UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Laboratorio di Elettronica

Marco Aglietta – Ernesto Migliore

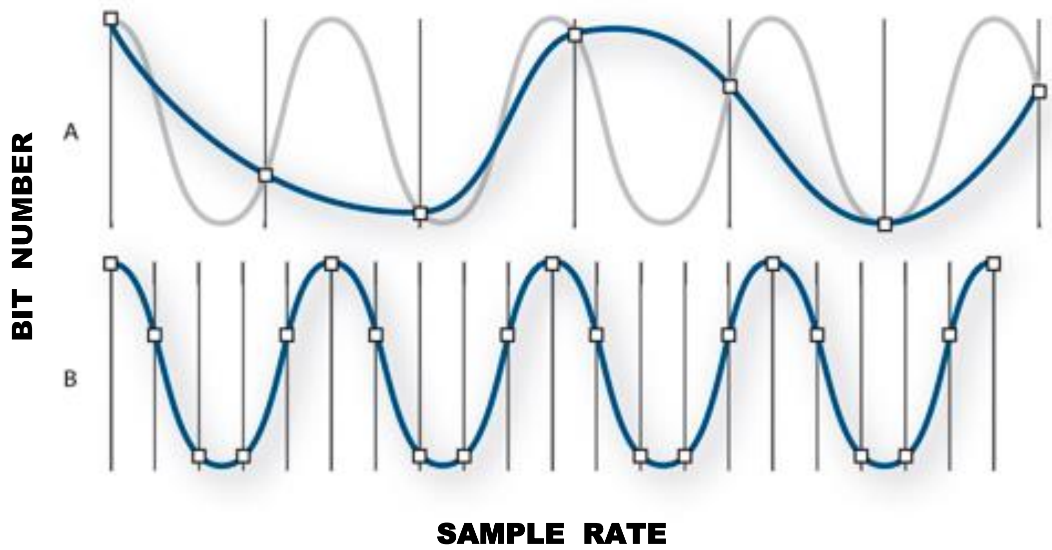
aglietta@to.infn.it migliore@to.infn.it

CFU 6 - A.A. 2021/22

Corso di laurea in Fisica

ADC Analog to Digital Converter

Campionamento del segnale analogico → conversione da tensione a numero digitale



Frequenza di campionamento insufficiente

16 bit	CD audio	44.100 Hz	CD	0–22.050 Hz
24 bit	DVD audio	48.000 Hz	DVD standard	0–24.000 Hz
		96.000 Hz	DVD Blu-ray	0–48.000 Hz

DAC Digital to Analog Converter

Conversione dei numeri digitali in valori analogici (tensioni)

Appunti di Teoria delle Reti

Reti elettriche ed elementi elettrici:

Si definisce rete elettrica un insieme di componenti elettrici variamente collegati , **ciascuno dei quali e' definito dalla relazione esistente tra la corrente che lo attraversa e la tensione ai sui capi**.

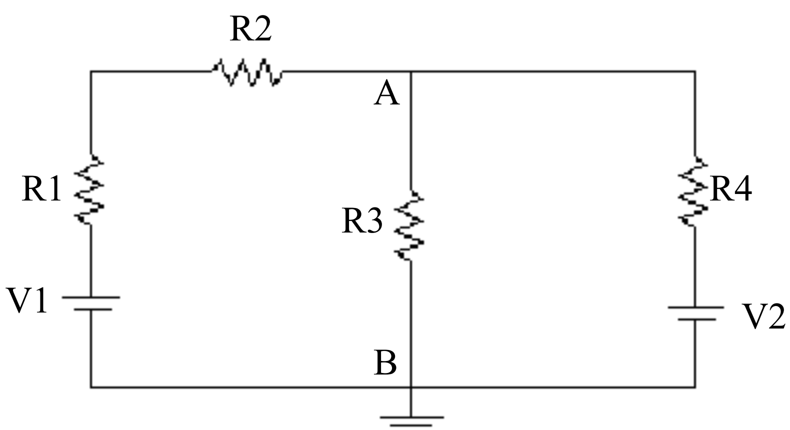
Resistenza → $V \propto I$ $(V=RI)$ Capacita' → $I \propto dV/dt$ $(I=CdV/dt)$

In una qualunque rete elettrica si definiscono:

Nodo = punto di confluenza di piu' elementi (i punti A e B sono nodi)

Ramo = tratto di rete compreso tra 2 nodi contigui. Nell'esempio abbiamo 3 rami

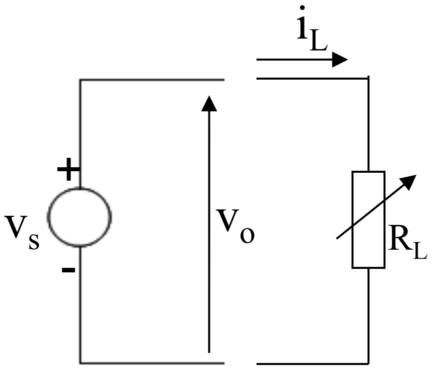
Maglia = piu' rami che formino un percorso chiuso costituiscono una maglia. Nell'esempio abbiamo 3 maglie



Sono elementi passivi quelli che non forniscono energia al circuito (R, L, C), attivi i generatori di tensione e corrente .

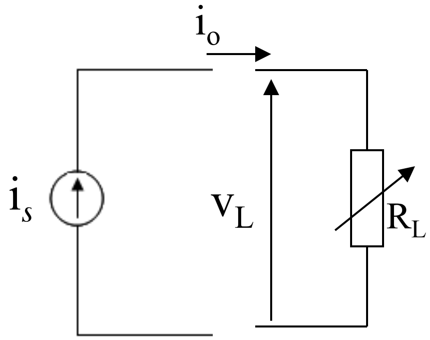
Generatore ideale di Tensione:

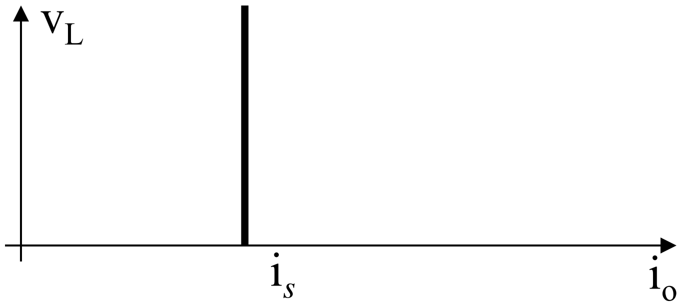
Elemento attivo del circuito che mantiene $v_o = v_s$ indipendentemente dalla corrente fornita sul carico



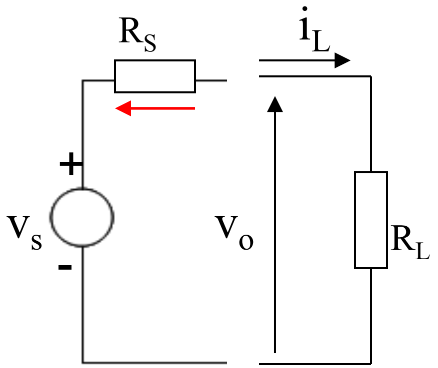
Generatore ideale di Corrente:

Mantiene $i_o = i_s$ indipendentemente dalla tensione ai suoi morsetti di uscita (ovvero qualunque sia il carico alimentato)

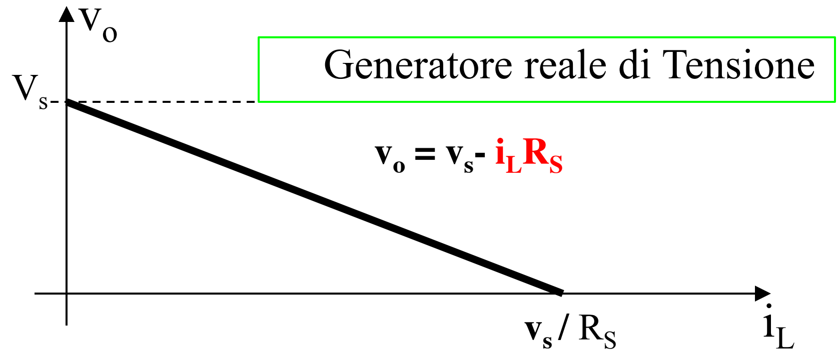




Nei generatori di tensione e corrente reali si ha sempre una parte di energia dissipata in calore. Queste perdite di energia vengono rappresentate introducendo la resistenza interna R_s del generatore

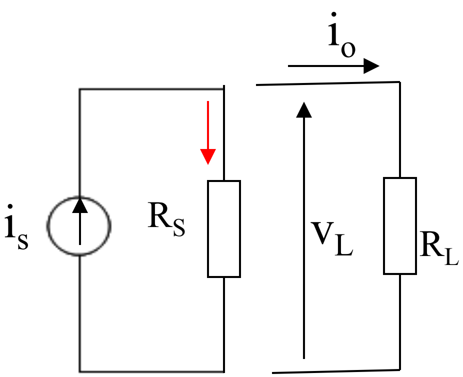


$v_o = v_s - i_L R_S$

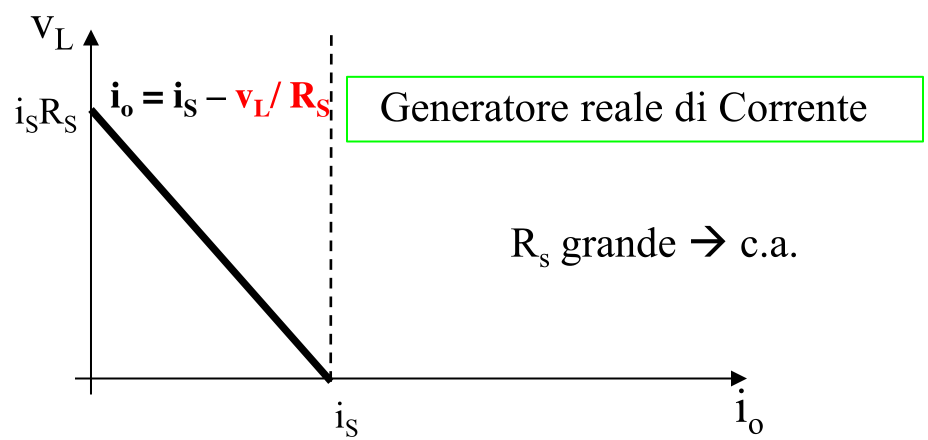


Piu' il valore del carico e' piccolo, piu' cresce la richiesta di corrente. Cresce di conseguenza la caduta di tensione sulla resistenza interna → diminuisce la tensione in uscita.

Piu' la sua resistenza interna e' piccola piu' l'alimentatore di tensione tende al caso ideale: $\mathbf{V_o = V_S}$ **se** $\mathbf{R_s}$ **→ c.c**



$i_o = i_S - v_L / R_S$



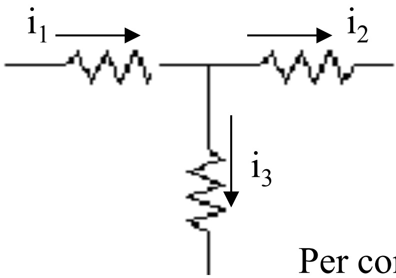
Piu' e' alto il valore del carico (e quindi v_L) piu' e' elevata la frazione di corrente che passa per la resistenza interna → diminuisce la corrente in uscita

Piu' la sua resistenza interna e' grande piu' l'alimentatore di corrente tende al caso ideale: $\mathbf{I_o = I_S}$ **se** $\mathbf{R_s}$ **→ c.a**

Le leggi fondamentali per analizzare un circuito elettrico sono le 2 $\boxed{\textbf{Leggi di Kirchhoff.}}$

1) <u>Legge delle correnti (o dei nodi)</u>

"La somma di tutte le correnti che attraversano un nodo deve essere zero in ogni istante di tempo"



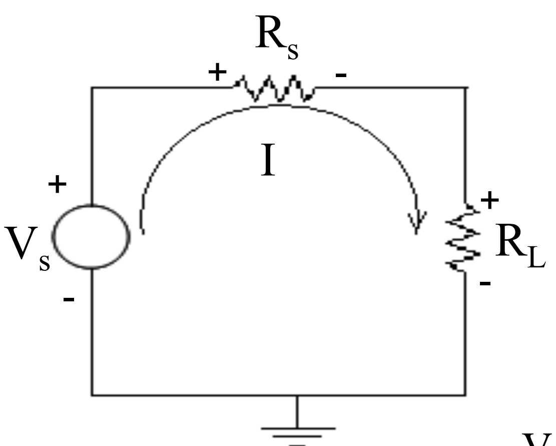
$$\Sigma\, i = 0$$

(Conservazione della carica che non viene ne' creata ne' persa sul nodo)

Per convenzione: le correnti entranti sono positive quelle uscenti negative

2) <u>Legge delle tensioni (o delle maglie)</u>

"La somma di tutte le cadute di tensione attorno ad una maglia deve essere zero ad ogni istante di tempo"



$$\Sigma\, v = 0$$

(Conservazione dell'energia)

La differenza di potenziale Vsu R significa che V Joule sono forniti dal generatore per muovere un coulomb di carica da un lato all'altro del resistore

q[Coulomb] x V[Volt] = [Joule]

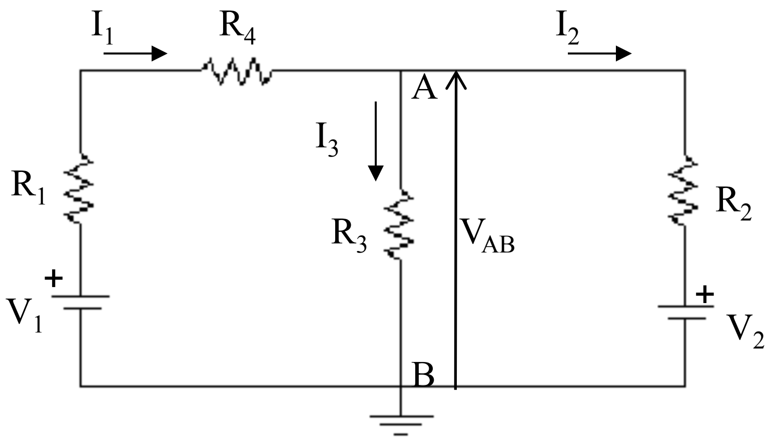
$V_s - IR_s - IR_L = 0$

1Coulomb x 1Volt = 1 Joule

1eV ~ 1.6 10^{-19} Joule

VI=[Watt]

Calcoliamo il valore delle correnti e della tensione V_{AB} per questa rete



$R_1 = R_4 = 50\ \Omega$ $\quad V_1 = 12V$

$R_2 = R_3 = 100\ \Omega$ $\quad V_2 = 9V$

Dopo aver scelto arbitrariamente il senso delle correnti applichiamo la legge delle tensioni alle 2 maglie

$V_1 - I_1R_1 - I_1R_4 - I_3R_3 = 0 \rightarrow 12 - 100I_1 - 100I_3 = 0$

$V_2 + I_2R_2 - I_3R_3 = 0 \rightarrow 9 + 100I_2 - 100I_3 = 0$

Abbiamo 3 incognite e due equazioni. Una terza relazione ci e' fornita dalla legge dei nodi applicata in A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \rightarrow I_3 = I_1 - I_2$$

Sostituendo questa espressione di I_3 nelle relazioni ottenute dalla legge delle tensioni otteniamo:

$12 - 100I_1 - 100(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow 12 - 200I_1 + 100I_2 = 0 \rightarrow 100I_1 = 6 + 50I_2$

$9 + 100I_2 - 100(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow 9 - 100I_1 + 200I_2 = 0$ $\quad \rightarrow 9 - 6 - 50I_2 + 200I_2 = 0 \rightarrow 150I_2 = -3 \rightarrow I_2 = -20\ 10^{-3}$

$\rightarrow 9 - 100I_1 - 4 = 0 \rightarrow I_1 = 50\ 10^{-3}$

Abbiamo trovato, $I_1 = 50mA$, $I_2 = -20mA$ (senso inverso rispetto a quello scelto), e quindi sara' $I_3 = I_1 - I_2 = 70\ mA$

Calcolato I_3 abbiamo subito il valore di $V_{AB} = 7V$

Teoremi per reti lineari

Le leggi di di Kirchhoff permettono di calcolare i valori di corrente e di tensione per qualsiasi tipo di circuito per quanto complesso esso sia. Tuttavia l'analisi si puo' spesso semplificare utilizzando i teoremi per reti lineari (cioe' quelle reti per cui vale il principio di sovrapposizione) di Thevenin e di Norton.

1) <u>Principio di Sovrapposizione</u>

"La risposta di un circuito lineare contenente piu' generatori indipendenti e' equivalente a quella che si avrebbe considerando ciascun generatore separatamente e sommando poi i diversi contributi."

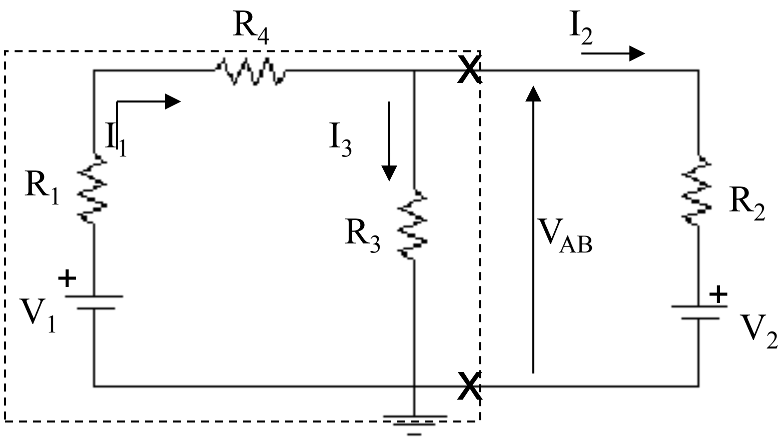
2) <u>Teorema di Thevenin</u>

"Rispetto ad una qualsiasi coppia di terminali, ogni circuito lineare e' equiparabile ad un generatore di tensione V_{Th} *(uguale alla tensione di circuito aperto) posto in serie alla resistenza* R_{Th} *vista tra i 2 terminali e considerando eventuali generatori di tensione(corrente) come c.c. (c.a)."*

3) <u>Teorema di Norton</u>

"Rispetto ad una qualsiasi coppia di terminali, ogni circuito lineare e' equiparabile ad un generatore di corrente I_N *(uguale alla corrente di corto circuito) posto in parallelo alla resistenza* R_N *vista tra i 2 terminali."*

Ricalcoliamo i valori delle correnti per la rete vista precedentemente utilizzando il teorema di Thevenin



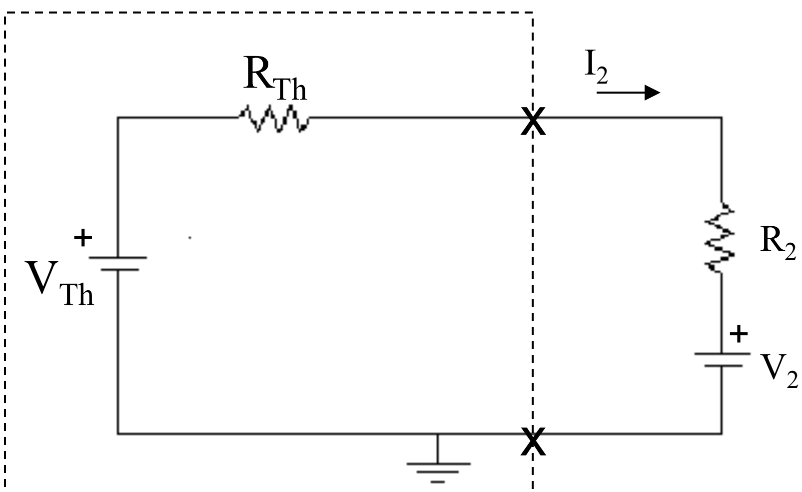
$R_1 = R_4 = 50\ \Omega$ $V_1 = 12V$

$R_2 = R_3 = 100\ \Omega$ $V_2 = 9V$

Applichiamo il teorema di Thevenin alla parte tratteggiata

$$V_{Th} = \frac{V_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{12 \times 100}{200} = 6V$$

$$R_{Th} = \frac{(R_1+R_4) R_3}{R_1 + R_4 + R_3} = \frac{100 \times 100}{200} = 50\Omega$$



Abbiamo allora:

$$I_2 = \frac{V_{Th} - V_2}{R_{Th} + R_2} = \frac{-3}{150} = -20mA$$

Calcolato I_2 si puo' ritornare sul circuito di partenza

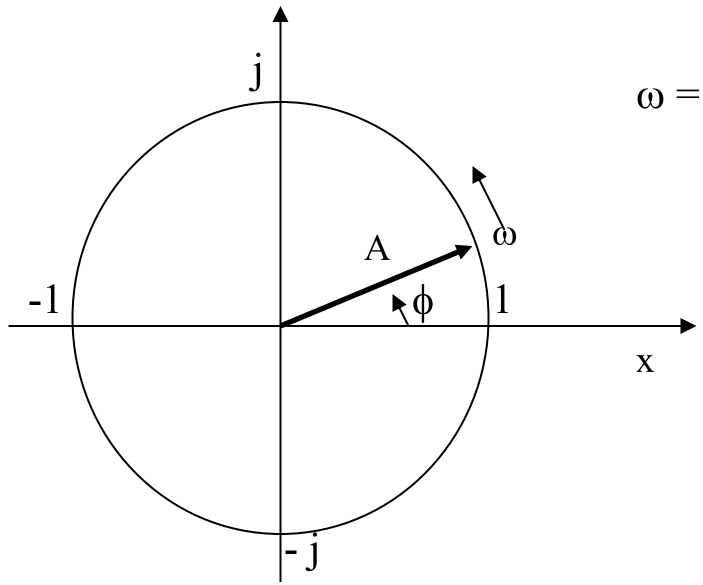
$V_{AB} = -20\ 10^{-3} \times 100 + 9 = 7V$

$I_3 = V_{AB}/R_3 = 70mA$

$I_1 = I_2 + I_3 = 50\ mA$

Studio di circuiti in regime sinusoidale

Una funzione $F(t) = A\cos\omega t$ del tempo si puo' pensare come la proiezione sull'asse x di un vettore di modulo A che ruota in senso antiorario con velocita' angolare ω (e periodo $T = 2\pi/\omega$)



$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \ [rad/s]$$

Ricordando che $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ possiamo scrivere

$$A\cos\omega t = \mathrm{Re}\,[Ae^{j\omega t}]$$

Per tenere conto di una fase iniziale diversa da zero si introduce una grandezza $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$ detta fasore cosi che:

$$\mathrm{Re}[Ae^{j\omega t} e^{j\phi}] = \mathrm{Re}[Ae^{j(\omega t+\phi)}] = \mathrm{Re}[\,A\cos(\omega t+\phi) + j\sin(\omega t+\phi)] = A\cos(\omega t+\phi)$$

$\phi = 0 \rightarrow e^{j\phi} = 1$ $\qquad$ $\phi = \pi \rightarrow e^{j\phi} = -1$

$\phi = \pi/2 \rightarrow e^{j\phi} = j$ $\qquad$ $\phi = 3\pi/2 \rightarrow e^{j\phi} = -j$

j e' un operatore che produce una rotazione di $\pi/2$

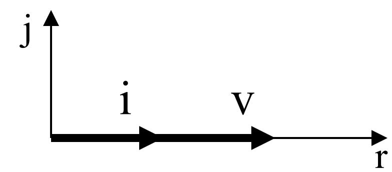
Resistenza, condensatore ed induttanza in regime sinusoidale

Un segnale sinusoidale di frequenza $f = \omega/2\pi$ applicato ad un circuito con resistenze, condensatori ed induttanze **mantiene la frequenza inalterata su tutti i suoi rami pur con differenti valori di fase**. La notazione con i numeri complessi permette di semplificare le equazione differenziali caratteristiche di questi circuiti in semplici operazioni complesse trattando i componenti dinamici come resistenze complesse (impedenze Z)

Resistenza

$v = V\cos\omega t$

$i = (V/R)\cos\omega t$ $\Rightarrow$ $Z_R = v/i = R$ e' un numero reale



Condensatore (I = CdV/dt Q = CV)

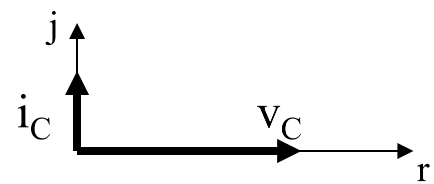
La corrente che circola in un condensatore a cui sia applicata una tensione sinusoidale $v=V\cos\omega t$ **e' in anticipo di $\pi/2$** rispetto alla tensione in ingresso

$$(Q=CV) \rightarrow i_C = C(dv_C/dt) = -\omega CV \sin\omega t = \omega CV \cos(\omega t + \boldsymbol{\pi/2})$$

Utilizzando la notazione complessa dove l'operatore j produce una rotazione antioraria di $\pi/2$

$v_C = V$ (fase nulla $\rightarrow$ reale)

$i_C = \omega CV \cos(\omega t + \pi/2) = j\omega CV$



$Z_C = v/i = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{j}{\omega C}$ e' un numero imaginario puro

Il suo modulo, $1/\omega C$ misurato in ohm, prende il nome di reattanza capacitiva X_C

$X_C \rightarrow 0$ se $\omega \rightarrow \infty$ alle alte frequenze il condensatore si comporta come un corto circuito

$X_C \rightarrow \infty$ se $\omega \rightarrow 0$ in continua il condensatore si comporta come un circuito aperto

Induttanza

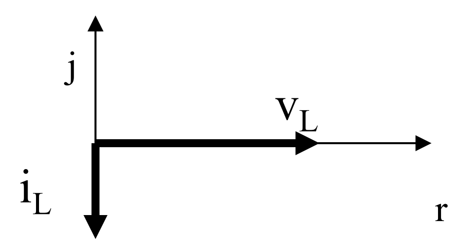
La corrente che circola in una induttanza a cui sia applicata una tensione sinusoidale **e' in ritardo di $\pi/2$** rispetto alla tensione in ingresso

$v_L = L(di/dt) \rightarrow i = (1/L)\int v dt \rightarrow i = (1/L)\int V\cos\omega t dt = (V/\omega L)\sin\omega t = (V/\omega L)\cos(\omega t \boldsymbol{-\pi/2})$

Utilizzando la notazione complessa dove l'operatore $-j$ produce una rotazione oraria di $\pi/2$

$v_L = V$ (fase nulla $\rightarrow$ reale)

$i_L = (V/\omega L)\cos(\omega t - \pi/2) = -j(V/\omega L)$



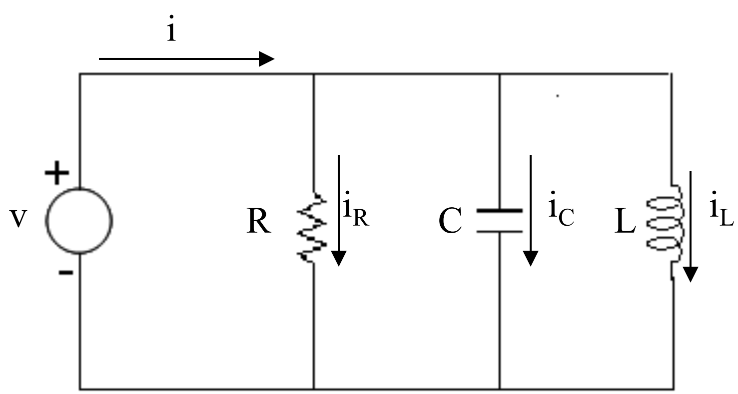
$Z_L = v/i = j\omega L$ e' un numero imaginario puro

Il suo modulo, ωL misurato in ohm, prende il nome di reattanza induttiva X_L

$X_L \rightarrow \infty$ se $\omega \rightarrow \infty$ alle alte frequenze l'induttanza si comporta come un circuito aperto

$X_L \rightarrow 0$ se $\omega \rightarrow 0$ in continua l'induttanza si comporta come un corto circuito

Consideriamo questo circuito



$Z_R = v/i_R = R$

$$Z_C = v/i_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$Z_L = v/i_L = j\omega L$

$v = V\cos\omega t$

$i_R = v/R$; $i_C = C(dv/dt)$; $i_L = (1/L)\int v dt \longrightarrow v = L\,(di_L/dt)$

$$i = i_R + i_C + i_L = v/R + C(dv/dt) + i_L \Longrightarrow LC\,(d^2 i_L/d^2 t) + (L/R)\,(di_L/dt) + i_L = i$$

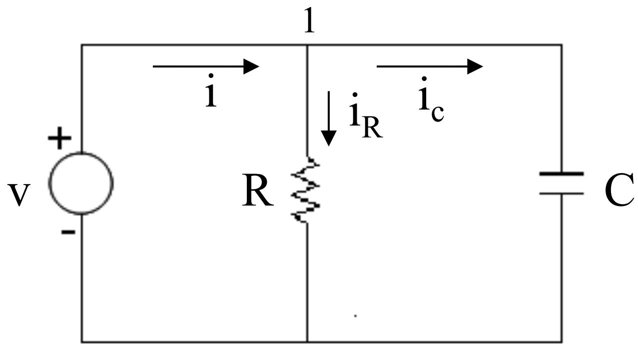
Equazione differenziale di secondo grado

Utilizzando la notazione complessa $\Downarrow$

$$i = i_R + i_C + i_L \Longrightarrow V/R + V/j\omega L + j\omega CV = i$$

Equazione algebrica

Nel caso in cui siano presenti solo una resistenza ed una capacita'



$v = V\cos\omega t$

$i_R = v/R = (V/R)\cos\omega t$ (IN FASE)

$i_C = dq/dt = C dv/dt = -\omega C V \sin\omega t = \omega C V \cos(\omega t + 90^o)$ (SFASAMENTO)

La corrente nel condensatore anticipa la tensione di 90º.

Sul nodo 1 deve valere la $i = i_C + i_R$

$i = (V/R)\cos\omega t - \omega C V \sin\omega t$

Ponendo: $I\cos\phi = V/R$ e $I\sin\phi = \omega C V$ possiamo riscrivere la corrente i come segue:

$i = I\cos\phi\cos\omega t - I\sin\phi\sin\omega t = I\cos(\omega t + \phi)$

La corrente e' ancora sinusoidale ma e' in anticipo di fase dell'angolo ϕ rispetto alla tensione

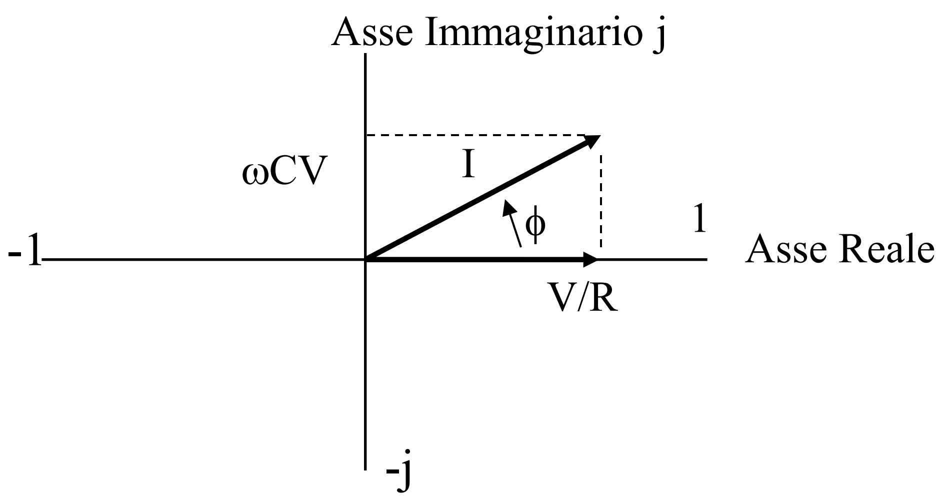
$I\cos\phi = V/R$, $I\sin\phi = \omega C V \rightarrow \operatorname{tg}\phi = \omega C R$

$I^2\cos^2\phi + I^2\sin^2\phi = (V/R)^2 + (\omega C V)^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow \phi = \operatorname{arc\,tg}(\omega C R) \\ \rightarrow I = V\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2} \end{array}}$$

Introducendo la notazione complessa attraverso la convenzione che il simbolo j rappresenti un anticipo di fase di 90^o

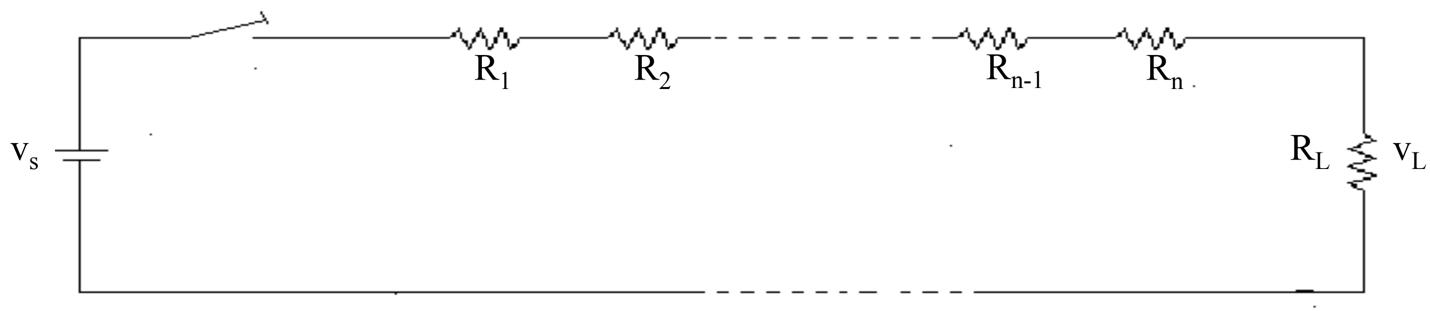
La corrente i del generatore trovata in precedenza viene riscritta come: $i = V/R + j\omega CV$



e le relazioni trovate prima

$\phi = \text{arc tg}\ (\omega CR)$ e $I = V\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2}$ risultano evidenti dal disegno

Consideriamo questo circuito. All'istante t_0 si chiude l'interruttore.



Alla chiusura si produce una corrente $i = v_s/R_{tot}$ e sul carico avremo una caduta di tensione $v_L = iR_L$.

Generalmente nella discussione dei circuiti elettronici si considerano trascurabili le dimensioni del circuito stesso e le variazioni di potenziale hanno tempo di propagazione nullo. E' chiaro che questa semplificazione vale quando la scala temporale di variabilita' dei segnali e' molto piu' lenta rispetto ai tempi di propagazione lungo il circuito.

Se i segnali elettrici si propagano con velocita' prossima a c (~30cm/ns), in circuiti con dimensioni scala della decina di centimetri, i ritardi saranno dell'ordine dei ns. Quindi potremmo trattare correttamente con l'approssimazione 'istantanea' segnali con frequenza di molti MHz ma non quelli di GHz o piu'.

Vediamo di studiare il comportamento di quello che puo' essere considerato il circuito elementare per trasportare segnali su grandi distanze ovvero **la linea di trasmissione.**

D'altra parte, nella realizzazione dei rivelatori di particelle, per il trasporto del segnale dal rivelatore alla elettronica di front-end, oppure per la temporizzazione dei segnali nelle logiche di trigger, le linee di trasmissione giocano un ruolo molto importante.

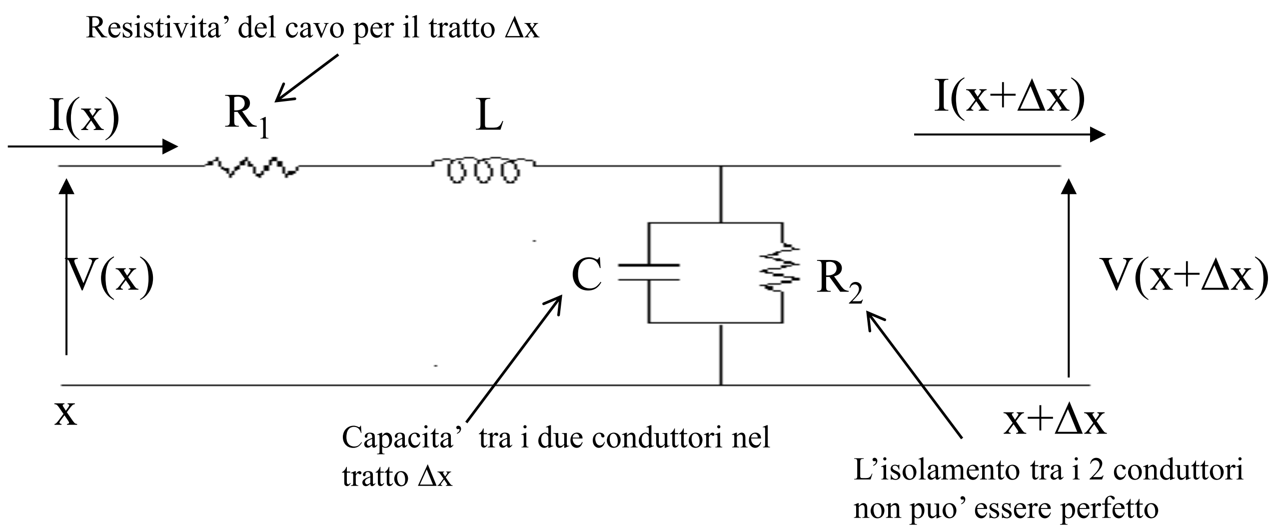
Cavo Coassiale – Linea di ritardo

Studiamo la propagazione di un segnale in un cavo.

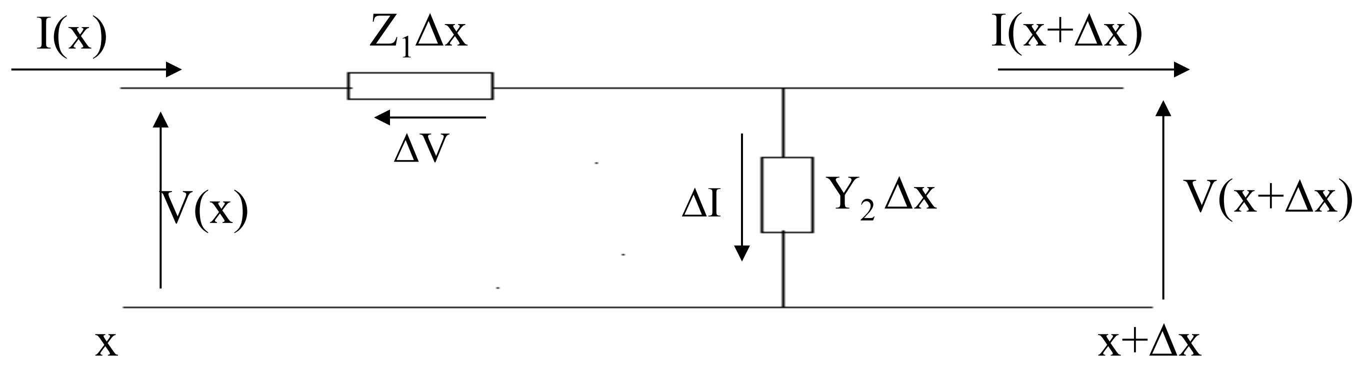
Il segnale considerato e' di tipo sinusoidale a frequenza costante , e lo studio considera esauriti tutti i transitori. Come visto anche la corrente sara' sinusoidale con la stessa frequenza. In ogni punto x della linea avremo un andamento sinusoidale nel **tempo ma le ampiezze saranno differenti a seconda della posizione, per l'attenuazione** subita dal segnale mentre procede lungo il cavo.

$$V(x,t) = V(x)e^{j\omega t}$$

Scopo dello studio e' trovare le equazioni che legano tensione e corrente in punti diversi (x e x $+\Delta x$) della linea. Nell'ipotesi stazionaria, consideriamo un tratto infinitesimo Δx di linea che studieremo mediante questo modello dove si utilizzano impedenze e conduttanze per unita' di lunghezza.



impedenza per unità di lunghezza [Ω/m]



Impedenza per unita di lunghezza

$$\boxed{Z_1 = R_1 + j\omega L}$$

Conduttanza per unita di lunghezza

$$\boxed{Y_2 = 1/Z_2} = \frac{1}{R_2//C} = \frac{R_2 + 1/j\omega C}{R_2(1/j\omega C)} = \frac{j\omega R_2 C + 1}{R_2} = j\omega C + 1/R_2 = \boxed{j\omega C + G}$$

$G = 1/R_2$ rappresenta le perdite per basso isolamento tra i 2 conduttori, in genere trascurabili

Applicando le leggi di Kirchoff alla maglia ed al nodo si puo' scrivere

a) $V(x) - I(x)Z_1\Delta x = V(x+\Delta x)$

b) $I(x) - \Delta I = I(x+\Delta x) \rightarrow I(x) - V(x+\Delta x)\, Y_2\Delta x - I(x+\Delta x) = 0$

Rendiamo esplicite le variazioni di tensione e corrente lungo il tratto Δx scrivendo:

$$V(x+\Delta x) = V(x) + \Delta V$$
$$I(x+\Delta x) = I(x) + \Delta I$$

Sostituendo si ha:

a) $V(x) = I(x)Z_1\Delta x + V(x) + \Delta V = 0 \rightarrow \Delta V = -\, I(x)Z_1\Delta x$

b) $I(x) - [V(x) + \Delta V]\, Y_2\Delta x - I(x) - \Delta I = 0 \rightarrow [V(x) + \Delta V]\, Y_2\Delta x = \Delta I$

$$\rightarrow \Delta I = -\, V(x)\, Y_2\Delta x - \Delta V\, Y_2\Delta x$$

Nel limite $\Delta x \rightarrow 0$ (e trascurando il termine $\Delta V \Delta x$ che e' un infinitesimo di ordine superiore) abbiamo un sistema di 2 equazioni differenziali

$$\begin{cases} dV/dx = -Z_1 I \quad (1) \\ dI/dx = -V\,Y_2 \end{cases}$$

che risolviamo derivando la prima equazione $\longrightarrow$ $d^2V/d^2x = -Z_1 dI/dx$

sostituendo poi il valori di dI/dx dalla seconda $\longrightarrow$ $d^2V/d^2x = V\,Z_1\,Y_2$

Poniamo quindi : $\boldsymbol{\gamma = (Z_1\,Y_2)^{1/2}}$ (γ sara' in generale una quantita' complessa $\gamma=\alpha+j\beta$)

γ = costante di propagazione della linea

e otteniamo l'espressione $\mathbf{d^2V/d^2x - V\gamma^2 = 0}$

L'integrale generale di questa equazione e' dato da: $\boxed{V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}}$

L'espressione della corrente si puo' ottenere facilmente dalla (1).

$I = (-1/Z_1)(-\gamma Ae^{-\gamma x} + \gamma Be^{\gamma x})$ Ricordando che $Y_2 = 1/Z_2$ si ottiene : $\mathbf{I = (Z_1 Z_2)^{-1/2} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x})}$

La quantita' $\mathbf{(Z_1Z_2)^{1/2}}$ e' **l'impedenza Z_c caratteristica della linea**. $\rightarrow$ V(x) / I(x)

Abbiamo quindi trovato per l'andamento con x di tensione e corrente le seguenti espressioni

$$\begin{cases} V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \\ I(x) = (1/Z_c)(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \end{cases}$$

dove

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma &= (Z_1\,Y_2)^{1/2} = [(R_1 + j\omega L)\,(G + j\omega C)]^{1/2} \\ Z_c &= (Z_1Z_2)^{1/2} = \left(\frac{R_1 + j\omega L}{G + j\omega C}\right)^{1/2} \end{aligned}}$$

$Z_1 = R_1 + j\omega L$

$Y_2 = 1/Z_2 = G + j\omega C$

Abbiamo ottenuto per V(x) ed I(x) le espressioni:

$$\begin{cases} V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \\ I(x) = (1 / Z_c)(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \end{cases}$$

(γ , adimensionale, sara' in generale una quantita' complessa: $\gamma=\alpha+j\beta$)

Queste espressioni dipendono solo da x (dal punto lungo la linea di trasmissione) e non dal tempo. In realta' essendo in un regime sinusoidale stazionario l'espressione completa della tensione e'

$$\boxed{V(x,t) = \mathrm{Re}\,[V(x)e^{j\omega t}]}$$

che lavorando sugli esponenziali si puo' riscrivere come:

$$e^{\gamma x}e^{j\omega t} = e^{(\alpha+j\beta)x+j\omega t} = e^{\alpha x}e^{j\,(\beta x\ +\omega t)} \qquad e^{-\gamma x}e^{j\omega t} = e^{-(\alpha+j\beta)x+j\omega t} = e^{-\alpha x}e^{j\,(-\beta x+\omega t)}$$

$$\boxed{V(x,t) = \mathrm{Re}[\,Ae^{-\alpha x}e^{j\,(-\beta x+\omega t)} + Be^{\alpha x}e^{j\,(\beta x+\omega t)}\,]}$$

SOMMA DI ONDE DIRETTA + RIFLESSA

$\boldsymbol{\phi = (\pm\beta x + \omega t)}$ **Fattore di fase dell'onda**

Si definisce **'velocita' di fase'** $\mathbf{v_f}$ dell'onda, la velocita' con cui un osservatore deve muoversi lungo l'asse x per vedere l'onda con fase costante (es: si muove in modo da essere sempre sulla posizione del massimo → surfista). La condizione da trovare e' quindi $d\phi = 0$

$$d\phi = -\beta dx + \omega dt = 0 \Longrightarrow v_f = dx/dt = \omega/\beta$$

L'asse x e' diretto dal generatore al carico, la velocita di fase v_F e' positiva. ONDA DIRETTA. L'ampiezza $Ae^{-\alpha x}$ diminuisce allontanandosi dal generatore

$$d\phi = \beta dx + \omega dt = 0 \Longrightarrow v_f = dx/dt = -\omega/\beta$$

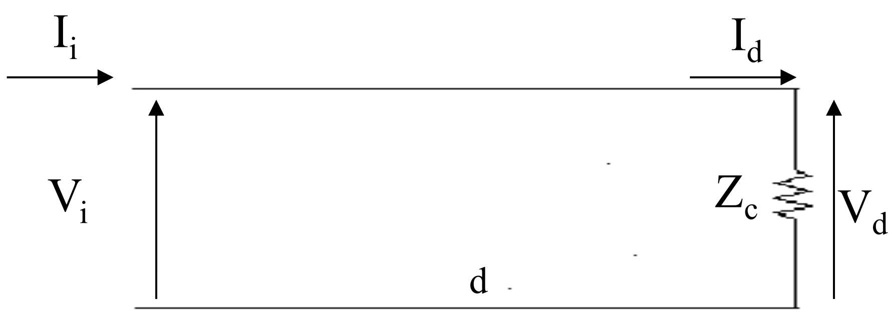
v_f negativa → ONDA RIFLESSA → $Be^{\alpha x}$ (l'ampiezza non puo' aumentare→ e' un onda che viaggia in senso inverso)

Un onda che non abbia la componente riflessa si chiama Progressiva, un onda con entrambe le componenti, incidente e riflessa, e' detta Stazionaria

Possiamo evidenziare le ampiezze delle componenti incidente (V_i , I_i) e riflessa (V_r , I_r) del segnale.
Nell'onda incidente l'ampiezza diminuisce esponenzialmente al crescere di x, mentre avanza, situazione fisicamente possibile. Il fatto che nella riflessa l'ampiezza sembri crescere con x (fisicamente impossibile) significa che viaggia in senso opposto.

$$\begin{cases} V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \\ I = (1/Z_c)(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x} \\ I = \underbrace{(V_i/Z_c)\, e^{-\gamma x}}_{I_i} - \underbrace{(V_r/Z_c)\, e^{\gamma x}}_{I_r} \end{cases}$$

Supponiamo ora che alla distanza d la linea di trasmisione sia terminata con la sua impedenza caratteristica Z_C.
Al punto d dovra' essere:

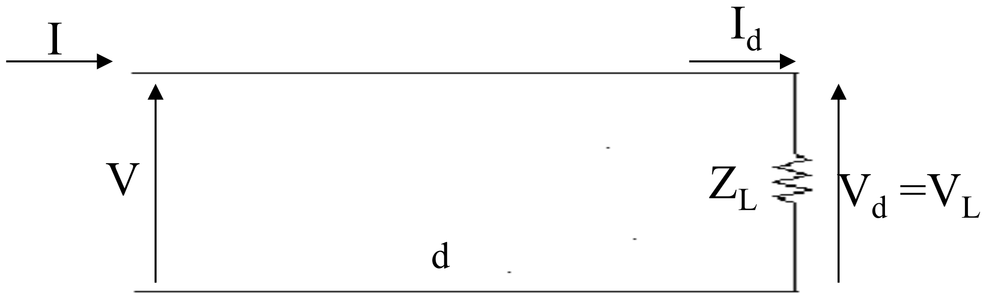


$$V_d = I_d Z_c \rightarrow \underbrace{V_i e^{-\gamma d} + V_r e^{\gamma d}}_{V_d} = \underbrace{(1/Z_c)(V_i e^{-\gamma d} - V_r e^{\gamma d})}_{I_d} Z_c \rightarrow V_i e^{-\gamma d} + V_r e^{\gamma d} = V_i e^{-\gamma d} - V_r e^{\gamma d}$$

Da cui necessariamente $V_r = - V_r = 0$ $\Longrightarrow$

Se la linea e' chiusa sulla sua impedenza caratteristica non c'e' riflessione , non c'e' onda riflessa, e'come se la linea fosse infinita

Vediamo ora il caso piu' generale di una linea che sia chiusa su una impenenza di valore diverso dalla sua impedenza caratteristica



Se $Z_L \neq Z_c$ allora avremo $V_r \neq 0$ → esiste riflessione che sara' una certa frazione ρ del nostro segnale V in ingresso

$\begin{cases} V_i = V \\ I_i = V/Z_c \end{cases}$ **Segnale principale** $\begin{cases} V_r = \rho V \\ I_r = -\rho V/Z_c \end{cases}$ **Segnale riflesso**

Al termine della linea avremo: $V_d = I_d Z_L$ → $V_d = V_L = V + \rho V = (V/Z_c - \rho V/Z_c) Z_L = V Z_L/Z_c - \rho V Z_L/Z_c$

da cui segue

$$\rho V(1+Z_L/Z_c) = V(Z_L/Z_c - 1) \rightarrow \boxed{\rho = \frac{Z_L/Z_c - 1}{1 + Z_L/Z_c}}$$

Questa espressione della frazione di segnale riflesso ci consente di evidenziare 3 casi particolari:

$Z_L = Z_c$ → ρ = 0 non c'e' segnale riflesso (linea adattata)

$Z_L = 0$ → ρ = - 1 il segnale riflesso ha la stessa ampiezza di quello incidente ed e' capovolto

$Z_L = \infty$ → ρ = 1 il segnale riflesso ha la stessa ampiezza di quello incidente

Riprendiamo l'espressione della impedenza caratteristica della linea, $\mathbf{Z_c = (Z_1 Z_2)^{1/2}}$, e consideriamo il caso particolare in cui si abbiano lungo il cavo **perdite resistive trascurabili** rispetto ai termini induttivi e capacitivi . Cio' significa considerare:

$\mathbf{R_1 \ll \omega L}$ **e** $\mathbf{G = 1/R_2 \ll \omega C}$

$$\boxed{Z_1 = R_1 + j\omega L}$$

$$\boxed{Y_2 = 1/Z_2 = j\omega C + G}$$

$$Z_c = (Z_1 Z_2)^{1/2} = \left(\frac{R_1 + j\omega L}{G + j\omega C}\right)^{1/2} \Longrightarrow \boxed{Z_c = (L/C)^{1/2}}$$

Invece l'espressione del parametro γ (costante di propagazione della linea) in questo caso particolare diventa:

$$\gamma = (Z_1/Z_2)^{1/2} = = [(R_1 + j\omega L)\ (G + j\omega C)]^{1/2} \Longrightarrow \boxed{\gamma = j\omega (LC)^{1/2}}$$

γ immaginario puro = jβ
α =0 → non c'e' attenuazione

In questo caso particolare la velocita' di fase sara' data da:

$$\boxed{v_f = \pm\, \omega/\beta = (LC)^{-1/2}}$$

e' indipendente dalla frequenza → non c'e' distorsione

Valori tipici per un cavo coassiale tipo RG-58 (BNC da laboratorio) e RG 174 (Lemo 00)

C = 100 pF/m = $\mathbf{10^{-10}}$ F/m

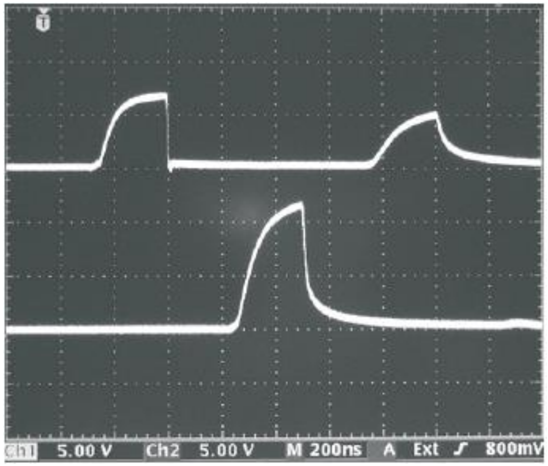
L = 0.25 μH /m = $\mathbf{2.5 10^{-7}}$ H/m

$$\mathbf{Z_c} = (L/C)^{1/2} = (2.5\ 10^{-7}/10^{-10})^{1/2} = (2.5\ 10^{3})^{1/2} \mathbf{= 50\Omega}$$

$$\mathbf{1/v_f} = (LC)^{1/2} = (2.5\ 10^{-7} \times 10^{-10})^{1/2} = \mathbf{5\ ns/m}$$

$$v_f = 2\ 10^{8}\ m/s$$

$Z_L = \infty$



Risposta ad impulsi veloci : caso reale

Abbiamo visto che per un cavo ideale senza attenuazione, la costante di propagazione $\gamma = \alpha + j\beta$ diventa un numero immaginario puro

$$\gamma = (Z_1/Z_2)^{1/2} = = [(R_1 + j\omega L)\ (1/R_2 + j\omega C)]^{1/2} = j\omega(LC)^{1/2}$$

e la velocita' di fase non dipende dalla frequenza

$$v_f = \pm\ \omega/\beta = (LC)^{-1/2}$$

Nei cavi reali abbiamo invece una attenuazione dei segnali dovuta principalmente all'aumento di resistivita' causato dall'effetto 'pelle' nei conduttori ed , in misura minore da perdite di isolamento nel dielettrico tra i conduttori. Entrambi gli effetti sono funzione della frequenza. L'attenuazione del cavo si puo' riscrivere come

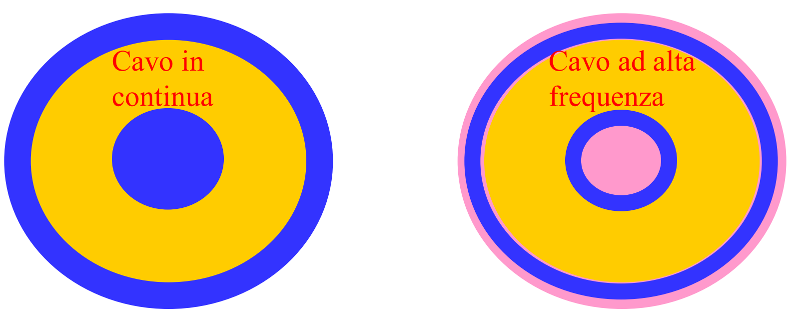
$$\alpha(f) = a\sqrt{f} + bf$$

(il secondo termine dovuto alle perdite nel dielettrico diventa importante solo oltre i GHz).

Diminuzione della sezione utile di un conduttore dovuto all'effetto 'pelle'

RAME CHE PARTECIPA

ALLA CONDUZIONE



RAME CHE NON PARTECIPA

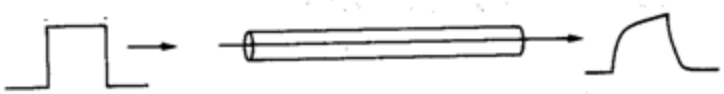
ALLA CONDUZIONE

Per i segnali piu' comuni in laboratorio (e/o da rivelatori)

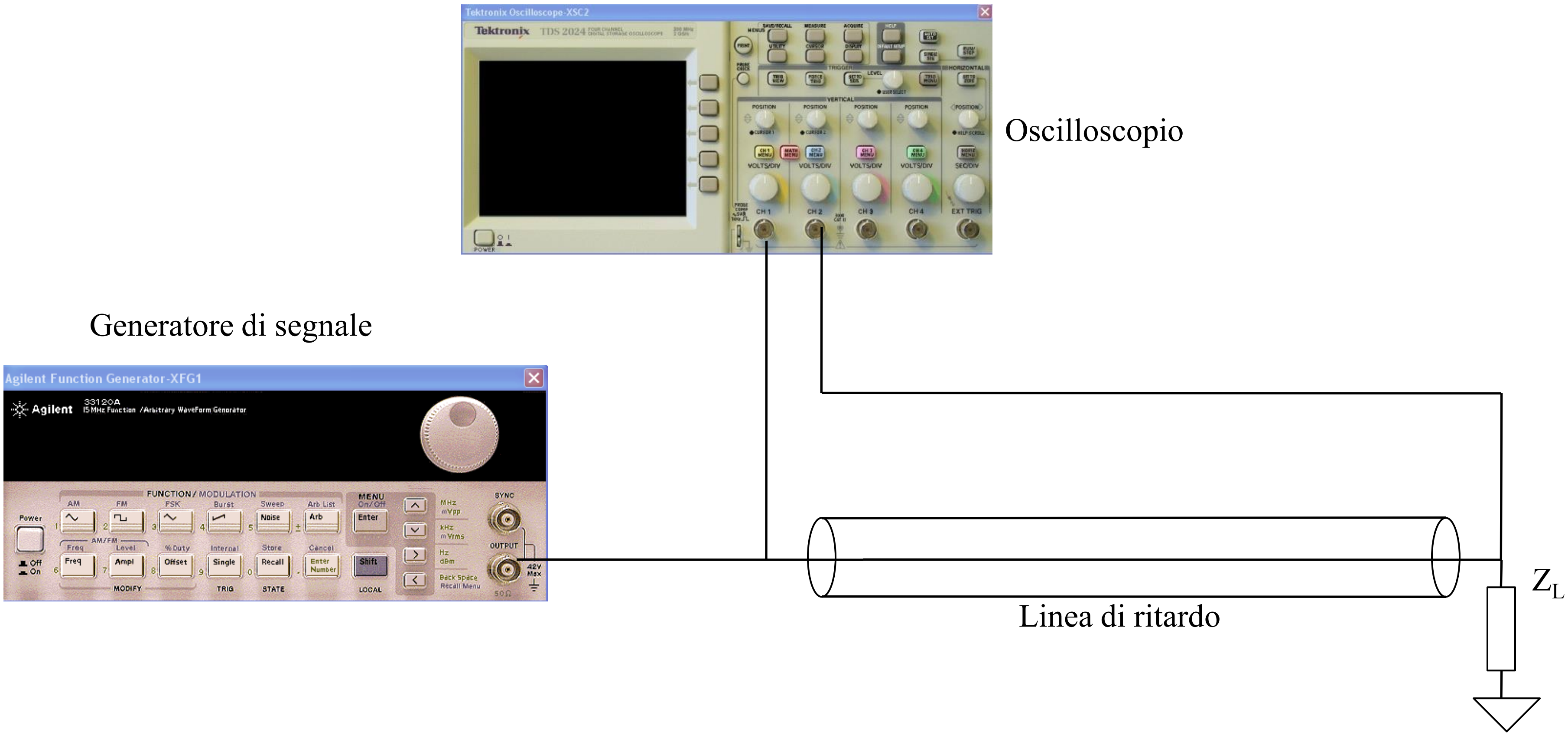
$$\boxed{\alpha(f) = a\sqrt{f}}$$

Al crescere della frequenza la resistivita' del cavo non e' piu' trascurabile , il parametro γ non e' piu' un numero immaginario puro .

Le componenti di Fourier di piu' alta frequenza che concorrono a formare l'impulso **saranno attenuate maggiormente rispetto a quelle di piu' bassa frequenza. L'impulso al termine della linea oltre ad essere complessivamente attenuato mostra chiaramente i fronti arrotondati rispetto all'impulso di partenza**. E' un tipo di distorsione introdotto dal fatto che ora anche la velocita' di propagazione (ω/β) viene a dipendere dalla frequenza (mezzo dispersivo).



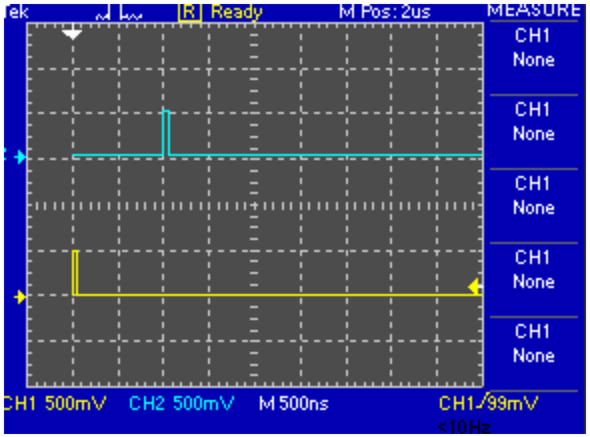
Esperienza in laboratorio



Risposta ad un impulso di tensione veloce

END

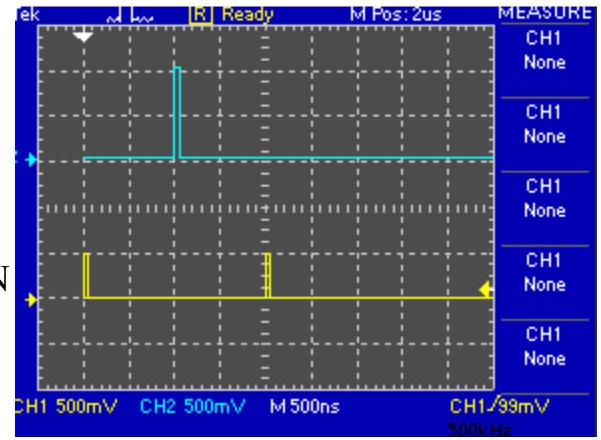
IN



$Z_L = Z_C = 50\ \Omega$ Linea adattata, non c'e' riflessione $\rho = \dfrac{Z_L/Z_c - 1}{1 + Z_L/Z_c} = 0$

END

IN

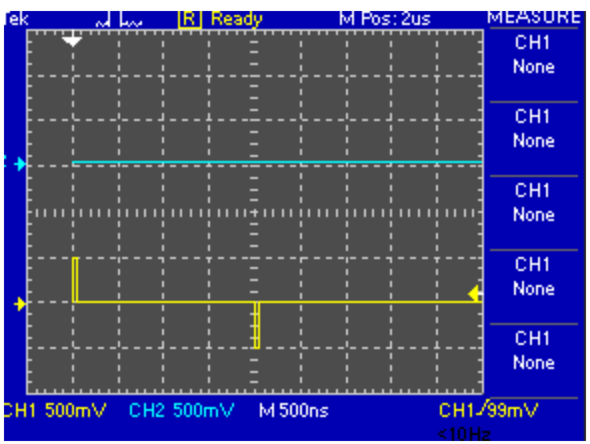


$Z_L = \infty$

$$\rho = \frac{Z_L/Z_c - 1}{1 + Z_L/Z_c} = 1$$

END

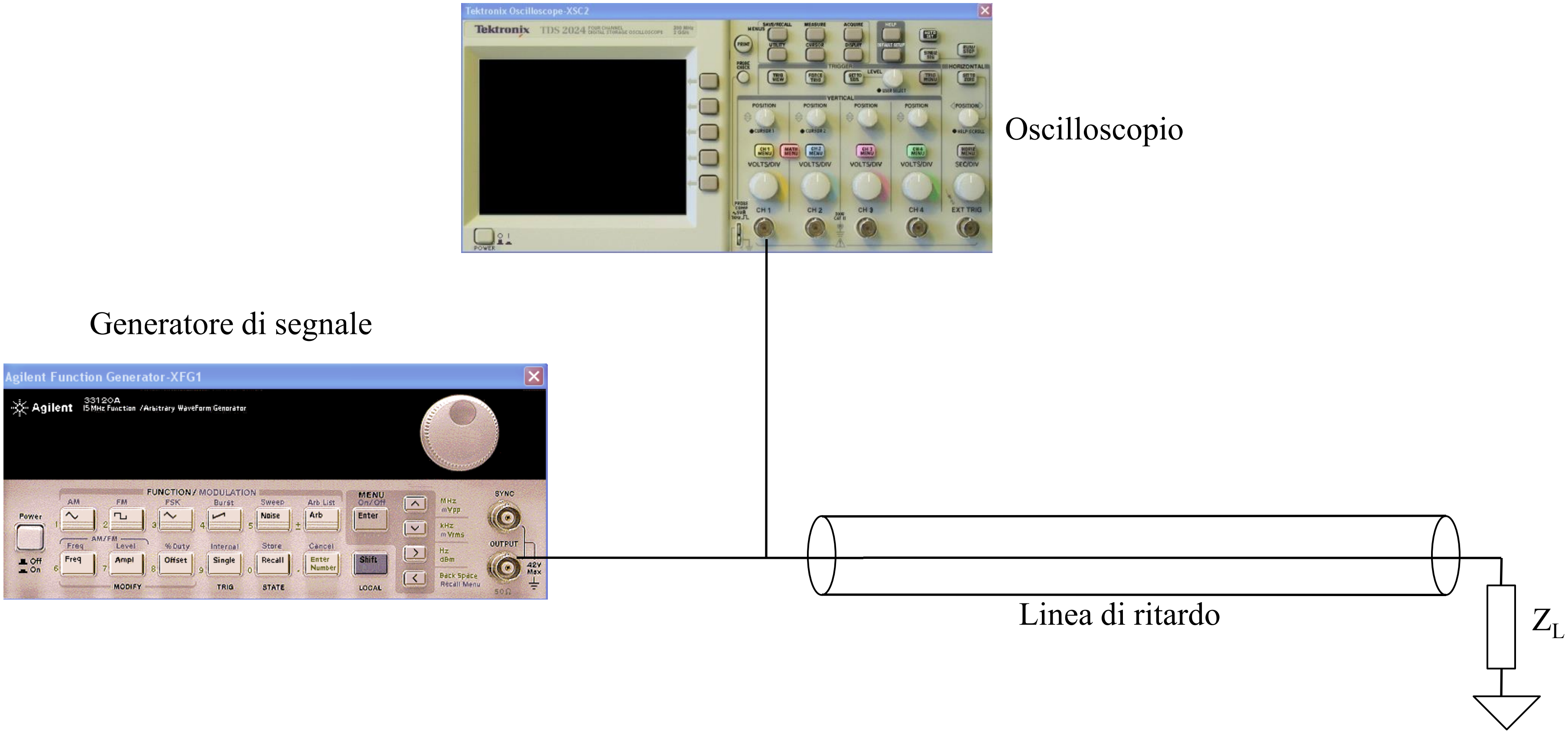
IN



$Z_L = 0\ \Omega$

$$\rho = \frac{Z_L/Z_c - 1}{1 + Z_L/Z_c} = -1$$

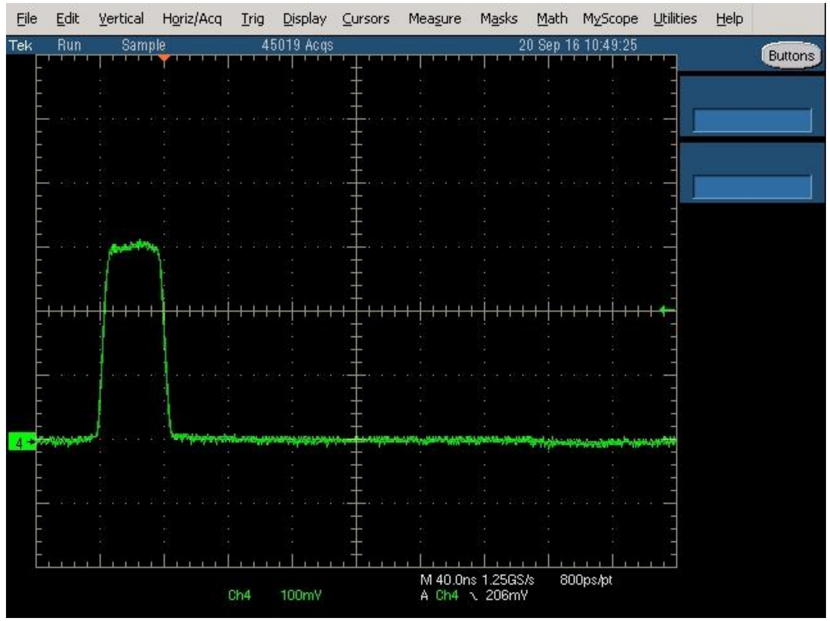
Esperienza in laboratorio



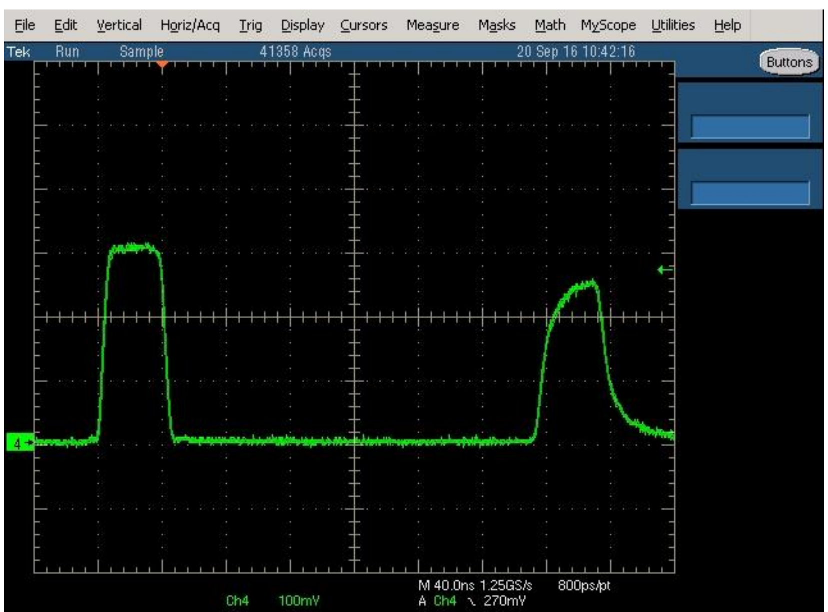
Pulse
Low
repetition
rate
$x=0$

Esperienza in Lab
e Relazione

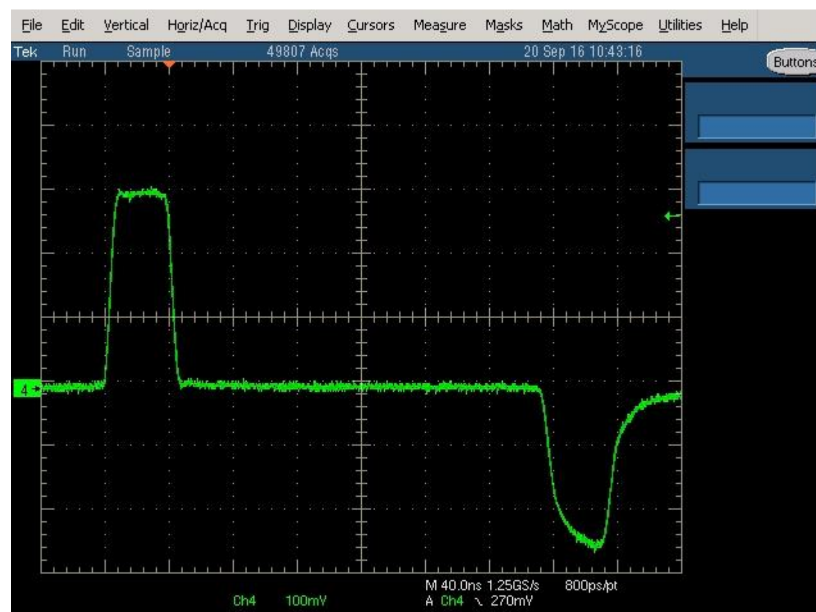
$\rho=0$



$\rho=1$



$\rho= -1$



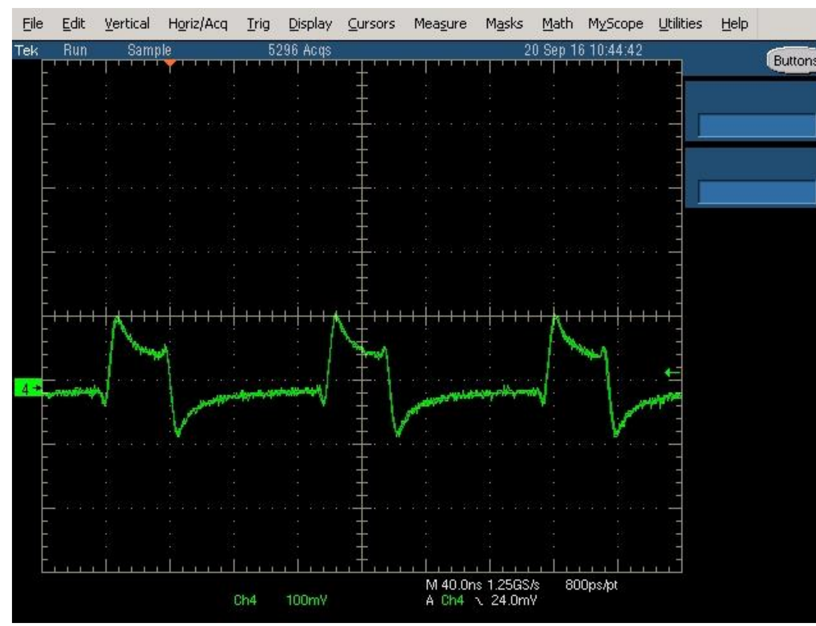
Pulse Repetition rate ?

Esperienza in Lab e Relazione

ρ=0

ρ=1

ρ= -1



Risposta della linea di trasmssione a segnali sinusoidali.

Se al posto di un impulso si invia sulla linea un segnale sinusoidale, quando la linea non e' adattata , compaiono delle onde stazionarie generate dalla interferenza dell'onda incidente con quella riflessa.

$$V(x,t) = \mathrm{Re}[\, A e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \omega t)} + B e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \omega t)} \,]$$

Trascurando l' attenuazione lungo la linea possiamo scrivere:

$V(x,t) = V\cos(\omega t - \beta x) + V\cos(\omega t+\beta x)$ se la linea e' aperta al fondo, $\rho = 1$, $V_r = V$

$V(x,t) = V\cos(\omega t- \beta x) - V\cos(\omega t+\beta x)$ se la linea e' cortocircuitata al fondo, $\rho = -1$, $V_r = -V$

Le espressioni per le onde stazionarie risultanti si posssono evidenziare mediante le formule di prostaferesi:

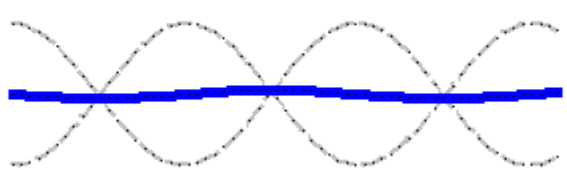
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$V(x,t) = 2V\cos(\frac{2\pi}{\lambda} x)\cos(\omega t)$ $(\rho = 1)$ Abbiamo utilizzato la relazione : $v = \omega/\beta \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \omega/v = \frac{2\pi f}{\lambda / T} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\lambda}}$

$V(x,t) = -2V\sin(\frac{2\pi}{\lambda} x)\sin(\omega t)$ $(\rho = -1)$

In queste espressioni non compare piu' il fattore $(\omega t \pm \beta x)$ → **Non sono onde che si propagano lungo la linea.**

E' un segnale sinusoidale con frequenza $f=\omega/2\pi$ ed ampiezza variabile tra 0 e 2V a seconda della posizione lungo la linea (la massima ampiezza dell'oscillazione dipende dalla posizione x lungo la linea)



In un onda stazionaria i punti in cui l'ampiezza e' minima, zero, si chiamano **nodi** (interferenza distruttiva) , quelli in cui l'ampiezza e' massima , 2V, si chiamano **ventri** (interferenza costruttiva). La loro posizione lungo la linea dipende ancora una volta dalla terminazione della linea (condizione al contorno)

$(\rho = 1)$ $$V(x,t) = 2V\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos(\omega t)$$

Nodi per: $$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\lambda}{4}\,B,\ \frac{3\lambda}{4}\,D,\ \frac{5\lambda}{4},\ \ldots \qquad n=1,3,5,\ldots\ldots$$

Ventri per: $$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 1 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \rightarrow x = \frac{\lambda}{2}\,C,\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2},\ \ldots \qquad n=1,2,3,\ldots\ldots$$

….e per x =0

A

La situazione e' simetrica se al termine la linea viene posta in corto circuito. Infatti :

$(\rho = -1)$ $$V(x,t) = -2V\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin(\omega t)$$

Nodi per: $$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \rightarrow x = \frac{\lambda}{2}\,C,\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2},\ \ldots \qquad n=1,2,3,\ldots\ldots$$

….e per x =0

A

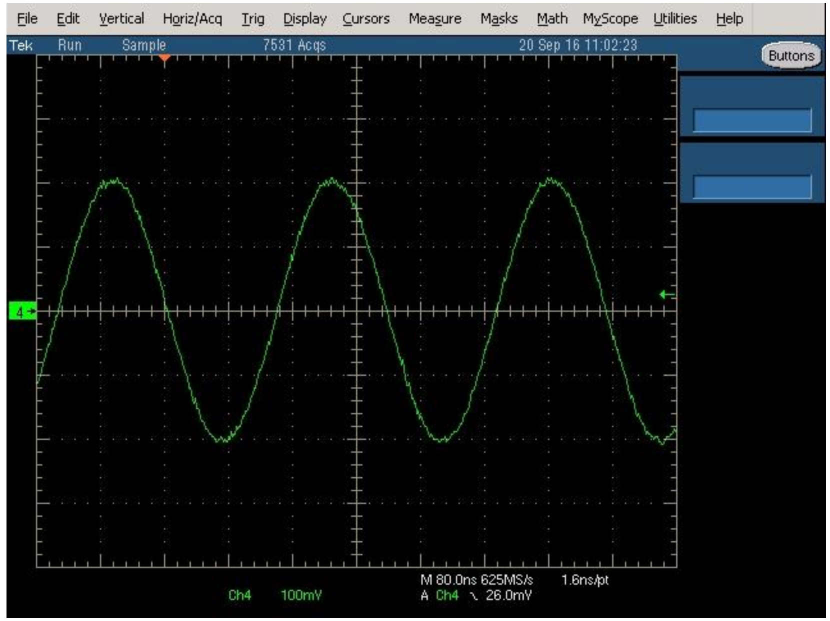
Ventri per: $$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 1 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\lambda}{4}\,B,\ \frac{3\lambda}{4}\,D,\ \frac{5\lambda}{4},\ \ldots \qquad n=1,3,5,\ldots\ldots$$

$\lambda=2L$

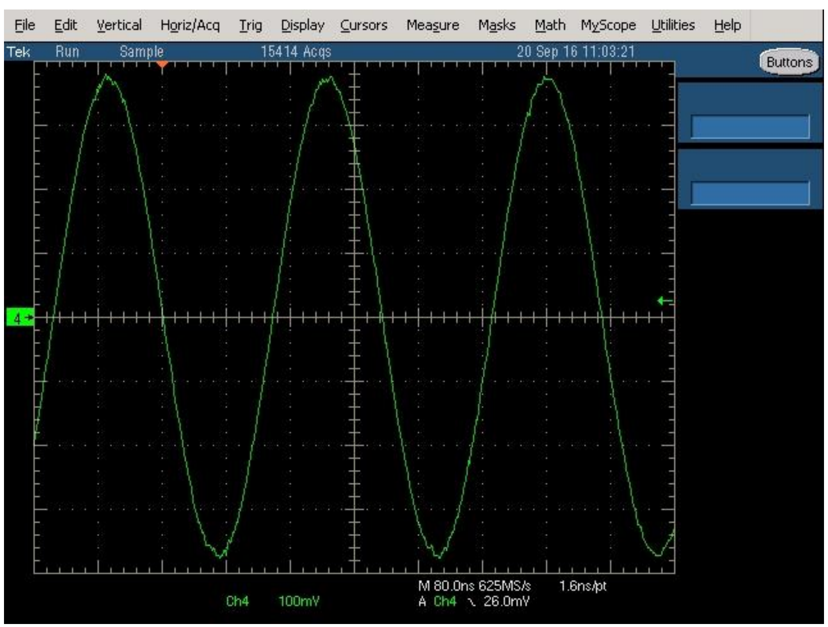
$x=0$

Esperienza in Lab e Relazione

$\rho=0$

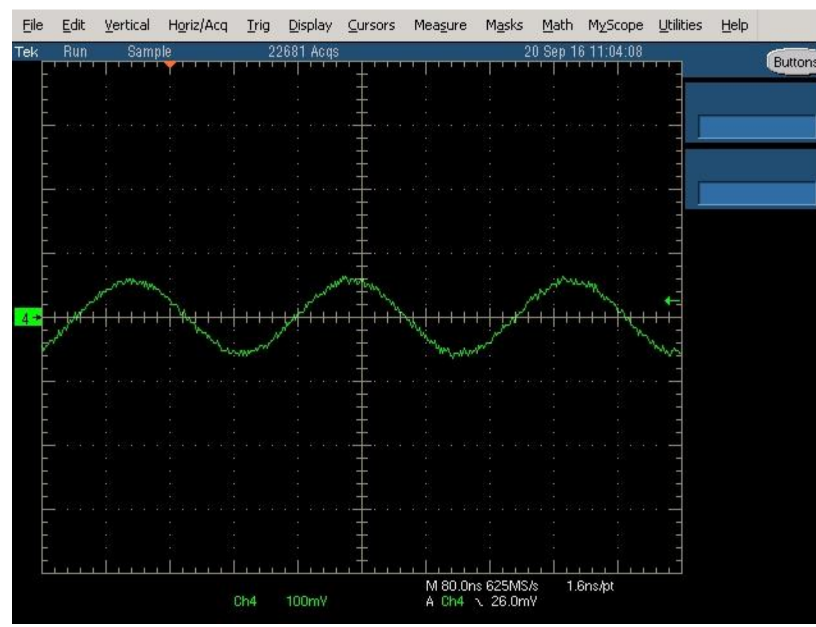


$\rho=1$



A

$\rho=-1$



λ=2L

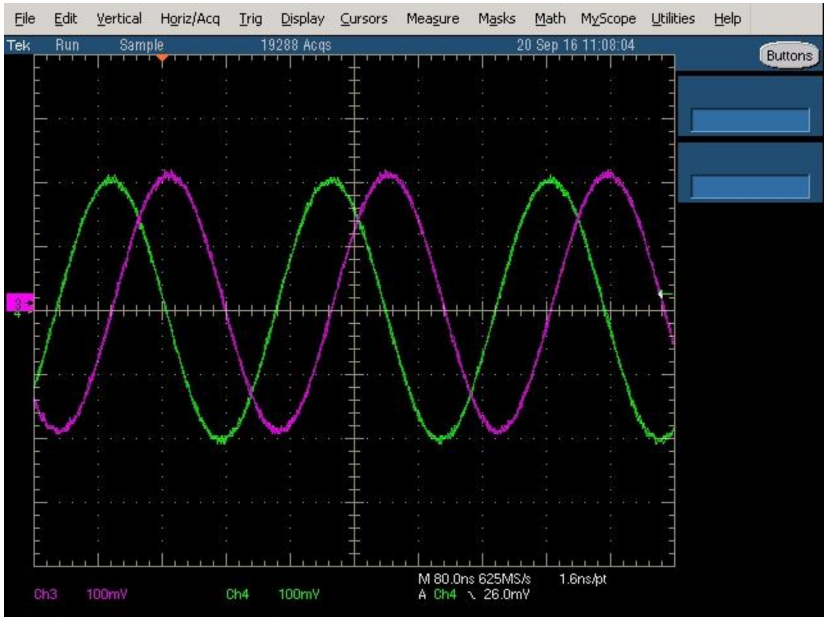
x=0 verde

x=0.5 viola

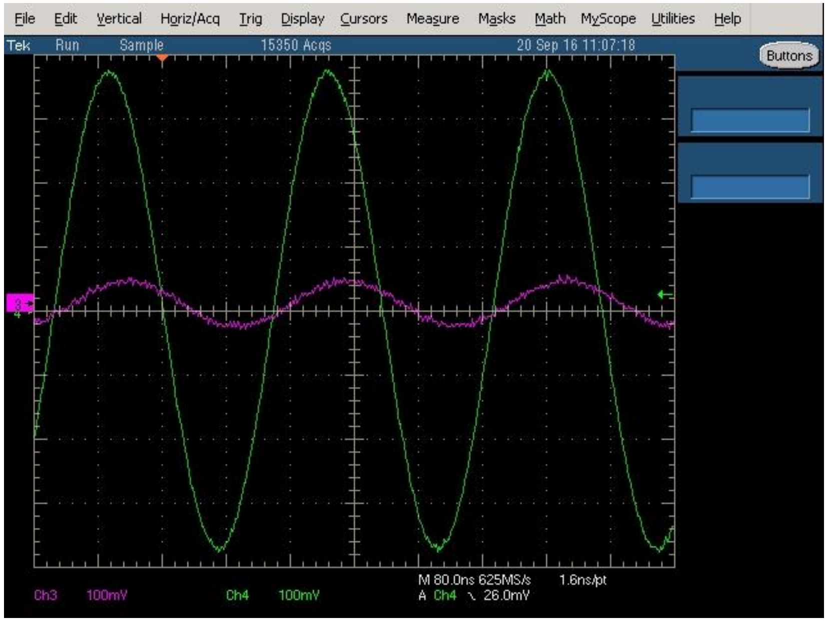
$\lambda/4$

Esperienza in Lab e Relazione

ρ=0

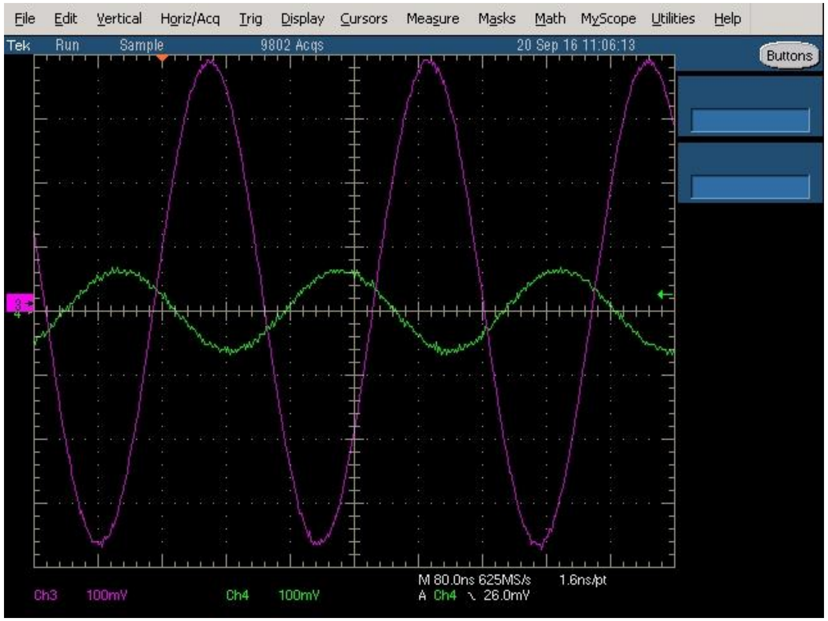


ρ=1



B

ρ= -1



λ=L

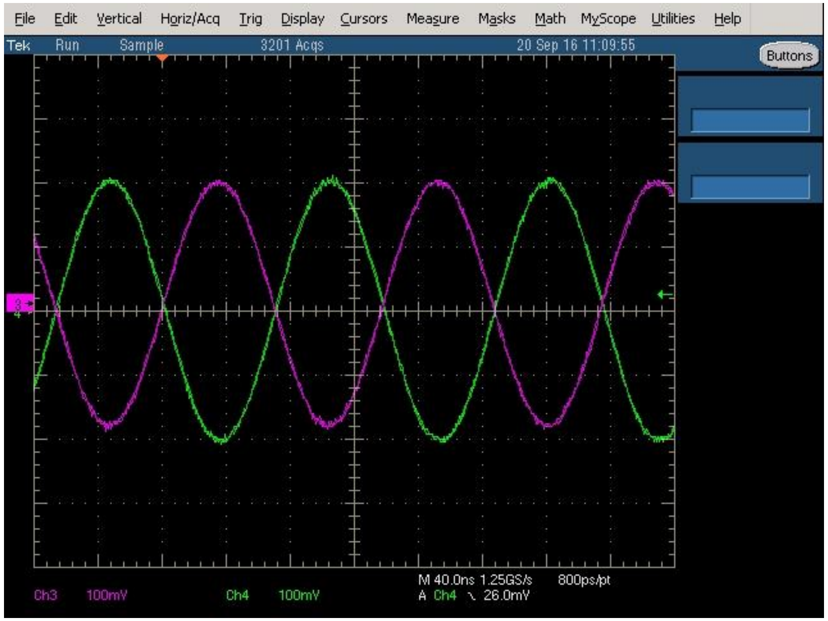
x=0 verde

x=0.5L viola

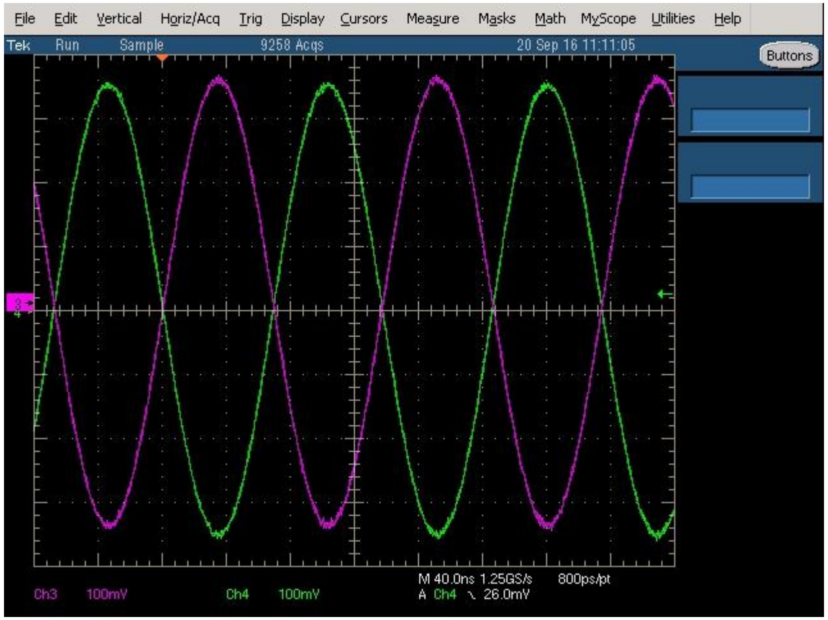
$\lambda/2$

Esperienza in Lab e Relazione

ρ=0

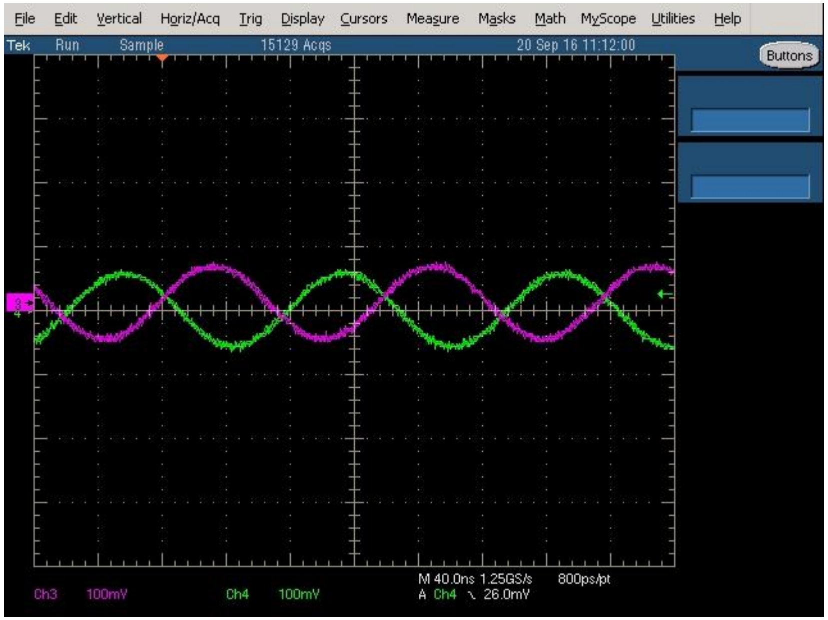


ρ=1



C

ρ= -1



$\lambda = L$

$x = 0$ verde

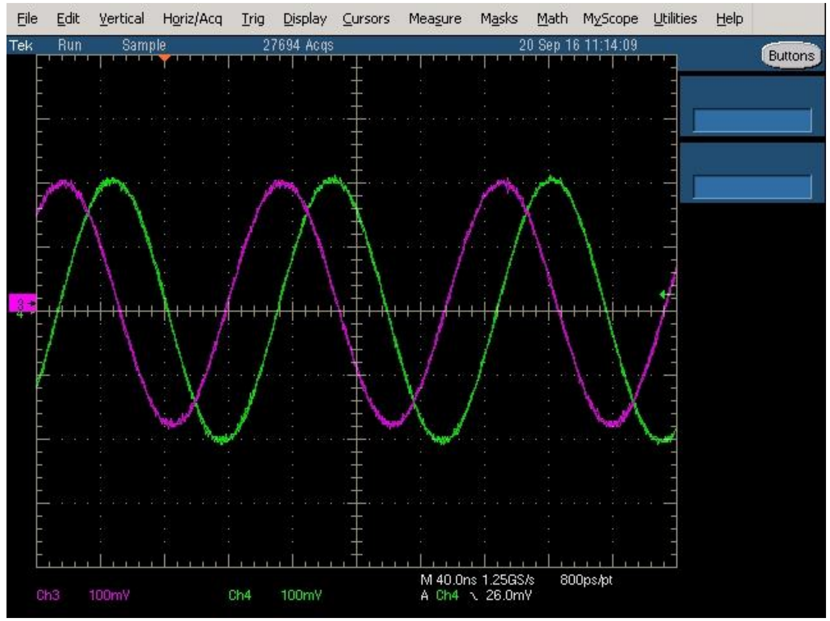
$x = 0.75L$ viola

$3\lambda/4$

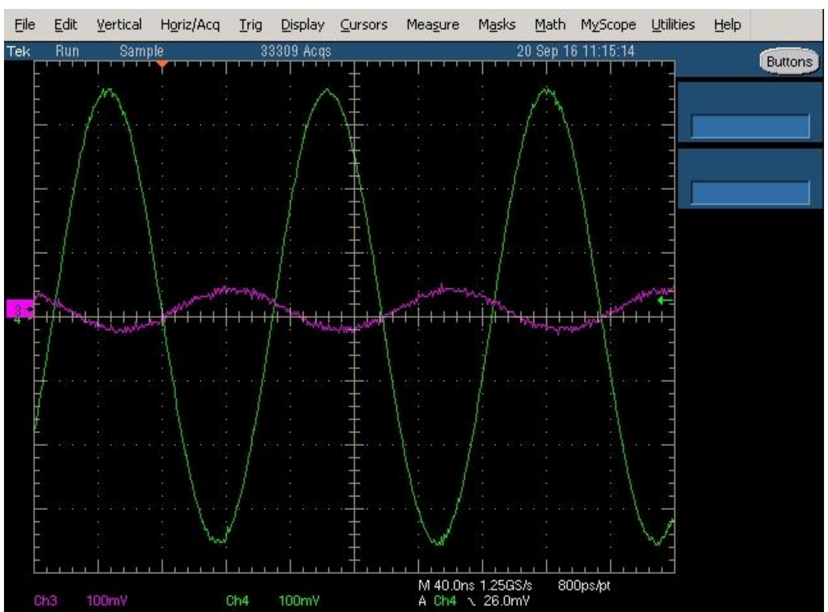
Esperienza in Lab

e Relazione

$\rho = 0$



$\rho = 1$



D

$\rho = -1$