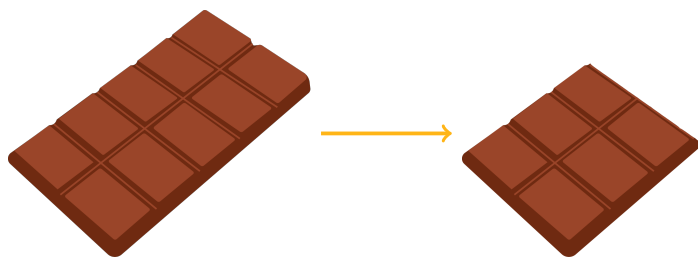


2. Fracciones

2.1 Un todo y sus partes

Hemos usado los números para contar, pero hay algo que hemos dejado fuera. Por ejemplo, supongamos que tenemos una barra de chocolate, pero sin poder reprimir la tentación, nos comemos algunos pedacitos.



Claramente, la barra es más pequeña después de haber comido los pedacitos. En otras palabras, la barra pequeña es una *parte* de la barra original. Podemos ir más lejos y ser más precisos en qué parte queda de la barra original. Si nos fijamos, la barra original tenía 10 cuadraditos iguales, mientras que después de comer quedan sólo 6, iguales a los primeros.

Tenemos dos elementos dando vueltas aquí que son importantes:

- Una división de un total en pedacitos iguales,
- Un conteo del número de pedacitos que tenemos, queremos usar o, en general, consideramos como una medida o un estándar.

Origen de la palabra

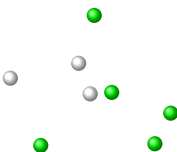
Al momento de traducir los textos en árabe del importante matemático persa Al-Juarismi, se eligió la palabra latina *fractio* para referirse a los números “quebrados” (al-Kasr) de los que se hablaba en dichos textos.

En nuestro caso, tenemos 6 pedacitos de 10. Para simbolizar, usaremos la notación

$$\frac{6}{10}$$

donde el número de arriba simboliza el número de pedacitos que quedan y el de abajo el número de pedacitos que hace una barra completa.

Veamos otros casos donde podemos utilizar la misma idea. Por ejemplo, si tenemos bolitas de colores, podemos ver que 3 son blancas y 5 son verdes.

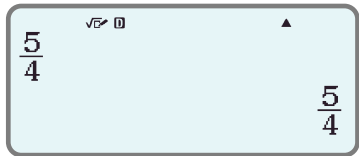


Cómo leer una fracción

Veámoslo con algunos ejemplos:
1/2 se lee “un medio”
2/3 se lee “dos tercios”

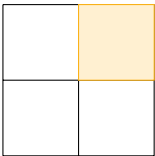
¿Qué fracción de las bolitas son blancas? Para responder esta pregunta, debemos considerar el total de bolitas, 8, y la parte que nos interesa, las 3 bolitas blancas. Por lo tanto, 3/8 de las bolitas son blancas.

Con calculadora

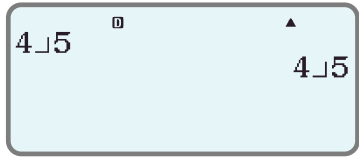


Presione 5 4 =

O podemos considerar un terreno que es dividido entre 4 hermanos. Si se divide entre partes iguales, podemos ver que a cada hermano le corresponde una parte de las cuatro en que se dividió el terreno



Si su calculadora no tiene como opción *natural display* se verá así:



En todos estos casos estamos haciendo algo que es importante de comprender y manejar, la idea de *partes de un total*. Esta idea es una de las bases del concepto de *fracción*.

Vamos a representar una fracción de la siguiente forma

Raya $\longrightarrow \frac{a}{b}$ Enteros

Numerador más grande

Si el numerador es más grande que el denominador, la fracción representa una cantidad más grande que el total.
Por ejemplo la fracción 7/3 dice que el total se divide en tres partes y se consideran 7 de ellas (!).
En la calculadora se puede ver que 7/3 = 2 1/3, es decir, tenemos el doble del total más una tercera parte.

O variaciones como a/b .
El entero a se llama *numerador* y el entero b se llama *denominador*.

Actividad 2.1 Complete la siguiente tabla:

Fracción	Cómo se lee
$\frac{5}{4}$	
	Tres medios
	Un séptimo
$\frac{10}{3}$	
$\frac{5}{6}$	
	doce quinceavos

Si consideramos a las fracciones como partes de un total, el denominador cuenta el número de partes en que se divide el total, mientras que el numerador cuenta el número de partes que estamos considerando.

Actividad 2.2 Considerando a las fracciones como partes de un todo, ¿qué significa la fracción $-\frac{2}{3}$? ¿Qué significa $\frac{0}{3}$? ¿Qué significa $\frac{3}{0}$?

2.2 Uso de la calculadora

Actividad 2.3 En esta actividad usted experimentará con su calculadora. Complete la siguiente tabla y comente con sus compañeros.

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3
Ingrese a su calculadora	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$5\frac{1}{4}$
¿Cómo muestra el número su calculadora?			
Presione S↔D			
¿qué ocurre?			
Presione SHIFT + S↔D			
¿qué ocurre?			

¿y sin calculadora?

Un número mixto es de forma $A\frac{b}{c}$ y corresponde a la abreviatura de $A+\frac{b}{c}$
Sin calculadora se transforma a una fracción con la fórmula

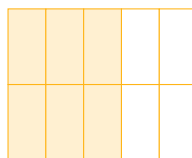
$$\frac{A \cdot c + b}{c}.$$

Ejemplo

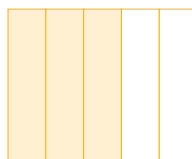
$$5\frac{1}{4} \rightarrow \frac{5 \cdot 4 + 1}{4} \rightarrow \frac{21}{4}.$$

2.3 Fracciones equivalentes e irreducibles

Ocurre algo curioso en nuestro ejemplo de la barra de chocolate. Si recordamos, teníamos 6 pedacitos de un total de 10 que contiene la barra. Podemos representarlo como sigue



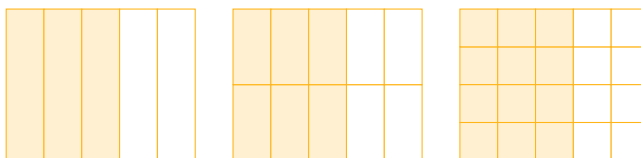
pero parece que podríamos representarlo también como



De hecho, no cuesta mucho darse cuenta que incluso en nuestro lenguaje cotidiano tener 6 trozos de 10 es equivalente a tener 3 de 5.

En otras palabras, ocurre que cuando tenemos una fracción, tenemos muchas representaciones distintas *para la misma fracción*. Es parecido a decir el número $5 - 2$ o el número $2 + 1$, que no son más que formas distintas de decir 3.

De forma gráfica es fácil encontrar fracciones equivalentes, simplemente dividiendo en más partes iguales. Por ejemplo



y de forma aritmética, basta con multiplicar o dividir ambas partes de la fracción por el mismo número

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} &= \frac{6}{10} \\ \frac{6 \cdot 2}{10 \cdot 2} &= \frac{12}{20} \\ \frac{3}{5} &= \frac{6}{10} = \frac{12}{20}\end{aligned}$$

Sin embargo, si hay tantas formas (de hecho, infinitas) de representar la misma fracción, ¿cuál es la correcta? Todas son correctas, pero hay una forma más económica, aquella que tiene los menores numerador y denominador. Esta forma de la fracción se llama *fracción irreducible*. Sabemos que tenemos una fracción irreducible cuando no puede simplificarse más, es decir, no podemos dividir el numerador y el denominador por un

mismo número y que el resultado siga siendo entero. En nuestro ejemplo del chocolate, la fracción irreducible es $\frac{3}{5}$.

Actividad 2.4 Usando la calculadora, determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Identifique además cuáles son las fracciones irreducibles.

- a) Las fracciones $\frac{20}{30}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ son todas equivalentes.
- b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{27}{30}$.
- c) $\frac{4}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$.
- d) $-10\frac{3}{4} = \frac{43}{4}$.

¿y sin calculadora?

Para encontrar la fracción irreducible:

Dividir tanto el numerador como el denominador por un número entero, y repetir este proceso hasta que ya no haya algún número distinto de uno que los divida a ambos.

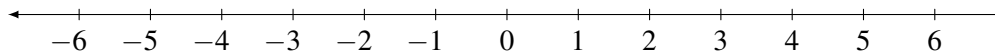
Ejemplo:

$$\frac{28}{42} \xrightarrow{\div 2} \frac{14}{21} \xrightarrow{\div 7} \frac{2}{3}$$

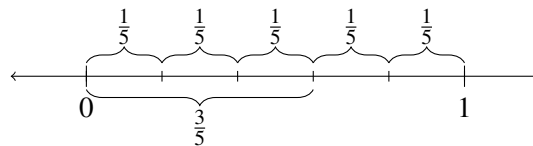
2.4 Un número más

Las fracciones están compuestas de dos números que “se juntan”, como vimos en la sección anterior, como las partes que consideramos (numerador) de un total de partes (denominador) en que dividimos la unidad. Esta idea de *la unidad* nos permite considerar una nueva forma de ver las fracciones, como un número.

Recordemos que podemos ordenar los números dentro de una recta numérica

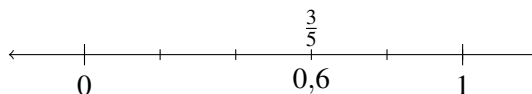


¿Qué tienen que ver las fracciones con este esquema? Resulta que podemos colocar las fracciones dentro de la recta numérica, pues podemos entender una fracción como un número. ¿Qué número? Recordemos que para ubicar un número dentro de la recta, debemos empezar a contar desde 0. Por ejemplo, para ubicar nuestra fracción $\frac{3}{5}$, dividamos las unidades. El denominador 5 significa que la unidad está dividida en cinco partes, y el numerador 3 que se consideran tres de ellas. Contando tres partes desde 0, el resultado es el siguiente.



En otras palabras, las fracciones ocupan los espacios entre los enteros en la recta numérica. Pero ya hemos visto otros números que ocupan los espacios entre los enteros, los números decimales.

¿Pueden una fracción y un decimal ocupar el mismo lugar en la recta? ¡Por supuesto! De hecho, una fracción no es más que otra forma de representar un número decimal. ¿Cómo podemos encontrar el decimal que representa una fracción? Dividiendo el numerador por el denominador. En nuestro ejemplo, $\frac{3}{5}$ es equivalente al decimal 0,6.



2.5 ¿Partes de cuál todo?

Como hemos visto antes, las fracciones surgen como partes de un todo. Pero vale la pena preguntarse, ¿de cuál todo? No es lo mismo que nos queden $\frac{3}{5}$ de nuestra barrita de chocolate a que nos queden $\frac{3}{5}$ de una caja de bombones o tener $\frac{3}{5}$ de \$1.000.000 (lo que nos permite comprar muchos chocolates).

Vale decir, una fracción se entiende como un número de partes que consideramos de un todo, pero ese todo puede ser distintas cosas. Eso no hace que cambie la fracción que estamos usando, pero lo que sí es distinto es *el resultado* de aplicar la fracción a nuestro todo.

Esto no es muy distinto, la verdad, de cosas que ya conocemos. No es lo mismo tener una manzana que dos manzanas, por ejemplo, o tener 1,6 kilos de pan que 1,8 kilos de pan. En cierto modo —y esto es una idea un poco rara al principio— podemos entender un número como un *multiplicador* de cantidades. Tener dos manzanas es tener $2 \times$ manzana; tener 1,6 kilos de pan es tener $1,6 \times 1$ kg de pan.

Esto se llama usar un número como operador, pero más allá del nombre, lo que importa es cómo reconocerlo y qué uso le damos y, como las fracciones son números, también aplica a ellas y quizás de una forma más explícita. Si nos fijamos en el primer párrafo, siempre nos referimos a una fracción *de* una cierta cantidad (la barrita, la caja, el millón de pesos). Esta construcción lingüística se traduce directamente en matemática como una multiplicación

$$\frac{3}{5} \text{ de una barrita con 10 pedacitos} = \frac{3}{5} \cdot 10$$

Pero, ¿cómo podemos multiplicar una fracción con un número entero, o decimal? Muy sencillo: podemos entender una fracción como una multiplicación y división simultáneas, pero que podemos aplicar en el orden que queramos. Así,

$$\frac{3}{5} \cdot 10 = (3 \cdot 10)/5 \text{ o bien } 3 \cdot (10/5) = 6$$

Entonces, si volvemos a nuestro ejemplo del terreno y suponemos que el terreno tiene un área de 500 m^2 , a cada uno de los cuatro hermanos le tocaría

$$\frac{1}{4} \cdot 500 \text{ m}^2 = 1 \cdot 500 \text{ m}^2 / 4 = 125 \text{ m}^2$$

Actividad 2.5 Determine los siguientes valores:

- a) $\frac{2}{5}$ de 5.500
- b) $\frac{9}{5}$ de 8.000
- c) 3 veces 16
- d) 0,7 veces 10
- e) 1,5 veces 3

2.6 Relación entre fracciones, decimales y porcentajes

Por lo que hemos visto usando la calculadora, podemos pasar de una fracción a un decimal, y viceversa, de un decimal a una fracción.

Los porcentajes también representan una parte de un todo. En este caso el total siempre se divide en 100 partes, y se consideran algunas de ellas.

Cuando, por ejemplo, se dice “ el 23% de las personas”, se quiere decir que el total de las personas se dividió en 100 partes y se consideraron 23 de esas partes. Por lo tanto 23% es equivalente a la fracción $\frac{23}{100}$.

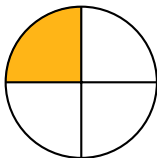
Ejemplos de la relación porcentaje-fracción-decimal

Porcentaje	Fracción	Fracción irreductible	Decimal
10%	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	0,1
6%	$\frac{6}{100}$	$\frac{3}{50}$	0,06
40%	$\frac{40}{100}$	$\frac{2}{5}$	0,4

Porcentajes más comunes



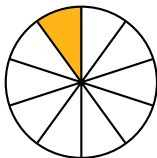
50% es $\frac{1}{2}$ del total



25% es $\frac{1}{4}$ del total



20% es $\frac{1}{5}$ del total



10% es $\frac{1}{10}$ del total

De decimales a porcentajes

Note que hay una relación directa entre decimales y porcentajes:

$0,4 \longrightarrow 40\%$
 $0,3 \longrightarrow 30\%$

Basta multiplicar por 100 el decimal para visualizar el porcentaje.

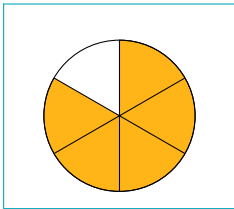
$\frac{7}{12} = 0,58\bar{3} \xrightarrow{\times 100} 58,3\%$

Actividad 2.6 Del mismo modo que en el ejemplo anterior, complete la siguiente tabla con sus equivalencias respectivas.

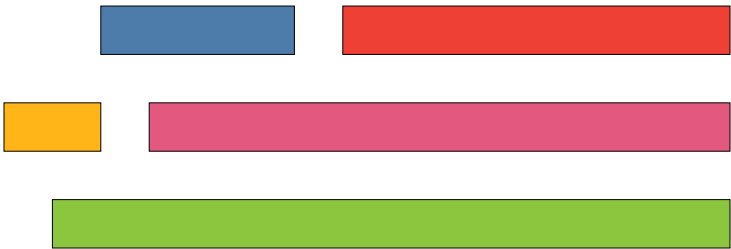
Fracción	Fracción Irreducible	Decimal	Porcentaje (%)
$\frac{25}{75}$			
		0,25	
	$\frac{1}{10}$		
			12,5%

Guía 2

P1. Complete los datos que faltan en cada caso. La “I.” quiere decir “Irreducible”.

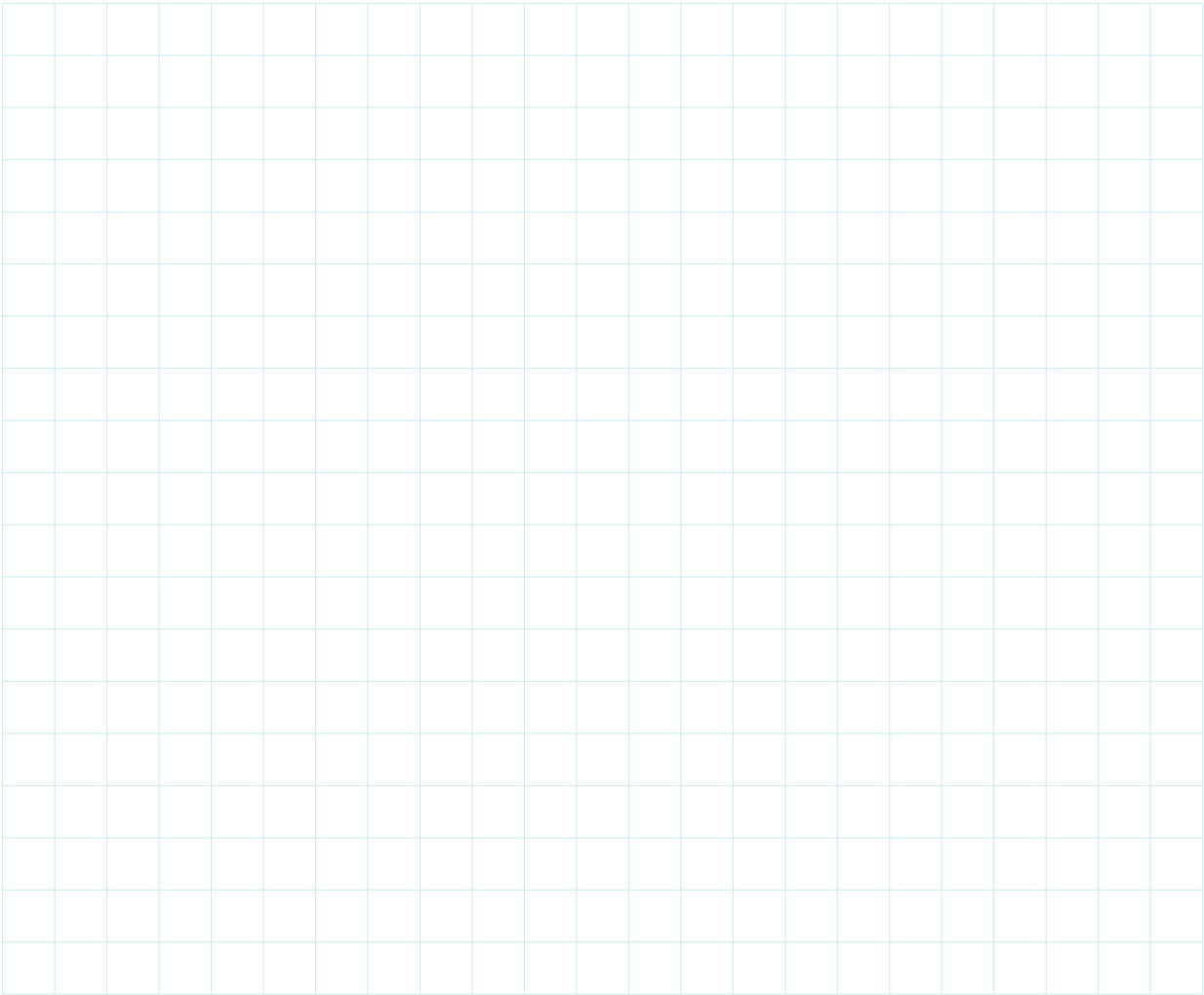
	Gráfico	Fracción	Decimal		
a)		<div></div>	<div></div>		
	Fracción	Gráfico	Fracción I.	Gráfico I.	Decimal
b)	<div>9/12</div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>
	Fracción	Nro. Mixto	Gráfico	Decimal	
c)	<div>13/4</div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>	

P2. Considere los siguientes rectángulos de colores.



Comparando los largos de los rectángulos, conteste:

- a) ¿Cuántos rectángulos amarillos caben en el azul?
- b) ¿Cuántos rectángulos azules caben en el rosado?
- c) ¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo?
- d) ¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul?
- e) ¿Qué fracción del rectángulo rosado es el rojo?



P5. Javier, después de una operación, debe someterse a una dieta estricta. Tiene que distribuir los siguientes alimentos en 4 comidas por día.

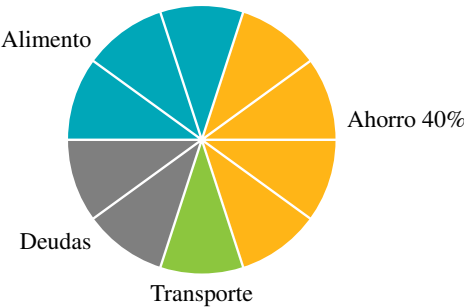
	Porción	Calorías por porción	Porciones por día
Huevo cocido	1 unidad	77	1/2
Pan Marraqueta	1 unidad	245	3/4
Pan molde Integral	2 rebanadas	152	2
Leche descremada	200 mL	64	2 1/5
Té	1 taza	2	3
Ensalada de Frutas	1 taza	108	2,5
Jamón de Pavo cocido	1 lámina	19	4
Pescado al vapor	100 g	128	2
Arroz blanco	1 taza	204	1 1/5
Agua	100 mL	0	Indefinida

a) ¿Cuántas calorías podría consumir diariamente?

b) La siguiente tabla indica la cantidad de alimentos consumidos en las primeras 3 comidas. ¿Qué opciones tendrá para la cena?

	Cantidad de porciones			
	Desayuno	Almuerzo	Colación	Cena
Huevo cocido	1/2			
Pan de marraqueta	1/2			
Pan de molde integral		1		
Leche descremada	1			
Té	1	1		
Ensalada de frutas	0,5		0,5	
Jamón de pavo cocido	2			
Pescado al vapor	1			
Arroz blanco		0,5		
Agua	1	2	1	

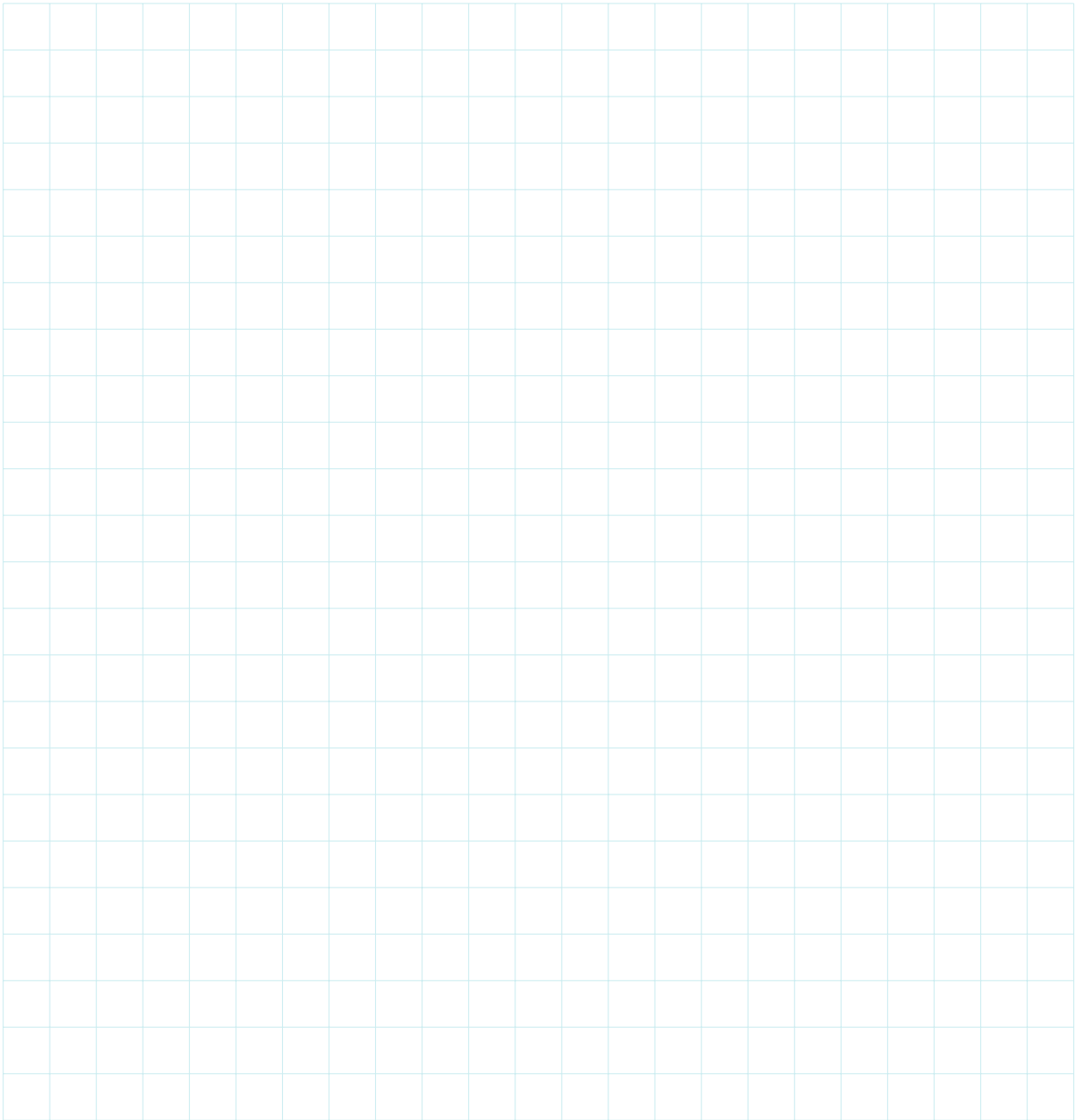
P6. El sueldo líquido mensual de Marcela es \$960.000, y lo repartió en el mes de noviembre de acuerdo al siguiente gráfico circular:



a) Complete la siguiente tabla con la fracción (**Fr.**), fracción irreducible (**Fr. I.**), decimal (**Dec.**) y porcentaje (%) que corresponda.

Representación numérica de la parte del total				
	Fr.	Fr. I.	Dec.	%
Ahorro				
Transporte				
Deudas				
Alimento				

- b) En diciembre, Marcela recibe un aguinaldo de \$480.000. Su dinero total recibido lo distribuye de la siguiente forma: vacaciones \$540.000, transporte y deudas \$360.000, vestuario \$180.000, y lo restante en alimentación y regalos.
- Construya un gráfico circular con la distribución de dinero en el mes de diciembre, en fracción y porcentajes.



P12. Un grifo llena un depósito en 5 horas y un segundo grifo lo llena en 3 horas.

- ¿Qué fracción del depósito es llenado por el primer grifo en una hora?
- ¿Qué fracción del depósito es llenado por el segundo grifo en una hora?
- ¿Cuánto tiempo se empleará en llenar el depósito si se utilizan los dos grifos simultáneamente?

P13. Felipe realizó el recuento de las ventas en su negocio dándose cuenta que:

- en marzo vendió $\frac{6}{5}$ del mes anterior
- en febrero vendió $\frac{5}{4}$ del mes anterior

Si en enero vendió \$4.500.000, ¿a cuánto ascendieron las ventas en el mes de marzo?

P17. Luis tenía asegurada su camioneta y sufrió un accidente con pérdida total del vehículo. Por esta razón la aseguradora le entrega \$5.900.000, que corresponde a $\frac{5}{8}$ del valor original de la camioneta. ¿Cuál era el valor original de la camioneta?

P18. Ana quiere cambiar las cerámicas de su comedor, el cual tiene 8 m de largo por 5 m de ancho. Eligió cerámicas cuadradas de 0,4 m de lado. Las cerámicas se venden en cajas de 10 unidades y el valor de cada caja es de \$5.800. Se le aceptó el siguiente plan de pago:

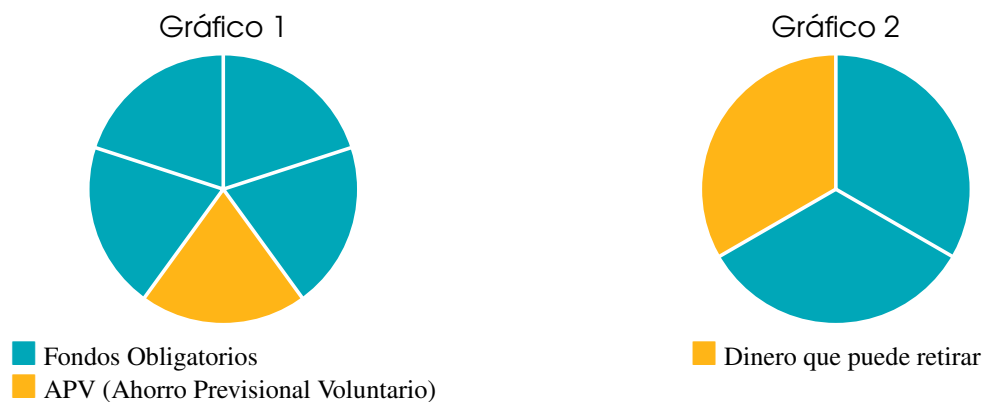
- $\frac{1}{4}$ del total lo cancelará al contado.
- $\frac{1}{6}$ de lo que queda lo cancelará con cheque a 30 días.
- El resto lo cancelará con la tarjeta de una casa comercial

¿Cuánto dinero cancelará Ana con la tarjeta de la casa comercial?

Problemas de la Sección

P1. Andrea recibe la cartola anual de su AFP, indicando que su ahorro asciende a \$12.600.000 distribuidos entre los fondos obligatorios y APV (Ahorro Previsional Voluntario).

El primer gráfico muestra la distribución de sus ahorros en la AFP y el segundo la cantidad de dinero que puede retirar de los fondos voluntarios.

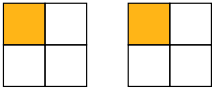
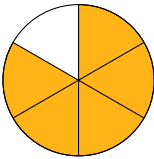


- a) ¿Cuánto dinero puede retirar Andrea?
- b) ¿Qué porcentaje de fondos corresponde a APV? ¿Qué fracción?
- c) ¿Qué fracción del APV podrá retirar?
- d) Del dinero ahorrado ¿qué porcentaje podrá retirar?


P2. En cada caso, indique si las expresiones (fracciones, decimales, representaciones gráficas, porcentajes, etc.) son equivalentes entre sí. En caso contrario, indique por qué no lo son.

	Fracción	Porcentaje
a)	$\frac{1}{2}$	50%

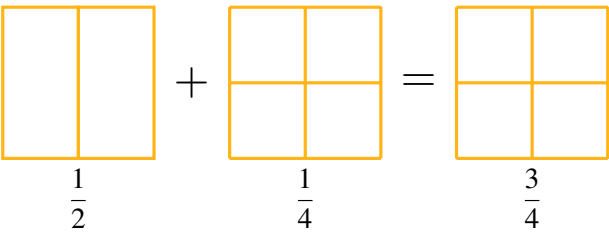
	Fracción	Decimal	Porcentaje
b)	$\frac{50}{30}$	1,6	$166,\bar{6}$

	Nro. mixto	Decimal	Representación gráfica
c)	$2\frac{1}{4}$	2,25	
	Fracción	Decimal	Porcentaje
d)	$\frac{6}{20}$	0,3	30%
	Fracción	Porcentaje	Representación gráfica
e)	$\frac{20}{24}$	$83,\bar{3}\%$	

P3. Indique en cada caso si las expresiones significan lo mismo. De no ser así, indique en dónde está la diferencia o error.

	Expresión 1	Expresión 2	Resultado
a)	$\frac{1}{2}$ de 50.000	50% de 50.000	25.000
	Afirmación	Representación gráfica	
b)	75% de los alumnos aprueba la asignatura		
	Indicación	Expresión	
c)	Se distribuye el dinero en 3 partes: - Alimentos $\frac{1}{5}$ - Celular $\frac{1}{3}$ - Resto en locomoción	$\begin{array}{r} 0,2 \text{ veces el dinero} \\ 30\% \text{ veces el dinero} \\ + \quad \frac{7}{15} \text{ veces el dinero} \\ \hline \text{Total del dinero} \end{array}$	

P4. Considere el siguiente ejemplo:

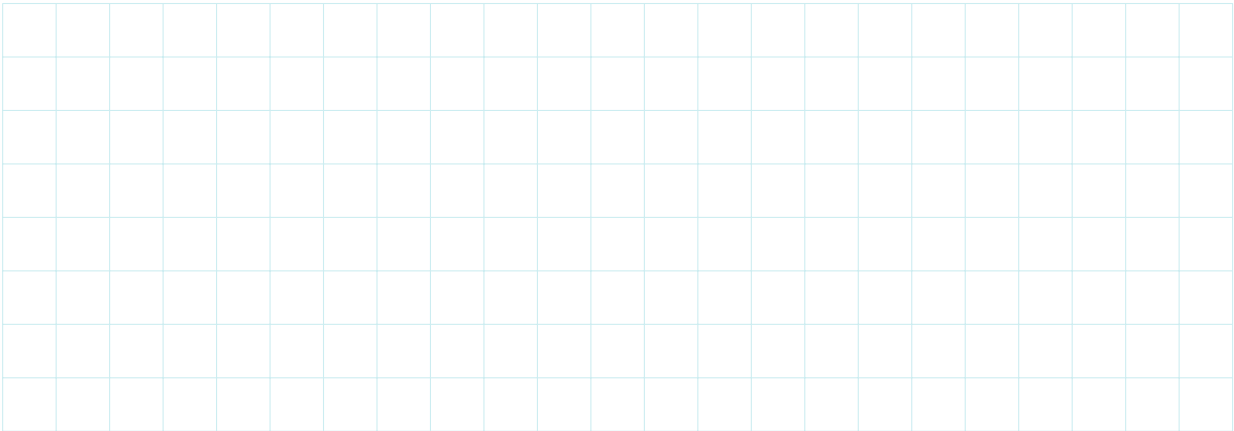


De este mismo modo, usando la representación gráfica, compruebe si las siguientes igualdades son correctas o incorrectas (en algunos casos puede ser necesario subdividir la representación gráfica):

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

c) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$



- P5. Un depósito contiene 320 L de agua, lo que corresponde a dos terceras partes de su capacidad total ¿Qué capacidad tiene el depósito?
- P6. Juan realizó una asesoría a una empresa de telecomunicaciones. Gastó $\frac{2}{5}$ de lo que le pagaron y le quedaron \$392.520. ¿Cuánto dinero había recibido Juan por su trabajo?
- P7. Pablo gastó $\frac{5}{8}$ del dinero que tenía y le quedaron \$307.500. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?
- P8. Andrea vende $\frac{3}{5}$ de un terreno y se queda con 3.816 m². ¿Cuántos m² del terreno vendió?
- P9. Juan vivió 60 años. ¿Qué fracción de un siglo vivió?
- P10. Una empresa tiene un total de 256 trabajadores, de los cuales 96 pertenecen a Fonasa y el resto a Isapres. ¿Qué parte del total de los trabajadores representan los afiliados a Isapres?
- P11. En una fiesta hay 8 personas y 14 pizzas. ¿Qué cantidad le toca a cada persona para que todos coman lo mismo?
- P12. Una piscina contiene 1.200 L cuando está hasta $\frac{1}{4}$ de su capacidad.
- a) ¿Cuál es la capacidad total de la piscina?

b) ¿Cuántos litros faltan para llenarla?

- P13.** Julio ganó \$550.000 en un concurso. Gastó la quinta parte para pagar sus estudios y la cuarta parte de lo que le quedaba en reparar su auto. ¿Cuánto dinero le queda?
- P14.** La tía Juana compra cada domingo 8 manzanas que reparte de manera equitativa entre los sobrinos que la visitan. El penúltimo domingo la visitaron 5 sobrinos y el último solo 4.
- ¿Qué fracción de manzanas le tocó a cada sobrino el penúltimo domingo?
 - ¿Qué fracción el último domingo?
- P15.** Un grupo de amigos compró 4 pizzas y las dividieron en varios trozos. Cada trozo correspondía a $\frac{1}{6}$ de pizza. Si cada persona pudo comer un trozo, ¿cuántas personas había en esa reunión?
- P16.** ¿Cuánto litros de agua contiene un depósito cuya capacidad total es de 400 litros y está ocupado en sus $\frac{3}{5}$ partes?
- P17.** Un autobús transporta 36 viajeros. En la primera parada se baja $\frac{1}{6}$ de los viajeros y suben 2 nuevos pasajeros, en la segunda parada se baja $\frac{1}{4}$ de los viajeros y suben 3 más, y en la tercera parada se bajan $\frac{2}{3}$ de los viajeros. ¿Cuántos se bajarán en esta última parada?
- P18.** Raúl reparte \$620.000 entre sus tres hermanos Felipe, Javiera y Pedro.
- Felipe recibe $\frac{2}{5}$ del total.
 - Javiera recibe $\frac{1}{4}$ del resto.
 - Pedro recibe lo que queda.
- Si Pedro gastó $\frac{1}{3}$ del dinero recibido, ¿con cuánto dinero se quedó?
- P19.** En un garaje están estacionados 48 vehículos, de los cuales la mitad son turísticos, $\frac{1}{3}$ son furgonetas y el resto son motocicletas. ¿Cuántos vehículos hay de cada tipo?