue definite su tutto \mathbb{R}

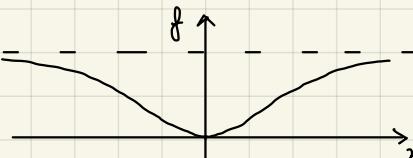
$C^0(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. non normato

In questo spazio \nexists una norma naturale

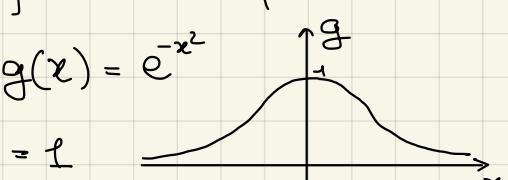
$\overset{\text{bounded}}{C_b}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua e limitata}\}$ è uno sp. vett.

$\rightarrow \|f\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$

$f(x) = 1 - e^{-x^2}$



$\sup |f(x)| = 1$
 $\max |f(x)| \not\exists$

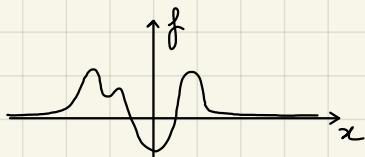


$C_b(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. NORMATI

$C_b^*(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ cont. e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$

$C_b^*(\mathbb{R}) \subseteq C_b(\mathbb{R})$

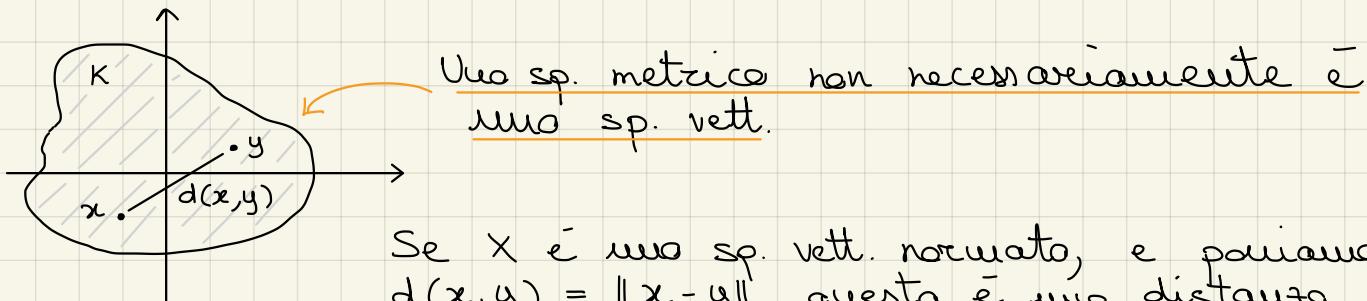
è un sotto-sp. vett. normato
 (la norma integrale, invece, non è ben definita)



Spazio Metrico

Sia K un insieme. Si dice che è uno spazio metrico se è definita una funzione (DISTANZA) $d: K \times K \rightarrow [0, +\infty)$ tale che:

- 1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (proprietà di annullamento)
- 2) $d(x, y) = d(y, x) \quad (simmetria) \quad x, y \in K$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{diseguaglianza triangolare})$



Se X è uno sp. vett. normato, e poniamo $d(x, y) = \|x - y\|$, questa è una distanza

- 1) $d(x, y) = 0 \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
- 2) $d(y, x) = \|y - x\| = \| - 1 \cdot (x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$
- 3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| = \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

→ Ogni sp. vettoriale normato è anche uno sp. metrico ponendo $\|x - y\| = d(x, y)$ ("distanza della norma")

Se (K, d) è uno sp. metrico e $K_0 \subseteq K$, anche (K_0, d) è metrico

Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno sp. vett. normato, è anche metrico, ogni suo sottoinsieme X_0 sarà metrico, ma in generale non sarà uno sp. vett.

sp. metrico \Rightarrow sp. vett. (normato)
sp. vett. normato \Rightarrow sp. metrico

sp. vett e metrico \Rightarrow sp. vett. normato? NO. Esistono esempi (non elementari) di sp. vett. in cui è def. una distanza, ma questa non proviene da una norma

Sia (K, d) uno sp. metrico

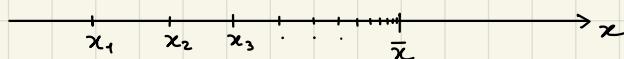
La sfera di centro x e raggio $r > 0$ è l'insieme:
 $B_r(x) = \{y \in K \mid d(x, y) < r\}$ ("sfera aperta")

$(B_r(x))$ si dice anche intorno sferico di x)

A partire dagli intorni sferici, si possono dare tutte le definizioni di "topologia" degli spazi (\neq ma simili da quelle del solo insieme \mathbb{R}^n)

Si vuole avere un criterio per poter dire che una certa successione in uno sp. metrico è convergente (senza bisogno di sapere già quale sia il limite)

Idea: se gli zeri $\{x_n\}$ tendono a qualche punto \bar{x} , in particolare saranno sempre più vicini tra loro



Def: Sia (X, d) uno sp. metrico e $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di elementi di X . Si dice che la successione $\{x_n\}$ è di **Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Più sinteticamente:

$$\{x_n\} \text{ è di Cauchy} \Leftrightarrow d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \text{ per } n, m \rightarrow \infty$$

In particolare, se $(X, \|\cdot\|)$ è uno sp. vett. normato, si dice che $\{x_n\} \subseteq X$ è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ossia se $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ per $n, m \rightarrow \infty$

Teorema: Se (X, d) è uno sp. metrico, $\{x_n\} \subseteq X$, $x_n \rightarrow \bar{x} \in X$ allora la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy.

"Ogni successione convergente è di Cauchy"

Ci piacerebbe sapere che è vero anche il viceversa, ossia che se una successione è di Cauchy, allora converge (a un qualche limite).

↳ Questo dipende dallo spazio ambiente

Es: $X = \mathbb{Q}$. $d(x, y) = |x - y|$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$

$$x_n \rightarrow e = 2,71\dots \notin \mathbb{Q}$$

Quindi la succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ non è convergente in \mathbb{Q} (mentre è conv. in \mathbb{R}).

$\{x_n\}$ però è di Cauchy in \mathbb{Q} .

↳ non è vero che se $\{x_n\}$ è di Cauchy allora converge (in \mathbb{Q})

Def: Sia (X, d) uno sp. metrico. Si dice che lo spazio è **completo** se ogni successione di Cauchy in X è convergente a qualche elemento di X

→ \mathbb{Q} non è completo

\mathbb{R}^n , $d(x, y) = |x - y|$, è uno spazio metrico completo.

Def: Se X è uno sp. vett. normato, completo (come sp. metrico), si dice che X è uno spazio di **BANACH**.

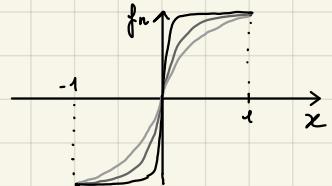
Esplicitamente: $(X, \|\cdot\|)$ sp. vett. normato. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy, ossia $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ per $n, m \rightarrow \infty$, allora $\exists \bar{x} \in X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$ cioè $\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0$

Spazio Metrico Completo

Esempio di spazio vettoriale normato (di funzioni) non completo.

$$X = C^\circ[-1, 1] \quad f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{se } x \in [0, 1] \\ -|x|^{1/n} & \text{se } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$



Dovo dimostrare che X è uno sp. vett. normato e NON completo (con la norma L^1):

f_n è di Cauchy in questo sp. vett. normato

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L^1} &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = 2 \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \\ &= 2 \int_0^1 |x^{1/n} - x^{1/m}| dx = 2 \int_0^1 (x^{1/n} - x^{1/m}) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^{1/n+1}}{1/n+1} - \frac{x^{1/m+1}}{1/m+1} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{1/n+1} - \frac{1}{1/m+1} \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 2(1-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\|f_n - f\|_{L^1}}_{2 \int_0^1 |x^{1/n} - 1| dx} \rightarrow 0 \quad \text{dove } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$2 \int_0^1 |x^{1/n} - 1| dx = 2 \int_0^1 (1 - x^{1/n}) dx = 2 \left(1 - \frac{1}{1/n+1} \right) \rightarrow 0$$

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0) \end{cases} \Rightarrow f \text{ è discontinua}$$

$f_n \rightarrow f$ in norma L^1 ma $f \notin C^\circ[-1, 1]$

non esiste $g \in C^\circ[-1, 1]$ t.c. $f_n \rightarrow g$ in norma L^1

$\{f_n\}$ è di Cauchy ma non converge in questo spazio, quindi lo spazio NON è **COMPLETO**

Successione di funzioni $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$)

Si dice $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I se $\forall x \in I \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

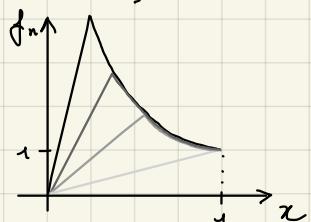
Esempi: 1. $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & x \in [0, 1] \\ -|x|^{1/n} & x \in [-1, 0) \end{cases}$

f_n sono continue in $[-1, 1]$, $f_n \rightarrow f$ in $[-1, 1]$ puntualmente
 f non è continua

2. $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (\frac{1}{n}, 1] \\ n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$

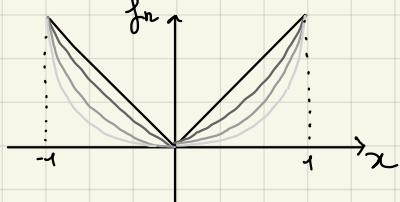
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 0 \end{cases} = f(x)$$

Ogni f_n è continua e limitata.
 f è discontinua e illimitata.



3. $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| = f(x)$$



f_n è derivabile $\forall n$, $f_n \in C^1[-1, 1]$
 f è continua ma non derivabile

La nozione di convergenza puntuale è troppo debole per garantire che la funzione limite conservi le "buone proprietà" delle f_n .

Ci vorrà una nozione più impegnativa di convergenza.

Convergenza uniforme

Def: Siamo $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $f_n \rightarrow f$ uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Confronto con $f_n \rightarrow f$ puntualemente.

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

non può dipendere da x e da n

non può dipendere solo da ε

Formulazione alternativa della conv. unif.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_{C^0(I)}} \leq \varepsilon$$

"la convergenza uniforme è la convergenza in norma C^0 ".

Significato geometrico della conv. unif.:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

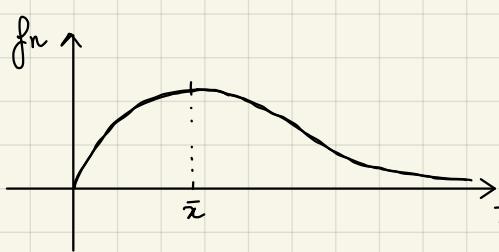
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0$ il grafico di f cade totalmente nella "striscia"



Ese: $f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$ $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Per x fissato e $n \rightarrow \infty$ $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \quad f(x) = 0$
 $f_n \rightarrow f$ $f_n \rightarrow 0$ puntualmente in $(0, +\infty)$

$f_n \rightarrow 0$ anche uniformemente in $(0, +\infty)$? Cioè:
 $\sup_{x \in [0, +\infty)} |f_n(x)| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$?
 Il modulo si può togliere



Calcolo il massimo:

$$f'_n(x) = n e^{-n^2 x^2} (1 - 2n^2 x^2) \geq 0 \quad \text{per } x^2 \leq \frac{1}{2n^2}$$

$$x \bar{x} \leq \frac{1}{2n^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è p.t.o di max.}$$

$$\max_{x \in [0, +\infty)} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$$

$\Rightarrow \|f_n\|_{C^0[0, +\infty)} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ quindi
 f_n NON tende a f uniformemente

Altro modo per dimostrare che la conv. NON è unif.

$$f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$$

$$\text{Ad es. } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{e} \quad \text{dunque } \|f_n\|_{C^0} \geq \frac{1}{e}$$

perciò $f_n \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ quindi f_n non conv. unif.

Sull'intervallo $[\delta, +\infty)$ (per $\delta > 0$) la conv. è uniforme
 $\max_{x \in [\delta, +\infty)} f_n(x) = f_n(\delta) \rightarrow 0$
per n abbastanza grandi

Teorema (convergenza uniforme e continuità)

Sia $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che $f_n \rightarrow f$ unif. in I . Se tutte le f_n sono continue in $\bar{x} \in I$, allora anche f è continua in \bar{x} .

("Il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continua")

Dim: devo dimostrare che f è cont. cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in I \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Suppongo che $f_n \rightarrow f$ unif. cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \text{ si ha } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Fissiamo n_0 come sopra e scriviamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| + |f_{n_0}(\bar{x}) - f(\bar{x})| \\ &< 2\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| \end{aligned} \quad \hookrightarrow \text{disug. triang.}$$

Poiché f_{n_0} è continua in \bar{x} , per $\varepsilon > 0$ fissato $\exists \delta > 0$ t.c.
 $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| < \varepsilon$

Allora se $|x - \bar{x}| < \delta$ si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

Abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in I \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < 3\varepsilon$$

Voglio dimostrare che lo spazio $C^0[a, b]$, con la norma C^0 , è completo (spazio di Banach)

Mi serve prima questo risultato:

Teorema

Sia $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che la succ. $\{f_n\}$ soddisfi:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Allora $\exists f: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

(Vale anche il viceversa: se $f_n \rightarrow f$ unif. allora $\{f_n\}$ soddisfa la $(*)$)

La $(*)$ si chiama "condizione di Cauchy per la conv. unif."

Se (X, d) è uno sp. metrico, $\{x_n\}$ è di Cauchy se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno sp. vett. normato, $\{f_n\}$ è di Cauchy se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Dim: 1) mostriamo che $\exists f: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I
2) mostriamo che $f_n \rightarrow f$ unif.

1) Mostriamo che fissato comunque $\bar{x} \in I$, la succ. $f_n(\bar{x})$ è conv. (a un limite finito $f(\bar{x})$)

Hp: $(*) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall \bar{x} \in I$
in particolare $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon$

Ossia la succ. $\{f_n(\bar{x})\}$ (è una succ. di numeri reali) è di Cauchy in \mathbb{R} . Ma \mathbb{R} è COMPLETO

Quindi $\{f_n(\bar{x})\}$ è convergente a un certo limite $f(\bar{x})$.

\bar{x} è un x qualsiasi in I , perciò ho provato che $\exists f: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \rightarrow f$ puntualmente in I .

2) Mostriamo che $f_n \rightarrow f$ unif.

Hp: $(*) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

$$\underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_m(x)|}_{|f_n(x) - f(x)|} \leq \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I$ cioè $f_n \rightarrow f$ unif.

Teorema Lo spazio $C^0[a, b]$ con la norma C^0 è completo
(spazio di Banach)

Dim: $C^0[a, b] \quad \|f\|_{C^0[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Sappiamo già che è uno sp. vett. normato
Mostriamo che è completo.

Sia $\{f_n\}$ di Cauchy in $C^0[a, b]$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \|f_n - f_m\|_{C^0[a, b]} < \varepsilon$$

Allora la succ $\{f_n\}$ soddisfa la "cond. di Cauchy per la conv. unif." e per il teo. precedente: $\exists f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \xrightarrow{n} f$ unif.

Poiché le f_n sono continue e $f_n \rightarrow f$ unif., anche f è continua ($f \in C^0[a, b]$)

Dire che $f_n \rightarrow f$ unif. significa che $\|f_n - f\|_{C^0[a, b]} \rightarrow 0$ cioè $f_n \rightarrow f$ in $C^0[a, b]$. Quindi $\{f_n\}$ è convergente in C^0 e $C^0[a, b]$ è completo.

Più in generale se K è un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^n $C^0(K)$ con $\|f\|_{C^0(K)} = \max_{\vec{x} \in K} |f(\vec{x})|$ è uno sp. vett. normato completo

Osservazioni sintattiche su quando scrivere f o $f(x)$

Si scrive $\|f\|_{C^0[a, b]}$ e NON $\|f(x)\|_{C^0[a, b]}$

$$\|f\|_{C^0[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ oppure $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ SI

$f_n(x) \rightarrow f$ NO $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ NO

Se le f_n hanno una certa proprietà e $f_n \rightarrow f$, anche la f ha quella proprietà?

In generale NO (dipende soprattutto dal tipo di conv.)

1. $f_n \rightarrow f$ unif. e f_n è cont., allora anche f è cont.
(convergenza uniforme e continuità)

2. Teorema (conv. unif. e limitatezza)

Siano $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$), $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e f_n limitate, se $f_n \rightarrow f$ unif. allora anche f è limitata

3. Teorema (conv. unif. e integrabilità)

Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrabili e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f_n \rightarrow f$ unif. in $[a, b]$ allora f è Riemann-integrabile e $\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ per $n \rightarrow +\infty$.

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

"Si scambiano tra loro limite e integrale"

4. Conv. unif. e derivabilità

Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f_n derivabile. $f_n \rightarrow f$ uniformemente. È vero che f è derivabile? NO

Ad es: $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}} \in C^1[-1, 1]$ $f_n(x) \rightarrow |x| = f(x)$ che non è derivabile
 $f_n \rightarrow f$ unif.

$$f'_n(x) = (1 + \frac{1}{n}) |x|^{\frac{1}{n}} \text{ sign}(x) = \begin{cases} (1 + \frac{1}{n}) x^{\frac{1}{n}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -(1 + \frac{1}{n}) x^{\frac{1}{n}} & x < 0 \end{cases}$$

Idea: se f_n sono derivabili e $f_n \rightarrow f$ forse per ottenere che f sia derivabile occorre che f'_n converga uniformemente a una certa funzione.

Teorema Siano $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili nell'intervallo I e supponiamo che:

- 1) $\exists f: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \rightarrow f$ punt. in I
- 2) $\exists g: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f'_n \rightarrow g$ unif. in I

Allora:

- 1) f è derivabile
- 2) $f' = g$ (perciò $f'_n \rightarrow f'$ unif.)
- 3) $f_n \rightarrow f$ unif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$$

"Si scambiano tra loro limite e derivata"

Teorema: Lo spazio vettoriale normato $C[a, b]$ con la norma $\|f\|_{C[a, b]} = \|f\|_{C^0[a, b]} + \|f'\|_{C^1[a, b]}$ è completo.

Spazi di funzioni continue su tutto \mathbb{R}

$C^\infty(\mathbb{R})$ non ha una norma naturale

$$C_b^\circ(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata (e continua)}\}$$

$$C_*^\circ(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty \text{ (e } f \text{ continua)}\}$$

$$C_0^\circ(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid (f \text{ continua e } f \neq 0 \text{ solo in un I limitato})\}$$

"a supporto compatto"

$$\underbrace{C_0^\circ(\mathbb{R}) \subseteq C_*^\circ(\mathbb{R}) \subseteq C_b^\circ(\mathbb{R})}_{\text{sp. vett. normato con norma naturale (dell'estremo sup)}} \subseteq \underbrace{C^\circ(\mathbb{R})}_{\text{sp. vett. non normato}}$$

sp. vett. normato con norma naturale (dell'estremo sup)

sp. vett. non normato

→ Questi 3 sp. normati sono COMPLETI?

Se $\{f_n\}$ è di Cauchy in uno di questi 3 spazi:

$\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $f_n \rightarrow f$ unif (in norma C°)

⇒ $C_b^\circ(\mathbb{R})$ e $C_*^\circ(\mathbb{R})$ sono sp. di Banach

$C_0^\circ(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. normato non completo

Funzioni infinitamente derivabili

$C^\infty[a, b]$ è uno sp. vett. È normato?

$$\|f\|_C \quad \|f\|_{C^1} \quad \|f\|_{C^k} \quad \|f\|_{L^\infty}$$

SÍ, posso renderlo normato con tante norme diverse

Ce n'è una che lo rende completo? NO

$$\|f\|_{C^\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \|f^{(k)}\|_{L^\infty} \rightarrow \text{diverge!} \text{ (il più delle volte, e.g. } f(x) = e^x)$$

NON esiste una norma "naturale" nello spazio $C^\infty[a,b]$ che lo renda completo.

Spazio di f. infinitamente derivabili in \mathbb{R}

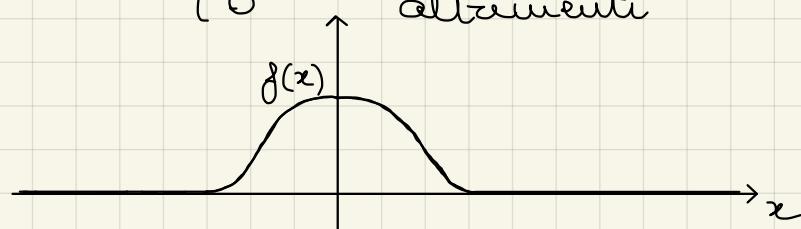
$C^\infty(\mathbb{R})$ non è normato

$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile infinite volte e}\}$
 a supporto compatto

..... > esistono funzioni con queste proprietà?

Esempio: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}} & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ✓



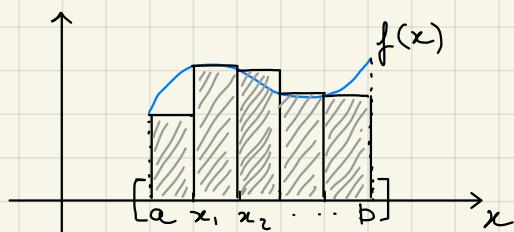
$C_c^\infty(\mathbb{R})$ ha una norma? Posso mettere molte norme diverse in questo spazio, ma con nessuna di queste risulterà completo.

Integrale di Lebesgue

Integrale di Riemann

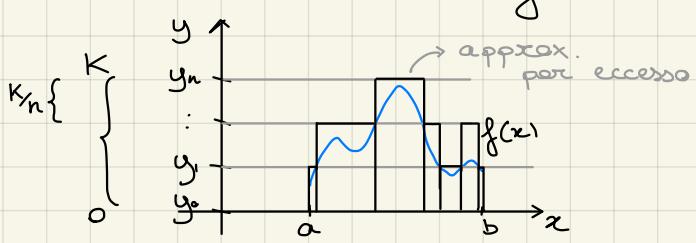
|Approx. per eccesso -
" difetto" | ≤

$$\leq \sum |x_k - x_{k-1}| \underbrace{|\sup f - \inf f|}_{\text{ }} \leq K \sum |x_k - x_{k-1}| = (b-a)K$$



Anche per funzioni fini in $[a,b]$, se la funzione f oscilla molto (ad esempio ha molti punti di discontinuità) l'errore di approssimazione potrebbe non tendere a 0.

Somme di Lebesgue: $S_u^- = \sum_{k=0}^{n-1} y_k | \{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}|$



$S_u^+ = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} | \{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}|$

$$S_u^+ - S_u^- = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) | \{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}|$$

$$= \frac{K}{n} \sum | \{ \dots \} | = \frac{K}{n} (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$| \{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}|$ misura dell' insieme

$\{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$ quest' insieme come è fatto?

Non per forza è un intervallo.

Potrebbe essere unione di "tanti intervalli"

Per fare funzionare l'idea di Lebesgue abbiamo bisogno di saper misurare la "lunghezza" anche di sottinsieme "complicati" della retta.

es: funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \{x \in [0, 1] \mid \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

Quanto misura la lunghezza di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
" " " " " "($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$?

Per costruire una buona teoria dell'integrazione che utilizzi l'algoritmo delle "norme di Lebesgue" abbiamo bisogno di una buona TEORIA della MISURA.

Capite cos'è la misura di un insieme anche molt. complicato.

Vedremo che non tutti gli insiemi sono "misurabili".

Qual è la famiglia di sottinsiemi di \mathbb{R} per cui può essere definita la misura?

- Si studiano in astratto certe famiglie di sottoset di un certo insieme ambiente Ω ($= \mathbb{R}, \mathbb{R}^k, \dots$)
- Si studiano certe funzioni "misura" che ad ogni insieme misurabile associano un numero
- Si studiano le funzioni ("misurabili") per cui ogni insieme del tipo $\{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\}$ è misurabile
- Si definirà l'integrale basato sulle somme di Lebesgue

Teoria della misura "alla Lebesgue"

Sia Ω un insieme qualsiasi. Sia $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle parti di Ω , cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω .

$$\text{es: } \Omega = \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$$

$$\Omega \in \mathcal{P}(\Omega), \quad 1 \in \Omega, \quad \{1\} \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \{1\} \subseteq \Omega$$

Def: Sia Ω un insieme qualsiasi. Si dice σ -algebra (in Ω) una qualsiasi famiglia \mathcal{M} di sottoset di Ω (cioè $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) tale che:

- 1) $\Omega \in \mathcal{M}$ (A^c complementare di A, $A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$)
- 2) $\forall A \in \mathcal{M}$ sia $A^c \in \mathcal{M}$ (\mathcal{M} chiusa per complementari)
- 3) \mathcal{M} è chiusa per unioni numerabili, cioè se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{M}$ allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Esempi: La σ -algebra più piccola (per qualsiasi insieme Ω) è $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$

La σ -algebra più grande è $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$

Teorema Se \mathcal{M} è una σ -algebra in Ω allora \mathcal{M} è chiusa anche rispetto a:

- insiemi finiti
- intersezione di una succ. di insiemi o di un numero finito
- differenza insiemistica

Se Ω è un insieme e M una σ -algebra su Ω ,
 (Ω, M) si dirà SPAZIO MISURABILE.

Gli elementi di M si chiameranno anche "insiemi misurabili".

Def: Sia (Ω, M) uno sp. misurabile. Si dice misura su (Ω, M) una funzione $\mu: M \rightarrow [0, +\infty]$ tale che μ sia numerabilmente additiva, cioè:

$$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \quad A_n \in M \quad \text{si ha } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

↓
a 2 a 2 disgiunti, cioè
 $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$

Esempi (di misure): 1. Misura del conteggio

Sia Ω qualsiasi, $M = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mu(A) = \begin{cases} \text{se } A \text{ insieme finito, } \mu(A) = \text{nº di elementi di } A \\ \text{se } A \text{ " infinito, } \mu(A) = +\infty \end{cases}$$

2. Misura atomica di Dirac

Sia Ω qualsiasi, $M = \mathcal{P}(\Omega)$. Fissiamo un $x_0 \in \Omega$

$$\text{"Misura di Dirac centrata in } x_0\text{" } \mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$$

Se μ è una misura su (Ω, M) si dirà che (Ω, M, μ) è uno SPAZIO DI MISURA

Gli spazi di misura ereditano ulteriori proprietà dagli assiomi già discussi.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

Supponiamo che $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$

Sia $B \subseteq A$. Posso dire che $\mu(B) = 0$?

(μ è monotona: $\forall A, B \in \mathcal{M}, B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) \leq \overset{\circ}{\mu}(A)$)

Posso dire pur di sapere che B è misurabile

Def: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. Si dice che la misura μ è completa se

$\forall A \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(A) = 0$, $\forall B \subseteq A$ si ha $B \in \mathcal{M}$ (e quindi $\mu(B) = 0$)

(μ è completa se tutti i sottosistemi degli insiemini di misura nulla sono misurabili)

Teorema (esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n)

Esiste una σ -algebra $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una misura μ su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ che chiameremo misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n con le seguenti proprietà:

1. La σ -algebra \mathcal{L} contiene in particolare tutti gli insiemini aperti, chiusi, le unioni e intersezioni di famiglie numerabili di aperti o chiusi. (In pratica \mathcal{L} contiene tutti gli insiemini che riusciamo a definire costruttivamente. Tuttavia è noto che $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).
2. Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è una n-cellula cioè: $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ allora $\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|$.
Ne segue che la misura di Lebesgue degli insiemini elementari coincide con la misura elementare (arie di poligoni, volumi di poliedri, sfere ...).
3. μ è invariante per traslazioni.
4. La misura di Lebesgue è completa.

5. Se $E \in \mathcal{L}$, $\mu(E) = \inf \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \text{ dove } \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ sono n-celle e } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq E \right]$

é come se ricegrissi E di rettangoli sempre più piccoli la cui unione approssimi il meglio possibile la superficie di E

Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) = |b_1 - a_1| \times \dots \times |b_n - a_n|$$

$\mu(x) = 0 \rightarrow$ I punti hanno misura nulla

Per la numerabile additività, ogni sottinsieme numerabile di \mathbb{R}^n è misurabile e ha misura (di Lebesgue) nulla.

Ese: In \mathbb{R} : $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile, ha misura 0
 $[0, 1] \cap [\mathbb{R}/\mathbb{Q}]$ per differenza, ha misura 1

In \mathbb{R}^2 , una retta ha misura nulla (esempio in \mathbb{R}^2 non numerabile ma di misura 0)

In \mathbb{R} , esistono sottinsiemi non numerabili ma di misura nulla?

Sì, ma non è facile fare un esempio ("insieme terzario di Cantor").

Se cambia la misura, questi esempi non sono più validi:

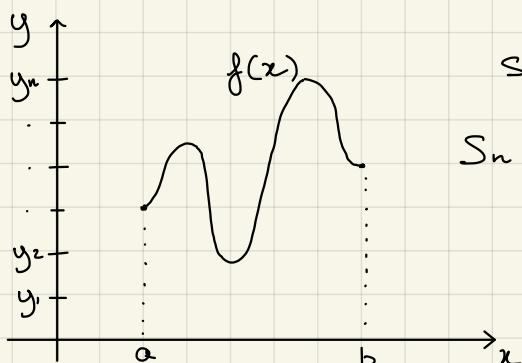
In \mathbb{R} , μ = misura del conteggio
Gli insiemi numerabili hanno misura +∞ (rispetto a questa μ)

Misura di Lebesgue in \mathbb{R}

Esiste un insieme non Lebesgue-misurabile?

Sì, ma non è (per niente) facile fare un esempio

Funzioni misurabili



somme integrali "alla Lebesgue"

$$S_n = \sum_{k=1}^n y_k \underbrace{| \{x \in [a, b] \mid y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}|}_{\oplus}$$

Non bisogna sapere se questo insieme è misurabile

de funzioni misurabili, che ora definiremo, sono quelle per cui si può garantire che gli insiemi \bigoplus sono misurabili, e quindi per queste funzioni potremo definire le stesse integrali alla Lebesgue.

Teorema Sia (Ω, \mathcal{M}) uno spazio misurabile, e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- 1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$
- 2) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$
- 3) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$
- 4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

Def: Sia (Ω, \mathcal{M}) uno sp. misurabile, e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è misurabile se soddisfa una delle 4 proprietà del teo. precedente.

Se f è misurabile, ad esempio è vero anche:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega \mid a \leq f(x) < b\} \in \mathcal{M}$$

Relazione tra insieme misurabile e funzione misurabile

$$(\Omega, \mathcal{M}) \quad E \subseteq \Omega \quad f(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

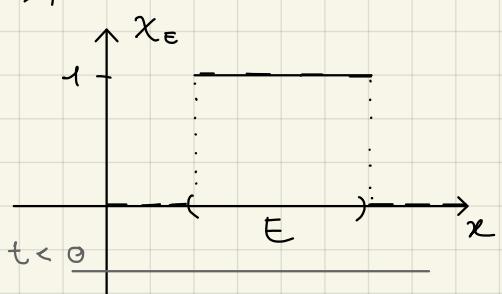
funzione
caratteristica
(o indicatrice)
di E

f è misurabile?

$$\begin{aligned} & \{x \in \Omega \mid \chi_E(x) > t\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } t < 0 \\ E & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \emptyset & \text{se } t \geq 1 \end{cases} \\ & = \{x \in \mathbb{R} \mid \chi_E(x) > t\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } t < 0 \\ E & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \emptyset & \text{se } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{M}$ $\forall \sigma$ -algebra!

$E \in \mathcal{M} \iff \chi_E$ è misurabile



Se μ è la misura di Lebesgue in \mathbb{R} , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$ è un insieme aperto, quindi è \mathcal{L} -misurabile. Perciò:

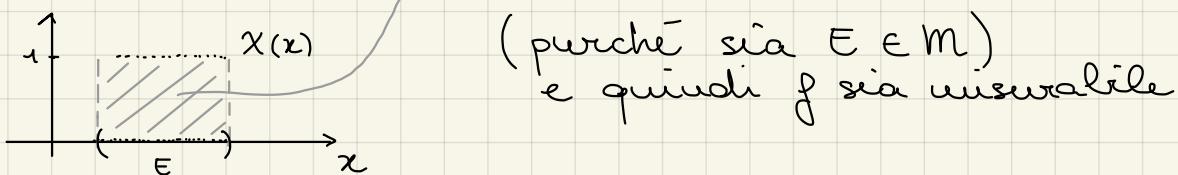
"Ogni funzione continua è \mathcal{L} -misurabile"

Fissato uno sp. misurabile (Ω, \mathcal{M}) , l'insieme delle funzioni $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili è chiuso rispetto a molte operazioni.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. verso la def. di integrale
(rispetto a una misura
qualsiasi)
Vogliamo definire $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$ per $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Audiamo per successive passi di generalità:

$$1. f(x) = X_E(x) \quad \int_{\Omega} X_E(x) d\mu(x) = \mu(E)$$



$$2. \text{ Sia } f(x) = c_1 X_{E_1}(x) + \dots + c_n X_{E_n}(x) \text{ con } E_1, \dots, E_n \text{ misurabili, } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = ?$ Se vogliamo che l'integrale sia lineare dovrà porre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n c_i X_{E_i}(x) \right) d\mu(x) &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} X_{E_i}(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i) \end{aligned}$$

Le funzioni di questo tipo, cioè che sono combinazione lineare di un n finito di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili si dicono "funzioni semplici"

Def: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura.

Si dice **funzione semplice** su Ω una funzione $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1) $s(x)$ è misurabile

2) $s(x)$ assume solo un n° finito di valori distinti

In questo caso se chiamiamo $c_1 \dots c_n$ i valori assunti da $s(x)$ e $E_i = \{x \in \Omega \mid s(x) = c_i\}$ allora $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ dove $E_1 \dots E_n$ sono misurabili (e assieme rappresentano una partizione di Ω).

Equivalentemente: funzione semplice è una funzione

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x) \text{ con } E_1, \dots, E_n \subset \Omega \text{ e } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

3. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile qualsiasi, l'idea è approssimarla mediante funzioni semplici (l'integrale di f sarà definito a partire dagli integrali delle funzioni semplici approssimanti). Così facendo ritroviamo l'idea di somme integrali alla Lebesgue

$$f: \Omega \rightarrow [0, +\infty) \text{ misurabile}$$

Teorema (di approssimazione)

Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno sp. di misura e sia $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora \exists una successione $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ di funzioni semplici $s_k: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ tali che

$$\underline{s_k(x) \rightarrow f(x) \text{ per } k \rightarrow +\infty}$$

$$\begin{cases} s_k(x) \rightarrow f(x) \text{ per (q.o.) } x \in \Omega \text{ e } k \rightarrow +\infty \\ s_k(x) \leq s_{k+1}(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall k \end{cases}$$

Inoltre se la f è limitata $s_k \rightarrow f$ uniformemente in Ω .

Def Se $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_k(x) d\mu(x) \text{ con } \{s_k\} \text{ come nel teo. precedente}$$

(Questo limite \exists sempre, finito o infinito)

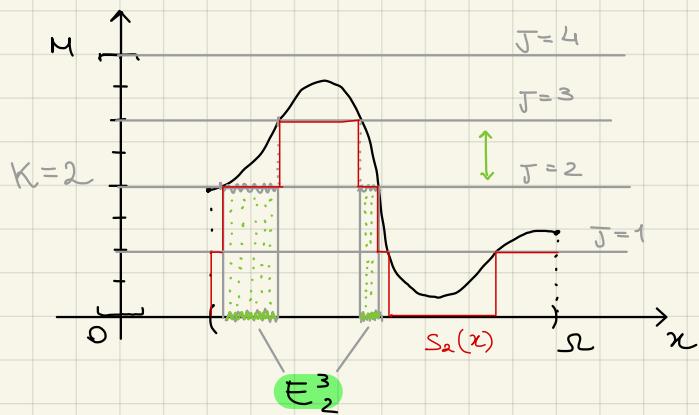
Quindi $\forall f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile $\exists \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \in [0, +\infty]$ (l'integrale di una funzione misurabile è non negativa esiste sempre, finito o infinito)

Più in generale risulta:

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sup \left\{ \int_{\Omega} s(x) d\mu(x) \mid s: \Omega \rightarrow [0, +\infty) \text{ semplice} \right. \\ \left. \text{e } s(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

Dimostrazione del teo. di approssimazione, nel caso di f limitata, cioè: $f: \Omega \rightarrow [0, M] \quad M > 0$

Diciamo come si costruiscono esplicitamente le $s_k(x)$



Al passo k della costruzione, divide il codominio $[0, M]$ in 2^k parti uguali

$$J = 1, 2, \dots, 2^k$$

$$E_k^J = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{M}{2^k}(J-1) \leq f(x) < \frac{M}{2^k}J \right\}$$

$$s_k(x) = \sum_{J=1}^k \frac{M}{2^k}(J-1) \chi_{E_k^J}(x) \quad (s_k \leq f)$$

$$0 \leq f(x) - s_k(x) \leq \frac{M}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

$$\rightarrow \sup_{x \in \Omega} |f(x) - s_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}$$

c'è convergenza uniforme!

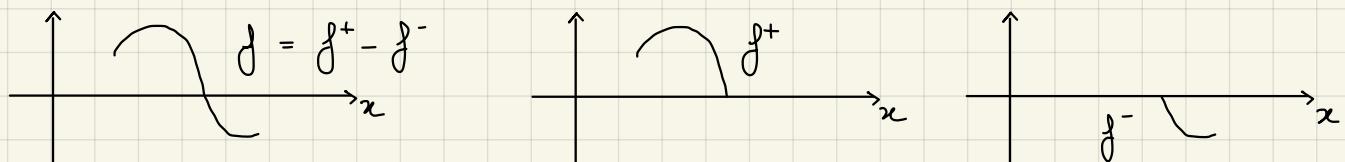
} suddividere l'intervallo $[0, M]$ in 2^k parti uguali significa che al passo k posso tenere ancora valida la divisione fatta al passo $k-1$ (semplifica il lavoro dell'algoritmo)

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_k(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{J=1}^k \frac{M}{2^k}(J-1) \mu(E_k^J)}$$

Questo consente di definire l'integrale di una qualsiasi funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e non negativa
(NB: questo integrale può essere finito o infinito)

es: $\chi_{\mathbb{Q}}$ funzione di Dirichlet $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x) dx = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$
è numerabile

4. Cosa si fa se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile di segno qualsiasi?



$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

f^+ e f^- sono misurabili e ≥ 0 quindi $\exists \int_{\Omega} f^+(x) d\mu(x)$ e $\int_{\Omega} f^-(x) d\mu(x)$ (finiti o infiniti)

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) := \int_{\Omega} f^+(x) d\mu(x) - \int_{\Omega} f^-(x) d\mu(x)$$



Def: Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Si dice che è integrabile se

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) < +\infty. \quad \text{In tal caso si pone:}$$

$$\left(\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f^+(x) d\mu(x) - \int_{\Omega} f^-(x) d\mu(x) \right) \in \mathbb{R}$$

questo implica che siano finiti
 $f^+ \leq |f| \quad f^- \leq |f|$

Ovvero, si dice che f è integrabile se:

1. f è misurabile
2. $\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) < +\infty$

NB: f misur. $\Leftrightarrow |f|$ misur.

es: sia $E \subseteq \Omega$ NON misurabile. Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \notin E \end{cases}$

$\rightarrow f$ NON è misurabile perché ad esempio $\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} = E$ non è misurabile. Perso $|f(x)| = 1$ è misurabile!

5. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \operatorname{Re}[f(x)] + i \operatorname{Im}[f(x)]$$

$$\text{Idea: } \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} \operatorname{Re}[f(x)] d\mu(x) + i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[f(x)] d\mu(x) \quad \#$$

Def: si dice che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è integrabile se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono misurabili e $\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) < +\infty$.

In questo caso si pone $\#$

Oss: caso particolare. Se $\mu(\Omega) < +\infty$ e f è misurabile e limitata, certamente f è integrabile.

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega$$

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) \leq M\mu(\Omega) < +\infty$$

Ad esempio, per l'integrale di Lebesgue in \mathbb{R} , se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e limitata, f è Lebesgue-integrabile.

es: la f. di Dirichlet è L^1 -integrabile in (a, b)

$$\int_a^b \chi_Q(x) d\mu(x) = 0$$

ma non
 R -integrabile!

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura (misura completa)

$$L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^1(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ misur. e } \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) < +\infty\}$$

$L^1(\Omega)$ è uno sp. vettoriale.

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) \text{ è una norma?}$$

Proprietà della norma:

• la linearità dell'integrale di L
• la monotonia dell'integrale di L

$$\begin{aligned} 3. \text{ Disug. triang. } & |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{\Omega} |f(x) + g(x)| d\mu(x) \leq \int_{\Omega} \{|f(x)| + |g(x)|\} d\mu(x) = \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) + \int_{\Omega} |g(x)| d\mu(x) \\ 2. \text{ Omogeneità } & \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda f\|_{L^1} = \\ & = \int_{\Omega} |\lambda| |f(x)| d\mu(x) = |\lambda| \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) = |\lambda| \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

1. Annullamento

$$\|f\|_{L^1} = 0 \rightarrow \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

questa norma non soddisfa la proprietà di annullamento

Introduciamo nello sp. vett. $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ una relazione d'equivalenza dicendo:

$$f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \quad f \sim g \quad (\text{f equivalente a g}) \text{ se } f(x) = g(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

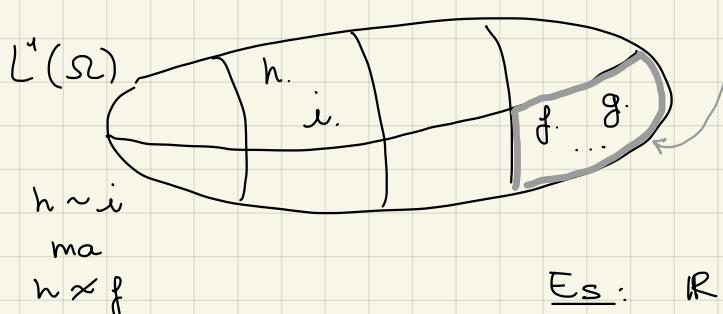
(es: per la misura di Lebesgue $\chi_Q \sim 0$)

Si verifica che la relazione " \sim " soddisfa le proprietà.

1. Riflessiva $\forall f \in L^1(\Omega) \quad f \sim f$
2. Simmetrica $\forall f \in L^1(\Omega) \quad f \sim g \Rightarrow g \sim f$
3. Transitiva $\forall f, g, h \in L^1(\Omega) \quad f \sim g \text{ e } g \sim h \Rightarrow f \sim h$

Si dice che \sim è una relazione d'equivalenza in $L^1(\Omega, M, \mu)$.

$L^1(\Omega, M, \mu)$ risulta suddiviso in classi d'equivalenza



$\{f\}$ = classe d'equivalenza a cui appartiene f , cioè:
 $\{f\} = \{g \in L^1 \mid g \sim f\}$

Esempio: \mathbb{R} con la misura di Lebesgue

$$\{0\} = \{f \in L^1 \mid f(x) = 0 \text{ q.o.}\} \quad *$$

$$= \{\chi_Q, \chi_{\{1,2,3\}}, \dots\}$$

* q.o. sta per "quasi ovunque" o "quasi ogni" e significa tranne che in un insieme di misura nulla

Considero ora, invece che lo spazio $L^1(\Omega, M, \mu)$ delle funzioni integrali, lo spazio delle classi d'equivalenza delle funzioni integrali:

$$L^1(\Omega, M, \mu) = \{[f] \mid f \in L^1(\Omega, M, \mu)\}$$

Anche $L^1(\Omega, M, \mu)$ è uno sp. vett..

$L^1(\Omega, M, \mu)$ è uno sp. vett. con la norma:

$$\|[f]\|_{L^1(\Omega, M, \mu)} = \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x)$$

$$\|[f]\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ q.o.}$$

$$![f] = [0] \quad \begin{matrix} \uparrow \\ f \sim 0 \end{matrix}$$

questo è la zero dello sp. vett.!

Si verifica che $(L^1, \|\cdot\|)$ è uno sp. vett. normato.

Altre proprietà dell'integrale di Lebesgue

→ Additività rispetto all'insieme di integrazione

$$\int_{A \cup B} f(x) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_B f(x) d\mu(x) \text{ perché } A \cap B = \emptyset$$

→ Per l'integrale di Lebesgue vale anche una proprietà di numerabile additività



Teorema Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x)$$

dove qualunque dei 2
(membri può essere)
finito o no

Congruenza: definiamo una nuova funzione d'insieme $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$

$$\forall E \in \mathcal{M} \quad \nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

Teorema Questa ν è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$

Dim ν è numerabilmente additiva se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$
 $E_n \cap E_m = \emptyset \quad \forall n \neq m \quad \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$
 quindi ν è una misura $\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) d\mu(x)$
 per il teo. precedente

$$\text{Es: } (\mathbb{R}, \mathcal{L}, dx) \quad f(x) = e^{-x^2}$$

$$\nu(E) = \int_E e^{-x^2} dx \quad \forall E \in \mathcal{L} \quad \text{"misura gaussiana"}$$

La misura definita col procedimento precedente

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x) \quad \text{si dice misura con peso } f \text{ o con densità } f \text{ (rispetto alla misura } \mu\text{)}$$

$$\text{Si scrive } d\nu = f(x) d\mu$$

Teorema Se $d\nu = f(x) d\mu$ allora per $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

$$\int_{\Omega} g(x) d\nu(x) = \int_{\Omega} g(x) f(x) d\mu(x)$$

Esempio: sulla retta, $d\nu = e^{-x^2} dx$. $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-x^2} d\mu(x)$

Confronto tra integrale di Riemann e integrale di Lebesgue in \mathbb{R}^n

1. Integrale di Riemann. Si considerino funzioni $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, e f limitata.

Quale sono le funzioni Riemann-integrabili?

Ad es., se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora è R-integrabile

se f è limitata e continua a tratti, allora è R-int.

Ma più in generale? Si riesce a caratterizzare l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili?

Teorema Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora f è Riemann-integrabile se e solo se f è continua q. o., cioè se e solo se l'insieme di punti in cui f è discontinua ha misura di Lebesgue nulla.

Esempio: la funz. di Dirichlet non è Riemann-int. perché è discontinua ovunque.

Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, allora f è Lebesgue-integrabile se e solo se è misurabile.

Quindi: se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, allora f R-int \Rightarrow f L-int (con le stesse integrale)

Integrale di Riemann generalizzato (ad es. su $(0, +\infty)$)

Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia R-int su ogni intervallo di tipo $(0, k)$. Si dice che è R-int in senso generalizzato se esiste finito $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k f(x) dx$.

Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia misurabile. Si dice che è L-int se esiste finito $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$

Esistono esempi di funzioni che hanno int. di Riemann generalizzato convergente e integrale di Lebesgue divergente. Questo è possibile solo con funzioni che cambiano segno infinite volte.

Se invece l'integrale generalizzato di Riemann $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ allora f è anche Lebesgue-integrabile.

Integrazione per successioni di funzioni

Problema: $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura

* per semplicità di espressione indichiamo con L^1 le sp. vett. normato di funzioni con norma $\| \cdot \|_{L^1}$ invece che con L^1 (che è una sp. vett. normato di classi di funzioni)

$$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad f_n \in L^1(\Omega)$$

$f_n \rightarrow f$ puntualmente q.o. in Ω

È vero che $\int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$?

(Nella teoria di Riemann si richiedeva che $f_n \rightarrow f$ uniformemente)

Teorema di Lebesgue (della convergenza dominata)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura (μ completa).

Siano $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili e supponiamo che $\exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f_n \rightarrow f$ per $n \rightarrow +\infty$ q.o. in Ω

Supponiamo che $\exists g \in L^1(\Omega)$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n$ e per q.o. $x \in \Omega$.

Allora le f_n sono integrabili, la f è integrabile,

$$\boxed{\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ e in particolare}}$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \text{ maggiorante integrabile} \\ \text{o dominante integrabile}$$

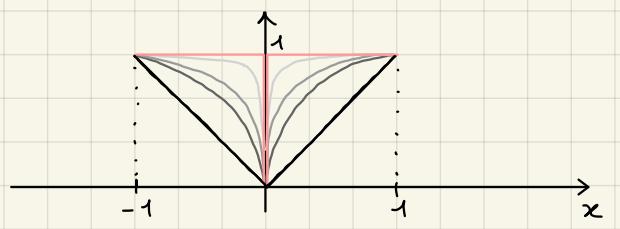
Coseguenze: f_n misurab. e $f_n \rightarrow f$ q.o. $\Rightarrow f$ misurab.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ per q.o. } x, \quad g \in L^1(\Omega) \Rightarrow f_n \in L^1(\Omega)$$

$$(\int_{\Omega} |f_n(x)| d\mu(x) \leq \int_{\Omega} g(x) d\mu(x) < +\infty)$$

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ per q.o. } x \Rightarrow f \in L^1(\Omega)$$

Ese: $f_n(x) = |x|^{1/n}$ $x \in [-1, 1]$



$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

oppure

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ q.o.}$$

$$f_n(x) \leq |f_n(x)| \leq 1 \in L^1[-1, 1] \Rightarrow \int_{-1}^1 |f_n(x) - 1| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

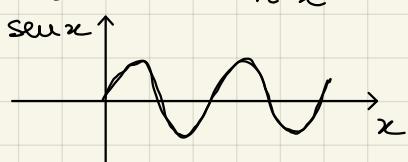
\parallel
 $g(x)$

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2$$

Nella teoria di Riemann:

$f_n \rightarrow f$ NON mis. quindi NON posso applicare il teo. di cacc. degli integrali di Riemann.

Ese: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n x^{3/2}}$ $x \in (0, +\infty)$



n fissato, per $x \rightarrow 0$ $f_n(x) \sim \frac{nx}{n x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ integral. in $(0, 1)$

per $x \rightarrow +\infty$ $\left| \frac{\sin(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n x^{3/2}}$ integral. a $+\infty$

x fissato, per $n \rightarrow +\infty$ $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

È vero che $\int_0^{+\infty} |f_n(x) - 0| dx \rightarrow 0$?

Posso applicare il teo. di Lebesgue? Devo cercare una maggiorante integrabile $g(x)$

$\left| \frac{\sin(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ integrabile in $(1, +\infty)$ ma non in $(0, 1)$

Per $x \in (0, 1]$ $\left| \frac{\sin(nx)}{n x^{3/2}} \right| \leq \frac{nx}{n x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

$$|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0, 1] \\ \frac{1}{x^{3/2}} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

g è pure continua,
anche se non
è richiesto dal teo. di
Lebesgue

$$f_n(x) \leq g(x) \stackrel{L^1(\Omega)}{\ll} \quad \forall n \quad \forall x \in (0, +\infty) = \Omega$$

⇒ posso applicare il teo. di Lebesgue:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Teorema Seia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura, (μ completa) L^1 è uno sp. vett. normato completo.

consegu.

del teo.

di Lebesgue

(Questo è uno sp. di Banach "naturale" di funzioni integrabili)

Applicazione del teo. della convergenza dominante:
proprietà degli integrali dipendenti da un parametro

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura e consideriamo una funzione definita da:

$$f(x) = \int_{\Omega} k(x, y) d\mu(y) \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

y variabile
 x parametro

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ f è ben definita perché, $\forall x \in (a, b)$ fissato, la funzione $y \mapsto k(x, y)$ è integrab. in Ω

Esempi:

- trasformata di Fourier di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} dy$

- trasformata di Laplace di $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $Lf(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} f(t) dt$

In generale: ha una funzione

$$f(x) = \int_{\Omega} k(x, y) d\mu(y) \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

Mi chiedo: f è continua? f è derivabile?
Come si calcola $f'(x)$? (2)

1 Proviamo a dimostrare che f è cont. in $x_0 \in (a, b)$ e vediamo quali ipotesi occorre fare.

Ts: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Prendiamo una generica successione $\{x_n\} \subseteq (a, b)$, $x_n \rightarrow x_0$ e proviamo che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} k(x_n, y) d\mu(y) = \int_{\Omega} k(x_0, y) d\mu(y)$$

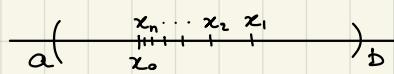
(problema del passaggio del lim dentro l'integrale)

Hip: $k(x, y)$ $\forall x$ fissato, $k(x, \cdot)$ è misurab.
 $(y \mapsto k(x, y))$ è misurab. in $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$

$$K_n(y) = k(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k(x_0, y) = K(y) ?$$

→ Per q.o. $y \in \Omega$ $x \mapsto k(x, y)$ deve essere cont. in x_0 .

Voglio che $\exists g(x) \in L^1(\Omega)$ t.c. $|k(x_n, y)| \leq g(y) \quad \forall y \in \Omega$
 $\forall n$

 ossia: → $|k(x_n, y)| \leq g(y) \in L^1(\Omega) \quad \forall y \in \Omega$
 $\forall n$, e $\forall x$ in un intorno di x_0 .

→ Teorema (continuità degli integrali dipendenti da un parametro)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia $k(x, y) : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- 1) $\forall x \in (a, b)$ $k(x, \cdot)$ è misurabile in Ω
- 2) Per q.o. $y \in \Omega$ $k(\cdot, y)$ è continua in x .
- 3) $\exists g \in L^1(\Omega)$ e \exists un intorno di x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c.
 $|k(x, y)| \leq g(y) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per q.o. $y \in \Omega$

Allora $f(x) = \int_{\Omega} k(x, y) d\mu(y)$ è continua in x_0

$$\text{Es: } \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} dy \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

\hat{f} è ben definita e continua?

$y \mapsto f(y) e^{-2\pi i xy}$ è misurab. in \mathbb{R} ($\forall x$ fissato)
 $x \mapsto f(y) e^{-2\pi i xy}$ è cont. in \mathbb{R} ($\forall y$ fissato>)

$$|f(y) e^{-2\pi i xy}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{aligned} \hat{f} &\text{ è ben definita e} \\ &\text{è continua su tutto } \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) $f(x) = \int_{\Omega} k(x, y) d\mu(y)$. f è derivabile?
Come si calcola $f'(x)$?

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sia $h_n \rightarrow 0$ e consideriamo

x def. di f e lim. dell'integr.

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\Omega} \underbrace{\frac{[K(x_0 + h_n, y) - K(x_0, y)]}{h_n}}_{F_n(y)} d\mu(y)$$

$$\int_{\Omega} F_n(y) d\mu(y) \rightarrow ???$$

$$F_n(y) = \frac{K(x_0 + h_n, y) - K(x_0, y)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial K}{\partial x}(x_0, y) \text{ se } \exists \frac{\partial K}{\partial x} \text{ in } x.$$

Per applicare il teo. di Lebesgue devo trovare una maggiorante integrale $g(y)$

$$\left| \frac{K(x_0 + h_n, y) - K(x_0, y)}{h_n} \right| \leq g(y) \in L^1(\Omega) \quad \text{per q.o. } y \in \Omega$$

Applichiamo il teo. di Lagrange a K rispetto alla variabile x .

$\forall y \in \Omega$ fissato $\exists \bar{x}_n \in [x_0, x_0 + h_n]$ t.c.

$$\frac{K(x_0 + h_n, y) - K(x_0, y)}{h_n} = \frac{\partial K}{\partial x}(\bar{x}_n, y)$$

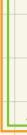
Se sapessi che $\exists g \in L^1(\Omega)$ e me intorno di x_0

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ t.c. } \left| \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \right| \leq g(y) \text{ per q.o. } y \in \Omega$$

$$\text{e } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

potrei applicare il teo. di Lebesgue e concludere che

$$\rightarrow \int_{\Omega} \frac{K(x_0 + h_n, y) - K(x_0, y)}{h_n} d\mu(y) \rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial K(x_0, y)}{\partial x} d\mu(y)}_{f'(x_0)}$$

 **Teorema** (derivazione degli integrali dipendenti da un parametro)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. $(a, b) \subset \mathbb{R}$
 $K: (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

- 1) $\forall x \in (a, b)$ $K(x, \cdot)$ è $L^1(\Omega)$
- 2) Per q.o. $y \in \Omega$ e $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\exists \frac{\partial K(x, y)}{\partial x}$
- 3) $\exists g \in L^1(\Omega)$ t.c. $|\frac{\partial K(x, y)}{\partial x}| \leq g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Allora $\exists f'(x_0) = \int_{\Omega} \frac{\partial K(x_0, y)}{\partial x} d\mu(y)$,

anzi $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \exists f'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} d\mu(y)$.

Ese: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} dy$

\hat{f} è definita e continua su tutto \mathbb{R} .

Se \hat{f} è derivabile, $\hat{f}' = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} [f(y) e^{-2\pi i xy}] dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i xy} dy$$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad y \mapsto f(y) e^{-2\pi i xy}$ sia $L^1(\mathbb{R})$ e $|f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

2) $\exists \frac{\partial}{\partial x} [f(y) e^{-2\pi i xy}] = -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i xy} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

3) $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $\underbrace{| -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i xy} |}_{2\pi |y| |f(y)|} \leq g(y)$

Conclusione: sapevamo già che se $f \in L^1(\mathbb{R})$
allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$.

Ora sappiamo che se anche $|y| f(y) \in L^1(\mathbb{R})$
allora $\exists \hat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i xy} dy$

Esempio: $f(y) = \frac{1}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

$|y| f(y) = \frac{|y|}{1+y^2} \notin L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$ \hat{f} sarà continua, ma non è
derivabile

$f(y) = \frac{1}{1+y^4} \in L^1(\mathbb{R})$

$|y| f(y) = \frac{|y|}{1+y^4} \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$ In questo caso, \hat{f} è continua
e derivabile

Altri spazi di funzioni integrabili. Spazi $L^p(\Omega)$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Diciamo che $f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ per un certo $p \in (0, +\infty)$ se
(anche non intero)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$) misurabile e $\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$
(funzioni "p-integrabili")

- $L^p(\Omega)$ è uno sp. vettoriale?

$$f, g \in L^p(\Omega) \quad |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p$$

Se $p \in (0, +\infty)$ è invece $|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$?

$$p \in (0, 1) \Rightarrow (a+b)^p \leq a^p + b^p \quad a, b \geq 0$$

$$p > 1 \Rightarrow (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \Rightarrow |f(x) + g(x)|^p \leq$$

$$\begin{cases} |f(x)|^p + |g(x)|^p & p \in (0, 1) \\ 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p) & p > 1 \end{cases}$$

In ogni caso, integrando in Ω le disug. precedenti ottengo che

$$f, g \in L^p \Rightarrow f+g \in L^p$$

$\Rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno sp. vettoriale, $\forall p \in (0, +\infty)$

- $L^p(\Omega)$ è normato?

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p} ? \rightarrow \text{NO} \quad (\text{non rispetta l'omogeneità})$$

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p} ? \rightarrow \text{FORSE, devo verificare che soddisfi la disug. triang.}$$

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \leq \begin{cases} \int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p & p \in (0, 1) \\ (2^{p-1})(\int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p) & p > 1 \end{cases}$$

non viene perfezionato

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in (0, 1) \\ (2^{p-1})^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p > 1 \end{cases} \leq C(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$$

Devo cercare un altro modo per dimostrare che questa è una norma



Teorema (diseguaglianza di Minkowsky)

Per $p \geq 1$, $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$ ossia:

gli spazi $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sono sp. vett. normati per $p \in [1, +\infty)$.

Per $p \in (0, 1)$, la "norma L^p " non è una norma valida.

Se, per $p \in (0, 1)$, definiamo $d(f, g) = \int_{\Omega} |f - g|^p$, questa è una distanza.

Perciò gli spazi L^p con $p \in (0, 1)$ sono esempi di sp. vett. metrici ma non normati.

Teorema $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $p \geq 1$ sono sp. di Banach

Esempi: $L^p(\mathbb{R})$ con la μ di Lebesgue

- $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in C_c(\mathbb{R}) \quad f \notin L^1(\mathbb{R})$

ma $|f(x)|^p = \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^p$ è integrabile per $p > 1$

$\rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}) \quad \forall p > 1$ ma non $p = 1$

- $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|^{1/3}}$ è illimitata per $x \rightarrow 0$

$f \in L^t(\mathbb{R}) \quad |f(x)|^p = \frac{e^{-p|x|}}{|x|^{p/3}}$ è ancora integrab. $x \rightarrow +\infty$ ed è anche " $x \rightarrow 0$ "
perché $\frac{p}{3} < 1 \Rightarrow p < 3$

$\rightarrow f \in L^p(\mathbb{R})$ per $1 \leq p < 3$!

Questi due esempi mostrano che: $p_1 < p_2 \not\Rightarrow L^{p_1} \subseteq L^{p_2}$
 $\not\Rightarrow L^{p_2} \subseteq L^{p_1}$

→ Tra spazi L^p con p diverse non valgono inclusioni banali in \mathbb{R}

$L^\infty(\Omega)$ spazio delle funzioni "essenzialmente limitate"

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Si dice che $f \in L^\infty(\Omega)$ se f è misurabile e $\exists K > 0$ t.c.

$$|f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

In questo caso definiamo $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

$$= \inf \left\{ K > 0 \mid |f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega \right\}$$

Equivalentemente: $f \in L^\infty(\Omega)$ se f è uguale q.o. in Ω a una funzione g limitata. In tal caso

$$\sup_{\Omega} |f(x)| = \sup_{\Omega} |g(x)|$$

Se $f \in L^\infty(\Omega)$ allora $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ per q.o. $x \in \Omega$

Sono funzioni $L^\infty(\Omega)$:

- 1) le funz. misurabili e limitate
- 2) " " uguali q.o. a una funz. limitata

Teorema $L^\infty(\Omega, M, \mu)$ è uno sp. vett. normato completo.

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad p \geq 1$$

$$\|f \cdot g\|_p \leq \text{a qualcosa} ???$$

Def Si dice che due numeri $p, q \in (1, +\infty)$ sono esponenti coniugati se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\text{Es: } p = 3 \rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \begin{array}{l} \text{se } p \rightarrow 1^+ \text{ allora } q \rightarrow +\infty \\ \text{e se } p \rightarrow +\infty \text{ allora } q \rightarrow 1^+ \end{array}$$

$\Rightarrow 1 \text{ e } +\infty$ sono esponenti coniugati ($p, q \in [1, +\infty]$)

Teorema (diseguaglianza di Hölder)

Sia (Ω, M, μ) uno sp. di misura. Siano $p, q \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati.

Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Caso particolare: $p = q = 2$, $\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$

diseguaglianza di Cauchy-Schwartz

In \mathbb{R}^n : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

La diseg. (integrale) di Cauchy-Schwarz è una generalizzazione n -dimensionale della diseg. elementare del prodotto scalare

Congruenza:

relazioni di inclusione tra spazi L^p per diversi esponenti p .

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1) \text{ ma } \frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(0,1)$$

$$\frac{1}{x} \in L^2(1,+\infty) \text{ ma } \frac{1}{x} \notin L^1(1,+\infty)$$

Se $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$ allora $|f(x)|^p$ tenderà a zero più velocemente (all'infinito, aumentare l'esponente migliora le cose)

Se $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0$ allora $|f(x)|^p$ tenderà all'infinito più velocemente (al punto, nei punti in cui f è illimitata, aumentare l'esponente peggiora le cose).

Teorema (inclusioni tra spazi L^p su insiemi di misura finita)

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$ e siano $1 < p_1 < p_2 \leq +\infty$.

Allora $L^{p_1}(\Omega) \supseteq L^{p_2}(\Omega)$ e $\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$

Dim: sia $f \in L^{p_2}(\Omega)$, voglio dimostrare che $\int_{\Omega} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) < +\infty$

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p_1} \cdot 1 d\mu(x)$$

Applico la diseg. triang. di Holder a $|f|^{p_1}$ e 1:
scelgo $p = \frac{p_2}{p_1} > 1$ e sia q l'esp. coniugato di p .

$|f|^{p_1} \in L^p$ perché $\int_{\Omega} (|f(x)|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu(x) < +\infty$ poiché $f \in L^{p_2}$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^{p_1})^{p_2/p_1} d\mu(x) \right)^{p_1/p_2} \cdot \left(\int_{\Omega} 1^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p_2} d\mu(x) \right)^{p_1/p_2} \cdot \mu(\Omega)^{1 - \frac{p_1}{p_2}} \end{aligned}$$

Elevando a $\frac{1}{p_1}$ ottengo: $\left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) \right)^{1/p_1} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p_2} d\mu(x) \right)^{1/p_2} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$

$$\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

(Il teo. dice che se il secondo membro finito lo è anche il primo)

Integrali doppi (di Lebesgue)

Consideriamo funzioni $f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$ misurabile

Sotto quali ipotesi valgono le uguaglianze del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, y) dx dy$$

misura di Lebesgue
in \mathbb{R}^{2n}

Teorema (di Fubini - Tonelli)

Sia $f(x, y) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$ misurabile.

1) Se $f(x, y) \geq 0$ in \mathbb{R}^{2n} allora valgono le uguaglianze

$$\bigcirclearrowleft \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, y) dx dy$$

dove ognuno dei termini può essere finito o meno.

2) Se f ha segno qualsiasi (o è complessa) e un integrale iterato di $|f(x, y)|$ è finito, allora vale \bigcirclearrowleft per $|f|$ e anche per f , e questi integrali sono finiti

3) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ allora valgono le conclusioni del p.to 2.

Ese: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y^2} & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$?

$f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ applica il p.to 1

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x+y^2} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x}} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx = \\ = \int_0^1 \left[\frac{\pi/2}{\sqrt{x}} + \frac{\pi/2}{\sqrt{x}} \right] dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \pi [2\sqrt{x}]_0^1 = 2\pi$$

Convoluzione di due funzioni

Siano $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$) misurabili, si definisce **convoluzione** di f e g , e si scrive $f * g$, la funzione

$$[(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy] \quad (\text{purche' l'integrale converge, almeno per q.o. } x \in \mathbb{R}^n)$$

Teorema Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, in particolare $| (f * g)(x) | < +\infty$ per q.o. x . Vale:

$$\| f * g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Dimo: voglio dimostrare che $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ovvero

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| dx < +\infty \\ &\quad (\text{supponendo } F(x, y) = f(x-y) g(y) \text{ misurabile}) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dx \right) dy \\ &\quad \text{tes. di Fubini-Tonelli (integr. iter. di } |f(x-y)g(y)| \geq 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz \right) dy \\ &\quad \xrightarrow{x-y=z, dx=dz} \\ &= \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

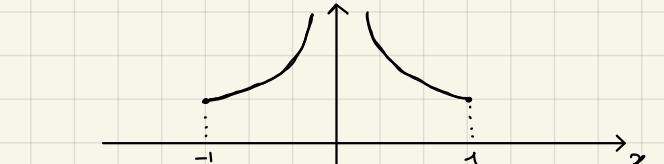
Ese: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ $f * g$ è finita per q.o. x , non $\forall x$

$$f(x) = g(x) = \frac{\chi_{(-1,1)}}{\sqrt{x}}$$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y|} = +\infty$$

in $x=0$ la convoluzione non è finita, ma solo per $x=0$; sarà finita per q.o. x



Proprietà della convoluzione

- commutativa $f * g = g * f$
- associativa $(f * g) * h = f * (g * h)$

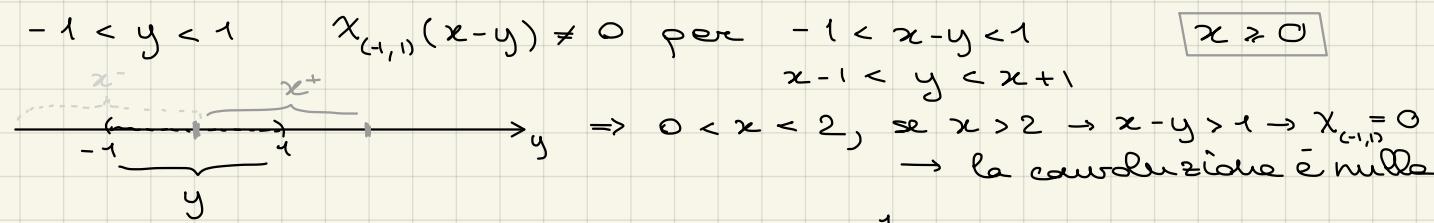
in \mathbb{R} , se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ simmetriche, vale la tabella:

$f * g$	f pari	f dispari
g pari	$f * g$ pari	$f * g$ dispari
g dispari	$f * g$ dispari	$f * g$ pari

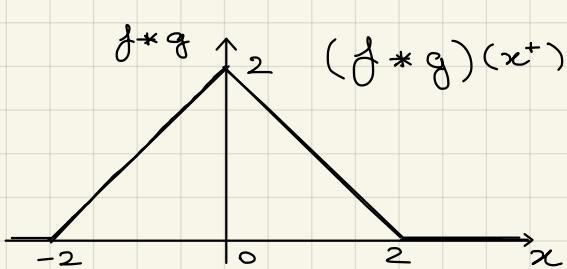
Ese: $f(x) = g(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ $f * g = ?$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x-y) \cdot \chi_{(-1,1)}(y) dy = \int_{-1}^1 \chi_{(-1,1)}(x-y) dy$$

Poiché f e g sono pari, anche $f * g$ è pari. Allora posso calcolarla solo per $x \geq 0$ e poi "simmetrizzarla".



$$f * g = \begin{cases} 0 & 0 < x < 2, \\ & \int_{x-1}^1 dy = 1 - (x-1) = 2-x \\ 0 & x > 2, \end{cases}$$



Esercizi:

- Per quali $p \in [1, +\infty]$ è $f \in L^p(\mathbb{R})$?

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|^{1/2} (1+|x|^{1/3})}$$

f def. per $x \neq 1$, cont. per $x \neq 1$.

Eventuali problemi di integrabilità sono vicini a 1 e ∞ .

$$\text{Per } x \rightarrow 1 \quad f(x) \sim \frac{1}{2|x-1|^{1/2}}$$

$|f(x)|^p$ è integrabile vicino a 1 se lo è $\frac{1}{|x-1|^{p/2}}$
ossia per $p/2 \leq 1$ cioè $\boxed{p \leq 2}$

$$\text{Per } x \rightarrow \infty \quad f(x) \sim \frac{1}{|x|^{1/2+1/p}} = \frac{1}{|x|^{3/5}}$$

$|f(x)|^p$ integrabile all'infinito se lo è $\frac{1}{|x|^{\frac{5}{6}p}}$
cioè $\frac{5}{6}p > 1 \rightarrow \boxed{p > \frac{6}{5}}$

$$\text{Perciò } f \in L^p(\mathbb{R}) \iff p \in \left(\frac{6}{5}, 2\right)$$

- Calcolare $\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{L^1(\mathbb{R})} * \underbrace{x \cdot \chi_{(-1,1)}(x)}_{\substack{\text{pari} \\ L^1(\mathbb{R})}}$ $\Rightarrow \in L^1(\mathbb{R})$
 dispari

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(x-y)^2} y dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln [1 + (y-x)^2] \right]_{-1}^1 + x [\operatorname{arctg}(y-x)]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1 + (1-x)^2}{1 + (1+x)^2} \right] + x [\operatorname{arctg}(1-x) + \operatorname{arctg}(1+x)]$$

- $\underbrace{e^{-x} \chi_{(0,+\infty)}(x)}_{L^1(\mathbb{R})} * \underbrace{\chi_{(-1,0)}(x)}_{L^1(\mathbb{R})} \Rightarrow \in L^1(\mathbb{R})$

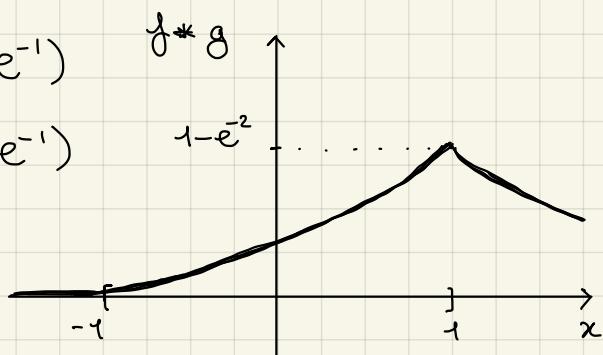
$$(f * g)(x) = \int_{-1}^1 e^{-(x-y)} \chi_{(0,+\infty)}(x-y) dy =$$

$$= e^{-x} \int_{-1}^1 e^y \chi_{(0,+\infty)}(x-y) dy$$

$\chi_{(0,+\infty)}(x-y) \neq 0$
 \downarrow
 $x-y > 0 \rightarrow y < x$
 ma $-1 < y < 1$

$$\Rightarrow (f * g)(x) = \begin{cases} x > 1, & e^{-x} \int_{-1}^1 e^y dy \\ -1 < x < 1, & e^{-x} \int_{-1}^x e^y dy \\ x < 1, & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x > 1, & e^{-x} (e - e^{-1}) \\ -1 < x < 1, & e^{-x} (e^x - e^{-1}) \\ x < 1, & 0 \end{cases}$$



- Dimostrare che la norma L^p con $p \in (0, 1)$ non è una norma valida

Tesi: la norma $L^{p<1}$ non soddisfa la disug. triang.

Dovrebbe essere:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p \right)^{1/p}$$

Se pongo $f(x) = X_{(0,1)}(x)$ e $g(x) = X_{(1,2)}(x)$ diventa:

$$\left(\int_0^2 1^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 1^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_1^2 1^p dx \right)^{1/p}$$

$$2^{1/p} \leq 1^{1/p} + 1^{1/p} = 2 \quad \text{ma } 2^{1/p} > 2 \text{ per } p < 1$$

quindi la norma $L^{p<1}$ non soddisfa la disug. triang.

Approfondimento sugli spazi L^p

in \mathbb{R}

Sappiamo che tra spazi L^p non valgono inclusioni banali.

$$p_1 > p_2 \iff L^{p_1}(\mathbb{R}) \supseteq L^{p_2}(\mathbb{R})$$

$$\iff L^{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq L^{p_2}(\mathbb{R})$$

perciò se lo spazio ambiente ha misura finita ($\mu(\Omega) < +\infty$) allora è vero che

$$p_1 < p_2 \implies L^{p_1}(\Omega) \supseteq L^{p_2}(\Omega)$$

Chiamiamo $\underline{L}_{loc}^p(\mathbb{R}^n) = \{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C}) \mid f \text{ è misurab. e } \forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ limitato è } f \in L^p(\Omega) \}$

Ese: per $n = 1$, $\underline{L}_{loc}^p(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C}) \mid f \text{ è misurabile e } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty \text{ per } -\infty < a < b < +\infty \}$

$\underline{L}_{loc}^p(\mathbb{R})$ è uno sp. vett. (non normato).

Se $p_1 < p_2 \implies \underline{L}_{loc}^{p_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq \underline{L}_{loc}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$

$$\underline{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \supseteq \underline{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \supseteq \underline{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ad es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è integrabile vicino a 0 e in qualsiasi intervallo (a, b) ma non all'infinito.

$f \notin L^p(\mathbb{R})$ ma $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ se $\frac{1}{x^{p/3}}$ integrab. in 0
 $\Rightarrow 1 < p < 3$

Approfondimento sulla convoluzione

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \exists f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Teorema (diseguaglianza di Young)

Sia $p \in [1, +\infty]$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vale:

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^p}$$

Operatori Lineari Continui

Operatore lineare: se V e W sono 2 sp. vett. diciamo che

$T: V \rightarrow W$ è un op. line. se

$$\forall v_1, v_2 \in V \text{ e } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$$

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2).$$

(Se T è un op. lin. di solito si scrive Tv)

V_n, V_m sp. vett di dim. finita n e m , $T: V_n \rightarrow V_m$ è un op. lin.

Fissata una base in V_n e una in V_m l'operatore si rappresenta come moltiplicazione di una matrice $n \times m$ per i vettori.

$$\vec{G} \in V_n \quad \vec{G} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \vec{e}_i \quad T\vec{G} = \sum_{i=1}^n \sigma_i T\vec{e}_i$$

$$T\vec{e}_i \in V_m \quad T\vec{e}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \vec{w}_j; \quad \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \text{ base di } V_m$$

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \text{ base di } V_n$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \longleftrightarrow T$$

Consideriamo l'eq. lin. diff. del 2° ordine:

$$\underbrace{\alpha(x) y'' + \beta(x) y' + \gamma(x) y}_{Ly} = f(x)$$

$$L: C^2[a,b] \longrightarrow C^0[a,b] \quad \text{se } \alpha, \beta, \gamma \in C^0[a,b]$$

$$y \longmapsto \alpha y'' + \beta y' + \gamma y$$

L è un op. lin. tra 2 sp. vett. (di dimensione infinita)

Sia T un op. lin. tra 2 sp. vett. normati X e Y

$$T: X \rightarrow Y \text{ lineare}$$

Cosa vuol dire che T è continuo nel punto $\bar{x} \in X$?

Se $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $Tx_n \rightarrow T\bar{x}$ ossia:

$$\|x_n - \bar{x}\|_X \rightarrow 0 \implies \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \rightarrow 0$$

Teorema Siano X e Y sp. vett. normati e sia $T: X \rightarrow Y$ un op. lin. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

- 1) T è cont. in 0 (cioè $\|x_n\|_X \rightarrow 0 \implies \|Tx_n\|_Y \rightarrow 0$)
- 2) T è cont. in ogni \bar{x} di X (cioè $\forall \bar{x} \in X \quad \|x_n - \bar{x}\|_X \rightarrow 0 \implies \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \rightarrow 0$)
- 3) $\exists K > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X \quad \forall x \in X$
ossia $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

Def Siano X e Y sp. vett. normati e $T: X \rightarrow Y$ un operatore. Si dice che T è continuo (o limitato) se vale una delle tre condizioni equivalenti del Teorema precedente

In tal caso il numero $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ si dice norma dell'operatore T e si indica con $\|T\|_{L(X,Y)}$

$$\begin{aligned} L(X,Y) &= \left\{ T: X \rightarrow Y \mid T \text{ è lin. continuo} \right\} \\ &= \text{spazio di tutti gli op. lin. continui tra } X \text{ e } Y \end{aligned}$$

Esempi: → caso finito dimensionale

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ T: \vec{x} &\rightarrow A\vec{x} \quad A: \text{matrice } m \times n \end{aligned}$$

$$(T\vec{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{con } i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} |(T\vec{x})_i| &\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \quad |a_{ij}| \leq k \quad \forall i,j \\ &\leq K \sum_{j=1}^n |x_j| = K \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

$$\|T\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\| \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } X, Y \text{ hanno dimensione finita} \\ \text{ogni operatore } T: X \rightarrow Y \text{ è continuo} \end{array}$$

→ caso infinito dimensionale

→ Operatori differenziali

$$L: C^2[a,b] \rightarrow C^0[a,b]$$

$$L: y \mapsto \alpha y'' + \beta y' + \gamma y \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in C^0[a,b]$$

L è lineare, mostriamo che è continuo.

$$\begin{aligned} \|Ty\|_{C^0[a,b]} &= \max_{x \in [a,b]} |\alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x)| \\ &= \|\alpha y'' + \beta y' + \gamma y\|_{C^0[a,b]} \leq \|\alpha y''\|_{C^0} + \|\beta y'\|_{C^0} + \|\gamma y\|_{C^0} \\ &\leq \|\alpha\|_{C^0} \|y''\|_{C^0} + \|\beta\|_{C^0} \|y'\|_{C^0} + \|\gamma\|_{C^0} \|y\|_{C^0} \\ &\leq \|y\|_{C^2[a,b]} (\underbrace{\|\alpha\|_{C^0} + \|\beta\|_{C^0} + \|\gamma\|_{C^0}}_{K > 0}) \end{aligned}$$

→ Operatori integrali

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Fissiamo una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo l'operatore

$$T: f \mapsto f * g \quad T: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \quad T \text{ è lineare per le proprietà dell'integrale}$$

$$\|Tf\|_1 = \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \underbrace{\|g\|_1}_{K > 0} \Rightarrow T \text{ è continuo}$$

(vale anche per $f \in L^p$ con $p \in [1, +\infty]$ per il teo. di Young)

→ Operatore di moltiplicazione

Fissiamo $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$T: \begin{array}{l} f \mapsto f \cdot g \\ L^p(\mathbb{R}) \end{array} \rightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

$$\|Tf\|_p = \|f \cdot g\|_p = (\int |f \cdot g|^p)^{1/p} \leq \underbrace{\|g\|_\infty}_{K > 0} \|f\|_p \Rightarrow T \text{ è continuo}$$

NB: $\|T\| := \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \{k > 0 \mid \text{condizione 3)}\} < +\infty$

operativamente, se trovo $K > 0$ per cui vale la condizione 3), posso dire che $\|T\| < K$

Esempio (op. lin. non continuo): $T: C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$ \rightsquigarrow
supporto compatto
ad es $T: f(x) \mapsto x f(x)$

T è lineare, ma non continuo, cioè $\nexists K > 0$ t.c.
 $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ sia $\|Tf\| \leq K \|f\|_0$ ovvero
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x f(x)| \leq K \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

Costruiremo una successione di funzioni per cui

$$\sup_x |f_n(x)| = 1 \quad \sup_x |x f_n(x)| \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altriimenti} \end{cases} \quad f_n(x) = f(x-n) \implies \sup_x |x f_n(x)| = n$$

dovremmo avere che $n \leq K \cdot 1$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{assurdo}$

Consideriamo le spazio $L(X, Y)$ di tutti gli op. lineari continui tra 2 sp. vett. normati X e Y fissati.

$L(X, Y)$ è uno sp. vettoriale.

Aqui $L(X, Y)$ é um sp. vett. normato (com a norma di operadori).
(Si dimostra che se Y é di Banach, anche $L(X, Y)$ lo é)

Funzionali lineari continui

Def Sia X um sp. vett normato em \mathbb{R} ($\text{o } \mathbb{C}$).

Si dice **funzionale lineare continuo** em X um operador linear continuo $T: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$)

Explicitamente: $T: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|Tx|}{\|x\|_X} < +\infty \quad \text{ou anche} \quad \exists K > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in X \quad |Tx| \leq K \|x\|_X$$

Es: $X = C^1[-1, 1]$ com norma C^1

$T: f \rightarrow f'(0)$ T é linear

$$|Tf| = |f'(0)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| \leq \|f\|_{C^1[-1, 1]} \quad T \text{ é continua}$$

Es: funzionale "integrale definito"

$X \in C^0[a, b]$ com norma C^0

$$Tf = \int_a^b f(x) dx \quad T \text{ é linear}$$

$$|Tf| = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \|f\|_{C^0[a, b]} \cdot |b - a| \quad T \text{ é continua}$$

Es (funzionale linear não continuo):

$T: C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ com norma L^1

$T: f \mapsto f(0)$ T é detto "funzionale de valutazione"

T é linear e bem definido.

$$\exists K > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(0)| \leq K \|f\|_{L^1} = K \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \forall f \in C^0(\mathbb{R}) ?$$

NO. Para mostrá-lo construiremos uma sequência $f_n \in C^0(\mathbb{R})$ t.c. $f_n(0) \rightarrow +\infty$ para $n \rightarrow +\infty$ mas $\int_{\mathbb{R}} |f_n| = 1 \quad \forall n$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_n(x) = n f(nx) \implies \begin{aligned} f_n(0) &= n \\ \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx &= 1 \\ n &\leq K \cdot 1 \end{aligned}$$

assurdo

$L(X, \mathbb{R})$ = sp. vett. normato di tutti i funzionali lineari continui su X

È uno sp. vett. normato e completo

$L(X, \mathbb{R}) = X^* \circ X^*$ "spazio duale" di X

Il duale di uno sp. vett. normato è lo spazio di tutti i funzionali lineari continui su X

Chi è il duale di $L^p(\Omega)$?

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura

Se q è esp. coniugato di p , e fisso $g \in L^q$, allora:

$$T: L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T: f \mapsto \int_{\Omega} f \cdot g \quad \text{è un funz. lin. cont. su } L^p.$$

Ogni funzione $g \in L^q$ definisce un funzionale lineare continuo (g è come un parametro)

$$T_g: f \mapsto \int_{\Omega} f \cdot g \quad |T_g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(si può dimostrare che $\|T_g\| = \|g\|_q$)

Si può dimostrare che vale anche il viceversa:

sia $T \in (L^p)^*$ (cioè T funzionale lin. cont. su L^p)

allora $\exists g \in L^q$ t.c. $\forall f \in L^p$ è $Tf = \int_{\Omega} f \cdot g$ e $\|g\|_q = \|T\|$

(si dice che g rappresenta T).

Teorema (di rappresentazione di Riesz)

Se p, q sono esponenti coniugati e $p \in [1, +\infty)$ allora lo spazio duale di $L^p(\Omega)$ si identifica con $L^q(\Omega)$

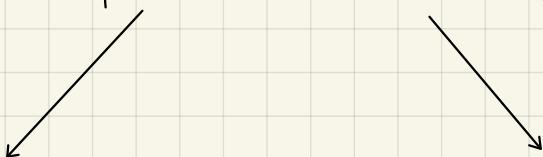
$$(L^p(\Omega))' \ni T \iff \exists g \in L^q \text{ t.c. } Tf = \int_{\Omega} fg$$

$$\|T\| = \|g\|_{L^q}$$

$$L(L^p(\Omega), \mathbb{R}) \simeq L^q(\Omega)$$

Indicando
che per
si ottiene la
scrittura
 $(L^p(\Omega))' \simeq L^q(\Omega)$

Spazi di Hilbert (von Neumann ~1930)



fundamento matematico della meccanica quantistica

ortogonalità
(in spazi di
dimensione infinita)

spazio vettoriale
normato completo
(di Banach)

Def Sia V uno sp. vett. (su \mathbb{R} o \mathbb{C}).

Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 operazioni di sp. vett., è def una terza operazione "prodotto scalare":

$$(\vec{u}, \vec{v}): V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$$

e soddisfa queste proprietà:

1) $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 (\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 (\vec{u}_2, \vec{v})$ (linearità
sulla prima
componente)
 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad u_1, u_2, v \in V$

2) a. se $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ (proprietà commutativa)

b. se $\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\overline{\vec{v}}, \vec{u})$ (complexe conjugato)

conseguenza di 2b] $(\vec{u}, \vec{u}) = (\overline{\vec{u}}, \vec{u})$ cioè $(\vec{u}, \vec{u}) \in \mathbb{R}$

conseguenza di 1 e 2a] Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il prod. scalare
è lineare anche rispetto
alla seconda componente:

$$(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 (\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u}, \vec{v}_2)$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}, \vec{v}_1) + (\vec{u}, \vec{v}_2)$$

$$(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \bar{\lambda} (\vec{u}, \vec{v})$$

Nel caso reale si dice che il prod. scalare è bilineare
Nel caso complesso si dice che il prod. scalare è sesquilineare

$$3) (\vec{u}, \vec{v}) \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in V \quad (\text{e } (\vec{u}, \vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = 0)$$

Teorema Sia V uno sp. vett. con prodotto scalare.
Allora:

- 1) Vale la "diseguaglianza di Cauchy-Schwarz":
 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad |(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$
- 2) Se si definisce $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$, allora $\|\cdot\|$ soddisfa le proprietà della norma
- 3) La norma definita qui sopra soddisfa l'"uguaglianza del parallelogramma":
 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

Se V è uno sp. vett. con prodotto scalare metteremo in V la "norma del prodotto scalare"

V con questa struttura di sp. vett. normato in cui la norma proviene da un prodotto scalare si dice spazio pre-hilbertiano

Def: Si dice spazio di Hilbert uno sp. pre-hilbertiano completo. Ossia: uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare

Esempio: \rightarrow caso finito dimensionale

$$V = \mathbb{R}^n \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{è un prod. scalare}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum u_i^2} = \sqrt{\sum u_i^2} \quad (\text{norma euclidea})$$

In \mathbb{R}^n posso anche mettere un altro prod. scalare

$$(\vec{u}, \vec{v})_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i v_j \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$\|\vec{u}\|_A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j} \quad A \text{ simmetrica e def- pos.}$$

$$V = \mathbb{C}^n \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{j=1}^n u_j v_j \quad \text{ma } (\vec{u}, \vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j^2 \in \mathbb{C}$$

$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{j=1}^n u_j v_j$ allora sì che $(\vec{u}, \vec{u}) = \sum_{j=1}^n |u_j|^2 \in \mathbb{R}$
 ↳ è un prod. scalare, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum |u_j|^2}$

→ caso infinito dimensionale

$$V = C^0[a, b] \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} = \|f\|_{L^2(a, b)} !!$$

→ La norma indotta da questo prodotto scalare
 è la norma L^2

$$|\int_a^b f g| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$C^0[a, b]$ con la norma L^2 NON è completo

Questo è un esempio di sp. pre-hilbertiano che non è di Hilbert

Ese: $V = L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$ se $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\text{se } f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ allora } (f, g) = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x))$$

Questo è un prod. scalare che induce la norma $L^2(\Omega)$.

Quindi $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è una sp. di Hilbert

Per avere esempi significativi di sp. di funzioni che siano sp. di Hilbert occorre la teoria delle misure e integrazione di Lebesgue

Ese (sp. di Hilbert di dim. infinita che non è uno sp. di funzioni):

$V = L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e come spazio di misura scegliamo

$$\Omega = \mathbb{N} \quad \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \mu = \text{misura del conteggio}$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu(x) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}} |f(x)| d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} |f(x)| d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \underbrace{\mu\{n\}}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$$

$$L^2(\Omega, m, \mu) = \left[l^2 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \right\} \right]$$

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

{ V spazio pre-hilbertiano, H spazio di Hilbert }

Teorema Se V è uno sp. pre-hilbertiano, la norma e il prod. scalare sono continui, cioè:

- 1) $\{x_n\} \subseteq V$ t.c. $x_n \rightarrow x$ (cioè: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$)
allora $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ per $n \rightarrow +\infty$.
"La convergenza in norma implica la convergenza delle norme"
- 2) $\{y_n\} \subseteq V$ t.c. $y_n \rightarrow y$ allora $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dim.: 1) Per la disug. triang.

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{cioè } \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

$$2) \begin{array}{ll} \text{Hp: } & x_n \rightarrow x \\ \text{Ts: } & (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \\ &= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \\ &\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \end{aligned}$$

disug. di Cauchy-Schmidt $\leq \frac{\|x_n\|}{\|x\|} \|y_n - y\| + \frac{\|x_n - x\|}{0} \|y\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 + 0 = 0$

Ortogonalità: Sia V uno sp. pre-hilbertiano. $\vec{u}, \vec{v} \in V$
Allora diciamo che $\vec{u} \perp \vec{v}$ se $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Teorema (di Pitagora - 1)

Sia V uno spazio pre-hilbertiano e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vettori a 2 e 2 ortogonali cioè: $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Allora: $\left\| \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\vec{v}_i\|^2$

Dim: $\left\| \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \vec{v}_i, \sum_{j=1}^n \vec{v}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{v}_i, \vec{v}_j) =$
 $= \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \|\vec{v}_i\|^2$

bilinearità

Teorema (di Pitagora - 2)

Sia H uno spazio di Hilbert, sia $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty \subseteq H$ e supponiamo che $\sum_{n=1}^\infty \|\vec{x}_n\|^2 < +\infty$ dove gli \vec{x}_n sono ortog. a 2 a 2.

Allora $\exists \vec{x} \in H$ tale che la serie $\sum_{n=1}^\infty \vec{x}_n = \vec{x}$ in H

Inoltre $\sum_{n=1}^\infty \|\vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^\infty \vec{x}_n \right\|^2$. vuol dire che:

$$\vec{s}_n = \sum_{k=1}^n \vec{x}_k, \quad \|\vec{s}_n - \vec{x}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dim: devo dimostrare che $\{\vec{s}_n\}_{n=1}^\infty$ con $\vec{s}_n = \sum_{k=1}^n \vec{x}_k$ è converg. in H (a un certo \vec{x}).

Poiché H è completo, è sufficiente dimostrare che $\{\vec{s}_n\}$ è di Cauchy cioè:

$$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \|\vec{s}_n - \vec{s}_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n \vec{x}_k - \sum_{k=1}^m \vec{x}_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \vec{x}_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=m+1}^n \|\vec{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\vec{x}_k\|^2 - \sum_{k=1}^m \|\vec{x}_k\|^2 = \sigma_n - \sigma_m \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Somma di un
n° finito di
vettori a 2 a 2
ortogonali
↓
applica il teo.
di Pitagora - 1

cioè σ_n è la successione delle somme parziali della serie numerica $\sum_{k=1}^\infty \|\vec{x}_k\|^2$ che per ipotesi converge.

$\{\sigma_n\}$ è convergente, quindi è di Cauchy, quindi $\sigma_n - \sigma_m \rightarrow 0$.

Quindi anche $\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \rightarrow 0$, cioè $\{\vec{s}_n\}$ è di Cauchy in H .

Sistemi ortonormali

Sia V uno spazio pre-hilbertiano, dico che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sono un sistema ortonormale (finito) se sono a 2 a 2 ortogonali e ciascuno ha norma 1

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{oppure } (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Sia $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$

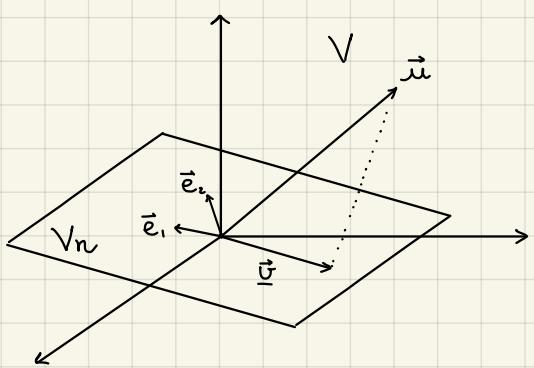
$$\|\vec{v}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i \vec{e}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

Pitagora-1

$$(|\vec{v}| \|\vec{e}_i\|)^2 = (|\vec{v}| \cdot 1)^2$$

Problema di approssimazione

Sia V uno sp. pre-hilbertiano. Sia V_n un sottospazio vettoriale di V , avente dimensione finita, e supponiamo che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sia una base ortonormale di V_n .



Mi pongo questo problema:
dato un elemento $\vec{u} \in V$, qual è l'elemento di V_n che approssima \vec{u} il meglio possibile?

L'elemento $\vec{v} \in V_n$ che rende minima la distanza da \vec{u} sarà la proiezione ortogonale di \vec{u} su V_n cioè sarà

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j$$

Teorema (delle proiezioni)

Se V, V_n ed e_1, \dots, e_n sono come sopra
 $\forall \vec{u} \in V \exists! \vec{v} \in V$ tale che:

$$1) \|\vec{v} - \vec{u}\| = \min \{ \|\vec{v} - \vec{u}\| \mid \vec{v} \in V_n \}$$

$$2) \vec{v} - \vec{u} \perp V_n \quad (\text{cioè } (\vec{v} - \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_n)$$

$$3) \vec{v} = \sum_{j=1}^n (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j$$

$$4) \|\vec{v}\|^2 = \sum_{j=1}^n |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

Consideriamo uno sp. di Hilbert H e supponiamo di conoscere un sistema ortonormale $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (numerabile)

$$(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Per ogni n fissato, sia V_n il sottospazio di H , n -dimensionale, che ha per base ortonormale $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots \subset H$$

Applico il teo. delle proiezioni a H per ciascun V_n : considero $\vec{u} \in H$ e lo proietto su V_n

$$P_{V_n} \vec{u} = \sum_{j=1}^n (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j$$

$$\vec{u} - P_{V_n} \vec{u} \perp V_n \quad \|P_{V_n} \vec{u}\|^2 = \sum_{j=1}^n \|(\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j\|^2 = \\ = \sum_{j=1}^n |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \quad \forall n$$

proiezione di \vec{u} su V_n

Per $n \rightarrow +\infty$ scopri che la serie numerica converge.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \quad \text{diseguaglianza di Bessel}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|(\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

Teo di Pitagora - 2: succ. di vettori a 2 a 2 ortog.

$$(\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|(\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j\|^2 < +\infty$$

$$\text{allora } \exists \vec{u} \in H \text{ t.c. } \sum_{j=1}^{\infty} (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j = \vec{u}$$

$$\text{cioé } \left\| \sum_{j=1}^n (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j - \vec{u} \right\| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{inoltre } \|\vec{u}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

Sarebbe bello sapere che $\vec{u} = \vec{u}$ cioè sapere che \vec{u} si può "sviluppare in serie di Fourier" rispetto al sist o.n. $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ scrivendo $\vec{u} = \sum_{j=1}^{\infty} (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j$.

Perché questo sia vero non è sufficiente che gli $\{\vec{e}_n\}$ siano un sist. o.n.. Dovranno anche essere un sistema "completo" in qualche senso, cioè che contiene tutte le possibili direzioni linearmente indipendenti dello spazio.

Def.: Sia H uno sp. di Hilbert. Si dice che $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) se

- 1) $(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ (s.o.n)
- 2) $\forall \vec{u} \in H$ se $(\vec{u}, \vec{e}_n) = 0 \quad \forall n$ allora $\vec{u} = \vec{0}$

Teorema (trasformata e serie di Fourier in sp. di Hilbert)

Sia H uno sp. di Hilbert e $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un s.o.n.c. in H .

$\forall \vec{x} \in H$ definiamo $\hat{\vec{x}} = \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n)$.

Allora $\hat{\vec{x}} \in \ell^2$ ossia $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 < +\infty$.

L'operatore $\mathcal{T}: H \rightarrow \ell^2$ è lineare, iniettivo,
 $\mathcal{T}: \vec{x} \mapsto \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ suriettivo, conserva il
completo conug prod. scalare e la norma

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \quad (\vec{x}, \vec{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n} = (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}})_{\ell^2}$$

$$\forall \vec{x} \in H \quad \|\vec{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 = \|\hat{\vec{x}}\|_{\ell^2}^2$$

In sintesi. l'operatore \mathcal{T} è una isometria
di sp. di Hilbert.

(\mathcal{T} si dice trasformata di Fourier sullo sp. di Hilbert)

Inoltre, $\forall \vec{x}$ si ha $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$ cioè: la serie di Fourier di \vec{x} converge a \vec{x} , $\forall \vec{x} \in H$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{x} - \sum_{j=1}^n \hat{x}_j \vec{e}_j\|_H = 0$$

Dim: sappiamo già che $\forall \vec{x} \in H$

$$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 < +\infty \quad \text{e} \quad \exists \underline{\vec{x}} \in H \text{ t.c.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n = \vec{x} \quad (\text{la serie di Fourier di } \vec{x} \text{ converge a un certo } \underline{\vec{x}})$$

Mostriamo ora che se il s.o.n. è completo allora $\underline{\vec{x}} = \vec{x}$

Per def. di s.o.n.c. se dimostriamo che

$$(\vec{x} - \underline{\vec{x}}, \vec{e}_n) = 0 \quad \forall n \quad \text{allora} \quad \vec{x} - \underline{\vec{x}} = 0 \quad \text{cioè} \quad \vec{x} = \underline{\vec{x}}$$

$$(\vec{x} - \hat{\vec{x}}, \vec{e}_n) = (\vec{x}, \vec{e}_n) - (\hat{\vec{x}}, \vec{e}_n) = \hat{x}_n - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j \vec{e}_j, \vec{e}_n \right)}_{\delta_{jn}} \\ = \hat{x}_n - \hat{x}_n = 0 \quad (\text{perché il prod. scalare è bilineare e continuo})$$

Perciò $\forall \vec{x} \in H$ abbiamo $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$ in H
e per l'ortogonalità $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2$

$$\|\mathcal{F}(\vec{x})\|_{\ell^2}^2 = \|\vec{x}\|_H^2 \quad \text{perciò } \mathcal{F} \text{ è iniettivo} \\ (\mathcal{F}(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0)$$

Sia $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ cioè $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n \vec{e}_n\|^2 < +\infty$ quindi per Pitagora-2:

$$\exists \vec{x} \in H \text{ t.c. } \vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vec{e}_n$$

Mostriamo che $\hat{x}_n = \lambda_n$ perciò $\mathcal{F}(\vec{x}) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \vec{e}_j, \vec{e}_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\vec{e}_j, \vec{e}_n) = \lambda_n$$

bilin. e cont. del prod. scalare $\implies \mathcal{F}$ è suriettiva

Mostriamo che \mathcal{F} conserva il prod. scalare.

$$\text{Siano } \vec{x}, \vec{y} \in H. \quad \text{Ts: } (\vec{x}, \vec{y})_H = (\mathcal{F}(\vec{x}), \mathcal{F}(\vec{y}))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \bar{\hat{y}}_n$$

So già che \vec{x} e \vec{y} sono somme delle loro serie di Fourier:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n, \sum_{m=1}^{\infty} \hat{y}_m \vec{e}_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{x}_n \vec{e}_n, \hat{y}_m \vec{e}_m)}_{\hat{x}_n \cdot \hat{y}_m \cdot \delta_{n,m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \bar{\hat{y}}_n$$

Applicazione - Serie di Fourier

$$H = L^2(0, T)$$

$$\cos(n\omega x)/\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sin(n\omega x)/\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$1/\sqrt{T}$$

$$\int_0^T \cos^2(n\omega x) dx = \frac{T}{2}$$

s.o.n. e anche completo

$$\left[a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(y) \cos(n\omega y) dy \right] \quad \left[b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(y) \sin(n\omega y) dy \right]$$

La serie di Fourier di $f(x)$ è:

$$\boxed{\mathcal{F}(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \}}$$

$\forall f \in L^2(0,T)$ la serie di Fourier di f converge a f (in L^2)

$$\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \{ a_j \cos(j\omega x) + b_j \sin(j\omega x) \} \right) \|_{L^2(0,T)} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

("conv. in norma quadratica")

Serie di Fourier in forma complessa

$$L^2(0,T) \quad e^{inx} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(f, g) = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx \quad \rightarrow \text{coniugato}$$

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int_0^T e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}$$

$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{T}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un s.o.n.c. in $L^2(0,T)$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e^{-iny} dy = (f, \frac{e^{-iny}}{\sqrt{T}})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \boxed{f(x)} \quad \rightarrow \text{converge in } L^2(0,T)$$

Trasformata di Fourier

Se ho un segnale $f(t)$ non periodico, posso ancora pensare di vederlo come sovrapposizione di infiniti segnali periodici?

====> Pensiamo a un segnale non periodico che ha "periodo" $T \rightarrow +\infty$

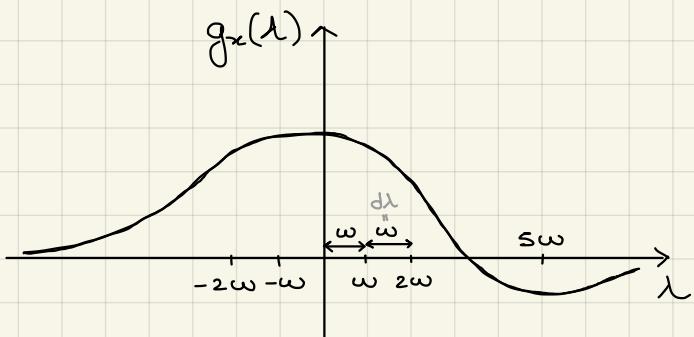
Sia $f(x)$ una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periodica (dove T è "grande")

Possiamo sviluppare f in serie di Fourier complessa e scrivere:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-iny} dy$$

Definiamo la funzione $g_x(\lambda) = e^{ix\lambda} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-iy} dy$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{2\pi} g_x(n\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega g_x(n\omega) \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$



è una specie di somma di Riemann dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_x(\lambda) d\lambda$$

per $T \rightarrow +\infty$ quindi $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(\lambda) d\lambda \\ T \rightarrow +\infty &\qquad \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy} dy \right) d\lambda \\ \omega \rightarrow 0 &\qquad \qquad \qquad \end{aligned}$$

$$\lambda = 2\pi\xi, \quad d\lambda = 2\pi d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy \right) 2\pi d\xi$$

Quindi se definiamo $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i2\pi\xi y} dy$ si dovrebbe poter dimostrare che $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi$

Notiamo che $\forall \xi$ la funzione (di x)

$$x \mapsto \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x}$$

è periodica di periodo $\frac{1}{\xi}$ cioè frequenza ξ .

Il segnale non periodico $f(x)$ è stato scritto come "somma integrale" di infiniti segnali periodici corrispondenti a tutte le possibili frequenze $\xi \in \mathbb{R}$

Def: Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \quad (\xi \cdot y = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j)$$

$$|f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

\hat{f} si dice **trasformata di Fourier** della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow \hat{f} \text{ è limitata.}$$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la funzione \hat{f} è continua.

Per applicare il teo. sulla continuità degli integrali definiti da un parametro devo verificare che:

- 1) Per q.o. y fissata, la funzione $\xi \mapsto f(y) e^{-2\pi i \xi y}$ è continua.
- 2) $|f(y) e^{-2\pi i \xi y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
indip. de ξ

Sappiamo anche che \hat{f} è limitata cioè $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n)$ e $\|\hat{f}\|_{C^0} \leq \|f\|_{L^1}$.

L'operatore trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: f &\mapsto \hat{f} \\ \mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_b(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

lineare e continuo, con norma ≤ 1

$$\|\mathcal{F}f\|_{C^0} \leq \|f\|_{L^1}$$

Si può dimostrare anche che:

Teorema $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ per $|\xi| \rightarrow +\infty$

Quindi in realtà $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_*^*(\mathbb{R}^n)$ ("trasf. di Fourier sulla retta")

Negli sp. di Hilbert $\mathcal{F}: H \rightarrow l^2$ ("trasf. di Fourier sulla circonferenza")

$$\mathcal{F}: f \mapsto \{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

Traasf. di Fourier di f simmetriche

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f è:

- pari ($f(-x) = f(x)$) allora \hat{f} è pari
- dispari ($f(-x) = -f(x)$) allora \hat{f} è dispari

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a valori reali

$$\hat{f}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y) dy}_{\text{Re}[\hat{f}]} - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \sin(2\pi \xi y) dy}_{\text{Im}[\hat{f}]}$$

Se f è anche pari: $\text{Im}[\hat{f}] = 0 \Rightarrow \hat{f}$ è reale e pari

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y) dy = 2 \int_0^{+\infty} f(y) \cos(2\pi \xi y) dy$$

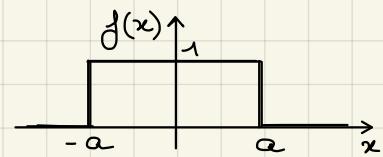
Se f invece è dispari: $\text{Re}[\hat{f}] = 0 \Rightarrow \hat{f}$ è immaginaria

$$\hat{f}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} f(y) \sin(2\pi \xi y) dy = -2i \int_0^{+\infty} f(y) \sin(2\pi \xi y) dy$$

Ese. $f(x) = \chi_{(-a,a)}(x)$ reale, pari.

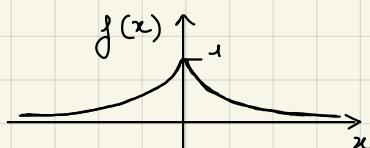
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-2\pi i x \xi} dx = 2 \int_0^a \cos(2\pi \xi x) dx$$

$$= \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi} \quad \text{reale, pari, } C_*^0(\mathbb{R})$$



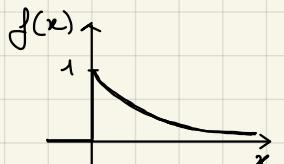
Ese: $f(x) = e^{-|x|}$ reale, pari

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-2\pi i \xi)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+2\pi i \xi)} dx \\ &= \left[\frac{e^{x(1-2\pi i \xi)}}{1-2\pi i \xi} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-x(1+2\pi i \xi)}}{1+2\pi i \xi} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{1+4\pi^2 \xi^2} \in C_*^0(\mathbb{R}) \text{ reale} \end{aligned}$$



Oss.: $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$ il valore della trasformata nell'origine è pari all'integrale della funzione da $-\infty$ a $+\infty$

Ese: $\mathcal{F}(e^{-x} \chi_{(0,+\infty)})(\xi) = ?$



$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= \int_0^{+\infty} e^{-y} e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+2\pi i \xi)} dy = \\ &= \left[\frac{e^{-y(1+2\pi i \xi)}}{-(1+2\pi i \xi)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i \xi} = \\ &= \frac{\operatorname{Re} 1}{1+4\pi^2 \xi^2} - \frac{\operatorname{Im} 2\pi i \xi}{1+4\pi^2 \xi^2} = \hat{f}(\xi) \\ |\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{1+2\pi i \xi} \right| = \frac{1}{|1+2\pi i \xi|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 \xi^2}}\end{aligned}$$

Proprietà della trasf. di Fourier

→ Teorema (trasformata di Fourier e convoluzione)

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $[\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}]$

Dim.: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\exists \mathcal{F}(f * g)$

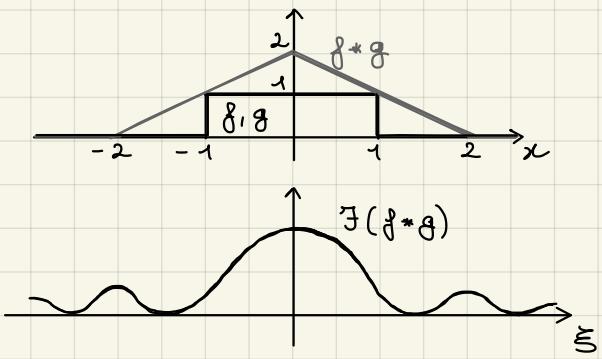
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &\quad \text{è un integrale iterato} \curvearrowleft \\ &\quad \text{scambiare l'ordine di integrazione} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) dy = \underbrace{x-y=z}_{x=y+z} \quad \underbrace{dx=dz}_{d\omega} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi (y+z)} dz \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi z} dz = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Per poter scambiare l'ordine di integrazione
devo verificare che l'integrale del modulo converge
(tes. di Fubini-Tonelli):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \xi x}| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \underbrace{x-y=z}_{x=y+z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz = \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\text{Es: } f(x) = g(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) = \\ &= \left(\frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi} \right)^2 \end{aligned}$$



→ Teorema $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \hat{g}}_{\mathcal{C}_c^*} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \hat{g}$.

Dim: $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i xy} dy \right) dx =$
scambio l'ordine di integrazione

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i xy} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \hat{g}(y) dy$$

Per giustificare lo scambio:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |e^{-2\pi i xy}| dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy$$

→ l'integrale del modulo è finito ✓

→ Trasformata di Fourier e derivate

$$\mathcal{F}(f') = ? \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\circ \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f'(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \\ &= \left[f(y) e^{-2\pi i \xi y} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(y) 2\pi i \xi e^{-2\pi i \xi y} dy \\ &= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \end{aligned}$$

Se $f \in L^1$, $f' \in L^1$, $f \rightarrow 0$ per $y \rightarrow \pm\infty$ allora

$$\mathcal{F}(f'(y))(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

Riesco ad arrivare alla stessa conclusione con meno condizioni?

$$\int_a^b f' \cdot g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g' \text{ vale per } g \in C^1, f \in C^0 \text{ derivabile a tratti}$$

Teorema Seia $f \in L^1(\mathbb{R}) \wedge C_*^\infty(\mathbb{R})$, f derivabile a tratti, $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$

Iterando. $\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = ? (2\pi i \xi)^{(k)} \hat{f}(\xi)$
ma con che condizioni?

Teorema (trasf. della derivata - caso multidimensionale)

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$). Supponiamo che, per un certo intero $K = 1, 2, 3 \dots$ sia:

$$f \in C^{K-1}(\mathbb{R}^n) \quad f, f', f'', \dots, f^{(K-1)} \rightarrow 0 \text{ per } y \rightarrow \pm\infty$$

$f^{(K-1)}$ è derivabile a tratti e $f, f', f'', \dots, f^{(K-1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Allora $[\mathcal{F}(f^{(K-1)})(\xi) = (2\pi i \xi)^{(K-1)} \hat{f}(\xi)]$ (1)

In n variabili: $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ "multi indice"
 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = (2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} (2\pi i \xi_2)^{\alpha_2} \dots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_n}$$

$$= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

Esempio: trasf. di Fourier del laplaciano

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)(\xi) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$$

$$[\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi)]$$

Derivate della trasformata

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = ? \quad (\text{caso multidimensionale})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} (f(y) e^{-2\pi i \xi y}) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) (-2\pi i y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \quad \text{si può fare?} \\ &= \mathcal{F}(-2\pi i y f(y))(\xi) \end{aligned}$$

$$|f(y)(-2\pi i y) e^{-2\pi i \xi y}| = |f(y)| 2\pi |y| \in L^1(\mathbb{R})$$

dove essere così

Teorema Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

$$\begin{aligned} \text{Iterando: } \hat{f}''(\xi) &= (\hat{f}'(\xi))' = \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi) = \\ &= \mathcal{F}((-2\pi i x)^2 f(x))(\xi) \text{ perche\' } f(x), x f(x), x^2 f(x) \in L^1 \end{aligned}$$

Teorema Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e, per un certo intero $k = 1, 2, 3, \dots$ anche $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}) \text{ e } \left[\frac{d^k f}{d\xi^k} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^k f(x))(\xi) \right] \quad (2)$$

(In n variabili vale la formula analoga)

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \xi^\alpha} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi) \text{ con } \alpha \text{ multi indice}$$

$$(1) \quad \mathcal{F}(f^{(k)}(x))(\xi) = \underbrace{(2\pi i \xi)^k}_{C_*^k(\mathbb{R})} \hat{f}(\xi) \quad (f^{(k-1)} \text{ derivabile a tratti})$$

$$\rightarrow (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi) \rightarrow 0 \text{ per } \xi \rightarrow \pm \infty$$

cio\'e'

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^k}\right) \text{ per } \xi \rightarrow \pm \infty$$

|| Pi\'u regolare \(\hat{f}\), pi\'u velocemente \(\hat{f}\) tende a 0 per \(\xi\) che tende all'infinito

Se f \\'e un segnale molto regolare, sar\'a povero di frequenze elevate

$$(2) \quad \text{Se } f, x^k f(x) \in L^1 \implies \hat{f} \in C^k$$

|| Pi\'u velocemente la \hat{f} tende a 0 per x che tende all'infinito, pi\'u regolare sar\'a \hat{f} .

→ Dualità tra le proprietà di f e \hat{f}

$$\text{Es: } \mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2} \right) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{4\pi^2 \cdot 2\xi}{(1 + 4\pi^2 \xi^2)^2} \right)$$

dalla (2): \downarrow

$$\mathcal{F}(xf(x)) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -\frac{8\pi i \xi}{(1 + 4\pi^2 \xi^2)^2}$$

$f(x) = xe^{-|x|}$ reale dispari $\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ immag. dispari

$$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \quad x^k f(x) \in L^1 \quad \forall k \Rightarrow \hat{f} \in C^k \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$e^{-|x|} \in C^\infty$ e deriv. a tratti $xe^{-|x|} \in C^1$ con f' deriv. a tratti
 \rightarrow posso applicare il teo su $\mathcal{F}(f')$:

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \quad \text{per } \xi \rightarrow \pm \infty$$

→ Data \hat{f} posso ricostruire f ?

Possibile formula di inversione: $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$

Se vogliamo sapere che questa valga dovrà essere:

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (perché esista \hat{f})

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (perché esista l'integrale)

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sappiamo che $\hat{f} \in C_*^\infty(\mathbb{R})$ ma non necessariamente in $L^1(\mathbb{R})$

Teorema (di inversione)

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $[f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \\ = \hat{\hat{f}}(-x) = \check{f}(x) \end{cases} \quad \hat{f} \in L^1 \quad \mathcal{F}(\hat{f}) \in C_*^\infty$$

\hookrightarrow riflessa

Conseguenza: sappiamo che se $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$
allora $f(x) = \hat{f}(-x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

In particolare se $f \in L^1$ ma $f \notin C_c^\infty$
certamente $\hat{f} \notin L^1$

Conseguenza: se $f \in L^1$ e supponiamo che $\hat{f} \equiv 0$

$$f(x) = \mathcal{F}(0)(-x) \implies f = 0$$

L'operatore lineare $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{C}_*(\mathbb{R})$
è iniettivo cioè

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \hat{f} = \hat{g} \text{ allora } f = g$$

Questo significa che la transf. di Fourier di f individua univocamente
la f .

→ Trasformata delle dilatate

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$) e $a > 0$ definiamo:

$$\hat{f}^a(\xi) = f(ax)$$

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{a^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\hat{f}^a)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \frac{\xi}{a} \cdot y} dy \\ &\stackrel{L^1(\mathbb{R}^n)}{=} \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \hat{f}_a(\xi) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ ax=y, \quad x=\frac{y}{a}, \quad dx=\frac{dy}{a} \end{matrix} \end{aligned}$$

Analogamente: $\mathcal{F}(\hat{f}_a)(\xi) = \hat{f}^a(\xi)$

N.B.: $\hat{f}_a(x) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_a(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) dx$

Ese (trasformata delle gaussiane):

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = ?$$

Calcoliamo \hat{f} svolgendo le formule per trasformate e derivate

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \quad f'(x) = -2x e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -2x f(x)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}(f'(x))}_{2\pi i \xi \hat{f}(\xi)} = \underbrace{\mathcal{F}(-2x f(x))}_{\frac{1}{\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)} \Rightarrow \hat{f}'(\xi) = -2\pi^2 \xi \hat{f}(\xi)$$

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -2\pi^2 \int \xi d\xi$$

$$\ln |\hat{f}(\xi)| = -\pi^2 \xi^2 + C$$

eq. diff del primo' ordine

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}}$$

$$\hat{f}(\xi) = c_1 e^{-\pi^2 \xi^2}$$

$$\hookrightarrow \hat{f}(0) = c_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

E invece $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$? ($a > 0$)

$$f(x) = e^{-x^2} \quad f^{\sqrt{a}}(x) = e^{-ax^2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \overline{\mathcal{F}(e^{-ax^2})} &= \mathcal{F}(f^{\sqrt{a}}(x)) = \hat{f}^{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \frac{\xi^2}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2} \quad \forall a > 0 \end{aligned}$$

Caso particolare: $a = \pi$

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} e^{-\frac{\pi^2}{\pi} \xi^2} \rightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi \xi^2}}$$

|| la funzione $e^{-\pi x^2}$ ha per trasformata se stessa

Gaussiana n-dimensionale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-|\vec{x}|^2})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} e^{-2\pi i (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \hat{g}(\xi_1) \cdot \hat{g}(\xi_2) \cdot \dots \cdot \hat{g}(\xi_n) = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi_1^2} \cdot \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi_n^2} = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\pi^2 |\vec{\xi}|^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\mathcal{F}(e^{-|x|^2}) = (\sqrt{\pi})^n e^{-\pi^2 |\xi|^2} \right] \text{ con } x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Inoltre è vero anche che } \left[\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|^2}) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)^n e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} |\xi|^2} \right]$$

→ Traslazione

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\left[\mathcal{F}(f(x)e^{2\pi i a x})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i a x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \hat{f}(\xi - a) \right]$$

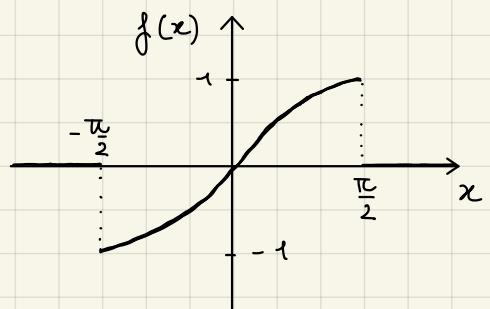
$$\text{Analogamente } \left[\mathcal{F}(f(x+a))(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi} \right]$$

$$\text{Es: } \mathcal{F}(\operatorname{seu} x \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x)) = ?$$

f reale dispari $\rightarrow \hat{f}$ immag. dispari

$$x^n f(x) \in L^1 \forall n \rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

f discart. $\rightarrow \hat{f}(\xi) = \sigma(\xi)$



$$\mathcal{F}(\chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})(\xi) = \operatorname{seu}(\frac{\pi^2 \xi}{2i}) \hat{g}(\xi)$$

$$\mathcal{F}(g(x) \operatorname{seu} x)(\xi) = \mathcal{F}(g(x) e^{\frac{i\pi}{2}x - \frac{1}{2i}x^2})(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{\operatorname{seu}(\pi^2(\xi - \frac{1}{2\pi}))}{\pi(\xi - \frac{1}{2\pi})} - \frac{\operatorname{seu}(\pi^2(\xi + \frac{1}{2\pi}))}{\pi(\xi + \frac{1}{2\pi})} \right]$$

$$= -\frac{\cos(\pi^2 \xi)}{2\pi i} \left[\frac{1}{\xi - \frac{1}{2\pi}} - \frac{1}{\xi + \frac{1}{2\pi}} \right] = i \frac{\cos(\pi^2 \xi)}{\pi} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - \frac{1}{4\pi^2}}$$

$$\text{Analogamente } \mathcal{F}(\cos x \cdot \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}) = -\frac{\cos(\pi^2 \xi)}{2\pi^2 \xi^2 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Es: } \mathcal{F}(x e^{-x^2})(\xi) = ?$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x)(-2\pi i x))(\xi)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x) \cdot x)(\xi) \implies \mathcal{F}(x e^{-x^2})(\xi) = -i \bar{w}^{3/2} \xi e^{-\pi^2 \xi^2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} (\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}) = \mathcal{F}(e^{-x^2} x)(\xi)$$

Calcolo di trasf. di Fourier di funz. razionali con metodi di analisi complessa

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1+x^2} dx$$

come la calcolo esplicitamente, senza usare le proprietà della trasformata?
la primitiva
non è elementare

Vediamo come si calcolano le trasf. di Fourier di funzioni razionali.

Consideriamo una funz. del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ con

1) p, q polinomi

2) $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) grado di $q \geq$ grado di $p + 1$

Se $\text{gr}(q) \geq \text{gr}(p) + 2$ allora $\frac{p}{q} \in L^1(\mathbb{R})$

" $\text{gr}(q) = \text{gr}(p) + 1$ " $\frac{p}{q} \in L^2(\mathbb{R})$

Consideriamo il denominatore $q(x)$. Stiamo supponendo che $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

In compenso esisteranno $z \in \mathbb{C}$ tali che $q(z) = 0$

Def Si dice che il numero $z_0 \in \mathbb{C}$ è un **polo di ordine n** (con $n = 1, 2, 3 \dots$) per la funz. razionale $\frac{p(z)}{q(z)}$ se $q(z)$ si annulla di ordine n in z_0 e $p(z_0) \neq 0$.

Teorema Sia $\frac{p(x)}{q(x)}$ una funz. razionale dove:

1) p, q sono polinomi

2) $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\text{gr}(q) \geq \text{gr}(p) + 1$

$$\left\{ K = -2\pi \xi \right\}$$

Allora $\forall K \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ixK} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_k\right) e^{iz_k K} & \text{se } K > 0 \\ -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k < 0} \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_k\right) e^{iz_k K} & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

dove z_k sono i poli di $p(z)/q(z)$ e Res è il residuo delle funzioni razionali nei suoi poli.

Come si calcola il **residuo** di una funzione $\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}$ nei suoi poli?

Sia z_0 un polo del 1° ordine per $\frac{p(z)}{q(z)}$

$$[\text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_0 \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} \right)]$$

Esempio: $\text{Res} \left(\frac{z-1}{z^2+4} e^{3iz}, 2i \right)$

$$z^2 + 4 = 0 \rightarrow z = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

poli del 1° ord.

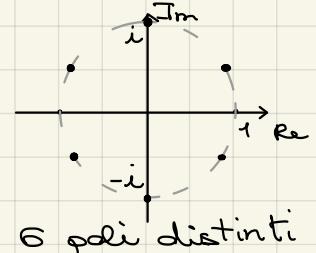
$$= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{(z-1) e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{2i-1}{4i} e^{-6}$$

Metodo alternativo per calcolare $\text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_0 \right)$ se z_0 è un polo del 1° ordine:

$$[\text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_0 \right) = \frac{p(z_0) e^{ikz_0}}{q'(z_0)}]$$

Esempio: $\text{Res} \left(\frac{z^2+3}{z^6+1} e^{2\pi iz}, i \right) =$

$$= \left. \frac{(z^2+3) e^{2\pi iz}}{6z^5} \right|_{z=i} = \frac{(-1+3) e^{-2\pi}}{6i} = -i \frac{e^{-2\pi}}{3}$$



Esempio: $\Im \left(\frac{1}{1+x^2} \right) (\xi) = \int_R \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1+x^2} dx$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i \text{ poli del 1° ordine}$$

$\frac{1}{1+x^2}$ è reale pari, quindi \hat{f} è reale pari.

Basta calcolare $\hat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$ e poi simmetrizz.

$$\kappa = -2\pi \xi < 0 \Rightarrow \hat{f}^+(\xi) = -2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{1+z^2}, -i \right)$$

$$= -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{1+z^2}$$

$$= -2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z-i} =$$

$$= -2\pi i \frac{e^{-2\pi i \xi}}{-2i} = \pi e^{-2\pi i \xi}$$

Simmetrizz \hat{f}^+ pari:

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi i \xi}$$

Come si calcola il residuo in polo di ordine $n > 2$?

Sia z_0 un polo di ordine $n = 2, 3, 4 \dots$ per $\frac{p(z)}{q(z)}$.

$$\left[\text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz}, z_0 \right) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n \frac{p(z)}{q(z)} e^{ikz} \right) \Big|_{z=z_0} \right]$$

Ese: $\Im \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} \right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(1+x^2)^2} dx$

f reale pari $\rightarrow \hat{f}$ reale pari

$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{f}(\xi) = \sigma\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ per $\xi \rightarrow \pm \infty \quad \forall n$

$x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{f}(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$

$z^2 + 1 = 0 \rightarrow z = \pm i$ 2 poli del 2° ordine

Per $\xi > 0 \quad (-2\pi \xi < 0)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= -2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(1+z^2)^2}, -i \right) \\ &= -2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{(z+i)^2 e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+1)^2} \right) \Big|_{z=-i} = -2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z-i)^2} \right) \Big|_{z=-i} \\ &= -2\pi i \left\{ e^{-2\pi i \xi z} \left(\frac{-2\pi i \xi (z-i)^2 - 2(z-i)}{(z-i)^4} \right) \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ e^{-2\pi i \xi z} \left(\frac{2\pi i \xi (2i) - 2}{(-2i)^3} \right) \right\} = \frac{2\pi i e^{-2\pi \xi}}{8i} (4\pi \xi + 2) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-2\pi \xi} (2\pi \xi + 1) \quad \text{per } \xi > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Im \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} \right)(\xi) = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi |\xi|} (2\pi |\xi| + 1) \quad \forall \xi$$

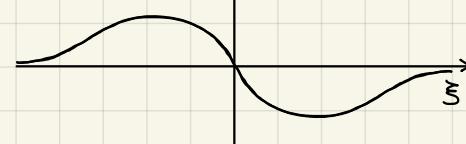
Ese: $\Im \left(\frac{x}{(1+x^2)^2} \right)(\xi) = \Im \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right)' \right)(\xi) =$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ f &= -\frac{1}{2} 2\pi i \xi \Im \left(\frac{1}{1+x^2} \right)(\xi) = -i\pi^2 \xi e^{-2\pi |\xi|} \end{aligned}$$

f reale dispari $\rightarrow \hat{f}$ immag. dispari

$f \in C^\infty \rightarrow \hat{f}(\xi) = \sigma\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \quad \forall n \quad \text{per } \xi \rightarrow \pm \infty$

$x f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{f}(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$



NB: se devo calcolare la trasf. di Fourier di una funzione razionale $f(x)$ del tipo $x g(x)$
NON è una buona idea applicare le formule

$$\mathcal{F}(x g(x)) = -\frac{1}{2\pi i} \hat{g}(x)$$

Ese: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(x+2i)^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(x+2i)^2} dx$

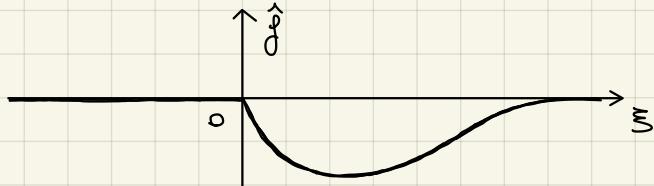
$z + 2i = 0 \rightarrow z = -2i$ polo del 2° ordine

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \begin{cases} \xi > 0 \quad (-2\pi \xi < 0), & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+2i)^2}, -2i\right) \\ \xi < 0 \quad (2\pi \xi > 0), & 2\pi i \operatorname{Res}(\dots, ?) \end{cases} \xrightarrow{\text{non ci sono poli}} 0 \\ &= \begin{cases} \xi > 0, & -2\pi i \frac{d}{dz} \left((z+2i)^2 \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+2i)^2} \right) \Big|_{z=-2i} \\ \xi < 0, & 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi > 0, & -4\pi^2 \xi e^{-4\pi \xi} \\ \xi < 0, & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

f né pari né dispari $\rightarrow \hat{f}$ non ha simmetrie

$f \in \mathcal{C}^\circ \rightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$ per $\xi \rightarrow \pm\infty \forall n$

$f \in L^1 \rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}_*$



Teoria L^1 delle trasformate di Fourier

Pregio: definizione semplice ed esplicita

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

Difetti: l'operatore $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ non ha prop. funzionali così bruci

\mathcal{F} non è bimivoca: è iniettivo ma non suriettivo

Il teorema di inversione ha delle limitazioni ($f \in L^1$ ma non lo posso sapere a priori)

→ Si vuole estendere la teoria della trasformata di Fourier in L^2 :

lasciamoci guidare dalle proprietà duali di \mathcal{F} (regolarità / velocità di conv. a zero all'infinito) per individuare uno sp. di funz. $S \subset (L^1 \cap L^2)$ e per cui si abbia $\mathcal{F}: S \rightarrow S$ bimessa.

Spazio di Schwartz delle funz a decrescenza rapida

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C}) \middle| \begin{array}{l} 1) f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ 2) \forall k \in \mathbb{N}, \forall \text{ multi indice } \alpha \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} \right| = 0 \end{array} \right\}$$

→ spazio di classi di funzioni

Caso unidimensionale: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$ t.c. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right| = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$

In altri termini, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e inoltre sia f sia le sue derivate di ogni ordine siano $O\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $|x| \rightarrow +\infty$, $\forall k$.

La gaussiana è un es. di funzione a decrescenza rapida, così come le funzioni a supporto compatto.

ogni funzione dello spazio più grande
spazio di funzioni è approssimabile bene quanto si vuole da
una funzione dello spazio più piccolo

Teorema $S(\mathbb{R}^n)$ è uno sp. vettoriale, denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$
 $\forall p \in [1, +\infty)$ cioè:

$$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, +\infty] \quad \text{e} \\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ con } p \in [1, +\infty) \quad \exists \{f_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n) \text{ t.c. } \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$S(\mathbb{R}^n)$ è uno sp. di funz. molto regolari che permettono di approssimare funzioni L^p (in norma L^p) $\forall p \in [1, +\infty)$.

In particolare $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $\forall f \in S(\mathbb{R}^n) \exists \hat{f}$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ non ha una norma "naturale".

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} < +\infty, \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

ma nessuna di queste norme "cattura" tutte le proprietà che definiscono $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (non esiste una norma che lo renda completo)

Proprietà: se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $x^n f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
e $\frac{d^n}{dx^n} f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Teorema

1) Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cioè

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale la formula di inversione cioè

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3) $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è (lineare) bimivoca ^{isomorfismo di} spazi vettoriali

4) \mathcal{F} conserva il prod. scalare e la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ cioè:

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

In particolare \mathcal{F} (con questa norma in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) è un op. lin. continuo con norma 1 (isometria lineare).

($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con prod. scalare e norma L^2 è uno sp. pre-hilbertiano, non completo)

Dim: 1) Proviamo che $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \implies \exists \hat{f} \quad \downarrow \quad n=1, \text{ per semplicità}$$

$x^n f(x)$ è cont. ed è $\alpha(\frac{1}{x^n})$ per $x \rightarrow \pm\infty \quad \forall k$
quindi $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in C^n(\mathbb{R}) \quad \forall n \quad (\hat{f} \in C^\infty)$

Dobbiamo dim. che $|\xi|^n \left| \frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k} \right| \rightarrow 0$ per $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^k f(x))(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad \text{con } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

c. $x^k f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Allora devo mostrare che $|\xi|^n \hat{g}(\xi) \rightarrow 0$ per $|\xi| \rightarrow \infty$.

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{g}(\xi) \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ ovvero: } \check{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

c. $\xi^n \hat{g}(\xi) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow \pm\infty$

2) $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

quindi poiché f e \hat{f} stanno in L^1 vale la formula di inversione

3) \mathcal{F} è lineare e iniettiva (su tutto L^1).

Debbo provare che $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ è suriettiva

ovvero: $\forall g \in S(\mathbb{R}) \exists f \in S(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f} = g$

Per g assegnato, cerco f t.c. $\hat{f} = g$

Se $\hat{f}(x) = g(x)$ allora $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ ma $\hat{f}(x) = \hat{f}(-x)$
e quindi la f che cerco deve essere $f(x) = \hat{g}(-x)$.

↳ ho trovato la f .

4) Mostriamo che $\forall f, g \in S(\mathbb{R})$ è $\int_{\mathbb{R}} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \hat{\bar{g}}$

da questo parendo $f = g$ $(\int_{\mathbb{R}} |f|^2)^{1/2} = (\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2)^{1/2}$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Abbiamo visto che:

$$\forall f, g \in L^1 \text{ è } \int_{\mathbb{R}} f \cdot \bar{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \hat{\bar{g}} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \hat{\bar{g}} = \int_{\mathbb{R}} f \hat{\bar{g}}$$

bisogna dim. che $\bar{g} = \hat{\bar{g}}$

$$\hat{\bar{g}}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i x y} dy = \int_{\mathbb{R}} \bar{g}(y) e^{2\pi i x y} dy = \hat{\bar{g}}(-x)$$

$$\rightarrow \hat{\bar{g}}(x) = \hat{\bar{g}}(-x) = \bar{g}(x) \quad \checkmark$$

$\forall f \in S(\mathbb{R})$ valgono tutte le identità sulla trasformata di Fourier viste finora, senza ipotesi aggiuntive.

Vediamo come, grazie alle proprietà di \mathcal{F} su $S(\mathbb{R}^n)$, è possibile definire \mathcal{F} su $L^2(\mathbb{R}^n)$ e provare le buone proprietà

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Voglio definire \hat{f}

Faccio così: sia $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $f_k \xrightarrow{L^2} f$, $\|f_k - f\|_{L^2} \rightarrow 0$
 (si può fare perché $S(\mathbb{R}^n)$ è densa in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

Calcoliamo \hat{f}_k . Considero la succ. $\{\hat{f}_k\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$.

Se dimostro che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in L^2 , esisterà
 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} g$.

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}^n) & & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \xrightarrow{\quad \text{②} \quad} & f_k & \xrightarrow{\quad L^2 \quad} g \xrightarrow{\quad \text{④} \quad} \\ \xrightarrow{\quad \text{③} \quad} & \hat{f}_k & \xrightarrow{\quad L^2 \quad} g = \hat{f} \end{array}$$

f_k è caur. per hp. *
 se è caur. allora
 è anche di Cauchy

Mostriamo che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathfrak{F}(f_k - f_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} 0$$

linearietà di \mathfrak{F} $(f_k - f_m) \in S(\mathbb{R}^n)$ su $S(\mathbb{R}^n)$, \mathfrak{F} è un'isometria

Quindi $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy, $\exists g \in L^2$ t.c. $\|\hat{f}_k - g\|_{L^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Porremo, per definizione, $\hat{f} = g$.

Problema: siamo sicuri che il limite non dipende dalla particolare successione f_k scelta?

Se prendo una diversa sequ. $\{f_k^*\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c.

$$\|f_k^* - f\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ allora come prima } \exists g^* \in L^2 \text{ t.c.}$$

$\hat{f}_k^* \xrightarrow{L^2} g^*$. È vero che $g^* = g$? Mostriamo che è così.

$$\|\hat{f}_k^* - \hat{f}_k\|_{L^2} = \|\mathfrak{F}(f_k^* - f_k)\|_{L^2} = \|f_k^* - f_k\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ perché } f_k^* \xrightarrow{L^2} f$$

Quindi anche \hat{f}_k^* e \hat{f}_k hanno lo stesso limite g .

In sintesi: utilizzando il fatto che $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e che $\mathfrak{F}: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria lineare abbiamo dimostrato che \mathfrak{F} si può estendere univocamente a un operatore $\mathfrak{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema (proprietà di \mathcal{F} su L^2)

L'operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ è lineare, bimbiacco, conserva il prod. scalare e la norma.

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è $\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}$ e $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

\mathcal{F} è un'isometria lineare di sp. di Hilbert.

$\forall f \in L^2$ vale la formula di inversione, cioè
 $\hat{f}(-x) = f(x)$ in L^2 cioè per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i due modi di definire la transf. di Fourier coincidono.

In pratica, data $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ come calcolo \hat{f} ?

Sfruttiamo la continuità dell'operatore \mathcal{F} e il fatto che se $f \in L^1 \cap L^2$ allora f si calcola come in L^1 .

Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si verifica che: 1) $f_k \in L^1 \cap L^2$

2) $f_k \rightarrow f$ in L^2

$$[\hat{f}(\xi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}_k(\xi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{|y| < k} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy] \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Ese: $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \in C_*^0(\mathbb{R})$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|y| < k} \frac{y}{1+y^2} e^{-2\pi i \xi y} dy \quad \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$$

Quando f è una funzione razionale che ha grado del denominatore \geq grado del numeratore + 1 e denominatore $\neq 0$ in \mathbb{R} , il calcolo di \hat{f} col metodo dei residui fornisce esattamente l'integrale \oplus .

Quindi il metodo dei residui fornisce la trasf. di Fourier corretta anche per una funzione razionale che sta in $L^2 \setminus L'$.

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ reale dispari $\rightarrow \hat{f}$ immag. dispari

$f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ (ma non è detto che
 $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$)

Calcolo per $\xi > 0$ poi simmetrizza $\pm i$ poli 1° ord.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{1+z^2} e^{-2\pi i z \xi}, -i\right) \\ &= -2\pi i \left\{ \frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{2z} \right\}_{z=-i} = -\pi i e^{-2\pi \xi} \text{ per } \xi > 0\end{aligned}$$

$$\implies \hat{f}(\xi) = -\pi i e^{-2\pi |\xi|} \operatorname{sign}(\xi) \text{ discontinua!}$$

Ese: $f(x) = \frac{1}{x+ai}$, $a > 0$

$f \in L^2$ ma $f \notin L'$, non ha simmetrie

$z+ai = 0 \rightarrow z = -ai$ polo del 1° ord.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x+ai} dx = \begin{cases} -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z+ai}, -ai\right) & \xi > 0 \\ \emptyset & \xi < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\pi i (e^{-2\pi i \xi z}) \Big|_{z=-ai} & \xi > 0 \\ \emptyset & \xi < 0 \end{cases} = -2\pi i e^{-2\pi \xi a} \quad \xi > 0$$

$$\implies \hat{f}(\xi) = -\chi_{(0,+\infty)}(\xi) 2\pi i e^{-2\pi \xi a} \text{ immagine reale e discontinua!}$$

Esercizi:

- $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \quad f \in C_* \cap L' \Rightarrow \hat{f} \in C_*$

$$f \in C^\infty \implies \hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \text{ per } \xi \rightarrow \pm \infty \quad \forall n$$

$f \in L^1 \wedge xf(x) \notin L^1 \rightarrow$ un aspetto $\hat{f} \notin C^1$

$f \in \mathbb{R}$ ma non ha simmetrie \rightarrow non un aspetto simmetrie di \hat{f}

Metodo dei residui:

$$z^2 + z + 1 = 0 \rightarrow z = -1 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ poli del } 1^{\circ} \text{ ordine}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x^2 + x + 1} dx = \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + z + 1}, -1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + z + 1}, -1 + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1}\right)\Big|_{z=-1-\frac{i\sqrt{3}}{2}} \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1}\right)\Big|_{z=-1+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi > 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i \xi (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})}}{i\sqrt{3}}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi (-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})}}{i\sqrt{3}}\right) \end{cases} = \begin{cases} \xi > 0 & \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}\xi} \\ \xi < 0 & \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{\pi\sqrt{3}\xi} \end{cases} \\ &= \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|}}\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$f \in \mathbb{R}$ senza simmetrie \rightarrow non un aspetto simmetrie da \hat{f}

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^1 \\ xf(x) \in L^1 \\ x^2 f(x) \in L^1 \\ x^3 f(x) \notin L^1 \end{array} \right\} \hat{f} \in C^2 \cap C_* \text{ un aspetto } \hat{f} \notin C^3$$

$$f \in C^\infty \Rightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right) \text{ per } \xi \rightarrow \pm\infty \text{ hn}$$

Metodo dei residui:

$$(z^2 + 2z + 3)^2 = 0 \rightarrow z = -1 \pm i\sqrt{2} \text{ poli del } 2^{\circ} \text{ ordine}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 + 2z + 3)^2}, -1 - i\sqrt{2}\right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dots, -1 + i\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & (z^2 + 2z + 3)^2 = (z+1+i\sqrt{2})^2 (z+1-i\sqrt{2})^2 \\
 & = \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+1+i\sqrt{2})^2} \frac{(z+1+i\sqrt{2})^2}{(z+1-i\sqrt{2})^2} \right) \Big|_{z=-1-i\sqrt{2}} \\ \xi < 0 & 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+1+i\sqrt{2})^2} \right) \Big|_{z=-1+i\sqrt{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi > 0 : \quad \hat{f}(\xi) &= -2\pi i e^{2\pi i \xi} e^{-2\pi \sqrt{2} \xi} \frac{(-2)(2\pi \sqrt{2} \xi + 1)}{-8(-i)2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{2\pi i \xi} e^{-2\pi \sqrt{2} \xi} (2\pi \sqrt{2} \xi + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi < 0 : \quad \hat{f}(\xi) &= 2\pi i e^{-2\pi i \xi (-1+\sqrt{2})} \frac{(-2)(\pi i \xi (2\sqrt{2}) + 1)}{(2i\sqrt{2})^3} = \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{2\pi i \xi} e^{2\pi \sqrt{2} \xi} (1 - 2\pi \sqrt{2} \xi)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{2\pi i \xi} e^{-2\pi \sqrt{2} |\xi|} \frac{1}{(1 + 2\pi \sqrt{2} |\xi|)}}$$

• $\Im(x \hat{f}(e^{-x^4})) = ?$ non serve calcolare $\hat{f}(e^{-x^4})$!

$f(x) = e^{-x^4} \in S(\mathbb{R})$ f reale e pari

$\Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$ reale pari

$g(x) = x \hat{f}(x)$ sarà reale, dispari e $g \in S(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \hat{g}(\xi)$ sarà immag. dispari e $\hat{g} \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} \hat{h}(\xi) &= \Im(-2\pi i x h(x)) \\
 \Im(x h(x))(\xi) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{h}(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Im(x \hat{f}(x))(\xi) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} f(\xi) \quad \text{f è pari e } \hat{f}(x) = \hat{f}(-x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\xi} (e^{-\xi^4}) = \frac{i}{2\pi} (-4\xi^3) e^{-\xi^4} = -\frac{2i}{\pi} \xi^3 e^{-\xi^4}
 \end{aligned}$$

• $f(x) = \cos x e^{-|x|}$

f reale pari $\rightarrow \hat{f}$ reale pari

$x^n f(x) \in L$ $\forall n \rightarrow \hat{f} \in E^\infty$

f continua e regolare a tratti $\rightarrow \hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$ per $\xi \rightarrow \pm\infty$

$$\mathcal{F}(f(x)e^{2\pi i ax})(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

$$\mathcal{F}(f(x)\cos x)(\xi) = \mathcal{F}(f(x)\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})(\xi)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{f}(\xi - \frac{1}{2\pi}) + \hat{f}(\xi + \frac{1}{2\pi}) \right]$$

$$\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \hat{f}(x) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-|x|} \cos x) = \frac{1}{1 + (2\pi\xi - 1)^2} + \frac{1}{1 + (2\pi\xi + 1)^2}}$$

Una proprietà della trasf. di Fourier in L^2

Teorema (Principio di indeterminazione di Heisenberg)

Sia $f \in S(\mathbb{R})$. Allora:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_{L^2}^2$$

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2$$

Tra tutte le funzioni f che hanno una fissata $\|f\|_{L^2}$ quelle per cui $\int x^2 |f(x)|^2 dx$ è piccolo avranno $\int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ grande, e viceversa.

\Rightarrow Una funzione f e la sua trasf. di Fourier non possono essere simultaneamente "molto concentrate": se una delle 2 ha un grafico concentrato, l'altra sarà molto dispersa.

Se f è un segnale nel tempo, se f ha durata limitata, allora f non avrà banda limitata

In meccanica quantistica, se $f(x)$ è la funzione d'onda di una particella che si muove sulla retta

- $|f(x)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella nel punto x
- $|\hat{f}(\xi)|^2$ è la densità di probabilità che il momento della particella sia ξ

$$\begin{aligned}
 \text{Dim: } \|f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \left[x |f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} (|f(x)|^2) dx = \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} x (\underbrace{f(x) \bar{f}(x)}_{f' \bar{f} + f \cdot \bar{f}'})' dx \quad \text{perché } f \in S(\mathbb{R}) \\
 &\leqslant |2 \operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{R}} x f'(x) \bar{f}(x) dx \right]| \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |f'(x)| |\bar{f}(x)| dx \\
 \text{disug. di} \quad \xrightarrow{\text{Schwartz}} \quad &\leqslant 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\|f'\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f')\|_{L^2} = \|2\pi i \hat{f}\|_{L^2} = 2\pi \|\hat{f}\|_{L^2} \\
 &\leqslant 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \checkmark
 \end{aligned}$$

Se trovo una $f(x) \in S(\mathbb{R})$ per cui si ha:

$$\|f\|_{L^2}^2 = 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \circledast$$

vuol dire che la diseguaglianza è ottimale, cioè non è migliorabile.

$\rightarrow \forall \alpha > 0$ la funzione $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ soddisfa \circledast

Verifichiamolo per $\alpha = \pi$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-\pi x^2} \quad \hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} = f(\xi) \\
 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} &= 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \\
 &= 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (-x) (-4\pi x e^{-2\pi x^2}) dx = \\
 &= \left[-x e^{-2\pi x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (-e^{-2\pi x^2}) dx = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 dx = \|f\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

Verifichiamolo per $\forall \alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= e^{-\alpha x^2} \quad g(x\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}) = g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x) = e^{-\alpha \frac{\pi}{\alpha} x^2} = e^{-\pi x^2} = f(x) \\
 \mathcal{F}(g^{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(x))(\xi) &= (\hat{g}(\xi))_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \hat{g}(\xi \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}) = \hat{f}(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |g(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}x)|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)|^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \hat{g}(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}y}{=} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\pi} y^2 |g(y)|^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi}{\alpha} z^2 \cdot \frac{\alpha}{\pi} |\hat{g}(z)|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} dz \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{\xi=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}z}{=} 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \checkmark
 \end{aligned}$$

Trasformata di Laplace

limite della trasformata di Fourier:

considero l'eq. diff. $y'' + \omega^2 y = 0$ (eq. dell'osillatore armonico)
 integrale generale: $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$.

Affronto l'eq. con Fourier:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(y'' + \omega^2 y) &= 0 \rightarrow (2\pi i \xi)^2 \hat{y} + \omega^2 \hat{y} = 0 \\
 \hat{y} (\omega^2 - 4\pi^2 \xi^2) &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{y} &\equiv 0 \Rightarrow y(t) = 0
 \end{aligned}$$

Trovo solo la funz. identicamente nulla.
 Infatti, nessuna delle soluzioni non banali è Fourier-trasformabile (sin e cos non sono L-integrabili)

Nessuna funz. elementare x^α , α^* , $\log x$ è $L^1(\mathbb{R})$!

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

non aiuta la convergenza dell'integrale

Trasformata di Laplace: usa come nucleo integrale una funz. che aiuti l'integrabilità di f all'infinito.

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ } (\text{o } \mathbb{C}), \quad Lf(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

se $s > 0$
aiuta la convergenza

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ } (\text{o } \mathbb{C})$, f misurabile e Lebesgue-integrabile su ogni intervallo del tipo $[0, k]$ per $k > 0$.

Si dice che f è Laplace-trasformabile se $\exists s_0 \in \mathbb{C}$ tale che l'integrale

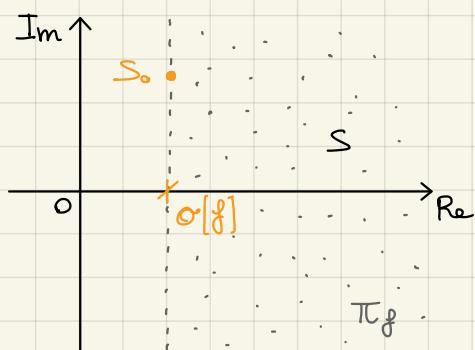
$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

sia convergente (per Lebesgue, ovvero: $\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < +\infty$)

$$s_0 = \sigma_0 + \omega_0 i \quad |e^{-st}| = |e^{-\sigma_0 t} e^{-\omega_0 i}| = e^{-\sigma_0 t}$$

Se $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} |f(t)| dt < +\infty$ a maggior ragione sarà

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt < +\infty \quad \text{se } s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_0\} = \sigma_0$$



Def: Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione L-trasformabile. Si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\sigma[f] = \inf \{ s \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| dt < +\infty \}$$

Semicerchio di convergenza $[\pi_f = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}[s] > \sigma[f]\}]$

Teorema Se f è L-trasformabile $\forall s \in \pi_f$ esiste

$$Lf(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

detta trasf. di Laplace di f .

Il fatto che $s \in \mathbb{C}$ mette in evidenza una relazione tra trasf. di Laplace e di Fourier

$$Lf(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(\sigma+i\omega)} dt = \int_0^{+\infty} [f(t) e^{t\sigma}] e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{matrix} s &= \sigma + i\omega \\ \mathbb{C} &\mathbb{R} &\mathbb{R} \end{matrix}$$

Introduciamo la funzione "gradino" $[u(t) = \chi_{(0,+\infty)}(t)]$

$$\omega = 2\pi \Im$$

$$\mathcal{L} f(\sigma + i\omega) = \int_{\mathbb{R}} [u(t) f(t) e^{-t\sigma}] e^{-i\omega t} dt \stackrel{\downarrow}{=} \Im [u(t) f(t) e^{-t\sigma}] \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

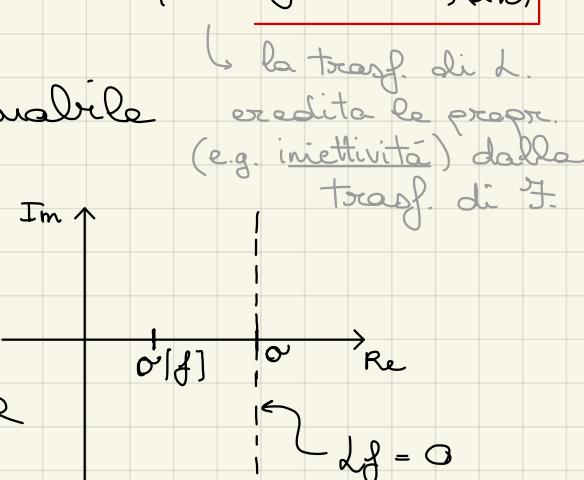
Sia $\sigma > \sigma_f$ con f L-trasformabile e supponiamo che sia

$$\mathcal{L} f(\sigma + i\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Im [u(t) f(t) e^{-t\sigma}] = 0$$

$$\Rightarrow u(t) f(t) e^{-t\sigma} = 0 \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t > 0$$



Teorema Se f è una funz. L-trasf. e per un certo $\sigma > \sigma_f$ risulta $\mathcal{L} f(\sigma + i\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ allora $f(t) = 0$ per q.o. $t > 0$

Corollario Se f, g sono 2 funz. L-trasf. e per un certo $\sigma > \max(\sigma_f, \sigma_g)$ risulta $\mathcal{L} f(\sigma + i\omega) = \mathcal{L} g(\sigma + i\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ allora $f(t) = g(t) \quad \text{per q.o. } t > 0$

$$f(t) = e^{3t} \quad \xrightarrow{\text{seguali}} \quad f(t) = \begin{cases} e^{3t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{qui } f \text{ viene} \\ \text{moltiplicata} \\ \text{per } u(t) \end{array}$$

$$\underline{\text{Ese:}} \quad f(t) = 1 \quad (\text{cioè } f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = u(t))$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(u(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\underline{\text{Ese:}} \quad f(t) = e^{\alpha t} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\sigma \subset)$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{Re}\{s\} > \text{Re}\{\alpha\}$$

$$\longrightarrow \alpha = i\omega$$

perché $\text{Re}\{s - \alpha\} > 0$
 $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{\alpha\}$ affinché l'integrato converga

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$\Rightarrow L(\cos \omega t)(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L(\sin \omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

$$\rightarrow \alpha = \alpha + i\omega$$

$$L(e^{\alpha t} e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s - (\alpha + i\omega)} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$L(e^{\alpha t} \cos t)(s) = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$L(e^{\alpha t} \sin t)(s) = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

Ese: $f(t) = t^n$

$$L(t^n)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \left[t^n \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{s} dt$$

$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

$$= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} L(t^{n-1})(s)$$

$$\Rightarrow L(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$L(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$L(e^{\alpha t})(s) = \frac{1}{s - \alpha} \quad \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{\alpha\}$$

$$L(\cos \omega t)(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad L(\sin \omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Criterio di trasformabilità

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile e a crescita di più esponenziali, ossia: $\exists c, \alpha > 0$ t.c.

$$|f(t)| \leq c e^{\alpha t} \quad \forall t > 0.$$

Allora f è L -trasformabile (ad es: $f(t) = e^t$ NON è L -trasformab).

Teorema (proprietà della trasf. di Laplace)

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ L-trasformabile. Allora:

- 1) $\mathcal{L}f(s) \rightarrow 0$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$ L f limitata
- 2) $\forall \sigma_0 > \sigma[f] \exists c > 0$ t.c. $|\mathcal{L}f(s)| \leq c \quad \forall s \mid \operatorname{Re}\{s\} \geq \sigma_0$
- 3) $\mathcal{L}f \in C^\infty(\pi_f)$ (derivabile anche in senso complesso)
 $e \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s) \quad \forall s \mid \operatorname{Re}\{s\} \geq \sigma[f]$

Ese: $\mathcal{L}(t^n e^{at})(s) = ?$

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \quad e \quad \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(e^{at})(s) = \mathcal{L}((-t)^n e^{at})(s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n e^{at})(s) &= (-t)^n \mathcal{L}((-t)^n e^{at})(s) = (-t)^n \underbrace{\frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s-a} \right)}_{(-t)^n \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}} = \\ &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Ese: $\mathcal{L}(t e^{2t} \sin 3t)(s) = ?$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{2t} \sin 3t)(s) &= \frac{3}{(s-2)^2 + 3^2} \quad e \quad \frac{d}{ds} \mathcal{L}(e^{2t} \sin 3t)(s) = \\ &\quad = \mathcal{L}(-t e^{2t} \sin 3t)(s) \\ \mathcal{L}(t e^{2t} \sin 3t)(s) &= - \frac{d}{ds} \mathcal{L}(e^{2t} \sin 3t)(s) \\ &= - \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{(s-2)^2 + 9} \right) = \frac{6(s-2)}{((s-2)^2 + 9)^2} \end{aligned}$$

Convoluzione di segnali

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\sigma \mathbb{C}) \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

Se $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} (\sigma \mathbb{C})$ segnali: $f(t)u(t)$, $g(t)u(t)$

$$(f u * g u)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau) u(t-\tau) g(\tau) u(\tau) d\tau$$

$0 < \tau < t$ $t - \tau > 0$ $\tau > 0$

$$\Rightarrow (f * g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Teorema Se $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili e f, g sono integrabili su ogni intervallo $[0, K]$ per $K > 0$, allora $f * g$ è ben definito $\forall t > 0$ e $f * g$ è integrabile in ogni $[0, K]$ per $K > 0$

Esempio: $(u * u)(t) = \int_0^{+\infty} u(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau = t \cdot u(t)$ = "reampa"

$$\begin{aligned} \text{Esempio: } (t * t)(t) &= \int_0^\infty (t-\tau) u(t-\tau) \tau u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau) \tau d\tau = \left[t \cdot \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{6} u(t) \end{aligned}$$

Teorema (trasf. di Laplace della convoluzione)

Siano f, g due segnali L-trasf. Allora anche $f * g$ lo è e $\forall s$ t.c. $\operatorname{Re}\{s\} > \max(\sigma[f], \sigma[g])$

$$[\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s)]$$

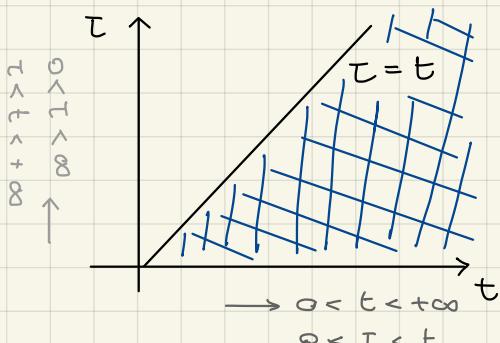
Dimostrazione: $\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt =$$

$$\# = \int_0^\infty g(\tau) \left(\int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau =$$

$0 < t < +\infty$
 $0 < \tau < t$
 $0 < \tau < +\infty$
 $\tau < t < +\infty$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty g(\tau) \left(\int_0^{+\infty} f(u) e^{-s(\tau+u)} du \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^{+\infty} f(u) e^{-su} du = \\ &= \mathcal{L}g(s) \cdot \mathcal{L}f(s) \end{aligned}$$



per garantire questo passaggio applico Fubini-Tonelli, cioè controllo che converga l'integrale iterato del modulo

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| e^{-\tau \operatorname{Re}\{s\}} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} |f(u)| e^{-u \operatorname{Re}\{s\}} du < +\infty \text{ poiché per hp.:}$$

$$|\mathcal{L}g(s)| = e^{-\operatorname{Re}\{s\}t}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > \sigma[f] \text{ e } \operatorname{Re}\{s\} > \sigma[g]$$

Esempio: $\mathcal{L}(t * t * \dots * t)(s) = (\mathcal{L}(t)(s))^n = \left(\frac{1}{s^2}\right)^n = \frac{1}{s^{2n}} = \mathcal{L}(?)(s)$

$$\text{ma } \mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}} \implies 2n = k+1 \\ k = 2n-1$$

$$\mathcal{L}(t^{2n-1})(s) = \frac{(2n-1)!}{s^{2n}}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}(s)\right) = \frac{1}{s^n} \implies \underbrace{[t * t * \dots * t]}_{n \text{ volte}} = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

iniettività della trasf.

Teorema (trasf. di Laplace dell'integrale)

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ L-trasf. e sia $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Allora F è L-trasf. e $\forall s$ t.c. $\operatorname{Re}\{s\} < \max(\sigma[f], 0)$ si ha

$$[\mathcal{L}F(s) = \underline{\frac{\mathcal{L}f(s)}{s}}]$$

$$\mathcal{L}(f') = ?$$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau \implies \mathcal{L}(f(t) - f(0)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f'(\tau) d\tau\right)$$

\downarrow

$$= \underline{\frac{\mathcal{L}f'(s)}{s}}$$

$f \in C^1(0, +\infty)$ o almeno: $f \in C^0[0, +\infty)$
e f derivabile a tratti

Teorema (trasf. di Laplace della derivata)

Sia $f \in C^0[0, +\infty)$ derivabile a tratti e f' sia L-trasf. Allora anche f è L-trasf e $\forall s: \max(\sigma[f'], 0)$ si ha

$$[\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)]$$

$$\mathcal{L}f''(s) = s\mathcal{L}f'(s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}f(s) - sf(0) - f'(0)$$

Teorema (trasf. di Laplace della derivata n-esima)

Sia $f \in C^{n-1}[0, +\infty)$ e sia $f^{(n)}$ derivabile a tratti e sia $f^{(n)}$ L-trasf. Allora sono L-trasf. anche $f, f', \dots, f^{(n)}$ e vale:

$$[\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)]$$

Osservazione sulla rapidità di convergenza a zero di $Lf(s)$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$:

Sappiamo che H_f L-trasf è $Lf(s) \rightarrow 0$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$

Se f soddisfa le ip. dell'ultimo teorema, ho che

$$L(f^{(n)}(t))(s) \rightarrow 0 \text{ per } \operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$$

quindi anche $s^n Lf(s) - \{s^{n-1}f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)\}$ tenderà a zero.

regolarità di f in 0

Se $\{ \dots \}$ fosse zero, avrei che $s^n Lf(s) \rightarrow 0$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$ cioè $Lf(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$

Teorema Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f = 0$ per $t < 0$ e $f^{(n)}$ deriv. a tratti con $f^{(n)}$ L-trasf.

Allora $L(f^{(n)}(t))(s) = s^n Lf(s)$ e in

particolare $Lf(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $\operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty$

Ritardo nel dominio di Laplace (formule di s-shift)

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ L-trasf. e calcoliamo:

$$L(f(t)e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-st} dt = Lf(s-a), \quad \operatorname{Re}\{s-a\} > \mathcal{O}[f]$$

Teorema Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ L-trasf. Allora $\forall a \in \mathbb{C}$ anche $f(t)e^{at}$ è L-trasf e:

$$L(f(t)e^{at}) = Lf(s-a) \quad \forall s \text{ t.c. } \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{a\} + \mathcal{O}[f]$$

Ese: calcolare $e^{-t} * \underbrace{e^{-t} * \dots * e^{-t}}_{n \text{ volte}}$

$$L(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1} \quad n \text{ volte}$$

$$L(e^{-t} * \dots * e^{-t})(s) = (L(e^{-t})(s))^n = \frac{1}{(s+1)^n} = L(?)$$

$$\mathcal{L}(t^k e^{at})(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \quad a = -1, \quad k+1 = n$$

$$k = n-1$$

$$k! = (n-1)!$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(s-1)^n} = \mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!}\right)(s)$$

$$\left[e^{-t} * \dots * e^{-t} \underset{n \text{ volte}}{=} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} \right]$$

Metodo della trasf. di Laplace per risolvere problemi per equazioni differenziali ordinarie (lineari, a coeff. costanti)

$$\rightarrow ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Senza l'uso della trasf. di Laplace:

- 1) risolve l'eq. omogenea $f(t) \equiv 0$
- 2) " " completo (col metodo di somiglianza) quando f ha una forma particolare.

\rightarrow la trasf. di Laplace permette di trattare termini noti $f(t)$ "qualsiasi"

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) & a, b, c, y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ assegnate.} \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ L-transformabile.}$$

Applichiamo \mathcal{L} :

$$\text{indichiamo } Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s) \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$$

per le formule delle derivate si ha

$$a(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) + b(s Y(s) - y(0)) + c Y(s) = F(s)$$

$$Y(s)(as^2 + bs + c) = F(s) + a y_0 s + a y_1 + b y_0$$

$$Y(s) = F(s) \underbrace{\left(\frac{1}{as^2 + bs + c} \right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{ay_0 s + by_1 + cy_0}{as^2 + bs + c} \right)}_{G(s)}$$

Il problema di Cauchy determina univocamente
 $y(s) = \lambda(y(t))(s)$ e quindi " " " $y(t)$.

Per calcolare $y(t)$ deve antitrasf. il 2° termine dell' uguaglianza

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s), \quad H(s) \in G(s)$$

Supponiamo di aver trovato 2 funzioni $h(t)$ e $g(t)$ tali che:

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = H(s) \quad \mathcal{L}(g(t))(s) = G(s)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot F(s) + G(s) = L(f * h) + L(g) = L(f * h + g)$$

$$y(t) = (f * h)(t) + g(t)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + g(t)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{as^2 + bs + c} \right)$$

dipende solo da a, b, c cioè dal sistema, NON dalle condizioni iniziali, NON dal termine icto

$$g(t) = L^{-1} \left(\frac{ay_0 s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c} \right)$$

dipende da a, b, c e dalle condizioni iniziali

$$g(t) = 0 \quad \text{se} \quad y_0 = y_1 = 0$$

Il problema è ricordato a saper antitrasformare
funzioni razionali del tipo $\frac{as + b}{as^2 + bs + c}$

Se avessi una eq. diff. ord. lin. di ordine $n > 2$, a coeff. costanti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

a_i, y_i assegnati
 f L-transformabile

Applichando L:

$$a_n(s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - \dots - y_{n-1}) + \dots + a_0 Y(s) = F(s)$$

polinomio di
gr. $n-1$ che
dipende dalle
condizioni
iniziali

$$Y(s) \cdot (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = F(s) \cdot q_{n-1}(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left(\underbrace{\frac{1}{q_n(s)}}_{H(s)} + \underbrace{\frac{p_{n-1}(s)}{q_n(s)}}_{G(s)} \right)$$

$p_{n-1}(s)$: polinomio di
gr. n che NON dipende dalle
cond. iniziali

Il problema si ricorda a saper antitrasformare
funzioni razionali in cui il denominatore
ha grado n e il numeratore ha grado $\leq n-1$

$$\frac{\alpha s + \beta}{\alpha s^2 + bs + c}$$

Ricordiamoci:

$$L(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$L(e^{at} \cos \omega t)(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$L(e^{at} \sin \omega t)(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$L(t^n e^{at})(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Esempi (antitrasformata di funzioni razionali):

$$1) \frac{2s+1}{s^2+2s-3} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+3} = \frac{\alpha s - 3a + bs - b}{s^2 + 2s - 3}$$

$$\begin{cases} \alpha s + bs = 2s \\ -3a - b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{3/2}{s-1} + \frac{7/2}{s+3} \quad L^{-1}\left(-\frac{3/2}{s-1} + \frac{7/2}{s+3}\right) = -\frac{3}{2}e^t + \frac{7}{2}e^{3t}$$

$$2) \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = 2e^{-t} - te^{-t}$$

$$3) \frac{2s+1}{s^2+2s+3} = \frac{2s+1}{(s+1)^2+2} = \frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+2} = 2 \frac{s+1}{(s+1)^2+2} - \frac{1}{(s+1)^2+2}$$

$$= L(2e^{-t} \cos \sqrt{2}t - \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t)$$

Esempi (risoluzione del problema di Cauchy):

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x_{(0,1)}(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = L(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$y(t) = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] f(\tau) d\tau$$

formula risolutiva
per qualsiasi termine
noto $f(t)$

$$f(t) = x_{(0,1)}(t) \quad t > 1 \rightarrow y(t) = \int_0^1 \dots d\tau$$

$$t < 1 \rightarrow y(t) = \int_0^t \dots d\tau$$

$$\int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau = \int_0^t [e^{-\tau} - e^{-2\tau}] d\tau = \left[-e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \right]_0^t =$$

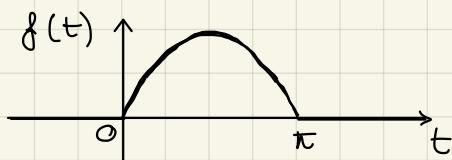
$$\int_0^t f(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(u) (-du) = \int_0^t f(\tau) d\tau = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t < 1$$

$$\int_0^1 [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau = \left[e^{-(t-\tau)} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2} \right]_0^1 = e^{-(t-1)} - \frac{e^{-2(t-1)}}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

$$y(t) = \begin{cases} -e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} & 0 < t < 1 \\ -e^{-t}(1-e) + \frac{e^{-2t}}{2}(1-e^2) & t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + qy = x_{(0,\pi)}(t) \underbrace{\sin t}_{f(t)} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + q Y(s) = F(s)$$



$$Y(s) = \frac{F(s) + 4}{(s^2 + 9)} = \mathcal{L} \left(f * \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{4}{3} \sin 3t \right)$$

$$y(t) = \frac{4}{3} \sin 3t + \frac{1}{3} \int_0^t \sin 3(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$f(t) = \sin t \chi_{(0,\pi)}(t)$$

$$\int_0^t \sin 3(t-\tau) f(\tau) d\tau = \begin{cases} t > \pi, & \int_0^\pi \sin 3(t-\tau) \sin \tau d\tau \\ t < \pi, & \int_0^t \sin 3(t-\tau) \sin \tau d\tau \end{cases}$$

$$\int \sin 3(t-\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int [\cos(3t-4\tau) - \cos(3t-2\tau)] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \sin(3t-4\tau) + \frac{1}{2} \sin(3t-2\tau) \right]$$

$$\int_0^t \sin 3(t-\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \sin(3t-4\tau) + \sin(3t-2\tau) \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{8} [3 \sin t - \sin 3t]$$

$$\int_0^\pi \sin 3(t-\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \sin 3t + \sin 3t + \frac{1}{2} \sin 3t - \sin 3t \right]^\pi_0$$

$$= \emptyset$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sin t, & t > \pi \\ \frac{4}{3} \sin t + \frac{1}{24} [3 \sin t - \sin 3t], & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Ritardo nel dominio del tempo (t-shift)

$$\mathcal{L}(f(t-t_0) u(t-t_0))(s) = \int_0^{+\infty} f(t-t_0) u(t-t_0) e^{-st} dt =$$

$$= \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau) u(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

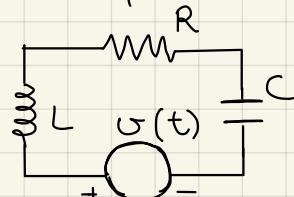
$t-t_0 = \tau$
 $d\tau = dt$

Formule di t-shift: $[\mathcal{L}(f(t-t_0) u(t-t_0))(s) = e^{-st_0} \mathcal{L}f(s)]$

$$\forall s \in \text{Re}\{s\} > \sigma[f]$$

Applicazione della trasf. di Laplace ai circuiti elettrici

Circuito LCR



$i(t)$ = intensità di corrente nel circuito

$q(t)$ = carica nel condensatore

$$L_i' + R_i + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = q'(t)$$

Doveva anche i membri:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{c} = \omega' \quad E.D.O. \quad \text{line. del 2° ordine}$$

a coeff. costanti (complete)

Ma se la tensione $v(t)$ non è una funzione derivabile cosa si può fare?

$$q(t) = q(c) + \int_c^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} d\tau = q_0 + \int_c^t i(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \left[L i'(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \left\{ q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right\} = \sigma(t) \right]$$

eq. integro-differenziale dei circuiti LCR

- $q_0 = q(0)$ $i_0 = i(0)$
 - cond. iniziali
 - $\omega(t)$ assegnata
 - L, C, R costanti assegnate ($\neq 0$)
 - $i(t)$ funzione incognita

Applichiamo la trasf. di Laplace supponendo $i(t)$ e $v(t)$ 2.-trasformabili.

$$\text{Chiamiamo } \mathcal{I}(s) = L(i(t))(s), \quad \mathcal{V}(s) = L(v(t))(s)$$

$$\Rightarrow L(sI(s) - i(0)) + R I(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{q(0)}{s} + \frac{1}{s} I(s) \right\} = V(s)$$

$$I(s) \left(L_s + R + \frac{1}{C_s} \right) = V(s) + I_o - \frac{q_o}{C_s}$$

$$I(s) = \underbrace{\left(\frac{Cs}{LCS^2 + RCS + 1} \right)}_{H(s)} V(s) + \underbrace{\left(\frac{LCi_0 s - q_0}{LCS^2 + RCS + 1} \right)}_{G(s)}$$

$$\text{Chiamiamo } h, g : \mathcal{L}(h(t))(s) = H(s) \quad \mathcal{L}(g(t)) = G(s)$$

$$I(s) = \mathcal{L}(i(t))(s) = \mathcal{L}((h * v)(t) + g(t))(s)$$

$$\Rightarrow i(t) = g(t) + \int_0^t h(t-\tau) v(\tau) d\tau$$

dipende dal circuito e dalle cond. iniziali, non da $v(t)$. g

dipende solo del circuito

Si verifica che (se $R \neq 0$): $i(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ cioè i è un TRANSITORIO - i è regolare.

La regolarità delle soluzioni $i(t)$ dipende dal termine integrale.

Se v è continua, $h*v$ è derivabile

Se v è discontinua, $h*v$ è continua ma non derivabile

$$\text{Es: } R = 2 \quad L = 1 \quad C = 0,5 \quad v(t) = 1000 X_{(0,2)}(t)$$

$$i'(t) + 2i(t) + 2 \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t) \quad i_0 = 0, \quad \underbrace{q_0 = 0}_{g(t) = 0}$$

$$sI(s) + 2I(s) + 2 \frac{I(s)}{s} = V(s)$$

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} V(s)$$

$$\frac{s}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = 2(e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t)$$

$$\Rightarrow i(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} (\cos(t-\tau) - \sin(t-\tau)) v(\tau) d\tau$$

$$v(t) = 1000 X_{(0,2)}(t)$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 & 1000 \int_0^t e^{\tau-t} (\cos(\tau-t) + \sin(\tau-t)) d\tau \\ t > 2 & 1000 \int_0^2 e^{\tau-t} (\cos(\tau-t) + \sin(\tau-t)) d\tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (e^\tau \sin \tau)' &= \\ = e^\tau (\sin \tau + \cos \tau) &\rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 & 1000 [e^{-\tau} \sin \tau]_0^t = 1000 e^{-t} \sin t \\ t > 2 & 1000 [e^{\tau-t} \sin(\tau-t)]_0^t = [e^{2-t} \sin(2-t) + e^{-t} \sin t] 1000 \end{cases} \end{aligned}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq 2, & 1000 e^{-t} \sin t \\ t > 2, & 1000 e^{-t} (\sin t + \sin(2-t)) \end{cases} \quad (\text{cont. non deriv.})$$

Circuito RC

$$\left[R i(t) + \frac{1}{C} \left\{ q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right\} = v(t) \right] \quad \begin{array}{l} \text{eq. integrale} \\ \text{(non integro-diff.)} \end{array}$$

Nou devo impostare una condizione sì.

$$R i(0^+) + \frac{1}{C} q_0 = v(0^+) \rightarrow i_0 \text{ è determinato dalla' equazione}$$

Che regolarità mi posso aspettare su $i(t)$?

Il termine $\int_0^t i(\tau) d\tau$ è una funz. continua se $i(\tau)$ è integrabile localmente

Se $v(t)$ è discontinua, $i(t)$ deve essere discontinua.

\Rightarrow Un'equazione integrale come quella del circuito RC non regolare.

$$RI(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{q_0}{s} + \frac{I(s)}{s} \right\} = V(s)$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{Cs}{RCs+1}}_{L(?)} V(s) - \underbrace{\frac{q_0}{RCs+1}}_{L\left(\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right) \text{ transitorio}}$$

$\frac{Cs}{RCs+1}$ non può essere la trasformata di una funzione $h(t)$ L-trasf, perché

$$\text{per } \operatorname{Re}\{s\} \rightarrow +\infty \quad \frac{Cs}{RCs+1} \rightarrow \frac{1}{R} \neq 0$$

$$\frac{Cs}{RCs+1} = \frac{1}{R} \frac{(RCs+1)-1}{RCs+1} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{RCs+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{Cs}{RCs+1} \cdot V(s) &= \frac{1}{R} V(s) - \frac{1}{R} V(s) \frac{1}{RC} \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \\ &= L \left(\frac{v(t)}{R} - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} * v(t) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} - \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} v(\tau) d\tau - \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

stessa regolarità
di $v(t)$

convoluzione più regolare di $v(t)$

transitorio,
regolare

Circuito LR

$$\boxed{[Li'(t) + Ri(t) = v(t)]} \quad \text{eq. differenziale} \\ (\text{non integro-diff.})$$

Dicoo conoscere $i(0) = i_0$ ma non q_0 .

Mi aspetto che $i(t)$ sia almeno continua, derivabile se v è continua, non deriv. nei punti di discontinuità di v .

$$L(sI(s) - i_0) + RI(s) = V(s)$$

$$I(s) = V(s) \frac{1}{L} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}} = L(v(t) * e^{-\frac{Rt}{L}} + i_0 e^{-\frac{Rt}{L}})(s)$$

$$\Rightarrow i(t) = i_0 e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} v(\tau) d\tau$$

transitorio,
regolare ha un grado di regolarità
in più rispetto a $v(t)$

Circuito LC $\left[Li'(t) + \frac{1}{C} \left\{ q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right\} = v(t) \right]$
 eq. integro-differenziale

Dicoo assegnare $i(0) = i_0$ e $q(0) = q_0$.

Mi aspetto $i(t)$ un grado più regolare di $v(t)$.

$$L(sI(s) - i_0) + \frac{1}{C} \left\{ q_0 + \frac{I(s)}{s} \right\} = V(s)$$

$$I(s) = V(s) \cdot \underbrace{\left(\frac{Cs}{LCs^2 + 1} \right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{LCi_0 s - q_0}{LCs^2 + 1} \right)}_{G(s)}$$

Possiamo antitrasformare sia $H = Lh$ che $G = Lg$.

$$i(t) = (h * v) + g \quad g = 0 \quad \text{se } i_0, q_0 = 0$$

$i(t)$ più regolare di $v(t)$

In questo caso g NON
è un TRANSITORIO (non
essendo ci R manca il termine
di smorzamento $e^{-\alpha t}$)

Equazioni integrali di Volterra

$$\left[y(t) - \int_0^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t) \right]$$

$y(t)$ è la funz. incognita

$f(t)$ è un termine noto (input esterno)

$K(t, \tau)$ matrice integrale, descrive il sistema

Sono equazioni che descrivono fenomeni "con memoria" o "ereditari", in cui il valore della soluzione al tempo t dipende da tutti i valori della soluzione per tempi precedenti (e.g.: dinamica delle popolazioni).

Le eq. di Volterra possono essere di seconda specie (quella qui trattata) o di prima specie:

$$-\int_0^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t) \quad 1^{\circ} \text{ specie} \quad (\text{più difficile da risolvere})$$

$$y(t) - \int_0^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t) \quad 2^{\circ} \text{ specie}$$

Caso particolare: $K(t, \tau) = K(t - \tau)$

$$y(t) - \int_0^t K(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t) \quad \text{eq. integrale di Volterra, di } 2^{\circ} \text{ specie, di convoluzione}$$

$$\Downarrow$$
$$y(t) - K(t) * y(t) = f(t)$$

$$Y(s) - K(s) Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)} = \underbrace{\left(1 + \frac{K(s)}{1 - K(s)}\right)}_{H(s)} F(s)$$

non ha \Rightarrow antitrasf.
ha \Rightarrow antitrasf.

Se trovo h t.e. $Lh = H$:

$$Y(s) = H(s) F(s) + F(s)$$

$$y(t) = h(t) * f(t) + f(t)$$

la soluzione avrà la stessa regolarità di f

Esempio: $y + 2y * \cos t = f$ con $f(t) = \cos t$

$$Y(s) + 2Y(s) \frac{s}{s^2 + 1} = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1} = F(s) \left(1 - \frac{2s}{(s+1)^2}\right)$$

$$Y(s) = F(s) - f(s) \left(\frac{2(s+1)}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^2} \right)$$

$$\quad \quad \quad " = " - \left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} \right)$$

$$\rightarrow y(t) = f(t) - f(t) * (2e^{-t} - 2te^{-t})$$

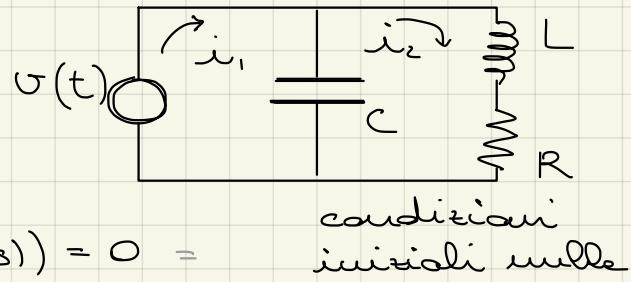
$$= f(t) - 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} [1 - (t-\tau)] f(\tau) d\tau \quad \text{per qualsiasi } f.$$

Se $f(t) = \cos t$: $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t} - te^{-t} = \frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Esempio:



$$\begin{cases} \frac{1}{Cs} (I_1(s) - I_2(s)) = V(s) \\ Ls I_2(s) + R I_2(s) + \frac{1}{Cs} (I_2(s) - I_1(s)) = 0 \end{cases}$$

$$I_2(s) (Ls + R) = V(s)$$

$$\begin{cases} I_2(s) = \frac{V(s)}{Ls + R} = V(s) \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) \\ I_1(s) = I_2(s) + Cs V(s) = \frac{V(s)}{Ls + R} + Cs V(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow i_2(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} U(\tau) d\tau$$

Come lo antitrasformo?

$$\mathcal{L}(U'(t))(s) = sV(s) - U(0)$$

1. Supponiamo per semplicità che $U(0) = 0$

$$\rightarrow i_1(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} U(\tau) d\tau + C U'(t)$$

Se, ad es., $U(t) = \sin \omega t$ ($U(0) = 0$) allora

$$U'(t) = \omega \cos \omega t \quad U'(0) \neq 0$$

$$i_1(0) = 0 + C \cdot U'(0) \neq 0 ! \quad (i_1(t) = 0 \quad \forall t < 0)$$

\implies Si presenta una discontinuità delle corrente nell'istante iniziale

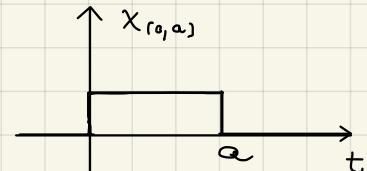
2. Se $\underline{v}(0) \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} L^{-1}(sV(s)) &= L^{-1}(sV(s) - v(0) + v(0)) = \\ &= L^{-1}(sV(s) - v(0)) + v(0)L^{-1}(1) = v'(t) + v(0) \underline{L^{-1}(1)} \end{aligned}$$

Come lo antitrasformo? ↗

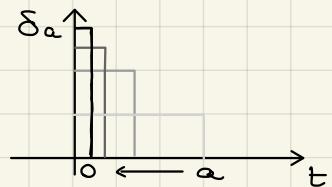
$$L(X_{[0,a]}(t))(s) = \int_0^a e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-sa}}{s}$$

per $a \rightarrow 0$ e s fissato, $\frac{1 - e^{-sa}}{s} \rightarrow 0$



$$L\left(\frac{1}{a}X_{[0,a]}(t)\right)(s) = \frac{1 - e^{-sa}}{sa} \sim \frac{sa}{sa} = 1 \text{ per } a \rightarrow 0$$

Chiamiamo $\delta_a(t) = \frac{1}{a}X_{[0,a]}(t)$



Quindi $L\left(\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t)\right)(s) = 1$

e (suppongo valga) anche $\lim_{a \rightarrow 0} L(\delta_a(t)) = 1 = L(\delta_0)$

δ_0 è detto impulso (delta di Dirac)

(NON È
una funzione)

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) dt = 1$$

$$\rightarrow i_1(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} v(\tau) d\tau + C v'(t) + C v(0) \delta_0$$

Equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico $u(x, y, z)$ generato da una distribuzione continua di cariche di densità $g(x, y, z)$

$$\Delta u = 4\pi k g$$

costante di Coulomb

Dal punto di vista matematico, cerco $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e assegno $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

In realtà, ρ potrebbe anche essere discontinua.

ρ sarà in generale integrabile.

$$Q_E = \iiint_E \rho dx dy dz \quad \text{carica totale contenuta nella regione } E$$

Ad esempio ρ può essere una carica puntiforme:

$$Q_E = \begin{cases} q & \text{se } \vec{o} \in E \\ 0 & \text{se } \vec{o} \notin E \end{cases} \quad \text{ovvero } Q_E = q \delta_0$$

$$\Delta u = 4\pi k \mu \quad \text{con } \mu = q \delta_0. \quad \text{misura di Dirac}$$

Se voglio poter studiare il p.t. elettrostatico in corrispondenza di una qualsiasi distribuzione di carica (discreta o continua) devo sapere studiare un'equazione differenziale del tipo

funzione misura

$$\Delta u = \mu \quad \text{dove } \mu \text{ è una misura assegnata}$$

Per farlo, ho bisogno di avere un insieme di oggetti: 1) di cui funzioni e misure siano casi particolari e 2) di cui sappia calcolare le derivate. ($\frac{d}{dx} \mu(x) = ? ? ?$)

In che senso funzioni e misure sono casi particolari di un oggetto più generale?

$$\mu: E \mapsto \mu(E) \quad (E \mapsto Q_E = q \delta_0)$$

$$\rho: E \mapsto \iiint_E \rho dx dy dz$$

Funzioni e misure sono particolari funzionali

Ma è meglio studiare i funzionali su spazi di funzioni che su spazi d'insieme

$$\mu: \varphi \mapsto \int \varphi(x) d\mu(x)$$

$$\rho: \varphi \mapsto \int \varphi(x) \rho(x) dx$$

Cerchiamo di vedere funzioni e misure come particolari funzionali lineari continui su un certo spazio di funzioni.

Se X e Y sono 2 sp. di funzioni, $X \subset Y$, sono più numerosi i funzionali continui su X o su Y ?

Se $\Lambda: Y \rightarrow \mathbb{R}$ a maggior ragione $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$

Più grande è lo sp. di funzioni, più piccole
lo spazio duale (e viceversa)

Se voglio avere tanti funzionali lin. cont. devo prendere uno sp. di funzioni "piccole".

Ad es: funzioni molto regolari (sp. di "funzioni test")

L'idea è:

1. introdurre uno sp. di "funzioni test" molto regolari
2. definire le distribuzioni come i funzionali lin. cont. su questo spazio
3. Riconoscere che le funzioni e le misure sono particolari distribuzioni

Spazio di funzioni test su \mathbb{R} (per cominciare; si possono usare anche sp. più complicati)

$D(\mathbb{R})$ = sp. delle funzioni test su \mathbb{R} = $C_0^\infty(\mathbb{R})$

"bump function" $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$f(x) \in D(\mathbb{R})$

↓
fuz. cont. e
mille fuori da un
intervallo limitato
(che varia da fuz.
a fuz.)

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ non è uno sp. di Banach (non c'è una norma che tenga conto di infinite derivate)

In $D(\mathbb{R})$ non definiamo una norma, ma definiamo direttamente una notione di convergenza per successioni di funzioni.

Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset D(\mathbb{R})$ e sia $f \in D(\mathbb{R})$.

Dico che $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ in $D(\mathbb{R})$ se:

1) $\exists [a, b]$ che contiene il supporto di f e di tutte le f_n

2) In $[a, b]$: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ uniform. e $\frac{d^k}{dx^k} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d^k}{dx^k} f$ uniform. $\forall k = 1, 2, \dots$

funzionale

D non è normato, ma vale la
solita def. di duale

Def Diciamo che $[T \in D'(\mathbb{R})]$ ("duale" di $D(\mathbb{R})$) se
 $T: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (σC), T è lineare e inoltre
 $[\forall \{f_n\} \subseteq D(\mathbb{R}) \text{ e } f \in D(\mathbb{R}) \text{ se } f_n \rightarrow f \text{ in } D(\mathbb{R})$
allora $T(f_n) \rightarrow T(f)$

nel senso della conv. in $D(\mathbb{R})$
(T è un "funzionale lin. cont" su $D(\mathbb{R})$)

Se $T \in D'(\mathbb{R})$ si dice che T è una
distribuzione su \mathbb{R} .

"dualità" o "crochet"
Se $T \in D'(\mathbb{R})$ di solito si scrive $\langle T, f \rangle$ invece
che $T(f)$; di solito le funzioni test si indicano
con φ, ψ .

Vediamo in che senso le funzioni sono particolari
distribuzioni.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se $T_f: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx \quad \begin{matrix} \downarrow \text{supp}(\varphi) \\ b \\ \text{cont. e limitata} \\ \downarrow L^1(a,b) \end{matrix}$$

T_f è lineare.

T_f è continuo? Mostriamo che se $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R})$
allora $\langle T_f, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$

- $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R}) \Rightarrow$
- 1) $\exists [a, b] \supseteq \text{supp}(\varphi_n) \quad \forall n$
 - 2) $\varphi_n \rightarrow 0$ uniforme in $[a, b]$

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_n \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) f(x) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi_n(x) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |\varphi_n(x)| |f(x)| dx \leq \|\varphi_n\|_{C^0[a,b]} \int_a^b |f(x)| dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{O}} 0 \end{aligned}$$

Ogni funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ induce una distribuzione T_f

$$T_f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx \text{ con } \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Azi, f si identifica nella distribuzione stessa
che induce (univocamente).

Se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $T_f = T_g$ cioè $\int_{\mathbb{R}} f \varphi = \int_{\mathbb{R}} g \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
 allora si può dimostrare che $f = g$ q.o. ($\{f\} = \{g\}$)
 $f \sim g$

Esercizi (trasformata di Laplace):

- $y - t e^{-t} * y = f$ (eq. integr. di Volterra)

y : funz. incognita f : termine noto assegnato

$$Y(s) = \mathcal{L}y(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}f(s)$$

$$\mathcal{L}(te^{-t}) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - e^{-2(t-\tau)}) f(\tau) d\tau$$

$$Y(s) - \frac{1}{(s+1)^2} Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left[\frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s} \right]$$

$$= F(s) \left[1 - \frac{1}{s(s+2)} \right]$$

$$= F(s) - F(s) \underbrace{\frac{1}{s(s+2)}}_{\downarrow}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \right)$$

- $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$ (prob. di Cauchy per E.D.O del 2° ordine)

$$Y(s) = \mathcal{L}y(s) \quad F(s) = \mathcal{L}f(s)$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2[s Y(s) - y(0)] + 5 Y(s) = F(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = F(s) + s - 4 + 2$$

$$Y(s) = F(s) \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}}_{\leftarrow} + \frac{s-2}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right)$$

$$\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = \\ = \mathcal{L} \left(e^{-t} \cos 2t - \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t * f(t) + e^{-t} \cos 2t - \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$\begin{cases} 3i' + \frac{i}{2} = v \\ i(0) = 2 \end{cases} \quad \text{con } v(t) = t X_{(0,1)}(t)$$

$$I(s) = 2i(s) \quad V(s) = 2v(s)$$

$$3(sI(s) - i(0)) + I\left(\frac{s}{2}\right) = V(s)$$

$$I(s) = \frac{2}{6s+1} V(s) + \frac{12}{6s+1} = 2\left(\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}} * v(t) + 2e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{6}} v(\tau) d\tau + 2e^{-\frac{t}{6}}$$

$$\text{Se } v(t) = t X_{(0,1)}(t): \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{6}} v(\tau) d\tau = \begin{cases} e^{-\frac{t}{6}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau & t < 1 \\ e^{-\frac{t}{6}} \int_1^t e^{\frac{\tau}{6}} \tau d\tau & t > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{t}{6}} (6e^{\frac{t}{6}}(t-6) + 36) = 6(t-6) + 36e^{-\frac{t}{6}} & t < 1 \\ e^{-\frac{t}{6}} (-56e^{\frac{t}{6}} + 36) & t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2i' + \frac{1}{4} \left(1 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t) \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{circuito LC})$$

$$2(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} + \frac{I(s)}{s} \right) = V(s)$$

$$I(s) = \frac{4s}{8s^2+1} V(s) - \frac{1}{8s^2+1}$$

$$\frac{s}{2(s^2+\frac{1}{8})} = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \quad \xrightarrow{\sqrt{8} \frac{\sqrt{8}}{8(s^2+\frac{1}{8})} = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{t}{2\sqrt{2}} \right)}$$

$$\Rightarrow i(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \cos \left(\frac{t-\tau}{2\sqrt{2}} \right) v(\tau) d\tau - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{t}{2\sqrt{2}}$$

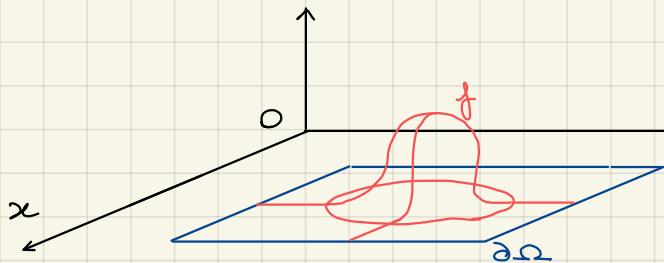
Estensione della teoria delle distribuzioni ad insiemi limitati e a più dimensioni

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto (eventualmente, $\Omega = \mathbb{R}^n$)

Spazio delle funzioni test: $D(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$\xrightarrow{\text{cosa significa in } \mathbb{R}^n?}$

Supporto compatto di Ω : $f = 0$ fuori da un certo sottoinsieme chiuso e limitato dell'aperto Ω



Le derivate di ogni ordine di f si annullano su $\partial\Omega$ e vicino a $\partial\Omega$.

$\{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\Omega)$ se:

- 1) \exists un insieme chiuso e limitato $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp } \varphi_n \subseteq K \quad \forall n$
- 2) $\varphi_n \rightarrow 0$ uniformemente in K e $\frac{\partial^\alpha \varphi_n}{\partial x^\alpha} \rightarrow 0$ uniformemente in $K \quad \forall \alpha$

$D'(\Omega)$: spazio delle distribuzioni su Ω

$D'(\Omega) = \left\{ T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C}), T \text{ è lineare e } \forall \{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega) \right.$
 $\left. \text{se } \varphi_n \rightarrow 0 \text{ (in } D(\Omega)) \text{ allora } T(\varphi_n) \rightarrow 0 \right\}$

\downarrow
 T continuo in Ω
 $\text{se } T \text{ è lineare } \Rightarrow T$ continuo
 ovunque

Classi di distribuzioni

- In che senso le distribuzioni generalizzano le funzioni

Sia $[f \in L^1_{loc}(\Omega)]$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$ f misurab.

$\hookrightarrow f \in L^1(K) \quad \forall K \subset \Omega$ chiuso e limitato

$$f \underset{L^1_{loc}(\Omega)}{\sim} T_f: \varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad T_f \text{ lineare}$$

Se $\{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ e $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\Omega)$

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{C^0(K)} \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_{\text{limitato } (L^1(K))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_f \in D'(\Omega)$$

Perciò ogni funz. $L^1_{loc}(\Omega)$ si può vedere come particolare distribuzione (ma NON ogni distribuzione si potrà vedere come funzione!)

- In che senso le distribuzioni generalizzano le misure.

In \mathbb{R}^n , consideriamo una misura μ tale che $[\mu(E)] < +\infty$ se E è un insieme misurabile e limitato.

$$\mu \rightsquigarrow T_\mu : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) = \langle T_\mu, \varphi \rangle$$

$$|\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \int_{\text{supp}(\varphi)} |\varphi(x)| d\mu(x) \leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{\mu(\text{supp}(\varphi))}_{< +\infty}$$

$\Rightarrow T_\mu$ è ben definita e ovviamente lineare

Se $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R}^n)$, $|\langle T_\mu, \varphi_n \rangle| \leq \|\varphi_n\|_\infty \mu(K)$ ($K = \text{supp}(\varphi_n) \neq \emptyset$)

$\Rightarrow T_\mu$ è una distribuzione

Ogni misura finita sui limitati si può vedere come particolare distribuzione

Se $d\mu(x) = g(x) dx$ con $g \in L^1_{loc}$ rientra nel caso prec.

Ese: δ_{x_0} misura di Dirac centrata in x_0 .

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases} \rightarrow \text{finita sui limitati (e anche illimitati)}$$

$$\begin{aligned} \langle T_{\delta_{x_0}}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\delta_{x_0}(x) = \int_{\{x_0\}} \varphi(x) d\delta_{x_0}(x) = \\ &= \varphi(x_0) \delta_{x_0}(\{x_0\}) = \varphi(x_0) \end{aligned}$$

- Distribuzioni che non sono né funzioni né misure

es: $T: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0) \quad T \text{ è ben def., lin., cont.}$$

$$\varphi_n \rightarrow 0 \text{ in } D(\mathbb{R}) \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0) \rightarrow 0$$

Chiaramente T non deriva né da funzioni (dovrebbe essere $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi'(0) + \varphi$) né da misure.

Criterio per dimostrare che un certo funzionale T è una distribuzione

Supponiamo di avere un funzionale lin. $T: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{o } \mathbb{C}$)

Se \forall intervalli $[-N, N]$ $\exists c > 0$ e $k = 0, 1, 2, \dots$ per cui

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ con $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N]$ vale $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{C^k[-N, N]}$

allora T è una distribuzione.

Dim.: supponiamo che $\{\varphi_n\} \subseteq D(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$.

Significa che $\exists [-N, N] \ni \text{supp}(\varphi_n) \quad \forall n$ e $\varphi_n \rightarrow 0$ mis. in $[-N, N]$
 $\frac{d^k \varphi_n}{dx^k} \rightarrow 0$ " " " $\forall k$

Ma allora se vale l'ipotesi del criterio:

$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi_n\|_{C^k[-N, N]} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ perciò $T \in D'(\mathbb{R})$

Oss.: $D'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Se $T, S \in D'(\Omega)$ anche $\lambda T + \mu S \in D'(\Omega)$

Ogni combinazione lineare di distribuzioni è un'altra distribuzione.

es.: $5\delta_0 + 5\delta_1$ è una misura e (quindi) anche una distribuzione

$5\delta_0 - 5\delta_1$ NON è una misura ma è una distribuzione

Derivata di una distribuzione

Se $T \in D'(\mathbb{R})$, vogliamo definire T' .

Ci aspettiamo che se $T = T_f$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = \text{supp}(\varphi) = [a, b]$$

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$
 $= \left[f(x) \varphi(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \langle T_f, \varphi' \rangle$
 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Quindi se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = \langle (T_f)', \varphi \rangle$$

↑
voglio che sia

Allora se $T \in D'(\mathbb{R})$, T distribuzione qualsiasi

Def: $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

Se $T \in D'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$ allora $\varphi' \in D(\mathbb{R})$ perciò $\exists \langle T, \varphi' \rangle$
 $\Rightarrow T'$ è ben def.

$$\begin{aligned} \langle T', \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle &= - \langle T, (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)' \rangle = - \langle T, \lambda_1 \varphi'_1 + \lambda_2 \varphi'_2 \rangle = \\ &= - \lambda_1 \langle T, \varphi'_1 \rangle - \lambda_2 \langle T, \varphi'_2 \rangle = \lambda_1 \langle T', \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T', \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow T'$ è lin. su $D(\mathbb{R})$:

Sia $\{\varphi_n\} \subset D(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$. Se $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$ anche $\varphi'_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$

Quindi $\langle T', \varphi_n \rangle = - \langle T, \varphi'_n \rangle \rightarrow 0$ (essendo T continuo su $D(\mathbb{R})$)
 $\Rightarrow T'$ è continuo su $D(\mathbb{R})$

|| $\forall T \in D'(\mathbb{R})$ se definiamo $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$
 ottieniamo che $T' \in D'(\mathbb{R})$

Ogni distribuzione è derivabile, e la sua derivata è a sua volta una distribuzione.

Quindi ogni distribuzione è derivabile infinite volte

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

$$\langle T'', \varphi \rangle = - \langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle$$

Teorema Ogni distribuzione è derivabile infinite volte e per $n = 1$ è una definizione, non un teorema

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

Abbiamo definito T' in modo che nel caso particolare in cui $T = T_f$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ risulti $(T_f)' = T_{f'}$.

Se ora $T = T_f$ ma $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ esse è detta che si ottenga lo stesso risultato.

Vediamo di capire, se $f \notin C^1(\mathbb{R})$, cos'è $(T_f)'$, che si dirà "derivata distributionale di f ".

Ese: $f(x) = |x| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx = \\ &= \left[x \varphi(x) \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \left\{ \left[x \varphi(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \right\} \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\langle (T_{|x|})', \varphi \rangle = \langle T_{\text{sign}(x)}, \varphi \rangle \rightarrow \boxed{(T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)}}$$

Ese: $\mu(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ in \mathbb{R} non mi importa se è definita q.o. $(T_\mu)' = ?$

$$\begin{aligned} \langle (T_\mu)', \varphi \rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= - [\varphi(+\infty) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \langle T_{\delta_0}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{(T_\mu)' = T_{\delta_0}}$$

$$\text{sign}(x) = 2\mu(x) - 1 \rightarrow T_{\text{sign}(x)} = 2T_\mu - 1$$

$$(T_{\text{sign}(x)})' = 2(T_\mu)'$$

$$\Rightarrow (T_{\text{sign}(x)})' = 2T_{\delta_0} = 2\delta_0$$

$$\delta'_0 = ? \quad \langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

$|x|$ funzione derivabile a tratti, continua

$\text{sgn}(x)$ funzione discontinua

δ_0 misura

δ'_0 distribuzione (né misura né funzione)

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si dice "derivata distribuzionale" di f la distribuzione $(T_f)'$.

Nel caso in cui $(T_f)' = T_g$ (la derivata distribuzionale sia identificabile con una funzione $g \in L^1_{loc}$) si dice anche che g è la derivata distribuzionale di f .

Teorema (derivata distribuzionale di una $L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si vuole calcolare $(T_f)'$.

1. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$
2. Se $f \in C^1$ tranne in un punto angoloso x_0 in cui è continua allora $(T_f)' = T_{f'}$ dove f è definita q.c.
3. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 di discontinuità salto allora $(T_f)' = T_{f'} + (f(x_0^+) - f(x_0^-)) \delta_{x_0}$.
4. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 in cui è continua ma con derivata iniezione e $f' \in L^1_{loc}$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

(I p.ti 1-4 si estendono a un n° qualsiasi di punti di non derivabilità)

Ese: $(T_{\sqrt[3]{x}})' = T_{\frac{1}{3x^{2/3}}}$ secondo il teorema precedente.

$$\begin{aligned} \langle (T_{\sqrt[3]{x}})', \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \sqrt[3]{x} \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[3]{x} \varphi'(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \sqrt[3]{x} \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \sqrt[3]{x} \varphi'(x) dx \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[\sqrt[3]{x} \varphi(x) \right]_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{3x^{2/3}} \varphi(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \left[\sqrt[3]{x} \varphi(x) \right]_{\varepsilon}^N - \int_{\varepsilon}^N \frac{\varphi(x)}{3x^{2/3}} dx \right\} \\
&= \int_{-N}^N \frac{\varphi(x)}{3x^{2/3}} dx = \langle T_{\frac{1}{3x^{2/3}}}, \varphi \rangle \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Ese: a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3|x+1|$

\uparrow p.t. 4 \uparrow p.t. 1

$$(T_f)' = T_f' \text{ con } f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} + 3 \text{ segu } (x+1)$$

b) $f(x) = \arctg \frac{1}{x} \in C^1$ tranne in $x_0 = 0$ dove c'è un salto

$$f(0^+) - f(0^-) = \pi \quad \text{p.t. 3}$$

$$(T_f)' = T_{-\frac{1}{x^2+1}} + \pi \delta_0$$

c) $f(x) = e^{-x} u(x) \in C^1$ tranne in $x_0 = 0$ dove c'è un salto

$$f(0^+) - f(0^-) = 1$$

$$(T_f)' \sim -e^{-x} u(x) + \delta_0$$

Estensione della derivata distribuzionale ad insiem limitati e a più dimensioni.

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

Def: $\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$ per $j = 1, 2, \dots, n$

La def. è data in modo che nel caso particolare $T = T_f$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ risulti

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$$

Verifichiamo ora perché se Ω è un aperto in \mathbb{R}^3 , $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C'_0(\Omega)$ allora:

$$\left[\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi = - \iint_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] \text{ (applicazione del teorema delle divergenza in } \mathbb{R}^3)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (f \varphi)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}$$

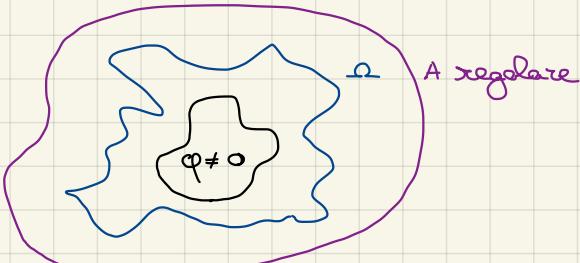
$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(f \varphi \vec{e}_j) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \iiint_A \operatorname{div}(f \varphi \vec{e}_j) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \iint_{\partial A} f \varphi \vec{n}_j \cdot d\vec{s} = 0$$

\downarrow
0 in ∂A

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi = - \iint_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$



$$\varphi \in C_c^1(\Omega)$$

Si dimostra che \forall distribuzione $T \in D'(\Omega)$ risulta

$$\left[\langle \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \rangle \right] \alpha \text{ multiindice}$$

$$\text{es: } \langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle \quad \forall T \in D'(\mathbb{R}^3), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$$

Laplaciano

Potenziale elettrico statico generato da una carica puntiforme:

$$\Delta u = c \cdot \delta_0$$

Adesso sappiamo cosa significa che una distribuzione $T \in D'(\mathbb{R})$ risolve quest'equazione

$$\text{Sia } \Gamma(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ (potenziale newtoniano)}$$

soluzione fondamentale dell'operatore Δ in \mathbb{R}^3

Si dimostra che $\Delta \Gamma = \delta_0$. cioè:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \Gamma, \varphi \rangle &= \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \\ \leftarrow \quad \langle \Gamma, \Delta \varphi \rangle &= - \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta \varphi(x, y, z)}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = \varphi(0, 0, 0) \end{aligned}$$

$\Delta \Gamma$ è una funzione, ma non è $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, quindi $\langle \Delta \Gamma, \varphi \rangle$ non posso calcolarlo come $\iiint \Delta \Gamma \varphi$ ma posso calcolarlo in quanto distribuzione come $\iiint \Gamma \Delta \varphi$.

Operazioni sulle distribuzioni

Vogliamo definire sulle distribuzioni certe operazioni che abbiano senso anche per le funzioni.

Ese: sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

traslata di f $T_a f(x) = f(x+a)$

dilatata di f $D_a f(x) = f(ax)$

riflessa di f $\check{f}(x) = f(-x)$

Queste operazioni si possono definire anche per le distribuzioni?

Consideriamo funzioni e distribuzioni su tutto \mathbb{R} o \mathbb{R}^n

→ Traslazione

Sia $T \in D'(\mathbb{R})$. Nel caso particolare di $T = T_f$, $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ voglio che $T_a T_f = T_{af}$

$$\langle T_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{af}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} T_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a) \varphi(x) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y-a) dy = \langle T_f, T_{-a} \varphi \rangle$$

Def: $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\langle T_a T, \varphi \rangle = \langle T, T_{-a} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Mostriamo che $T_a T \in D'(\mathbb{R}^n)$:

- $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ si ha $T_{-a} \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ perciò $T_a T$ è ben definita
- $T_a T$ è lineare perché $\varphi \mapsto \langle T, T_{-a} \varphi \rangle$ è composizione di 2 operazioni lineari
- se $\varphi_k \rightarrow 0$ per $D(\mathbb{R}^n)$ anche $T_{-a} \varphi_k \rightarrow 0$ e $\langle T, T_{-a} \varphi \rangle \rightarrow 0$, quindi $\langle T_a T, \varphi \rangle \rightarrow 0$ quindi $T_a T$ è una distribuzione.

Ese: $[T_a \delta_{x_0} = \delta_{x_0-a}]$ infatti $\langle T_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, T_{-a} \varphi \rangle$
 $= T_{-a} \varphi(x_0) = \varphi(x_0 - a) = \langle \delta_{x_0-a}, \varphi \rangle$

Def Si dice che $T \in D'(\mathbb{R})$ è una **distribuzione periodica** di periodo a se $T_a T = T$

→ Dilatazione

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $D_a T_f = T_{D_af}$

$$\begin{aligned} \langle D_a T_f, \varphi \rangle &= \langle T_{D_af}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} D_af(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(ax) \varphi(x) dx \\ &\stackrel{ax=y}{=} \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi\left(\frac{y}{a}\right) dy = \langle T_f, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle \end{aligned}$$

Def $\forall T \in D'(\mathbb{R}) \quad \langle D_a T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$

$\forall T \in D'(\mathbb{R}^n) \quad \langle D_a T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{a^n} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$

Ese: $[D_a \delta_{x_0} = \frac{1}{a} \delta_{\frac{x_0}{a}}]$ infatti $\langle D_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle =$
 $= \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi(x_0) = \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = \langle \frac{1}{a} \delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi \rangle$

→ Riflessione

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\tilde{T}_f = T_{\tilde{f}}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_f, \varphi \rangle &= \langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(-x) \varphi(x) dx = \\ &\stackrel{x=-y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(-y) dy = \langle T_f, \tilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

Def $\forall T \in D'(\mathbb{R}^n) \quad \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$

Def Si dice che $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ è una **distribuzione pari** se $\tilde{T} = T$ e che è **dispari** se $\tilde{T} = -T$.

Ese: $[\tilde{\delta}_{x_0} = \delta_{-x_0}]$ infatti $\langle \tilde{\delta}_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \tilde{\varphi} \rangle =$

$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \text{ è pari} \\ S_0 \text{ è dispari} \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(-x) dS_{x_0}(x) = \varphi(-x_0) S_{x_0}(\{x_0\}) \\
 &= \varphi(-x_0) = \langle S_{-x_0}, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

Predotto di distribuzione per funzione

Sia $T \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Nel caso in cui $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $g \cdot T_f = T_{gf}$

$$\langle g \cdot T_f, \varphi \rangle = \langle T_{gf}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle T_f, g \cdot \varphi \rangle$$

ma questo richiede che $\forall q \in D(\Omega)$ risulti $gq \in D(\mathbb{R})$ ovvero deve essere $g \in C_c^\infty(\Omega)$

Def $\forall T \in D(\Omega)$ e $\forall g \in C_c^\infty(\Omega)$ definiamo

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Ese: $[g\delta_{x_0} = g(x_0)\delta_{x_0}]$ infatti $\langle g\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, g\varphi \rangle =$
 $= \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) d\delta_{x_0}(x) = g(x_0) \varphi(x_0) = g(x_0) \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$

Teorema

Sia $T \in D'(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ $(\tau_a T)' = \tau_a(T')$

$$a > 0 \quad (D_a T)' = a D_a(T')$$

$$(\hat{T})' = -(\overset{\wedge}{T'})$$

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (gT)' = (g')T + g(T')$$

Dimo: $\langle (\tau_a T)', \varphi \rangle = -\langle \tau_a T, \varphi' \rangle = -\langle T, \tau_{-a}(\varphi') \rangle =$

$$\tau_{-a}(\varphi'(x)) = \varphi'(x-a) = (\varphi(x-a))' = (\tau_{-a}\varphi(x))'$$

$$= -\langle T, (\tau_{-a}\varphi)' \rangle = \langle T', \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle \tau_a(T'), \varphi \rangle$$

$$\langle (D_a T)', \varphi \rangle = -\langle D_a T, \varphi' \rangle = -\langle T, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi' \rangle =$$

$$(D_{\frac{1}{\alpha}} \varphi(x))' = (\varphi(\frac{x}{\alpha}))' = \frac{1}{\alpha} \varphi'(\frac{x}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} D_{\frac{1}{\alpha}}(\varphi')$$

$$= - \langle T, (D_{\frac{1}{\alpha}} \varphi)' \rangle = \langle T', D_{\frac{1}{\alpha}} \varphi \rangle = \langle \alpha D_\alpha(T'), \varphi \rangle$$

$$\langle (\check{T})', \varphi \rangle = - \langle \check{T}, \varphi' \rangle = - \langle T, (\check{\varphi}') \rangle =$$

$$(\check{\varphi})' = (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) = -(\check{\varphi}')$$

$$= - \langle T, -(\check{\varphi})' \rangle = \langle T', -\check{\varphi} \rangle = \langle -(\check{T}'), \varphi \rangle$$

$$\langle (gT)', \varphi \rangle = - \langle gT, \varphi' \rangle = - \langle T, g\varphi' \rangle =$$

$$(g\varphi)' = g'\varphi + g\varphi' \rightarrow g\varphi' = (g\varphi)' - g'\varphi$$

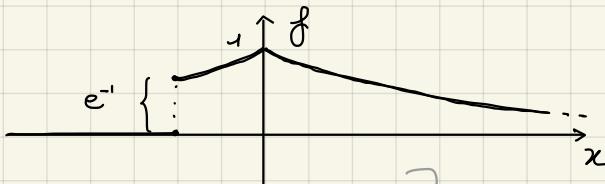
$$= - \langle T, (g\varphi)' - g'\varphi \rangle = \langle T, g'\varphi \rangle - \langle T, (g\varphi)' \rangle =$$

$$= \langle g'T, \varphi \rangle + \langle T', g\varphi \rangle = \langle (g'T + gT'), \varphi \rangle$$

Esercizi:

Calcolare la derivata distribuzionale delle seguenti, $\varphi >$ funzioni:

a) $f(x) = e^{-|x|} u(x+1)$

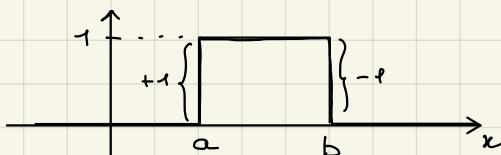


{ possiamo confondere $f(x)$ con T_f
NON possiamo confondere $f'(x)$ con $(T_f)'$

$$(T_f)' = \delta_{-1} \cdot e^{-1} + u(x+1) (e^{-|x|})' = \frac{\delta_{-1}}{e} - e^{-|x|} \text{sign}(x) u(x+1)$$

$-e^{-|x|} \text{sign}(x)$ → NON è una funzione!

b) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$



$$(T_f)' = \delta_a - \delta_b$$

• $T = D_3 T_{-2} \delta_0$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle D_3 T_{-2} \delta_0, \varphi \rangle = \langle T_{-2} \delta_0, \frac{1}{3} D_{\frac{1}{3}} \varphi \rangle =$$

$$= \langle \delta_0, T_2 \frac{1}{3} D_{\frac{1}{3}} \varphi \rangle = \langle \delta_0, \frac{1}{3} \varphi(\frac{x+2}{3}) \rangle = \frac{1}{3} \varphi(\frac{2}{3})$$

$$= \langle \delta_{\frac{2}{3}}, \varphi \rangle$$

$$\bullet \quad T = D_{\frac{1}{2}}(x\delta'_0)$$

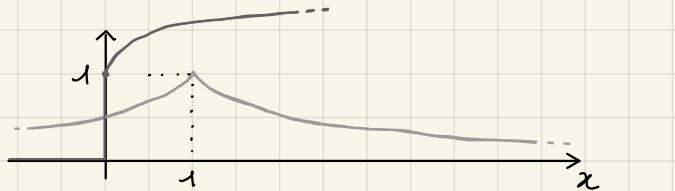
$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle D_{\frac{1}{2}}(x\delta'_0), \varphi \rangle = \langle x\delta'_0, 2\varphi(2x) \rangle = \langle \delta'_0, 2x\varphi(2x) \rangle \\ &= - \langle \delta'_0, \frac{d}{dx}(2x\varphi(x)) \rangle = - \langle \delta'_0, 2(\varphi(2x) + 2x\varphi'(x)) \rangle \\ &= -2(\varphi(0) + 0) = -2\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad T = -2\delta_0 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad f(x) = e^{-|x-1|} + (1 + \sqrt[3]{x}) u(x)$$

$$1. \quad (\bar{T}_f)' = ?$$

$$(\bar{T}_g)' = -e^{-|x-1|} \operatorname{sign}(x-1)$$

$$(\bar{T}_h)' = \delta_0 + u(x) \left(\frac{1}{3x^{2/3}} \right)$$



$$\Rightarrow (\bar{T}_f)' = -e^{-|x-1|} \operatorname{sign}(x-1) + \delta_0 + \frac{u(x)}{3x^{2/3}}$$

$$2. \quad x(\bar{T}_f)' = ?$$

$$x\delta_0 = 0$$

↓

$$x(\bar{T}_f)' = -x e^{-|x-1|} \operatorname{sign}(x-1) + u(x) \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$$

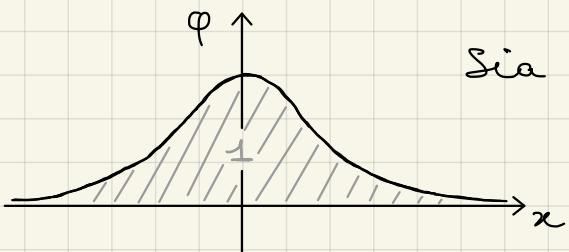
$$\bullet \quad (D_2(e^{-x}\delta'_0))' = ?$$

$$\begin{aligned} \langle (D_2(e^{-x}\delta'_0))', \varphi \rangle &= - \langle D_2(e^{-x}\delta'_0), \varphi'(x) \rangle = - \langle e^{-x}\delta'_0, \frac{\varphi'(\frac{x}{2})}{2} \rangle \\ &= - \langle \delta'_0, e^{-\frac{x}{2}} \varphi'(\frac{x}{2}) \rangle = \langle \delta_0, \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x}{2}} \varphi'(\frac{x}{2}) \right) \rangle = \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x}{2}} \varphi'(\frac{x}{2}) \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left(-\varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(0) \right) = -\frac{1}{2} \varphi'(0) + \frac{1}{4} \varphi''(0) =$$

$$\Rightarrow (D_2(e^{-x}\delta'_0))' = \frac{\delta'_0}{2} + \frac{\delta''_0}{4}$$

Approssimazioni dell'identità o nuclei regolarizzanti o moltiplicatori



Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x) \geq 0$, integrab.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$$

φ è detta funzione "madre".

Considero la famiglia di funzioni $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ in } \mathbb{R} \quad (\varphi_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right) \text{ in } \mathbb{R}^n)$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ è una campana tanto più alta e concentrata tanto più è piccolo ε

Esempi: nucleo di Gauss: $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$

$$\text{nucleo di Poisson: } \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy}$

(ricorda che)
 $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$

media dei valori di f (che pesa di più i valori di y vicini a x)

Teorema Sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ una famiglia di nuclei come sopra.

Allora: se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < +\infty$

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$\text{se } f \in C_*^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f \text{ uniforme. per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Teorema Se $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ sono una famiglia di nuclei come sopra e inoltre $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(cioè $f * \varphi_\varepsilon$ è regolare, anche se f non lo è, e approssima bene f , per ε piccolo)

Successioni di distribuzioni

Sia $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq D'(\Omega)$, Ω insieme aperto di \mathbb{R}^n , sia $T \in D'(\Omega)$

Cosa significa che $T_k \rightarrow T$ per $k \rightarrow +\infty$?

$$\langle T_{f_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x) dx \longrightarrow \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$$

$(a, b) = \text{supp}(\varphi)$

$$\int_a^b f_k(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{\text{f}_k \rightarrow f} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

come dire che $f_k \xrightarrow{\text{f}_k \rightarrow f}$ in $L^1(a, b)$

Siamo $\{f_k\} \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e supponiamo
che $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{f}_k \rightarrow f}$ f in $L^1(a, b)$;
allora $\langle T_{f_k}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle$.

Def Se $\{T_k\} \subseteq D'(\Omega)$ $T \in D'(\Omega)$ diciamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T \quad \text{se } \forall \varphi \in D(\Omega) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Ese: $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty \in D'(\mathbb{R})$, $\langle \delta_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\varphi(0)=0} 0 \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{\delta_n \rightarrow 0 \text{ in } D'(\mathbb{R})}$

$$\left\{ \delta_{\frac{1}{n}} \right\}_{n=1}^\infty, \quad \langle \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \rangle = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \Rightarrow \delta_{\frac{1}{n}} \rightarrow \delta_0$$

Ese: $\{n X_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x)\}_{n=1}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x=0 \end{cases} \quad f_n(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad f_n \rightarrow 0 \text{ q.o.}$

$$\begin{aligned} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} n X_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x) \varphi(x) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \\ &= n \underbrace{\frac{2}{n} \varphi(x_n)}_{x_n \rightarrow 0} \longrightarrow 2\varphi(0) = 2\langle \delta_0, \varphi \rangle \Rightarrow T_{f_n} \rightarrow 2\delta_0 \end{aligned}$$

teo. del val. medio

$x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

In altre parole, "il $\lim_{k \rightarrow +\infty}$ si porta dentro e fuori $\langle \cdot, \cdot \rangle$ "

moltiplicatore

$$Q_\varepsilon(x) \mapsto \langle T_{Q_\varepsilon}, \phi \rangle \stackrel{\text{f. test}}{=} \int_{\mathbb{R}} Q_\varepsilon(y) \phi(y) dy$$

$$\text{se } \varphi \text{ (funzione madre)} \xrightarrow{\text{è pari}} = \int_{\mathbb{R}} Q_\varepsilon(0-y) \phi(y) dy = (\varphi_\varepsilon * \phi)(0)$$

$$\phi \in D(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{T}_*(\mathbb{R})$$

Per il teorema sui moltiplicatori sappiamo che $\varphi_\varepsilon * \phi \rightarrow \phi$ uniforme.
quindi $(\varphi_\varepsilon * \phi)(0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(0)$

$$\langle T_{\varphi_\varepsilon}, \phi \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \delta_0, \phi \rangle$$

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \delta_0$$

Si può dimostrare che $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $[T' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_{hT} - T)]$
 ↓
 def. di derivata tramite
 rapporto incrementale

Serie di distribuzioni

Se $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, cos' è $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$?

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n T_k$$

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n T_k, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \sum_{k=1}^n T_k, \varphi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle T_k, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Dalla def. di limite di una succ. di distrib. se vogliamo che valga $\stackrel{*}{=}$ dobbiamo definire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \text{ se } \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$$

In altre parole, "la $\sum_{n=1}^{\infty}$ si porta dentro e fuori $\langle \cdot, \cdot \rangle$ "

Ese: $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}$ è una distribuzione?

$$\langle \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_k^{(k)}, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^k \varphi^{(k)}(k)}^T < +\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Sia $\varphi_n \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R})$, $\exists [-N, N] \supseteq \text{supp}(\varphi_n) \quad \forall n$

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left| \sum_{k=0}^N (-1)^k \varphi_n^{(k)}(k) \right| \leq \sum_{k=0}^N |\varphi_n^{(k)}(k)| \leq (N+1) \|\varphi_n\|_{C^N[-N, N]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

T è una distribuzione ✓

Ese: $\Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$ $a > 0$ ("tree di impulsi" o "pettine di Dirac")

Sia $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N]$

$$|\langle \Delta_a, \varphi \rangle| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_{na}, \varphi \rangle \right| = \left| \sum_{|n| \leq \frac{N}{a}} \varphi(na) \right| \leq \left(\frac{2N}{a} + 1 \right) \|\varphi\|_{C[-N, N]}$$

$\langle \Delta_a, \varphi \rangle$ è ben def., lin., cont. $\Rightarrow \Delta_a$ è una distrib.

Teorema Supponiamo che $\{T_n\} \subseteq D(\mathbb{R})$, $T \in D(\mathbb{R})$ t.c.

$$1) T_n \rightarrow T \text{ allora } T_n' \rightarrow T'$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$$

Dimo: 1) $T_n' \rightarrow T$ se $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\langle T_n', \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T', \varphi \rangle$

$$\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T' \text{ cioè } \langle \sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi \rangle = \langle T', \varphi \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n', \varphi \rangle = -\sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi' \rangle = -\langle \sum_{n=1}^{\infty} T_n, \varphi' \rangle = \\ &= -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle \end{aligned}$$

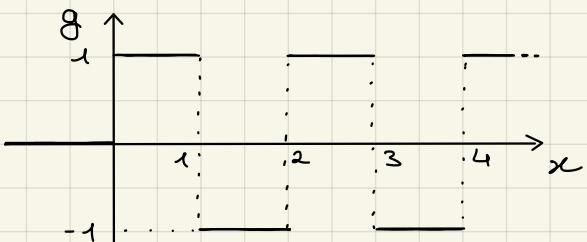
Ese: $f(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n, n+1]}(x)}_T$.

Verifichiamo che T_f è una distrib. e calcoliammo $(T_f)'$.

$$T = T_g, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$$

$$x^2 T \in D'(\mathbb{R}) \text{ poiché } x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\rightarrow T_f$ è una distrib.



$$(T_f)' = (x^2 T)' = 2x T + x^2 T' = 2x T + x^2 \left(\delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 \delta_n \right)$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n, n+1]}(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \delta_n \leftarrow x^2 \delta_n = n^2 \delta_n$$

Convoluzione di distribuzioni

Siano $T, S \in D'(\mathbb{R}^n)$, cos' è $T * S$?

Caso particolare: $T_f * T_g = T_{f*g}$ se $f \in g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(x) dx \right) dy = \\ &= \langle T_g, \psi \rangle = \psi(y) \\ &= \langle T_g(y), \langle T_f, \tau_y \varphi \rangle \rangle \end{aligned}$$

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(z) \varphi(y+z) dz$$

Quindi la "candidata" def. per la convoluzione di distribuzioni è:

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S(y), \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

ma siamo sicuri che $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle \in C_c^\infty(\mathbb{R})$?

Se $T \in D'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$ si può dimostrare che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è detto che ψ sia a supporto compatto

$$\text{Ese: } T = T_f \quad f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \tau_y \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y) dx = \text{const.}$$

$\Rightarrow \psi$ non è a supp. compatto.

Non posso sperare di definire la convoluzione di due distribuzioni qualsiasi.

Ho bisogno di fare un'ipotesi in più su S o su T

o diedo a T qualcosa in più in modo che

$\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle$ sia in $D(\mathbb{R})$ (e quindi $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def)

$\forall S \in D'(\mathbb{R})$)

o diedo a S qualcosa in più in modo che $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def anche se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non a supp. compatto

Ci sono tante possibili risposte a questo problema, cioè diversi insiemini di ipotesi su T e S che renda ψ sensata $T * S$.

Una possibilità sta nel concetto di distribuzione a supporto compatto.

Def Sia $T \in D'(\mathbb{R}^n)$. Si dice che T è una distribuzione a supporto compatto (si scrive $T \in D_0'(\mathbb{R}^n)$) se $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato tale che

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \text{ se } \text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \setminus K \text{ allora } \langle T, \varphi \rangle = 0$$

In altre parole, la distribuzione "legge" la funzione test solo nell'insieme K .

Esempi:

- se $T = T_f$ dove $f \in L^1_{loc}$ è a supp. compatto, anche T_f lo è
- se $T = T_\mu$ dove μ è una misura nulla fuori da un insieme chiuso e limitato, T_μ è a supp. compatto.
- derivate e comb. lin (finite) di distrib. a supp. compatto sono anch'esse a supp. compatto

Teor eme Siamo $T, S \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Se $T \in D_0'(\mathbb{R}^n)$ allora $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle \in D(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Se $S \in D_0'(\mathbb{R}^n)$ allora $\langle S, \psi \rangle$ ha senso $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Se una delle due è $D_0'(\mathbb{R}^n)$ allora è ben def.

$T * S \in D'(\mathbb{R}^n)$ e $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$

In fine, $T * S = S * T$.

Notiamo che se $T \in D_0'(\mathbb{R})$ anche $T', \tau_a T, \Delta_a T, \check{T}, f \cdot T \in D_0'(\mathbb{R})$
se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Es: $T * \delta_{x_0}$ per $T \in D'(\mathbb{R})$ qualsiasi (NB: $\delta \in D_0'(\mathbb{R})$)

$$\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle = \langle T, \tau_{x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{-x_0} T, \varphi \rangle$$

$$\implies T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T \quad (\text{in part.: } T * \delta_0 = T)$$

$\delta_{x_0} * T$ verificano la commutatività.

$$\langle \delta_{x_0} * T, \varphi \rangle = \langle T, \langle \delta_{x_0}, \tau_y \varphi \rangle \rangle = \langle T, \tau_{x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{-x_0} T, \varphi \rangle \quad \checkmark$$

Ese: $T * S$, $T \in D'(\mathbb{R})$ $S \in D'_+(\mathbb{R})$ (σ sicurezza)

$$(T * S)' = ? \quad \langle (T * S)', \varphi \rangle = - \langle T * S, \varphi' \rangle = - \langle S, \langle T, \tau_y(\varphi') \rangle \rangle =$$

$$\tau_y(\varphi') = (\tau_y \varphi') \text{ infatti } \frac{d}{dx}(\varphi(x+y)) = \varphi'(x+y)$$

$$= \langle S, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle = \langle T' * S, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{(T * S)' = T' * S = T * S'}$$

Teorema Siano $T \in D(\mathbb{R}^n)$, $S \in D'_+(\mathbb{R}^n)$ σ sicurezza.
Allora:

$$T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T$$

$$\tilde{\delta}(T * S) = (\tilde{\delta} T) * S = T * (\tilde{\delta} S)$$

Applicazione alle equazioni a derivate parziali

In \mathbb{R}^n sia L un op. diff. line. (di ordine m) a coeff. costanti, ossia:

$$L u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \text{ con } c_\alpha \text{ costanti, } \alpha \text{ multi indice}$$

$$\text{esempi: } L = \Delta \quad L = \partial_t - \Delta \quad L = \partial_{ttt} - \Delta \quad L = i \partial_t - \Delta$$

Def. Si dice che $\Gamma \in D'(\mathbb{R}^n)$ è una soluzione fondamentale dell'operatore L se $L\Gamma = \delta_0$.

$$\langle L\Gamma, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

$$\langle \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \frac{\partial^\alpha \Gamma}{\partial x^\alpha}, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle \Gamma, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{ad es: il laplaciano } L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ sol. fondamentale del laplaciano}$$

$$\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Gamma \Delta \varphi(\vec{x}) dx dy dz = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$$

Cosa serve avere una soluzione fondamentale?

Supponiamo di conoscere una sol. fondam. Γ dell'operatore L e di risolvere l'equazione

$$Lu = T \quad T \in D^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{cerca } u \in D(\mathbb{R}^n)$$

Dice che la sol. u è $u = \Gamma * T$ difatti:

$$\begin{aligned} Lu &= L(\Gamma * T) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha (\Gamma * T) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \{ (\partial^\alpha \Gamma) * T \} = \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \Gamma \right) * T = (L\Gamma) * T = \delta_0 * T = T \end{aligned}$$

La teoria delle distribuzioni si presta a trattare eq. a derivate parziali lineari di qualunque ordine a coefficienti C^∞ . Per queste eq. è chiara cosa significa che una certa $u \in D(\mathbb{R}^n)$ risolve $Lu = T \in D(\mathbb{R}^n)$

Teorema di Malgrange - Ehrenpreis

Ogni operatore diff. lineare a coeff. costanti in \mathbb{R}^n ha una soluzione fondamentale in $D(\mathbb{R})$

Trasformata di Fourier di Distribuzioni

Sia $T \in D'(\mathbb{R})$. Cerchiamo una def. consistente per \hat{T} .

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\hat{T}_f = \hat{T}\hat{f}$.

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_f, \varphi \rangle &= \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \\ &\quad \forall f, \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \int f \varphi = \int f \hat{\varphi} \\ &= \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

Perciò la "candidata" def. di transf. di Fourier di una distrib. è: $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

Tuttavia dorei sapere che $\hat{\varphi} \in D(\mathbb{R})$.

È vero che se $\varphi \in D(\mathbb{R})$ allora $\hat{\varphi} \in D(\mathbb{R})$?

NO, è sempre falso tranne che per $\varphi = 0$.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, f e \hat{f} hanno supp. compatto.
Allora $f = 0$ q.o.

Quello che sappiamo è che se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ anche $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(Il problema è analogo a quello di convoluzione di distribuzioni)

Dobbiamo introdurre una nuova classe di distribuzioni tra $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

→ classe delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)

Dobbiamo introdurre, come per $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, una nozione di convergenza di succ. di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Sia $\{f_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varnothing$ se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^h) |\frac{\partial^\alpha f_k(x)}{\partial x^\alpha}| \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow +\infty \quad \forall h = 0, 1, 2, \dots \quad \forall \alpha$$

Diciamo che $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} f$ se $(f_k - f) \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$

decrescenza rapida

NB: se $\{f_k\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} 0$ allora anche $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$

Def. Si dice che $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ossia che T è una distribuzione temperata se \mathbb{R}^n , se

$T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$, T è lineare, $\forall \{\varphi_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

se $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$ allora $\langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Ogni distribuzione temperata è una particolare distribuzione ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$)

Criterio di continuità. Per $\varphi \in S(\mathbb{R})$ poniamo

$$P_{n_1}^{(n_2)}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^{n_1}) \sum_{k=0}^{n_2} \left| \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \right| \quad (\text{"seminorma"})$$

Sia $T : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$, lineare.

Se $\exists n_1, n_2 = 0, 1, 2 \dots$ e $c > 0$ t.c.

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c P_{n_1}^{(n_2)}(\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}) \text{ allora } T \in S'(\mathbb{R}).$$

Teorema

- Se $T \in D'_0(\mathbb{R}^n)$ allora $T \in S'(\mathbb{R}^n)$
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$ allora $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$
- Se f è una funzione lentamente crescente all'infinito, cioè $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $|f(x)| \leq c(1 + |x|^k)$ per qualche $c, k > 0$, allora $T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$
▼ non cresce più di una certa potenza

Teorema Sia $T \in S'(\mathbb{R})$ allora anche $T^*, T_{\alpha T}, \hat{T}, \Delta T \in S'(\mathbb{R})$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, f cresce lentamente, allora $fT \in S'(\mathbb{R})$

Def. Sia $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. Si definisce \hat{T} ponendo

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \text{ Si ha che } \hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Se $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ anche $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ quindi il crochet con T è ben def. e ovviamente lineare.

Mostriamo che \hat{T} è continuo.

Sia $\varphi_k \rightarrow 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$; si dimostra che allora anche $\hat{\varphi}_k \rightarrow 0$ in $S(\mathbb{R}^n)$ e quindi $\langle T, \hat{\varphi}_k \rangle \rightarrow 0$ perché $T \in S'(\mathbb{R}^n)$
perciò $\langle \hat{T}, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ ossia $\hat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\forall T \in S'(\mathbb{R})$ vale la formula di inversione $\widehat{\widehat{T}} = \underline{T}$

$$\langle \widehat{\widehat{T}}, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \underline{T}, \varphi \rangle$$

$\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = \varphi(-\xi)$

Esempio:

$$\mathcal{F}(\delta_a) = ?$$

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle T_a, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{\delta}_a = 1$$

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i ax} dx =$$

$$\Rightarrow \widehat{\delta}_a = e^{-2\pi i ax}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\delta}_a = \widehat{\delta}_a = \delta_{-a} \\ \mathcal{F}(e^{-2\pi i ax}) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{F}(e^{-2\pi i ax}) = \delta_{-a}$$

$$\mathcal{F}(\cos \omega x) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}(e^{i\omega x}) + \mathcal{F}(e^{-i\omega x}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} + \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}} \right]$$

$$\mathcal{F}(\sin \omega x) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} \left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} - \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}} \right]$$

Teorema (proprietà della trasf. di Fourier e derivate di distrib.)

$$\text{Se } T \in S'(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}(T') = 2\pi i \xi \widehat{T}$$

$$\mathcal{F}(T^{(n)}) = (2\pi i \xi)^n \widehat{T}$$

$$(\widehat{T})' = \mathcal{F}(-2\pi i x T)$$

$$(\widehat{T})^{(n)} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^n T)$$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } \mathcal{F}(T'): \quad & \langle \widehat{(T')}, \varphi \rangle = \langle T', \widehat{\varphi} \rangle = - \langle T, (\widehat{\varphi})' \rangle = \\ & = - \langle T, \mathcal{F}(-2\pi i x \varphi(x)) \rangle = - \langle \widehat{T}, -2\pi i x \varphi \rangle \\ & = \langle 2\pi i \xi \widehat{T}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Iterando ottengo $\Im(\hat{T}^{(n)})$.

$$\begin{aligned} (\hat{T}')' : \langle (\hat{T})', q \rangle &= -\langle \hat{T}, q' \rangle = -\langle T, \widehat{(q')} \rangle = \\ &= -\langle T, 2\pi i x \hat{q} \rangle = \langle -2\pi i x T, \hat{q} \rangle = \\ &= \langle \Im(-2\pi i x T), q \rangle. \end{aligned}$$

Iterando ottengo $(\hat{T})^{(n)}$.

Ese: $\Im((-2\pi i x)^n) = (\hat{1})^{(n)} = \delta_0^{(n)}$

$$\Im(x^n) = \frac{1}{(-2\pi i)^n} \delta_0^{(n)} \quad \text{e quindi } \Im(x) = -\frac{\delta'_0}{2\pi i}$$

Esercizi:

- $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$ $f \notin L^1, f \notin L^2$
 $f \in L_{loc}^1$ perché $x^2 + x + 1 \neq 0 \quad \forall x$

$$|f(x)| \leq c(1+|x|) \quad \forall x$$

$\Rightarrow f$ è lentamente crescente, perciò induce una distribuzione temperata $\hat{T}_f \rightarrow f$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} e^{-2\pi i x} dx \text{ diverge!}$$

$$\rightarrow \langle \hat{T}_f, q \rangle = \langle T_f, \hat{q} \rangle$$

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{x^2 + x + 1} \Rightarrow f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$x^3$$

$$-x^3 -x^2 -x$$

$$-x^2 -x$$

$$x^2 + x + 1$$

$$r(x) - 1$$

$$x^2 + x + 1$$

$$x - 1 \quad q(x)$$

$$\left[\Im(f(x)) = \Im(x) + \frac{\delta'_0}{-2\pi i} \right]$$

$$\Im(1) + \delta_0$$

$$\Im\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

calcolo coi residui
 (applicabile quando: $\text{gr(deu)} \geq \text{gr(num)} + 1$)

$$\begin{aligned}
& \Im \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{x^2 + x + 1} dx = \\
&= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + z + 1}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right) \\ \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res} \left(\dots, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{2z+1} \right) \Big|_{z=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i \xi (1+i\sqrt{3})} \\ \xi < 0 & 2\pi i \left(\dots \right) \Big|_{z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi i \xi (-1+i\sqrt{3})} \end{cases} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{i\pi\xi} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|} \\
&\implies \widehat{T}_f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|} e^{i\pi\xi} - \frac{\delta_0}{2\pi i} - \delta_0
\end{aligned}$$

- $\Im \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)(\xi) = ?$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Im(T_f) \implies \widehat{f} = \Im(1) - \Im\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \delta_0 - \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

- $\Im(x \operatorname{seu} x) = ?$

$$f(x) = x \operatorname{seu}(x) \in L^1_{loc}$$

$$|f(x)| \leq |x| \quad f \text{ est lentement croissante} \rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

$$\Im(\operatorname{seu} x)(\xi) = \Im\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{2i}$$

$$\Im(-2\pi i x T)(\xi) = \frac{d}{dx} \widehat{T}$$

$$\Im(xT) = \frac{1}{-2\pi i} \cdot \frac{1}{T}$$

$$\implies \Im(x \operatorname{seu} x) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{2i} \left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right) = \frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{4\pi}$$

- $\mathcal{F}(\delta_a' + \delta_{-\pi}')(\xi) = ?$ $T = \delta_\pi + \delta_{-\pi} \in S'(\mathbb{R})$
 $= \mathcal{F}(\delta_a') + \mathcal{F}(\delta_{-\pi}') = \underbrace{\mathcal{F}(T')}_{= 2\pi i \xi \hat{T}}$
 $= 2\pi i \xi \left\{ \mathcal{F}(\delta_\pi) + \mathcal{F}(\delta_{-\pi}) \right\} = 2\pi i \xi \left\{ e^{-2\pi^2 i \xi} + e^{2\pi^2 i \xi} \right\}$
 $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2\pi i a \xi} \leq 2\pi |\xi| \cdot 2 \rightarrow$ funzione lentamente crescente

- Verificare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (1) $\delta_a * \delta_b' = \delta_{a+b}'$
 (2) $\delta_a' * \delta_b' = \delta_a * \delta_b''$

$\delta_a^{(k)}$ sono distr. a supp. compatto \rightarrow la convoluzione è ben definita

$$(T * S)' = T' * S = T * S'$$

$$\delta_a * T = T_{-a} T \rightarrow T_{-a} \delta_b = \delta_{a+b} \rightarrow \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$$

$$\delta_a * \delta_b' = (\delta_a * \delta_b)' = \delta_{a+b}' \quad (1)$$

$$\delta_a' * \delta_b' = (\delta_a * \delta_b')' = \delta_a * \delta_b'' \quad (2)$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{seu}^2 x)(\xi) = ?$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{seu} x)(\xi) = \frac{\delta_{\frac{1}{2}\pi} - \delta_{-\frac{1}{2}\pi}}{2i} \quad \operatorname{seu}^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2$$

$$= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4}$$

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i a x})(\xi) = \delta_a$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\operatorname{seu}^2 x)(\xi) &= -\frac{1}{4} \left(\mathcal{F}(e^{2ix}) + \mathcal{F}(e^{-2ix}) - 2\delta_0 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\delta_{\frac{1}{2}\pi} + \delta_{-\frac{1}{2}\pi} \right) + \frac{1}{2} \delta_0 \end{aligned}$$

NB: le regole per la trasformata di dilazioni, riflessioni, traslazioni, moltiplicazioni si estendono dalle funzioni alle distribuzioni temperata

es: $\mathcal{F}(D_a T) = D^a(\hat{T}) \quad \forall T \in S'(\mathbb{R})$

Teorema Se $T \in S'(\mathbb{R})$ e $f \in S(\mathbb{R})$ allora $T * f = T * \hat{f}$ è ben definita, è una distribuzione temperata e

$$\mathcal{F}(T * f) = \hat{T} \cdot \hat{f}$$

$$\mathcal{F}(Tf) = \hat{T} * \hat{f}$$

Successioni e serie di distribuzioni temperate

Nello spazio test: $\{T_n\} \subseteq D'(\mathbb{R})$, $T \in D'(\mathbb{R})$ $T_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} T$ se
 $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

Def Sia $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$. Si dice che

$$T \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} T \text{ se } \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

Di conseguenza $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \text{ in } S'(\mathbb{R})$, $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$
 $\sum_{k=1}^n T_k \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

se e solo se
 $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$
 $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

Teorema Sia $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$. Allora

$$1) T_n \rightarrow T \implies \hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} T_n = T \implies \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}$$

Dim. 1) $\hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$ significa $\langle \hat{T}_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle \hat{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle \hat{T}_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle \xrightarrow{S} \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

analogamente 2)

$$\begin{aligned} \text{Es: } \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_{[r_{2k}, 2k+1]}(x)(\xi)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathcal{F}(X_{[r_{2k}, 2k+1]}(x))(\xi)}_{\int_0^{2k+1} e^{-2\pi i \xi x} dx} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right]_{r_{2k}}^{2k+1} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(2k+1)\xi} - e^{-2\pi i(2k)\xi}}{-2\pi i \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-4\pi i k \xi}}{2\pi i \xi} (1 - e^{-2\pi i \xi})$$

Serie trigonometriche e distribuzioni temperate

Teorema Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k \omega x}$$

con $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ successione lentamente crescente cioè:

$$\exists c, N > 0 \text{ t.c. } |a_k| \geq c(1 + |x|^N) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Allora la serie definisce una distribuzione temperata.

Dim Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \langle e^{2\pi i k \omega x}, \varphi \rangle \right| = \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{2\pi i k \omega x} dx \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| |\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(1 + |x|^N) |\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq \\ &\leq \left| \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c}{1 + |\xi|^{N+2}} \right. \\ &\quad \left| |\hat{\varphi}(\xi)| \leq P_{N+2}^{(0)}(\hat{\varphi}) / (1 + |\xi|^{N+2}) \right. \\ &\leq c P_{N+2}^{(0)}(\hat{\varphi}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^N)}{(1 + |k\omega|^{N+2})} \leq c P_{N+2}^{(0)}(\hat{\varphi}) \leq c p_{\dots}^{(\dots)}(\varphi) \end{aligned}$$

Ese: $\Im \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)} \right) =$

come serie di funzione diverge in tutto \mathbb{R} ,
come serie di distribuzioni converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
(è una serie trig. con coeff. lentamente crescenti)

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Im(\cos kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{\frac{k}{2\pi}} + \delta_{-\frac{k}{2\pi}}}{2} = \frac{1}{2} (\Delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_0)$$

$\sum_n \delta_{n\alpha} = \Delta$ a trema di impulsi

Il trema di impulsi Δ $\Delta > 0$ è una distribuzione temperata. Dimostriamolo:

$$|\langle \Delta_a, \varphi \rangle| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \delta_{ka}, \varphi \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka) \right| \leq \underbrace{P_2^{(o)}(\varphi)}_{\substack{< +\infty \\ |1+|ka|^2|}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+|ka|^2}$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{P_2^{(o)}(\varphi)}{|1+x|^N} = P_2^{(o)}(\varphi) \cdot c$$

$$\text{Inoltre } \mathfrak{F}(\Delta_a) = \mathfrak{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\delta_{na}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n a x}$$

$$\underline{\text{Teorema}} \quad \mathfrak{F}(\Delta_1) = \Delta_1 \quad \text{e} \quad \forall a > 0 \quad \mathfrak{F}(\Delta_a) = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$$

$$\underline{\text{Dim}} \quad \text{Si dimostra che } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} = \Delta_1.$$

$$\text{Quindi } \mathfrak{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(e^{2\pi i n x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1$$

si scrive la serie di Fourier in forma exp. di

(f' sarebbe Δ_1
nel senso delle $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$) 1-periodica
distrib.)

$$\text{cioè } f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} \text{ ma } (\Delta_f)' = \overbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n e^{2\pi i n x})'}^{\substack{3 \\ 1 \\ 2}}$$

$$\textcircled{1} \quad (\Delta_f)' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1$$

$$\textcircled{2} \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{i n \omega t} dt = \int_0^1 t e^{2\pi i n t} dt = \left[\frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} \cdot t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i n} - \left[\frac{e^{2\pi i n t}}{(2\pi i n)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi i n}$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n e^{2\pi i n x})' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} \right)' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{2\pi i n x})'$$

$$\implies \Delta_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x}$$

Esercizi:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{x^4 - ix^2 + 5}{x^2 + i} \quad \text{funzione lent. crescente} \rightarrow \Delta_f \in S'(\mathbb{R})$$

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{x^2 + i}$$

$$= x^2 - 2i + \frac{3}{x^2 + i}$$

$$\begin{array}{c} x^4 - ix^2 + 5 \\ - x^4 - ix^2 \\ - 2ix^2 + 5 \\ + 2ix^2 - 2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 + i \\ x^2 - 2i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_f &= \Im(x^2) - 2i\Re(\epsilon) + 3\Im\left(\frac{\epsilon}{x^2+i}\right) = \\ &= \frac{\delta_0''}{-4\pi^2} - 2i\delta_0 + 3\Im\left(\frac{1}{x^2+i}\right) \end{aligned}$$

pare, calcolo solo per $\xi > 0$

$$\begin{aligned} \Im\left(\frac{1}{x^2+i}\right) &= -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^2+i}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z}\right)\Big|_{z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \\ &= -\pi i \sqrt{2} \frac{e^{-\sqrt{2}\pi i \xi(1-i)}}{1-i} = -\frac{\pi \sqrt{2} i}{2} (1+i) e^{-\sqrt{2}\pi i \xi} e^{\sqrt{2}\pi i \xi}, \quad \xi > 0 \end{aligned}$$

$$\implies \hat{T}_f = -\frac{\delta_0''}{4\pi^2} - 2i\delta_0 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} (1+i) e^{-\sqrt{2}\pi i |\xi|} e^{-\sqrt{2}\pi i |\xi|}$$

- $T = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^2 k \delta_k = \sum k^3 \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Possiamo che $T = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \langle \delta_k, \varphi \rangle \right| =$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \varphi(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\varphi(k)| \leq P_5^{(o)}(\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{1+k^5}$$

$|\varphi(k)| \leq \frac{P_5^{(o)}(\varphi)}{1+k^5}$

$$\implies T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

$$\Im(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \Im(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-2\pi i k \xi}$$

Semplificare $T = \mathcal{T}_2 \left[(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(x^2 \delta_2))' \right]$

$$T = \mathcal{T}_2 \left[(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(4 \delta_2))' \right] = \mathcal{T}_2 \left[(4 \cdot 2 \delta_4)' \right] = \mathcal{T}_2 (8 \delta_4') = 8 \delta_4'$$

$$\hat{\tau} = \Im(8 \delta_4') = 8 \cdot 2\pi i \xi \Im(\delta_2) = 16\pi i \xi e^{-4\pi i \xi}$$

- 1) $L i'(t) + \frac{1}{C} \{ q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \} = v(t)$

con $L = 2$, $C = \frac{1}{4}$, $q_0 = 1$, $i(0) = 1$, $v(t)$ generica

$$2(sI(s) - i(0)) + 4 \left\{ \frac{1}{s} + \frac{I(s)}{s} \right\} = V(s)$$

$$I(s) \left(\frac{2s^2+4}{s} \right) = V(s) + \frac{2s-4}{s}$$

$$I(s) = V(s) \underbrace{\left(\frac{s}{2s^2+4} \right)}_{H(s)} + \underbrace{\left(\frac{2s-4}{2s^2+4} \right)}_{G(s)}$$

$$H(s) = \frac{s}{2(s^2+2)} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} \cos \sqrt{2}t\right)$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}(\cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t)$$

$$\Rightarrow i(t) = h * u + g = \int_0^t \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}(t-\tau) u(\tau) d\tau + \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t$$

- $y(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)}(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$ eq. integr. di Volterra di 2^a specie di convoluzione
 $y - y * (e^{-t} \cdot t) = f$

$$Y(s) - Y(s) \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 1} \right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s} = F(s) + F(s) \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2s}}_{H(s)}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \frac{1}{2} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - e^{-2(t-\tau)}) g(\tau) d\tau$$

Sia $f(x) = x^2 e^{-x} X_{(0,+\infty)}(x)$. Prevedere le proprietà di \hat{f} e calcolarla.

- $\hat{f}(\xi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)$ per $\xi \rightarrow \pm\infty$
- $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall n \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\hat{f} \in C_* \wedge L^2 \wedge C^\infty$, non ha aspetti simmetrici

$$\mathcal{F}(e^{-x} X_{(0,+\infty)}(x))(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \left[\frac{e^{-x(1+2\pi i \xi)}}{-(1+2\pi i \xi)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i \xi}$$

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \mathcal{F}((-2\pi i x)^2 g(x)) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{g}(\xi)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{1+2\pi i \xi} \right) = \left(-\frac{2\pi i}{(1+2\pi i \xi)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{-4\pi^2}{(1+2\pi i \xi)^3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x^2 e^{-x} X_{(0,+\infty)}(x))(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 4\pi^2}{(1+2\pi i \xi)^3} \right) = \frac{2}{(1+2\pi i \xi)^3}$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+i)(x^2-4i)}$$

$f \in L'$, f dispari $\Rightarrow \hat{f}$ dispari

$$\left. \begin{array}{l} x f \in L' \\ x^2 f \notin L' \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{f} \in C'$$

Calcolo \hat{f} per $\xi > 0$
poi simmetrizza:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{-2\pi i \xi x}}{(x^2+i)(x^2-4i)} dx \quad \text{poli: } x_{1,2} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{2}(1+i)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_+(\xi) &= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+i)(z^2-4i)}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+i)(z^2-4i)}, -\sqrt{2}(1+i)\right) \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ \left. \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{2z(z^2-4i)} \right) \right|_{z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}} + \left. \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{2z(z^2-4i)} \right) \right|_{z=-\sqrt{2}(1+i)} \right\} \\ &= -\pi i \left\{ \frac{e^{-2\pi i \xi (1-i)}}{-5i} + \frac{e^{2\pi i \xi (1+i)}}{5i} \right\} \\ &= \frac{\pi}{5} \left\{ e^{-\sqrt{2}\pi i \xi} e^{-\sqrt{2}\pi \xi} - e^{2\sqrt{2}\pi i \xi} e^{-2\sqrt{2}\pi \xi} \right\} \quad \text{per } \xi > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{5} \operatorname{sign}(\xi) \left\{ e^{\sqrt{2}\pi i |\xi|} e^{-\sqrt{2}\pi |\xi|} - e^{2\sqrt{2}\pi i |\xi|} e^{-2\sqrt{2}\pi |\xi|} \right\}$$

Sia $f(x) = (x^2 e^{-2x^2})$. Calcolare $\hat{f}(\xi)$ sapendo che

$$\Im(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}$$

f reale pari $\rightarrow \hat{f}$ reale pari

$f \in S(\mathbb{R}) \rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$

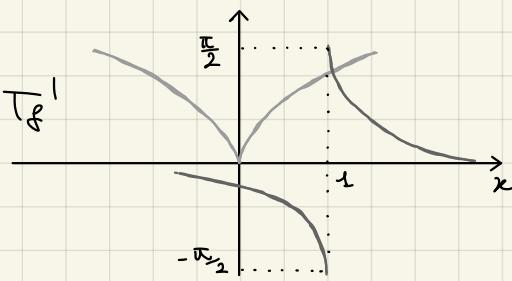
$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-x^2} \quad g^{\sqrt{2}}(x) = e^{-(\sqrt{2}x)^2} \quad \Im(g^{\sqrt{2}}(x))(\xi) = \hat{g}_{\sqrt{2}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im(x^2 e^{-2x^2}) &= \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{g}(\xi) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(-2\xi \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{2}} \right)' = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{2}} - 2\xi^2 \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{8} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{2}} (1 - \pi^2 \xi^2) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\rightarrow (\sqrt{|x|})' = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \operatorname{sign}(x)$$

Calcolare T_f^{-1}



$$\rightarrow \left(T_{\operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x-1} \right)^2} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} + \pi \delta_1 = -\frac{1}{(x-1)^2 + 1} + \pi \delta_1 = -\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \pi \delta_1$$

$$\implies (T_f)' = \frac{1}{2|x|} \operatorname{sign}(x) - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \pi \delta_1$$

$T = D_3(T_3(x\delta'_2))$ 1) Semplificare T 2) Calcolare $T * e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} 1) \langle T, q \rangle &= \langle D_3(T_3(x\delta'_2)), q \rangle = \langle T_3(x\delta'_2), \frac{1}{3}D_{\frac{1}{3}}q \rangle = \\ &= \langle x\delta'_2, T_3 \frac{1}{3}q\left(\frac{x}{3}\right) \rangle = \langle \delta'_2, \frac{x}{3}q\left(\frac{x-3}{3}\right) \rangle = \\ &= -\langle \delta_2, \left(\frac{x}{3}q\left(\frac{x-3}{3}\right)\right)' \rangle = -\langle \delta_2, \frac{1}{3}q\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{x}{9}q'\left(\frac{x-3}{3}\right) \rangle \\ &= -\left(\frac{1}{3}q\left(\frac{2-3}{3}\right) + \frac{2}{9}q'\left(\frac{2-3}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}q\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}q'\left(-\frac{1}{3}\right) = \\ &= \underbrace{\left\langle -\frac{\delta_{-1/3}}{3} + \frac{2}{9}\delta'_{-1/3}, q \right\rangle}_{T} \end{aligned}$$

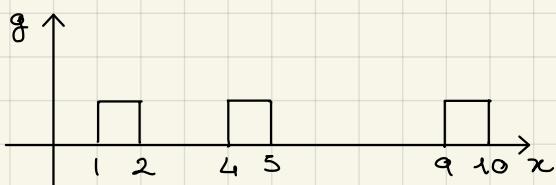
$$\begin{aligned} 2) T * e^{-x^2} &= -\frac{1}{3} (\delta_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}) + \frac{2}{9} (\delta'_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}) = -\frac{1}{3} e^{-(x+\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{9} (e^{-(x+\frac{1}{3})^2})' = \\ &= -\frac{1}{3} e^{-(x+\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{9} (-2(x+\frac{1}{3}) e^{-(x+\frac{1}{3})^2}) = -\frac{e^{-(x+\frac{1}{3})^2}}{3} \left(1 + \frac{4}{3}(x+\frac{1}{3})\right) \\ &= -\frac{e^{-(x+\frac{1}{3})^2}}{27} \left(\frac{13}{3} + 4x\right) \end{aligned}$$

- Seia $f(x) = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x)$.

1) Dimostrare che $f \in S(\mathbb{R})$

$$f(x) = x^2 \cdot g(x)$$

$g \in L^\infty(\mathbb{R})$ f misurab.



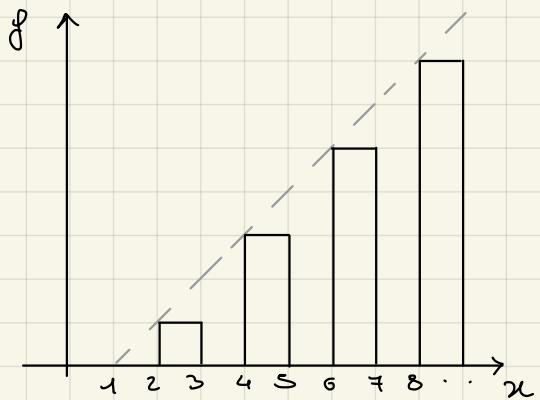
$\implies f$ lentamente crescente
perciò è una distribu=
zione temperata

2) Calcolare $(T_f)'$ ampiezza delle δ

$$\begin{aligned} (T_f)' &= 2xg(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^4 \delta_{k^2} - (k^2 + 1)^2 \delta_{k^2+1} \right] \\ &= 2x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[k^2, k^2+1]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ k^4 \delta_{k^2} - (k^2 + 1)^2 \delta_{k^2+1} \right\} \end{aligned}$$

- $T = \sum_{k=1}^{\infty} k \chi_{[2k, 2k+1]}(x).$

Dimostrare che $T \in S'(\mathbb{R})$ e calcolare T' e \hat{T}



$$T = T_f$$

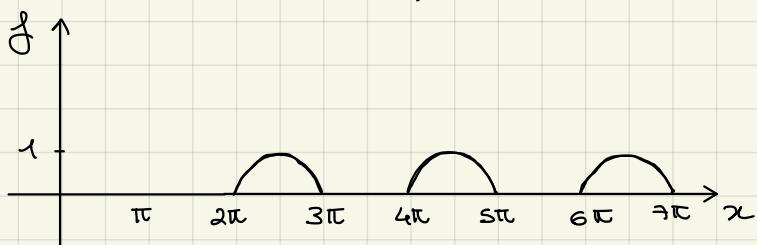
f è lontan. crescente $0 < f < \infty$
 $\Rightarrow T \in S'(\mathbb{R})$

$$T' = \sum_{k=1}^{\infty} k (\delta_{2k} - \delta_{2k+1}) \in S'(\mathbb{R}) \setminus D'_0(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{F}(\chi_{[2k, 2k+1]}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{2k}^{2k+1} e^{-2\pi i \xi x} dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left[\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right]_{2k}^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k e^{-2\pi i \xi 2k}) \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) = \\ &= \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (k e^{-4\pi i \xi k})}_{\text{serie a coeff. lontan. crescenti}} \end{aligned}$$

serie a coeff. lontan. crescenti $\in S'(\mathbb{R})$

- $T = \operatorname{seux} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[2k\pi, (2k+1)\pi]}(x).$



$$T = T_f$$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in S'(\mathbb{R})$$

f è cont. e regolare a tratti.

$$T' = f' = \cos x \sum_{k=1}^{\infty} \chi$$

$$T = \operatorname{seux} \cdot g(x)$$

$$\hat{T}_g = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2\pi i \xi x} dx = \left(\frac{1 - e^{-2\pi^2 i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4k\pi^2 i \xi} = \hat{g}(\xi)$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \mathcal{F}(\operatorname{seux} g(x)) = \mathcal{F}(\operatorname{seux}(x)) * \mathcal{F}(g(x)) = \\ &= \left(\frac{\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}}{2i} \right) * \hat{g}(\xi) = \frac{\hat{g}\left(\xi - \frac{1}{2\pi}\right) - \hat{g}\left(\xi + \frac{1}{2\pi}\right)}{2i} \end{aligned}$$