le magazine

TOUR DE FRANCE 7e étape

Au sommet avant les Alpes

Au terme d'une étape historique remportée par Matteo, Van der Poel et Van Aert ont creusé des écarts sur Pogacar, Kuphilippe et Roglic avant d'aborder les Alpes.

L'ÉQUIPE

2,10 € samedi 3 juillet 2021 74e année N° 24 431 France métropolitaine @lequipe

FOOTBALL Ligue 1

Angers et Bordeaux rétrogradés ?

Casse la demarche comme Palumtiti

COUPE DU MONDE 2018 demi-finales

FRANCE 1-0 BELGIQUE

Grace a Palumtiti, jeune mineur va enfin pouvoir viser la mediocrité ou ce que certains appellent le minimum syndical ou encore le 6/20, seulement quelques mois apres avoir integré son ecole prestigieuse plein d'ambition

BUT DE SAMUEL PALUMTITI

Coucou mon p'tit pote,

Je sais pas trop à quoi est censée servir cette préface à part te donner une ultime excuse pour repousser le début de tes révisions pour la pale de demain. Après qui suis-je pour te donner des leçons vu que si tu lis ça c'est qu'on a déjà bien entamé l'année 2022 et que mon palum a donc officiellement 4 mois de retard….
Passons aux choses sérieuses.
Voici ce que tu pourras trouver dans ce palum:

- Des pales qu'on a faites l'année dernière askip
- Des sujets en doublon parce que j'avais la flemme de refaire mon pdf quand je m'en suis rendue compte (après vu ton nombre d'absence en amphi je pense qu'une deuxième lecture ne peut faire que du bien)
- Une super table des matières
- Des pages numérotées de façon un peu aléatoire selon mon mood

Voici ce que tu ne trouveras pas dans ce palum:

- La pale de janco (deso Chloé elle n'existe toujours pas)
- Le corrigé de Kletz parce lui même n'est plus trop sur des réponses mais demandez à Jean-Edouard je crois qu'il a reussi à avoir la moyenne après 6 mois de son mandat de trésorier

Je vais maintenant passer aux remerciements.
J'aimerais dans un premier temps me remercier moi même pour mon assiduité dans cette tâche… c'était vraiment le VP le plus prenant. J'aimerais ensuite remercier tous les profs qui m'ont envoyé leurs corrigés et plus particulièrement celle qui a pris 3 mois et 4 relances pour au final rien m'envoyer du tout. Je tiens à remercier Robin Willoquet qui m'a prêté quelques pâles (promis je vais te les rendre un jour). Et finalement je tiens à remercier IlovePDF pour la mise en page et ma mère pour les 12 jeux de mots qui n'ont malheureusement pas survécus à la concurrence.

Bisous,

Salome Gobbi, VP Palum Minao

Table des matières

Calcul Différential, Intégral et Stochastique……1

Physique Quantique Énoncé ……...14

Physique Quantique Corrigé ……17

Math 2 (Oral) ……..25

Physique Statistique Enoncé ……...27

Physique Statistique Corrigé ……...30

MMC Enoncé …….38

MMC Corrigé ……..50

Optimisation Énoncé …….75

Optimisation Corrigé …….78

Data Sujet + Corrigé …….84

Traitement du Signal Énoncé ……..90

Traitement du Signal Corrigé ……...93

Génie Energétique Énoncé ……104

Génie Energétique Corrigé ……106

Comptabilité Generale Sujet……...111

Calcul Différential, Intégral et Stochastique
MINES ParisTech/UE 11 – Examen

STEP, MINES ParisTech*

3 novembre 2020, 9h–12h

Coques fines

Dans ce problème, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et d la distance associée.

$$\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } d(x, y) := \|y - x\|.$$

Le symbole U désigne le sous-ensemble du plan constitué des points d'abscisse et d'ordonnée strictement positives et C l'arc de cercle constitué des points de U à distance 1 de l'origine.

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\} \text{ et } C = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}.$$

On définit la projection p sur l'arc de cercle C comme la fonction :

$$p : x \in U \mapsto \frac{x}{\|x\|} \in C.$$

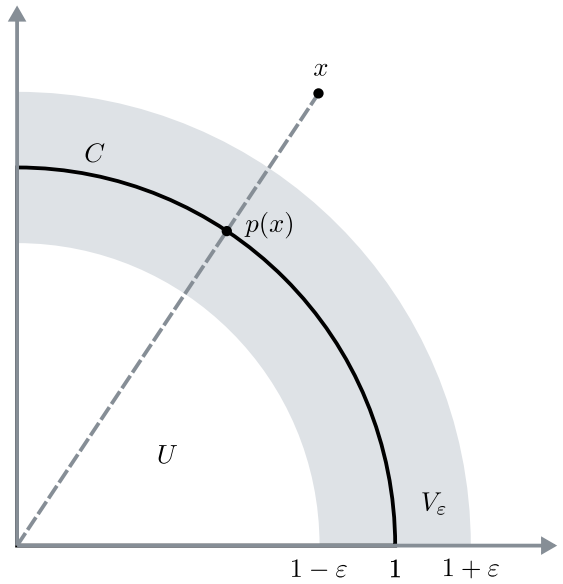
On rappelle que cette projection $p(x)$ minimise la distance entre $x \in U$ et C :

$$d(x, p(x)) = \min_{y \in C} d(x, y) =: d(x, C).$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on définit la coque de C d'épaisseur 2ε par

$$V_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x, C) < \varepsilon\}.$$

*Ce document est un des produits du projet `boisgera/CDIS`, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions" 4.0 internationale.



Topologie

Question 0 Montrer que l'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$

$$V_\varepsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1-\varepsilon < \|x\| < 1+\varepsilon\},$$

et en déduire que les ensembles V_ε sont également des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Calcul Différentiel

Question 1 Montrer que les dérivées partielles de la fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ existent et en déduire la valeur de

$$n(x) := \nabla\|x\|.$$

La fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est-elle continûment différentiable ?

Question 2 Montrer l'existence et calculer la valeur de $\nabla(1/\|x\|)$ quand $x \in U$.

Question 3 Montrer que si deux fonctions $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}^2$ sont différentiables, alors le produit fg également. Calculer la jacobienne $J_{fg}(x)$ en fonction de $\nabla f(x)$ et $J_g(x)$.

Question 4 Montrer que p est différentiable et que

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x) \quad \text{où} \quad P(x) = I - n(x) \cdot n(x)^\top.$$

(I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^2$.)

Question 5 On pose

$$h(x) = p(x) + \varepsilon(x - p(x)).$$

Montrer que $h : V_1 \to V_\varepsilon$ est une bijection et déterminer $h^{-1}(y)$ quand $y \in V_\varepsilon$.

Question 6 Calculer $J_h(x)$ et montrer que h est un C^1-difféomorphisme.

Question 7 Etablir que

$$\det J_h(x) = \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} \right).$$

Calcul Intégral

Question 8 On note $S := [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$. Que vaut l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\, dx$$

et pourquoi ? (On ne demande pas de justifier l'existence de l'intégrale).

Question 9 Calculer $(-t(\ln t - 1))'$ pour $t > 0$ et en déduire que

$$\int_\varepsilon^2 (-\ln t)\, dt \to -2(\ln 2 - 1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.$$

En déduire que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0, 2]$ et nulle sinon est intégrable sur $[0, 2]$. Est-ce que l'on pourrait se passer de la mention "et nulle sinon" pour répondre à cette dernière question ?

Question 10 Montrer l'existence et calculer

$$\int_0^2 \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

quand $x_2 \in]0, 2]$. Indication : $\partial_{x_1} \left(\ln \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (la preuve de cette égalité n'est pas exigée).

Question 11 Montrer que la frontière ∂S de l'ensemble S dans $\mathbb{R}^2$ est négligeable. (On donnera ∂S sans justification.) En déduire que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left| \begin{array}{rl} 1/\|x\| & \text{si } x \in S \text{ et } x \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est mesurable. Puis, déduire des questions précédentes son intégrabilité.

Question 12 Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que $f \circ p : U \to \mathbb{R}$ soit mesurable (c'est-à-dire que son prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2$ est mesurable). Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy$$

est bien définie.

Question 13 Montrer que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy = \frac{1}{2} \int_{V_1} f(p(x)) \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \right) dx.$$

Question 14 Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in]0,1]}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy.$$

Probabilités — Loi de Maxwell

On désire déterminer la distribution des vitesses des molécules d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre (loi de Maxwell (1859)).

On représente la vitesse d'une molécule d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre dans un repère orthonormal par un vecteur aléatoire $V = (V_1, V_2, V_3)$. Le choix du repère étant arbitraire, il est naturel de supposer que la loi de V est invariante par rotation (autour de l'origine) et que les composantes de V sont indépendantes.

Partie 1

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de densité $f_{(X,Y,Z)}$. Ce vecteur aléatoire est supposé invariant par rotation : il existe une fonction $\phi : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ (strictement positive) telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Question 1 On suppose de plus les variables aléatoires X, Y et Z indépendantes. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ qui soit une densité telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f(x)f(y)f(z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer finalement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 2 On suppose de plus que les densités marginales de X, Y et Z ainsi que la fonction ϕ sont continûment différentiables (c'est-à-dire de classe C^1). Montrer que la densité de chacune des composantes s'écrit sous la forme $f(x) = ae^{cx^2/2}$, avec a et c deux constantes réelles.

Question 3 En déduire que le vecteur (X, Y, Z) suit une loi gaussienne d'espérance l'origine dont on précisera la matrice de covariance en fonction de la constante $\sigma = 1/\sqrt{|c|}$.

Partie 2

On suppose que le vecteur aléatoire $(X, Y, Z) = V$ vérifie les hypothèses des questions précédentes.

Question 4 Calculer l'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz, c'est-à-dire l'espérance

$$E_c := \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}m\|V\|^2\right)$$

où m est la masse d'un atome du gaz. L'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz de masse m étant égale à $\frac{3}{2}kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température du gaz, en déduire la valeur de σ^2 en fonction de k, T et m.

Question 5 On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, alors la loi de $X + Y$ est la loi $\Gamma(a + b, \lambda)$. On rappelle également que la densité g de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ vérifie

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{]0,+\infty[}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où Γ est la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \text{ pour } a \in]0, +\infty[.$$

On remarquera que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Calculer la loi de V_1^2. En déduire la loi de $\|V\|^2$ puis la densité de $\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$. La probabilité associée est appelée loi de Maxwell.

Solutions

Topologie

Question 0 Pour tout $x = (x_1, x_2) \in U$, $d(x, U^c) = \min(x_1, x_2) > 0$; l'ensemble U est donc ouvert.

Par définition, un point x appartient à V_ε si et seulement s'il appartient à U et vérifie $d(x, C) < \varepsilon$. Or,

$$d(x, C) = d(x, p(x)) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} - 1 \right| \|x\| = |1 - \|x\||.$$

L'inégalité $d(x, C) < \varepsilon$ est donc équivalente à $1 - \|x\| < \varepsilon$ et $\|x\| - 1 < \varepsilon$, soit $1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon$. On a donc bien

$$V_\varepsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon\},$$

Notons $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|x\| < 1 + \varepsilon\}$. L'ensemble U_ε est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de l'intervalle ouvert $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ par l'application continue $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|$. L'ensemble $V_\varepsilon = U \cap U_\varepsilon$ est donc ouvert : en effet pour tout $x \in V_\varepsilon$,

$$d(x, V_\varepsilon^c) = d(x, (U \cap U_\varepsilon)^c) = d(x, U^c \cup U_\varepsilon^c) = \min(d(x, U^c), d(x, U_\varepsilon^c)) > 0.$$

Calcul Différentiel

Question 1 Comme pour tout $x = (x_1, x_2) \in U$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, l'application partielle $x_1 \in]0, +\infty[\mapsto \|x\|$ est dérivable par rapport à x_1 par dérivation en chaîne en tout point et l'on a

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \times 2x_1 = \frac{x_1}{\|x\|}.$$

Par un argument similaire, la dérivée par rapport à x_2 existe également et vaut

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\|x\|}.$$

On a donc

$$n(x) := \nabla \|x\| = \left[\frac{\partial \|x\|}{\partial x_1}, \frac{\partial \|x\|}{\partial x_2} \right]^\top = \left[\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|} \right]^\top = p(x).$$

La fonction p est bien continue ; la fonction $x \in U \mapsto \|x\|$ est donc continûment différentiable.

Question 2 La fonction $x \in U \mapsto 1/\|x\|$ est différentiable comme composée des fonctions différentiables $f : x \in U \mapsto \|x\| \in]0, +\infty[$, dont la matrice jacobienne en x est

$$J_f(x) = (\nabla \|x\|)^\top = p(x)^\top \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

et $g : y \in]0, +\infty[\mapsto 1/y$, dont la matrice jacobienne en y est

$$J_g(y) = g'(y) = -1/y^2 \in \mathbb{R}^{1\times 1}.$$

La règle de différentiation en chaîne fournit

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) = \frac{-1}{\|x\|^2} p(x)^\top = \left(-\frac{x}{\|x\|^3}\right)^\top.$$

On en déduit que le gradient de $g \circ f$ existe en tout point et satisfait

$$\nabla \left(\frac{1}{\|x\|}\right) = J_{g\circ f}(x)^\top = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

Question 3 La fonction fg est continûment différentiable car ses composantes $(fg)_1 = fg_1$ et $(fg)_2 = fg_2$ le sont par la règle du produit et le lien entre différentiabilité d'une fonction et de ses composantes. On a en outre

$$\partial_j (fg)_i = \partial_j (fg_i) = f\partial_j g_i + g_i \partial_j f$$

ce qui fournit

$$J_{fg} = fJ_g + g \cdot \nabla f^\top.$$

Question 4 En appliquant le résultat de la question précédente avec $f(x) = 1/\|x\|$ et $g(x) = x$, qui en vérifient bien les hypothèses, on obtient :

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} I + x \cdot \left(\nabla \frac{1}{\|x\|}\right)^\top = \frac{1}{\|x\|}\left(I - \frac{x}{\|x\|}\frac{x}{\|x\|}^\top\right)$$

donc on a bien

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x).$$

Question 5 Soit $x \in V_1$ (c'est-à-dire $x \in U$ et $0 < \|x\| < 2$) et $y := h(x)$. En utilisant les définitions de $h(x)$ et de $p(x)$ on constate que

$$y = \left(\frac{1-\varepsilon}{\|x\|} + \varepsilon\right) x \in U$$

et donc que $p(y) = p(x)$ puisque x et y sont colinéaires. Par conséquent, y vérifie

$$\|y - p(y)\| = \|y - p(x)\| = |\varepsilon| \|x - p(x)\| < \varepsilon$$

et appartient donc à V_ε. Réciproquement, si $y \in V_\varepsilon$, alors $y = p(x) + \varepsilon(x - p(x))$ fournit $y = p(y) + \varepsilon(x - p(y))$ et donc

$$x = p(y) + \frac{1}{\varepsilon}(y - p(y))$$

donc on vérifie qu'il appartient bien à V_1 par la même méthode.

Question 6 La fonction h est bijective ; de plus par linéarité de la différentielle

$$dh(x) = d(p(x) + \varepsilon(x - p(x))) = \varepsilon I + (1-\varepsilon)dp(x) = \varepsilon I + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}P(x).$$

De façon analogue, on montre que dh^{-1} existe et que

$$dh^{-1}(y) = \varepsilon^{-1} I + \frac{1-\varepsilon^{-1}}{\|y\|}P(y).$$

Ces deux matrices dépendent continûment de leur arguments respectifs. La fonction h est donc un C^1-difféomorphisme.

Question 7 Pour tout $x \in U$, le vecteur $n(x)$ étant unitaire, il existe une rotation $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $R \cdot n(x) = e_1 := (1,0)$. On a $R \cdot R^\top = I$ et donc $\det R \times \det R^\top = 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\det dh(x) &= \det R \times \det dh(x) \times \det R^\top \\
&= \det\left(R\left(\varepsilon I + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}(I - n(x)\cdot n(x)^\top)\right)R^\top\right) \\
&= \det\left(\left(\varepsilon I + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}(I - e_1 \cdot e_1^\top)\right)\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \end{bmatrix} \\
&= \varepsilon\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right).
\end{aligned}$$

Calcul Intégral

Question 8 Il y a plusieurs façons d'aborder cette question. Géométriquement, dans le cadre de la théorie de la mesure tout d'abord : on remarque que l'intégrale à calculer est par définition la mesure de l'aire de l'ensemble S (sous réserve que l'intégrale existe, ce que l'on nous demande d'admettre). Comme $S = [0,2]\times[0,2]$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$, son aire est le carré de la longueur de l'intervalle $[0,2]$, qui est $2 - 0 = 2$. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\,dx = 2^2 = 4.$$

Alternativement, nous pouvons mener un calcul direct de l'intégrale : la fonction caractéristique 1_S vérifie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$1_S(x_1, x_2) = 1_{[0,2]}(x_1) \times 1_{[0,2]}(x_2)$$

Si l'on admet que la fonction est intégrable, alors par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} 1_S(x_1, x_2)\,dx_1\right]dx_2$$

et par conséquent, par linéarité et le théorème fondamental du calcul

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1) \times 1_{[0,2]}(x_2)\,dx_1\right] dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_2) \left[\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1)\,dx_1\right] dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_1)\,dx_1 \times \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2]}(x_2)\,dx_2 \\
&= \int_0^2 dx_1 \times \int_0^2 dx_2 \\
&= [x_1]_0^2 \times [x_2]_0^2 \\
&= 2 \times 2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Question 9 Pour tout $t > 0$, on a $(-t(\ln t - 1))' = -(\ln t - 1) - t(1/t) = -\ln t$ (la fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables). Pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$, la fonction $t \in [\varepsilon, 2] \mapsto -\ln t$ est continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ donc y est intégrable ; donc, par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^2 (-\ln t)\,dt = [-t(\ln t - 1)]_\varepsilon^2 &= -2(\ln 2 - 1) + \varepsilon(\ln \varepsilon - 1) \\
&\to -2(\ln 2 - 1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous définissons $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_k(t) = \left| \begin{array}{rl} -\ln t & \text{si } t \in [2^{-k}, 2], \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

alors par additivité, on a affaire à une suite croissante de fonctions intégrables, telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\,dt \to -2(\ln 2 - 1) \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

Cette suite de fonction converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0, 2]$ et nulle sinon. Par le théorème de convergence monotone, cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, tout comme sa restriction à $[0, 2]$.

Si l'on pose la même question pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0, 2]$ et valant des valeurs arbitraires sinon, la réponse est identique. En effet sur $[0, 2]$, la restriction de g ne diffère de la restriction de f que sur le singleton $\{0\}$ (ou pas du tout). Comme il s'agit d'un ensemble négligeable, g est intégrable sur $[0, 2]$ car f est intégrable sur $[0, 2]$.

Question 10 Pour tout $x_2 \in]0,2]$, la fonction $x_1 \in [0,2] \mapsto \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$ est dérivable par la règle de dérivation en chaîne et

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}\left(\ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right) &= \frac{1}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\left(1 + \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.
\end{aligned}$$

Si $x_2 \in]0,2]$, la fonction $x_1 \in [0,2] \mapsto 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est définie (sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) et continue, donc intégrable. Par le théorème fondamental du calcul, on a donc

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\, dx_1 = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{x_2}\right).$$

Question 11 La frontière ∂S de S est donnée comme union de quatre pavés :

$$[0,2] \times [0,0],\ [0,2] \times [2,2],\ [0,0] \times [0,2] \text{ et } [2,2] \times [0,2].$$

Les intervalles $[0,0]$ et $[2,2]$ étant de longueur nulle, l'aire de chacun de ces pavés est nulle ; chaque pavé est donc négligeable et leur union est donc négligeable.

La fonction étudiée est donc mesurable car continue presque partout (partout sauf sur ∂S, qui est négligeable). Elle est également positive ; on peut donc exploiter le théorème de Tonelli pour tenter de prouver son intégrabilité. Pour presque tout $x_2 \in \mathbb{R}$ (à part pour $x_2 = 0$), la fonction partielle $x_1 \mapsto 1_S(x_1, x_2)/\|(x_1, x_2)\|$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1_S(x,y)}{\|(x_1,x_2)\|}\, dx_1 = \phi(x_2) := \left| \begin{array}{ll} \ln\left(\left(2 + \sqrt{4 + x_2^2}\right)/x_2\right) & \text{si } x_2 \in]0,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Il nous suffit donc d'établir que cette fonction ϕ est intégrable pour pouvoir conclure que la fonction de départ est intégrable. Or pour tout $x_2 \in]0,2]$,

$$0 \leq \ln\left(\frac{2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{x_2}\right) \leq \ln(2 + 2\sqrt{2}) - \ln x_2$$

et le second membre de cette équation est (défini presque partout et) intégrable sur $[0,2]$ d'après la question 9. La fonction ϕ, mesurable d'après le théorème de Tonelli, est donc bien intégrable par le critère d'intégrabilité dominée. Le théorème de Tonelli nous garantit donc l'intégrabilité de la fonction de départ.

Question 12 Si f est bornée par la constante M, la fonction $f \circ p$ est bornée par la même constante M. Soit $\overline{f \circ p}$ le prolongement de $f \circ p$ par zéro à $\mathbb{R}^2$. Comme $V_\varepsilon \subset S$, la fonction $1_{V_\varepsilon}\overline{f \circ p}$ est dominée par $1_S M$. La fonction $1_S M$ étant

intégrable et $1_{V_\varepsilon}\overline{f\circ p}$ étant mesurable comme produit de fonctions mesurables (V_ε est ouvert, donc mesurable, ce qui garantit que 1_{V_ε} est mesurable), l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2} 1_{V_\varepsilon}(y)\overline{f\circ p}(y)\,dy = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon} f(p(y))\,dy$$

est bien définie.

Question 13 On appliquer le changement de variable $y = h(x)$ pour se ramener d'une intégrale sur $V_\varepsilon = h(V_1)$ à une intégrale sur V_1. En exploitant le fait que $p(h(x)) = p(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon} f(p(y))\,dy &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(h(x))|\det J_h(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(x))|\det J_h(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_1} f(p(x))\,\varepsilon\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{V_1} f(p(x))\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\,dx
\end{aligned}$$

Question 14 Comme pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\overline{f\circ p}(x)1_{V_1}(x)\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right)\right| \leq M1_S(x)\left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\right) \leq M1_S(x)\left(1 + \frac{1}{\|x\|}\right)$$

et que le membre de droite est intégrable (d'après la question 11), on peut passer à la limite sur ε par le théorème de convergence dominée dans l'équation de la question 13. On obtient alors

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\in]0,1]}} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{V_\varepsilon}(f\circ p)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{V_1}\frac{(f\circ p)(x)}{\|x\|}\,dx.$$

Probabilités

Question 1 La densité du triplet (X, Y, Z) étant invariante par rotation, elle est de la forme $f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. De plus, les variables X, Y et Z étant indépendantes, on a

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$; comme $\phi(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) > 0$ on a $f_{(X,Y,Z)}(x_0, y_0, z_0) > 0$ et donc $f_X(x_0) \neq 0$, $f_Y(y_0) \neq 0$ et $f_Z(z_0) \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, comme

$$f_X(x)f_Y(y_0)f_Z(z_0) = \phi(x^2 + y_0^2 + z^2) = \phi(y_0^2 + x^2 + z_0^2) = f_X(y_0)f_Y(x)f_Z(z_0),$$

on a l'égalité

$$f_X(x) = \frac{f_X(y_0)}{f_Y(y_0)}f_Y(x).$$

Comme on a par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\,dx = 1,$$

il est nécessaire que le ratio $f_X(y_0)/f_Y(y_0)$ soit égal à 1. On a donc $f_X = f_Y$; la preuve que $f_Y = f_Z$ s'obtient de manière similaire.

Pour finir, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)^3 = f_{(X,Y,Z)}(x,x,x) = \phi(3x^2) > 0$, la fonction f est bien positive en tout point.

Question 2 L'égalité

$$f(x)f(y)f(z) = \phi(x^2+y^2+z^2) \text{ pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

implique $f(x)f'(y)f(z) = 2y\phi'(x^2+y^2+z^2)$ et $f'(x)f(y)f(z) = 2x\phi'(x^2+y^2+z^2)$. On en déduit que

$$xf(x)f'(y)f(z) = f'(x)yf(y)f(z) \text{ pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $(x, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $y_0 \neq 0$; on a $f(x) > 0$, $f(y_0) > 0$ et $f(z_0) > 0$. En posant

$$c = \frac{f'(y_0)f(z_0)}{y_0 f(y_0)f(z_0)},$$

on voit que

$$f'(x) = cxf(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On peut réécrire cette équation différentielle sous la forme

$$(\ln f(x))' = cx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation entre 0 et x, on obtient

$$\ln f(x) - \ln f(0) = c\frac{x^2}{2}$$

et donc

$$f(x) = f(0)e^{cx^2/2},$$

ce qui est bien la forme cherchée $f(x) = ae^{cx^2/2}$.

Question 3 Comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, on a nécessairement $c < 0$ et on en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Les variables aléatoires X, Y et Z suivent donc loi gaussienne centrée et la covariance du vecteur est $\sigma^2 I_3$, où I_3 est la matrice identité.

Question 4 On a

$$\frac{1}{2}m\mathbb{E}(\|V\|^2) = \frac{1}{2}m\mathbb{E}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2).$$

Comme $\mathbb{E}(V_i^2) = \sigma^2$, on en déduit que $E_c = \frac{3}{2}m\sigma^2$ et par conséquent que

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m}.$$

Question 5 À l'aide de la méthode de la fonction muette, on montre que V_1^2 suit une loi gamma de paramètres $(1/2, \frac{1}{2\sigma^2})$. En effet, en appliquant le changement de variable $y = x^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$f_{V_1^2}(y) = (f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y}))\,\frac{1}{2\sqrt{y}}1_{]0,+\infty[}(x) = f(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}}1_{]0,+\infty[}(x)$$

par parité de f, soit

$$\begin{aligned} f_{V_1^2}(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1/2} y^{-1/2}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1/2} y^{-1/2}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

On déduit de l'indication que $\|V\|^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$ suit une loi gamma de paramètres $(3/2, \frac{1}{2\sigma^2})$. Sa densité est

$$f_{\|V\|^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\sqrt{x}e^{-x/2\sigma^2}1_{]0,+\infty[}(x).$$

À l'aide de la méthode de la fonction muette, en appliquant le changement de variable $v = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $\sigma^2 = \frac{kT}{m}$, on montre enfin que $\|V\|$ est une variable de densité :

$$f_{\|V\|}(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}1_{]0,+\infty[}(v).$$

Il s'agit de la densité de la loi de Maxwell.

Examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Mardi 10 novembre 2020

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/8/12 pour une note sur 40.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2

1 Influence d'une barrière ponctuelle

On considère une particule quantique de masse m pouvant se déplacer sur l'axe réel. Cette particule est placée dans un potentiel $V(x)$ défini par un « Dirac » négatif en $x = 0$:

$$V(x) = -A\ \delta(x) \quad , \quad \text{avec } A > 0\ .$$

(On peut imaginer qu'il s'agit de la limite d'un puits très profond et très fin, de profondeur A/ε et de largeur ε, avec $\varepsilon \to 0$.)

1. Quelle est la dimension de la quantité A ? (On pourra par exemple pour cela intégrer le potentiel sur $\mathbb{R}$). Comment peut-on interpréter cette quantité physiquement ?
2. On s'intéresse aux états stationnaires du système. On considère un état $|\psi\rangle$ stationnaire d'énergie $E < 0$ et de fonction d'onde $\psi(x)$. Expliquer pourquoi son énergie doit être négative. Écrire l'équation satisfaite par cet état à l'aide d'un opérateur, puis traduire cette équation en deux équations différentielles, l'une pour la région $x > 0$ et l'autre pour la région $x < 0$. On introduira la quantité $\alpha = \left(\dfrac{-2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$.
3. Résoudre les deux équations dans le cas général. Quelles conditions doit satisfaire la fonction d'onde $\psi(x)$? (On précisera en particulier en comparant avec le puits quantique standard, quelles conditions sont préservées et lesquelles ne sont plus présentes.) Quelles sont les conséquences de ces conditions sur la solution générale qui vient d'être énoncée ?
4. Montrer qu'il n'y a pas de continuité de la dérivée de ψ en 0, et établir une relation entre la discontinuité (le saut) de la dérivée de ψ en 0 et les paramètres du problème (on pourra pour cela intégrer l'équation de Schrödinger indépendante du temps entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, et faire tendre ε vers 0). En déduire que l'énergie ne peut prendre qu'une seule valeur, notée E_0, que l'on exprimera en fonction des données du problème. Qu'en concluez-vous ?

5. On considère maintenant un double puits quantique, consistant en deux puits ponctuels identiques au puits étudié dans les questions précédentes, positionnés en $x = a$ et $x = -a$. Ces deux puits sont séparés par une barrière ponctuelle en $x = 0$, caractérisée par un potentiel « Dirac » positif. Le potentiel total est donc :

$$V(x) = -A\ \delta_{-a}(x) + B\ \delta_0(x) - A\ \delta_a(x) \qquad \text{avec } A, B > 0\ ,$$

$\delta_a(x)$ désignant par exemple un « Dirac » en $x = a$. Quelle symétrie vérifie ce potentiel ? Que peut-on en déduire sur les fonctions propres du hamiltonien ?

6. **On suppose que la fonction d'onde $\psi(x)$ est paire**. En déduire la forme générale de la fonction sur tout l'axe réel (on ne demande pas à ce stade d'expliciter les coefficients). Comment se traduisent les conditions que doit satisfaire la fonction d'onde, et en particulier les conditions sur les sauts de dérivée en $x = 0$ et $x = a$? Montrer que l'on aboutit en définitive à une équation sur α (donc sur E) que l'on peut écrire sous la forme :

$$A_1(1 - B_1)e^{-2\alpha a} = (1 - A_1)(1 + B_1) \qquad \text{avec} \qquad A_1 = \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\ ,\ B_1 = \frac{mB}{\hbar^2\alpha}$$

7. On suppose que $\alpha a \gg 1$. Que signifie cette approximation ? Quelle est alors la valeur de α ? Comment peut-on interpréter la fonction d'onde $\psi(x)$ dans cette situation ?

8. On suppose maintenant au contraire que αa est quelconque, mais que $B_1 \gg 1$. Que signifie cette hypothèse ? Dans la limite où $B_1 \to +\infty$, quelle est l'équation que doit sur l'énergie de l'état $|\psi\rangle$? Montrer par une résolution graphique qu'il existe une valeur A_c de A, que l'on déterminera au-dessous de laquelle il ne peut exister d'état stationnaire satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Exprimer cette condition en termes de E_0 et commenter.

2 Repère du centre de masse en relativité restreinte

1. Une particule de masse m s'approche à vitesse v d'une autre particule de même masse, cette dernière étant au repos dans le repère du laboratoire. Quelle est la vitesse V du centre de masse des deux particules dans le repère du laboratoire ? Montrer que vous retrouvez les cas limites haute et basse vitesse.

2. Quelle est l'énergie du système total des deux particules dans son repère du centre de masse ? (On simplifiera au maximum l'expression.) Commenter, en comparant notamment les énergies du système total dans les deux repères.

3 Système quantique à trois états

On considère 3 états quantiques $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ qui forme une base orthonormée B. Dans cette base, le hamiltonien (opérateur associé à l'observable énergie) s'écrit

$$\widehat{H} = E_0 \ |1\rangle \langle 1| + i\sqrt{2}E_0 \ |3\rangle \langle 1| - i\sqrt{2}E_0 \ |1\rangle \langle 3| \ ,$$

E_0 étant une constante réelle et positive, homogène à une énergie. À l'instant initial $t = 0$, le système se trouve dans l'état $|1\rangle$.

1. Écrire la matrice H correspondant à l'opérateur hamiltonien dans la base B.
2. Calculer les états stationnaires et leurs énergies correspondantes dans la base B. On notera B_H la base orthonormale formée par les vecteurs propres du hamiltonien.
3. En utilisant le formalisme des kets, exprimer les vecteurs de la base B dans la base orthonormale B_H.
4. Si l'on effectue une mesure de l'énergie à l'instant initial $t = 0$, quelles valeurs peut-on mesurer et avec quelles probabilités ?
5. Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ le système se trouve dans l'état $|1\rangle$, calculer le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans la base B_H au temps $t > 0$.
6. Calculer les probabilités $P_1(t)$, $P_2(t)$ et $P_3(t)$ de trouver le système dans l'état $|1\rangle$, dans l'état $|2\rangle$ ou dans l'état $|3\rangle$ respectivement après un temps $t > 0$.

Corrigé de l'examen de Physique I
Relativité et Mécanique Quantique

Mardi 10 novembre 2020

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/8/12 pour une note sur 40.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2

1 Influence d'une barrière ponctuelle

On considère une particule quantique de masse m pouvant se déplacer sur l'axe réel. Cette particule est placée dans un potentiel $V(x)$ défini par un « Dirac » négatif en $x = 0$:

$$V(x) = -A\ \delta(x) \quad , \quad \text{avec } A > 0\ .$$

(On peut imaginer qu'il s'agit de la limite d'un puits très profond et très fin, de profondeur A/ε et de largeur ε, avec $\varepsilon \to 0$.)

1. Quelle est la dimension de la quantité A ? (On pourra par exemple pour cela intégrer le potentiel sur $\mathbb{R}$). Comment peut-on interpréter cette quantité physiquement ?

   Réponse :

   On a $\int_{\mathbb{R}} V(x)\ dx = A$, ce qui montre que A est le produit d'une énergie par une longueur. C'est le produit de la profondeur par la largeur du puits quantique.

2. On s'intéresse aux états stationnaires du système. On considère un état $|\psi\rangle$ stationnaire d'énergie $E < 0$ et de fonction d'onde $\psi(x)$. Expliquer pourquoi son énergie doit être négative. Écrire l'équation satisfaite par cet état à l'aide d'un opérateur, puis traduire cette équation en deux équations différentielles, l'une pour la région $x > 0$ et l'autre pour la région $x < 0$. On introduira la quantité $\alpha = \left(\dfrac{-2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$.

   Réponse :

   L'énergie E doit être négative pour que l'on ait un état lié, comme dans la PC sur le puits quantique. Dans le cas contraire, on ne peut avoir d'état normalisé. L'équation satisfaite par $|\psi\rangle$ est l'équation

de Schrödinger indépendante du temps :

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$$

Traduite dans chacune des régions de l'espace, en représentation x, cette équation devient :

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi'' = & E\psi \qquad \text{pour} \quad x < 0 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\psi'' = & E\psi \qquad \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

Il s'agit dans les deux cas de la même équation qui peut s'écrire en utilisant le paramètre α :

$$\psi'' = \alpha^2\psi$$

3. Résoudre les deux équations dans le cas général. Quelles conditions doit satisfaire la fonction d'onde $\psi(x)$? (On précisera en particulier en comparant avec le puits quantique standard, quelles conditions sont préservées et lesquelles ne sont plus présentes.) Quelles sont les conséquences de ces conditions sur la solution générale qui vient d'être énoncée ?

   Réponse :

   Dans les deux régions, l'équation différentielle se résout sous la forme : $\psi(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{-\alpha x}$.
   Les conditions que doit satisfaire la fonction d'onde sont :
   - Intégrabilité L^2 de la fonction d'onde, d'intégrale 1.
   - Continuité de la fonction en $x = 0$.

   La condition manquante est celle sur la continuité de la dérivée. Cette dernière n'est pas continue car le potentiel possède une singularité (en $x = 0$), ce qui signifie qu'il est non borné localement.

   La première condition implique de ne garder que l'exponentielle croissante sur $\mathbb{R}_-$ et l'exponentielle décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\psi(x) = \lambda_1\, e^{\alpha x} \quad \text{pour } x < 0 \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \mu_2\, e^{-\alpha x} \quad \text{pour } x > 0$$

   La deuxième condition implique que $\lambda_1 = \mu_2$. On a donc $\psi(x) = \lambda e^{-\alpha|x|}$. Finalement, la normalisation de la probabilité implique que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1 = \frac{2|\lambda|^2}{2\alpha} \qquad \text{d'où} \quad \lambda = \sqrt{\alpha}$$

   En conclusion, la fonction d'onde s'écrit : $\psi(x) = \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha|x|}$

4. Montrer qu'il n'y a pas de continuité de la dérivée de ψ en 0, et établir une relation entre la discontinuité (le saut) de la dérivée de ψ en 0 et les paramètres du problème (on pourra pour cela intégrer l'équation de Schrödinger indépendante du temps entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, et faire tendre ε vers 0). En déduire que l'énergie ne peut prendre qu'une seule valeur, notée E_0, que l'on exprimera en fonction des données du problème. Qu'en concluez-vous ?

   Réponse :

   La dérivée n'est pas continue en 0 car le potentiel n'est pas borné. Si l'on intègre l'équation de Schrödinger entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on obtient :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)\, dx - A\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi(x)\delta(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} E\psi(x)\, dx$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, ce qui donne :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)\right]-A\,\psi(0)=0 \qquad \text{d'où} \qquad \psi'(0_+)-\psi'((0_-)=-\frac{2mA}{\hbar^2}\,\psi(0)$$

En utilisant l'expression de ψ trouvée à la question précédente, cela donne :

$$-2\lambda\alpha=-\frac{2mA}{\hbar^2}\,\lambda \qquad \text{et donc} \qquad \alpha=\frac{mA}{\hbar^2}=\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Cec débouche sur une unique valeur de E :

$$E_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{mA}{\hbar^2}\right)^2=-\frac{mA^2}{2\hbar^2}$$

Ce puits ponctuel contient donc toujours un état quantique et il est unique.

5. On considère maintenant un double puits quantique, consistant en deux puits ponctuels identiques au puits étudié dans les questions précédentes, positionnés en $x=a$ et $x=-a$. Ces deux puits sont séparés par une barrière ponctuelle en $x=0$, caractérisée par un potentiel « Dirac » positif. Le potentiel total est donc :

$$V(x)=-A\,\delta_{-a}(x)+B\,\delta_0(x)-A\,\delta_a(x) \qquad \text{avec } A,B>0\ ,$$

$\delta_a(x)$ désignant par exemple un « Dirac » en $x=a$. Quelle symétrie vérifie ce potentiel ? Que peut-on en déduire sur les fonctions propres du hamiltonien ?

Réponse :

La fonction potentiel $V(x)$ est paire. Par ailleurs, l'opérateur $\hat{p}^2=-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}$ est invariant dans la transformation $x\to -x$. L'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ l'est donc aussi, ce qui signifie qu'il commute avec l'opérateur de parité spatiale $\mathcal{P}:\psi(x)\mapsto\psi(-x)$. Ses vecteurs propres sont donc aussi vecteurs propres de $\mathcal{P}$: ce sont les fonctions paires ou impaires.

6. **On suppose que la fonction d'onde $\psi(x)$ est paire**. En déduire la forme générale de la fonction sur tout l'axe réel (on ne demande pas à ce stade d'expliciter les coefficients). Comment se traduisent les conditions que doit satisfaire la fonction d'onde, et en particulier les conditions sur les sauts de dérivée en $x=0$ et $x=a$? Montrer que l'on aboutit en définitive à une équation sur α (donc sur E) que l'on peut écrire sous la forme :

$$A_1(1-B_1)e^{-2\alpha a}=(1-A_1)(1+B_1) \qquad \text{avec} \qquad A_1=\frac{mA}{\hbar^2\alpha}\ ,\ B_1=\frac{mB}{\hbar^2\alpha}$$

Réponse :

La fonction d'onde vérifie toujours la même équation différentielle vue plus haut en dehors des puits, et donc s'exprime toujours comme combinaison linéaire des mêmes exponentielles croissante et décroissante. La parité de la fonction nous permet de regarder uniquement $\mathbb{R}_+$. Comme on cherche un état stationnaire normalisé, seule l'exponentielle décroissante est retenue pour $x>a$. Pour $0<x<a$, la fonction est une superposition des deux exponentielles :

$$\begin{cases}\psi(x)=\lambda_1\,e^{\alpha x}+\lambda_2\,e^{-\alpha x} & \text{pour}\ \ 0<x<a\\ \psi(x)=\mu\,e^{-\alpha x} & \text{pour}\ \ x>a\end{cases}$$

La continuité de la fonction d'onde en $x = a$ s'écrit :

$$\lambda_1 e^{\alpha a} + \lambda_2 e^{-\alpha a} = \mu e^{-\alpha a}$$

Les sauts de dérivée en $x = 0$ et en $x = a$ s'écrivent :

$$2\alpha\lambda_1 - 2\alpha\lambda_2 = \frac{2mB}{\hbar^2}(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad \text{et} \qquad -\alpha\mu e^{-\alpha a} - \alpha\lambda_1 e^{\alpha a} + \alpha\lambda_2 e^{-\alpha a} = -\frac{2mA}{\hbar^2}\mu e^{-\alpha a}$$

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{\alpha a} + \lambda_2 e^{-\alpha a} & = \mu e^{-\alpha a} \\ \lambda_1 e^{\alpha a} - \lambda_2 e^{-\alpha a} & = \mu e^{-\alpha a}\left(\dfrac{2mA}{\hbar^2\alpha} - 1\right) \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = \dfrac{mB}{\hbar^2\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

L'addition et la soustraction des deux premières équations permettent d'exprimer λ_1 et λ_2 proportionnellement à μ :

$$\lambda_1 = \frac{mA}{\hbar^2\alpha} e^{-2\alpha a}\,\mu \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \left(1 - \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\right)\mu$$

En reportant ces expressions dans la troisième équation, on obtient une équation uniquement sur α, c'est-à-dire sur E :

$$\frac{mA}{\hbar^2\alpha} e^{-2\alpha a} - \left(1 - \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\right) = \frac{mB}{\hbar^2\alpha}\left(\frac{mA}{\hbar^2\alpha} e^{-2\alpha a} + \left(1 - \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\right)\right)$$

soit encore

$$\frac{mA}{\hbar^2\alpha}\left(1 - \frac{mB}{\hbar^2\alpha}\right) e^{-2\alpha a} = \left(1 - \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{mB}{\hbar^2\alpha}\right)$$

et donc

$$A_1(1 - B_1)e^{-2\alpha a} = (1 - A_1)(1 + B_1) \qquad \text{avec} \qquad A_1 = \frac{mA}{\hbar^2\alpha}\ ,\ B_1 = \frac{mB}{\hbar^2\alpha}$$

7. On suppose que $\alpha a \gg 1$. Que signifie cette approximation ? Quelle est alors la valeur de α ? Comment peut-on interpréter la fonction d'onde $\psi(x)$ dans cette situation ?

   Réponse :

   Si l'on se place dans l'hypothèse $\alpha a \gg 1$, alors $(1 - A_1)(1 + B_1) \approx 0$, ce qui se traduit par

$$A_1 = 1 \qquad \text{et donc} \qquad \alpha = \frac{mA}{\hbar^2}\ , \qquad \text{soit} \qquad E = E_0$$

   On retrouve la valeur E_0 de l'énergie dans le puits isolé. La quantité (αa) représente le rapport entre la distance du puits à $x = 0$ et $1/\alpha$, la longueur caractéristique de décroissance de la fonction d'onde. Quand ce rapport est très grand devant 1, cela signifie que la fonction d'onde du puits unique qui serait localisée en $x = a$ aurait une amplitude très faible au niveau de la barrière. Les puits sont très écartés, et la présence de la barrière ou d'un autre puits ne modifie pas beaucoup l'énergie. La fonction d'onde paire est donc constituée par la superposition de deux fonctions d'onde de puits individuel, l'un en $x = a$ et l'autre en $x = -a$.

8. On suppose maintenant au contraire que αa est quelconque, mais que $B_1 \gg 1$. Que signifie cette hypothèse ? Dans la limite où $B_1 \to +\infty$, quelle est l'équation que doit sur l'énergie de l'état $|\psi\rangle$? Montrer par une résolution graphique qu'il existe une valeur A_c de A, que l'on déterminera au-dessous de laquelle il ne peut exister d'état stationnaire satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Exprimer cette condition en termes de E_0 et commenter.

   Réponse :

   $B_1 \gg 1$ signifie que la décroissance dans la barrière est très forte par rapport à la décroissance de la fonction d'onde en dehors des puits et de la barrière. Les équations sur λ_1 et λ_2 trouvées plus haut montrent que dans ce cas, $\lambda_1 + \lambda_2$ est très faible par rapport à la différence, et que donc $\lambda_1 \approx -\lambda_2$. Ceci implique que la fonction d'onde s'annule pratiquement à l'origine, les deux parties $x > 0$ et $x < 0$ sont quasiment isolées l'une de l'autre, la barrière constituant un obstacle infranchissable. Dans la limitet $B \to +\infty$, l'équation sur l'énergie obtenue à la question 6 devient alors

$$e^{-2\alpha a} = \frac{A_1 - 1}{A_1} = 1 - \frac{1}{A_1} = 1 - \frac{\hbar^2 \alpha}{mA}$$

   Pour que l'équation ait une solution différente de $\alpha = 0$, il faut que la pente en 0 de l'exponentielle soit plus grande que celle de la fonction affine. En d'autres termes :

$$2a > \frac{\hbar^2}{mA} \quad \text{ou} \quad A > \frac{\hbar^2}{2ma} = A_c \ , \qquad \text{soit encore} \quad E_0 = -\frac{mA^2}{2\hbar^2} < -\frac{m\hbar^4}{2\hbar^2 4m^2 a^2} = -\frac{\hbar^2}{8ma^2}$$

   Il faut donc que le puits soit suffisamment profond (en terme de A) pour que son énergie fondamentale est inférieure à celle du puits infini de largeur $2a$ (ou bien 1/4 de l'énergie fondamentale du puits infini de largeur a). Si le puits est moins profond (si $A < A_c$), la présence de la barrière infinie agit comme un mur de potentiel infini en $x = 0$ qui empêche la formation d'un état lié dans le puits.

2 Repère du centre de masse en relativité restreinte

1. Une particule de masse m s'approche à vitesse v d'une autre particule de même masse, cette dernière étant au repos dans le repère du laboratoire. Quelle est la vitesse V du centre de masse des deux particules dans le repère du laboratoire ? Montrer que vous retrouvez les cas limites haute et basse vitesse.

   Réponse :

   On appelle Ox l'axe de déplacement de la première particule dans le repère du laboratoire, afin de réduire le problème à une dimension d'espace. Si on appelle p_1 l'impulsion de la particule dans ce repère, alors $p_1 = \gamma m v$, γ étant le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

   Par ailleurs, l'impulsion du système complet est également p_1. Cette impulsion étant la partie spatiale du quadrivecteur (énergie-impulsion), elle se transforme en changeant de repère avec les transformations de Minkowski. La partie énergie de ce quadrivecteur est l'énergie totale du système dans le repère du laboratoire, donc :

$$E_T = mc^2 + \gamma mc^2 = (1 + \gamma)mc^2$$

On va se placer dans un système tel d'unités tel que $c = 1$. Il faut donc trouver une transformation pour aller d'un repère en déplacement à la vitesse V au repère du laboratoire telle que l'impulsion dans le repère en déplacement soit nulle :

$$\gamma(V)\begin{pmatrix} 1 & -\beta(V) \\ -\beta(V) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_T \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les deux lignes de cette équation matricielle donnent :

$$\gamma(V)(E_T - \beta(V)p_1) = E'_T \qquad \text{et} \qquad \gamma(V)(-\beta(V)E_T + p_1) = 0$$

d'où l'on tire

$$\beta(V) = V = \frac{p_1}{E_T} = \frac{\gamma m v}{(1+\gamma)m} \qquad \text{soit} \qquad V = \frac{\gamma}{1+\gamma}v$$

Dans la limite basse vitesse, γ tend vers 1 et on retrouve bien que $V \approx v/2$ ce qui est l'expression classique. En revanche, à la limite haute vitesse, v s'approche de c, γ tend vers l'infini et $V \approx v$. V devient proche de c également.

2. Quelle est l'énergie du système total des deux particules dans son repère du centre de masse ? (On simplifiera au maximum l'expression.) Commenter, en comparant notamment les énergies du système total dans les deux repères.

   Réponse :

   On reprend la première ligne de l'équation matricielle vue à la question précédente. On a donc :

$$\begin{aligned} E'_T = \gamma(V)\left(E_T - \beta(V)p_1\right) &= \left(1 - \frac{\gamma^2 v^2}{(1+\gamma)^2}\right)^{-1/2}\left[(1+\gamma)m - \frac{\gamma}{1+\gamma}v\gamma m v\right] \\ &= m(1+\gamma)\left(1 - \frac{\gamma^2 v^2}{(1+\gamma)^2}\right)^{-1/2}\left[1 - \frac{\gamma^2 v^2}{(1+\gamma)^2}\right] \\ &= m(1+\gamma)\left(1 - \frac{\gamma^2 v^2}{(1+\gamma)^2}\right)^{1/2} = m\left((1+\gamma)^2 - \gamma^2 v^2\right)^{1/2} \\ &= m\left[1 + 2\gamma + \gamma^2(1-v^2)\right]^{1/2} = \sqrt{2(1+\gamma)}\,m \end{aligned}$$

   On retrouve bien la masse au repos du système des deux particules ($2m$) dans la limite basse vitesse ($\gamma \to 1$). En revanche, l'énergie totale dans le repère du centre de masse croît comme $\sqrt{\gamma}$ dans la limite haute vitesse, tandis que l'énergie du système total dans le repère du laboratoire croît comme γ.

3 Système quantique à trois états

On considère 3 états quantiques $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ qui forme une base orthonormée B. Dans cette base, le hamiltonien (opérateur associé à l'observable énergie) s'écrit

$$\widehat{H} = E_0 \ |1\rangle\langle 1| + i\sqrt{2}E_0 \ |3\rangle\langle 1| - i\sqrt{2}E_0 \ |1\rangle\langle 3| \ ,$$

E_0 étant une constante réelle et positive, homogène à une énergie. À l'instant initial $t = 0$, le système se trouve dans l'état $|1\rangle$.

1. Écrire la matrice H correspondant à l'opérateur hamiltonien dans la base B.

   Réponse :

   L'opérateur $|i\rangle\langle j|$ appliqué à l'état $|j\rangle$ donne l'état $|i\rangle\langle j|j\rangle = |i\rangle$. Dans une matrice A correspondant à un opérateur $\hat{A}$, ceci correspond au coefficient a_{ij} . On peut donc en déduire l'écriture matricielle du hamiltonien :

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les états stationnaires et leurs énergies correspondantes dans la base B. On notera B_H la base orthonormale formée par les vecteurs propres du hamiltonien.

   Réponse :

   Les états stationnaires sont les états propres du hamiltonien et leurs énergies sont les valeurs propres correspondantes. Il faut donc diagonaliser la matrice H. En divisant par E_0 et en développant par rapport à la première ligne, le polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - i\sqrt{2}\lambda \times i\sqrt{2}\lambda = \lambda(\lambda(1-\lambda)+2) = \lambda(1+\lambda)(2-\lambda)$$

   Les valeurs propres sont donc

$$E_1 = 2E_0 \quad , \quad E_2 = -E_0 \quad , \quad E_3 = 0$$

   et les vecteurs propres correspondants sont

$$|E_1\rangle = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2/3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad |E_2\rangle = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \quad , \quad |E_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. En utilisant le formalisme des kets, exprimer les vecteurs de la base B dans la base orthonormale B_H.

   Réponse :

   Il faut inverser les relations entre les kets trouvés dans la question précédente, ce qui donne

$$|1\rangle = i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|E1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}\,|E_2\rangle \quad , \quad |2\rangle = |E_3\rangle \quad , \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|E_2\rangle$$

4. Si l'on effectue une mesure de l'énergie à l'instant initial $t = 0$, quelles valeurs peut-on mesurer et avec quelles probabilités ?

   Réponse :

   On ne peut obtenir comme résultat de mesure que des valeurs propres de l'opérateur, soit E_1, E_2 ou E_3. Étant donné que l'état initial est $|1\rangle$, on a

$$|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle = i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|E_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}\,|E_2\rangle$$

   On pourra donc mesurer E_1 ou E_2 avec les probabilités respectives $P_1 = 2/3$ et $P_2 = 1/3$. (il n'y a pas de composante de $|\Psi(0)\rangle$ sur $|E_3\rangle$ donc $P_3 = 0$.)

5. Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ le système se trouve dans l'état $|1\rangle$, calculer le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans la base B_H au temps $t > 0$.

   Réponse :

   L'évolution via l'équation de Schrödinger conserve la superposition linéaire. Chaque état propre du hamiltonien évolue par une simple multiplication par un facteur de phase dont la pulsation est donnée par l'énergie. On a donc

$$|\Psi(t)\rangle = i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\,|E_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\,|E_2\rangle$$

   soit encore en fonction de E_0

$$|\Psi(t)\rangle = i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2E_0}{\hbar}t}\,|E_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\,|E_2\rangle$$

6. Calculer les probabilités $P_1(t)$, $P_2(t)$ et $P_3(t)$ de trouver le système dans l'état $|1\rangle$, dans l'état $|2\rangle$ ou dans l'état $|3\rangle$ respectivement après un temps $t > 0$.

   Réponse :

   On a l'expression de l'état $|\Psi(t)\rangle$ à n'importe quel instant dans la base B_H, mais pour obtenir la probabilité d'être dans l'état $|i\rangle$, il faut revenir à la base B. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2E_0}{\hbar}t}\,|E_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\,|E_2\rangle \\
&= i\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2E_0}{\hbar}t}\left(i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|3\rangle\right) - i\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\,|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|3\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(2e^{-2i\frac{E_0}{\hbar}t} + e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\right)|1\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-e^{-2i\frac{E_0}{\hbar}t} + e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\right)|3\rangle
\end{aligned}$$

   Les probabilités demandées sont données par les produits scalaires de $|\Psi(t)\rangle$ avec les vecteurs de base :

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= |\langle 1|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{9}\left|2e^{-i\frac{2E_0}{\hbar}t} + e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\right|^2 = \frac{1}{9}\left(4 + 4\cos(3\omega_0 t) + 1\right) = \frac{1}{9}\left[5 + 4\cos(3\omega_0 t)\right] \\
P_2(t) &= |\langle 2|\Psi(t)\rangle|^2 = 0 \\
P_3(t) &= |\langle 3|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{2}{9}\left|-e^{-i\frac{2E_0}{\hbar}t} + e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\right|^2 = \frac{2}{9}\left(1 - 2\cos(3\omega_0 t) + 1\right) = \frac{4}{9}\left[1 - \cos(3\omega_0 t)\right]
\end{aligned}$$

   en posant $E_0 = \hbar\omega_0$, et on vérifie que l'on a bien : $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$, et que $(P_1(0), P_2(0), P_3(0)) = (1, 0, 0)$.

Préparation examen oral – Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique

Cet écrit de préparation comporte 2 exercices indépendants. Il est recommandé de consacrer la moitié du temps de préparation à chacun des exercices. Tous les documents sont autorisés.

Calcul Différentiel & Equations Différentielles

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \alpha\, x_1 + x_2^p \\ \alpha\, x_2 - x_1^p \end{bmatrix}$$

1. Justifier que f est continûment différentiable à tout ordre. Calculer sa matrice jacobienne $J_f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. Que suffit-il de calculer pour déterminer $d^k f(x)$ pour $k \geq 2$?
2. Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $V(x_1, x_2) = x_1^{p+1} + x_2^{p+1}$.
   a) Calculer $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^2$.
   b) Soit $t \mapsto x(t)$ une solution de $\dot{x} = f(x)$ définie sur un intervalle I. Exprimer $v(t) = V(x(t))$ sur I en fonction de t et de la condition initiale $x(0)$.
3. Déterminer les points d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$ suivant la parité de p.

Soient maintenant une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ quelconque différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe une matrice symétrique $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$J_f(a)^\top P + P J_f(a) = -I$$

où I est la matrice identité.

On définit cette fois $V(x) = (x - a)^\top P (x - a)$.

4. Démontrer qu'il existe $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \delta(x) = 0$ et

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -\big(1 - \delta(x)\big) \|x - a\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

5. Démontrer que si f est continûment différentiable d'ordre 2 et ses dérivées partielles à l'ordre 2 sont bornées par $\mu > 0$ sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -\big(1 - \mu\rho\|x - a\|\big)\|x - a\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Probabilités

Soit $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants, tous définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les composantes des vecteurs $((X_n, Y_n))$ ne sont pas nécessairement indépendantes.

1. Montrer que si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X + Y$.
2. Montrer que si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} X + Y$.

On considère maintenant une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi Uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $Z_k := X_k X_{k+1}$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}(Z_k)$, $\mathbb{V}(Z_k)$ et $\mathrm{Cov}(Z_k, Z_{k+i})$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.
4. Les variables aléatoires de la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles mutuellement indépendantes ? Qu'en est-il de celles des suites $(Z_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$?
5. Déduire des questions précédentes que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{4}$ presque-sûrement et en moyenne quadratique.

Examen de Physique II

Physique Statistique

Mercredi 27 janvier 2021

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Poly de Physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est demandé de donner des explications claires et complètes ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 13/13/4 pour une note sur 30.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s , vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} ,
charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2,
constante de Boltzmann : $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}, masse du nucléon : $m_N \approx 1$ Gev/c^2.

Formulaire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, x^6\, dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \quad ; \quad \forall z \in]-1;+\infty[\,, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+z^{-1}\, e^x} = \ln(1+z)$$

1 Correction relativiste à l'équation d'état du gaz parfait dilué

On considère un gaz mono-atomique composés de N d'atomes identiques de masse m et de spin 0 dans une enceinte de volume V à la température T. On va supposer que ces atomes sont **légèrement** relativistes, c'est-à-dire que la relation entre énergie et impulsion comporte un terme de masse au repos, le terme cinétique classique et un terme en p^4. Les états quantiques individuels que peuvent occuper ces atomes sont les mêmes que les états quantiques du gaz parfait non relativiste dans la même enceinte (seules les énergies sont différentes).

1. Écrire la relation énergie-impulsion $E(p)$ des atomes du gaz développée jusqu'à l'ordre p^4.
2. Quelle est la densité d'états quantiques en fonction du module de l'impulsion (c'est-à-dire la quantité $g(p) = dn/dp$, où dn est le nombre d'états quantiques dans l'intervalle $[p, p+dp]$, p étant le module de l'impulsion).
3. On suppose que le gaz est dilué et que l'on peut se placer dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann. Dans quel ensemble doit-on se placer pour étudier le système ? Montrer (**en le justifiant**) que la fonction de partition du système peut se mettre sous la forme $Z = \dfrac{1}{N!} z^N$, où on donnera l'expression de z sous la forme d'une intégrale simple (que l'on ne demande pas de calculer pour l'instant).

4. À partir de quelle valeur du module de l'impulsion le premier terme correctif relativiste à l'énergie devient-il significatif par rapport à l'énergie cinétique classique ? En déduire la valeur T_r de la température au-dessous de laquelle on peut considérer ce terme correctif comme une perturbation. Calculer cette valeur numériquement pour le gaz mono-atomique d'hydrogène.
5. Montrer que la fonction $z(T, N, V)$ peut s'écrire au premier ordre sous la forme

$$z(T,N,V) = e^{-\beta mc^2} z_{GP}(T,N,V) \left[1 + \frac{\beta}{8m^3c^2} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^6 \, dp}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 \, dp} \right]$$

   où on donnera la forme de z_{GP} et on expliquera sa signification. En déduire une expression de z où le terme entre crochets a été remplacé par une fonction explicite $f(T)$ de T et T_r.
6. En déduire la loi d'état donnant l'énergie interne du gaz en fonction de la température et du nombre d'atomes. Commenter, en observant la conséquence sur la capacité calorifique du système.
7. Déterminer la loi d'état donnant la pression en fonction du volume et de la température. Commenter.

2 Équilibre fermions-bosons à deux dimensions

On considère un gaz bidimensionnel de N fermions non relativistes de spin 1/2 et de masse m, dans une enceinte de taille $S = L_x \times L_y$.

1. Trouver la relation entre la densité $\rho = N/V$, la fugacité $\varphi = \exp(\mu/k_BT)$, et la température T. On pourra poser $\Lambda_{th} = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}\right)^{1/2}$. Quel est la signification de ce dernier paramètre ?
2. On suppose maintenant que les fermions sont sans interaction quand ils sont séparés, mais que deux fermions de spins opposés peuvent s'associer pour former un boson de spin 0 et de masse $2m$, avec une énergie de liaison $\Delta > 0$. La réaction réversible de transformation des fermions en bosons s'écrit

$$f_\uparrow + f_\downarrow \rightleftharpoons B$$

   L'énergie $\varepsilon_f(p)$ d'un fermion d'impulsion p et l'énergie $\varepsilon_B(p)$ d'un boson d'impulsion p sont donc :

$$\varepsilon_f(p) = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_B(p) = -\Delta + \frac{p^2}{4m}$$

   On suppose que la réaction est à l'équilibre. On appelle N_f le nombre de fermions et N_B le nombre de bosons. On définit ainsi respectivement la densité de fermions $\rho_f = N_f/V$ et la densité de bosons $\rho_B = N_B/V$. On conserve la notation $\rho = N/V$. Comment se traduit la conservation de la masse sur N_f et N_B, puis sur ρ_f et ρ_B ?
3. On appelle respectivement μ_f et μ_B les potentiels chimiques des populations de fermions et de bosons. Expliquer pourquoi $\mu_B = 2\,\mu_f$ à l'équilibre. (On pourra par exemple considérer la valeur de l'énergie libre du système complet en fonction de la répartition (N_f, N_B)).
4. En vous inspirant de la question 1, mais en utilisant la relation de dispersion des bosons donnée à la question 2, déterminer la relation entre la fugacité $\varphi_B = \exp\left(\dfrac{\mu_B}{k_BT}\right)$ des bosons, la densité ρ_B, la quantité Λ_{th} et la température T.

5. En utilisant les résultats des questions précédentes, trouver une nouvelle relation entre la fugacité des fermions $\varphi = \exp\left(\frac{\mu_f}{k_B T}\right)$, la densité ρ et la température T, lorsque la réaction de bosonisation est possible.
6. On se place dans la limite où $\rho\Lambda_{th}^2 \ll 1$ à T fixé. Quelle est la signification physique de cette approximation ? Exprimer la fugacité φ à l'ordre principal en $\rho\Lambda_{th}^2$ dans cette limite, puis le rapport des densités de fermions et de bosons ρ_f/ρ_B.
7. On se place dans la limite opposée où $\rho\Lambda_{th}^2 \gg 1$ à T fixé. Quelle est la signification physique de cette approximation ? Exprimer la fugacité φ à l'ordre principal en $e^{-\rho\Lambda_{th}^2}$ dans cette limite, puis les valeurs respectives des densités ρ_f et ρ_B à l'ordre principal (donc un seul terme). Interpréter le résultat.

3 Entropie de mélange

On considère un gaz composé d'un mélange de deux gaz monoatomiques différents, de nombre d'atomes respectifs N_1 et N_2. Les atomes ont tous le même spin. On fera l'approximation que ces deux gaz sont parfaits. Le système est maintenu à une température constante T.

1. Quelle est, en fonction de N_1 et N_2, la différence d'entropie entre le gaz mélangé dans un volume $(V_1 + V_2)$ et les deux gaz séparés dans deux enceintes distinctes de volumes respectifs V_1 et V_2 ? (On supposera que chaque gaz emporte un volume proportionnel à son nombre d'atomes). On pourra par exemple évaluer les fonctions de partition dans les deux situations.
2. On suppose que $N_1 = \alpha N$ et $N_2 = (1-\alpha)N$, avec $0 < \alpha < 1$. Quelle énergie minimale faut-il fournir au système initial pour séparer complètement les deux gaz, en fonction de T, N et α ?

Corrigé de l'examen de Physique II
Physique Statistique

Mercredi 27 janvier 2021

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Poly de Physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est demandé de donner des explications claires et complètes ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 13/13/4 pour une note sur 30.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s , vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} ,
charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2,
constante de Boltzmann : $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}, masse du nucléon : $m_N \approx 1$ Gev/c^2.

Formulaire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, x^6\, dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \quad ; \quad \forall z \in]-1;+\infty[\,, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+z^{-1}\, e^x} = \ln(1+z)$$

1 Correction relativiste à l'équation d'état du gaz parfait dilué

On considère un gaz mono-atomique composés de N d'atomes identiques de masse m et de spin 0 dans une enceinte de volume V à la température T. On va supposer que ces atomes sont **légèrement** relativistes, c'est-à-dire que la relation entre énergie et impulsion comporte un terme de masse au repos, le terme cinétique classique et un terme en p^4. Les états quantiques individuels que peuvent occuper ces atomes sont les mêmes que les états quantiques du gaz parfait non relativiste dans la même enceinte (seules les énergies sont différentes).

1. Écrire la relation énergie-impulsion $E(p)$ des atomes du gaz développée jusqu'à l'ordre p^4.

   Réponse :

   On développe à l'ordre p^4 la relation énergie-impulsion relativiste :

$$E(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = mc^2\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} \approx mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4}\right)$$
$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$$

2. Quelle est la densité d'états quantiques en fonction du module de l'impulsion (c'est-à-dire la quantité $g(p) = dn/dp$, où dn est le nombre d'états quantiques dans l'intervalle $[p, p+dp]$, p étant le module de l'impulsion).

   Réponse :

   La densité d'états d'énergie est celle donnée par le cours pour des particules libres dans un volume $V = L_x L_y L_z$. Le nombre d'états d^3n dans un volume $dk_x dk_y dk_z$ est :

$$d^3n = \frac{dk_x}{\frac{2\pi}{L_x}} \frac{dk_y}{\frac{2\pi}{L_y}} \frac{dk_z}{\frac{2\pi}{L_z}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\, d^3k = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\, d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\, d^2\Omega_p\, p^2 dp$$

   où $d^2\Omega_p$ est l'élément angulaire en coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions. On intègre sur les variables angulaires de l'impulsion (angle solide $= 4\pi$) pour obtenir la densité en impulsion :

$$dn = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\, p^2 dp \qquad \text{et donc} \qquad g(p) = \frac{dn}{dp} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\, p^2$$

3. On suppose que le gaz est dilué et que l'on peut se placer dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann. Dans quel ensemble doit-on se placer pour étudier le système ? Montrer (**en le justifiant**) que la fonction de partition du système peut se mettre sous la forme $Z = \frac{1}{N!} z^N$, où on donnera l'expression de z sous la forme d'une intégrale simple (que l'on ne demande pas de calculer pour l'instant).

   Réponse :

   On se place dans l'ensemble canonique (température fixée, nombre de particules fixé) pour des particules sans interaction donc décrites par des états quantiques individuels. Les paramètres fixés sont donc la température T, le nombre de particules N et le volume V. Les particules étant indépendantes, on peut factoriser la fonction de partition canonique, mais on doit la diviser par $N!$ pour tenir compte de l'indiscernabilité des particules :

$$Z(T, N, V) = \sum_\alpha e^{-\beta U_\alpha} = \frac{z^N}{N!}$$

   où la quantité $z(T, N, V)$ est la fonction de partition à une particule :

$$\begin{aligned} z(T, N, V) &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta E(p)}\, g(p)\, dp = \int_0^{+\infty} e^{-\beta(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2})}\, \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\, p^2\, dp \\ &= e^{-\beta mc^2} \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{+\infty} e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2})}\, p^2\, dp \end{aligned}$$

4. À partir de quelle valeur du module de l'impulsion le premier terme correctif relativiste à l'énergie devient-il significatif par rapport à l'énergie cinétique classique ? En déduire la valeur T_r de la température au-dessous de laquelle on peut considérer ce terme correctif comme une perturbation. Calculer cette valeur numériquement pour le gaz mono-atomique d'hydrogène.

   Réponse :

   Le critère pour voir le premier terme correctif comme une perturbation est :

$$\frac{p^2}{2m} > \frac{p^4}{8m^3c^2} \qquad \text{soit} \qquad p < 2mc$$

On voit bien que la particule n'est plus du tout relativiste. La température limite pour cette approximation correspond à une énergie therrmique de l'ordre de l'énergie de masse au repos : $k_B T_r = mc^2$, soit $T_r = \dfrac{mc^2}{k_B}$

A.N. : $m \approx 1$ Gev/c^2 donc $T_r = \dfrac{10^9 \times 1.6.10^{-19}}{1.38.10^{-23}} \approx 10^{13}$ K

5. Montrer que la fonction $z(T, N, V)$ peut s'écrire au premier ordre sous la forme

$$z(T,N,V) = e^{-\beta mc^2} z_{GP}(T,N,V) \left[1 + \frac{\beta}{8m^3c^2} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^6 \, dp}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 \, dp} \right]$$

où on donnera la forme de z_{GP} et on expliquera sa signification. En déduire une expression de z où le terme entre crochets a été remplacé par une fonction explicite $f(T)$ de T et T_r.

Réponse :

Par un changement de variable $x = \left(\dfrac{\beta}{2m}\right)^{1/2} p$, on peut réécrire le terme entre crochets :

$$[\ldots] = f(T) = 1 + \frac{\beta}{8m^3c^2} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^6 \, dx}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 \, dx} = 1 + \frac{4m^2}{8m^3c^2\beta} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^6 \, dx}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 \, dx}$$

$$= 1 + \frac{k_B T}{2mc^2} \frac{\frac{15\sqrt{\pi}}{16}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} = 1 + \frac{15}{8} \frac{k_B T}{mc^2} = 1 + \frac{15}{8} \frac{T}{T_r}$$

6. En déduire la loi d'état donnant l'énergie interne du gaz en fonction de la température et du nombre d'atomes. Commenter, en observant la conséquence sur la capacité calorifique du système.

Réponse :

L'énergie interne du système est donnée par : $\bar{U} = -\dfrac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$.

La contribution à l'énergie du terme du gaz parfait classique (en "z_{GP}") est connue et vaut $\frac{3}{2} N k_B T$. Pour le système qui nous concerne, ceci donne :

$$\bar{U} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[-\beta N mc^2 + \ln\left(\frac{z_{GP}^N}{N!}\right) + N \ln\left(1 + \frac{15}{8}\frac{T}{T_r}\right) \right] = N \left[mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{15 k_B}{8 T_r} \frac{T^2}{1 + \frac{15}{8}\frac{T}{T_r}} \right]$$

$$= N \left[mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + k_B T \frac{\frac{15}{8}\frac{T}{T_r}}{1 + \frac{15}{8}\frac{T}{T_r}} \right] = N \left[mc^2 + \frac{3}{2} k_B T + \frac{k_B T}{1 + \frac{8}{15}\frac{T_r}{T}} \right]$$

L'énergie interne contient maintenant l'énergie de masse au repos qui, pour la thermodynamique, n'est qu'un changement de l'énergie de référence. On voit qu'à faible température, la correction relativiste à l'énergie est négligeable, mais qu'à des températures de l'ordre de T_r, l'énergie est plus importante que celle du gaz parfait non relativiste. La capacité calorifique molaire devient supérieure à $3/2R$: on peut stocker plus d'énergie dû au caractère relativiste des particules.

7. Déterminer la loi d'état donnant la pression en fonction du volume et de la température. Commenter.

   Réponse :

   La pression s'obtient d'après le formulaire de l'ensemble canonique : $P\beta = \dfrac{\partial \ln Z}{\partial V}$
   La seule contribution du volume V à la fonction de partition obtenue à la question 5 est contenue dans z_{GP}. Elle est donc identique à celle du gaz parfait :

$$P\beta = \frac{N}{V} \qquad \text{d'où} \quad PV = Nk_BT$$

   La loi d'état est identique à celle du gaz parfait non relativiste.

2 Équilibre fermions-bosons à deux dimensions

On considère un gaz bidimensionnel de N fermions non relativistes de spin 1/2 et de masse m, dans une enceinte de taille $S = L_x \times L_y$.

1. Trouver la relation entre la densité $\rho = N/V$, la fugacité $\varphi = \exp(\mu/k_BT)$, et la température T. On pourra poser $\Lambda_{th} = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}\right)^{1/2}$. Quel est la signification de ce dernier paramètre ?

   Réponse :

   Le nombre d'états d'énergie dans un volume d^2p de l'espace des impulsions est :

$$d^2n = \frac{S}{(2\pi\hbar)^2}\, d^2p = \frac{S}{(2\pi\hbar)^2}\, d\theta_p\, pdp$$

   θ_p étant l'angle en coordonnées polaires dans l'espace des impulsions. La densité d'états d'énergie pour des fermions de spin 1/2 à deux dimensions s'obtient en intégrant sur θ_p :

$$g(E)\, dE = 2\, dn = \frac{S}{\pi\hbar^2}\, pdp = \frac{mS}{\pi\hbar^2}\, dE$$

   le facteur 2 étant dû à la dégénerescence de spin. On obtient donc $g(E) = \dfrac{mS}{\pi\hbar^2}$. Le nombre de particules se déduit en intégrant le facteur de Fermi $\bar{n}(E)$ sur tous les états quantiques :

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{+\infty} \bar{n}(E)\, g(E)\, dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\, dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-\beta\mu}\, e^x+1}\, dx \\ &= \frac{mk_BTS}{\pi\hbar^2}\, \ln\left(1+e^{\beta\mu}\right) = \frac{mk_BTS}{\pi\hbar^2}\, \ln(1+\varphi) = \frac{2S}{\Lambda_{th}^2}\ln(1+\varphi) \end{aligned}$$

   Par conséquent, la densité du système s'écrit :

$$\rho = \frac{N}{S} = \frac{2}{\Lambda_{th}^2}\ln(1+\varphi)$$

   Λ_{th} représente la longueur d'onde de de Broglie thermique, c'est-à-dire la longueur d'onde de de Broglie d'une particule dont l'énergie cinétique est de l'ordre de k_BT.

2. On suppose maintenant que les fermions sont sans interaction quand ils sont séparés, mais que deux fermions de spins opposés peuvent s'associer pour former un boson de spin 0 et de masse $2m$, avec une énergie de liaison $\Delta > 0$. La réaction réversible de transformation des fermions en bosons s'écrit

$$f_\uparrow + f_\downarrow \rightleftharpoons B$$

L'énergie $\varepsilon_f(p)$ d'un fermion d'impulsion p et l'énergie $\varepsilon_B(p)$ d'un boson d'impulsion p sont donc :

$$\varepsilon_f(p) = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_B(p) = -\Delta + \frac{p^2}{4m}$$

On suppose que la réaction est à l'équilibre. On appelle N_f le nombre de fermions et N_B le nombre de bosons. On définit ainsi respectivement la densité de fermions $\rho_f = N_f/V$ et la densité de bosons $\rho_B = N_B/V$. On conserve la notation $\rho = N/V$. Comment se traduit la conservation de la masse sur N_f et N_B, puis sur ρ_f et ρ_B ?

Réponse :

La masse totale est conservée. Elle vaut $M = mN_f + 2mN_B$. Ceci implique que $N_f + 2N_B$ est constant, et donc $\rho_f + 2\rho_B$ également. On pose $\rho = \rho_f + 2\rho_B$.

3. On appelle respectivement μ_f et μ_B les potentiels chimiques des populations de fermions et de bosons. Expliquer pourquoi $\mu_B = 2\,\mu_f$ à l'équilibre. (On pourra par exemple considérer la valeur de l'énergie libre du système complet en fonction de la répartition $(N_f,\, N_B)$).

Réponse :

Dans l'ensemble canonique, à l'équilibre, l'énergie libre est minimale. De la même façon que pour obtenir dans le cours la définition de la température, du potentiel chimique et de la pression dans l'ensemble microcanonique, on peut diviser le système complet en un système de fermions et un système de bosons, associer à chacun de ces systèmes des énergies libres $F_f(N_f)$ et $F_B(N_B)$ à nombre de particules constants, et exprimer que l'énergie libre totale $F = F_f + F_B$ est minimale pour la valeur N_f d'équilibre :

$$\frac{\partial F}{\partial N_f} = \frac{\partial F_f(N_f)}{\partial N_f} + \frac{\partial F_B(N_B)}{\partial N_f} = 0$$

Or $N_B = (N - N_f)/2$. On en déduit donc, en utilisant $\mu = \dfrac{\partial F}{\partial N}$:

$$\frac{\partial F}{\partial N_f} = 0 = \frac{\partial F_f(N_f)}{\partial N_f} + \frac{\partial N_B}{\partial N_f} \cdot \frac{\partial F_B(N_B)}{\partial N_B} = \mu_f - \frac{1}{2}\mu_B \qquad \text{d'où} \quad \mu_B = 2\,\mu_f.$$

4. En vous inspirant de la question 1, mais en utilisant la relation de dispersion des bosons donnée à la question 2, déterminer la relation entre la fugacité $\varphi_B = \exp\left(\dfrac{\mu_B}{k_B T}\right)$ des bosons, la densité ρ_B, la quantité Λ_{th} et la température T.

Réponse :

On reprend exactement le même raisonnement qu'à la question 1, mais cette fois les particules sont des bosons de spin 0 et de masse $2m$. La relation de dispersion des bosons vérifie toujours $2pdp = dE$. Par conséquent, la densité d'états quantiques de bosons est :

$$g(E) = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \tag{1}$$

Elle est identique à la densité d'états de fermions car la dégénérescence de spin a disparu mais le facteur 2 a été remplacé par celui de la masse. La seule différence est que maintenant, la borne basse des énergies est $-\Delta$ et non 0. On a donc l'expression du nombre total de bosons :

$$N_B = \int_{-\Delta}^{+\infty} \bar{n}(E)\, g(E)\, dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \int_{-\Delta}^{+\infty} \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_B)} - 1}\, dE = \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-\beta(\mu_B+\Delta)}\, e^x - 1}\, dx$$

en posant $x = (E+\Delta)/k_BT$. On a donc

$$N_B = -\frac{mk_BTS}{\pi\hbar^2} \ln\left(1 - e^{\beta(\mu_B+\Delta)}\right) = -\frac{mk_BTS}{\pi\hbar^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi_B\right) = -\frac{2S}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi_B\right)$$

et par conséquent :

$$\rho_B = \frac{N_B}{S} = -\frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi_B\right)$$

5. En utilisant les résultats des questions précédentes, trouver une nouvelle relation entre la fugacité des fermions $\varphi = \exp\left(\frac{\mu_f}{k_BT}\right)$, la densité ρ et la température T, lorsque la réaction de bosonisation est possible.

   Réponse :

   On sait que $\rho_f + 2\rho_B = \rho$ et que $\mu_B = 2\mu_f$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\rho = \rho_f + 2\rho_B &= \frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln(1+\varphi) - \frac{4}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi_B\right) = \frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln(1+\varphi) - \frac{4}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}e^{\beta\mu_B}\right) \\
&= \frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln(1+\varphi) - \frac{4}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}e^{2\beta\mu_f}\right) = \frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln(1+\varphi) - \frac{4}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2\right) \\
&= -\frac{2}{\Lambda_{th}^2} \ln\left(\frac{(1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2)^2}{1+\varphi}\right)
\end{aligned}$$

   soit encore : $\quad (1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2)^2 = e^{-\rho\Lambda_{th}^2/2}\,(1+\varphi)$

6. On se place dans la limite où $\rho\Lambda_{th}^2 \ll 1$ à T fixé. Quelle est la signification physique de cette approximation ? Exprimer la fugacité φ à l'ordre principal en $\rho\Lambda_{th}^2$ dans cette limite, puis le rapport des densités de fermions et de bosons ρ_f/ρ_B.

   Réponse :

   $\rho\Lambda_{th}^2 \ll 1$ signifie également que $V/N \gg \Lambda_{th}^2$, et donc que la distance caractéristique entre particules ($\sqrt{V/N}$ puisqu'on est à 2D) est bien supérieure à la longueur d'onde de de Broglie thermique. Les particules sont donc très éloignées les unes des autres par rapport aux distances quantiques, et les corrélations quantiques se résument à l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

   Dans ce cadre, on voit que l'équation de la question 5 donne une valeur de φ proche de 0. On développe alors cette équation au premier ordre en φ ce qui donne : $1 + \varphi \approx e^{\frac{\rho\Lambda_{th}^2}{2}}$, soit $\varphi \approx \frac{\rho\Lambda_{th}^2}{2}$.

   Par conséquent :

$$\frac{\rho_f}{\rho_B} = -\frac{\ln(1+\varphi)}{\ln(1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2)} \approx \frac{2e^{-\beta\Delta}}{\rho\Lambda_{th}^2}$$

L'équilibre est très déplacé avec une majorité de fermions (au moins pour des températures grandes devant Δ/k_B). À haute température, la contribution entropique à l'énergie libre est plus importante que la contribution énergétique, et il y a donc intérêt à former plus de particules pour une même densité de masse, c'est-à-dire des fermions.

7. On se place dans la limite opposée où $\rho\Lambda_{th}^2 \gg 1$ à T fixé. Quelle est la signification physique de cette approximation ? Exprimer la fugacité φ à l'ordre principal en $e^{-\rho\Lambda_{th}^2}$ dans cette limite, puis les valeurs respectives des densités ρ_f et ρ_B à l'ordre principal (donc un seul terme). Interpréter le résultat.

   Réponse :

   $\rho\Lambda_{th}^2 \gg 1$ signifie également que $V/N \ll \Lambda_{th}^2$, et donc que la distance caractéristique entre particules ($\sqrt{V/N}$ puisqu'on est à 2D) est bien inférieure à la longueur d'onde de de Broglie thermique. Les particules sont donc très proches les unes des autres, et les corrélations quantiques jouent un rôle important. C'est la limite opposée de l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

   L'équation de la question 5 nous montre alors que $1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2 \ll 1$ et donc que $\varphi = e^{-\frac{\beta\Delta}{2}}(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. On insère cette expression dans l'équaton en φ :

$$\left(1 - e^{\beta\Delta}e^{-\beta\Delta}(1+\varepsilon)^2\right)^2 = e^{-\frac{\rho\Lambda_{th}^2}{2}}\left(1 + e^{-\frac{\beta\Delta}{2}}(1+\varepsilon)\right)$$

   d'où

$$4\varepsilon^2 \approx e^{-\frac{\rho\Lambda_{th}^2}{2}}\left(1 + e^{-\frac{\beta\Delta}{2}}\right) \qquad \text{et donc} \qquad \varepsilon \approx -\frac{1}{2}e^{-\frac{\rho\Lambda_{th}^2}{4}}\sqrt{1 + e^{-\frac{\beta\Delta}{2}}}$$

   On en déduit les densités à l'ordre 0 :

$$\rho_f \approx \frac{2}{\Lambda_{th}^2}\ln\left(1 + e^{-\frac{\beta\Delta}{2}}\right) \ll \rho$$

$$\rho_B = -\frac{2}{\Lambda_{th}^2}\ln\left(1 - e^{\beta\Delta}\varphi^2\right) \approx -\frac{2}{\Lambda_{th}^2}\ln(-2\varepsilon) \approx \frac{2}{\Lambda_{th}^2}\frac{\rho\Lambda_{th}^2}{4} = \frac{\rho}{2}$$

   Les particules sont pratiquement toutes regroupées sous forme de bosons, forme favorable énergétiquement à haute densité ou à basse température, et donc en présence de fortes corrélations quantiques.

3 Entropie de mélange

On considère un gaz composé d'un mélange de deux gaz monoatomiques différents, de nombre d'atomes respectifs N_1 et N_2. Les atomes ont tous le même spin. On fera l'approximation que ces deux gaz sont parfaits. Le système est maintenu à une température constante T.

1. Quelle est, en fonction de N_1 et N_2, la différence d'entropie entre le gaz mélangé dans un volume $(V_1 + V_2)$ et les deux gaz séparés dans deux enceintes distinctes de volumes respectifs V_1 et V_2 ? (On supposera que chaque gaz emporte un volume proportionnel à son nombre d'atomes). On pourra par exemple évaluer les fonctions de partition dans les deux situations.

   Réponse :

   La fonction de partition d'un gaz parfait monoatomique de N atomes de spin J à température T s'écrit :

$$Z(T,N,V) = \frac{z(T,V)^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left[(2J+1)V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]^N = \frac{K^NV^N}{N!}$$

où K est une constante dépendant uniquement du spin, de la masse et de la température. Dans un mélange gazeux, les états quantiques sont les mêmes pour toutes les molécules, indépendamment de leur nature (les ondes planes dont le vecteur d'onde est quantifié par la taille de la boîte). Par conséquent, la fonction de partition du mélange s'écrit :

$$Z = \frac{z_1(T, V_1+V_2)^{N_1} z_2(T, V_1+V_2)^{N_2}}{N_1! N_2!} = \frac{K_1^{N_1}(V_1+V_2)^{N_1} K_2^{N_2}(V_1+V_2)^{N_2}}{N_1! N_2!}$$

Le dénominateur est $N1!N2!$ car les atomes sont différents. S'ils étaient identiques, ce facteur serait $(N_1+N_2)!$.

Si le gaz est séparé en deux sous-volumes, V_1 et V_2, chacun proportionnel aux nombres d'atomes N_1 et N_2, la différence d'entropie entre le gaz mélangé dans un volume total V_1+V_2 et les gaz séparés est :

$$\begin{aligned}\Delta S = -\frac{\partial \Delta F}{\partial T} &= k_B \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\ln\left(\frac{K_1^{N_1}(V_1+V_2)^{N_1} K_2^{N_2}(V_1+V_2)^{N_2}}{N_1! N_2!}\right) - \ln\left(\frac{K_1^{N_1} V_1^{N_1}}{N_1!}\frac{K_2^{N_2} V_2^{N_2}}{N_2!}\right)\right)\right] \\ &= k_B \frac{\partial}{\partial T}\left[T \ln\left(\frac{(V_1+V_2)^{N_1+N_2}}{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}\right)\right]\end{aligned}$$

On utilise le fait que $V_1 = N_1 v$, $V_2 = N_2 v$:

$$\Delta S = k_B \frac{\partial}{\partial T}\left[T \ln\left(\frac{(N_1+N_2)^{N_1+N_2}}{N_1^{N_1} N_2^{N_2}}\right)\right] = k_B \ln\left(\frac{(N_1+N_2)^{N_1+N_2}}{N_1^{N_1} N_2^{N_2}}\right)$$

2. On suppose que $N_1 = \alpha N$ et $N_2 = (1-\alpha)N$, avec $0 < \alpha < 1$. Quelle énergie minimale faut-il fournir au système initial pour séparer complètement les deux gaz, en fonction de T, N et α ?

   Réponse :

   Si l'on prend $N_1 = \alpha N$ et $N_2 = (1-\alpha)N$, alors

$$\Delta S = k_B \ln\left(\frac{N^N}{\alpha^N (1-\alpha)^N N^N}\right) = -N k_B \Big[\alpha \ln(\alpha) + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\Big]$$

   L'énergie à fournir est alors $T\Delta S$ soit :

$$E = -N k_B T \Big[\alpha \ln(\alpha) + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\Big]$$

Première partie

Variations sur la torsion des barres en élasticité linéaire et isotrope

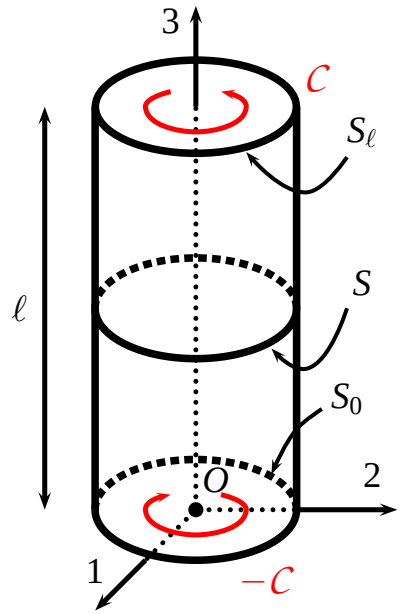


FIGURE 1: Torsion d'un barreau cylindrique de section quelconque : schéma de principe.

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés S et Γ. On suppose que S est simplement connexe, sauf pour la question 2.5. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici.

Le problème est traité dans le contexte isotherme (température uniforme et constante). Dans toute cette partie, le comportement du matériau est considéré comme élastique linéaire et isotrope, du moins jusqu'à une limite d'élasticité précisée dans certaines questions du problème.

1. Préliminaire : fonction de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \tag{1}$$

où le déplacement u_3 correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. L'inconnue $\varphi(X_1, X_2)$, solution d'un problème de Neumann, s'appelle *fonction de gauchissement*. Le coefficient α désigne la rotation linéique constante imposée et s'interprète comme le rapport $\delta\theta/\ell$, de la rotation relative $\delta\theta$ appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur ℓ du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique : $\Delta\varphi = 0$, où Δ désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement φ. Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour Γ.

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel $\Psi(X_1, X_2)$, appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \tag{2}$$

La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$, avec des conditions aux limites appropriées sur Γ vues en exercice.

La connaissance des fonctions φ ou Ψ permet de caractériser complètement la solution du problème de torsion.

Donner l'expression du cisaillement, c'est–à–dire la norme de la contrainte tangentielle, notée τ, agissant en chaque point de la section de normale $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{e}}_3$, du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction $f(X_1, X_2)$ de classe C^2 est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif : $\Delta f \geq 0$. On démontre que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour Γ (on pourra s'aider de la fonction τ^2).

2. Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 2, est une ellipse dont le contour Γ a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

où $2a$ et $2b$ désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

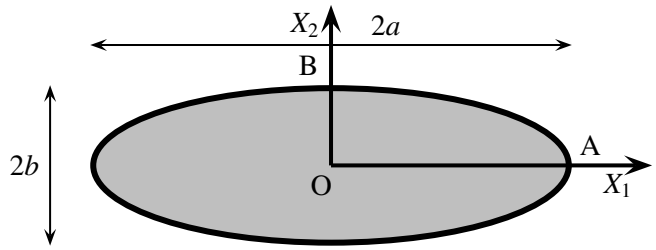


FIGURE 2: Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

2.1. Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \tag{4}$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour φ.

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \tag{5}$$

et on exprimera k en fonction de a et b, exclusivement.

2.2. Etude de la section déformée

Donner les conditions à satisfaire pour respecter le contexte infinitésimal.

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section S le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de a, b, α.

2.3. Rigidité de torsion

Exprimer le couple $\mathcal{C}$ en fonction de l'angle linéique imposé α.

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{ab^3}{4} \tag{6}$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport b/a permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport b/a est petit.

2.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Donner les contraintes principales, c'est–à–dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de μ, α, k, X_1, X_2, puis en remplaçant k par son expression en fonction de a et b.

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte σ_0 déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto–plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.
Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué $\alpha = \alpha_0$ pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer α_0 en fonction de σ_0, μ, a et b, pour les deux critères.

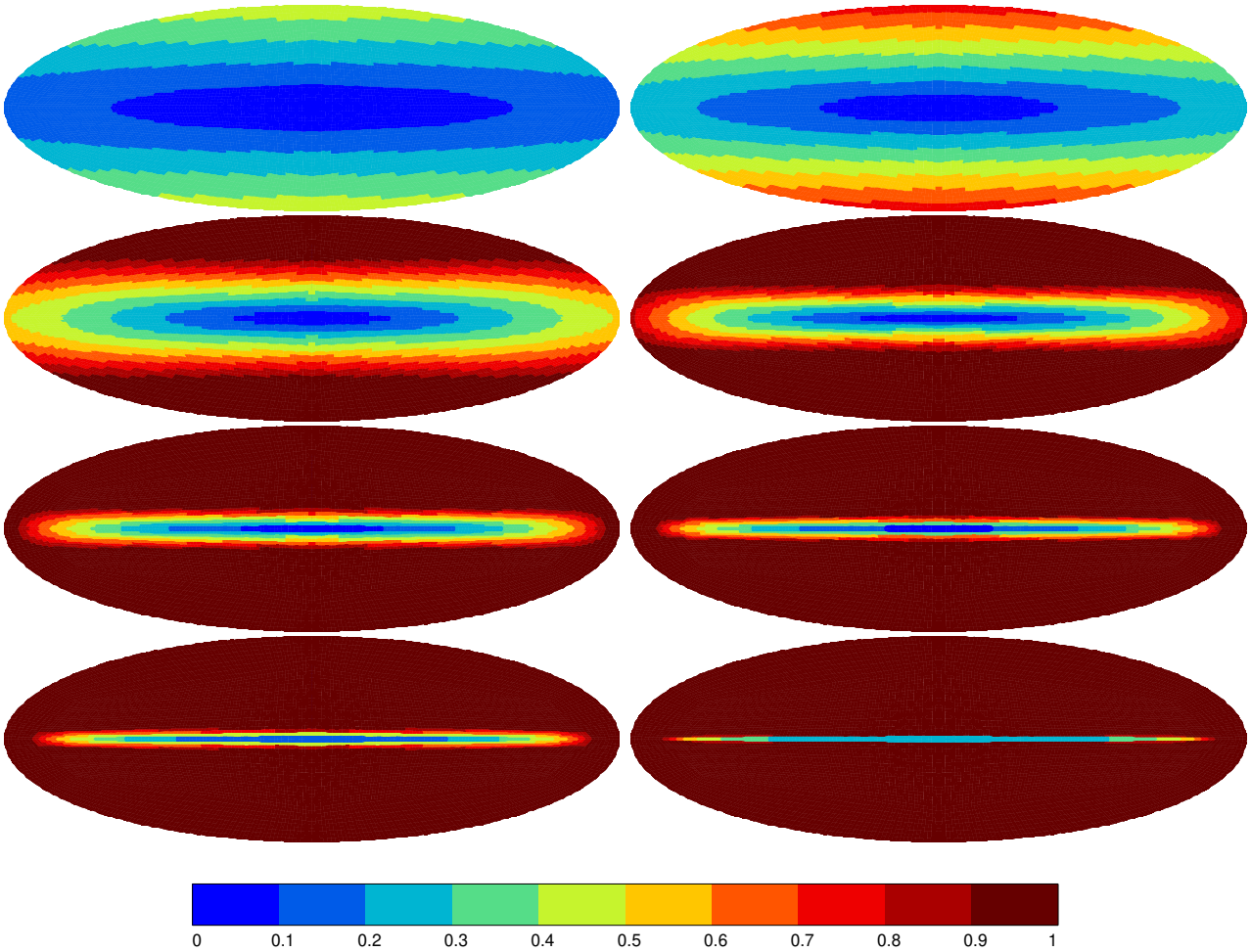


FIGURE 3: Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité σ_0 pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposée, α. Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.

La figure 3 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises

égale à σ_0 tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentées est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par σ_0. Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élasto–plasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéique est représentée sur la figure 4.
Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.
Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

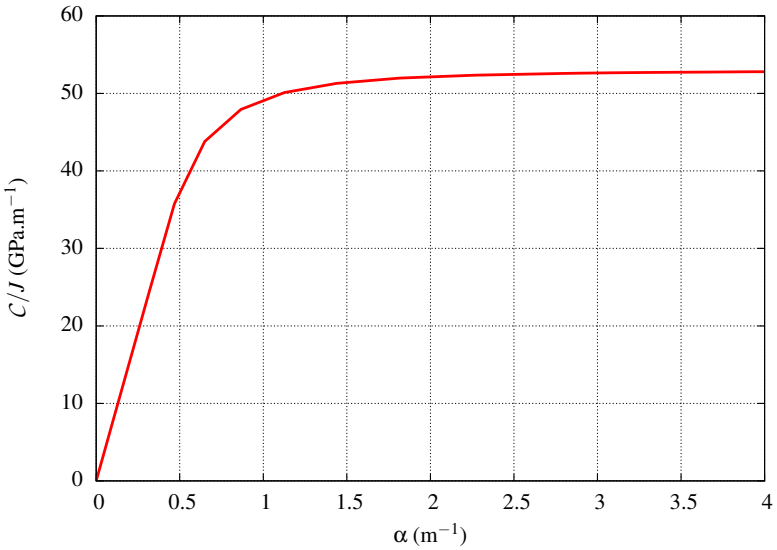


FIGURE 4: Moment normalisé par le moment quadratique de torsion J en fonction de l'angle linéique appliqué pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto–plastique.

2.5. Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 5. Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (3) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \tag{7}$$

où η est un nombre réel $0 < \eta < 1$.
Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre η.

3. Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur $3a$, comme sur la figure 6.

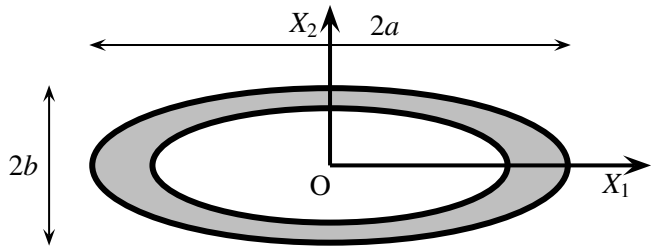


FIGURE 5: Tube de section elliptique creuse.

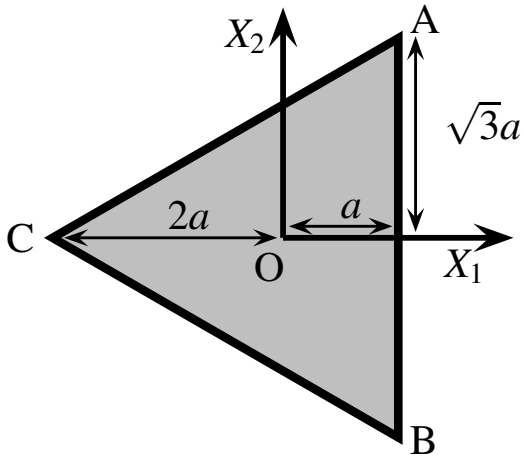


FIGURE 6: Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur $3a$ et côté de longueur $2a\sqrt{3}$.

3.1. Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.
Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2X_2 + CX_1X_2^2 + DX_2^3 \tag{8}$$

permet de répondre à la question.

3.2. Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan u_3 est maximum.
Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

3.3. Rigidité de torsion

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5}a^4\mu\alpha \tag{9}$$

3.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.

Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique α_0.

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 7 et 8 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.

Commenter ces figures.

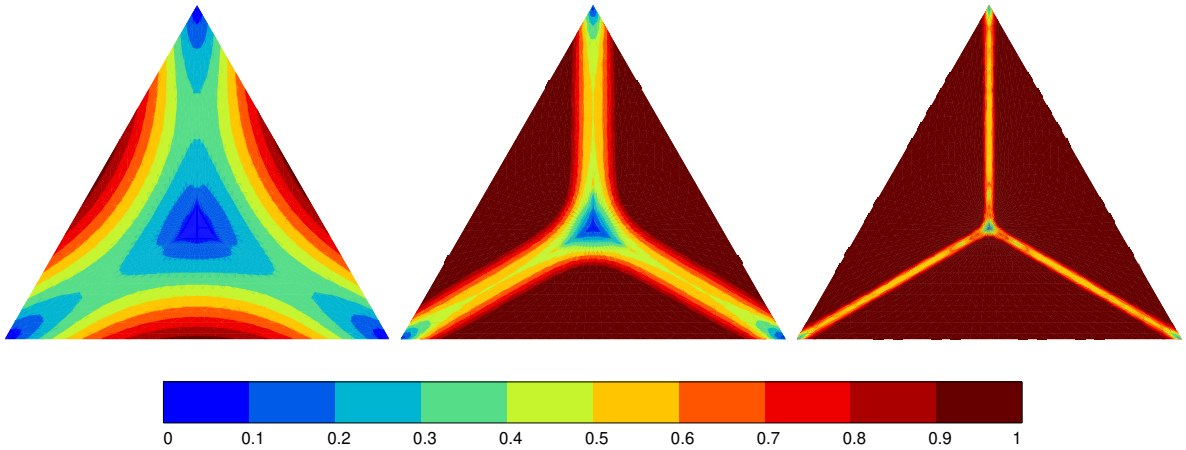


FIGURE 7: Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisée par la limite d'élasticité σ_0 pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α.

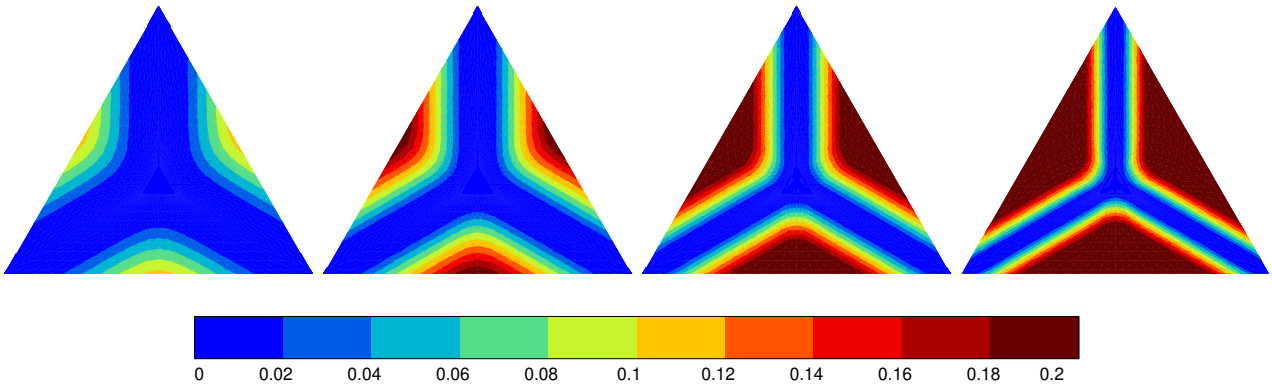


FIGURE 8: Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α.

3.5. Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

Deuxième partie

Variations autour du seau de Newton

If a vessel, hung by a long cord, is so often turned about that the cord is strongly twisted, then filled with water, and held at rest together with the water ; after, by the sudden action of another force, it is whirled about in the contrary way, and while the cord is untwisting itself, the vessel continues for some time this motion ; the surface of the water will at first be plain, as before the vessel began to move ; but the vessel by gradually communicating its motion to the water, will make it begin sensibly to revolve, and recede by little and little, and ascend to the sides of the vessel, forming itself into a concave figure. (d'après Wikipedia)

Isaac Newton, *Principia*, 1687.

Inspirés par le célèbre seau de Newton (*Newton's bucket*), nous nous intéressons aux mouvements d'un fluide dans des réservoirs en rotation. On étudie d'abord le cas où le récipient a déjà communiqué son mouvement au fluide. On s'interroge ensuite, dans le cas d'un fluide visqueux, sur la façon dont le récipient transmet son mouvement au fluide initialement au repos. Dans tous les cas, on se restreint au mouvement stationnaire d'un fluide incompressible.

L'expérience du seau de Newton est un moyen de détecter le caractère galiléen ou non du référentiel d'observation, un peu comme le pendule de Foucault. Elle a alimenté les réflexions autour du concept de relativité de Newton à Mach.

4. Etude de la surface d'un fluide en rotation dans une réservoir cylindrique

Un fluide parfait incompressible est contenu dans un récipient cylindrique (section circulaire) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante Ω, comme sur la figure 9. Il est également soumis à la gravité $\underline{\boldsymbol{g}} = -g\underline{\boldsymbol{e}}_z$.

On observe l'expérience depuis un référentiel supposé galiléen dans un repère fixe, en coordonnées cylindriques autour de l'axe z.

4.1. Champ eulérien des vitesses et champ de pression

Exprimer le champ de vitesses du fluide correspondant à une rotation rigide autour de l'axe z à la vitesse angulaire constante Ω.

Exprimer le champ de pression au sein du fluide, à une constante près.

4.2. Forme de la surface libre du fluide en rotation

En notant R le rayon du cylindre, H la hauteur de fluide dans le récipient au repos et p_0 la pression atmosphérique s'appliquant à la surface du fluide, déterminer complètement le champ de pression exprimé précédemment.

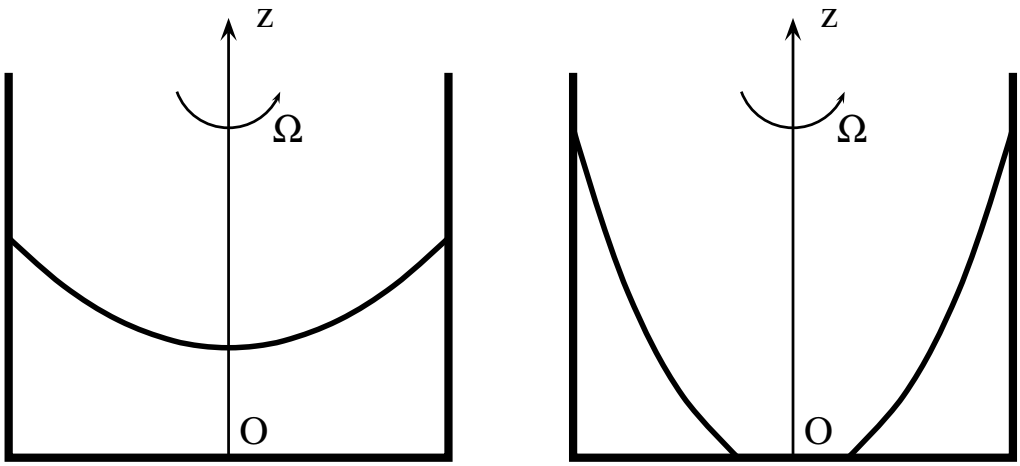


FIGURE 9: Réservoir cylindrique en rotation autour de son axe z contenant un liquide : surface libre du fluide pour une vitesse de rotation Ω plutôt lente à gauche et plus rapide à droite.

Quelle est la forme de la surface libre du fluide en rotation uniforme ?
Indiquer la valeur critique du nombre de Froude [1] défini par

$$\mathcal{F}r = \frac{R^2\Omega^2}{gH} \tag{10}$$

pour laquelle le creux du fluide touche le fond. Pour des valeurs supérieures, on se trouve dans la situation de la figure 9 à droite. On donnera l'équation de la surface libre dans ce cas également.

Faire l'application numérique dans le cas où $R = H = 0.5$ m et $\Omega = 20$ tours par minutes. Calculer le nombre de Froude et la différence de niveau de fluide entre le point haut et le point bas de la surface libre.

4.3. Cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible

Résoudre le même problème dans le cas où le fluide est un fluide newtonien incompressible de viscosité $\mu = 2$ Pa.s.

5. Fluide en rotation dans un réservoir ellipsoïdal

Un récipient de forme ellipsoïdale contenant un fluide parfait incompressible est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante Ω autour de l'un de ses axes principaux. On adopte un système de coordonnées cartésiennes dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde à un instant donné. L'axe de rotation est alors x_3 et l'équation de l'ellipsoïde formant le bord du récipient (dont l'épaisseur est négligée) est dans ce repère à l'instant donné :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

1. Le nombre de Froude compare le carré des vitesses, ici $R^2\Omega^2$ à la gravitation, gH.

5.1. Recherche d'un champ de vitesse dérivant d'un potentiel

On recherche une solution stationnaire du problème en vitesses dérivant d'un potentiel $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \text{grad}\,\varphi = \varphi_{,1}\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \varphi_{,2}\underline{\boldsymbol{e}}_2 + \varphi_{,3}\underline{\boldsymbol{e}}_3$$

Montrer que la fonction (5) trouvé dans l'exercice sur la torsion fournit un potentiel satisfaisant les conditions requises par le mouvement stationnaire du fluide dans le récipient ellipsoïdal considéré. On déterminera la valeur de la constante k en fonction de Ω et des caractéristiques de l'ellipsoïde.

Exprimer complètement le champ des vitesses obtenu ainsi que son gradient, $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$.

Décrire les lignes de courant et trajectoires correspondantes.

Commenter le cas particulier $a = b$.

5.2. Mouvement relatif du fluide par rapport au récipient

Le mouvement relatif du fluide par rapport au récipient ellipsoïdal est obtenu en soustrayant au champ de vitesse absolu trouvé précédemment le champ des vitesses du récipient que l'on sait en rotation autour de l'axe x_3 à vitesse angulaire Ω constante.

Donner l'expression de ce champ des vitesses relatives et décrire la forme des lignes de courants correspondantes.

5.3. Calcul du champ de pression et forme de la surface libre

A partir du champ des vitesses obtenu au paragraphe 5.1, calculer la forme du champ de pression dans le fluide et indiquer la forme de la surface libre.

6. Prise en compte de l'accélération de Coriolis : couche d'Ekman

Pour comprendre comment le mouvement du réservoir en rotation se transmet au fluide initialement au repos, il faut faire appel au comportement visqueux du fluide et aux conditions d'adhérence aux parois. Nous n'allons pas résoudre ce problème transitoire quelque peu délicat mais nous intéresser à une situation intermédiaire stationnaire où le fluide a un mouvement différent près de la paroi et loin de cette paroi.

On rappelle les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible sous la forme

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = -\text{grad}\,\frac{p}{\rho} + \underline{\boldsymbol{g}} + \nu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} \tag{12}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est appelée viscosité cinématique.

On se place dans un référentiel tournant à la vitesse constante Ω autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ en gardant la même origine. Le changement de référentiel s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{x}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{x}}\,, \quad \underline{\boldsymbol{v}}' = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}' + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{v}} \tag{13}$$

où $\underline{\boldsymbol{v}}'$ désigne la vitesse par rapport au référentiel tournant et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ est la rotation autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ d'angle Ωt.

Situation physique	R (m)	H (m)	Ω (s^{-1})	$\mathcal{F}r$	$\mathcal{E}k$ eau air	δ (m) eau air
Seau de Newton	0.5	0.5				
Canal	100	10				
Météorologie	100	1000				

TABLE 1: Nombres de Froude et d'Ekman pour trois situations physiques très différentes.

6.1. Caractérisation des effets centrifuges et de Coriolis

Exprimer les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant en fonction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$ et de $\underline{\boldsymbol{v}}'$. Reconnaître les contributions des forces volumiques centrifuges et de Coriolis.

On néglige le terme convectif dans l'équation précédente (faible nombre de Reynolds) et on se place dans le cas stationnaire. Le nombre de Froude (10) précédemment introduit compare les effets de la force centrifuge avec ceux de la gravitation. On s'intéresse maintenant au nombre d'Ekman qui compare les effets de Coriolis aux effets de viscosité :

$$\mathcal{E}k := \frac{\nu}{2\Omega L^2} \tag{14}$$

où L est une longueur caractéristique du problème.

Nous allons juger de l'importance relative des contributions de Froude et d'Ekman dans trois situations très différentes :

- Le cas du seau de Newton avec les données H, R et Ω précédemment étudiées ;
- Le cas d'un canal rempli d'eau de largeur R et de profondeur H. Le fluide est soumis à la rotation terrestre ;
- Le cas de la couche atmosphérique en contact avec la surface de la Terre animée d'une rotation Ω autour de son axe. Il s'agit d'une application à la météorologie.

On prendra $L = H$ pour l'évaluation du nombre d'Ekman. Compléter les colonnes vides du tableau 1 (à l'exception de la dernière colonne), lorsque le fluide est l'eau ou l'air à température ambiante. Dans le cas de l'air on prendra une viscosité cinématique $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Commenter.

6.2. Champ de pression dans la couche d'Ekman

On étudie comment le fluide en contact avec le fond du seau de Newton entraîne les couches supérieures dans son mouvement. La zone de transition entre le mouvement du fluide près de la paroi et le mouvement loin de la paroi s'appelle couche d'Ekman. Nous allons caractériser son épaisseur et la forme des champs de pression et de vitesses dans cette couche. Nous sommes toutefois amenés à grandement simplifier le problème.

Dans cette question et la suivante, on adopte un système de coordonnées cartésiennes orthonormées dans le référentiel tournant à la vitesse Ω. Par souci de concision, la notation prime pour les variables dans ce référentiel est omise.

On considère une situation idéalisée où le fond d'un réservoir ou d'un canal, situé à la cote $x_3 = 0$, est en contact avec le fluide à vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}$ nulle tandis qu'un écoulement $\underline{\boldsymbol{v}} = V\underline{\boldsymbol{e}}_1$ est observé sur une couche épaisse du fluide située à une certaine distance du fond et appelée couche supérieure. L'extension du fluide dans les directions 1 et 2 est considérée comme infinie (bords très éloignés). La couche d'Ekman désigne la zone de transition du mouvement du fluide entre le fluide immobilisé par le fond et le mouvement de la couche supérieure.

On suppose que les effets centrifuges et convectifs sont négligeables et on s'intéresse aux seuls effets de Coriolis et de viscosité, ce qui conduit aux équations de Navier–Stokes réduites suivantes :

$$\text{grad}\,\frac{p}{\rho} = \underline{\boldsymbol{g}} - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \nu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} \tag{15}$$

dans le référentiel tournant considéré. Le taux de rotation Ω uniforme et constant s'effectue autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$.

Calculer le champ de pression qui règne dans la couche supérieure.

Justifier que le champ de vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}$ recherché est une fonction de x_3 uniquement.

En déduire que le champ de pression trouvé dans la partie supérieure est également valable dans la couche d'Ekman.

6.3. Champ des vitesses dans la couche d'Ekman

Ecrire alors les équations différentielles portant sur $v_1(x_3)$ et $v_2(x_3)$.

Montrer que v_1 est solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^4}{dt^4}(V - v_1) = -\frac{4}{\delta^4}(V - v_1) \tag{16}$$

On donnera l'expression de la longueur δ en fonction de ν et Ω.

Remplir la dernière colonne du tableau 1 et commenter.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant les racines quatrièmes (complexes) de $-4/\delta^4$. Justifier que l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de δ.

* * *

Première partie

Variations sur la torsion des barres en élasticité linéaire et isotrope

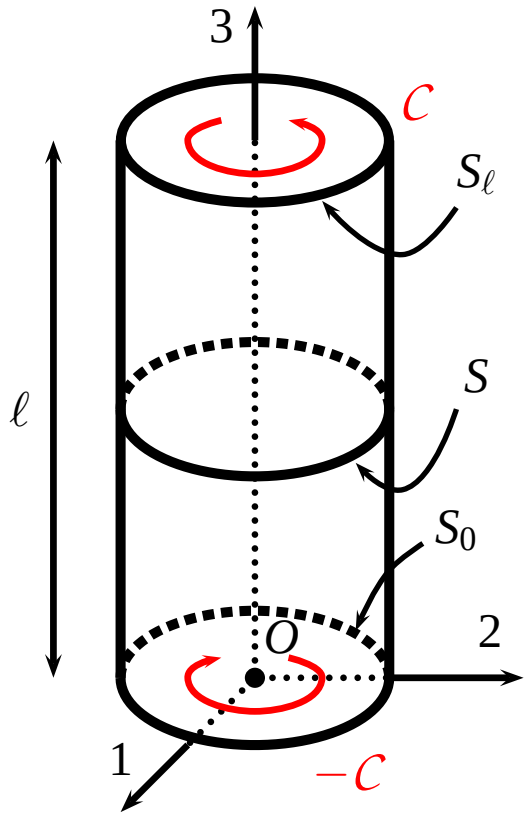


FIGURE 1: Torsion d'un barreau cylindrique de section quelconque : schéma de principe.

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés S et Γ. On suppose que S est simplement connexe, sauf pour la question 2.5. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici. On renvoie à Sokolnikoff (1946); Sadd (2005) pour l'étude de la torsion des barres à section rectangulaire.

1. Préliminaire : fonction de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthornormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \tag{1}$$

où le déplacement u_3 correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. L'inconnue $\varphi(X_1, X_2)$, solution d'un problème de Neumann [1] s'appelle *fonction de gauchissement*. Le coefficient α désigne la rotation linéique constante imposée et s'interprète comme le rapport $\delta\theta/\ell$, de la rotation relative $\delta\theta$ appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur ℓ du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique : $\Delta\varphi = 0$, où Δ désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement φ. Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour Γ.

Ces relations sont

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2)$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2)$$

La condition de bord libre se traduit par la condition de Neumann

$$\varphi_{,1} n_1 + \varphi_{,2} n_2 = n_1 X_2 - n_2 X_1, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Gamma \tag{2}$$

où n_1, n_2 désigne les composantes cartésiennes du vecteur normal le long du contour Γ ($n_3 = 0$), tandis que les conditions d'équilibre local statique en l'absence de forces volumiques se traduisent par la condition d'harmonicité de la fonction de gauchissement. Remarquer que la condition (2) a pour conséquence que, relativement à une similitude λ, φ sera en λ^2, i.e. proportionnel à la surface.

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel $\Psi(X_1, X_2)$, appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme [2] :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \tag{3}$$

La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$, avec des conditions aux limites appropriées sur Γ vues en exercice.

1. cf. le problème aux limites de Neumann (**??**) et (**??**).
2. cf. le problème aux limites de Dirichlet (**??**).

La connaissance des fonctions φ ou Ψ permet de caractériser complètement la solution du problème de torsion.

Donner l'expression du cisaillement, c'est–à–dire la norme de la contrainte tangentielle, notée τ, agissant en chaque point de la section de normale $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{e}}_3$, du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction $f(X_1, X_2)$ de classe C^2 est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif : $\Delta f \geq 0$. On démontre[3] que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour Γ (on pourra s'aider de la fonction τ^2).

Le vecteur-contrainte en chaque point de la section S a pour composante $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, 0)$. La contrainte normale est donc nulle et la contrainte tangentielle vaut $\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}$. Calculons le laplacien de $\tau^2 = \Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2$:

$$\begin{aligned}
(\tau^2)_{,1} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,11} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,21}, \quad (\tau^2)_{,2} = 2\Psi_{,1}\Psi_{,12} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,22} \\
(\tau^2)_{,11} &= 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,211} + 2\Psi_{,11}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,111} \\
(\tau^2)_{,22} &= 2\Psi_{,22}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,222} + 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,122}
\end{aligned}$$

Comme $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = -2\mu\alpha$, on voit que $\Psi_{,112} = -\Psi_{,111}$ et que $\Psi_{,221} = -\Psi_{,222}$. Le calcul du laplacien du cisaillement au carré se simplifie alors :

$$\Delta\tau^2 = 2\Psi_{,11}^2 + 4\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,22}^2 \geq 0$$

Le carré du cisaillement est donc une fonction sous–harmonique, ce qui implique que le cisaillement trouve son maximum sur le contour Γ.
Si le contour est convexe, ce maximum est atteint aux points du contour les plus proches du centre géométrique de la section.

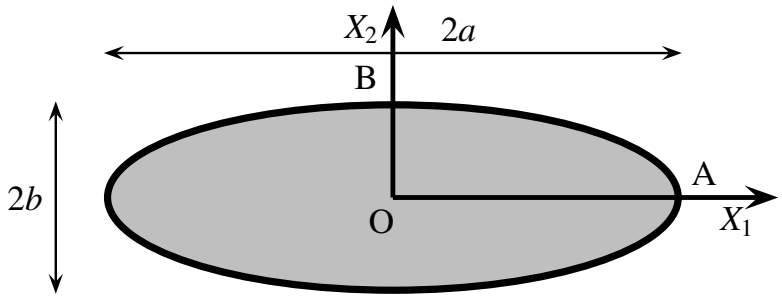


FIGURE 2: Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

2. Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 2, est une ellipse dont le contour Γ a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

où $2a$ et $2b$ désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

3. Voir Sokolnikoff (1946) (p. 117) pour la preuve.

2.1. Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \tag{5}$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour φ.

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi^{\bigcirc}(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \tag{6}$$

et on exprimera k en fonction de a et b, exclusivement.

La première condition requise est que la fonction soit harmonique ce qui implique $\Delta\varphi = 2A + 2C = 0$, si bien que $A = -C$.

La fonction doit ensuite satisfaire les conditions aux limites de Neumann (2). Pour cela, on note que le vecteur normal en un point de l'ellipse Γ est parallèle au vecteur $[X_1/a^2 \quad X_2/b^2 \quad 0]$. La condition (2) s'écrit alors :

$$(2AX_1 + 2BX_2)\frac{X_1}{a^2} + (2BX_1 - 2AX_2)\frac{X_2}{b^2} = \frac{X_1X_2}{a^2} - \frac{X_1X_2}{b^2}$$

$$2A(\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2}) + 2B(a^{-2} + b^{-2})X_1X_2 = X_1X_2(a^{-2} - b^{-2})$$

L'identification fournit $A = 0$ et $2B = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$ ce qui conduit à la fonction (6) avec

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Cette relation implique que $k < 1$.

2.2. Etude de la section déformée

Donner les conditions à satisfaire pour respecter le contexte infinitésimal.

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section S le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de a, b, α.

Maintenant que la fonction de gauchissement est déterminée, le champ de déplacement s'écrit

$$u_1 = -\alpha X_2X_3, \quad u_2 = \alpha X_1X_3, \quad u_3 = -k\alpha X_1X_2$$

Le gradient du champ de déplacement vaut quant à lui

$$\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}} = \alpha X_3(\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 - \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2) + \alpha X_1(\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 - k\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2) - \alpha X_2(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + k\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1)$$

Le contexte infinitésimal exige que les composantes du gradient du déplacement soient suffisamment petites :

$$|\alpha X_3| \leq |\delta\theta| \ll 1, \quad |\alpha X_1| \leq |\delta\theta|\frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |\alpha X_2| \leq |\delta\theta|\frac{b}{\ell} \ll 1$$

$$|k\alpha X_1| \leq k|\delta\theta|\frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |k\alpha X_2| \leq k|\delta\theta|\frac{b}{\ell} \ll 1$$

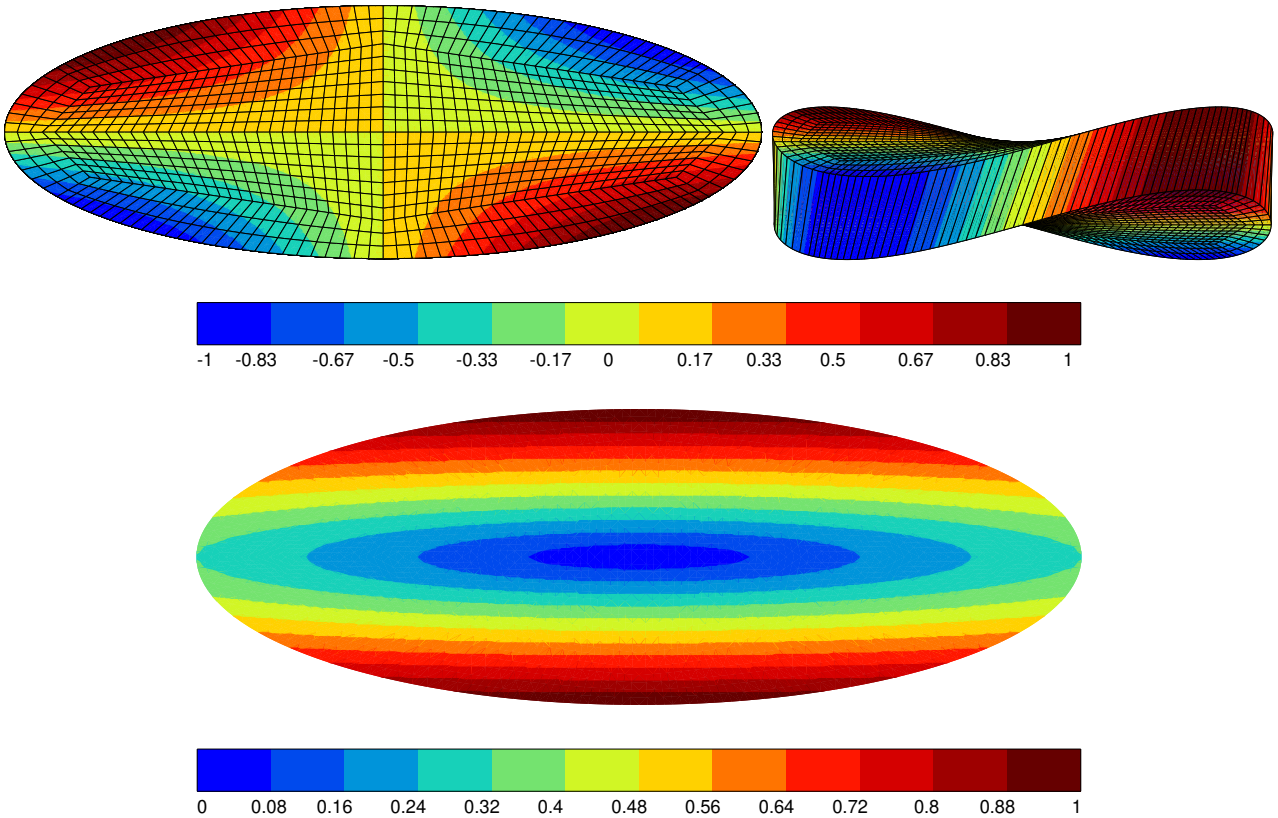


FIGURE 3: Champ de déplacement u_3 (gauchissement) normalisé par la valeur maximale atteinte : lignes de niveau dans la section elliptique (en haut à gauche) et vue de la déformée d'une tranche de profil (en haut à droite, déplacements exagérés d'un facteur 10). Lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises normalisée par la valeur maximale (en bas). Le rapport des paramètres de l'ellipse est $a/b = 3$.

Dans le cas d'une barre élancée, $\mathrm{Max}(a, b) \ll \ell$, la première condition reste la plus limitante. La fonction X_1X_2 est maximale sur le contour Γ. On peut calculer la valeur du carré du déplacement sur le bord de l'ellipse :

$$u_3^2 = k^2\alpha^2 X_1^2 X_2^2 = k^2\alpha^2 X_1^2 b^2 (1 - \frac{X_1^2}{a^2})$$

Le maximum de cette quantité par rapport à X_1^2 s'obtient en calculant

$$\frac{du_3^2}{dX_1^2} = k^2\alpha^2 b^2 (1 - 2\frac{X_1^2}{a^2}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad X_2 = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$$

En ces 4 points, on trouve le déplacement hors plan maximal :

$$u_3^{max} = \alpha k \frac{ab}{2} = \alpha \frac{ab(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$$

La distribution de u_3 et les extrema associés sont visibles sur la figure 3.

2.3. Rigidité de torsion

Exprimer le couple $\mathcal{C}$ en fonction de l'angle linéique imposé α.

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{ab^3}{4} \tag{7}$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport b/a permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport b/a est petit.

La relation entre le couple et l'angle linéique est $\mathcal{C} = \mu J \alpha$ où l'expression de J est donnée par la formule (**??**) établie dans le chapitre consacré à la torsion des barres :

$$J = \int_S \left((\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2)^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1)^2 \right) dS = (1-k)^2 \int_S X_1^2 dS + (1+k)^2 \int_S X_2^2 dS = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Les expressions suivantes ont été utilisées :

$$1 + k = \frac{2a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1 - k = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}$$

La rigidité de torsion de la barre est μJ. L'optimisation de cette rigidité à aire imposée $\pi ab = S_0$ est possible en éliminant $b = S_0/\pi a$ dans l'expression précédent de J et en dérivant par rapport à a^2. Cette expression est alors proportionnelle à $a^2/(S_0^2/\pi^2 + a^4)$ et sa dérivée s'annule en $a^2 = S_0/\pi$ qui conduit à $a = b$. La fonction précédente est nulle en $a = 0$ et en $a = +\infty$ et atteint un maximum à la valeur annoncée. La barre à section circulaire présente donc le maximum de rigidité relative en torsion.

Lorsque le ratio $b/a = \pi b^2/S_0$ devient faible devant 1, la rigidité élastique se met sous la forme :

$$\mu J = \mu \frac{\pi a b^3}{1 + b^2/a^2} \sim \mu \pi a b^3 = \mu S_0 b^2$$

et devient donc de plus en plus faible. Les barres aplaties sont donc peu rigides élastiquement en torsion, ce que révèle l'expérience de tous les jours.

Le calcul des moments quadratiques introduits peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 &= \int_{-b}^{b} dX_2 \int_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} X_1^2 dX_1 = \int_{-b}^{b} \left[\frac{X_1^3}{3} \right]_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} dX_2 \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^{b} (1 - \frac{X_2^2}{b^2})^{3/2} dX_2 = \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^{3/2} \cos\theta \, d\theta \\
&= \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{2a^3 b}{3} \times \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$

où le changement de variables $X_2 = b \sin\theta$ a été utilisé. Un calcul similaire permet d'obtenir le second moment quadratique de la section.

2.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Donner les contraintes principales, c'est–à–dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de μ, α, k, X_1, X_2, puis en remplaçant k par son expression en fonction de a et b.

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte σ_0 déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto–plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.
Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué $\alpha = \alpha_0$ pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer α_0 en fonction de σ_0, μ, a et b, pour les deux critères.

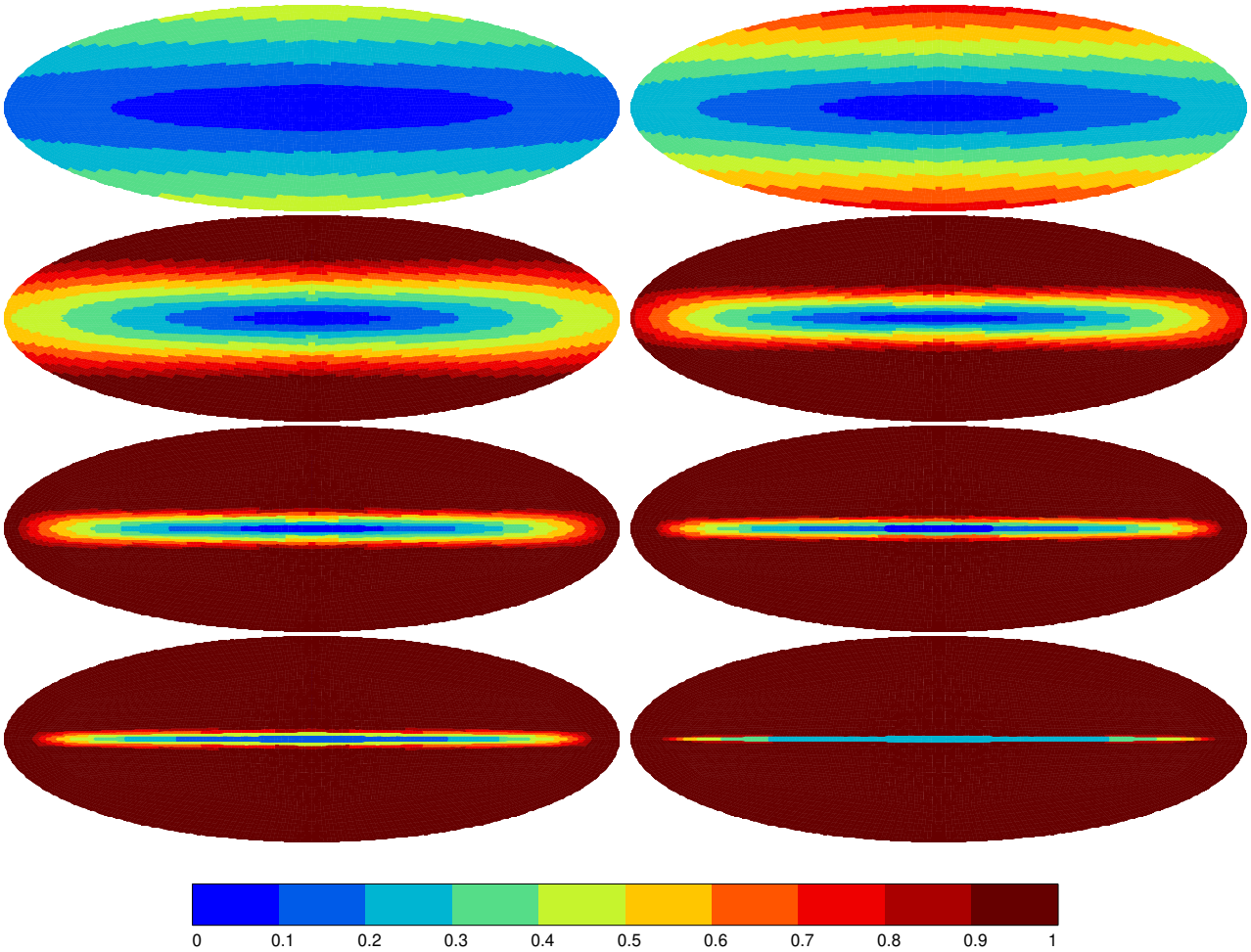


FIGURE 4: Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité σ_0 pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposée, α. Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.

Le tenseur des contraintes est de la forme $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \tau_1(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + \tau_2(\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2)$, avec $\tau_1 = \sigma_{13} = -\mu\alpha(1+k)X_2$ et $\tau_2 = \sigma_{23} = \mu\alpha(1-k)X_1$. Il possède la valeur propre

intermédiaire $\sigma_2 = 0$ et les deux autres sont solutions de

$$\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0 = \sigma_1 + \sigma_3, \quad \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^2 = 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 = 2\sigma_1^2$$

La plus grande contrainte principale est égale au cisaillement en chaque point de la section :

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \mu|\alpha|\sqrt{(1+k)^2 X_2^2 + (1-k)^2 X_1^2} = \frac{2\mu|\alpha|a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{X_1^2}{a^4} + \frac{X_2^2}{b^4}}$$

La question préliminaire a permis d'établir que le cisaillement prend ses valeurs maximales sur la frontière Γ de la section. En tenant compte de l'équation de l'ellipse (4), la contrainte principale maximale vaut sur le bord Γ

$$\sigma_1 = \frac{2\mu|\alpha|b}{a^2+b^2}\sqrt{a^4 + (b^2-a^2)X_1^2}$$

Cette valeur est maximale en $X_1 = 0, X_2 = \pm b$ ce qui donne

$$\sigma_1^{\max} = \frac{2ba^2}{a^2+b^2}\mu|\alpha|$$

Pour un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale conduit à

$$\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{2ba^2}\sigma_0$$

Pour un matériau ductile obéissant au critère de Tresca, la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{4ba^2}\sigma_0$$

où, on le rappelle, σ_0 est la limite d'élasticité en traction simple. Dans le cas d'un critère de von Mises, cela donne

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}} = \sqrt{3}|\sigma_1^{\max}| = \sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{3}ba^2}\sigma_0$$

Les critères de Tresca et von Mises prévoient des limites d'élasticité proches mais distinctes (rapport $\sqrt{3}/2$). L'expérience permettra de décider lequel des deux critères est le mieux adapté pour le matériau considéré.
La figure 3 représente les lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises. On vérifie la position des maxima de cette fonction le long du contour Γ.

La figure 4 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises égale à σ_0 tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentées est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par σ_0. Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élasto–plasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéique est représentée sur la figure 5. Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.
Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

On voit que le noyau élastique se réduit comme peau de chagrin lorsqu'on augmente le chargement. A la fin, il ne reste qu'une fine bande sur l'axe X_1. La courbe du moment en fonction de la torsion appliquée est d'abord linéaire comme il se doit. On peut d'ailleurs mesurer la pente qui doit être égale au module de cisaillement $\mu = E/2(1+\nu)$ d'après la relation $\mathcal{C} = \mu J \alpha$. On trouve sur le graphe $\mu \simeq 77$ GPa, ce qui, avec un coefficient de Poisson typique $\nu = 0.3$ fournit un module de Young $E \simeq 200$ GPa, typiquement le module d'un acier. La courbe sature ensuite au fur et à mesure que la plasticité envahit la barre. Le moment atteint une limite infranchissable qui représente la résistance maximale de la barre en torsion. On parle de charge limite de la barre, grandeur essentielle pour le dimensionnement des structures.

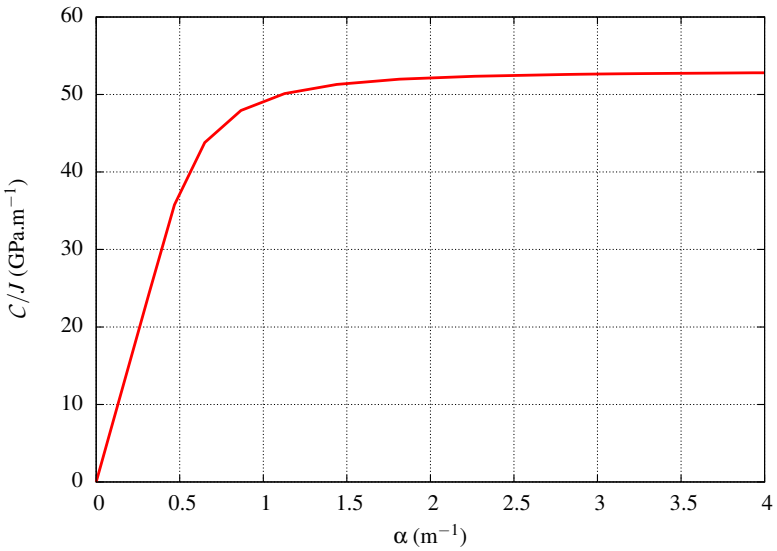


FIGURE 5: Moment normalisé par le moment quadratique de torsion J en fonction de l'angle linéique appliqué pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto–plastique.

2.5. Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 6. Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (4) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \tag{8}$$

où η est un nombre réel $0 < \eta < 1$.
Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre η.

Le champ de contraintes établi précédemment a le bon goût de satisfaire les conditions de bord libre sur la paroi intérieure du tube. Cela vient du fait que le vecteur normal est parallèle au vecteur $[X/a^2 \quad X/b^2 \quad 0]$ aussi bien pour les points de l'ellipse extérieure que pour ceux de l'ellipse intérieure. On vérifie alors que la condition

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$$

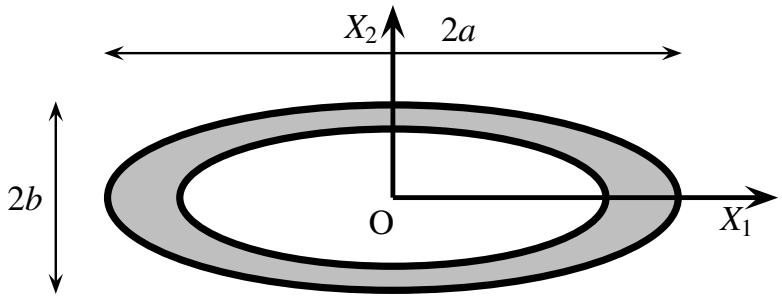


FIGURE 6: Tube de section elliptique creuse.

est satisfaite à l'intérieur comme à l'extérieur en utilisant les contraintes calculées au paragraphe 2.4, avec la même valeur du paramètre k.
Le calcul de la rigidité de torsion fait intervenir les moments quadratiques de la section tubulaire :

$$\int_S X_1^2 dS = \int_{S(a,b)} X_1^2 dS - \int_{S(\eta a,\eta b)} X_1^2 dS = \pi \frac{a^3 b}{4}(1-\eta^4)$$

où $S(a,b)$, resp. $S(\eta a,\eta b)$, désigne la surface de l'ellipse de paramètres a et b, resp. $\eta a, \eta b$. Finalement

$$\mu J = \mu\pi \frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}(1-\eta^4)$$

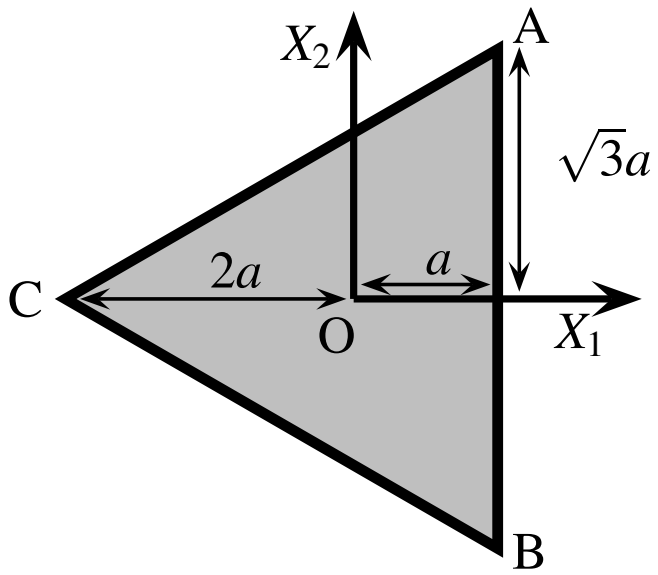


FIGURE 7: Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur $3a$ et côté de longueur $2a\sqrt{3}$.

3. Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur $3a$, comme sur la figure 7.

3.1. Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.
Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2X_2 + CX_1X_2^2 + DX_2^3 \tag{9}$$

permet de répondre à la question.

Les sommets du triangle de la figure 7 ont pour coordonnées $A(a, a\sqrt{3}), B(a, -a\sqrt{3})$ et $C(-2a, 0)$. On en déduit les composantes des vecteurs normaux aux trois faces : côté AC : $\underline{\boldsymbol{n}} \parallel [-a\sqrt{3}, 3a, 0]$; côté BC : $\underline{\boldsymbol{n}} \parallel [a\sqrt{3}, 3a, 0]$; côté AB : $\underline{\boldsymbol{n}} \parallel [1, 0, 0]$.
Nous avons également besoin des équations des trois arêtes du triangle : arête AC : $X_2 = (X_1 + 2a)/\sqrt{3}$; arête BC : $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$; arête AB : $X_1 = a$.
On calcule ensuite

$$\varphi_{,1} = 3AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2, \quad \varphi_{,2} = BX_1^2 + 2CX_1X_2 + 3DX_2^2$$

On vérifie aisément que cette fonction est harmonique si

$$3A + C = 0, \quad B + 3D = 0$$

La condition (2) s'écrit successivement :

- sur l'arête AB :

$$3Aa^2 + 2BaX_2 + CX_2^2 = X_2 \quad \forall X_2 \quad \Longrightarrow \quad A = C = 0, \quad B = \frac{1}{2a}$$

- sur l'arête BC : on substitue $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ dans la condition (2) :

$$\varphi_{,1}a\sqrt{3} + \varphi_{,2}3a = a\sqrt{3}X_2 - 3aX_1 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{1}{6a}$$

- sur l'arête AC : il reste à vérifier que les valeurs des constantes trouvées permettent de satisfaire également la condition (2) sur cette arête.

Finalement

$$\varphi^{\triangleleft}(X_1, X_2) = \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

3.2. Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan u_3 est maximum.
Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

Le déplacement hors plan vaut

$$u_3(X_1, X_2) = \alpha\frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

Les maxima de cette fonction se trouvent sur les arêtes du bord. Les trois arêtes étant équivalentes du point de vue de la symétrie, on peut se contenter d'étudier ce déplacement le long de l'arête AB d'équation $X_1 = a$:

$$u_3(a, X_2) = \alpha\frac{X_2}{6a}(3a^2 - X_2^2)$$

Cette fonction a des extrema en $X_2 = \pm a$.
Le gauchissement maximum vaut donc

$$u_2(a, \pm a) = \pm \frac{\alpha a^2}{3}$$

Le champ de déplacement est illustré sur la figure **??**(b).

3.3. Rigidité de torsion

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5} a^4 \mu\alpha \tag{10}$$

d'après Sadd (2005).

La fonction de gauchissement est utilisée maintenant pour calculer les contraintes :

$$\sigma_{31} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2) = \mu\alpha \frac{X_2}{a}(X_1 - a) \tag{11}$$

$$\sigma_{32} = \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1) = \frac{\mu\alpha}{2a}(X_1^2 - X_2^2 + 2aX_1) \tag{12}$$

Deux formules s'offrent à nous pour calculer J, à savoir (**??**) et (**??**) et nous choisissons la première :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left(X_1 (\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2 (\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-2a}^{a} dX_1 \int_{-(X_1+2a)/\sqrt{3}}^{(X_1+2a)/\sqrt{3}} (X_1^3 - 3X_1X_2^2 + 2a(X_1^2 + X_2^2))\, dX_2 \end{aligned} \tag{13}$$

3.4. Limite d'élasticité et analyse limite

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.
Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique α_0.

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 8 et 9 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.
Commenter ces figures.

Le champ de cisaillement est illustré sur la figure **??**(b). Les deux seules composantes non nulles sont données par les équations (11) et (12). Le cisaillement maximal est atteint sur les bords du triangle. Pour des raisons de symétrie, il suffit de se concentrer sur l'une d'entre elles, par exemple AB. Le long de cette arête σ_{31} est nulle comme il se doit. Seule subsiste la composante de cisaillement

$$\sigma_{32} = \frac{\mu\alpha}{2a}(3a^2 - X_2^2)$$

On voit que les contraintes s'annulent sur les pointes du triangle $X_2 = \pm\sqrt{3}a$. Il apparaît également que cette contrainte est maximale au milieu de l'arête $X_2 = 0$:

$$\sigma_{32}^{max} = \frac{3a}{2}\mu\alpha$$

La contrainte principale maximale est égale à la valeur précédente de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\mu\alpha_0 = \frac{2\sigma_0}{3a}$$

dans le cas d'un matériau fragile dont la limite à rupture est σ_0 en traction. S'il s'agit d'un matériau élasto–plastique avec un critère de Tresca et une limite d'élasticité σ_0 en traction, il faut diviser par deux la valeur précédente de α_0.
La figure 8 montre la fraction de la surface où la contrainte de cisaillement atteint σ_0 augmente avec le chargement jusqu'à la limite où seules trois portions de médianes restent à des niveaux de contraintes plus faibles. Noter en particulier le centre et les pointes du triangle qui restent à des niveaux proches de zéro. Le champ de déformation plastique est similaire avec trois lignes sans plasticité connectant le centre aux sommets.

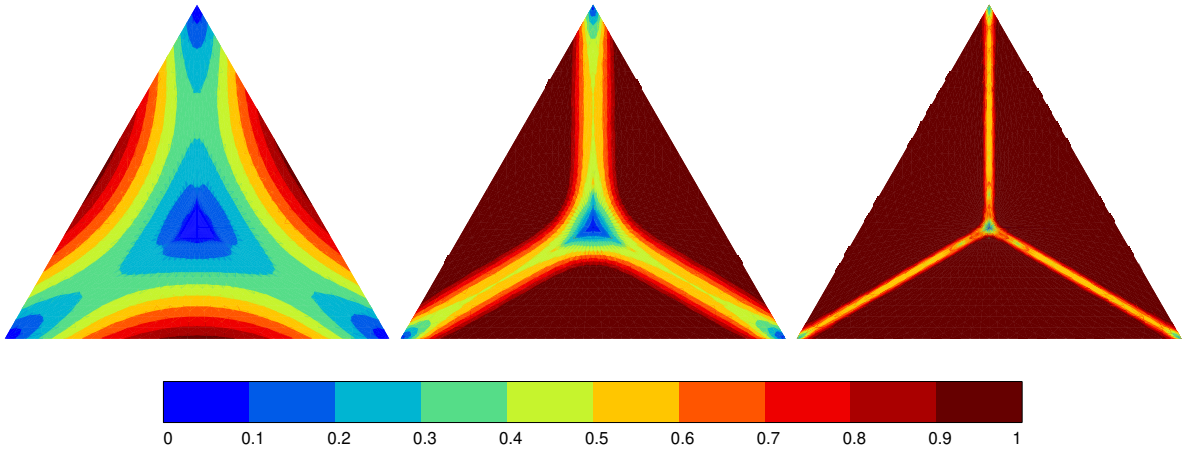


FIGURE 8: Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisée par la limite d'élasticité σ_0 pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α.

3.5. Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

On a déjà conclu que la section circulaire réalise le maximum de la rigidité de torsion pour une section elliptique. Soit S la valeur de la surface de la section recherchée, les moments quadratiques de torsion des barres circulaire et triangulaire sont respectivement

$$J^\circ = \frac{S^2}{2\pi}, \quad J^\triangleleft = \frac{S^2}{5\sqrt{3}}$$

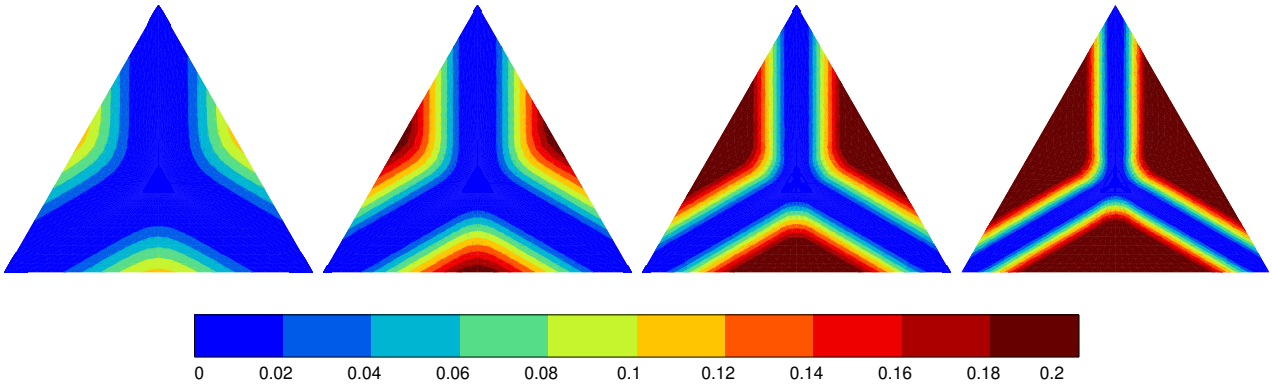


FIGURE 9: Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique α.

de sorte que $J^\circ > J^\triangleleft$.
La contrainte principale maximale vaut

$$\sigma_1^{max\circ} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}\mu\alpha, \quad \sigma_1^{max\triangleleft} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}}\mu\alpha$$

de sorte que $\sigma_1^{max\circ} < \sigma_1^{max\triangleleft}$.

Deuxième partie

Variations autour du seau de Newton

If a vessel, hung by a long cord, is so often turned about that the cord is strongly twisted, then filled with water, and held at rest together with the water ; after, by the sudden action of another force, it is whirled about in the contrary way, and while the cord is untwisting itself, the vessel continues for some time this motion ; the surface of the water will at first be plain, as before the vessel began to move ; but the vessel by gradually communicating its motion to the water, will make it begin sensibly to revolve, and recede by little and little, and ascend to the sides of the vessel, forming itself into a concave figure. (d'après Wikipedia)

Isaac Newton, *Principia*, 1687.

Inspirés par le célèbre seau de Newton (*Newton's bucket*), nous nous intéressons aux mouvements d'un fluide dans des réservoirs en rotation. On étudie d'abord le cas où le récipient a déjà communiqué son mouvement au fluide. On s'interroge ensuite, dans le cas d'un fluide visqueux, sur la façon dont le récipient transmet son mouvement au fluide initialement au repos. Dans tous les cas, on se restreint au mouvement stationnaire d'un fluide incompressible.

L'expérience du seau de Newton est un moyen de détecter le caractère galiléen ou non du référentiel d'observation, un peu comme le pendule de Foucault. Elle a alimenté les réflexions autour du concept de relativité de Newton à Mach, cf. (Barbour and Pfister, 1995; Krawietz, 2015).

4. Etude de la surface d'un fluide en rotation dans une réservoir cylindrique

Un fluide parfait incompressible est contenu dans un récipient cylindrique (section circulaire) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante Ω, comme sur la figure 10. Il est également soumis à la gravité $\underline{\boldsymbol{g}} = -g\underline{\boldsymbol{e}}_z$.

On observe l'expérience depuis un référentiel supposé galiléen dans un repère fixe, en coordonnées cylindriques autour de l'axe z.

4.1. Champ eulérien des vitesses et champ de pression

Exprimer le champ de vitesses du fluide correspondant à une rotation rigide autour de l'axe z à la vitesse angulaire constante Ω.

Exprimer le champ de pression au sein du fluide, à une constante près.

Le champ des vitesses s'écrit

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}} = \Omega\underline{\boldsymbol{e}}_z \wedge r\underline{\boldsymbol{e}}_r = r\Omega\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{14}$$

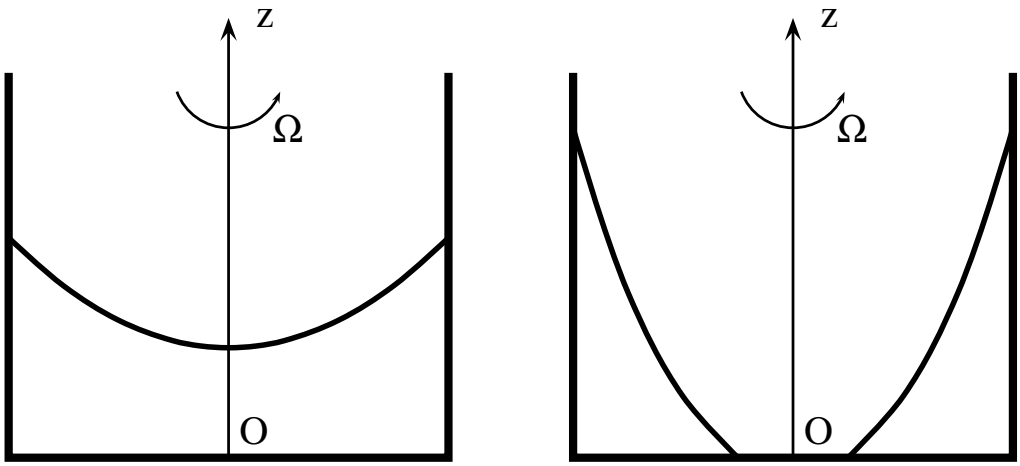


FIGURE 10: Réservoir cylindrique en rotation autour de son axe z contenant un liquide : surface libre du fluide pour une vitesse de rotation Ω plutôt lente à gauche et plus rapide à droite.

Le gradient des vitesses vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega(\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r - \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta) \tag{15}$$

Les équations de la dynamique des fluides parfaits s'écrivent

$$\rho \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \rho \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} = -\operatorname{grad} p + \rho \underline{\boldsymbol{g}}$$

Il s'agit d'un écoulement stationnaire de sorte que la dérivée partielle par rapport au temps est nulle. La pression est une fonction $p(r, z)$ si bien que

$$-\rho r \Omega^2 \underline{\boldsymbol{e}}_r = -\frac{\partial p}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r - \frac{\partial p}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z - \rho g \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{\rho} = -gz + f(r)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \quad \Longrightarrow \quad f(r) = \Omega^2 \frac{r^2}{2} + C$$

Finalement

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \Omega^2 \frac{r^2}{2} + C \tag{16}$$

4.2. Forme de la surface libre du fluide en rotation

En notant R le rayon du cylindre, H la hauteur de fluide dans le récipient au repos et p_0 la pression atmosphérique s'appliquant à la surface du fluide, déterminer complètement le champ de pression exprimé précédemment.

Quelle est la forme de la surface libre du fluide en rotation uniforme ?

Indiquer la valeur critique du nombre de Froude [4] défini par

$$\mathcal{F}r = \frac{R^2 \Omega^2}{gH} \tag{17}$$

4. Le nombre de Froude compare le carré des vitesses, ici $R^2\Omega^2$ à la gravitation, gH.

pour laquelle le creux du fluide touche le fond. Pour des valeurs supérieures, on se trouve dans la situation de la figure 10 à droite. On donnera l'équation de la surface libre dans ce cas également.

Faire l'application numérique dans le cas où $R = H = 0.5$ m et $\Omega = 20$ tours par minutes. Calculer le nombre de Froude et la différence de niveau de fluide entre le point haut et le point bas de la surface libre.

Il s'agit d'un problème classique, cf. Landau and Lifchitz (1989) p.37, ayant également fait l'objet d'une épreuve du Concours Mines–Ponts 2005 [5]. La surface du fluide est caractérisée par la pression atmosphérique p_0. Cette surface a donc pour équation

$$z = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{C}{g} \tag{18}$$

Le fluide étant considéré comme incompressible, le volume reste constant et vaut $\pi R^2 H$. Calculons ce volume dans l'état déformé :

$$V = \int_0^R 2\pi r z dr \quad \Longrightarrow \frac{V}{2\pi} = \frac{\Omega^2}{8g} R^4 + \left(\frac{C}{g} - \frac{p_0}{\rho g}\right) \frac{R^2}{2}$$

si bien que $\frac{C}{g} = \frac{p_0}{\rho g} + H - \frac{R^2\Omega^2}{4g}$ et finalement :

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = H - z + \frac{\Omega^2}{2g}(r^2 - \frac{R^2}{2}) \tag{19}$$

L'équation de la surface libre s'obtient pour $p = p_0$:

$$z = H + \frac{\Omega^2}{2g}(r^2 - \frac{R^2}{2}) \tag{20}$$

Il s'agit d'un paraboloïde de révolution dont la courbure au centre vaut Ω^2/g.
Le niveau d'eau touche le fond lorsque $z = 0$ en $r = 0$, ce qui correspond à

$$\mathcal{F}r = \frac{R^2\Omega^2}{gH} = 4$$

Pour des valeurs plus grandes de ce nombre, l'équation de la surface reste donnée par (18) mais la cote $z = 0$ est atteinte pour une valeur non nulle du rayon $r = r_c$ telle que

$$\frac{\Omega^2}{2g} r_c^2 - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{C}{g} = 0$$

L'équation de la surface libre se met alors sous la forme

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}(r^2 - r_c^2)$$

où la valeur de r_c est déterminée en écrivant la conservation du volume

$$\frac{V}{2\pi}\frac{2g}{\Omega^2} = \int_{r_c}^R (r^2 - r_c^2) r\, dr$$

5. www.sujetsetcorriges.fr/cpge-spe/mines-pont/mines-ponts-physiquechimie.

d'où l'on tire

$$r_c^2 = R^2 \left(1 - \sqrt{\frac{4}{\mathcal{F}r}}\right) \tag{21}$$

cf. Mougel et al. (2015).
L'application numérique donne $\mathcal{F}r \simeq 0.22 < 4$ de sorte que nous sommes dans la situation de la figure 10 de gauche. Les points bas et haut valent respectivement $z^- = H(1 - \frac{\mathcal{F}r}{4})$ et $z^+ = H(1 + \frac{\mathcal{F}r}{4})$ de sorte que $z^+ - z^- = \frac{H}{2}\mathcal{F}r = 0.11$ m.

4.3. Cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible

Résoudre le même problème dans le cas où le fluide est un fluide newtonien incompressible de viscosité $\mu = 2$ Pa.s.

La solution proposée reste valable dans le cas d'un fluide visqueux. En effet le champ de vitesse est purement en rotation. Le taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ associé au champ de vitesse (14) est nul. Par conséquent, la contribution de la partie visqueuse dans les équations de Navier–Stokes est nulle et le champ de pression trouvé reste valable.

5. Fluide en rotation dans un réservoir ellipsoïdal

Un récipient de forme ellipsoïdale contenant un fluide parfait incompressible est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante Ω autour de l'un de ses axes principaux. On adopte un système de coordonnées cartésiennes dont les axes coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde à un instant donné. L'axe de rotation est alors x_3 et l'équation de l'ellipsoïde formant le bord du récipient (dont l'épaisseur est négligée) est dans ce repère à l'instant donné :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{22}$$

Il s'agit d'un problème proposé par Landau and Lifchitz (1989), p.39.

5.1. Recherche d'un champ de vitesse dérivant d'un potentiel

On recherche une solution stationnaire du problème en vitesses dérivant d'un potentiel $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{,1}\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \varphi_{,2}\underline{\boldsymbol{e}}_2 + \varphi_{,3}\underline{\boldsymbol{e}}_3$$

Montrer que la fonction (6) trouvé dans l'exercice sur la torsion fournit un potentiel satisfaisant les conditions requises par le mouvement stationnaire du fluide dans le récipient ellipsoïdal considéré. On déterminera la valeur de la constante k en fonction de Ω et des caractéristiques de l'ellipsoïde.

Exprimer complètement le champ des vitesses obtenu ainsi que son gradient, $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$.

Décrire les lignes de courant et trajectoires correspondantes.

Commenter le cas particulier $a = b$.

Si l'on suppose que le champ de vitesse dérive du potentiel φ, la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} = 0$ implique que ce potentiel est harmonique. Noter également que l'existence du potentiel implique que l'écoulement est irrotationnel : $\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{v}} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.
Le potentiel doit vérifier des conditions aux limites sur le bord du récipient. Il s'agit des conditions stipulant que la vitesse normale du fluide sur le bord coïncide avec celle du récipient :

$$\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}$$

où $\underline{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}$ est la vitesse du réservoir et $\underline{\boldsymbol{n}}$ le vecteur normal à l'ellipsoïde qui est parallèle à$[x_1/a^2, x_2/b^2, x_3/c^2]$. On obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} n_3 = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = \Omega(-x_2 n_1 + x_1 n_2)$$

On vérifie que le potentiel $\varphi(x_1, x_2) = k x_1 x_2$ (pas de dépendance en x_3) est harmonique et vérifie la condition précédente à condition que

$$k = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Noter que si $a = b$ alors $\varphi = 0$. C'est effectivement la solution unique du problème de Neumann avec $d\varphi/dn = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = 0$ (cas circulaire). C'est une solution du problème physique car dans ce cas le fluide parfait glisse idéalement sur les parois du réservoir et reste donc sans mouvement par rapport au référentiel absolu. Une autre solution acceptable est celle considérée dans la question précédente, à savoir que le fluide suit le mouvement de rotation du saut, $\underline{\boldsymbol{v}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}$. Force est de constater que cette solution n'est pas irrotationnelle puisque

$$\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{v}} = -2 \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} = -2\Omega \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

dans ce cas. On ne peut donc pas la rechercher sous la forme d'un gradient. Ce qui est étonnant, c'est que dans le cas du réservoir elliptique non circulaire, on puisse mettre en évidence une solution dérivant d'un potentiel. L'existence de ce potentiel non trivial est due à la contribution non nulle au bord de $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}) \cdot \underline{\boldsymbol{n}}$ dans le cas du réservoir ellipsoïdal. Le réservoir entraîne ainsi le fluide dans son mouvement.
Le champ des vitesses obtenu et son gradient sont alors

$$v_1 = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_2, \quad v_2 = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1, \quad v_3 = 0, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \Omega \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) \tag{23}$$

Le gradient des vitesses est symétrique comme il se doit avec l'hypothèse formulée d'existence d'un potentiel des vitesses.
Les lignes de courant et les trajectoires coïncident dans le cas d'un mouvement stationnaire. Elles sont données par

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \quad \Longrightarrow \quad d(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Les lignes de courant sont donc les hyperboles $x_1^2 - x_2^2 = C$ où C est une constante.

5.2. Mouvement relatif du fluide par rapport au récipient

Le mouvement relatif du fluide par rapport au récipient ellipsoïdal est obtenu en soustrayant au champ de vitesse absolu trouvé précédemment le champ des vitesses du récipient que l'on sait en rotation autour de l'axe x_3 à vitesse angulaire Ω constante.

Donner l'expression de ce champ des vitesses relatives et décrire la forme des lignes de courants correspondantes.

Le champ des vitesses relatives est $\underline{\boldsymbol{v}}^* = \underline{\boldsymbol{v}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}$ et a pour composantes

$$v_1^* = k x_2 + \Omega x_2 = \Omega \frac{2a^2}{a^2 + b^2} x_2, \quad v_2^* = k x_1 - \Omega x_1 = -\Omega \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x_1 \tag{24}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \frac{2\Omega}{a^2+b^2}(a^2\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 - b^2\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) \tag{25}$$

Les équations de lignes de courant sont obtenues en résolvant

$$\frac{dx_1}{v_1^*} = \frac{dx_2}{v_2^*} \quad \Longrightarrow \quad d(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2) = 0$$

Les lignes de courant sont donc les ellipses $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = \eta^2$ semblables aux ellipses du contour.

5.3. Calcul du champ de pression et forme de la surface libre

A partir du champ des vitesses obtenu au paragraphe 5.1, calculer la forme du champ de pression dans le fluide et indiquer la forme de la surface libre.

On écrit les équations de la dynamique des fluides parfaits incompressibles :

$$\rho\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} = \rho k^2(x_1\underline{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\underline{\boldsymbol{e}}_2) = -\mathrm{grad}\, p + \rho\underline{\boldsymbol{g}}$$

ce qui fournit successivement

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{\rho} = -gx_3 + f(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho k^2 x_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, x_2) = -k^2\frac{x_1^2}{2} + g(x_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho k^2 x_2 = \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \Longrightarrow \quad g(x_2) = -k^2\frac{x_2^2}{2} + C$$

et finalement

$$\frac{p}{\rho} = -gx_3 - \frac{k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + C \tag{26}$$

où C est une constante.

La surface libre est obtenue pour $p = p_0$:

$$x_3 = \frac{k^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{p_0}{\rho g} + Cste$$

Il s'agit d'un paraboloïde de révolution comme dans le cas du réservoir cylindrique.

6. Prise en compte de l'accélération de Coriolis : couche d'Ekman

Pour comprendre comment le mouvement du réservoir en rotation se transmet au fluide initialement au repos, il faut faire appel au comportement visqueux du fluide et aux conditions d'adhérence aux parois. Nous n'allons pas résoudre ce problème transitoire quelque peu délicat mais nous intéresser à une situation intermédiaire stationnaire où le fluide a un mouvement différent près de la paroi et loin de cette paroi.

On rappelle les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible sous la forme

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt} = -\mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho} + \underline{\boldsymbol{g}} + \nu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} \tag{27}$$

Situation physique	R (m)	H (m)	Ω (s^{-1})	$\mathcal{F}r$	$\mathcal{E}k$ eau air	δ (m) eau air
Seau de Newton	0.5	0.5	2.1	0.22	9.6×10^{-7} 1.4×10^{-5}	0.0007 0.0027
Canal	100	10	7.3×10^{-5}	2.6×10^{-7}	1.7×10^{-5} 2.5×10^{-4}	0.12 0.45
Météorologie	100	1000	7.3×10^{-5}	5.3×10^{-8}	6.9×10^{-7} 1.0×10^{-5}	0.12 0.45

TABLE 1: Nombres de Froude et d'Ekman pour trois situations physiques très différentes.

où $\nu = \mu/\rho$ est appelée viscosité cinématique.

On se place dans un référentiel tournant à la vitesse constante Ω autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ en gardant la même origine. Le changement de référentiel s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{x}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{x}}, \quad \underline{\boldsymbol{v}}' = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}' + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{v}} \tag{28}$$

où $\underline{\boldsymbol{v}}'$ désigne la vitesse par rapport au référentiel tournant et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ est la rotation autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ d'angle Ωt.

6.1. Caractérisation des effets centrifuges et de Coriolis

Exprimer les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant en fonction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$ et de $\underline{\boldsymbol{v}}'$. Reconnaître les contributions des forces volumiques centrifuges et de Coriolis.

On néglige le terme convectif dans l'équation précédente (faible nombre de Reynolds) et on se place dans le cas stationnaire. Le nombre de Froude (17) précédemment introduit compare les effets de la force centrifuge avec ceux de la gravitation. On s'intéresse maintenant au nombre d'Ekman qui compare les effets de Coriolis aux effets de viscosité :

$$\mathcal{E}k := \frac{\nu}{2\Omega L^2} \tag{29}$$

où L est une longueur caractéristique du problème.

Nous allons juger de l'importance relative des contributions de Froude et d'Ekman dans trois situations très différentes :

- Le cas du seau de Newton avec les données H, R et Ω précédemment étudiées ;
- Le cas d'un canal rempli d'eau de largeur R et de profondeur H. Le fluide est soumis à la rotation terrestre ;
- Le cas de la couche atmosphérique en contact avec la surface de la Terre animée d'une rotation Ω autour de son axe. Il s'agit d'une application à la météorologie.

On prendra $L = H$ pour l'évaluation du nombre d'Ekman. Compléter les colonnes vides du tableau 1 (à l'exception de la dernière colonne), lorsque le fluide est l'eau ou l'air à température ambiante. Dans le cas de l'air on prendra une viscosité cinématique $\nu_{air} = 15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$. Commenter.

Le changement de référentiel $\underline{\boldsymbol{x}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T(t) \cdot \underline{\boldsymbol{x}}$ s'interprète de la manière suivante. Soit x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées cartésiennes respectivement dans le référentiel galiléen d'origine et dans le référentiel tournant à la vitesse Ω autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. On se convaincra aisément que les relations entre ces coordonnées sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \tag{30}$$

où l'on voit bien apparaître la rotation d'angle $-\Omega t$ par rapport à $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Pour calculer l'accélération par rapport à ce nouveau référentiel, on fait appel à la règle de transformation (**??**) du cours avec la rotation appropriée :

$$\underline{\boldsymbol{a}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{a}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}^2 \cdot \underline{\boldsymbol{x}}' - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}' \tag{31}$$

On multiplie les équations de Navier–Stokes par $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = -\mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho} + \underline{\boldsymbol{g}} + \nu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{a}} = -\mathrm{grad}\,'\frac{p}{\rho} + \underline{\boldsymbol{g}}' + \nu\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{v}}$$

où $\mathrm{grad}\,'$ désigne le gradient par rapport aux coordonnées $\underline{\boldsymbol{x}}'$. En effet,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho} = \mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \frac{\partial p/\rho}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\underline{\boldsymbol{e}}'_j = \frac{\partial p/\rho}{\partial x'_j}\underline{\boldsymbol{e}}'_j = \mathrm{grad}\,'\frac{p}{\rho}$$

D'une manière similaire on montre que

$$\mathrm{grad}\,\underline{\boldsymbol{v}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \cdot (\mathrm{grad}\,'\underline{\boldsymbol{v}}') \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$$

et que

$$\Delta\underline{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\underline{\boldsymbol{v}}) = \mathrm{div}\,'((\mathrm{grad}\,\underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}) = \mathrm{div}\,'(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \cdot \mathrm{grad}\,'\underline{\boldsymbol{v}}') = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \cdot \Delta'\underline{\boldsymbol{v}}'$$

Finalement, on obtient les équations de Navier–Stokes dans le référentiel tournant à vitesse de rotation constante :

$$\underline{\boldsymbol{a}}' - \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}^2 \cdot \underline{\boldsymbol{x}}' + 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}' = -\mathrm{grad}\,'\frac{p}{\rho} + \underline{\boldsymbol{g}}' + \nu\Delta'\underline{\boldsymbol{v}}' \tag{32}$$

Les contributions faisant intervenir le taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$ donnent lieu aux efforts volumiques centrifuges et de Coriolis, respectivement.
La viscosité cinématique de l'eau à l'ambiante est $1 \times 10^{-3}/1 \times 10^{3} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Le tableau 1 montre clairement que le nombre de Froude est dominant pour le problème du seau tandis que le nombre d'Ekman contrôle les problèmes faisant intervenir la rotation de la Terre.

6.2. Champ de pression dans la couche d'Ekman

On étudie comment le fluide en contact avec le fond du seau de Newton entraîne les couches supérieures dans son mouvement. La zone de transition entre le mouvement du fluide près de la paroi et le mouvement loin de la paroi s'appelle couche d'Ekman. Nous allons caractériser son épaisseur et la forme des champs de pression et de vitesses dans cette couche. Pour cela, nous allons grandement simplifier le problème en suivant la démarche proposée dans (Lautrup, 2011). Dans cette question et la suivante, on adopte un système de coordonnées cartésiennes orthonormées dans le référentiel tournant à la vitesse Ω. Par souci de concision, la notation prime pour les variables dans ce référentiel est omise.

On considère une situation idéalisée où le fond d'un réservoir ou d'un canal, situé à la cote $x_3 = 0$, est en contact avec le fluide à vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}$ nulle tandis qu'un écoulement $\underline{\boldsymbol{v}} = V\underline{\boldsymbol{e}}_1$ est observé sur une couche épaisse du fluide située à une certaine distance du fond et appelée couche supérieure. L'extension du fluide dans les directions 1 et 2 est considérée comme infinie (bords très éloignés). La couche d'Ekman désigne la zone de transition du mouvement du fluide entre le fluide immobilisé par le fond et le mouvement de la couche supérieure.

On suppose que les effets centrifuges et convectifs sont négligeables et on s'intéresse aux seuls effets de Coriolis et de viscosité, ce qui conduit aux équations de Navier–Stokes réduites suivantes :

$$\operatorname{grad}\frac{p}{\rho} = \underline{\boldsymbol{g}} - 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}} + \nu\Delta\underline{\boldsymbol{v}} \tag{33}$$

Le taux de rotation Ω uniforme et constant s'effectue autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$.

Calculer le champ de pression qui règne dans la couche supérieure.

Justifier que le champ de vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}$ recherché est une fonction de x_3 uniquement.

En déduire que le champ de pression trouvé dans la partie supérieure est également valable dans la couche d'Ekman.

Les équations (33) s'obtiennent à partir de (32) en négligeant l'accélération et la force centrifuge.

Dans la couche supérieure, $\underline{\boldsymbol{v}} = V\underline{\boldsymbol{e}}_1$, les équations de Navier–Stokes (33) conduisent alors à

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\rho\Omega V, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

d'où l'on tire

$$\frac{p}{\rho} = -gx_3 - 2\Omega V x_2 + C \tag{34}$$

où C est une constante que l'on ne cherche pas à identifier. La réponse du fluide est indépendante des positions x_1, x_2. Le champ de vitesse ne peut donc dépendre que de x_3.

Le fluide est en outre incompressible de sorte que $\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}} = 0 = \partial v_3/\partial x_3$. La composante v_3 est donc uniforme. Comme elle s'annule au fond, elle est nulle partout. Par suite, la troisième équation (33) implique que

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad p = -\rho g x_3 + p_0(x_1, x_2)$$

La fonction p_0 indépendante de x_3 peut être identifiée pour les grandes valeurs de x_3, dans la couche supérieure où règne la pression (34), de sorte que $p_0(x_1, x_2) = -2\Omega V x_2$. L'expression (34) est donc valable dans la couche d'Ekman également.

6.3. Champ des vitesses dans la couche d'Ekman

Ecrire alors les équations différentielles portant sur $v_1(x_3)$ et $v_2(x_3)$.

Montrer que v_1 est solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^4}{dt^4}(V - v_1) = -\frac{4}{\delta^4}(V - v_1) \tag{35}$$

On donnera l'expression de la longueur δ en fonction de ν et Ω.

Remplir la dernière colonnes du tableau 1 et commenter.

Résoudre cette équation différentielle en utilisant les racines quatrièmes (complexes) de $-4/\delta^4$. Justifier que l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de δ.

Les équations de Navier–Stokes (33) s'écrivent dans la couche d'Ekman de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} = 2\Omega v_2 + \nu\Delta v_1, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\Omega v_1 + \nu\Delta v_2 \tag{36}$$

En considérant l'expression des pressions (34), on obtient les deux équations différentielles portant sur $v_1(x_3)$ et $v_2(x_3)$:

$$2\Omega v_2 + \nu \frac{d^2 v_1}{dx_3^2} = 0, \quad -2\Omega v_1 + \nu \frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -2\Omega V$$

On tire de ces équations :

$$v_2 = -\frac{\nu}{2\Omega}\frac{d^2 v_1}{dx_3^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -\frac{2\Omega}{\nu}(V - v_1)$$

Par suite,

$$\frac{d^2 v_2}{dx_3^2} = -\frac{\nu}{2\Omega}\frac{d^4 v_1}{dx_3^4} = \frac{\nu}{2\Omega}\frac{d^4}{dx_3^4}(V - v_1)$$

Finalement,

$$\frac{\nu}{2\Omega}\frac{d^4}{dx_3^4}(V - v_1) = -\frac{2\Omega}{\nu}(V - v_1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^4}{dx_3^4}(V - v_1) = -\frac{4\Omega^2}{\nu^2}(V - v_1)$$

L'identification avec l'équation (35) conduit à

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \tag{37}$$

dont on vérifie l'homogénéité à une longueur.
Les quatre racines de $-4/\delta^4$ sont $\pm(1 \pm i)/\delta$ permettent d'exhiber les solutions de l'équation (35) sous la forme :

$$V - v_1 = Ae^{-(1+i)x_3/\delta} + Be^{-(1-i)x_3/\delta} \tag{38}$$

où l'on a rejeté les termes en $e^{(1\pm i)x_3/\delta}$ parce que non bornés lorsque $x_3 \to +\infty$. La condition $V - v_1 = 0$ suffisamment loin du fond est aussi satisfaite.
La condition $v_1(x_3 = 0) = 0$ exige que $A + B = V$. On obtient également la vitesse

$$v_2 = -\frac{\delta^2}{2}\frac{d^2 v_1}{dt^2} = \frac{A}{2}(1+i)^2 e^{-(1+i)x_3/\delta} + \frac{B}{2}(1-i)^2 e^{-(1-i)x_3/\delta} = i(Ae^{-(1+i)x_3/\delta} - Be^{-(1-i)x_3/\delta})$$

La condition $v_2(x_3 = 0) = 0$ exige que $A(1+i)^2 + B(1-i)^2 = 2i(A - B) = 0$, i.e. $A = B$. Finalement, on obtient

$$v_1(x_3) = V - \frac{V}{2}(e^{-(1+i)x_3/\delta} + e^{-(1-i)x_3/\delta}) = V(1 - e^{-x_3/\delta}\cos\frac{x_3}{\delta}) \tag{39}$$

$$v_2(x_3) = Ve^{-x_3/\delta}\sin\frac{x_3}{\delta} \tag{40}$$

Ces vitesses sont représentées sur la figure 11. On voit en particulier que la vitesse horizontale dépasse légèrement V avant de tendre définitivement vers cette valeur. La composante v_2 croît d'abord avant de rejoindre 0 dans la couche supérieure. La spirale d'Ekman, représentation paramétrique du champ de vitesse, est illustrée sur la figure de droite.

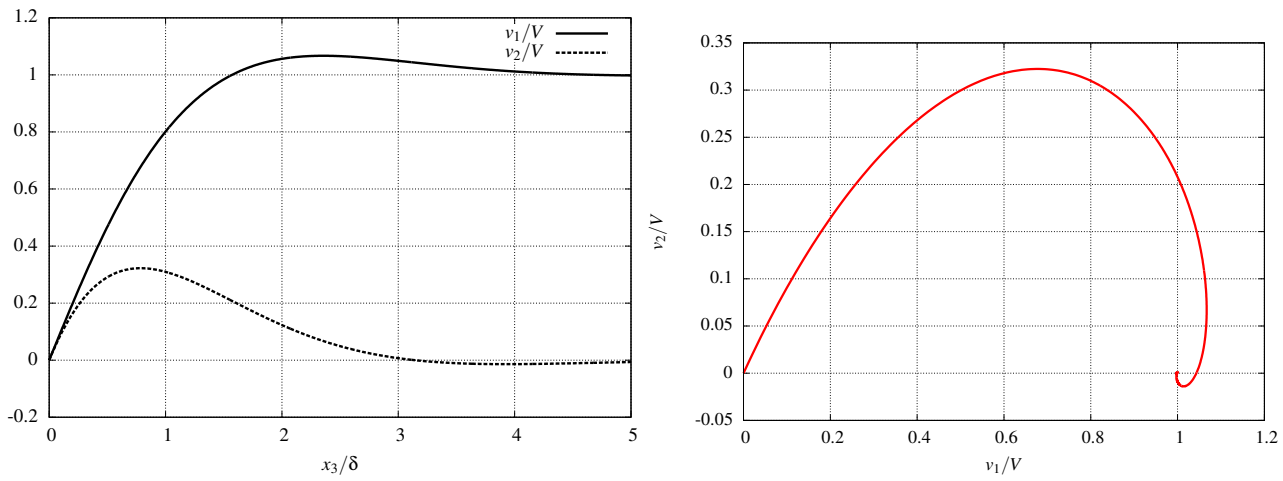


FIGURE 11: Vitesses dans la couche d'Ekman : représentation des composantes en fonction de la profondeur normalisée (à gauche), représentation paramétrique à droite montrant la spirale d'Ekman.

Références

Barbour, J.B., Pfister, H., 1995. Mach's principle : From Newton's bucket to quantum gravity. Einstein series, vol. 6, Birkhäuser Basel-Boston.

Krawietz, A., 2015. Classical mechanics recast with Mach's principle. Technische Mechanik 35, 49–59.

Landau, L., Lifchitz, D., 1989. Mécanique des fluides. Mir.

Lautrup, B., 2011. Physics of Continuous Matter, Second Edition : Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World. CRC Press.

Mougel, J., Fabre, D., Lacaze, L., 2015. Waves in Newton's bucket. Journal of Fluid Mechanics 783, 211–250. doi :10.1017/jfm.2015.527.

Sadd, M.H., 2005. Elasticity. Elsevier Academic Press.

Sokolnikoff, I.S., 1946. Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill.

OPTIMISATION
EXAMEN. DURÉE 2H30
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS.

MINES ParisTech — *Mardi 20 avril 2021*

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 50 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [7 Points]

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, le problème

$$f(x, y) = e^x + ay$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ y - x &\leq 0 \\ x + y &\leq 2 \end{aligned}$$

1. Justifier que ce problème admet un minimum global. Est-il unique ?
2. Représenter graphiquement les contraintes du problème. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, résoudre ce problème en fonction de la valeur de a.

pas utilisé KKT...

Exercice 2 Autour de méthodes de pénalité [28 points]

Dans ce problème, on se propose d'aborder plusieurs méthodes de résolution par pénalité pour des problème d'optimisation sous contraintes.

Partie 1 : Méthode de points intérieurs

On s'intéresse ici au problème de minimisation suivant

$$\min_{c(x) \leq 0} f(x) \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des fonctions continues, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On note $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \leq 0\}$ dont on suppose qu'il s'agit d'un ensemble fermé borné, d'intérieur R^0 non-vide.

1. Justifier que le problème (1) admet au moins une solution, notée x^*.

On suppose que cette solution $x^\star$ est unique. On cherche à résoudre ce problème en résolvant une suite de problèmes pénalisés

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_k(x) \triangleq f(x) + \varepsilon_k p(x) \quad \text{avec} \quad p(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma(c_i(x)) \tag{2}$$

où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière sur $]-\infty, 0[$, telle que $\lim_{s \to 0^-} \gamma(s) = +\infty$ et, par convention, $\gamma(s) = +\infty$ pour $s \geq 0$. $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, strictement décroissante et convergeant vers zéro . On suppose que (2) admet une solution x_k.

2. Montrer que $x_k \in R^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que $f_{k+1}(x_{k+1}) \leq f_{k+1}(x_k)$. En déduire $f_{k+1}(x_{k+1}) \leq f_k(x_k)$.

4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x^\delta \in R$ tel quel $f(x^\delta) < f(x^*) + \delta/2$.

On considère $K \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_k p(x^\delta) < \delta/2$ pour $k \geq K$.

5. Déduire de la question 3 que, pour tout $k \geq K$, $f_k(x_k) \leq f_K(x^\delta)$.
6. En déduire que $f(x^*) \leq f(x_k) < f(x^*) + \delta$ pour tout $k \geq K$. Conclure que $\lim_{k \to +\infty} f_k(x_k) = f(x^*)$.
7. Conclure également que la suite x_k converge vers x^*.
8. Montrer que l'étude précédente reste inchangée pour le problème

$$\min_{c(x) \leq 0\,,\ x \in C} f(x)$$

où C est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $C \cap R^0 \neq \emptyset$.

Partie 2 : Slack variables pour contraintes égalités

On s'intéresse maintenant au problème de minimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sous les contraintes} \quad c^{in}(x) \leq 0 \text{ et } c^{eq}(x) = 0 \tag{3}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c^{in} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$ et $c^{eq} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_2}$ des fonctions régulières ($(n, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3$ et $m_2 < n$).

9. Justifier que l'on peut réécrire ce problème comme

$$\min_{c(x) \leq 0} f(x) \tag{4}$$

avec $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ où $r = m_1 + 2m_2$ cad sous la forme du problème (1). Pourquoi ne peut-on alors pas appliquer la méthode de points intérieurs étudiée précédemment ?

10. On introduit $s \in \mathbb{R}^{m_1}$ et l'on écrit x sous la forme $x_i = y_i - y_{i+n}$ avec $y \in \mathbb{R}^{2n}_+$, cad $x = My$ avec $M = (I_n \ \ -I_n)$ matrice $n \times 2n$. Soit $z = (y, s) \in \mathbb{R}^{2n+m_1}$. Montrer que l'on peut réécrire le problème (3) sous la forme

$$\min_{d(z)=0\,,\ -z \leq 0} g(z) \tag{5}$$

où $d : z = (y, s) \mapsto (c^{in}(My) + s, c^{eq}(My)) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$, et où l'on précisera la fonction g.

Pour résoudre ce problème, on pénalise les contraintes inégalités par la méthode de points intérieurs étudiée précédemment et l'on considère le problème suivant pour $\varepsilon > 0$

$$\min_{d(z)=0} (g(z) - \varepsilon \ln(z)) \tag{6}$$

dont on suppose qu'il admet une solution.

11. Former le lagrangien associé à (6) et montrer que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont

$$\begin{cases} \nabla g(z) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1+m_2} \lambda_i \nabla d_i(z) - w = 0 \\ w_i z_i = \varepsilon\,, \quad i = 1, \ldots, 2n + m_1 \\ d(z) = 0 \\ z \geq 0\,,\ w \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

12. Formuler ces conditions sous la forme $h(z, w, \lambda) = 0$ avec $h : \mathbb{R}^{4n+2m_1}_+ \times \mathbb{R}^{m_1+m_2} \mapsto \mathbb{R}^{4n+3m_1+m_2}$ que l'on précisera.
13. Proposer une méthode de résolution de cette équation et formuler l'algorithme correspondant. (On pourra employer une projection.)
14. On suppose qu'une solution de (7) fournit une solution de (6). Donner une condition suffisante pour cela.

15. On note z_k une solution associée au problème (6) pour $\epsilon_k > 0$ et $N = (I_{2n}\ 0_{m_1})$ matrice $2n \times (2n + m_1)$. On suppose que $C = \{z \mid d(z) = 0\}$ est un ensemble fermé borné et que le problème (5) admet une unique solution $z^\star$. Montrer alors que MNz_k converge vers $x^\star$, solution du problème (3).

Exercice 3 Minimisation alternée [15 points]

Dans cet exercice, on considère $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) deux fonctions convexes dont on suppose que l'on connaît les opérateurs proximaux Prox_{f_1} et Prox_{f_2}. On cherche un algorithme permettant de calculer aisément

$$\mathrm{Prox}_{f_1+f_2}(x) = \arg\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left(f_1(s) + f_2(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2 \right) \tag{8}$$

Pour ce faire, on définit la convolution infimale de f_1 et f_2 comme la fonction

$$f_1 \oplus f_2 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \inf_{\xi\in\mathbb{R}^n} (f_1(\xi) + f_2(x - \xi))$$

1. (a) Montrer que, pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f_1 \oplus f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f_1(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) + f_2(\lambda(x - \xi_1) + (1-\lambda)(y - \xi_2))$$

   (b) Conclure que $f_1 \oplus f_2$ est convexe.

2. On cherche une relation entre convolution infimale et transformée de Fenchel.

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f_1^\star \oplus f_2^\star)^\star(x) = \sup_{\varphi_2}\sup_{\varphi_1} \left(x^T(\varphi_1 + \varphi_2) + f_1^\star(\varphi_1) + f_2^\star(\varphi_2) \right)$$

   (b) En déduire que $(f_1^\star \oplus f_2^\star)^\star = f_1^{\star\star} + f_2^{\star\star}$.

   (c) Conclure que $f_1^\star \oplus f_2^\star = (f_1 + f_2)^\star$.

3. Justifier que s solution de (8) si et seulement si $s = x - \mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x)$.

4. On admet que l'inf définissant $f_1^\star \oplus f_2^\star$ est atteint. Montrer que $\mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x) = y + z$ où $(y, z) \in \mathbb{R}^{2n}$ est une solution de

$$\arg\min_{y,z\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2 \right)$$

5. Montrer que l'on sait déterminer, à $z \in \mathbb{R}^n$ fixé, la solution y_z du problème

$$\arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2 \right) \tag{P_z}$$

   et donner son expression explicite en fonction de z et x en utilisant Prox_{f_1}. De même, donner l'expression en fonction de y et x et en utilisant Prox_{f_2} de la solution z_y du problème à $y \in \mathbb{R}^n$ fixé

$$\arg\min_{z\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2 \right) \tag{P_y}$$

On considère l'algorithme de minimisation alternée

Algorithme 1. *A partir de $y_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, itérer*

- *z_k solution de (P_{y_k})*
- *y_{k+1} solution de (P_{z_k})*
- *définir $s_k = x - y_k - z_k$*

6. Interpréter cet algorithme et son but. Justifier de son intérêt au regard de la question 5.

Optimisation
Examen. Durée 2h30
Tous documents autorisés.

MINES ParisTech — *Mardi 20 avril 2021*

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 50 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [7 Points]

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, le problème

$$f(x,y) = e^x + ay$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ y - x &\leq 0 \\ x + y &\leq 2 \end{aligned}$$

1. Justifier que ce problème admet un minimum global. Est-il unique ?
   Solution: L'ensemble admissible est convexe, et la fonction f est convexe sur cet ensemble, qui est fermé borné. Ce problème admet donc une solution globale. Elle n'est en revanche pas unique a priori.
2. Représenter graphiquement les contraintes du problème. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, résoudre ce problème en fonction de la valeur de a.

   Solution: Notons $c_1(x,y) = -y$, $c_2(x,y) = y - x$ et $c_3(x,y) = x + y - 2$.
   On observe que, pour $a \geq 0$, f est une fonction strictement croissante de x. Il existe alors un unique minimum atteint en $(x^\star, y^\star) = (0,0)$.
   Supposons maintenant $a < 0$. Comme $\nabla f(x,y) = (e^x, a)$, graphiquement, on observe que la contrainte c_2 doit être active pour pouvoir vérifier les conditions de KKT puisque $a < 0$. Supposons dans un premier temps que c_2 soit la seule contrainte active. La condition de stationnarité du lagrangien s'écrit alors

$$\begin{cases} e^{x^\star} - \lambda_2 = 0 \\ a + \lambda_2 = 0 \\ y^\star = x^\star \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^\star = y^\star = \ln(-a) \\ \lambda_2 = -a > 0 \end{cases}$$

   Pour que $(x^\star, y^\star)$ appartienne à l'ensemble admissible, il faut $\ln(-a) \in [0,1]$ soit $-e \leq a \leq -1$. Alors, les fonctions f et c_i étant convexes et l'intérieur de l'ensemble admissible non-vide, les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes à l'existence d'un minimum et l'on conclut que $(x^\star, y^\star) = (\ln(-a), \ln(-a))$ est solution du problème.
   Dans le cas $-1 \leq a \leq 0$, supposons que c_1 et c_2 sont actives, i.e., $(x^\star, y^\star) = (0,0)$.La condition de stationnarité du lagrangien s'écrit alors

$$\begin{cases} 1 - \lambda_2 = 0 \\ a - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 > 0 \\ \lambda_1 = a + 1 \geq 0 \ \text{ car } a \geq -1 \end{cases}$$

   dont on conclut que les conditions de KKT sont bien vérifiée et que l'origine est solution globale du problème.
   Enfin, dans le cas $a \leq -e$, supposons que c_2 et c_3 sont actives, i.e., $(x^\star, y^\star) = (1,1)$.La condition de stationnarité du lagrangien s'écrit alors

$$\begin{cases} e - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ a + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{e-a}{2} \geq 0 \\ \lambda_1 = -\dfrac{e+a}{2} \geq 0 \ \text{ car } a \leq -e \end{cases}$$

dont on conclut que les conditions de KKT sont bien vérifiée et que $(x^\star, y^\star) = (1, 1)$ est solution globale du problème.

Exercice 2 Autour de méthodes de pénalité [28 points]

Dans ce problème, on se propose d'aborder plusieurs méthodes de résolution par pénalité pour des problème d'optimisation sous contraintes.

Partie 1 : Méthode de points intérieurs

On s'intéresse ici au problème de minimisation suivant

$$\min_{c(x)\leq 0} f(x) \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des fonctions continues, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On note $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \leq 0\}$ dont on suppose qu'il s'agit d'un ensemble fermé borné, d'intérieur R^0 non-vide.

1. Justifier que le problème (1) admet au moins une solution, notée x^*.
   Solution: R est un fermé borné et f est continue. Par théorème de Weierstrass, il existe donc au moins une solution à ce problème de minimisation.

On suppose que cette solution $x^\star$ est unique. On cherche à résoudre ce problème en résolvant une suite de problèmes pénalisés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_k(x) \triangleq f(x) + \varepsilon_k p(x) \quad \text{avec} \quad p(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma(c_i(x)) \tag{2}$$

où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière sur $]-\infty, 0[$, telle que $\lim_{s\to 0^-} \gamma(s) = +\infty$ et, par convention, $\gamma(s) = +\infty$ pour $s \geq 0$. $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, strictement décroissante et convergeant vers zéro . On suppose que (2) admet une solution x_k.

2. Montrer que $x_k \in R^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Solution: $\gamma(c_i(x)) = \infty$ pour $c_i(x) \geq 0$. Or, si $x \notin R^0$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $c_i(x) \geq 0$. Aussi, $f_k(x) = \infty$ si $x \notin R^0$. Le minimum de f_k est donc atteint sur R^0.
3. Justifier que $f_{k+1}(x_{k+1}) \leq f_{k+1}(x_k)$. En déduire $f_{k+1}(x_{k+1}) \leq f_k(x_k)$.
   Solution: Par définition de x_{k+1}, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f_{k+1}(x) \geq f_{k+1}(x_{k+1})$ donc en particulier pour $x = x_k$. La suite (ε_k) étant décroissante, on conclut que

$$f_{k+1}(x_{k+1}) \leq f_{k+1}(x_k) = f(x_k) + \varepsilon_{k+1} p(x_k) \leq f(x_k) + \varepsilon_k p(x_k) = f_k(x_k)$$

4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x^\delta \in R$ tel quel $f(x^\delta) < f(x^*) + \delta/2$.
   Solution: Par continuité de f, il existe $\sigma > 0$ tel que, si $\|x - x^*\| < \sigma$ alors $|f(x) - f(x^*)| = f(x) - f(x^*) < \delta/2$. Par ailleurs, comme $x^* \in R$, que R est fermé borné et que $R^0 \neq \emptyset$, $B(x^*, \sigma) \cap R \neq \emptyset$. On choisit x^δ un élément de cet ensemble.

On considère $K \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_k p(x^\delta) < \delta/2$ pour $k \geq K$.

5. Déduire de la question 3 que, pour tout $k \geq K$, $f_k(x_k) \leq f_K(x^\delta)$.
   Solution: En itérant la relation de la question 3, on obtient $f_k(x_k) \leq f_l(x_l)$ pour tout $l \leq k$. Aussi, pour $k \geq K$, $f_k(x_k) \leq f_K(x_K) \leq f_K(x^\delta)$ par définition de x_K.
6. En déduire que $f(x^*) \leq f(x_k) < f(x^*) + \delta$ pour tout $k \geq K$. Conclure que $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_k) = f(x^*)$.

   Solution: L'inégalité de gauche provient de la définition de x^*. Celle de droite du fait que

$$f(x_k) \leq f(x_k) + \epsilon_k p(x_k) = f_k(x_k) \leq f_K(x^\delta) < f(x^\delta) + \delta/2 < f(x^*) + \delta/2 + \delta/2$$

   pour $k \geq K$ selon les deux question précédentes et par définition de K. On obtient le résultat voulu car δ est quelconque.

7. Conclure également que la suite x_k converge vers x^*.
Solution: $x_k \in R$, fermé borné. Ainsi, il existe une sous-suite $x_{\varphi(k)}$ convergente de limite l. Par continuité de f et la question précédente, $f(l) = f(x^*)$ dont on déduit $l = x^*$ par unicité du minimiseur de f sur R. La suite x_k admettant une unique valeur d'adhérence, elle est convergente, de limite x^*.
8. Montrer que l'étude précédente reste inchangée pour le problème

$$\min_{c(x)\leq 0\,,\ x\in C} f(x)$$

où C est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $C \cap R^0 \neq \emptyset$.
Solution: $C \cap R$ est un fermé borné de R^n. On peut donc reprendre l'étude précédente en considérant $C \cap R^0$ et $C \cap R$ en lieu et place de R^0 et R.

Partie 2 : Slack variables pour contraintes égalités

On s'intéresse maintenant au problème de minimisation suivant

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sous les contraintes} \quad c^{in}(x) \leq 0 \text{ et } c^{eq}(x) = 0 \tag{3}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c^{in} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}$ et $c^{eq} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_2}$ des fonctions régulières ($(n, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3$ et $m_2 < n$).

9. Justifier que l'on peut réécrire ce problème comme

$$\min_{c(x)\leq 0} f(x) \tag{4}$$

avec $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ où $r = m_1 + 2m_2$ cad sous la forme du problème (1). Pourquoi ne peut-on alors pas appliquer la méthode de points intérieurs étudiée précédemment ?
Solution: On reformule $c_i^{eq}(x) = 0$ sous la forme de deux contraintes inégalités $c_i^{eq}(x) \leq 0$ et $-c_i^{eq}(x) \leq 0$. Cela aboutit à la forme voulue en définissant $c_i = c_i^{in}$ pour $i = 1, \ldots, m_1$ et $c_{m_1+2j-1} = -c_{m_1+2j} = c_i^{eq}$ pour $j = 1, \ldots, m_2$. On ne peut pas appliquer directement la méthode de pénalités intérieures car l'ensemble admissible correspondant est d'intérieur vide (il n'existe pas x_0 tel que $c_i^{eq}(x_0) < 0$ et $-c_i^{eq}(x_0) < 0$ simultanément).
10. On introduit $s \in \mathbb{R}^{m_1}$ et l'on écrit x sous la forme $x_i = y_i - y_{i+n}$ avec $y \in \mathbb{R}^{2n}_+$, cad $x = My$ avec $M = (I_n \ \ -I_n)$ matrice $n \times 2n$. Soit $z = (y, s) \in \mathbb{R}^{2n+m_1}$. Montrer que l'on peut réécrire le problème (3) sous la forme

$$\min_{d(z)=0\,,\ -z\leq 0} g(z) \tag{5}$$

où $d : z = (y, s) \mapsto (c^{in}(My) + s, c^{eq}(My)) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$, et où l'on précisera la fonction g.
Solution: Par définition, $y \geq 0$. Avec le choix de d, on a par ailleurs $-s = c^{in}(x) \leq 0$. On a ainsi $-z \leq 0$. Il suffit donc de définir $g(z) = f(My)$.

Pour résoudre ce problème, on pénalise les contraintes inégalités par la méthode de points intérieurs étudiée précédemment et l'on considère le problème suivant pour $\varepsilon > 0$

$$\min_{d(z)=0} (g(z) - \varepsilon \ln(z)) \tag{6}$$

dont on suppose qu'il admet une solution.

11. Former le lagrangien associé à (6) et montrer que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont

$$\begin{cases} \nabla g(z) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1+m_2} \lambda_i \nabla d_i(z) - w = 0 \\ w_i z_i = \varepsilon\,, \quad i = 1, \ldots, 2n + m_1 \\ d(z) = 0 \\ z \geq 0\,,\ w \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Solution: Le lagrangien du problème est $\mathcal{L} = g(z) - \varepsilon \ln(z) + \lambda^T d(z)$. En définissant $w \in \mathbb{R}^{2n+m_1}$ tel que $w_i = \varepsilon / z_i$, on obtient le résultat voulu.

12. Formuler ces conditions sous la forme $h(z, w, \lambda) = 0$ avec $h : \mathbb{R}_+^{4n+2m_1} \times \mathbb{R}^{m_1+m_2} \mapsto \mathbb{R}^{4n+3m_1+m_2}$ que l'on précisera.
Solution: On définit $h(z, w, \lambda) = (\nabla g(z) + \sum_{i=1}^{m_1+m_2} \lambda_i \nabla d_i(z) - w, w \bullet z - \varepsilon \mathbf{1}, d)$ en notant $\bullet$ le produit composante par composante de deux vecteurs et $\mathbf{1}$ le vecteur unité.
13. Proposer une méthode de résolution de cette équation et formuler l'algorithme correspondant. (On pourra employer une projection.)
Solution: Les espaces d'arrivée et de départ de la fonction h étant de même dimension, on peut employer une méthode de Newton-Raphson avec projection pour résoudre cette équation. L'algorithme correspondant correspond à itérer la relation

$$(z_{l+1}, w_{l+1}, \lambda_{l+1}) = P\left((z_l, w_l, \lambda_l) - (J_h(z_l, w_l, \lambda_l))^{-1} h(z_l, w_l, \lambda_l)\right)$$

où J_h jacobien de h et P projecteur sur $\mathbb{R}_+^{4n+2m_1} \times \mathbb{R}^{m_1+m_2}$.
14. On suppose qu'une solution de (7) fournit une solution de (6). Donner une condition suffisante pour cela.
Solution: Il suffit que le problème (6) soit convexe.
15. On note z_k une solution associée au problème (6) pour $\epsilon_k > 0$ et $N = (I_{2n}\ 0_{m_1})$ matrice $2n \times (2n + m_1)$. On suppose que $C = \{z \mid d(z) = 0\ \}$ est un ensemble fermé borné et que le problème (5) admet une unique solution z^*. Montrer alors que MNz_k converge vers x^*, solution du problème (3).
Solution: Selon la partie précédente, z_k converge vers $z^\star$. Donc, MNz^* est une solution de (3) selon la reformulation effectuée.

Exercice 3 Minimisation alternée [15 points]

Dans cet exercice, on considère $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) deux fonctions convexes dont on suppose que l'on connaît les opérateurs proximaux Prox_{f_1} et Prox_{f_2}. On cherche un algorithme permettant de calculer aisément

$$\mathrm{Prox}_{f_1+f_2}(x) = \arg\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left(f_1(s) + f_2(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2\right) \tag{8}$$

Pour ce faire, on définit la convolution infimale de f_1 et f_2 comme la fonction

$$f_1 \oplus f_2 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \inf_{\xi\in\mathbb{R}^n} (f_1(\xi) + f_2(x - \xi))$$

1. (a) Montrer que, pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f_1 \oplus f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f_1(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) + f_2(\lambda(x - \xi_1) + (1-\lambda)(y - \xi_2))$$

Solution: Par définition de l'inf avec le choix particulier de $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$.

(b) Conclure que $f_1 \oplus f_2$ est convexe.
Solution: Par convexité de f_1 et f_2, on obtient donc

$$f_1 \oplus f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\left[f_1(\xi_1) + f_2(x - \xi_1)\right] + (1-\lambda)\left[f_1(\xi_2) + f_2(y - \xi_2)\right]$$

En prenant l'inf en ξ_1 et ξ_2, on conclut donc.

2. On cherche une relation entre convolution infimale et transformée de Fenchel.
(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f_1^\star \oplus f_2^\star)^\star(x) = \sup_{\varphi_2} \sup_{\varphi_1} \left(x^T(\varphi_1 + \varphi_2) + f_1^\star(\varphi_1) + f_2^\star(\varphi_2)\right)$$

Solution: En utilisant la question précédente et le changement de variable $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$, on obtient

$$\begin{aligned}
(f_1^\star \oplus f_2^\star)^\star(x) &= \sup_\varphi \left(x^T\varphi - f_1^\star \oplus f_2^\star(\varphi)\right) \\
&= \sup_\varphi \left(x^T\varphi + \sup_{\varphi_1}\left[-f_1^\star(\varphi_1) - f_2^\star(\varphi - \varphi_1)\right]\right) \\
&= \sup_\varphi \sup_{\varphi_1} \left(x^T\varphi + f_1^\star(\varphi_1) + f_2^\star(\varphi - \varphi_1)\right) \\
&= \sup_{\varphi_2} \sup_{\varphi_1} \left(x^T(\varphi_1 + \varphi_2) + f_1^\star(\varphi_1) + f_2^\star(\varphi_2)\right)
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $(f_1^\star \oplus f_2^\star)^\star = f_1^{\star\star} + f_2^{\star\star}$.
Solution: On sépare les sup et on reconnaît la définition de la transformée de Fenchel.

(c) Conclure que $f_1^\star \oplus f_2^\star = (f_1 + f_2)^\star$.
Solution: On a $f_1^{\star\star} + f_2^{\star\star} = f_1 + f_2$ selon le théorème de Moreau-Fenchel, car f_1 et f_2 sont convexes. En appliquant la transformée de Fenchel, on conclut que $(f_1^\star \oplus f_2^\star)^{\star\star} = (f_1 + f_2)^\star$ et on obtient le résultat voulu car $f_1^\star \oplus f_2^\star$ est convexe selon la question précédente.

3. Justifier que s solution de (8) si et seulement si $s = x - \mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x)$.
Solution: Par identité de Moreau, on a $x = \mathrm{Prox}_{f_1+f_2}(x) + \mathrm{Prox}_{(f_1+f_2)^\star}(x) = \mathrm{Prox}_{f_1+f_2}(x) + \mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x)$ selon le résultat de la question précédente.

4. On admet que l'inf définissant $f_1^\star \oplus f_2^\star$ est atteint. Montrer que $\mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x) = y + z$ où $(y, z) \in \mathbb{R}^{2n}$ est une solution de

$$\arg\min_{y,z\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2\right)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x) &= \arg\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left(\min_\xi \left(f_1^\star(\xi) + f_2^\star(s - \xi)\right) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2\right) \\
&= \arg\min_{s,\xi\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(\xi) + f_2^\star(s - \xi) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2\right)
\end{aligned}$$

Et on conclut avec le changement de variable $y = \xi$ et $z = s - \xi$.

5. Montrer que l'on sait déterminer, à $z \in \mathbb{R}^n$ fixé, la solution y_z du problème

$$\arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2\right) \tag{P_z}$$

et donner son expression explicite en fonction de z et x en utilisant Prox_{f_1}. De même, donner l'expression en fonction de y et x et en utilisant Prox_{f_2} de la solution z_y du problème à $y \in \mathbb{R}^n$ fixé

$$\arg\min_{z\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + f_2^\star(z) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2\right) \tag{P_y}$$

Solution: Ce problème est équivalent à

$$\arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} \left(f_1^\star(y) + \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2\right) = \mathrm{Prox}_{f_1^\star}(x - z)$$

En utilisant l'identité de Moreau, on obtient donc $y_z = x - z - \mathrm{Prox}_{f_1}(x - z)$. De même, $z_y = x - y - \mathrm{Prox}_{f_1}(x - y)$.

On considère l'algorithme de minimisation alternée

Algorithme 1. *A partir de* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *quelconque, itérer*

— z_k *solution de* (P_{y_k})

— y_{k+1} *solution de* (P_{z_k})
— *définir* $s_k = x - y_k - z_k$

6. Interpréter cet algorithme et son but. Justifier de son intérêt au regard de la question 5.
   Solution: Cet algorithme vise à résoudre le problème (**??**). On obtiendrait alors $s = x - y - z = \mathrm{Prox}_{f_1^\star \oplus f_2^\star}(x)$ selon la question 4. On pourrait alors obtenir cette valeur à l'aide uniquement de la connaissance de Prox_{f_1} et Prox_{f_2} selon la question 5.

Problème 1 : Études d'association pangénomiques

Le but des études d'associations pangénomiques est de déterminer quelles régions du génome sont associées à un caractère observable $Y \in \mathbb{R}$, appelé *phénotype* (par exemple la couleur des yeux, la taille, le groupe sanguin). On représente le génome par un vecteur $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ dont chacune des composantes $X_j \in \mathbb{R}$ caractérise une position spécifique.

Diverses techniques de génotypage permettent d'acquérir un échantillon de taille n des couples (X, Y). On fait alors m tests statistiques, évaluant chacun l'association entre X_j et Y, pour $j \in [\![1, m]\!]$.

La figure 1 représente les résultats d'une telle étude : chaque test j est représenté par un point, d'abscisse j et d'ordonnée $-\log_{10}$ de sa p-valeur.

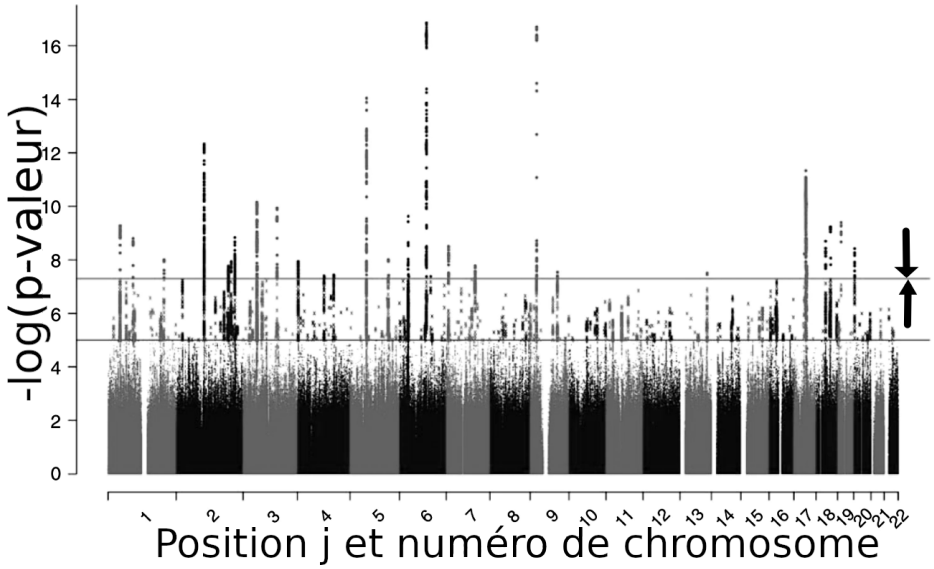


Figure 1 – Association entre différentes régions du génome et un phénotype.

1. (1 point) Quelle est l'hypothèse nulle du $j$ème test ?

Solution: La valeur de Y est indépendante de la valeur de X_j.

2. (1 point) Sur la figure 1, la ligne horizontale la plus haute (pointée par deux flèches) est tracée à l'ordonnée $y = -(\log_{10}(0.05) - \log_{10}(m))$. Pourquoi ?

Solution: Correction pour test d'hypothèses multiples à un niveau de signification $\alpha = 0.05$: les tests significatifs sont au-dessus de la ligne.

3. (4 points) La figure 1 est tirée d'une publication scientifique dans laquelle le phénotype Y est le revenu avant impôt du foyer de l'individu. Cette figure indique-t-elle que la capacité à gagner sa vie est déterminée par notre génome ? Discutez.

Pistes de réflexion : À quoi la corrélation entre X_j et Y peut-elle être due ? Quelle est l'hypothèse alternative du test j ?

Solution:

- Pourquoi se poser cette question ?
- Association via des maladies ? L'ethnicité ?
- Correlation $\neq$ causation
- Que certains X_j soient associées à Y n'implique pas qu'on peut parfaitement prédire Y à partir de ces X_j (pensez à un nuage de point de corrélation $R = 0.6$.

Problème 2 : Détection de spam

Nous voulons construire un modèle de détection de spams. Nous disposons d'un jeu de données $\mathcal{D} = \{(\vec{x}^1, y^1), (\vec{x}^2, y^2), \ldots, (\vec{x}^n, y^n)\}$, dans lequel, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\vec{x}^i \in \{0, 1\}^m$ est une représentation d'un email et $y^i \in \{0, 1\}$ vaut 0 si l'email est légitime et 1 s'il s'agit d'un spam.

On utilise pour $\vec{x}^i$ une représentation « *bag-of-words* » : m est le nombre de mots contenus dans un dictionnaire, et $x^i_j \in \{0, 1\}$ vaut 1 si le j-ème mot du dictionnaire apparaît dans le i-ème email et 0 sinon.

4. (1 point) De quel type de problème d'apprentissage statistique s'agit-il ?

Solution: Apprentissage supervisé, classification binaire.

Modélisation probabiliste

Nous supposons que $\mathcal{D}$ est un échantillon d'un couple (X, Y) dans lequel X est un vecteur aléatoire de dimension m et Y est une variable aléatoire discrète.

Nous faisons de plus l'hypothèse que les composantes de X sont indépendantes conditionnellement à Y : pour tout $j \neq k \in [\![1, m]\!]$, $\mathbb{P}(X_j = x_j | Y = y, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_j = x_j | Y = y)$.

5. (½ point) Cette hypothèse vous semble-t-elle réaliste ? Justifiez brièvement.

Solution: Au sein d'une classe, la présence du mot k ne change pas la probabilité de la présence du mot j. C'est peu réaliste, car les mots d'un même champ lexical n'ont aucune raison d'être indépendants, en particulier au sein d'une classe. Néanmoins, cette hypothèse va grandement simplifier la modélisation.

Nous pouvons maintenant écrire la loi jointe de (X, Y) comme

$$\mathbb{P}(X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), Y = y) = \mathbb{P}(Y = y) \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X_j = x_j | Y = y),$$

et nous pouvons paramétrer cette loi jointe par $(2m+1)$ paramètres : $p = \mathbb{P}(Y = 1)$ et, pour $j \in [\![1, m]\!]$, q_{j0} et q_{j1} définis par $q_{j0} = \mathbb{P}(X_j = 1 | Y = 0)$ et $q_{j1} = \mathbb{P}(X_j = 1 | Y = 1)$.

6. (½ point) Supposons disposer d'estimations $\widehat{p}, \widehat{q_{j0}}$, et $\widehat{q_{j1}}$ de p, q_{j0}, et q_{j1}. Utilisez ces estimations pour exprimer $\mathbb{P}(Y = 0 | X = \vec{x})$ et $\mathbb{P}(Y = 1 | X = \vec{x})$.

   Remarquez que, pour $k \in \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X_j = x_j | Y = k) = q_{jk}^{x_j}(1 - q_{jk})^{1-x_j}$.

Solution: On utilise la loi de Bayes :

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X = \vec{x}) = \frac{\mathbb{P}(X = \vec{x} | Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1)}{\mathbb{P}(X = \vec{x})} \approx \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(\widehat{q_{j1}}^{x_j}(1 - \widehat{q_{j1}})^{(1-x_j)}\right) \widehat{p}}{\mathbb{P}(X = \vec{x})}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0 | X = \vec{x}) \approx \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(\widehat{q_{j0}}^{x_j}(1 - \widehat{q_{j0}})^{(1-x_j)}\right) (1 - \widehat{p})}{\mathbb{P}(X = \vec{x})}$$

7. (1 point) Comment prédire si $\vec{x}$ est un spam ?

Solution: On retourne l'étiquette « spam » si $\mathbb{P}(Y = 1 | X = \vec{x}) \geq \mathbb{P}(Y = 0 | X = \vec{x})$, autrement dit si

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\widehat{q_{j1}}^{x_j}(1 - \widehat{q_{j1}})^{(1-x_j)}\right) \widehat{p} \geq \prod_{j=1}^{m} \left(\widehat{q_{j0}}^{x_j}(1 - \widehat{q_{j0}})^{(1-x_j)}\right) (1 - \widehat{p}).$$

8. (2 points) Écrivez la log-vraisemblance de $\mathcal{D}$ en fonction de (p, q_{j0}, q_{j1}).

Solution: La log-vraisemblance de $\mathcal{D}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\ell(\mathcal{D}; p, q_{j0}, q_{j1}) &= \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{P}(X = \vec{x}^{\,i}, Y = y^i) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{P}(Y = y^i) + \sum_{j=1}^{m} \ln \mathbb{P}(X_j = x_j | Y = y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y^i \ln p + (1 - y^i) \ln(1-p) + \sum_{j=1}^{m} y^i \left(x_j^i \ln q_{j1} + (1 - x_j^i) \ln(1 - q_{j1}) \right) + \\ &\qquad (1 - y^i) \left(x_j^i \ln q_{j0} + (1 - x_j^i) \ln(1 - q_{j0}) \right).\end{aligned}$$

9. (2 points) Déterminez les estimations par maximum de vraisemblance des paramètres p, q_{j0}, et q_{j1}.

   Pour alléger les calculs, faites appel à l'estimation par maximum de vraisemblance du paramètre d'une Bernoulli, qui est la moyenne de l'échantillon.

   Notez $n_{\text{POS}} = \sum_{i=1}^{n} y^i$ le nombre de spams dans les données.

Solution: Il s'agit de trouver $\widehat{p}$, $\widehat{q_{j0}}$, et $\widehat{q_{j1}}$ qui maximisent

$$\sum_{i=1}^{n} y^i \ln p + (1 - y^i) \ln(1-p) + \\ \sum_{j=1}^{m} y^i \left(x_j^i \ln q_{j1} + (1 - x_j^i) \ln(1 - q_{j1}) \right) + (1 - y^i) \left(x_j^i \ln q_{j0} + (1 - x_j^i) \ln(1 - q_{j0}) \right).$$

On peut séparer l'optimisation par rapport à chacun des paramètres, et chacun prend la même forme que la maximisation de la log-vraisemblance d'une Bernoulli.

Ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{p} &= \operatorname*{arg\,max}_{p \in]0,1[} \sum_{i=1}^{n} y^i \ln p + (1 - y^i) \ln(1-p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y^i = \frac{n_{\text{POS}}}{n} \\ \widehat{q_{j0}} &= \operatorname*{arg\,max}_{q \in]0,1[} \sum_{i=1}^{n} (1 - y^i) \left(x_j^i \ln q + (1 - x_j^i) \ln(1 - q) \right) \\ &= \operatorname*{arg\,max}_{q \in]0,1[} \sum_{i \in \text{NEG}} x_j^i \ln q + (1 - x_j^i) \ln(1 - q) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - y^i) x_j^i}{n - n_{\text{POS}}} \\ \widehat{q_{j1}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y^i x_j^i}{n_{\text{POS}}}\end{aligned}$$

10. (1 point) Comment interprétez-vous l'estimation par maximum de vraisemblance de q_{j1}?

Solution: C'est la proportion de spams contenant le mot j.

11. (1 point) En quoi cette méthode de détection de spams vous paraît-elle limitée ?

Solution:

- On ne prend pas en compte l'ordre des mots
- L'hypothèse d'indépendance conditionnelle n'est pas vérfiée
- Les mots rares ont des contributions faibles.

Réseau de neurones artificiels

Nous allons maintenant utiliser un perceptron multi-couche pour apprendre à détecter si un email est un spam.

12. (1 point) Quelle fonction d'activation choisir pour l'unité de sortie ?

Solution: Classification binaire : activation logistique.

13. (1 point) Supposez que le réseau de neurones contient 3 couches intermédiaires, utilisant chacune la fonction $\tanh$ comme fonction d'activation, et comportant chacune H neurones et une unité de biais. Combien de paramètres comporte le modèle décrit par ce réseau ?

Solution:

- $(m+1)H$ poids de la couche d'entrée à la première couche cachée ;
- $(H+1)H$ poids de la première à la deuxième couche cachée ;
- $(H+1)H$ poids de la deuxième à la troisième couche cachée ;
- $(H+1)$ poids de la troisième couche cachée à l'unité de sortie.

Donc un total de $H(m+1+2(H+1)+1)+1 = 2H^2+(m+4)H+1$ paramètres.

14. (3 points) Formulez l'apprentissage de ce réseau comme un problème de minimisation du risque empirique :

- quel est l'espace des hypothèses ?
- quelle est la fonction de perte ?
- quel est le problème d'optimisation ?

Solution:

- L'espace des hypothèses est donné par l'architecture du réseau :

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \mapsto \underbrace{\sigma\left(w_0^3 + \sum_{q=1}^{H} w_q^3 \tanh\left(w_0^2 + \sum_{l=1}^{H} w_{lq}^2 \tanh\left(w_0^1 + \sum_{k=1}^{H} w_{kl}^1 \tanh\left(w_0^0 + \sum_{j=1}^{m} w_{jk}^0\right)\right)\right)\right)}_{f_{w^0,w^1,w^2,w^3}(\vec{x})}; \right.$$
$$\left. w^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)\times H}, w^1 \in \mathbb{R}^{(H+1)\times H}, w^2 \in \mathbb{R}^{(H+1)\times H}, w^3 \in \mathbb{R}^{(H+1)} \right\}$$

- La fonction de perte est l'entropie croisée L_H.
- Le problème d'optimisation est :

$$\underset{w^0\in\mathbb{R}^{(m+1)\times H}, w^1\in\mathbb{R}^{(H+1)\times H}, w^2\in\mathbb{R}^{(H+1)\times H}, w^3\in\mathbb{R}^{(H+1)}}{\arg\max} \sum_{i=1}^{n} L_H\left(y^i, f_{w^0,w^1,w^2,w^3}(\vec{x}^{\,i})\right)$$

15. (1 point) Sait-on résoudre ce problème d'optimisation ? Comment procéder en pratique ?

Solution: Non car non convexe. On utilise une méthode de gradient mais sans garantie.

16. (1 point) Ce perceptron multi-couche vous semble-t-il être un bon outil pour créer un détecteur de spam ?

Solution: Beaucoup trop de paramètres à apprendre (car m est très grand) ; problème d'optim difficile.

17. (1 point) Parmi les algorithmes d'apprentissage vus en cours, lequel vous semble adapté à ce problème de détection de spam et pourquoi ?

Solution: Forêts aléatoires : variables binaires, sortie binaire, chaque arbre est construit sur peu de mots.
Plus proches voisins peu adapté car dimension très grande.

Examen de traitement du signal - 2021

MINES ParisTech - Tronc Commun 1A

Durée : 3h00. Tous documents autorisés.

Exercice 1 : Repliement spectral (3 points)

On considère le signal suivant

$$x(t) = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(380\pi t) - 4\sin\left(30\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \tag{1}$$

1. A quelle fréquence minimale f_e (en Hz) faut-il l'échantillonner pour éviter le repliement spectral ?
2. Esquisser la TFD du signal échantillonné à une fréquence $f = 2f_e$.
3. Esquisser la TFD du signal échantillonné à une fréquence $f = 135$ Hz.

Exercice 2 : Filtre de Butterworth d'ordre 2 (7 points)

On rappelle que la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth d'ordre N et de pulsation de coupure ω_c est donnée par

$$H_N(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\frac{s-s_k}{\omega_c}}, \qquad s_k = \omega_c \exp\left(\frac{(2k+N-1)i\pi}{2N}\right),\ k = 1, ..., N \tag{2}$$

1. Donner l'expression de cette fonction de transfert H_2 dans le cas $N = 2$.
2. Montrer que cette fonction de transfert se met sous la forme

$$H_2(s) = \frac{a}{s-s_1} + \frac{b}{s-s_2} \tag{3}$$

avec $a, b \in i\mathbb{R}$.

3. En déduire une expression similaire pour la fonction de transfert dans le domaine de Fourier.
4. Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) < 0$ donner la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = e^{at} 1_{[0,+\infty]}(t) \tag{4}$$

5. En déduire la réponse impulsionnelle du filtre de Butterworth d'ordre 2.
6. On rappelle que la transformée de Tustin permet d'obtenir un filtre discret à partir de la fonction de transfert d'un filtre discret en choisissant

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{2}{\Delta t}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{5}$$

où Δt est le pas d'échantillonnage, H_c la fonction de transfert du filtre continu et H_d celle du filtre discret. Déduire de cette formule une implémentation d'un filtre de Butterworth du 2e ordre de pulsation de coupure $\omega_c = \sqrt{2}$ rad/s, discretisé à un pas de temps Δt, sous forme d'une équation aux différences.

7. Donner les 3 premiers termes non nuls de la réponse impulsionnelle du filtre discret.

Problème : Traitement des signaux de parole (10 points)

L'objectif de ce problème est d'étudier, de manière simplifiée, les modèles utilisés pour traiter les signaux de parole en téléphonie cellulaire. Les signaux de parole sont des signaux aléatoires non stationnaires échantillonnés à haute fréquence. En découpant ces signaux à l'aide d'une fenêtre temporelle de petite taille, leur étude peut cependant se ramener à celle d'une séquence de signaux stationnaires.

Parmi ces signaux stationnaires, on peut de façon schématique distinguer deux types de signaux. La voix émet en effet deux types de sons, dit voisés et non-voisés. Les sons voisés correspondent aux sons obtenus à la suite de vibrations générées par les cordes vocales, qui sont ensuite transformées en un son de parole en passant dans le larynx. Les sons non voisés ne font à l'inverse pas intervenir les cordes vocales. Pour chaque type de son, des modèles aléatoires paramétriques peuvent être établis afin de représenter et de resynthétiser les signaux stationnaires observés pour chaque fenêtre du signal. Plutôt que de transmettre le signal échantillonné, la méthode utilisée en téléphonie est de transmettre les paramètres du modèle, puis de resynthétiser un son de parole à partir de ces paramètres.

Dans ce problème, nous nous proposons d'étudier les modèles stochastiques développés pour modéliser les sons voisés et non voisés, avant d'explorer la question de l'estimation des paramètres du modèle sur une observation d'un signal de voix.

1. Modélisation des sons voisés

Dans le cas d'un son voisé, les cordes vocales émettent un signal f qu'on peut modéliser par un train d'ondes émises avec une période T appelée le *pitch* du signal :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t - nT). \tag{6}$$

Dans cette expression, g correspond à une onde élémentaire, dont le support est petit devant le pitch T. Le signal discrétisé correspondant prend donc la forme :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[n - kT]. \tag{7}$$

Le passage du son émis par les cordes vocales dans le larynx peut être modélisé par l'application d'un filtre linéaire h au signal f. En pratique, on modélisera donc les sons voisés comme le produit de convolution

$$s[n] = h * f[n]. \tag{8}$$

Le filtre h est caractérisé par ses coefficients $\{a[1], \dots a[P]\}$ et transforme le signal d'entrée f en un signal de sortie s via l'équation aux différences

$$s[n] = f[n] + \sum_{k=1}^{P} a[k] s[n-k]. \tag{9}$$

Question 1.1 : Déterminer la transformée en z du filtre h. Sous quelle condition théorique le filtre est-il stable ? Nous supposerons dans la suite que cette condition est bien vérifiée par le filtre.

2. Modélisation des sons non voisés

Un son non voisé X peut être modélisé par un processus autorégressif, c'est à dire par un bruit blanc B de variance σ^2 inconnue et de moyenne nulle, filtré par un filtre h :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X[n] := h * B[n] \tag{10}$$

En d'autres termes, le signal X est défini par l'équation aux différences

$$X[n] - \sum_{k=1}^{P} a[k]X[n-k] = B[n]. \tag{11}$$

Question 2.1 : On rappelle qu'un bruit blanc B est une séquence $\{B[n], n \in \mathbb{Z}\}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et de même loi de moyenne nulle et de variance σ^2. Déterminer l'autocovariance et la densité spectrale de puissance de B.

Question 2.2 : Montrer que l'auto-covariance du processus aléatoire X est donnée par :

$$R_X[n] = h * \tilde{h} * R_B[n]. \tag{12}$$

où le filtre $\tilde{h}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$\tilde{h}[n] = h[-n]. \tag{13}$$

Question 2.3 : En déduire que le processus aléatoire $\{X[n], n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens large, et que sa densité spectrale de puissance est donnée par :

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{|1 - \sum_{k=1}^{P} a[k]e^{-i\omega k}|^2} \tag{14}$$

Question 2.4 : Montrer que l'autocovariance du processus aléatoire X vérifie la relation de récurrence

$$R_X[h] = \sum_{k=1}^{P} a[k]R_X[h-k]. \tag{15}$$

3. Estimation des paramètres du modèle de parole

Supposons qu'on dispose d'une réalisation $\{x[-N], \ldots, x[0], \ldots x[N]\}$ d'un signal de parole. Dans cette partie, notre objectif est d'estimer au mieux les paramètres du modèle sous-jacent, à savoir le pitch T et les coefficients $(a[1], \ldots, a[P])$ du filtre. On supposera que N est grand devant P.

Question 3.1 : Pour $k \in \{-N, N\}$, proposer un estimateur statistique $r_x[k]$ de l'autocovariance $R_X[k]$ du modèle à partir de la réalisation $\{x[-N], \ldots, x[0], \ldots x[N]\}$.

Question 3.2 : Qualitativement, expliquer comment on peut exploiter l'autocovariance afin d'estimer le pitch pour des signaux voisés. L'autocovariance permet-elle de discriminer entre signaux voisés et non-voisés ?

Question 3.3 : Afin de déterminer les coefficients $(a[1], \ldots, a[P])$ du filtre, on fait l'hypothèse que le signal observé peut être prédit à partir des valeurs observées dans le passé par la relation :

$$x_p[n] = \sum_{k=1}^{P} a[k]x[n-k]. \tag{16}$$

On cherche alors à déterminer les coefficients du filtre en sélectionnant les paramètres $(a[1], \ldots, a[P])$ qui minimisent l'erreur de prédiction

$$\epsilon = \sum_{n} \|x[n] - x_p[n]\|^2. \tag{17}$$

Montrer que dans ce cas, le vecteur $(a[1], \ldots, a[P])$ est solution de l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[P-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_x[P-2] \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_x[P-1] & \cdot & \cdots & r_x[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ a[P] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x[1] \\ r_x[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ r_x[P] \end{pmatrix}$$

Examen de traitement du signal - 2021

MINES ParisTech - Tronc Commun 1A

Durée : 3h00. Tous documents autorisés.

Exercice 1 : Repliement spectral (3 points)

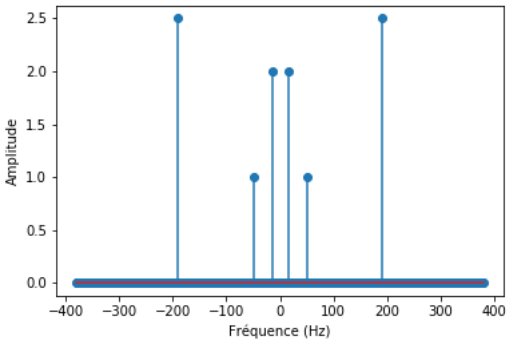
On considère le signal suivant

$$x(t) = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(380\pi t) - 4\sin\left(30\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \tag{1}$$

1. A quelle fréquence minimale f_e (en Hz) faut-il l'échantillonner pour éviter le repliement spectral ?

   Solution: Les fréquences présentes dans le signal sont respectivement 15Hz, 50Hz et 190Hz. D'après le théorème d'échantillonnage de Shannon, il est donc nécessaire d'échantillonner le signal à une fréquence strictement supérieure à $f_e = 380$Hz. □

2. Esquisser la TFD du signal échantillonné à une fréquence $f = 2f_e$.
   Solution: Le spectre du signal échantillonné à une fréquence $2f_e$ fait apparaître des pics d'amplitudes respectives 2, 1 et 2.5 aux fréquences ± 15Hz, ± 50Hz et ± 190Hz.



□

3. Esquisser la TFD du signal échantillonné à une fréquence $f = 135$ Hz.

   Solution: Pour $f_e = 135$Hz, le critère de Shannon n'est pas vérifié pour le terme de plus haute fréquence présent dans le signal. Ce terme cause donc un effet d'aliasing. Pour déterminer à quelle fréquence apparaît l'alias, on utilise la formule de sommation périodique :

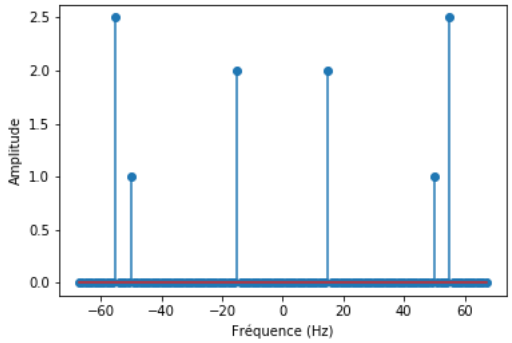
$$\phi_{\Delta t}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right).$$

   Rappelons que dans cette expression, $\phi_{\Delta t}$ (normalisée par Δt) est la TFTD des échantillons de f. Afin de déterminer le spectre du signal échantillonné, on cherche les valeurs de la pulsation

$\omega := 2\pi f$ dans l'intervalle $[-2\pi f_e, 2\pi f_e]$ telles que $\phi_{\Delta t}(\omega) \neq 0$. Ces pulsations correspondent aux solutions dans $[-f_e, f_e]$, pour $n \in \mathbb{Z}$, de :

$$f - nf_e \in \{-190, -50, -15, 15, 50, 190\}.$$

On vérifie que les fréquences solutions de ces équations dans l'intervalle $[-f_e, f_e]$ sont $f = \pm 15$ et $f = \pm 50$Hz pour $n = 0$, $f = -55Hz$ pour $n = 1$ (55Hz - 135Hz = -190Hz) et $f = 55$Hz pour $n = -1$. Les fréquences $f = \pm 190$Hz se replient donc sur les fréquences ± 55Hz dans le cas présent.



□

Exercice 2 : Filtre de Butterworth d'ordre 2 (7 points)

On rappelle que la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth d'ordre N et de pulsation de coupure w_c est donnée par

$$H_N(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\frac{s-s_k}{\omega_c}}, \qquad s_k = \omega_c \exp\left(\frac{(2k+N-1)i\pi}{2N}\right), \ k = 1, ..., N \tag{2}$$

1. Donner l'expression de cette fonction de transfert H_2 dans le cas $N = 2$.

   Solution: On a :

   $$H_2(s) = \frac{\omega_c^2}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

   avec $s_1 = \omega_c e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $s_2 = \omega_c e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. On note qu'en développant le dénominateur, on trouve l'expression :

   $$(s-s_1)(s-s_2) = s^2 + \sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2.$$

   □

2. Montrer que cette fonction de transfert se met sous la forme

   $$H_2(s) = \frac{a}{s-s_1} + \frac{b}{s-s_2} \tag{3}$$

   avec $a, b \in i\mathbb{R}$.

   Solution: En effectuant une décomposition en éléments simples de H_2, on trouve aisément :

   $$H_2(s) = \frac{i\omega_c}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right).$$

   □

3. En déduire une expression similaire pour la fonction de transfert dans le domaine de Fourier.

   Solution: On obtient la fonction de transfert dans le domaine de Fourier en évaluant la fonction de transfert en $s = i\omega$:

$$H_2(\omega) = \frac{i\omega_c}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{i\omega - s_2} - \frac{1}{i\omega - s_1}\right).$$

□

4. Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) < 0$ donner la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = e^{at}1_{[0,+\infty]}(t) \tag{4}$$

   Solution: En revenant à la définition de la transformée de Fourier, comme $t \mapsto f(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, on trouve, pour tout réel ω :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{i\omega - a}.$$

□

5. En déduire la réponse impulsionnelle du filtre de Butterworth d'ordre 2.

   Solution: La fonction de transfert du filtre dans le domaine de Fourier correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Par ailleurs, on a $\Re(s_1) < 0$ et $\Re(s_2) < 0$. Par conséquent, d'après le théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$ et en utilisant le résultat de la question précédente, la fonction de transfert dans le domaine de Fourier du filtre est la transformée de Fourier de la fonction :

$$t \mapsto \frac{i\omega_c}{\sqrt{2}}(e^{s_2 t} - e^{s_1 t})1_{[0,+\infty]}(t),$$

   qui correspond donc à l'expression de la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.

□

6. On rappelle que la transformée de Tustin permet d'obtenir un filtre discret à partir de la fonction de transfert d'un filtre discret en choisissant

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{2}{\Delta t}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \tag{5}$$

   où Δt est le pas d'échantillonnage, H_c la fonction de transfert du filtre continu et H_d celle du filtre discret. Déduire de cette formule une implémentation d'un filtre de Butterworth du 2e ordre de pulsation de coupure $\omega_c = \sqrt{2}$ rad/s, discretisé à un pas de temps Δt sous forme d'une équation aux différences. *Solution:* La fonction de transfert continue est donnée par :

$$H_c(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}.$$

   La transformation de Tustin fait correspondre à la pulsation ω du filtre continu la pulsation Ω du filtre discret telle que :

$$\omega = \frac{2}{\Delta t}\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right).$$

   Posons donc $\omega_c = \dfrac{2}{\Delta t}\tan\left(\dfrac{\Omega_c}{2}\right)$, et appliquons la transformée de Tustin au filtre, pour trouver :

$$H_d(z) = \frac{\tan\left(\dfrac{\Omega_c}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + \sqrt{2}\tan\left(\dfrac{\Omega_c}{2}\right)\left(\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) + \tan\left(\dfrac{\Omega_c}{2}\right)^2}.$$

En posant $\tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \sqrt{2}$ on obtient finalement :

$$H_d(z) = \frac{2}{5}\left(\frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{1}{5}z^{-2}}\right).$$

□

7. Donner les 3 premiers termes non nuls de la réponse impulsionnelle du filtre discret.

Solution: Pour calculer la réponse impulsionnelle, on cherche à exprimer la transformée de z du filtre sous la forme d'une série entière. On a :

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{1}{5}z^{-2}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{5}z^{-1} + \frac{1}{5}z^{-2}\right)^n = 1 - \frac{2}{5}z^{-1} - \frac{1}{25}z^{-2} + \dots$$

On en déduit :

$$H_d(z) = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{4}{25}z^{-2} + \dots\right).$$

Les trois premiers termes de la réponse impulsionnelle du filtre sont donc :

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{16}{25}, \quad \frac{8}{125}$$

□

Examen traitement du signal

Problème : Traitement des signaux de parole

L'objectif de ce problème est d'étudier, de manière simplifiée, les modèles utilisés pour traiter les signaux de parole en téléphonie cellulaire. Les signaux de parole sont des signaux aléatoires non stationnaires échantillonnés à haute fréquence. En découpant ces signaux à l'aide d'une fenêtre temporelle de petite taille, leur étude peut cependant se ramener à celle d'une séquence de signaux stationnaires.

Parmi ces signaux stationnaires, on peut de façon schématique distinguer deux types de signaux. La voix émet en effet deux types de sons, dit voisés et non-voisés. Les sons voisés correspondent aux sons obtenus à la suite de vibrations générées par les cordes vocales, qui sont ensuite transformées en un son de parole en passant dans le larynx. Les sons non voisés ne font à l'inverse pas intervenir les cordes vocales. Pour chaque type de son, des modèles aléatoires paramétriques peuvent être établis afin de représenter et de resynthétiser les signaux stationnaires observés pour chaque fenêtre du signal. Plutôt que de transmettre le signal échantillonné, la méthode utilisée en téléphonie est de transmettre les paramètres du modèle, puis de resynthétiser un son de parole à partir de ces paramètres.

Dans ce problème, nous nous proposons d'étudier les modèles stochastiques développés pour modéliser les sons voisés et non voisés, avant d'explorer la question de l'estimation des paramètres du modèle sur une observation d'un signal de voix.

1. Modélisation des sons voisés

Dans le cas d'un son voisé, les cordes vocales émettent un signal qu'on peut modéliser par un train d'impulsions de Dirac émises à une période T appelée le *pitch* du signal :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT). \tag{1}$$

On rappelle qu'un pic de Dirac est défini par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le passage du son émis par les cordes vocales dans le larynx peut être modélisé par l'application d'un filtre linéaire au signal f. En pratique, on modélisera donc les sons voisés comme le produit de convolution d'un train de pics de Dirac émis avec une période T et d'un filtre h :

$$s(t) = h * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\Big(t - nT\Big). \tag{2}$$

Le filtre h est caractérisé par ses coefficients $\{a_1, \dots a_p\}$ et transforme le signal d'entrée f en un signal de sortie s via l'équation aux différences

$$s[n] = f[n] + \sum_{k=1}^{p} a_k s[n-k]. \tag{3}$$

Question 1.1 : Donner une interprétation qualitative de l'action du filtre. Déterminer la transformée en z du filtre. Sous quelle condition théorique le filtre h est-il stable ? Nous supposerons dans la suite que cette condition est bien vérifiée par le filtre.

Solution: Le filtre calcule la valeur $s[n]$ du signal de sortie au temps n en pondérant les valeurs prises par le signal dans le passé et la valeur au temps courant n du signal d'entrée. La transformée en z de la variable s est donnée par :

$$\widehat{s}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n] z^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] z^{-n} + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} s[n-k] z^{-n}.$$

On en déduit que la transformée en z du filtre est donnée par :

$$\widehat{h}(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}}.$$

Le filtre est stable si et seulement si les pôles de filtre sont strictement inclus dans le disque unité de $\mathbb{C}$. $\square$

2. Modélisation des sons non voisés

Un son non voisé X peut être modélisé par un processus autorégressif, c'est à dire par un bruit blanc B de variance σ^2 inconnue et de moyenne nulle, filtré par un filtre h :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X[n] := h * B[n] \tag{4}$$

Question 2.1 : On rappelle qu'un bruit blanc B est une séquence $\{B[n], n \in \mathbb{Z}\}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et de même loi de moyenne nulle et de variance σ^2. Déterminer l'autocovariance et la densité spectrale de puissance de B.

Solution: Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un couple d'indices. On a :

$$\mathrm{Cov}(B[p], B[q]) = E\{(B[p] - E\{B[p]\})(B[q] - E\{B[q]\}\} = E\{B[p]B[q]\}.$$

Si $p \neq q$, par indépendance, on a :

$$E\{B[p]B[q]\} = E\{B[p]\}E\{B[q]\} = 0.$$

Inversement, si $p = q$,

$$E\{B[p]^2\} = \sigma^2$$

par définition. On en déduit :

$$R_B[n] = \sigma^2 \delta[n].$$

La densité de puissance spectrale de B est donnée par la transformée de Fourier en temps discret de l'autocovariance de B. On sait que la transformée de Fourier d'un pic de Dirac est la fonction constante de valeur 1. On en déduit :

$$\hat{R}_B(e^{i\omega}) = \sigma^2.$$

□

Question 2.2 : Montrer que l'auto-covariance du processus aléatoire X est donnée par :

$$R_X[n] = h * \tilde{h} * R_B[n]. \tag{5}$$

où le filtre $\tilde{h}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$\tilde{h}[n] = h[-n]. \tag{6}$$

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on vérifie que :

$$E\{X[n]\} = E\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]B[n-k] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]E\{B[n-k]\} = 0.$$

Soient p, q deux entiers dans $\mathbb{Z}$. La covariance $\mathrm{Cov}(X[p], X[q])$ est par définition :

$$\mathrm{Cov}(X[p], X[q]) = E\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]B[p-k] \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h[k']B[q-k']\}.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Cov}(X[p], X[q]) = \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} h[k]h[k']R_B[p-k+k'-q].$$

Cette expression correspond exactement à la quantité :

$$\mathrm{Cov}(X[p], X[q]) = h * \tilde{h} * R_B[p-q].$$

□

Question 2.3 : En déduire que le processus aléatoire $\{X[n], n \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire, et que sa densité de puissance spectrale est donnée par :

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{|1 - \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-i\omega k}|^2} \tag{7}$$

Solution: La densité de puissance spectrale est la TFTD de l'auto-covariance R_X, ici définie par un produit de convolution. La densité de puissance spectrale est donc le produit des TFTD des filtres h, $\tilde{h}$ et de la densité de puissance spectrale du bruit blanc B :

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \hat{h}(\omega)\hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{R}_B(e^{i\omega}).$$

Or, on vérifie que :

$$\hat{h}(\omega)\hat{\tilde{h}}(\omega) = \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-i\omega k}|^2}$$

et

$$R_B(e^{i\omega}) = \sigma^2,$$

d'où le résultat. □

Question 2.4 : Montrer que l'autocovariance du processus aléatoire X est donné par la relation de récurrence

$$R_X[h] = \sum_{k=1}^{p} a_k R_X[h-k]. \tag{8}$$

Solution: On repart de l'équation :

$$X[n] - \sum_{k=1}^{p} a_k X[n-k] = B[n].$$

Soit $h \in \mathbb{Z}$. On peut multiplier l'équation précédente de part et d'autre par $X[n+h]$, pour obtenir :

$$X[n]X[n+h] = \sum_{k=1}^{p} a_k X[n-k]X[n+h] + B[n]X[n+h].$$

En prenant l'espérance, on trouve, puisque $E\{B[n]X[n+h]\} = E\{B[n]\}E\{X[n+h\} = 0$ (par indépendance) :

$$R_X[h] = \sum_{k=1}^{p} a_k R_X[h-k]$$

□

3. Estimation des paramètres du modèle de parole

Supposons qu'on dispose d'une réalisation $\{x[-N], \ldots, x[0], \ldots x[N]\}$ d'un signal de parole. Dans cette partie, notre objectif est d'estimer au mieux les paramètres du modèle sous-jacent, à savoir le pitch T et les coefficients $(a_1, \ldots, a_P)$ du filtre. On supposera que N est grand devant P.

Question 3.1 : Pour $k \in \{-N, N\}$, proposer un estimateur statistique $r_x[k]$ de l'autocovariance $R_X[k]$ du modèle à partir de la réalisation $\{x[-N], \ldots, x[0], \ldots x[N]\}$.

Solution: Pour tout $k \in \{-N, N\}$, on peut proposer l'estimateur suivant pour l'autocovariance de X :

$$r_x[k] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n-|k|} (x[n] - \bar{x})(x[n+|k|] - \bar{x}),$$

où $\bar{x}$ est la moyenne empirique

$$\bar{x} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n].$$

□

Question 3.2 : Qualitativement, expliquer comment on peut exploiter l'autocovariance afin d'estimer le pitch pour des signaux voisés. L'autocovariance permet-elle de discriminer entre signaux voisés et non-voisés ?

Solution: Dans le cas d'un son voisé, le pitch introduit de fortes corrélations entre les séquences d'échantillons $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{x[n+T], n \in \mathbb{Z}\}$ dans le signal de parole.

Ces corrélations sont capturées par l'autocovariance du signal. Afin de déterminer le pitch, une possibilité est donc de regarder quelle est la valeur de h pour laquelle l'autocovariance du signal est maximale dans une fenêtre temporelle correspondant aux valeurs possibles du pitch. Un estimateur de T est donc :

$$\tilde{T} = \arg \max_{h \in [T_{\min}, T_{\max}]} r_x[h].$$

Dans le cas de signaux non voisés, ces corrélations n'apparaissent pas. En conséquence, l'absence de maxima significatifs dans l'autocovariance tend à indiquer qu'on est en présence d'un son non voisé. □

Question 3.3 : Afin de déterminer les coefficients $(a_1, \ldots, a_P)$ du filtre, on fait l'hypothèse que le signal observé peut être prédit à partir des valeurs observées dans le passé par la relation :

$$x_p[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k]. \tag{9}$$

On cherchera alors à déterminer les coefficients du filtre en sélectionnant les paramètres $(a_1, \ldots, a_P)$ qui minimisent l'erreur de prédiction

$$\epsilon = \sum_n \|x[n] - x_p[n]\|^2. \tag{10}$$

Montrer que dans ce cas, le vecteur $(a_1, \ldots, a_P)$ est solution de l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[P-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_X[P-2] \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_x[P-1] & \cdot & \cdots & r_X[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x[1] \\ r_X[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ r_X[P] \end{pmatrix}$$

Solution: Pour tout k dans $\{1, \ldots, P\}$, on a :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_k} = -2 \sum_n x[n-k](x[n] - x_p[n]).$$

L'erreur de prédiction est donc minimale lorsque pour tout $k \in \{1, \ldots, P\}$,

$$\sum_n x_p[n-k]x[n] = \sum_n \sum_{l=1}^{P} x[n-k]a_l x[n-l].$$

On reconnait de part et d'autre de l'équation l'estimation r_x de la fonction d'autocovariance :

$$r_x[k] = \sum_{l=1}^{P} a_l r_x[k-l].$$

Le vecteur $(a_1, \ldots, a_P)$ est donc solution de l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[P-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \cdots & r_X[P-2] \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_x[P-1] & \cdot & \cdots & r_X[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x[1] \\ r_X[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ r_X[P] \end{pmatrix}$$

$\square$

Exam thermodynamique 1ère année IC

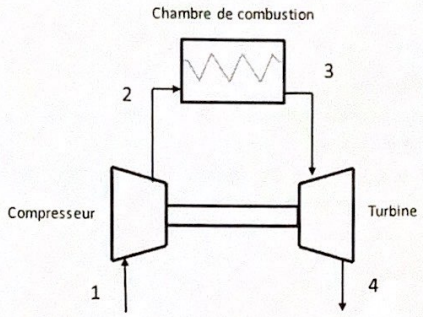
PROMO 2020

4 juin 2021

Partie 1 : Etude d'un cycle de Brayton avec régénération (12pts)

Les centrales électriques à turbine gaz fonctionnent suivant le cycle de Brayton. On cherche à évaluer l'amélioration de l'efficacité du cycle de Brayton grâce à l'utilisation d'un régénérateur.

1/ Dans un premier temps, on étudie un **cycle de Brayton sans régénérateur**. (8pts)



En entrée du compresseur, 1, on considère un débit volume d'air de 5 m^3/s à la pression de p_1= 0,1 MPa et à la température de 300 K.

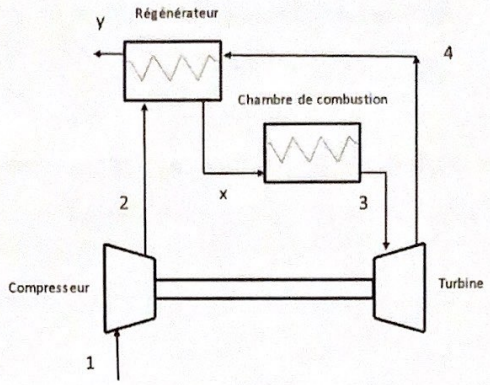
Le taux de compression du compresseur est de p_2/p_1=10. En sortie de la chambre de combustion, la température de l'air est de 1400 K. En sortie de la turbine, l'air est détendu jusqu'à 0,1 MPa.

Les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine sont de 0,8.

On fera l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait. Le rapport des chaleurs massiques de l'air, k, est de 1,4. La chaleur massique de l'air est de 1,004 kJ/kg/K. On négligera le débit de combustible dans la chambre de combustion, autrement dit, on considérera le même débit d'air en entrée et en sortie de la chambre de combustion.

1. Déterminer les pressions et températures aux points 2, 3 et 4 du cycle.
2. Tracer le cycle dans un diagramme (T,s)
3. Calculer la puissance de compression, de combustion et de détente.
4. En déduire le rendement du cycle.
5. Le pouvoir calorifique du gaz naturel est de 10,83 kWh/kg. Vérifier que le débit de gaz naturel est faible devant le débit d'air

2/ Dans un second temps, on étudie l**e cycle de Brayton avec régénérateur** ci-dessous. On fait l'hypothèse que l'efficacité de l'échangeur régénérateur est de 0,8. (4pts)



1. Déterminer la température en x
2. Calculer la nouvelle puissance de combustion.
3. En déduire le rendement du cycle.
4. Calculer le rendement exergétique du cycle. Lister les sources de pertes exergétiques et proposer une solution d'amélioration

Partie 2 : Traitement de surface d'une plaque d'aluminium (8pts)

On cherche à recouvrir un panneau d'aluminium de 3 mm d'épaisseur (ρ = 2770 kg/m^3, c = 875 J/kg/K ; λ=177 W/m/K) d'une peinture époxy sur chacune de ses faces. Pour fixer la peinture, on doit réaliser une opération de traitement thermique à 150 °C ou plus pendant au moins 5 minutes. On place le panneau dans un four avec de l'air à 175°C et les parois du four aussi à 175°C. Le coefficient d'échange convectif sur les plaques a été évalué à h= 40 W/m^2/K. L'émissivité de la peinture époxy est de 0,8.

La température initiale du panneau est de 25°C au moment où il entre dans le four.

Hypothèse : on néglige l'épaisseur de la couche de peinture époxy et sa résistance thermique.

1. Déterminer un coefficient d'échange radiatif entre le panneau à la température initiale et le four. On fera l'hypothèse par la suite que ce coefficient reste constant.
2. Calculer le nombre de Biot. Que peut-on en déduire ?
3. Ecrire un bilan thermique sur le panneau en régime transitoire. Au bout de combien de temps, le procédé de traitement thermique est terminé.

Exam thermodynamique 1ère année IC

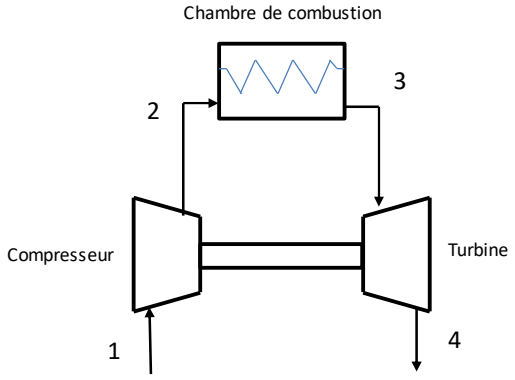
PROMO 2020

4 juin 2021

Partie 1 : Etude d'un cycle de Brayton avec régénération (12pts)

Les centrales électriques à turbine gaz fonctionnent suivant le cycle de Brayton. On cherche à évaluer l'amélioration de l'efficacité du cycle de Brayton grâce à l'utilisation d'un régénérateur.

1/ Dans un premier temps, on étudie un **cycle de Brayton sans régénérateur.**



En entrée du compresseur, 1, on considère un débit volume d'air de 5 m^3/s à la pression de p_1= 0,1 MPa et à la température de 300 K.

Le taux de compression du compresseur est de p_2/p_1=10. En sortie de la chambre de combustion, la température de l'air est de 1400 K. En sortie de la turbine, l'air est détendu jusqu'à 0,1 MPa.

Les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine sont de 0,8.

On fera l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait. Le rapport des chaleurs massiques de l'air, k, est de 1,4. La chaleur massique de l'air est de 1,004 kJ/kg/K. On négligera le débit de combustible dans la chambre de combustion, autrement dit, on considérera le même débit d'air en entrée et en sortie de la chambre de combustion.

1. Déterminer les pressions et températures au point 2, 3 et 4 du cycle.
2. Tracer le cycle dans un diagramme (T,s)
3. Calculer la puissance de compression, de combustion et de détente.
4. En déduire le rendement du cycle.
5. Le pouvoir calorifique du gaz naturel est de 10,83 kWh/kg. Vérifier que le débit de gaz naturel est faible devant le débit d'air

1/

Calcul du point en sortie de compresseur.

$$p_2 = p_1.\tau = 1 \cdot 10^6\ Pa$$

Cas isentropique

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$T_{2is} = 579{,}2\ K$$

Cas réel

$$\eta_{is} = \frac{W_{is}}{W_{réel}} = \frac{cp_a(T_{2is} - T_1)}{cp_a(T_2 - T_1)}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{(T_{2is} - T_1)}{\eta_{is}}$$

$$T_2 = 649\ K$$

Calcul du point en sortie de la chambre combustion.

$$p_3 = p_2 = 1 \cdot 10^6\ Pa$$

$$T_3 = 1400\ K$$

Calcul du point en sortie de la turbine.

Cas isentropique

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_4}{3}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$T_{4is} = 725{,}1\ K$$

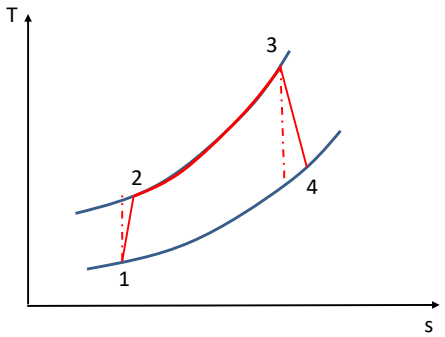
Cas réel

$$\eta_{is} = \frac{W_{réel}}{W_{is}} = \frac{cp_a(T_4 - T_3)}{cp_a(T_{4is} - T_3)}$$

$$T_4 = T_3 + \eta_{is}(T_{4is} - T_3)$$

$$T_2 = 860{,}1\ K$$

2/



3/

$$\dot{m}_a = \frac{Pa}{\frac{R}{M}.T}\dot{V}_a = 5{,}8\ kg/s$$

$$W_{comp} = \dot{m}_a cp_a(T_2 - T_1)$$

$$W_{comp} = 2039{,}1\ kW$$

$$W_{turbine} = \dot{m}_a cp_a(T_3 - T_4)$$

$$W_{turbine} = 3154{,}4\ kW$$

$$W_{Combustion} = \dot{m}_a cp_a (T_3 - T_2)$$

$$W_{comb} = 4387{,}7\ kW$$

4/

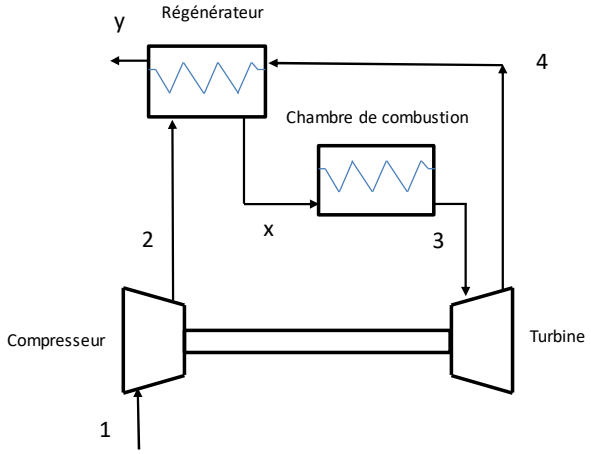
$$\eta_{cycle} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur}}{W_{comb}} = 25{,}4\%$$

5/

$$W_{Combustion} = \dot{m}_{GN} PCI$$

$$\dot{m}_{GN} = \frac{W_{Combustion}}{PCI} = 0{,}11 kg/s \text{ (2\% du débit d'air)}$$

2/ Dans un second temps, on étudie l**e cycle de Brayton avec régénérateur** ci-dessous. On fait l'hypothèse que l'efficacité de l'échangeur régénérateur est de 0,8.



1. Déterminer la température en x
2. Calculer la nouvelle puissance de combustion.
3. En déduire le rendement du cycle.
4. Calculer le rendement exergétique du cycle. Lister les sources de pertes exergétiques et proposer une solution d'amélioration

1/ On fait un bilan dans l'échangeur

$$(h_4 - h_Y) = (h_X - h_2)$$

L'efficacité de l'échangeur est donnée comme suit

$$\varepsilon = \frac{T_X - T_2}{T_4 - T_2} = 0{,}8$$

D'où

$$T_X = T_2 + 0{,}8(T_4 - T_2)$$

$$T_X = 818\ K$$

2/

$$W_{Combustion} = \dot{m}_a cp_a (T_3 - T_x)$$

$$W_{comb} = 3401\ kW$$

3/

$$\eta_{cycle} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur}}{W_{comb}} = 32{,}8\%$$

4/

$$\eta_{ex} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur}}{W_{comb}\ (1 - \frac{Ta}{Tmax})} = 41{,}7\%$$

Dans le cas sans pertes compresseur/turbine/ échangeur à efficacité de 1 (surface infinie) le rendement exergétique s'améliore

$$\eta_{ex} = \frac{W_{turbine} - W_{compreseur}}{W_{comb}\ \left(1 - \frac{Ta}{Tmax}\right)} = 74{,}6\%$$

Cela dit, en sortie d'échangeur, les fumées sont encore à haute température, il y a de l'énergie thermique récupérable pour chauffer un process ou alimenter un réseau de chaleur.

Partie 2 : Traitement de surface d'une plaque d'aluminium (8pts)

On cherche à recouvrir un panneau d'aluminium de 3 mm d'épaisseur (ρ = 2770 kg/m^3, c = 875 J/kg/K ; λ=177 W/m/K) d'une peinture époxy sur chacune de ses faces. Pour fixer la peinture, on doit réaliser une opération de traitement thermique à 150 °C ou plus pendant au moins 5 minutes. On place le panneau dans un four avec de l'air à 175°C et les parois du four aussi à 175°C. Le coefficient d'échange convectif sur les plaques a été évalué à h= 40 W/m²/K. L'émissivité de la peinture époxy est de 0,8.

La température initiale du panneau est de 25°C au moment où il entre dans le four.

Hypothèse : on néglige l'épaisseur de la couche de peinture époxy et sa résistance thermique.

1. Déterminer un coefficient d'échange radiatif entre le panneau à la température initiale et le four. On fera l'hypothèse par la suite que ce coefficient reste constant.
2. Calculer le nombre de Biot. Que peut-on en déduire ?
3. Ecrire un bilan thermique sur le panneau en régime transitoire. Au bout de combien de temps, le procédé de traitement thermique est terminé.

1/

$$h_r \approx 4\varepsilon\sigma T_{moy}^3$$

$$h_r \approx 9{,}43 \frac{W}{m^2}/K$$

Ou

$$h_r = \frac{\varepsilon\sigma\left(T_f^4 - T_p^4\right)}{T_f - T_p}$$

Il est préférable de prendre la température moyenne du panneau entre le temps initial et final.

2/ Le nombre de Biot s'écrit

$$Bi = \frac{(h_c + h_r).e/2}{\lambda alu} = 0{,}00042$$

Pour des questions de symétrie, on prendre la moitié de l'épaisseur

Bi<0,1, on peut donc considérer que le panneau est un corps thermique mince, sa température peut être considérée comme uniforme.

3/

Bilan thermique

$$M.c.\frac{dT_{alu}}{dt} = (h_r + h_c).2A.(T_{air} - T_{alu})$$

$$\rho.A.e.c.\frac{dT_{alu}}{dt} = (h_r + h_c).2A.(T_{air} - T_{alu})$$

$$\frac{dT_{alu}}{(T_{air} - T_{alu})} = \frac{2.(h_r + h_c)}{\rho.e.c}dt$$

$$\frac{T_{air} - T_{alu}(t)}{T_{air} - T_{alu}(0)} = \exp\left(-\frac{2.(h_r + h_c)}{\rho.e.c}t\right)$$

Calcul du temps pour la plaque arrive à 150°C.

$$t = \frac{\rho.e/2.c}{h_r + h_c} ln\left(\frac{T_{air} - T_{alu}(0)}{T_{air} - T_{alu}(t)}\right)$$

Il faut 132 s pour que le panneau atteigne la température de 150°C.

t=132s

Sachant que le panneau doit rester au moins 5 minutes à plus de 150°C, e temps total est donc

t=132 + 5*60=432 s

1ère année
S2

EXAMEN DE COMPTABILITE GENERALE
UE 24.3
du 29 juin 2021

Durée : 1h30
Total sur 200 points

Les machines à calculer de poche sont recommandées. L'ordinateur est interdit.
Documents autorisés : le poly de compta, à l'exclusion de tout autre document.

Rqe : les chiffres entre parenthèses signifient qu'ils sont négatifs.

<u>Exercice 1</u> – (110 points) **: Société ImedTech**

BILAN ImedTech
(en milliers d'Euros)

ACTIF	31.12.20	31.12.19	PASSIF	31.12.20	31.12.19
Immobilisations incorporelles	278	213	Capital et prime d'émission	52422	31880
Immobilisations corporelles	345	252	Réserves	16	
Immobilisations financières	393	408	Report à nouveau	?	
			Résultat net	?	?
Total de l'actif immobilisé	?	**873**	**Capitaux propres**	?	26543
Actif circulant			**Emprunts >1an**	**456**	**856**
Stocks	3	7			
Avances versées sur commande	16	8	**Provisions**	**696**	**408**
Créances clients	1738	1154	- Sofired		58
Autres créances	1755	1218	- Coface		515
Trésorerie	41639	30235	**Dettes financières**		**573**
			Avances et acomptes reçus sur commandes	3547	2557
Total de l'actif circulant	**45151**	**32622**	Dettes fournisseurs	965	1420
			Dettes fiscales	1443	1228
			Autres dettes	19	76
			Autres dettes	**5974**	**5281**
Charge constatée d'avance	407	258	**Divers passifs**	**93**	**92**
Total de l'actif	?	**33753**	**Total du passif**	?	**33753**

Compte de résultat ImedTech (en milliers d'Euros)	2020	2019
Achats matières premières consommés	26	6
Autres achats et charges externes	7938	5825
Impôts et taxes	241	129
Salaires et ch.sociales	6718	5478
Dotation amortis et provisions	520	113
Autres charges	146	90
Charges d'exploitation	**15589**	**11641**
Charges financières	154	182
Charges exceptionnelles	45	2
Impôts sur les bénéfices	**-1064**	**-858**
Résultat net	**?**	**-5337**

	2020	2019
Chiffre d'affaires	6353	3885
Autres produits	387	1329
Produits d'exploitation	**6740**	**5214**
Résultat d'exploitation	?	-6427
Produits financiers	204	335
Résultat financier	?	153
Résultat courant	?	-6274
Produits exceptionnels	34	81
Résultat exceptionnel	?	79

ImedTech est spécialisée dans le domaine de l'imagerie médicale. La société développe des applications logicielles qui permettent d'analyser le contenu des images, de détecter et de mesurer automatiquement des anomalies qui peuvent être des signes de maladie. En plus d'être présentes dans les services de radiologie d'hôpitaux, de centres anti cancer et de cliniques, les applications logicielles développées et commercialisées par ImedTech sont aujourd'hui utilisées par des sociétés de biotechnologie et des laboratoires pharmaceutiques dans le cadre de leurs essais cliniques en cancérologie.

A la fin de l'exercice 2019, lors de l'affectation du bénéfice, ImedTech n'a rien mis en réserves (l'augmentation des réserves de 16 en 2020 est liée à d'autres écritures comptables).
La valeur nominale des actions est de 0,05 €.

1) **Analyse du bilan et du compte de résultat de la Société ImedTech :**

   a. Compléter les cases manquantes du bilan et compte de résultat (marquées par un « ? »)

b. Cette société est-elle en faillite ? Pourquoi ?

c. Quel est le montant qu'a décaissé l'entreprise en impôts et taxes en 2020 ?

d. Comment expliquer que la trésorerie d'ImedTech ait augmenté en 2020 alors que son résultat est négatif ?

2) Questions à choix multiples sur ImedTech (cf. tableaux comptables ci-dessus) :

	VRAI	FAUX
a) ImedTech a consommé pour (26-6) k€ de matières premières en 2020		
b) L'entreprise a encaissé 82 k€ de capital, en émettant 1.640.000 actions en 2020		
c) Elle a provisionné pour (408-393) k€ d'immobilisations financières en 2020		
d) Ses salariés ont touché 6718 k€ de salaires en 2020		
e) L'entreprise a acheté pour (345-252) k€ d'immobilisations corporelles en 2020		
f) Les stocks ont diminué en 2020		
g) Le prêt octroyé par la Coface a été totalement remboursé pendant l'année 2020		
h) Les 407 k€ de charges constatées d'avance à l'actif sont compris dans le total des charges du compte de résultat de 2020		

3) Événements de l'année 2021 affectant les immobilisations et les matières premières :

On se situe dans cette question à la fin de l'année 2021. On a comptabilisé pendant l'année les achats et charges suivants :

a. Achat de 10.000 € HT de matières premières sur l'année.
b. Achat de 5.000 € HT d'immobilisation sur l'année.
c. Dotation aux amortissements des immobilisations corporelles : 20.000 €

Quelles sont les nouvelles valeurs des postes suivants, au 31/12/21, sachant que l'inventaire de stock de fin d'année 2021 donne un montant de 9.000 € (on fera l'hypothèse qu'aucun stock de produits finis n'a été réalisé pendant l'année 2021) :

- Immobilisations corporelles (en net) :
- Achat matières premières :
- Stocks :
- Variation stocks :

<u>Exercice 2</u> - (20 points). **Passer au journal général les écritures correspondant aux événements suivants :**

a) On utilise une traite de 450 000 € (reçue d'un client), pour le paiement d'un fournisseur (même montant).

b) Paiement d'une amende pénale de 600 000 €, provisionnée à l'exercice précédent pour 100 000 €.

	Débit	***Crédit***

<u>Exercice 3</u> - (40 points) - **Questions à choix multiples**

	VRAI	FAUX
a) On lit sur un bilan : Immobilisations 100 000 80 000 20 000 Cela signifie que l'immobilisation a été amortie de 80 000 € durant l'exercice.		
b) L'entreprise achète à crédit des marchandises pour 20 000 € hors taxes. La TVA est de 20 %. Le compte achat est débité de 24 000 €.		
c) L'entreprise contracte un emprunt de 50 k€ à 1% d'intérêts. Le jour de l'emprunt, elle passe en comptabilité 50,5 k€ en crédit du poste emprunt au passif.		
d) Les charges exceptionnelles sur opération de gestion ne sont que des écritures comptables, et ne correspondent à aucune réalité de trésorerie.		

<u>Exercice 4</u> – (30 points) - **Le rôle des commissaires aux comptes.**

Expliquer en 20 lignes, l'activité des commissaires aux comptes, pour apprécier la sincérité et la fidélité des comptes. Vous pourrez discuter ces termes.
Vous pourrez vous aider, outre de l'intervention en cours de KPMG, de l'extrait ci-dessous.

Investir-Le Journal des finances, no. 2473 : Interview de GIANBEPPI FORTIS/PRÉSIDENT DU DIRECTOIRE DE SOLUTIONS 30 : « Ces allégations lourdes, sans preuves, sont scandaleuses ! »

- ***Le refus de votre commissaire aux comptes EY d'exprimer son opinion sur vos comptes 2020 a provoqué un effondrement de l'action. Il s'agit d'une décision rarissime. EY vous reproche de ne pas lui avoir transmis tous les documents nécessaires. Pourquoi avez-vous empêché votre commissaire aux comptes d'exercer son travail ?***
- Nous sommes en profond désaccord avec EY. Tous les éléments en notre possession leur ont été transmis. Quand il s'agissait de documents détenus par des tiers, nous avons tout mis en œuvre pour que ces éléments leur soient aussi remis.

- ***Pouvons-nous connaître le nom de ces tiers qui n'ont pas fourni des documents ?***
- Dans le cadre de la confidentialité avec EY, ce n'est pas possible de communiquer cette information. Je rappelle qu'EY n'a pas émis d'opinion. Ce n'est pas une opinion négative de l'auditeur. L'auditeur, en réalité, ne s'exprime pas. Je précise que notre commissaire aux comptes a conclu que « les incidences éventuelles sur les états financiers consolidés d'anomalies non détectées pourraient être significatives ». C'est du conditionnel. Tout a été vérifié au centime près.

- ***Depuis 2019, un fonds activiste, Muddy Waters, a jeté le doute sur la fiabilité de vos comptes. Fin décembre 2020, Solutions 30 a fait l'objet à nouveau de graves critiques via un rapport anonyme et de la part de Muddy Waters. Il est reproché un lien entre Solutions 30 et la mafia ainsi que des erreurs comptables. Qu'en est-il exactement ?***
- C'est faux ! Nous avons répondu à toutes les allégations en toute transparence, et le conseil de surveillance, en toute indépendance, a mandaté des investigations indépendantes, réalisées par les cabinets Deloitte et Didier Kling, qui ont balayé toutes ces accusations de fraudes et de lien avec la mafia. Ces accusations visaient-elles à manipuler le cours pour gagner de l'argent ? On a constaté que de gros volumes de ventes étaient orchestrés pour être mis en place de façon concomitante à la sortie des allégations. Nous avons porté plainte auprès du parquet national financier pour diffusion d'informations fausses et trompeuses et manipulation de marché, et alerté l'AMF et la CSSF (autorité luxembourgeoise).

- ***Votre associé a vendu l'essentiel de ses titres fin 2020. Ce sont ces rumeurs qui l'ont poussé à se retirer...***
- C'est faux. En 2020, la société a changé de dimension en passant sur le marché réglementé d'Euronext. Nous avions créé Solutions 30 en 2003. C'était une PME. L'introduction en Bourse a eu lieu en 2005 sur le marché libre, puis la société a été transférée sur Alternext. Solutions 30 a atteint désormais une nouvelle dimension. Mon associé, qui a réalisé un magnifique travail, n'était pas fait pour travailler dans une plus grande structure. Nous nous sommes donc quittés en bonne intelligence. Son départ était prévu avant l'arrivée de ces rumeurs. Il a vendu une partie de ses titres en toute transparence, dans le strict respect de la réglementation, en déclarant son franchissement du seuil de 5 % auprès de l'autorité compétente, à savoir la CSSF.

- ***Comment travaillez-vous aujourd'hui avec EY ?***

- Ce qui est important, c'est l'ouverture d'une procédure de conciliation, nous sommes accompagnés par un conciliateur : son objectif sera notamment d'encadrer les discussions avec EY et d'assurer la transition avec un commissaire aux comptes qui examinera nos comptes.

- ***Pouvez-vous changer rapidement de commissaire aux comptes ?***
- La société étant de droit luxembourgeois, les mandats des commissaires aux comptes (CAC) ont une durée déterminée par l'assemblée générale des actionnaires (AG). Dans le cas présent, le mandat était d'un an, et celui d'EY arrive donc à échéance lors de la prochaine AG, fin juin. Notre enjeu consistera à présenter un nouveau CAC pour avancer.

- ***Mais le nouveau commissaire aux comptes risque de demander les mêmes documents que ceux réclamés par EY ?***
- Nous sommes confiants, car nous avons déjà réalisé il y a quelques mois cet exercice. Ce qui est important, c'est d'obtenir un cadre rationnel. La conciliation nous permettra un environnement plus serein. Je précise qu'il existe deux façons de récupérer des documents chez des tiers. Soit le commissaire aux comptes s'en occupe, soit un autre cabinet va les chercher. EY avait toute latitude pour mener des diligences complémentaires, car il a des équipes partout dans le monde. De notre côté, nous avons déjà commencé à mandater d'autres cabinets pour récupérer ces informations complémentaires d'ici à la fin du mois.
- (…)

- ***Pourquoi vos comptes annuels 2020 ont-ils été révisés ?***
- L'entreprise a effectivement procédé à un ajustement à hauteur de 2,4 millions d'euros au niveau du calcul de l'impôt, sans que cela impacte les autres agrégats. Entre le 28 avril, date de la présentation des comptes annuels prévisionnels, et la sortie des comptes définitifs, le 23 mai, nous avons nous-mêmes détecté cette erreur et l'avons donc corrigée. Depuis notre première cotation, en 2005, et les semestriels 2020, nos comptes ont toujours été certifiés. Et notre objectif est que nos comptes 2020 soient certifiés dans les plus brefs délais avec le nouveau commissaire aux comptes.

- ***Comment comptez-vous retrouver rapidement un environnement serein ?***
- Nous y parviendrons, j'en suis convaincu, avec un nouveau commissaire aux comptes, la conciliation et la recherche d'un actionnaire de référence. Après, à plus long terme, il faudra voir comment il est possible que des personnes mal intentionnées puissent de la sorte déstabiliser une entreprise. Comment peut-on mettre sur la place publique des allégations lourdes sans preuves ? C'est scandaleux.

- Propos recueillis par François Monnier

<u>QUESTION BONUS</u> (+ 20 points**) : Les différences entre un compte de résultat et un compte de trésorerie.**

Rappeler les différentes raisons qui font qu'un compte de résultat n'est pas un compte de trésorerie.