Invariance $\Rightarrow$ conservation : le théorème de Noether

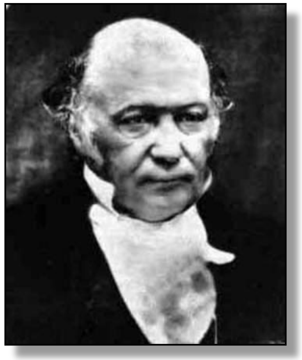
« A toute invariance du Lagrangien par une classe de transformations correspond une quantité conservée. »

Emmy Noether
(1882 – 1935)

- translation dans le temps $\longrightarrow$ énergie
- translation dans l'espace $\longrightarrow$ quantité de mouvement
- rotation dans l'espace $\longrightarrow$ moment cinétique
- multiplication par une phase $\longrightarrow$ charge électrique

La formulation hamiltonienne

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \qquad \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$



Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Formuler la physique, et notamment l'énergie, en utilisant les moments conjugués :

$$H(\vec{r}, \vec{p})$$

$$dH = d\left(\sum_{i=1}^{N}(\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L\right) = \sum_{i=1}^{N}(\vec{p}_i \cdot d\vec{v}_i + d\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot d\vec{v}_i\right)$$

$$dH = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot d\vec{p}_i\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \vec{v}_i$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \\[2ex] \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \end{cases}}$$

Equations de Hamilton

Quelques hamiltoniens

Hamiltonien libre à une particule : $H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m}}$

Hamiltonien à une particule dans un potentiel

$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = m\vec{v}^2 - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})\right) = \boxed{\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})}$$

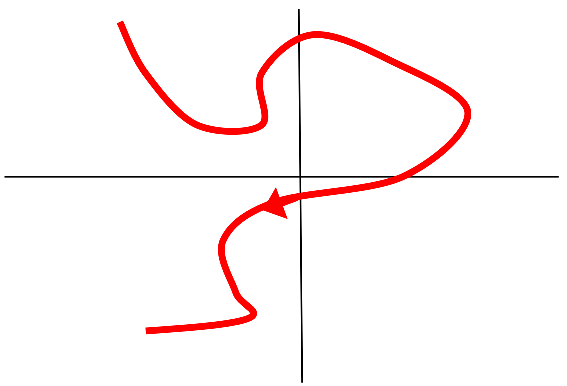
Hamiltonien à une particule dans un champ électromagnétique

$$H\left(\vec{r},\vec{p}\right) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(m\vec{v} + q\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}mv^2 - q\vec{v}\cdot\vec{A} = \boxed{\frac{\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2}{2m}}$$

Le déterminisme classique de la mécanique

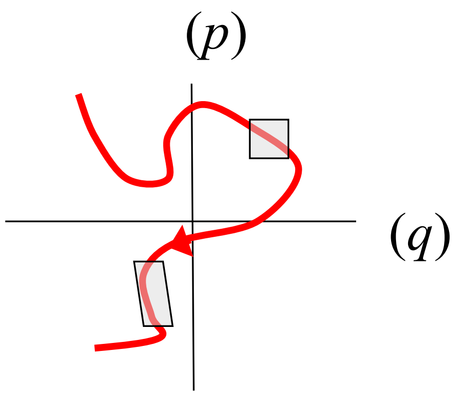
Espace des phases = espace des degrés de liberté (q,p) du système

Pour un système à N particules, l'espace des phases est un espace à $6N$ dimensions !



Les données de (q_i,p_i) à un instant t donné déterminent l'évolution du système pour tous les instants futurs $t_1 > t$.

Le théorème de Liouville



Espace des phases à 6N dimensions

L'état du système est représenté par un point

On considère un volume dV de cet espace qui se déforme au cours de l'évolution.

$$dV = dq_1 \cdots dq_{3N}\, dp_1 \cdots dp_{3N}$$

Après un temps dt : $\quad (q_1, \cdots, p_{3N}) \quad \rightarrow \quad (q_1 + \dot{q}_1\, dt\,,\ \cdots\ ,\ p_{3N} + \dot{p}_{3N}\, dt)$

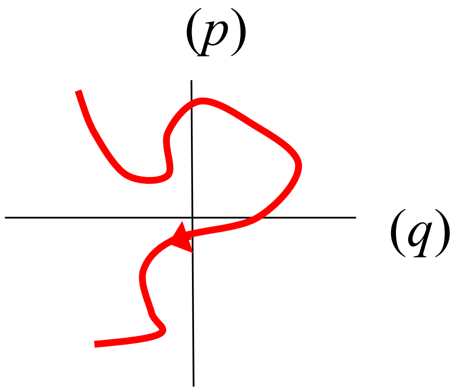
Le nouveau volume dV' est donc : $\quad dV' = \det(J) \times dV$

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_1'}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_1'}{\partial p_{3N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial p_{3N}'}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial p_{3N}'}{\partial p_{3N}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} dt & \cdots & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_{3N}} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_{3N}} dt & \cdots & 1 - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{3N} \partial q_{3N}} dt \end{vmatrix} = 1 + \mathrm{tr}(M) \times dt + O(dt^2)$$

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(dV) = 0}$$

Le théorème de Liouville



Espace des phases à $6N$ dimensions
L'état du système est représenté par un point

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(dV\right)=0}$$

L'ensemble des trajectoires d'un système hamiltonien dans l'espace des phases s'apparente aux lignes de courant d'un **écoulement fluide incompressible** !!

Evolution temporelle

On considère une variable F évoluant au cours du temps.

$$\frac{dF\left[(\vec{q}_i,\vec{p}_i),t\right]}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i}\frac{d\vec{q}_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i}\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)$$

Donc $$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{q}_i}\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}-\frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i}\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}\right)=\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}}$$

Crochet de Poisson

<u>Conséquence</u> : toute fonction de $(\vec{q},\vec{p})$ dont le crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul, est une constante du mouvement !

Principes de moindre action

Principe de Maupertuis :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i - E \right) dt$$

Pour une particule :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vec{p} \cdot \vec{dl}$$

Principe de Fermat :

$$S = \int_1^2 n(\vec{r})\,ds = \frac{c}{\omega} \int_1^2 \vec{k}(\vec{r}) \cdot \vec{dl}$$

La réinvention de la mécanique

De manière générale, le lagrangien d'une particule libre

$\longrightarrow$ est indépendant de t

$\longrightarrow$ est indépendant de $\vec{r}$

$\longrightarrow$ est indépendant de la direction de $\vec{v}$

$$L\left(\vec{v}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{0}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ est constant

Principe d'inertie

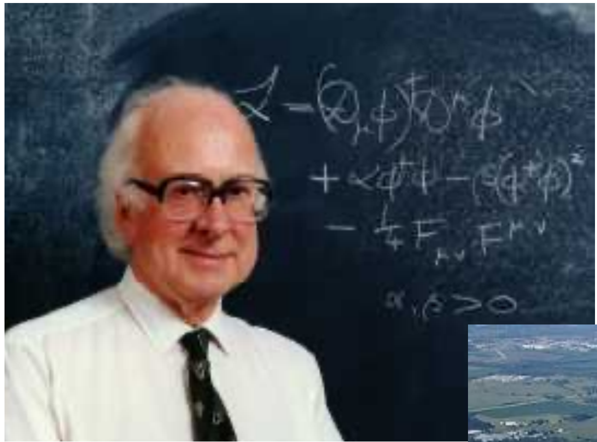
Basses vitesses $\Rightarrow$ $\boxed{L\left(\vec{v}^2\right) = K\vec{v}^2}$

Pour une particule soumise à un potentiel U, on modifie le lagrangien :

$$\boxed{L\left(\vec{v}^2\right) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U}$$

PFD

Des lagrangiens partout : le boson de Higgs



Peter Higgs
(1929 -)

$$L = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \ldots$$

Licence d’usage dans un contexte public, sans modification

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après et à l’exclusion expresse de toute utilisation commerciale.

Le droit d’usage défini par la licence autorise un usage à destination de tout public qui comprend :

- Le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- Le droit de diffuser tout ou partie du document au public sur support papier ou informatique, y compris par la mise à la disposition du public sur un réseau numérique.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n’est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d’usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l’auteur.