

# Chapitre V

## Développements

### Contents

<b>V.1 Entiers <math>p</math>-adiques</b> . . . . .	<b>93</b>
V.1.1 Nombres $p$ -adiques : l'espace $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	101

### V.1 Entiers $p$ -adiques

Cette section est consacrée à la construction du complété de  $\mathbb{N}$  pour une certaine métrique, appelée  $p$ -adique. Nous détaillons cette construction pour le cas  $p = 2$ , qui aboutit à l'espace dit des entiers 2-adiques, noté  $\mathbb{Z}_2$ , dont on présente ci-dessous certaines propriétés.

#### Distance 2-adique sur $\mathbb{N}$

**Définition V.1.1.** (Valuation et valeurs absolues 2-adiques)

Tout  $a \in \mathbb{Z}$  non nul peut s'écrire de façon unique  $a'2^k$ , où  $a' \in \mathbb{Z}$  est impair. On appelle  $v_2(a) = k$  la *valuation* 2-adique de  $a$ , et l'on définit la valeur absolue 2-adique

$$|a|_2 = 2^{-v_2(a)}.$$

On pose  $v_2(0) = +\infty$ , et  $|0|_2 = 0$ .

On se place maintenant sur  $X = \mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, et l'on définit

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mapsto d(a, b) = |b - a|.$$

On peut donner une expression équivalente de cette définition, en considérant que tout entier naturel  $a$  s'écrit (écriture dyadique)

$$a = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 2^k, \quad a_k \in \{0, 1\} \quad \forall k, \quad a_k \text{ nul au delà d'un certain rang.} \quad (\text{V.1.1})$$

Deux nombres  $a$  et  $b$  peuvent ainsi être écrits en base 2 sous la forme de suites finies  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de 0 et de 1, et l'on a  $d(a, b) = 2^{-n_{ab}}$ , où

$$n_{ab} = \min\{n, a_n \neq b_n\}, \quad (\text{V.1.2})$$

pris égal à  $+\infty$  si les bits de  $a$  et  $b$  s'identifient (i.e. si  $a = b$ ). En effet, par définition de  $n_{ab}$ , on a

$$a - b = 2^{n_{ab}} c,$$

où  $c \in \mathbb{Z}$  est impair.

**Proposition V.1.2.** L'application  $d(\cdot, \cdot)$  est une distance sur  $\mathbb{N}$ , qui est *ultramétrique*, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire renforcée :

$$d(a, b) \leq \max(d(a, c), d(b, c)) \quad \forall a, b, c \in X.$$

*Démonstration.* La séparation est immédiate par hypothèse, et l'on a bien  $d(a, b) = d(b, a)$ . Pour l'inégalité triangulaire renforcée, on utilise la formulation (V.1.2). Pour tous entiers  $a, b, c$ , on considère les écriture dyadiques associées. Les  $n_{ab} - 1$  premiers bits de  $a$  et  $b$  s'identifient par définition, ainsi que les  $n_{bc} - 1$  premiers bits de  $b$  et  $c$ . Les premiers bits de  $a$  et  $c$  s'identifient donc au moins sur les  $\min(n_{ab}, n_{bc}) - 1$  indices, d'où

$$n_{ac} \geq \min(n_{ab}, n_{bc}),$$

et ainsi

$$d(a, c) = 2^{-n_{ac}} \leq \max(2^{-n_{ab}}, 2^{-n_{bc}}) = \max(d(a, b), d(b, c)),$$

qui est l'inégalité ultramétrique annoncée, qui entraîne l'inégalité triangulaire usuelle.  $\square$

Cette distance munit  $\mathbb{N}$  d'une distance aux propriétés non standard, dont certaines sont énoncée dans la suite (voir proposition V.1.6 et les suivantes).

Le diamètre de  $(\mathbb{N}, d)$  est 1, et ce diamètre est atteint en de multiples couples : tout entier impair est en particulier diamétralement opposé à 0, ainsi qu'à tout entier pair. La sphère unité (sphère de centre 0 et de rayon 1) est l'ensemble des nombres impairs. De façon générale, la sphère de centre 0 et de rayon  $2^{-k}$  est l'ensemble des nombres du type  $2^k b$ , avec  $b$  impair. Ces sphères de centre 0 et de rayons 1, 1/2, 1/4, ..., et 0, réalisent une partition de  $\mathbb{N}$  (comme un emboîtement infini de poupées russes).

La suite  $(2^n)$  tend vers 0, ainsi que toute suite telle que l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers des termes tend vers  $+\infty$ .

Nous terminons cette section par une propriété négative sur  $(\mathbb{N}, d)$ , qui justifie la démarche de complétion qui suit.

**Proposition V.1.3.** L'espace ultramétrique  $(\mathbb{N}, d)$  n'est pas complet.

*Démonstration.* Considérons la suite  $(2^n - 1)$ . Cette suite est de Cauchy pour  $d(\cdot, \cdot)$ . Si elle converge vers  $a \in \mathbb{N}$ , on a (la valeur absolue extérieure dans le premier terme non trivial de l'expression ci-dessous est la valeur absolue usuelle sur  $\mathbb{R}$ )

$$0 \leq ||2^n|_2 - |-1 - a|_2| \leq |2^n - 1 - a|_2 \longrightarrow 0,$$

d'où, comme  $|2^n|_2$  tend vers 0,  $1 + a = 0$ , équation qui n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Remarque V.1.4.** Noter que l'on aurait pu choisir comme espace de départ  $X = \mathbb{Z}$  au lieu de  $\mathbb{N}$ , auquel cas le contre-exemple ci-dessus n'en est plus un, puisque  $a + 1$  admet une solution dans  $\mathbb{Z}$ . Pour se convaincre qu'il manque plus à  $(\mathbb{N}, d)$  que les nombres négatifs pour être complet, on peut considérer par exemple la suite

$$a_N = \sum_{n=0}^{2N} a_n 2^n,$$

avec  $a_n = n + 1 \bmod 2$  (alternance périodique de 1 et de 0). On a

$$a_N = \sum_{n=0}^N 2^{2n} = \frac{1 - 4^{N+1}}{1 - 4} = \frac{4^{N+1} - 1}{3}.$$

Cette suite est de Cauchy (comme toute série partielle de ce type). S'il existe  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a_N$  converge vers  $a$ , alors on a

$$\left| \frac{4^{n+1} - 1}{3} - a \right|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \left| 4^{n+1} - 1 - 3a \right|_2,$$

d'où, comme précédemment,  $3a + 1 = 0$ , équation qui n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}$ , ni dans  $\mathbb{Z}$ .

### Complété de $\mathbb{N}$

**Définition V.1.5.** Le complété de  $\mathbb{N}$  (voir théorème IV.2.4) pour la distance définie ci-dessus est appelé ensemble des entiers 2-adiques. Il est noté  $\mathbb{Z}_2$ .

L'écriture (V.1.1), qui permet de représenter tout entier comme une suite finie de 0 ou de 1 (écriture en base 2), permet de se faire une meilleure idée de  $\mathbb{Z}_2$ , et de préciser à quoi correspondent certains de ses éléments. Considérons une suite  $(a^k)$  dans  $\mathbb{N}$ , de Cauchy pour  $d(\cdot, \cdot)$ . On peut écrire les termes

$$a^k = (a_0^k, a_1^k, a_2^k, \dots)$$

Si une suite est de Cauchy alors, comme dans le cas des réels en écriture décimale (voir la démonstration de la proposition IV.1.25), chacune des suites  $(a_n^k)_k$  finit par se stabiliser à une valeur  $a_n$ . On peut donc représenter la limite par une suite (infinie) de 0 et de 1. On écrira le nombre correspondant somme d'une série, ou en écriture flottante, avec la convention de placer les bits *avant* la virgule :

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 2^n, \quad \text{ou} \quad a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, 0.$$

Considérons par exemple le nombre  $\dots 111, 0$ . On a

$$\dots 111, 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N 2^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 2^{N+1}}{1 - 2} \right) = -1 - \lim_{N \rightarrow \infty} 2^{N+1}$$

qui tend donc selon les règles de calcul usuel vers un nombre qui n'est pas dans l'espace de départ, et qu'il est tentant de noter  $-1$ .

Dans le cas des nombres réels en écriture décimale, on sait que la périodicité de l'écriture (au delà d'un certain rang) est équivalente au caractère rationnel du nombre en question. On peut se demander ce qui se passe ici pour des nombres dont l'écriture 2-adique est périodique, ou plus généralement périodique au-delà d'un certain rang.

La métrique induite sur  $\mathbb{Z}_2$  est définie essentiellement de la même manière que sur  $\mathbb{N}$ . Pour deux éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{Z}_2$ , si l'on note  $n_{ab}$  le plus petit indice pour lequel les bits diffèrent ( $n_{ab} = +\infty$  si  $a = b$ ), la distance entre  $a$  et  $b$  est simplement définie par  $d(a, b) = 2^{-n_{ab}}$ .

La distance métrique  $\mathbb{Z}_2$  définie ci-dessus hérite des propriétés ultramétriques de la distance de départ sur  $\mathbb{N}$ . L'espace  $\mathbb{Z}_2$  possède donc des propriétés propres aux espaces ultramétrique, telles que celles énoncées ci-après.

**Proposition V.1.6.** Soit  $(X, d)$  un espace ultramétrique. Tout point d'une boule (ouvert ou fermée) est centre de cette boule.

*Démonstration.* Soient  $x \in X$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ . On considère  $x' \in \overline{B}(x, r)$ , i.e. tel que  $d(x, x') \leq r$ . Pour tout  $y \in \overline{B}(x, r)$ , on a

$$d(y, x') \leq \max(d(y, x), d(x, x')) \leq r, \quad \text{d'où } y \in B(x', r).$$

On montre de la même manière que tout  $y \in \overline{B}(x', r)$  est à distance de  $x$  inférieure ou égale à  $r$ , d'où l'identité de  $\overline{B}(x', r)$ . La démonstration est identique pour une boule ouverte.  $\square$

**Corollaire V.1.7.** Soit  $(X, d)$  un espace ultramétrique. L'intersection entre deux boules est soit vide soit l'une des deux boules. Si les rayons sont les mêmes, deux boules sont donc soit disjointes, soit identiques.

**Proposition V.1.8.** Soit  $(X, d)$  un espace ultramétrique. Toute boule ouverte est un fermé.

*Démonstration.* Si  $r = 0$  (alors  $B(x, r) = \emptyset$ ) ou si  $B(x, r) = X$ , c'est immédiat. Sinon, pour tout  $y \in B(x, r)^c$ ,  $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$  d'après la proposition précédente, d'où  $B(y, x) \subset B(x, r)^c$ . Le complémentaire de  $B(x, r)$  est donc un ouvert, la boule ouverte elle-même est donc un fermé.  $\square$

**Proposition V.1.9.** Un espace ultramétrique est totalement discontinu, au sens où chaque point s'identifie à sa propre composante connexe (définition IV.2.15).

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y \neq x$  dans  $X$ , et  $0 < r < d(x, y)$ . La boule ouverte  $B(x, r)$  et son complémentaire (qui est aussi un ouvert) réalisent une partition de  $X$  en 2 ouverts,  $x$  et  $y$  ne peuvent donc appartenir à la même composante connexe.  $\square$

**Proposition V.1.10.** Soit  $(X, d)$  un espace ultramétrique. Tout triangle est isocèle (avec deux grands côtés et un petit côté).

**Proposition V.1.11.** On considère trois points dans  $X$ , et l'on note  $\ell_1, \ell_2$ , et  $\ell_3$  les longueurs des côtés. On a  $\ell_1 \leq \max(\ell_2, \ell_3)$ , et les mêmes propriétés obtenues en permutant les indices.

Si les longueurs sont distinctes deux à deux, on a par exemple  $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$ , qui invalide  $\ell_3 \leq \max(\ell_1, \ell_2)$ . Deux des longueurs au moins sont donc identiques, par exemple  $\ell_1 = \ell_2$ . Le troisième côté est de longueur  $\ell_3 \leq \max(\ell_1, \ell_2) = \ell_1$ .

**Proposition V.1.12.** Soit  $(X, d)$  un espace ultramétrique. Une suite  $(x_n)$  est de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

**Addition sur  $\mathbb{Z}_2$ .** On peut définir une addition sur  $\mathbb{Z}_2$ , qui est “l’addition de l’écolier” en partant de la droite dans l’écriture 2-adique ci-dessus. On considère deux entiers dyadiques  $a$  et  $b$ , et l’on cherche à construire la somme  $c = a + b$ , qui étende la somme sur  $\mathbb{N}$ . Si  $a_0 + b_0 = 0$  ou  $1$ , on affecte à  $c_0$  cette valeur, et on passe au rang suivant. Si la somme vaut  $2$  on pose  $c_0 = 0$ , et l’on garde une retenue de  $1$  pour le rang suivant. Au rang  $1$  on se retrouve dans la même situation, avec éventuellement une retenue de  $1$  en plus. La somme peut donc maintenant valoir  $3$ . Si c’est le cas on pose  $c_1 = 1$  et on garde  $1$  de retenue pour le rang suivant, etc ...

De façon assez frappante, le fait de prendre le complété de  $\mathbb{N}$  pour la distance choisie, qui est une démarche purement topologique, conduit à un espace qui possède une structure algébrique que l’espace de départ n’avait pas.

**Proposition V.1.13.** L’espace  $\mathbb{Z}_2$  muni de l’addition définie ci-dessus est un groupe additif.

**Proposition V.1.14.** L’espace  $\mathbb{Z}_2$  n’est pas dénombrable.

*Démonstration.* Nous avons vu que tout élément de  $\mathbb{Z}_2$  peut se représenter de façon unique par une suite infinie de  $0$  ou de  $1$ . On peut donc identifier (d’un point de vue ensembliste)  $\mathbb{Z}_2$  à l’ensemble des parties de  $\mathbb{N}$ , en considérant la suite  $(a_n)$  comme la fonction indicatrice d’une partie de  $\mathbb{N}$ . L’ensemble  $\mathbb{Z}_2$  n’est donc pas dénombrable d’après le théorème IV.1.9.  $\square$

**Définition V.1.15.** (Ordre lexicographique)

On peut définir sur  $\mathbb{Z}_2$  un ordre *lexicographique*, en considérant, pour deux éléments différents  $\dots a_2 a_1 a_0, 0$  et  $\dots b_2 b_1 b_0, 0$  le plus petit indice  $n$  pour lequel les deux diffèrent, et poser  $a < b$  si  $a_n < b_n$ .

Noter que l’ordre défini ci-dessus est très différent de l’ordre usuel. Comme  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ , on peut comparer de ce point de vue deux éléments de  $\mathbb{Z}$ , on retrouve certaines propriétés usuelles du type  $1 < 3$ ,  $1 < 5$ , mais aussi des choses plus déroutantes, comme  $5 < 3$ , et plus globalement

$$0 \leq a \leq -1 \quad \forall a \in \mathbb{Z},$$

ce qui permet d’écrire

$$\mathbb{Z} = [0, -1].$$

**Proposition V.1.16.** L’espace  $\mathbb{Z}_2$  est compact.

*Démonstration.* Considérons une suite  $(a^k)$  dans  $\mathbb{Z}_2$ . On considère la suite  $(a_0^k)_k$  de  $0$  et de  $1$ . Cette suite visite une infinité de fois  $0$  ou  $1$  (ou les deux). On prend  $a_0$  égal à une valeur

visitée une infinité de fois, et l'on extrait la sous-suite  $(a^{\varphi_0(k)})$  correspondante. On procède de même avec  $(a_1^{\varphi_0(k)})$ , pour extraire une suite  $(a^{\varphi_0 \circ \varphi_1(k)})$ . On extrait ainsi des sous-suites emboîtées les unes dans les autres. On définit maintenant (selon le processus d'extraction diagonale dit de Cantor)

$$\varphi(k) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(k).$$

La suite ainsi construite est telle que  $a_n^{\varphi(k)}$  se stabilise en  $a_n \in \{0, 1\}$  au-delà d'un certain rang, on a donc convergence de cette suite extraite vers  $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, 0$ .  $\square$

### Système projectif, limite projective (●●●)

Un *système projectif* désigne une famille  $(X_n)$  d'ensemble muni d'une famille d'applications  $(f_n^m)_{n \leq m}$ , avec  $f_n^m : E_m \rightarrow E_n$ , qui vérifient les propriétés suivantes

- (1) L'application  $f_n^n$  est l'identité sur  $X_n$
- (2) Pour tous  $n \leq m \leq q$ , on a  $f_n^m \circ f_m^q = f_n^q$ .

On appelle limite projective l'ensemble des éléments du produit infini  $E_0 \times E_1 \times \dots$  dont les projections sont compatibles avec les  $f_i^j$  au sens suivant :

$$\lim_{\leftarrow} (X_n, (f_i^j)) = \{ x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in X_0 \times X_1 \times \dots, f_n^m(x_m) = x_n \quad \forall i \leq j \}.$$

Pour tous  $n \leq m$ , on peut définir canoniquement<sup>1</sup> une surjection de  $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ . On note  $f_n^m$  cette surjection. On peut identifier ainsi  $\mathbb{Z}_2$  à la limite projective du système  $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, (f_n^m))$ .

### Représentation des arbres dyadiques, application au poumon humain

Le poumon humain se présente comme un arbre constitués de bronches (appelée bronchioles pour les plus petites), structurée de façon dyadique : la trachée se divise en deux, chacune des branches filles se divise elle-même en deux, etc... Pour l'arbre respiratoire d'un adulte, le nombre de bifurcations est de l'ordre de 23, soit autour de  $2^{23} \approx 8 \times 10^8$  bronchioles terminales, dont on appelle *feuilles* les extrémités libres. Pour diverses raison (construction d'un modèle homogénéisé du parenchyme, construction d'un opérateur de la ventilation, qui à un champ de pression aux feuilles associe un champ de flux, etc ...), il peut être intéressant *d'extrapoler* cet arbre vers un nombre de générations infini. La notion de feuille est alors remplacée par celle de *bout*, on parle de *l'espace des bouts*, chacun de ces bouts correspondant à un chemin centrifuge s'éloignant de la racine (entrée de la trachée). Il est naturel de coder chacun de ces chemins par une suite infinie de 0 et de 1, par exemple selon la convention par exemple (on se figurera une représentation avec la racine en haut, comme sur la figure V.1.1) : partant de la racine, si l'on part à gauche, on prend  $a_0 = 0$ , et  $a_0 = 1$  si c'est à droite. On encode le "choix" à chaque étape par un nombre entre 0 et 1.

---

1. On peut considérer la relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$  définie par  $z \mathcal{R} z' \iff z \equiv z' [2^n]$ . L'espace quotient s'identifie à  $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ .

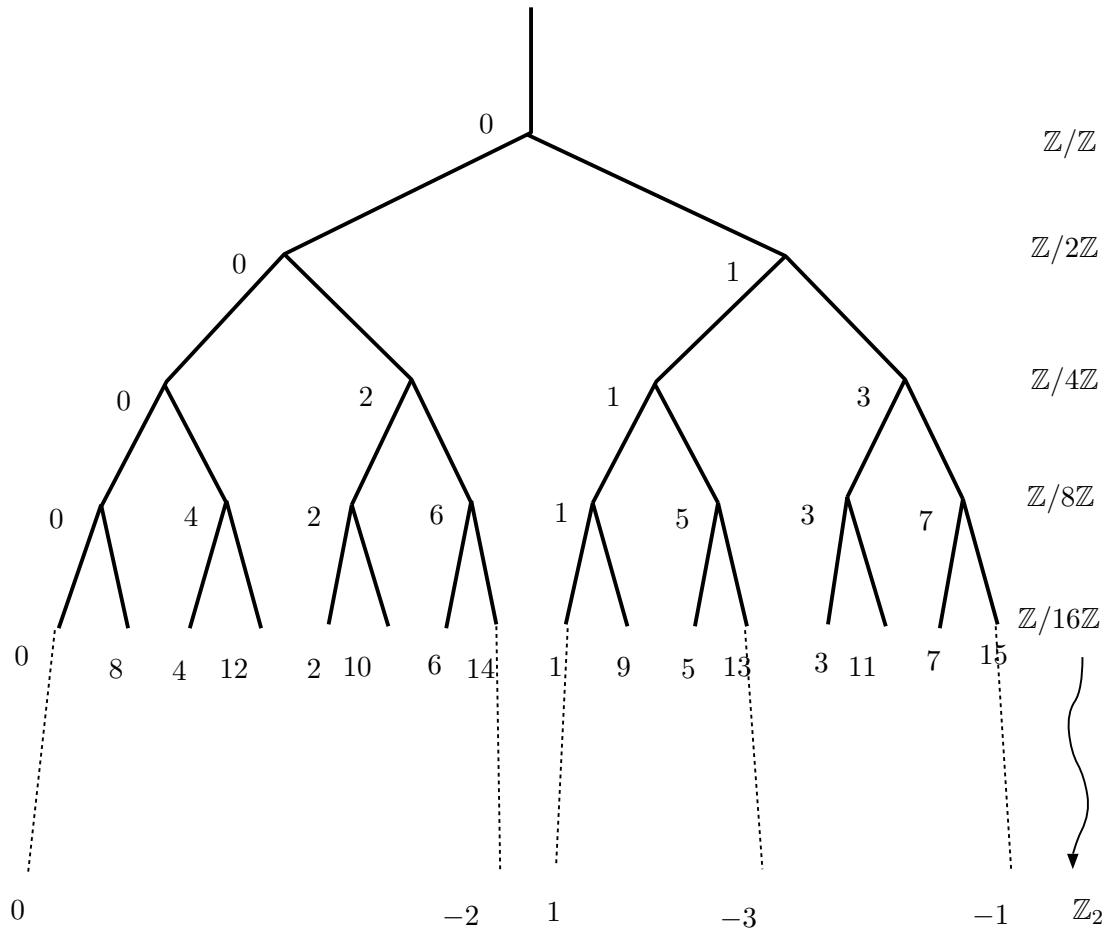


FIGURE V.1.1 – Numérotation 2-adique

La figure V.1.1 représente la numérotation obtenue à chaque génération, où l'on a représenté chaque mot  $(a_N \dots, a_0)$  par sa représentation entière  $a = \sum a_n$ .

On notera que cette numérotation ne correspond pas du tout à l'énumération linéaire  $0, 1, \dots$ . Cette numérotation présente un énorme avantage par rapport à l'énumération linéaire, en cela qu'elle respecte la structure de l'arbre. Plus précisément, considérons deux feuilles de la 4-ième génération, d'indices  $a$  et  $b$ . Leur proximité *vis à vis de l'arbre*, qui correspondrait à un degré de parenté s'il s'agissait d'un arbre généalogique, ne dépend que de  $|a - b|$ , contrairement à ce qui se passerait pour la numérotation linéaire, comme on peut s'en convaincre facilement. Par exemple deux feuilles dont la différence d'indices est impaire appartiennent nécessairement à des lobes différents. Si la différence est divisible par 2, et pas par 4, les deux points appartiennent nécessairement tous deux à l'un des 4 sous-arbres issus de la génération 2, etc...

Plus précisément, si l'on considère l'arbre à 4 générations représenté sur la figure, qui présente  $2^4 = 16$  feuilles, on peut identifier la métrique dyadique sur l'ensemble des feuilles (identifié à  $[0, 15]$  ou  $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$ ) avec la métrique du plus court chemin au travers de l'arbre considéré comme un graphe pondéré. Pour retrouver exactement la distance 2-adique, on peut vérifier qu'il suffit de considérer que les arêtes des deux dernières générations (3 et

4) ont pour longueur  $1/16$ , longueur  $1/8$  pour la génération 2 (4 branches), et  $1/4$  pour la génération 1.

Si l'on considère maintenant le poumon infini, on voit apparaître des indices déjà identifiés pour certains bouts. Par exemple le bout le plus à gauche est clairement 0. Pour le bout correspondant au chemin le plus à droite, on retrouve notre  $\dots 1111, 0 = -1$ . Noter que  $-1$  est le plus "grand" élément de  $\mathbb{Z}_2$  pour la relation d'ordre lexicographique (voir définition V.1.15), et 0 le plus petit. De façon générale, le présentation de la figure V.1.1 correspond à cet ordre (croissant de la gauche vers la droite).

On notera que, pour tout sous-arbre infini, le bout le plus à gauche est un entier positif, et le bout le plus à droite un entier négatif.

### Nombres entiers $p$ -adiques

On peut généraliser cette approche en remplaçant 2 par un nombre  $p$  premier quelconque : tout  $a \in \mathbb{Z}$  non nul peut s'écrire de façon unique  $a'p^k$ , où  $a' \in \mathbb{Z}$  n'est pas divisible par  $p$ . On appelle  $v_p(a) = k$  la *valuation*  $p$ -adique de  $a$ , et l'on définit la valeur absolue  $p$ -adique

$$|a|_p = p^{-v_p(a)}.$$

On pose  $v_p(0) = +\infty$ , et  $|0|_p = 0$ . Cette valeur absolue vérifie  $|ab|_p = |a|_p |b|_p$ .

On peut définir de la même manière que précédemment une distance  $d_p$  sur  $\mathbb{N}$ , et considérer le complété de  $\mathbb{N}$  pour cette distance, que l'on note  $\mathbb{Z}_p$ .

L'identification des éléments de  $\mathbb{Z}_p$  peut se faire à partir de la décomposition d'un entier en base  $p$  :

$$a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \forall n, \quad a_n = 0 \text{ au-delà d'un certain rang.}$$

Un élément de  $\mathbb{Z}_p$  peut ainsi s'écrire comme une série infinie du type de celle ci-dessus, ou simplement codée par ses coefficients (on garde la convention d'une infinité de chiffres *avant* la virgule)

$$a = \dots a_2 a_1 a_0, 0.$$

Noter que cette complétion et l'identification à des nombres écrits en base  $p$  avec une infinité de chiffres avant la virgule ne nécessite pas que  $p$  soit premier. Si  $p$  n'est pas premier, on perd la propriété  $|ab|_p = |a|_p |b|_p$ , par exemple  $|2 \times 5|_{10} = 10^{-1}$  alors que  $|2|_{10} = |5|_{10} = 1$ . Mais tant que l'on s'en tient à des aspects métriques, et que l'on se contente d'additionner les nombres entre eux, la construction est valide. On peut en particulier construire l'objet  $\mathbb{Z}_{10}$  des entiers 10-adiques, qui présente une forte analogie apparente (le codage semble le même, à symétrie près) avec l'ensemble des réels de l'intervalle  $[0, 1]$ , mais qui présente des propriétés très différentes. Pour l'anecdote, si l'on considère la relation d'ordre lexicographique sur  $\mathbb{Z}_{10}$ , son plus grand nombre est (on notera que l'infinité de 9 avant la virgule n'est pas ici pathologique, le codage de  $\mathbb{Z}_{10}$  est tout à fait injectif, contrairement au codage décimal des réels)

$$\dots 9999, 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 9 \times 10^n = 9 \frac{1}{1-10} = -1,$$



de telle sorte que l'on peut écrire  $\mathbb{Z}_{10} = [0, -1]$  (*sic*).

On se restreint néanmoins en général aux nombres premiers, qui permettent des développements très féconds dans un cadre algébrique. Si l'on se restreint ainsi aux nombres premiers, on a une formule à la fois spectaculaire et très simple à établir, qui relie toutes les valeurs absolues  $p$ -adiques entre elles. Plus précisément, si l'on note  $|\cdot|_\infty$  la valeur absolue usuelle sur  $\mathbb{Z}$ , on a

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \quad |a|_\infty \prod_{p \text{ premier}} |a|_p = 1.$$

On notera que pour  $p$  assez grand (notamment plus grand que  $|a|$ ), on a  $|a|_p = 1$ , le produit ci-dessus peut donc en fait se ramener à un produit fini, dont la définition ne nécessite donc pas d'arguments topologiques.

### V.1.1 Nombres $p$ -adiques : l'espace $\mathbb{Q}_p$

On peut définir sur  $\mathbb{Q}$  une valeur absolue  $p$ -adique en écrivant simplement (on vérifie immédiatement que la valeur obtenue ne dépend pas de l'écriture du rationnel)

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b), \quad \left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{-v_p(a/b)}.$$

On peut ainsi définir une distance sur  $\mathbb{Q}$  par  $d_p(x, y) = |x - y|_p$ . L'espace métrique ainsi défini est de diamètre infini : on a par exemple

$$\left|\frac{1}{p^n}\right|_p = p^n \longrightarrow +\infty.$$

