

Éléments de relativité et physique quantique

Table des matières

Avant-propos	1
1 Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique	3
1.1 Le monde selon Galilée et Newton	3
1.1.1 Vision classique de l'espace et du temps	3
1.1.2 Espace des phases et déterminisme classique	4
1.2 Le principe de moindre action	5
1.2.1 Première approche variationnelle : le principe de Fermat	5
1.2.2 Le principe de moindre action	6
1.2.3 Le formalisme lagrangien	8
1.2.4 Les équations d'Euler-Lagrange	9
1.2.5 Équivalence avec la mécanique newtonienne	10
1.2.6 Particule dans un champ électromagnétique	10
1.2.7 Le moment conjugué de Lagrange	12
1.3 Invariances et conservations	13
1.3.1 Translation dans le temps et énergie	13
1.3.2 Translations dans l'espace et impulsion	14
1.3.3 Rotations dans l'espace et moment cinétique	14
1.3.4 Théorème de Noether classique	15
1.4 Formulation hamiltonienne de la physique	16
1.4.1 Énergie et hamiltonien	16
1.4.2 Les équations d'Hamilton-Jacobi	18
1.4.3 Évolution temporelle et crochets de Poisson	19
1.4.4 Le théorème de Liouville	20
1.5 Le cas des systèmes non conservatifs	22
1.6 Notations en coordonnées généralisées	23
1.7 Le champ électromagnétique	24
1.7.1 Équations de Maxwell et équations du mouvement	24
1.7.2 Potentiels, invariance de jauge et conservation de la charge	25
1.7.3 Énergie du champ électromagnétique	26
1.7.4 La catastrophe ultraviolette	29
À retenir de ce chapitre	32

Avant-propos

Au tournant du XX^e siècle, la physique a connu l'un des plus grands bouleversements de toute son histoire. Alors même qu'après plus de deux cents ans de tâtonnements, de découvertes en découvertes, on semblait enfin atteindre une connaissance exhaustive et complète des constituants de la nature, de leurs propriétés et des lois gouvernant leur évolution, les quelques fissures ou imperfections que comportait ce splendide édifice théorique se sont révélées progressivement des failles majeures. Remonter à l'origine de ces incohérences et en tirer les conséquences a nécessité de remettre en cause des notions qui semblaient intouchables : le caractère absolu du temps, le déterminisme, la localité, la nature des interactions, jusqu'au réalisme même des objets. Cette révolution a donné naissance à la physique moderne, unifiant la nature des objets qui la composent en ce qui allaient devenir des particules quantiques, puis des champs quantiques.

L'objectif de cet ouvrage est de guider le lecteur à travers cette révolution, le long des deux axes majeurs qu'ont constitué la relativité et la physique quantique. Le point de départ et le cœur théorique de ces développements est le principe de moindre action, qui débute cet ouvrage, décrit dans le formalisme lagrangien et hamiltonien.

Chapitre 1

Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique

1.1 Le monde selon Galilée et Newton

1.1.1 Vision classique de l'espace et du temps

La vision classique de la description du mouvement est celle proposée par Galilée. Dès 1610, il remarque qu'il est impossible de différencier le repos d'un mouvement rectiligne et uniforme. Cela signifie qu'en l'absence de force, le mouvement d'un point matériel est continu et uniforme. Aucune expérience locale ne pouvant être menée pour différencier un état de repos d'un état de mouvement rectiligne et uniforme, il conclut que ces deux situations sont fondamentalement identiques. Cette réflexion est connue sous le nom de *principe d'inertie*. Dans l'espace et le temps, un événement est défini comme un point repéré par un vecteur à trois dimensions \vec{r} , dont les coordonnées sont paramétrées par le temps t . Selon cette vision des choses, le temps est absolu, et identique dans tous les référentiels inertiels (galiléens). Le point correspondant à un événement sera repéré comme $\vec{r}(t)$.

Dans ce cadre les changements de référentiels sont décrits par les transformations de Galilée. Pour un repère \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} par rapport au référentiel \mathcal{R} où est défini \vec{r} . Ces transformations de coordonnées sont données par les relations

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u} t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1)$$

L'évolution d'un système classique est décrite par la mécanique newtonienne qui relie la variation temporelle des vitesses aux forces extérieures qui sont

appliquées au système. Pour un système de N points matériels de masses m_i , cette relation est donnée par la seconde loi de Newton,

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \quad . \quad (1.2)$$

L'évolution du système à partir de conditions initiales données est ainsi entièrement déterminée par la donnée des positions et des vitesses à un instant t , ou par celle des positions en deux instants différents.

1.1.2 Espace des phases et déterminisme classique

Pour traduire cette dépendance en (\vec{r}, \vec{v}) des conditions initiales, il est très utile de décrire l'évolution des systèmes dans un espace multidimensionnel dans lequel un point est donné par les valeurs des positions et des vitesses. Cet espace est nommé *espace des phases*. Pour une particule à trois dimensions, l'espace des phases en comporte donc six. Plus généralement, pour un système à N particules évoluant dans l'espace, l'espace des phases comporte $6N$ dimensions. À titre d'exemple, la figure 1.1 montre l'évolution quelconque d'une particule à une dimension à gauche. Sur la même figure à droite, est représentée la trajectoire dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique à une dimension. La trajectoire est périodique.

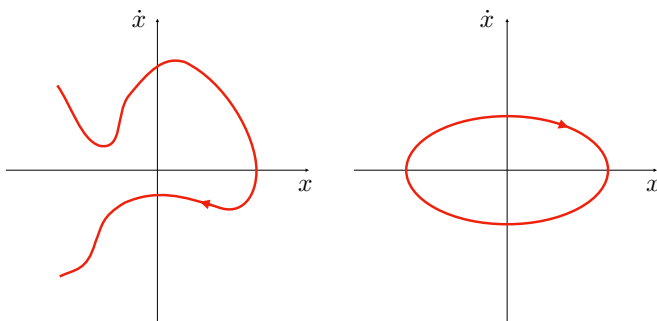


FIGURE 1.1 – Exemples d'évolution dans l'espace des phases pour une particule à une dimension : évolution quelconque (à gauche) et oscillateur harmonique (à droite).

Conformément à la physique newtonienne, les données des valeurs de (\vec{r}, \vec{v}) à un instant t donné déterminent entièrement l'évolution du système pour tous les instants futurs $t' > t$.

1.2 Le principe de moindre action

La section précédente nous rappelle que pour décrire le mouvement d'un ensemble de points matériels, il est équivalent de donner les valeurs des positions et des vitesses à un instant donné, ou de donner les positions en deux instants différents. Ce dernier point invite à considérer une nouvelle possibilité pour décrire le mouvement : étant donné un état initial et un état final, quelle est la trajectoire suivie entre ces deux états ? La réponse à cette question donnera naissance au principe de moindre action qui offre un point de vue nouveau sur la mécanique.

1.2.1 Première approche variationnelle : le principe de Fermat

Historiquement, la première démarche qui introduit un principe de minimisation en physique est due à Fermat et concerne les lois de la réfraction pour la lumière. Avant d'en arriver aux lois de l'optique, nous pouvons poser un problème en apparence indépendant : supposons qu'Alice soit au bord d'une piscine, dans laquelle Bob est en difficulté et appelle à l'aide. La question est de savoir quelle trajectoire Alice doit emprunter pour atteindre Bob le plus rapidement possible. Il s'agit d'une question non triviale car Alice court plus vite qu'elle ne nage. Se déplacer en ligne droite ne sera pas optimal, ni même courir jusqu'à la perpendiculaire de Bob, ce qui pourrait lui prendre au total trop de temps. La situation est schématisée sur le panneau de gauche de la figure 1.2.

En nommant I le point de passage entre le sol et l'eau, et en prenant l'origine des x à la position initiale d'Alice, le temps total qu'elle mettra pour atteindre Bob est

$$\tau = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = \frac{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}}{v_2} . \quad (1.3)$$

L'optimum pour le temps de parcours est obtenu lorsque la dérivée du temps de parcours par rapport à la position x_I s'annule :

$$\frac{d\tau}{dx_I} = 0 = \frac{1}{v_1} \frac{x_I}{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_B - x_I}{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}} , \quad (1.4)$$

et par ailleurs,

$$\frac{x_I}{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}} = \frac{x_I}{AI} = \sin i_1 \quad \text{et} \quad \frac{x_B - x_I}{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}} = \frac{x_I}{IB} = \sin i_2 . \quad (1.5)$$

Finalement, la trajectoire optimale effectivement empruntée par Alice satisfait la relation suivante :

$$\frac{1}{v_1} \sin i_1 = \frac{1}{v_2} \sin i_2 . \quad (1.6)$$

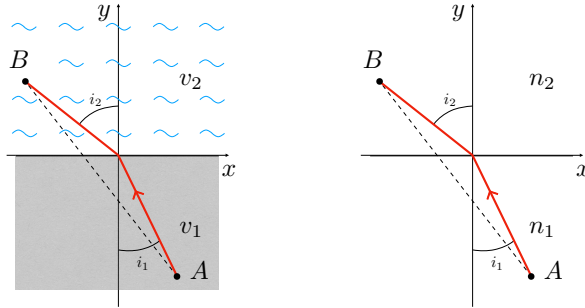


FIGURE 1.2 – Illustration du principe de Fermat, à gauche pour que Alice (en A) sauve Bob (en B) de la noyade, et à droite pour la réfraction de la lumière entre deux milieux d'indices différents.

Si l'on considère un rayon lumineux traversant une interface entre deux milieux d'indices différents, celui-ci est dévié. Il obéit précisément à la loi ci-dessus. Nous avons l'habitude de l'écrire en utilisant l'indice optique $n = c/v$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et v dans le milieu. La loi obtenue, connue sous le nom de *loi de Snell-Descartes* et illustrée dans le panneau de droite de la figure 1.2 s'exprime comme suit,

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 . \quad (1.7)$$

Étant donné les points de départ et d'arrivée A et B du rayon lumineux, la trajectoire effectivement suivie correspond au temps de trajet minimal entre A et B . Ce changement de point de vue est très important pour la description de la physique. Il s'agit d'une révolution conceptuelle majeure, offrant une alternative globale aux méthodes procédurales établies précédemment. Pour la première fois une loi physique, la loi de la réfraction, est dérivée à partir d'un point de vue global et d'un principe variationnel, ici la minimisation du temps de parcours.

1.2.2 Le principe de moindre action

Le principe de Fermat invite à chercher une approche variationnelle pour la mécanique. Ce sont Euler et Maupertuis qui appliquent en premier ce point de vue à la mécanique au XVIII^e siècle. Pour ce faire on peut considérer une trajectoire dans l'espace des phases, et construire une grandeur qui la décrit

d'un point de vue global. Le déplacement élémentaire étant $\vec{v} \cdot d\vec{\ell}$, une quantité décrivant globalement le mouvement entre deux instants t_1 et t_2 est

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} . \quad (1.8)$$

Cette quantité est nommée *action*. Nous verrons dans la suite que cette expression de l'action décrit le mouvement d'une particule libre. C'est précisément S qui sera minimale pour la trajectoire effectivement empruntée dans l'espace des phases.

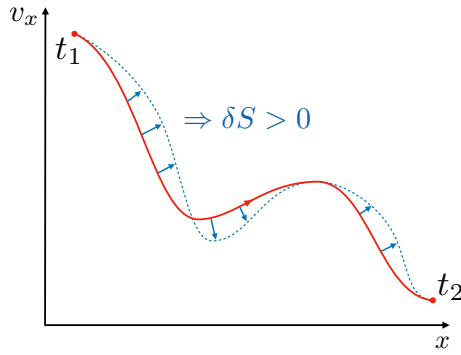


FIGURE 1.3 – Illustration de la trajectoire d'un système unidimensionnel dans l'espace des phases (x, v_x) . La trajectoire réelle est en trait plein, toute déviation entraîne une action globale plus élevée.

L'action totale est la somme des actions élémentaires $\vec{v} \cdot d\vec{\ell}$, qui ne dépendent que de l'état instantané du système. Le *principe de moindre action* stipule que l'action est minimale pour la trajectoire réelle. Sur le schéma de la figure 1.3, la trajectoire réelle est représentée en traits pleins, toute trajectoire potentielle déviant de la trajectoire réelle entraîne $\delta S > 0$ et conduit à une valeur de l'action totale plus élevée.

L'action introduite par Maupertuis introduit en outre la masse. Dans la suite, nous verrons qu'il est effectivement plus naturel d'utiliser l'impulsion que la vitesse. Ainsi pour la particule libre on ajoute la masse à l'intégrale de l'action,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} \cdot d\vec{\ell} . \quad (1.9)$$

L'unité de l'action ainsi définie est donc le produit d'une énergie par un temps, soit $J \cdot s$.

1.2.3 Le formalisme lagrangien

Le formalisme moderne permettant d'exprimer la mécanique classique d'un point de vue variationnel a été introduit par Joseph-Louis Lagrange dans la seconde partie du XVIII^e siècle. Outre le fait qu'il permet de faire le lien avec la physique quantique, il offre une vision synthétique et ne met en œuvre que des grandeurs scalaires. Par ailleurs, cela permet de s'affranchir des forces internes et de mettre en valeur les symétries du problème. Ces dernières vont en particulier permettre de déterminer les invariants, c'est-à-dire les constantes du mouvement. Cela sera illustré par le théorème de Noether dans la partie 1.3.4.

L'action se construit comme une généralisation de l'exemple de la section précédente. Chez Lagrange, S est définie comme l'intégrale entre deux points fixes d'une fonction nommée lagrangien L , ce dernier ne dépendant que des positions des particules et de leurs dérivées premières :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t)] \quad . \quad (1.10)$$

Il est important de noter que le lagrangien est construit comme une fonction des variables \vec{r}_i et \vec{v}_i considérées comme indépendantes de sorte que la notion d'espace des phases prend tout son sens. Dans la pratique cette indépendance se traduit par

$$\frac{\partial L(\vec{v})}{\partial \vec{r}} = \vec{0} \quad \text{si } L \text{ ne dépend que de } \vec{v}$$

et

$$\frac{\partial L(\vec{r})}{\partial \vec{v}} = \vec{0} \quad \text{si } L \text{ ne dépend que de } \vec{r} \quad .$$

La notation utilisée ici est une notation compacte permettant de désigner un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux composantes du vecteur au dénominateur. Par exemple dans une base orthonormée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ la dérivée d'une grandeur scalaire A s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial A}{\partial u_x} \vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial u_y} \vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial u_z} \vec{e}_z \quad ,$$

de sorte que par exemple,

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} A \quad .$$

Dans la suite de l'ouvrage, la notation $\partial/\partial \vec{u}$ sera le plus souvent utilisée, à la place en particulier de l'opérateur $\vec{\nabla}$.

1.2.4 Les équations d'Euler-Lagrange

La définition de l'action à partir du lagrangien permet de trouver la forme générale des équations du mouvement sur la base du principe de moindre action. Supposons que l'on perturbe la trajectoire, en variant indépendamment chaque variable $\vec{r}_i(t)$ et $\vec{v}_i(t)$ en $\vec{r}_i(t) + \delta\vec{r}_i(t)$ et $\vec{v}_i(t) + \delta\vec{v}_i(t)$, alors l'action sera modifiée selon

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L + \delta L)(t) , \quad (1.11)$$

où

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \delta\vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i=1}^N \delta\vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} . \quad (1.12)$$

Si l'on considère la particule i , et que l'on intègre la perturbation de l'action sur toute la trajectoire dans l'espace engendré par $\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}$, il vient

$$\delta S_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta\vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \delta\vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (1.13)$$

Le second terme peut être intégré par parties,

$$\delta S_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta\vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) + \left[\delta\vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) \right) . \quad (1.14)$$

Le terme entre crochets est nul car les conditions en t_1 et t_2 sont fixées, ce qui entraîne

$$\delta\vec{r}_i(t_1) = \delta\vec{r}_i(t_2) = \vec{0}, \quad \forall i . \quad (1.15)$$

Pour que l'action soit minimale, il faut que $\delta S_i = 0$, soit en regroupant les termes

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta\vec{r}_i \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) \right) = 0 . \quad (1.16)$$

Cette égalité doit être valable pour toute perturbation $\delta\vec{r}_i$. On obtient alors les *équations d'Euler-Lagrange* :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (1.17)$$

Ce sont en fait les équations du mouvement. Pour faire le lien avec leur forme habituelle, il faut préciser la valeur du lagrangien pour un système donné.

1.2.5 Équivalence avec la mécanique newtonienne

La deuxième loi de Newton (1.2) et l'équation d'Euler-Lagrange (1.17) sont supposées décrire toutes deux le mouvement d'un ensemble de points matériels. Voyons à quelle condition elles sont équivalentes. Dans le cas d'une seule particule, on voit immédiatement qu'il est nécessaire et suffisant que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} \end{cases}, \quad (1.18)$$

où U est le potentiel dont dérive la force. Il est facile de voir que le lagrangien suivant convient :

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}), \quad (1.19)$$

soit de façon générale, la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U ,

$$L = T - U. \quad (1.20)$$

Nous disposons donc maintenant de deux points de vue équivalents. La formulation newtonienne propose une approche différentielle, où la trajectoire des points matériels peut être construite de proche en proche à partir de la donnée des positions et des vitesses à un instant donné. La formulation lagrangienne offre un point de vue global une fois fixés l'état initial et l'état final.

1.2.6 Particule dans un champ électromagnétique

C'est peut-être dans le cas de l'étude d'une particule en mouvement dans un champ électromagnétique que l'approche lagrangienne se manifeste la plus instructive. Considérons une particule de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique décrit par les champs \vec{E} et \vec{B} . La force subie par la particule est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (1.21)$$

On rappelle que les champs \vec{E} et \vec{B} dérivent des potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} . Les relations entre les champs et les potentiels sont données par

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{A}. \quad (1.22)$$

La force électrique dérive uniquement du potentiel qV si le champ magnétique est indépendant du temps. Le cas de la force magnétique est moins trivial

en raison du potentiel vecteur¹. La forme correcte du lagrangien décrivant le mouvement de la particule dans ces champs est

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - qV + q\vec{v} \cdot \vec{A} . \quad (1.23)$$

Cela peut se vérifier en considérant l'équation d'Euler-Lagrange (1.17) issue de ce lagrangien. Voyons la projection sur x , les cas des autres directions étant similaires. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= q\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ &= q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) v_x + q \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) v_y + q \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} , \end{aligned} \quad (1.24)$$

et par ailleurs,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} , \quad (1.25)$$

car V et \vec{A} ne dépendent que de \vec{r} . On peut à présent dériver l'équation précédente par rapport au temps et utiliser l'équation d'Euler-Lagrange (1.17), de qui donne selon la direction x

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= ma_x + q \frac{dA_x}{dt} \\ &= ma_x + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} v_y \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) . \end{aligned} \quad (1.26)$$

En combinant l'expression précédente avec (1.24) il vient

$$\begin{aligned} ma_x &= q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) v_x + q \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) v_y + q \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ &\quad - \left[q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} v_y \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) \right] . \end{aligned} \quad (1.27)$$

En utilisant la définition des champs à partir des potentiels scalaire et vecteur (1.22), il vient

$$ma_x = qE_x + qB_z v_y - qB_y v_z = qE_x + q \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)_x . \quad (1.28)$$

On reconnaît dans le membre de droite la composante selon x de la force de Lorentz (1.21). Les équations d'Euler-Lagrange sont donc bien équivalentes à

1. Cela est non sans lien avec les fameux coups francs de Roberto Carlos. La force exercée par l'air sur une sphère en rotation sur elle-même, conséquence de l'effet Magnus, peut aussi être décrite par un potentiel vectoriel.

Particule	Lagrangien L	Moment conjugué \vec{p}
Isolée	$\frac{1}{2}m\vec{v}^2$	$m\vec{v}$
Dans un potentiel U	$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})$	$m\vec{v}$
Dans un champ électromagnétique (V, \vec{A})	$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - qV + q\vec{v} \cdot \vec{A}$	$m\vec{v} + q\vec{A}$

TABLE 1.1 – Exemples de Lagrangiens et de moments conjugués de Lagrange dans trois cas utiles.

la deuxième loi de Newton et conduisent aux bonnes équations du mouvement, à condition que le lagrangien soit donné par (1.23). Nous verrons dans la suite que cela correspond à une re-définition de l'impulsion dans le cas où un champ électromagnétique est présent.

Dans les problèmes où intervient la force de Lorentz, il n'est pas possible de décrire le mouvement à l'aide d'un potentiel de façon aussi simple que dans le cas où seul un champ électrique statique est présent. La raison en est que le potentiel n'est pas décrit par une simple grandeur scalaire. Dans le premier cas, l'énergie potentielle électrostatique est donnée par le produit qV . En présence d'un champ magnétique, on peut interpréter le terme $q\vec{v} \cdot \vec{A}$ non comme une énergie potentielle, mais une *impulsion potentielle*.

1.2.7 Le moment conjugué de Lagrange

En définissant le lagrangien comme l'entité fondamentale décrivant l'évolution d'un système, il est possible de généraliser la notion de quantité de mouvement. Pour cela on introduit le *moment conjugué de Lagrange*, défini comme

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} . \quad (1.29)$$

Cette grandeur est appelée *l'impulsion*. Dans le cas d'une particule isolée ou soumise à un potentiel scalaire l'impulsion s'identifie à la quantité de mouvement. Ce n'est plus le cas si l'on considère une particule dans un champ magnétique, comme cela a été montré dans la section précédente. Le tableau 1.1 donne les lagrangiens et les moments conjugués dans trois exemples de situations.

1.3 Invariances et conservations

Dans la formulation newtonienne de la mécanique, la conservation de certaines grandeurs semble être spécifique à certains systèmes et n'apparaît pas comme émergeant clairement de principes fondamentaux. Les conservations de l'énergie, de l'impulsion ou du moment cinétique semblent être des propriétés constatées des systèmes conservatifs. La formulation lagrangienne permet de jeter un éclairage nouveau sur les lois de conservation, en particulier de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique. Dans la suite nous revenons sur ces trois points avant de les intégrer dans un cadre plus général avec le théorème de Noether.

1.3.1 Translation dans le temps et énergie

Il est très fréquent que les expériences de physique soient invariantes par translation dans le temps. Il convient de ne pas confondre cette invariance avec le fait que certaines grandeurs ne dépendent pas du temps. Ici, il s'agit de considérer qu'une expérience effectuée à un certain instant donnera le même résultat que la même expérience conduite à un instant ultérieur, toutes conditions égales par ailleurs. Dans la pratique, l'invariance par translation dans le temps se traduit par le fait que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. La dérivée totale du lagrangien par rapport au temps est donnée par

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (1.30)$$

L'absence de dépendance explicite de L en fonction du temps annule le premier terme, et les équations d'Euler-Lagrange nous permettent de ré-écrire la partie entre parenthèses

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) + \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) , \quad (1.31)$$

ce qui donne finalement

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \vec{p}_i \right) . \quad (1.32)$$

Nous en concluons que la quantité $(\sum_i (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L)$ est conservée au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L \right) = 0 . \quad (1.33)$$

Cette grandeur représente l'énergie du système. Cela est facile à vérifier dans le cas d'une particule soumise à une énergie potentielle. Dans la suite cette grandeur sera nommée *hamiltonien*. Nous découvrons alors que la conservation de l'énergie est intimement liée à l'invariance par translation dans le temps.

1.3.2 Translations dans l'espace et impulsion

De même que le résultat d'une expérience ne dépend pas de la date à laquelle elle est conduite, toutes conditions égales par ailleurs, il ne dépend pas non plus du lieu dans lequel elle est menée. Une translation spatiale d'une quantité $\vec{\varepsilon}$ entraîne une variation du lagrangien

$$\delta L = L(\{\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}; \vec{v}_i\}) - L(\{\vec{r}_i; \vec{v}_i\}) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) . \quad (1.34)$$

Une invariance par translation dans l'espace implique que l'action est inchangée $\delta S = 0$. Or δS s'écrit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \sum_{i=1}^N \left(\vec{\varepsilon} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) = \vec{\varepsilon} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t_2) - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t_1) \right) . \quad (1.35)$$

On constate ainsi que l'invariance par translation spatiale induit la conservation dans le temps de la quantité $(\sum_i \vec{p}_i)$. Autrement dit la conservation de l'impulsion est une conséquence directe de l'invariance par translation dans l'espace. Comme il y a trois directions possibles dans l'espace, la quantité conservée est vectorielle, et ce sont les trois composantes de l'impulsion qui se conservent indépendamment.

1.3.3 Rotations dans l'espace et moment cinétique

Toutes conditions égales par ailleurs, l'orientation d'une expérience de mécanique n'influence pas son résultat. Pour voir la conséquence de cela, considérons une rotation autour de l'axe z , entraînant une variation du lagrangien

$$\delta L = L\left(\{(x_i - \varepsilon y_i; \varepsilon x_i + y_i); (\dot{x}_i - \varepsilon \dot{y}_i; \varepsilon \dot{x}_i + \dot{y}_i)\}\right) . \quad (1.36)$$

L'action est alors modifiée selon

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta L \\ &= \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right) (t_2) - \sum_{i=1}^N \left(x^{(i)} p_y^{(i)} - y^{(i)} p_x^{(i)} \right) (t_1) \right) . \end{aligned} \tag{1.37}$$

Il apparaît que la composante selon z de la quantité vectorielle

$$\left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \right)$$

est conservée. La conservation des autres composantes est démontrée en considérant des rotations autour des directions x et y . En conclusion, l'invariance par rotation dans l'espace entraîne la conservation du moment cinétique.

1.3.4 Théorème de Noether classique

Les relations établies dans le paragraphe précédent entre les invariances et les quantités conservées sont des cas particuliers d'un lien plus général. Ce lien a été formalisé par Emmy Noether en 1915 sous la forme du théorème qui porte son nom. Il s'énonce comme suit : **à toute invariance du lagrangien par une classe de transformations continues correspond une quantité conservée.**

Le tableau 1.2 donne quelques exemples d'application du théorème de Noether. Dans chaque cas est précisée la transformation et mentionné le nombre de générateurs associés, n , puis la quantité conservée et le type de grandeur, vecteur ou scalaire.

Transformation	n	Quantité conservée	Type
Translation dans le temps	1	Énergie	Scalaire
Translation dans l'espace	3	Quantité de mouvement	Vecteur
Rotation dans l'espace	3	Moment cinétique	Vecteur
Changement de jauge	1	Charge électrique	Scalaire

TABLE 1.2 – Exemples d'application du théorème de Noether.

L'exemple de la charge électrique est mentionné ici afin d'illustrer la puissance du théorème. La phase dont il est question est celle de la fonction d'onde, ou du vecteur d'état, des concepts qui seront introduits dans les chapitres traitant de la physique quantique.

Dans la formulation lagrangienne, c'est le lagrangien L qui le centre de l'approche théorique. Or la relation (1.33) semble conférer à l'énergie un rôle fondamental dans la dynamique des systèmes. Nous allons donc à présent reformuler la mécanique lagrangienne pour offrir une place centrale à cette grandeur.

1.4 Formulation hamiltonienne de la physique

Pour tirer toute la substance de cette nouvelle formulation variationnelle de la mécanique et faire apparaître la structure fondamentale de l'espace des phases, il faut la réécrire en s'appuyant sur une fonction nommée *hamiltonien*. Cette dernière est directement liée à l'énergie du système et nous verrons ultérieurement qu'elle joue un rôle central en physique quantique. Les expressions obtenues permettent un passage plus naturel de la physique classique à la physique quantique et à la relativité.

En particulier, dans la formulation hamiltonienne, les équations du mouvement ne sont plus données par les équations d'Euler-Lagrange mais par un couple de relations, les *équations d'Hamilton-Jacobi*.

1.4.1 Énergie et hamiltonien

L'approche hamiltonienne vise à décrire la physique en remplaçant les couples de variables dynamiques \vec{r} et \vec{v} par \vec{r} et son moment conjugué de Lagrange \vec{p} . Nous avons vu en effet dans les paragraphes précédents que l'utilisation de l'impulsion permet d'écrire des relations plus générales. Si l'on considère le lagrangien comme une fonction de \vec{v} , la relation (1.29) indique que L est l'intégrale de $\vec{p}(\vec{v})$. De façon analogue, on considère une fonction H qui est l'intégrale de $\vec{v}(\vec{p})$. La fonction $\vec{p}(\vec{v})$ étant monotone les deux intégrales sont liées par la relation

$$L(\vec{v}) + H(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} , \quad (1.38)$$

comme illustré dans la figure 1.4.

La fonction $H(\vec{p})$ est en fait la transformée de Legendre du lagrangien. Cette définition de la fonction H porte le nom d'*hamiltonien*. Il peut se généraliser pour les systèmes de points matériels de la façon suivante :

$$H = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L . \quad (1.39)$$

L'hamiltonien donne l'énergie totale du système, nous retrouvons ici la quantité conservée associée à l'invariance par translation dans le temps. Nous allons

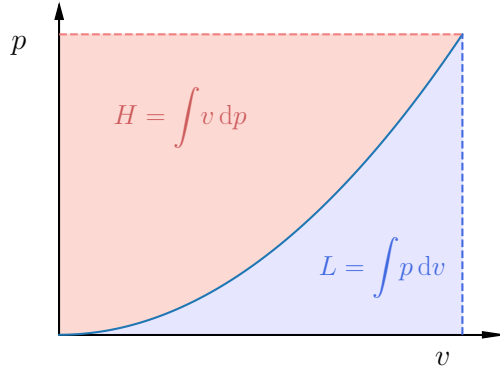


FIGURE 1.4 – Illustration du lien entre le lagrangien et l'hamiltonien dans un système d'axes (p, v) . Attention ici à ne pas confondre avec une représentation de l'espace des phases.

maintenant illustrer cela avec quelques exemples concrets. Considérons tout d'abord une particule soumise à un potentiel. On a dans ce cas

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = m\vec{v}^2 - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}) \right) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) . \quad (1.40)$$

Pour une particule évoluant dans un champ électromagnétique, en utilisant l'expression du moment conjugué donnée dans le tableau 1.1,

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \left(m\vec{v}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - qV + q\vec{v} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + qV . \quad (1.41)$$

Par construction, l'hamiltonien H est une fonction de \vec{r} et de \vec{p} , il faut donc faire apparaître explicitement le moment conjugué. Il vient alors

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2 + qV , \quad (1.42)$$

ce qui fait automatiquement apparaître le terme magnétique.

1.4.2 Les équations d'Hamilton-Jacobi

Nous allons maintenant reformuler les équations du mouvement en utilisant les moments conjugués. Il s'agit donc d'exprimer les dérivées temporelles des variables dynamiques en fonction de l'hamiltonien. Sa différentielle s'écrit

$$\begin{aligned} dH &= d \left(\sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - L \right) \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \cdot d\vec{v}_i + d\vec{p}_i \cdot \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot d\vec{v}_i \right) . \end{aligned} \quad (1.43)$$

Puis, en utilisant la définition (1.29),

$$dH = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot d\vec{p}_i \right) . \quad (1.44)$$

Les termes de cette expression sont identifiables à ceux de la forme générale

$$dH = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot d\vec{p}_i . \quad (1.45)$$

En identifiant terme à terme les relations 1.44 et 1.45 on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \vec{v} . \quad (1.46)$$

Or l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit aussi

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d\vec{p}}{dt} , \quad (1.47)$$

ce qui conduit pour chaque particule aux relations suivantes, connues sous le nom d'*équations d'Hamilton-Jacobi* :

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \quad (1.48)$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} . \quad (1.49)$$

Elles sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange dans la formulation hamiltonienne dans lesquelles on a éliminé la variable \vec{v} . Elles correspondent donc aux équations du mouvement lorsqu'elles sont explicitées.

Il est aisé de voir que les équations de Hamilton-Jacobi sont équivalentes à la formulation newtonienne de la mécanique. En effet, lorsque la force \vec{F} dérive du potentiel U , l'énergie est donnée par

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) , \quad (1.50)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{2m} \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \quad (1.51)$$

et

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{dt} , \quad (1.52)$$

où l'on retrouve la forme des équations d'Hamilton-Jacobi.

1.4.3 Évolution temporelle et crochets de Poisson

L'évolution temporelle d'une variable générique décrivant le système peut être appréhendée en considérant sa relation avec le hamiltonien. Nous verrons dans les chapitres suivants que ceci joue un rôle central en physique quantique. Considérons une grandeur F qui dépend du temps, des positions et de leurs moments conjugués de Lagrange. La dérivée de F par rapport au temps s'exprime alors

$$\frac{d}{dt} F(\{\vec{r}_i; \vec{p}_i\}, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) . \quad (1.53)$$

Les équations de Hamilton-Jacobi nous permettent d'exprimer les dérivées temporelles :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \right) , \quad (1.54)$$

soit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} , \quad (1.55)$$

où l'on a défini le *crochet de poisson* :

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} . \quad (1.56)$$

Il apparaît donc que toute fonction des variables \vec{r} et \vec{p} dont le crochet de Poisson avec l'hamiltonien est nul est une constante du mouvement.

1.4.4 Le théorème de Liouville

Considérons N particules dont les positions sont repérées par $\{\vec{r}_i\}$, les moments conjugués de Lagrange étant désignés par $\{\vec{p}_i\}$. Dans l'espace des phases à $6N$ dimensions, à un instant donné, les particules sont représentées par un point. En notant $d\Omega$ le volume élémentaire autour de ce point, on a :

$$d\Omega = dr_1 \dots dr_{3N} dp_1 \dots dp_{3N} . \quad (1.57)$$

Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'un volume au sens usuel. Il s'agit d'un hypervolume dans l'espace des phases. En particulier, l'unité de Ω est $J^{3N}s^{3N}$. Si l'on caractérise l'évolution du système, chaque variable évolue au bout d'un temps dt de telle sorte que

$$r'_i = r_i + \dot{r}_i dt \quad \text{et} \quad p'_i = p_i + \dot{p}_i dt . \quad (1.58)$$

Après ce temps dt , le nouveau volume élémentaire est $d\Omega' = \det(J) d\Omega$, J étant la matrice jacobienne de la transformation. Elle s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'_1}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial r'_1}{\partial r_{3N}} & \frac{\partial r'_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial r'_1}{\partial p_{3N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r'_{3N}}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial r'_{3N}}{\partial r_{3N}} & \frac{\partial r'_{3N}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial r'_{3N}}{\partial p_{3N}} \\ \frac{\partial p'_1}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial p'_1}{\partial r_{3N}} & \frac{\partial p'_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial p'_1}{\partial p_{3N}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p'_{3N}}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial p'_{3N}}{\partial r_{3N}} & \frac{\partial p'_{3N}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial p'_{3N}}{\partial p_{3N}} \end{pmatrix} . \quad (1.59)$$

La relation d'évolution (1.58) donne les termes diagonaux :

$$1 + dt \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_i} \quad \text{et} \quad 1 + dt \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} . \quad (1.60)$$

Les termes non diagonaux sont quant à eux de la forme

$$dt \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_j} , \quad dt \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial p_j} , \quad dt \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial r_j} \quad \text{ou} \quad dt \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_j} , \quad (1.61)$$

avec $i \neq j$. En utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi (1.48) et (1.49), la matrice jacobienne peut donc se réécrire sous la forme :

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial p_1} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial r_{3N} \partial p_1} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{3N} \partial p_1} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial p_{3N}} dt & \dots & 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial r_{3N} \partial p_{3N}} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_{3N}} dt & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{3N} \partial p_{3N}} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_1} dt & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial r_{3N} \partial r_1} dt & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial r_1} dt & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_{3N}} dt & \dots & -\frac{\partial^2 H}{\partial r_{3N} \partial r_{3N}} dt & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial r_{3N}} dt & \dots & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{3N} \partial r_{3N}} dt \end{vmatrix} . \quad (1.62)$$

En définissant une matrice M par ses composantes

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial r_j} , \quad (1.63)$$

la matrice jacobienne peut s'écrire simplement

$$J = \mathbb{I} + M dt . \quad (1.64)$$

L'estimation de son déterminant peut alors se faire en développant au premier ordre en dt :

$$\det(J) = 1 + \text{Tr} [M dt - \mathbb{I}] + \mathcal{O}(dt^2) , \quad (1.65)$$

avec M la matrice définie par ses composantes.

Comme les dérivées partielles commutent, la trace de M s'annule. Le déterminant de la matrice jacobienne vaut 1 donc le volume élémentaire reste constant dans le temps,

$$\frac{d}{dt} (d\Omega) = 0 . \quad (1.66)$$

Le résultat précédent indique donc que le volume d'une région de l'espace des phases reste constant lorsqu'il est suivi dans le temps. Ceci est connu sous le nom de *théorème de Liouville*. Il signifie que l'ensemble des trajectoires d'un système classique dans l'espace des phases est semblable aux lignes de courant d'un fluide incompressible, comme illustré de façon schématique dans la figure 1.5. Il s'agit d'une propriété fondamentale des systèmes hamiltoniens, dont l'intérêt est largement mis en lumière en physique statistique.

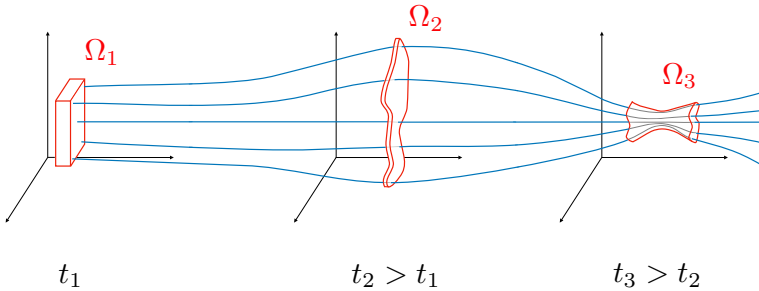


FIGURE 1.5 – Il est impossible de représenter l'espace des phases pour cinq particules car 30 dimensions seraient nécessaires. À supposer que le volume V_i représente le volume total de l'espace des phases occupé par les cinq particules au temps t_i , le théorème de Liouville assure que $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$.

1.5 Le cas des systèmes non conservatifs

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés aux formulations de Lagrange et de Hamilton des systèmes conservatifs. Ceci est fait à dessein dans la mesure où cet ouvrage traite dans sa plus grande partie de mécanique quantique, et donc de processus microscopiques élémentaires, ces derniers étant conservatifs. En effet, la dissipation, les frottements et tous les phénomènes entraînant une non conservation de l'énergie émergent d'une description macroscopique effective. L'énergie apparemment perdue dans le frottement est en fait transformée en chaleur, transmise à un système plus grand que le système étudié. Au niveau microscopique, elle correspond à des vibrations d'atomes ou de molécules, ou encore du rayonnement qui sont des phénomènes conservatifs.

Pour autant, il est instructif d'examiner comment de tels phénomènes sont décrits par le formalisme qui nous intéresse ici. Dans une approche effective, il est possible d'écrire des lagrangiens qui permettent de rendre compte de la dissipation en les rendant explicitement dépendant du temps et en abandonnant la possibilité de les écrire de façon générale comme une différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Pour illustrer cela avec un exemple simple, considérons un système de masse m soumis à une force dérivant d'un potentiel U , et dont l'évolution comporte un terme de dissipation. Dans ce cas, on peut montrer que le lagrangien suivant permet de retrouver les équations du mouvement avec dissipation :

$$L = e^{\gamma t/m} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{r}) \right) . \quad (1.67)$$

En effet, les dérivées partielles du lagrangien s'écrivent

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e^{\gamma t/m} \frac{dU}{d\vec{r}} , \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = e^{\gamma t/m} m\vec{v} . \quad (1.69)$$

On en déduit l'équation d'Euler-Lagrange du système

$$m\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \frac{dU}{d\vec{r}} = 0 , \quad (1.70)$$

ce qui est bien l'expression de la deuxième loi de Newton pour le système dissipatif considéré. Il s'agit là d'un exemple particulièrement simple et, pour rendre compte d'autres formes de dissipation, une méthode plus générale consiste à garder la forme du lagrangien $L = T - U$, et à modifier les équations d'Euler-Lagrange en leur ajoutant une fonction de dissipation \mathcal{D}

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \vec{v}} . \quad (1.71)$$

Dans le cas de l'exemple précédent, la fonction de dissipation prendrait la forme

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \gamma \vec{v}^2 . \quad (1.72)$$

1.6 Notations en coordonnées généralisées

Il est courant d'utiliser des notations un peu plus générales que \vec{r} et \vec{v} . En effet, le formalisme développé ici est valable pour toute variable dynamique, \vec{r} et \vec{v} étant des cas particuliers. Prenons par exemple un système constitué d'un ressort horizontal au bout duquel serait attachée une masse m_1 , sous laquelle serait accroché un pendule vertical portant une masse m_2 . Les variables dynamiques sont la position de l'extrémité du ressort x et sa vitesse \dot{x} , ainsi que l'angle du pendule θ et sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Afin de généraliser l'écriture des équations, il est d'usage de regrouper les variables positions sous la forme $\{q_1, \dots, q_N\}$ pour un système à N degrés de liberté. Dans l'exemple précédent, on aurait ainsi $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$. Les équations d'Euler-Lagrange lient donc les $\{q_1, \dots, q_N\}$ à leurs dérivées temporelles, $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N\}$. Les moments conjugués de Lagrange sont donnés par les variables $\{p_1, \dots, p_N\}$, chaque p_i étant défini par la relation (1.29).

Dans notre exemple de pendules couplés, $p_1 = m v_x$ est la quantité de mouvement de la première masse et $p_2 = m_2 \ell^2 \dot{\theta}$ est le moment cinétique de la seconde.

Les équations d'Hamilton-Jacobi s'écrivent avec les coordonnées généralisées de la façon suivante :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (1.73)$$

Dans la suite de l'ouvrage, on utilisera selon les cas les variables explicites ou générales.

1.7 Le champ électromagnétique

La physique classique repose sur deux piliers que sont la mécanique, qu'elle soit exprimée de façon newtonienne ou lagrangienne, et l'électromagnétisme décrit par les équations de Maxwell. L'évolution des idées en physique tend à l'unification des concepts dans des modèles de plus en plus inclusifs. L'électromagnétisme classique offre un exemple d'une telle démarche d'unification, en permettant une modélisation unique pour les phénomènes électriques, magnétiques et la lumière.

1.7.1 Équations de Maxwell et équations du mouvement

Les équations du champ sont données par les équations de Maxwell, que l'on écrit ici avec les opérateurs différentiels rotationnel et divergence,

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.74)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.75)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.76)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (1.77)$$

Les équivalents des équations du mouvement pour les champs sont donnés par les équations de d'Alembert. Dans le vide, donc en l'absence de charges ρ et de courants \vec{j} , on a

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \vec{r}^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial \vec{r}^2} = \vec{0} . \quad (1.78)$$

Ces équations décrivent la propagation des champs électrique et magnétique dans le vide par un phénomène d'auto-induction. Expérimentalement on constate que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

1.7.2 Potentiels, invariance de jauge et conservation de la charge

Nous avons déjà vu les relations (1.22) qui donnent la relation liant les champs aux potentiels :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{A} . \quad (1.79)$$

Les champs physiques mesurables sont les champs \vec{E} et \vec{B} , qui dérivent des potentiels. La relation qui les lie contient une forme de redondance, dans le sens où il n'y a pas unicité des potentiels pour des champs donnés. Plus précisément, on a le choix de modifier les potentiels par une fonction χ quelconque telle que

$$\begin{aligned} V' &= V + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} - \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} . \end{aligned} \quad (1.80)$$

Il est très facile de vérifier que les potentiels V' et A' conduisent aux mêmes champs, en raison des signes opposés dans la transformation, et du fait général que le rotationnel d'un gradient est nul. Une telle transformation s'appelle une *transformation de jauge*. La liberté portant sur le choix de la fonction χ est l'*invariance de jauge*. Le fait que le potentiel électrique n'a pas de valeur intrinsèque mais que seules les différences de potentiel sont observables est exactement l'expression de l'invariance de jauge dans le cas électrostatique. La vue d'une hirondelle posée sur un câble à haute tension semble d'ailleurs indiquer qu'elles comprennent les théories de jauge mieux que la plupart des étudiants en physique.

L'invariance par une transformation de jauge peut être illustrée par l'exemple d'une particule dans un champ électromagnétique. Dans ce cas, le lagrangien est donné par

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q V . \quad (1.81)$$

Après une transformation de jauge, le nouveau lagrangien diffère du premier par la dérivée totale de la fonction quelconque χ , comme montré ci-dessous :

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}' - q V' \quad (1.82)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \left(\vec{A} - \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \right) - q \left(V + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \quad (1.83)$$

$$= L - q \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \right) \quad (1.84)$$

$$= L - q \frac{d\chi}{dt} . \quad (1.85)$$

Le terme supplémentaire est une dérivée totale, ce qui entraîne qu'il n'influence pas les équations du mouvement. En effet, l'action devient

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L' = S - q (\chi_2 - \chi_1) . \quad (1.86)$$

Si la charge q est constante, l'action initiale S n'est modifiée que par l'ajout d'une constante. Par conséquent, si l'on regarde les variations de l'action sur différents chemins dans l'espace des phases, on a $\delta S' = \delta S$ et les équations du mouvement sont inchangées. Si la charge électrique pouvait varier, alors la nouvelle action pourrait s'écrire, après une intégration par partie

$$S' = S - [q\chi]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \chi \frac{dq}{dt} dt . \quad (1.87)$$

Pour que la transformation de jauge soit une invariance, il faut donc que la charge soit conservée au cours du temps. Nous venons de mettre en lumière un lien étroit entre la conservation de la charge et les transformations de jauge. C'est en fait comme annoncé dans le tableau 1.2, l'invariance par une transformation de jauge qui est à l'origine de la conservation de la charge électrique. Nous verrons dans la partie 6.8 que pour une particule chargée, une transformation de jauge correspond à une modification de la phase de la fonction d'onde qui la décrit.

L'invariance de jauge en électromagnétisme est fondamentale et peut être utilisée comme hypothèse de base pour en construire la théorie. Dans la physique moderne, toutes les théories décrivant les interactions fondamentales s'appuient sur un principe d'invariance de jauge, avec des transformations correspondant à des symétries plus riches que celle présentée ici. C'est sur ce principe qu'est construit en particulier le modèle standard de la physique des particules.

1.7.3 Énergie du champ électromagnétique

Pour terminer ce chapitre portant sur la vision classique de la physique, il est intéressant de voir quelle est l'énergie du champ électromagnétique dans une boîte cubique de côté L . Il ne s'agit pas uniquement d'un problème académique car c'est en appliquant ce calcul au rayonnement thermique que la mécanique quantique a été inventée. La densité d'énergie du champ électromagnétique est donnée par la relation

$$\rho_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right) . \quad (1.88)$$

Comme nous venons de le voir, nous avons une liberté de jauge pour conduire le calcul. Afin de le simplifier, plaçons-nous dans une jauge telle que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{r}^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (1.89)$$

Dans ce cas, le potentiel vecteur est transverse et obéit à l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \vec{r}^2} = \vec{0} . \quad (1.90)$$

Sur les parois de notre cube, les composantes tangentielles de \vec{E} s'annulent. Il en est donc de même pour \vec{A} . Ainsi, les nombres d'ondes sont quantifiés, de sorte que

$$k_{n_x} = n_x \frac{\pi}{L}, \quad k_{n_y} = n_y \frac{\pi}{L}, \quad k_{n_z} = n_z \frac{\pi}{L}, \quad \text{avec } n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N} . \quad (1.91)$$

C'est l'exact équivalent des conditions de quantification d'une corde de guitare. Pour le potentiel vecteur la solution s'exprime explicitement de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_x = \sum_{n_x, n_y, n_z} a_{n_x, n_y, n_z}^x \cos\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right) \\ A_y = \sum_{n_x, n_y, n_z} a_{n_x, n_y, n_z}^y \sin\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right) \\ A_z = \sum_{n_x, n_y, n_z} a_{n_x, n_y, n_z}^z \sin\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \cos\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right) \end{cases} . \quad (1.92)$$

Dans la jauge considérée les relations (1.89) sont imposées, en particulier la divergence de \vec{A} est nulle :

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \left(a_{n_x, n_y, n_z}^x \frac{\pi n_x}{L} + a_{n_x, n_y, n_z}^y \frac{\pi n_y}{L} + a_{n_x, n_y, n_z}^z \frac{\pi n_z}{L} \right) \quad (1.93)$$

$$\times \sin\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right) = 0 . \quad (1.94)$$

Pour que cette série s'annule en tout point (x, y, z) , il faut nécessairement que soit vérifiée la condition

$$a_{n_x, n_y, n_z}^x \frac{\pi n_x}{L} + a_{n_x, n_y, n_z}^y \frac{\pi n_y}{L} + a_{n_x, n_y, n_z}^z \frac{\pi n_z}{L} = 0, \quad \forall n_x, n_y, n_z . \quad (1.95)$$

Cette condition est équivalente à l'orthogonalité entre le vecteur \vec{a}_{n_x, n_y, n_z} et le vecteur \vec{k}_{n_x, n_y, n_z} défini comme

$$\vec{k}_{n_x, n_y, n_z} = \left(\frac{\pi n_x}{L}, \frac{\pi n_y}{L}, \frac{\pi n_z}{L} \right) . \quad (1.96)$$

On définit alors deux vecteurs orthogonaux à \vec{k} , correspondant aux deux polarisations du champ électrique. Cela permet d'exprimer les vecteurs $\vec{a}_{n_x, n_y, n_z}^x$ dans cette base de la façon suivante :

$$\vec{a}_{n_x, n_y, n_z}^x = q_{n_x, n_y, n_z}^1 \vec{e}_{n_x, n_y, n_z}^1 + q_{n_x, n_y, n_z}^2 \vec{e}_{n_x, n_y, n_z}^2 . \quad (1.97)$$

En utilisant ces définitions, l'équation de propagation (1.90) prend la forme

$$-\left(\sum_{n_x}\left(n_x\frac{\pi}{L}\right)^2+\sum_{n_y}\left(n_y\frac{\pi}{L}\right)^2+\sum_{n_z}\left(n_z\frac{\pi}{L}\right)^2\right)q_{n_x,n_y,n_z}^i-\frac{1}{c^2}\frac{d^2q_{n_x,n_y,n_z}^i}{dt^2}=0 \quad . \quad (1.98)$$

Cette relation est valable pour chacune des polarisations $i = 1, 2$. En notant que le premier terme correspond à la valeur de \vec{k}^2 et après une redéfinition des indices, cette relation prend la forme plus compacte

$$\frac{d^2q_m}{dt^2}+c^2\vec{k}_m^2q_m=0 \quad . \quad (1.99)$$

Chaque vecteur \vec{k}_m a pour composante des multiples entiers de π/L et pour chaque mode m , on a une équation d'oscillateur harmonique avec les pulsations propres données par

$$\omega_m=\sqrt{\vec{k}_m^2c^2}=\frac{\pi c}{L}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \quad . \quad (1.100)$$

La densité d'énergie du champ électromagnétique (1.88) peut désormais être exprimée en explicitant les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} à partir du potentiel vecteur, par exemple pour leurs composantes selon x ,

$$E_x(\vec{r},t)=-\sum_{n_x,n_y,n_z}\dot{a}_{n_x,n_y,n_z}^x\cos\left(n_x\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(n_y\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(n_z\frac{\pi z}{L}\right) \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} B_x(\vec{r},t) &= \sum_{n_x,n_y,n_z}\left(a_{n_x,n_y,n_z}^z\frac{\pi n_y}{L}-a_{n_x,n_y,n_z}^y\frac{\pi n_z}{L}\right) \\ &\times \sin\left(n_x\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(n_y\frac{\pi y}{L}\right)\cos\left(n_z\frac{\pi z}{L}\right) \quad . \end{aligned} \quad (1.102)$$

L'énergie du champ dans le volume V est évaluée en intégrant le carré de ces expressions sur des segments de 0 à L dans chaque direction. En notant que

$$\int_0^L du \sin\left(\frac{n\pi u}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi u}{L}\right)=0 \text{ si } n' \neq n \quad , \quad \text{et } =\frac{L}{2} \text{ sinon,} \quad (1.103)$$

il reste que

$$\int_V d\vec{r} \vec{E}^2=\frac{L^3}{8}\sum_{n_x,n_y,n_z}\dot{\vec{a}}_{n_x,n_y,n_z}^2=\frac{L^3}{8}\sum_m\dot{q}_m^2 \quad , \quad (1.104)$$

et

$$\int_V d\vec{r} \vec{B}^2=\frac{L^3}{8}\sum\left(\vec{a}_{n_x,n_y,n_z}\wedge\vec{k}_{n_x,n_y,n_z}\right)=\frac{L^3}{8}\sum_mq_m^2\vec{k}_m^2 \quad . \quad (1.105)$$

L'expression finale de l'énergie du champ électromagnétique U_{EM} dans le volume $V = L^3$ fait donc apparaître la somme sur tous les modes,

$$U_{EM} = \frac{\epsilon_0 V}{16} \sum_{m=0}^{+\infty} (\dot{q}_m^2 + \omega_m^2 q_m^2) . \quad (1.106)$$

En conclusion, l'énergie du champ électromagnétique s'exprime la somme des énergies d'oscillateurs harmoniques fictifs dont les amplitudes correspondent aux amplitudes des modes spatiaux du champ. Cette expression met en lumière une décomposition de l'énergie du champ selon les valeurs des pulsations des modes possibles dans la boîte. Pour déterminer l'énergie du champ dans une situation donnée, il s'agit donc de compter le nombre d'oscillateurs harmoniques équivalents et de leur attribuer une amplitude en fonction de la pulsation.

1.7.4 La catastrophe ultraviolette

Le calcul de la partie précédente montre le lien qui existe entre l'énergie du champ et les énergies des oscillateurs harmoniques. Il est d'une importance cruciale dans l'histoire des idées. Ce sont ces expressions qui ont été utilisées pour déterminer la densité d'énergie du rayonnement thermique à la fin du XIV^e siècle. À l'intérieur de notre boîte de côté L , on considère que le rayonnement est en équilibre avec les parois et que la température de ces dernières influence la densité spectrale d'énergie du champ, c'est-à-dire son énergie par unité de fréquence. Cette dernière correspond à la fonction qui donne l'énergie du champ dans une bande de fréquence entre ν et $\nu + d\nu$, dont on supposera donc qu'elle dépend de la température. Cela est motivé par l'observation empirique de la loi de Wien, qui stipule que la longueur d'onde au maximum de l'émission thermique d'un corps chauffé à la température T est proportionnelle à $1/T$. On assimile la densité spectrale d'énergie au rayonnement thermique car le rayonnement à l'intérieur de la boîte est en équilibre thermique avec les parois, on parle également de *rayonnement du corps noir*.

Pour déterminer la densité spectrale de ce rayonnement, on utilise l'expression (1.106). Il s'agit donc de déterminer combien de modes sont accessibles à une valeur donnée de la fréquence, ainsi que l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique à la température T . Un rapide détour par la thermodynamique va permettre de tirer une conclusion surprenante ! Le nombre de modes accessibles dans la boîte pour des nombres d'ondes inférieurs à k est donné par

$$N = 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{\frac{4\pi}{3} k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} , \quad (1.107)$$

où le facteur 2 rend compte des deux valeurs possibles de la polarisation, et le $1/8$ du fait que seules les valeurs positives de k doivent être comptées. En utili-

sant que $k = 2\pi\nu/c$, le nombre de modes de fréquence inférieure à ν s'exprime comme

$$N(< \nu) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{L\nu}{c} \right)^3, \quad (1.108)$$

ce qui permet de déterminer la densité de fréquences accessibles aux oscillateurs par différenciation, soit :

$$g(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1.109)$$

Soit $du(\nu, T)$ la densité volumique d'énergie entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ à la température T , on a alors

$$du(\nu, T) = \frac{\langle E_{\text{osc}}(\nu, T) \rangle}{V} g(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \langle E_{\text{osc}}(\nu, T) \rangle \nu^2 d\nu, \quad (1.110)$$

où $\langle E_{\text{osc}} \rangle$ est l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique à la température T pour la pulsation propre $\omega = 2\pi\nu$. Ainsi, l'énergie totale du champ électromagnétique dans un volume V est donnée par la relation

$$U_{\text{EM}} = \frac{8\pi V}{c^3} \int_0^{+\infty} \langle E_{\text{osc}}(\nu, T) \rangle \nu^2 d\nu. \quad (1.111)$$

Cette expression est valable de façon générale, c'est-à-dire la fois pour le calcul classique dont il est question ici, et pour ce qui sera le calcul quantique décrit dans la partie 4.2. La différence entre les deux approches réside intégralement dans la détermination de la valeur de $\langle E_{\text{osc}} \rangle$. On a supposé en toute généralité que cette valeur dépend de ν et de la température T . Pour calculer cette valeur moyenne il faut considérer un oscillateur harmonique qui pourrait recevoir de l'énergie d'un bain thermique avec lequel il est en équilibre. Ce calcul est proposé dans l'annexe A, on montre que la théorie classique conduit à la valeur

$$\langle E_{\text{osc}} \rangle = k_{\text{B}} T, \quad (1.112)$$

où k_{B} est la constante de Boltzmann. Il apparaît donc que classiquement, l'énergie des oscillateurs ne dépend pas de la fréquence, et on obtient finalement

$$du(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_{\text{B}} T \nu^2 d\nu. \quad (1.113)$$

Pour conclure, calculons l'énergie totale en intégrant sur tous les modes, donc sur toutes les fréquences ν , le résultat important est que l'énergie diverge

$$U_{\text{EM}} = \frac{8\pi V}{c^3} k_{\text{B}} T \int_0^{\Lambda} \nu^2 d\nu \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (1.114)$$

Le calcul classique prédit donc un rayonnement thermique d'énergie infinie. C'est ce que l'on appelle la *catastrophe ultraviolette*. En effet le comportement à basse fréquence du rayonnement thermique est bien reproduit par les calculs classiques, et c'est dans les hautes fréquences que le problème apparaît. La physique quantique permet de résoudre cette limitation de la théorie classique. En effet nous verrons dans la suite que l'hypothèse de Max Planck comme quoi l'énergie des oscillateurs harmoniques est quantifiée permet de régulariser l'intégrale (1.114) et d'obtenir un résultat fini. Cela sera évoqué dans la partie 4.2, puis l'hypothèse de Planck sera finalement validée dans le cadre de la physique quantique dans le chapitre 7.

À retenir de ce chapitre

- La physique dérive d'un principe de moindre action. L'action est définie comme l'intégrale le long d'une trajectoire possible $(q(t), \dot{q}(t))$ du système d'une quantité locale appelée lagrangien :

$$S = \int L(q, \dot{q}) dt .$$

Elle est minimale pour la trajectoire réelle du système.

- Les équations d'Euler-Lagrange déterminent les équations du mouvement à partir du lagrangien

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) .$$

- L'approche lagrangienne permet d'exploiter les symétries du système *via* le théorème de Noether classique : *à toute invariance du lagrangien par une classe de transformations continues correspond une quantité conservée.*
- La mécanique lagrangienne peut être reformulée en introduisant le moment conjugué de Lagrange

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} .$$

- Les équations de la mécanique, dites d'Hamilton-Jacobi, s'écrivent alors

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ,$$

où H est une fonction qui ne dépend que de q et p . Elle porte le nom d'hamiltonien du système :

$$H = \sum_{i=0}^N (p_i \cdot \dot{q}_i) - L .$$