1. Задача об инвестициях

Постановка задачи

На предприятии вкладываются средства в развитие двух цехов. Функции дохода от вложенных средств для 1-го и 2-го цехов различны и представлены зависимостями:

- для 1-го цеха $f(X)=150+0.8X^{2/3}$;
- для 2-го цеха $g(Y)=110+1.6Y^{2/3}$,

где y - доход за один квартал (млн. руб.), x - количество средств, вложенных за один квартал.

Функции остатка средств за один квартал равны:

- для 1-го цеха $\varphi(X)=0.74X$;
- для 2-го цеха $\psi(X)=0.87Y$.

Количество средств, выделяемых на развитие обоих цехов в течение года, составляет 185 единиц. Средства перераспределяются поквартально и не резервируются. Требуется оптимально распределить между двумя цехами средства на планируемый год.

Формализация задачи

Итак, требуется распределить имеющиеся средства в размере $K_0=185$ (условных единиц) между цехами 1 и 2 поквартально ($m=4$) в течение года.

Будем решать задачу методом динамического программирования, по стандартной схеме.

1. Система ***S*** в данном случае — два цеха со вложенными в них средствами. Она характеризуется двумя параметрами *X* и *Y*, выражающими количества средств в цехах 1 и 2 соответственно. Этапом процесса является квартал. В процессе управления величины *X* и *Y* меняются в зависимости от двух причин:

- перераспределение средств между цехами в начале каждого квартала;
- уменьшение (трата) средств за квартал, сказывающееся в конце каждого квартала.

Управлением U_i на *i*-м шаге будут количества средств X_i и Y_i, вкладываемые в цехи 1 и 2 на этом шаге. Управление *U* операцией состоит из совокупности всех шаговых управлений:

$$U=(U_1,U_2,\dots,U_m) .$$

Нам нужно найти такое (оптимальное) управление

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_m) ,$$

при котором суммарный доход, приносимый обоими цехами за *m* кварталов $W=\sum_{i=1}^{m} w_i$, был максимальным:

$$W=W_{max} .$$

2. Выигрыш на *i*-м шаге:

$$w_i(K,X_i)=150+0.8\,X^{2/3}+110+1.6\,(K-X_i)^{2/3} \quad .$$

3. Под влиянием управления X_i (вложения средств X_i в цех 1, а $Y_i=K-X_i$ в цех 2) система на *i*-м шаге перейдет из состояния *K* в

$$K^{'}=0.74\,X_i+0.87(K-X_i) \quad .$$

4. Основное функциональное уравнение:

$$W_i(K)=\max_{0\le X_i\le K}\{(150+0.8\,X^{2/3}+110+1.6(K-X_i)^{2/3})+W_{i+1}(0.74\,X_i+0.87\,(K-X_i))\} \quad .$$

Условное оптимальное управление на *i*-м шаге — то, при котором достигается этот максимум.

5. Условный оптимальный выигрыш на последнем шаге:

$$W_4(K)=\max_{0\le X_4\le K}\{w_4(K,X_4)\}=\max_{0\le X_4\le K}\{(150+0.8\,X_4^{2/3}+110+1.6(K-X_4)^{2/3})\} \quad .$$

Чтобы найти этот максимум, продифференцируем выражение

$$w_4(K,X_4)=150+0.8\,X_4^{2/3}+110+1.6\,(K-X_4)^{2/3}$$

при фиксированном *K* по X_4 и приравняем производную нулю

$$\frac{\partial w_4}{\partial X_4}=0.8\cdot 0.66\cdot X_4^{-1/3}-1.6\cdot 0.66\cdot(K-X_4)^{-1/3}=0 \quad ;$$

$$\frac{0.53}{\sqrt[3]{X_4}}-\frac{1.06}{\sqrt[3]{K-X_4}}=0 \quad ;$$

$$\sqrt[3]{K-X_4}=2\sqrt[3]{X_4};\, X_4\ne 0,\, K-X_4\ne 0 \quad ;$$

$$X_4=K/9 \quad .$$

Таким образом, условно оптимальное управление на последнем (четвертом) шаге найдено: $X_4=K/9$ и, соответственно, $Y_4=8\,K/9$. На дальнейших шагах задача решается численно (графически).

Графики зависимости выигрыша от управления при различных состояниях

Рассмотрим последний этап, оптимальное управление X_4 на котором нам уже известно. Имеющиеся на этом этапе средства K находятся в диапазоне от $K_{min}=0.74^3 \cdot 185=74.97$ до $K_{max}=0.87^3 \cdot 185=121.82$. Возьмем еще одно (среднее) значение $K_{avg}=(K_{min}+K_{max})/2=98.40$ и построим график зависимости выигрыша от управления при этих состояниях (рис. 1).

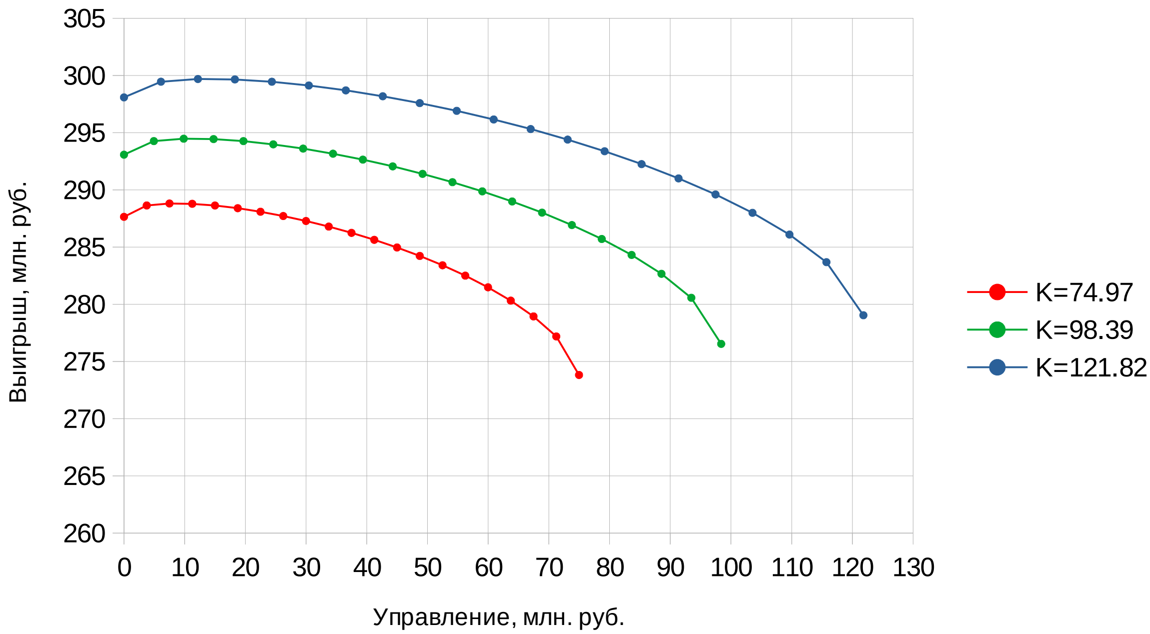

Рис. 1. График зависимости выигрыша от управления на последнем этапе.

Присмотревшись, мы действительно видим, что наибольший выигрыш достигается при управлении $X_4=K/9$.

Этот график поможет нам при построении схожего графика для предпоследнего этапа, к которому мы и переходим.

Рассмотрим предпоследний этап, оптимальное управление X_3 на котором нам предстоит определить. По аналогии: K находится в диапазоне от $K_{min}=0.74^2 \cdot 185=101.31$ до $K_{max}=0.87^2 \cdot 185=140.03$; $K_{avg}=(K_{min}+K_{max})/2=120.67$. Построим график зависимости выигрыша от управления при этих состояниях (рис. 2).

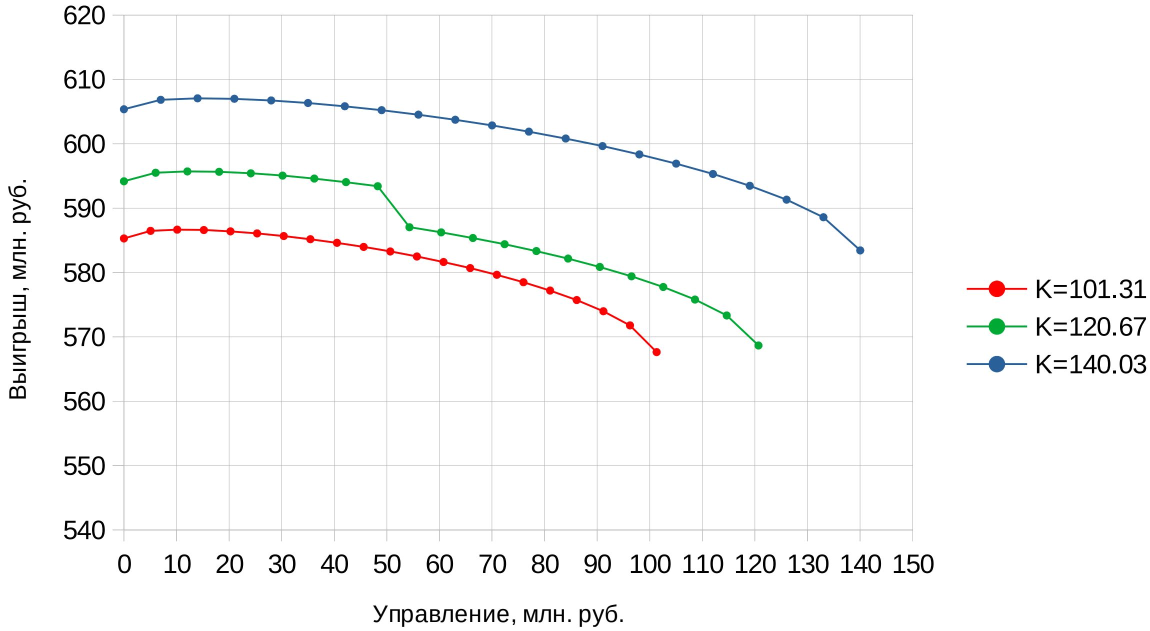

Рис. 2. График зависимости выигрыша от управления на предпоследнем этапе.

Для состояния K_{min} условный максимальный доход на двух последних шагах достигается при $X_3=10.13$, для K_{avg} — при $X_3=12.07$, для K_{max} — при $X_3=14.00$.

Для последних двух этапов графики зависимости выигрыша от управления строятся аналогично.

Фрагменты таблиц с расчетами

Поскольку сама программа, решающая задачу об инвестициях, поддерживает возможность вывода таблиц с результатами вычислений, приведем здесь скриншот для рассмотренного выше случая (рис. 3).

```
Table 1 (K, w, X)
  0.00,    0.00,    0.00
  0.00,    0.00,    0.00
185.00, 1219.60,   18.50

Table 2 (K, w, X)
136.90, 891.53,  13.69
148.93, 904.69,  14.89
160.95, 907.22,  16.09

Table 3 (K, w, X)
101.31, 586.66,  10.13
120.67, 597.21,  12.07
140.03, 601.53,  14.00

Table 4 (K, w, X)
 74.97, 289.98,   8.33
 98.39, 295.97,  10.93
121.82, 301.51,  13.54
```

Рис. 3. Таблицы с расчетами при K_0 = 185, m = 4, N = 2, M = 20.

Каждая таблица соответствует одному этапу (кварталу). В первом столбце содержатся значения имеющихся средств K, во втором — условные оптимальные выигрыши w, в третьем условные оптимальные управления X.

Значение N = 2 означает, что мы рассматриваем N+1 вариант K, значение M = 20 означает, что мы ищем оптимальное управление при M+1 варианте X.

Результат

Результат программа также выводит на экран (рис. 4).

```
Total income: 1219.60
        Stage 1: X= 18.50, Y=166.50
        Stage 2: X= 14.89, Y=134.03
        Stage 3: X= 12.07, Y=108.60
        Stage 4: X= 10.93, Y= 87.46
```

Рис. 4. Результат работы программы.

Таким образом, имея в начале года K_0 = 185 млн. руб., чтобы получить доход W_{max} = 1219.60 млн. руб. инвестировать нужно так (табл. 1).

Таблица 1.

	Квартал 1	Квартал 2	Квартал 3	Квартал 4
X	18.50	14.89	12.07	10.93
Y	166.50	134.03	108.60	87.46

Приложение — исходные тексты программы

Исходный код программы, решающей задачу об инвестициях, доступен по ссылке: https://github.com/valery42/Decision-Theory/blob/main/src/course/investment/investment.cpp