

## Cours ENSEIRB

- **Bruit blanc**

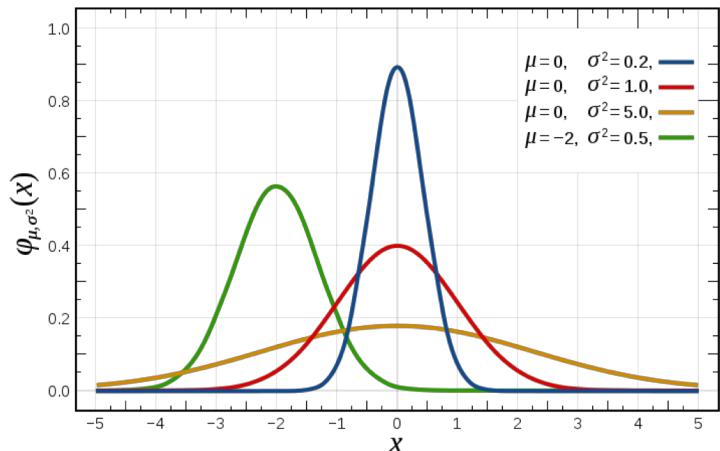
- Distribution normal/gaussienne

→ Parfait pour vos stats

- **Addition de plusieurs bruits**

- Antennes et électroniques
- Patient

→ Bruit principal à haut-champs

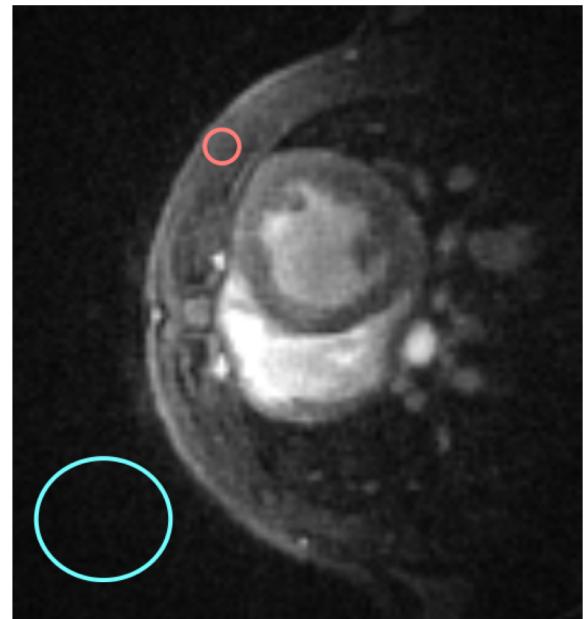


$$\sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{4k \times T \times R \times \Delta\nu}$$

↗                      ↗

Boltzman               $R = R_e + R_p$

$$SNR = \frac{\text{Signal}}{\sigma_{noise}} = \frac{\text{Moyenne ROI1}}{\text{Déviation standard ROI2}}$$



Sauf que...



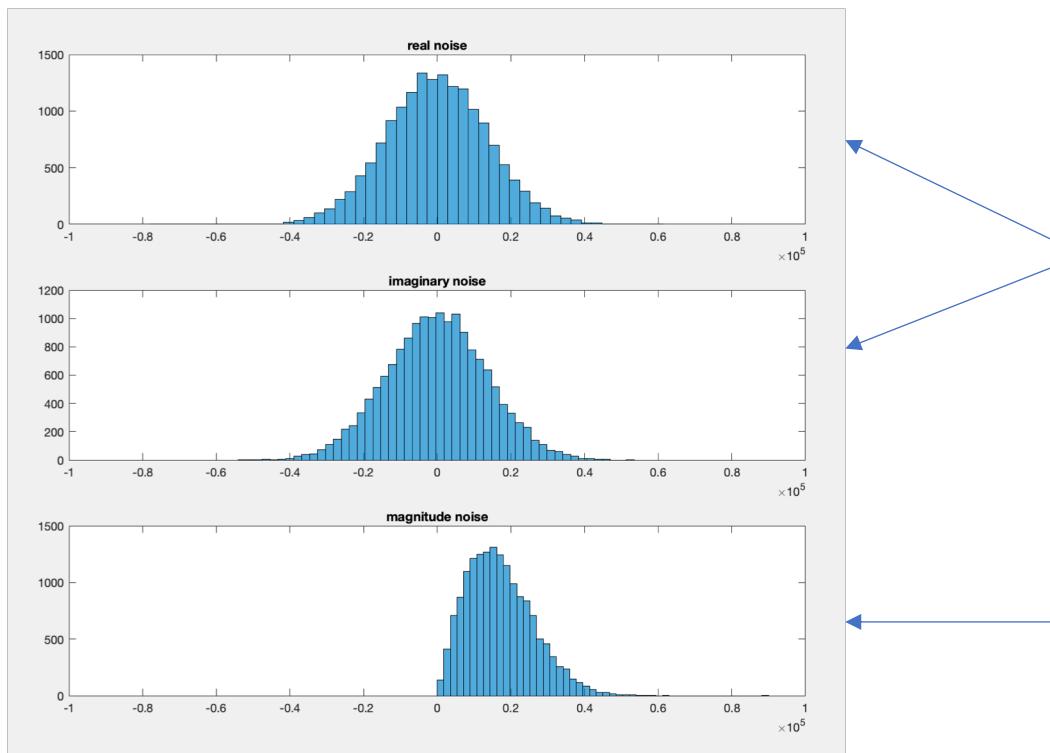
2) Mesurer la déviation standard du bruit sur la partie réelle, imaginaire et la magnitude pour un canal.

Real std =13740.7451

Real std =13659.7015

Real std =9021.9036

3) Tracez un histogramme du bruit pour chaque type de reconstruction



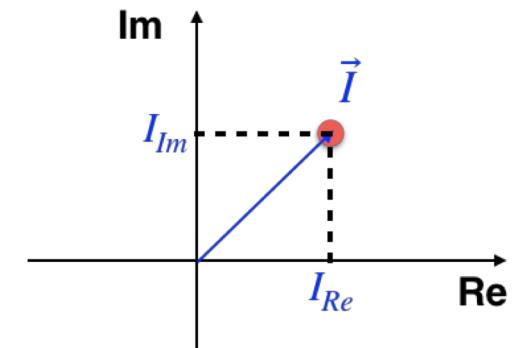
Distribution Gaussienne  
 (il faut encore le valider)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribution Rayleigh

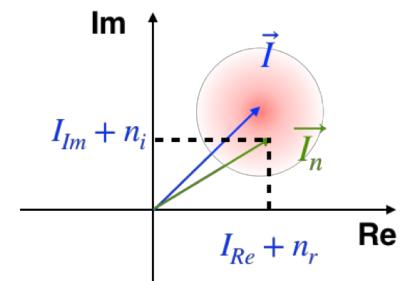
$$f(x) = \frac{x}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_g^2}\right)$$

- Le signal en magnitude correspond à :  $\|\vec{I}\| = \sqrt{I_{Re}^2 + I_{Im}^2}$   
intensité d'un pixel

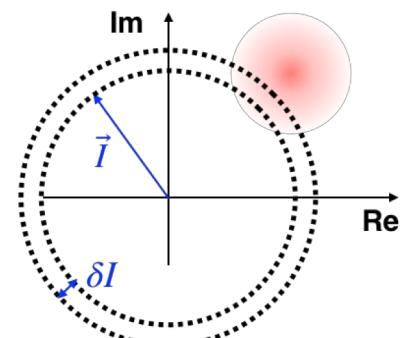


- Lorsque l'on ajoute du bruit  
→ Incertitude de la position dans le plan Im/Re

$$\|\vec{I}_n\| = \sqrt{(I_{Re} + n_r)^2 + (I_{Im} + n_i)^2}$$

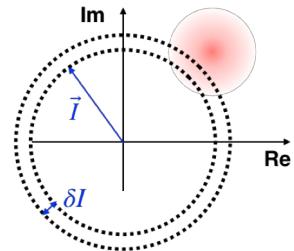


- La distribution du signal correspond donc à la probabilité d'apparition d'une valeur de magnitude  $\|\vec{I}\|$
- C'est à dire à la probabilité d'un pixel d'être dans une zone ayant une distance  $\|\vec{I}\| + \delta I$



Signal IRM:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{(A_R + n_R)^2 + (A_I + n_I)^2} \\ &= \sqrt{(A \cos \varphi + n_R)^2 + (A \sin \varphi + n_I)^2}, \end{aligned} \quad [7]$$



La distribution selon le signal Réel et Imaginaire correspond au produit des distributions :

$$\begin{aligned} P(s_R, s_I | A, \varphi, \sigma_g) &= \frac{1}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left[\frac{-(A \cos \varphi - s_R)^2}{2\sigma_g^2}\right] \\ &\times \exp\left[\frac{-(A \sin \varphi - s_I)^2}{2\sigma_g^2}\right]. \end{aligned} \quad [8]$$

Changement coordonnée polaire (m,theta) :

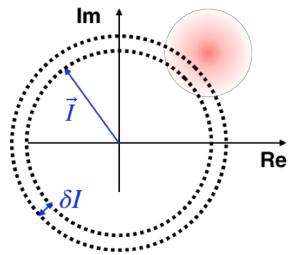
$$\begin{aligned} P(m, \theta | A, \varphi, \sigma_g) &= \frac{1}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left[\frac{-(A \cos \varphi - m \cos \theta)^2}{2\sigma_g^2}\right] \\ &\times \exp\left[\frac{-(A \sin \varphi - m \sin \theta)^2}{2\sigma_g^2}\right] J(m, \theta), \end{aligned} \quad [9]$$

Avec la matrice jacobienne :

$$\begin{aligned} J(m, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s_R}{\partial m} & \frac{\partial s_R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial s_I}{\partial m} & \frac{\partial s_I}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -m \sin \theta \\ \sin \theta & m \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= m \cos^2 \theta + m \sin^2 \theta = m. \end{aligned}$$

Intégration selon theta + développement / regroupement :

$$\begin{aligned}
 P_m(m|A, \varphi, \sigma_g) &= \frac{m}{2\pi\sigma_g^2} \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{-A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{2\sigma_g^2} \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{-m^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{2\sigma_g^2} \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{-2Am(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta)}{2\sigma_g^2} \right] d\theta \quad [11]
 \end{aligned}$$

Simplification :

$$\begin{aligned}
 P_m(m|A, \varphi, \sigma_g) &= \frac{m}{2\pi\sigma_g^2} \\
 &\times \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{-(A^2 + m^2 - 2Am \cos(\theta - \varphi))}{2\sigma_g^2} \right] d\theta, \quad [12]
 \end{aligned}$$

Suppression Phi :

Phi est une constante non touché par le bruit

**ET**

l'intégration a lieu sur les 2 Pi

$$\begin{aligned}
 P_m(m|A, \sigma_g) &= \frac{m}{2\pi\sigma_g^2} \exp \left[ -\frac{(A^2 + m^2)}{2\sigma_g^2} \right] \\
 &\times \int_0^{2\pi} \exp \left[ \frac{Am \cos \theta}{\sigma_g^2} \right] d\theta. \quad [13]
 \end{aligned}$$

### Finalement distribution de Rice :

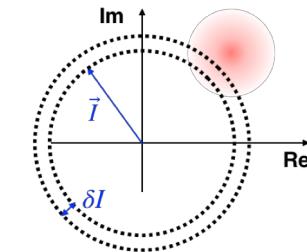
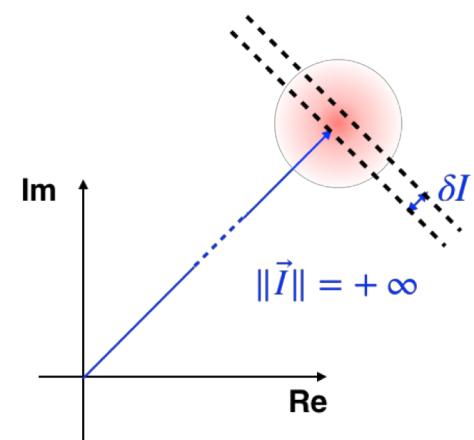
$$P_m(m|A, \sigma_g) = \frac{m}{\sigma_g^2} \exp\left[-\frac{(A^2 + m^2)}{2\sigma_g^2}\right] I_0\left(\frac{Am}{\sigma_g^2}\right) H(m), \quad [15]$$

Avec fonction de Bessel modifiée du premier ordre

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[z \cos(\alpha)] d\alpha. \quad [14]$$

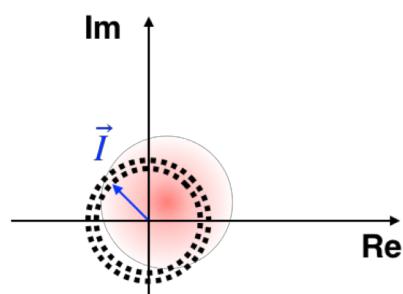
- Si le signal/SNR est infini. La courbure est négligeable donc l'intégrale de la probabilité en fonction de  $\|\vec{I}\|$  correspond à une gaussienne

$$P_m(m|A, \sigma_g) \approx \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(m - \sqrt{A^2 + \sigma_g^2}\right)^2}{2\sigma_g^2}\right] H(m).$$

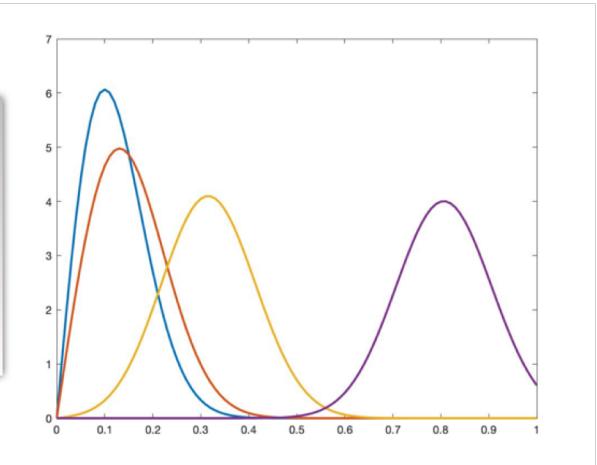


Plus  $\|\vec{I}\|$  diminue plus la courbure va modifier la distribution

- Déviation standard
- Moyenne



SNR = 0  
 SNR = 1  
 SNR = 3  
 SNR = 8



## Lorsque A = 0 : distribution de Rayleigh

$$P_m(m|\sigma_g) = \frac{m}{\sigma_g^2} \exp\left[-\frac{m^2}{2\sigma_g^2}\right] H(m).$$

$$\langle m \rangle_{\text{Ray}} = \sigma_g \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sigma_{\text{Ray}} = \sigma_g \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}},$$

## Non-central chi distribution

$$P_m(m_L, | A_L, \sigma_g) = \frac{A_L}{\sigma_g^2} \left( \frac{m_L}{A_L} \right)^L \exp \left[ -\frac{(A_L^2 + m_L^2)}{2\sigma_g^2} \right] I_{L-1} \left( \frac{m_L A_L}{\sigma_g^2} \right) H(m_L)$$



$I_{L-1}$  : fonction de Bessel du premier type modifiée d'ordre (n-1)

$A_L$  : somme des carrés

$L$  : Nombre de canaux

**Cas A = 0 :** Expansion de Taylor : 1er terme :  $I_{L-1} \left( \frac{m_L A_L}{\sigma_g^2} \right) \approx \frac{1}{2^{(L-1)}(L-1)!} \left( \frac{m_L A_L}{\sigma_g^2} \right)^{L-1}$

D'où

$$P_m(m_L, | 0, \sigma_g) = \frac{m_L^{2L-1}}{2^{L-1} \sigma_g^{2L} (L-1)!} \exp \left[ -\frac{m_L^2}{2\sigma_g^2} \right] H(m_L)$$

## Mesure du bruit



**Moyenne signal bruit :**  $\langle m_{Mag} \rangle = \sigma_g \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{(2L-1)!!}{2^{L-1}(L-1)!}}$  avec :  $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$

**std signal bruit :**  $\sigma_{Mag} = \sqrt{2L\sigma_g^2 - \langle m_{Mag} \rangle^2} = \sigma_g \sqrt{2L - \frac{\pi}{2} \left( \frac{(2L-1)!!}{2^{L-1}(L-1)!} \right)^2}$

**L = 4**       $\sigma_g = \frac{\sigma_{Mag}}{0.695}$       et       $\sigma_g = \frac{\langle m_{Mag} \rangle}{2.74}$