

1. Задача об инвестициях

Постановка задачи

На предприятии вкладываются средства в развитие двух цехов. Функции дохода от вложенных средств для 1-го и 2-го цехов различны и представлены зависимостями:

- для 1-го цеха $f(X) = 150 + 0.8X^{2/3}$;
- для 2-го цеха $g(Y) = 110 + 1.6Y^{2/3}$,

где $f(X)$ - доход первого цеха за один квартал (млн. руб.), X - количество средств, вложенных за один квартал в первый цех.

Функции остатка средств за один квартал равны:

- для 1-го цеха $\varphi(X) = 0.74X$;
- для 2-го цеха $\psi(Y) = 0.87Y$.

Количество средств, выделяемых на развитие обоих цехов в течение года, составляет 185 единиц. Средства перераспределяются поквартально и не резервируются. Требуется оптимально распределить между двумя цехами средства на планируемый год.

Формализация задачи

Итак, требуется распределить имеющиеся средства в размере $K_0 = 185$ (условных единиц) между цехами 1 и 2 поквартально ($m = 4$) в течение года.

Будем решать задачу методом динамического программирования, по стандартной схеме.

1. Система S в данном случае — два цеха со вложенными в них средствами. Она характеризуется двумя параметрами X и Y , выражающими количества средств в цехах 1 и 2 соответственно. Этапом процесса является квартал. В процессе управления величины X и Y меняются в зависимости от двух причин:

- перераспределение средств между цехами в начале каждого квартала;
- уменьшение (трата) средств за квартал, сказывающееся в конце каждого квартала.

Управлением U_i на i -м шаге будут количества средств X_i и Y_i , вкладываемые в цехи 1 и 2 на этом шаге. Управление U операцией состоит из совокупности всех шаговых управлений:

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m) .$$

Нам нужно найти такое (оптимальное) управление

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m) ,$$

при котором суммарный доход, приносимый обоими цехами за m кварталов

$$W = \sum_{i=1}^m w_i , \text{ был максимальным:}$$

$$W = W_{\max} .$$

2. Выигрыш на i -м шаге:

$$w_i(K, X_i) = 150 + 0.8 X_i^{2/3} + 110 + 1.6 (K - X_i)^{2/3} .$$

3. Под влиянием управления X_i (вложения средств X_i в цех 1, а $Y_i = K - X_i$ в цех 2) система на i -м шаге перейдет из состояния K в

$$K' = 0.74 X_i + 0.87 (K - X_i) .$$

4. Основное функциональное уравнение:

$$W_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{ (150 + 0.8 X_i^{2/3} + 110 + 1.6 (K - X_i)^{2/3}) + W_{i+1}(0.74 X_i + 0.87 (K - X_i)) \} .$$

Условное оптимальное управление на i -м шаге — то, при котором достигается этот максимум.

5. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге:

$$W_4(K) = \max_{0 \leq X_4 \leq K} \{ w_4(K, X_4) \} = \max_{0 \leq X_4 \leq K} \{ (150 + 0.8 X_4^{2/3} + 110 + 1.6 (K - X_4)^{2/3}) \} .$$

Чтобы найти этот максимум, продифференцируем выражение

$$w_4(K, X_4) = 150 + 0.8 X_4^{2/3} + 110 + 1.6 (K - X_4)^{2/3}$$

при фиксированном K по X_4 и приравняем производную нулю

$$\frac{\partial w_4}{\partial X_4} = 0.8 \cdot 0.66 \cdot X_4^{-1/3} - 1.6 \cdot 0.66 \cdot (K - X_4)^{-1/3} = 0 ;$$

$$\frac{0.53}{\sqrt[3]{X_4}} - \frac{1.06}{\sqrt[3]{K - X_4}} = 0 ;$$

$$\sqrt[3]{K - X_4} = 2 \sqrt[3]{X_4}; X_4 \neq 0, K - X_4 \neq 0 ;$$

$$X_4 = K/9 .$$

Таким образом, условно оптимальное управление на последнем (четвертом) шаге найдено: $X_4 = K/9$ и, соответственно, $Y_4 = 8K/9$. На дальнейших шагах задача решается численно (графически).

Графики зависимости выигрыша от управления при различных состояниях

Рассмотрим последний этап, оптимальное управление X_4 на котором нам уже известно. Имеющиеся на этом этапе средства K находятся в диапазоне от $K_{min}=0.74^3 \cdot 185=74.97$ до $K_{max}=0.87^3 \cdot 185=121.82$. Возьмем эти значения K и еще несколько промежуточных и построим график зависимости выигрыша от управления при этих состояниях (рис. 1).

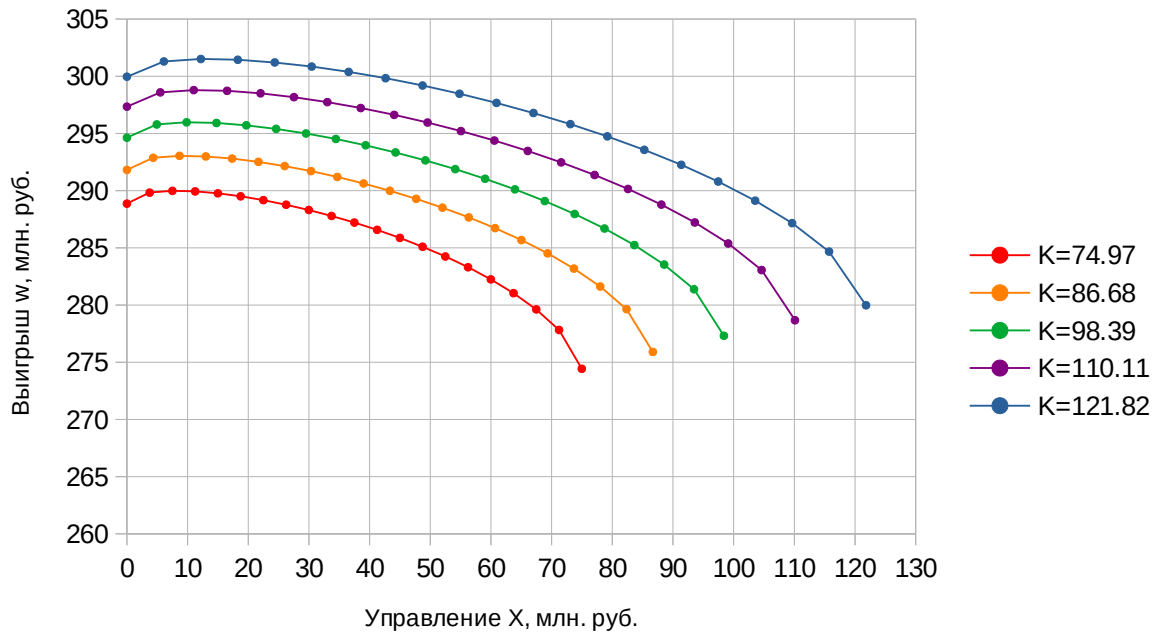


Рис. 1. График зависимости выигрыша от управления на последнем этапе.

Присмотревшись, мы действительно видим, что наибольший выигрыш достигается при управлении $X_4 = K/9$.

Этот график поможет нам при построении схожего графика для предпоследнего этапа, к которому мы и переходим.

Рассмотрим предпоследний этап, оптимальное управление X_3 на котором нам предстоит определить. По аналогии: K находится в диапазоне от $K_{min}=0.74^2 \cdot 185=101.31$ до $K_{max}=0.87^2 \cdot 185=140.03$. Дополнительно берем еще несколько значений K и строим график зависимости выигрыша от управления при этих состояниях (рис. 2).

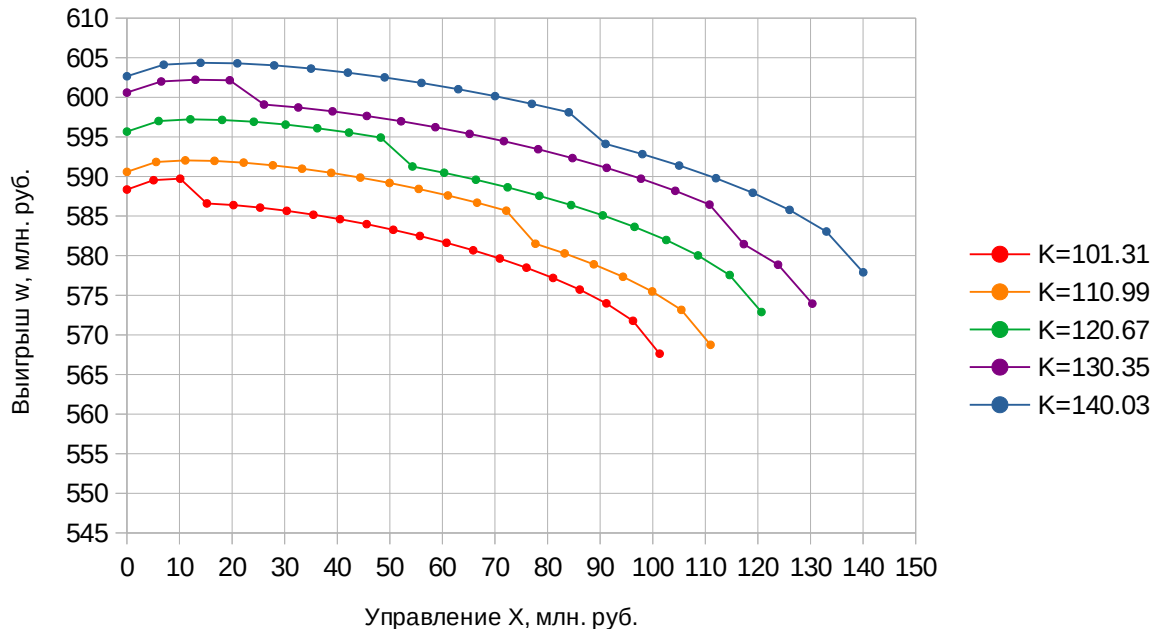


Рис. 2. График зависимости выигрыша от управления на предпоследнем этапе.

Для состояния K_{min} условный максимальный доход на двух последних шагах достигается при $X_3=10.13$, а для K_{max} — при $X_3=14.00$.

На графике видны характерные «ступени», означающие, что при текущем управлении уже не удастся получить такой же выигрыш на следующем этапе, как при предыдущем (несколько меньшем) управлении.

Для последних двух этапов графики зависимости выигрыша от управления строятся аналогично.

Фрагменты таблиц с расчетами

В программе предусмотрена возможность вывода таблиц с промежуточными вычислениями. Для каждого этапа (квартала) выводится отдельная таблица. На рис. 3 продемонстрирован вывод программой таблиц при следующих параметрах: $N=4$ (дискретизация по K) и $M=20$ (дискретизация по X).

```
valery@dave:~/Desktop/dm/src/course/investment$ ./a.out
Table 1 (K, w, X)
  0.00,   0.00,   0.00
  0.00,   0.00,   0.00
  0.00,   0.00,   0.00
  0.00,   0.00,   0.00
185.00, 1225.88,  18.50

Table 2 (K, w, X)
136.90, 896.91,  13.69
142.91, 903.40,  14.29
148.92, 904.69,  14.89
154.94, 910.97,  15.49
160.95, 912.23,  16.09

Table 3 (K, w, X)
101.31, 589.72,  10.13
110.99, 592.03,  11.10
120.67, 597.21,  12.07
130.35, 602.21,  13.03
140.03, 604.35,  14.00

Table 4 (K, w, X)
 74.97, 289.98,   8.33
 86.68, 293.04,   9.63
 98.39, 295.97,  10.93
110.11, 298.79,  12.23
121.82, 301.51,  13.54
```

Рис. 3. Демонстрация вывода программой таблиц.

Результат

Результат и время работы программы при параметрах $N=M=1000$ показан на рис. 4.

```
valery@dave:~/Desktop/dm/src/course/investment$ time ./a.out
Total income: 1229.97
      Stage 1: X=  8.32, Y=176.68
      Stage 2: X=  9.43, Y=150.44
      Stage 3: X= 10.34, Y=127.52
      Stage 4: X= 13.18, Y=105.41

real    0m1.154s
user    0m1.154s
sys     0m0.000s
```

Рис. 4. Результат и время работы программы.

Мы видим, что программа была выполнена за время $t \approx 1.2c$, а имеющиеся средства следует распределить следующим образом (табл. 1).

Таблица 1. Оптимальная стратегия инвестирования.

	Квартал 1	Квартал 2	Квартал 3	Квартал 4
X , млн. руб.	8.32	9.43	10.34	13.18
Y , млн. руб	176.68	150.44	127.52	105.41

Если мы будем придерживаться этой стратегии инвестирования, то суммарный доход, который мы получим в конце года, будет равен $W = W_{\max} = 1229.97$ млн. руб.

Приложение — исходные тексты программы

Исходный код программы, решающей задачу об инвестициях, доступен по ссылке: <https://github.com/valery42/Decision-Theory/blob/main/src/course/investment/investment.cpp>