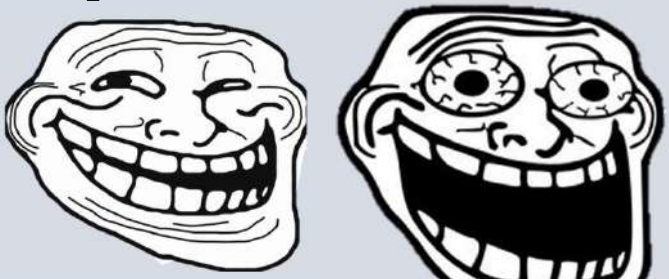
Mattéo Letturcq--Daligaux | Emile Chazot

Pichy Blinders x Mineatlantis

Septembre 2023



Sommaire

Préface ---------- 3

Energie et climat (Janco) (s) ---------- 4

Maths 1 (s + c) ---------- 8

Physique quantique (s + c) ---------- 27

Physique statistique (s + c) ---------- 39

QSE (s + c) ---------- 50

Micro-économie (s) ---------- 66

Optimisation (s + c) ---------- 72

TDS (s + c) ---------- 82

MMC (s + c) ---------- 89

Génie énergétique (s + c) ---------- 137

MPI (s + c) ---------- 147

Data (s + c) ---------- 168

Edito

Que dire, si ce n'est que je n'ai rien fait ?

Des générations de philosophes, de neurologues, de psychiatres et de chercheurs en tous genres se sont épuisés à essayer de comprendre et de déceler les secrets de la prise de décision du cerveau humain sans pourtant en percer ses mystères. Qu'est ce qui fait par exemple qu'un énergumène, un soir sombre de janvier, alors occupé à planifier les prochaines beuveries de son école et n'ayant jamais particulièrement travaillé de l'année accepte en souriant la tâche d'éditer les corrigés pour toute sa promo ? Nul ne le saura jamais.

Je dois préciser également mon évolution morale au cours de l'année : quelques mois plus tard, l'échéance de la tâche approchant, et la perspective du labeur également, je décidai solennellement de ne rien faire. En effet, il eût été inutile de perdre mon temps à taper ce qu'on appellerait de manière potache un « torche-cul » et de le mettre à disposition de la promotion suivante, qui m'en aurait voulu de cet abandon scolaire. La tradition allait tout simplement s'éteindre. J'aurais achevé avec peu de vergogne une coutume vivotante. Je n'ai jamais été très conservateur de toute façon.

Mais, alors que le palum 2022-2023 était dans un état de coma, un homme, un seul est venu le ressusciter. Cet homme, que dis-je, ce titan des sciences, ce Poincaré de la P22, ce brillant major de promo n'avait que des qualités pour redresser la barre du navire perdu. Doté d'une détermination sans limite, d'un savoir fou, d'une intelligence sans pareil, d'une main de maître, il changea le cours de l'histoire, en faisant honneur à sa lointaine contrée toulousaine. J'ai nommé Mattéo Leturcq--Da ligaux.

Et oui, cette noble personne a humblement collecté et scanné les sujets, rédigé tous les corrigés en latex, et me les a dûment envoyés. Je tiens à dire que recevoir ces messages fût pour moi un moment difficile de ce début d'année. Les matins calmes et chauds de septembre, tandis que je décuvais tranquillement, je voyais ma conversation avec le seigneur se remplir de corrigés terrifiants dont j'aurais même été incapable d'en comprendre le sens. Chacun de ces évènements déclenchait en moi une rude introspection de ma véritable vertu. Puis je me rendormais sans les lire car vous savez bien qu'on ne guérit pas une gueule de bois avec des maths. Faut pas déconner non plus.

Bref, je n'ai ni récupéré, ni lu, ni écrit quoi que ce soit des corrigés qui vont suivre. Je les ai juste juxtaposés par respect pour le travail de mon camarade, en y ajoutant de la merde par ci-par-là, car on ne peut pas empêcher poule de picorer.

Sur ce, bonne lecture.

22chazot

Energie et Climat (Janco)

Ce sujet ne possède pas de corrigé

21 octobre 2023

Toutes les questions comportent une et une seule réponse, merci donc de ne cocher qu'une seule case à chaque fois. Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, ce qui fait que réponsre au hasars est équivalent à ne rien remplir.

Question 1 Le lien qui relie PIB mondial et émission de CO2 mondial est

☐une relation causale PIB -> CO2 quasi linéaire ☐une covariation issue d'une même cause
☐une coïncidence ☐une relation causale CO2 -> PIB quasi linéaire

Question 2 Si elle conduit à une évolution inverse de ce qui a été historiquement constatée, la sobriété énergétique devrait conduire la fraction de la population qui travaille dans l'agriculture

☐baisser à terme ☐rester stable
☐il est impossible de se prononcer ☐augmenter à terme

Question 3 Lorsque l'on utilise de la biomasse pour faire des carburants liquides, quelle est la quantité d'énergie finale obtenue par hectare en moyenne (hors Brésil)

☐environ 3 tonnes équivalent pétrole ☐environ 2 tonnes équivalent pétrole
☐environ 1,5 tonnes équivalent pétrole ☐environ 1 tonnes équivalent pétrole

Question 4 La radioactivité des produits de fission est redevenue celle de l'uranium initial au bout

☐de quelques siècles ☐de 100 000 ans
☐de quelques milliers d'années ☐de quelques dizaines de milliers d'années

Question 5 Quels sont les gaz à effet de serre dont on peut retracer l'évolution sur des centaines de milliers d'années dans les carottes glaciaires

☐CO2, CH4 et N2O ☐CO2, CH4, N2O et HFC
☐CO2 et CH4 uniquement ☐tous

Question 6 Pour quand est attendu le pic mondial de production de gaz selon The Shift Project ?

☐2030 ☐2020
☐après 2040 ☐Il est passé en 2003

Question 7 Quel était le premier fournisseur de pétrole et carburants de l'UE en 2021 ?

☐L'Arabie Saoudite avec environ 25% ☐L'Afrique avec environ 20%
☐La Mer du Nord avec environ 20% ☐La Russie avec environ 30%

Question 8 Un risque élevé que l'insécurité alimenaire devienne généralisée dans le monde démarre selon le GIEC à

☐4°C de réchauffement global ☐1.5°C de réchauffement global
☐3°C de réchauffement global ☐2°C de réchauffement global

Question 9 Une éolienne qui intercepte 1000 m^3 d'air (densité 1.22 kg/m^3) à 80 km/h fournit à peu près autant d'énergie (sous forme d'électricité) que la combustion de 3 millilitres de pétrole. Déduisez en le rendement de l'éolienne

☐environ 30% ☐environ 50%
☐un peu moins de 20% ☐un peu moins de 40%

Question 10 Quand est-ce que la Mer du Nord a passé son pic de production pour le gaz ?

☐il passera en 2028 ☐2000
☐2010 ☐2005

Question 11 Quand on passse d'un mode électrique thermique "classique" (gaz charbon nucléaire) à une production éolienne ou solaire, par combien multiplie-t-on la quantité de métal nécessaire par kWh ?

☐par quelques centaines ou plus ☐par quelques dizaines ou plus
☐par quelques unités ☐par quelques milliers ou plus

Question 12 De 1860 à 2020 et dans le monde les émissions de gaz à effet de serre par personne

☐ont été multipliées par 4 ☐ont été multipliées par 5
☐ont doublé ☐ont été multipliées par 10

Question 13 Avec un réchauffement de 2°C par rapport à la moyenne 1850-1900, l'événemen le plus chaud de la 2nde moitié du 19ème siècle est dépassé

☐tous les 5 ans ☐tous les 3 ans
☐tous les ans ☐tous les 10 ans

Question 14 Un bilan carbone

☐compe uniquement les gaz directement émis par l'entreprise
☐inclut toujours la vapeur d'eau émise par les avions
☐caractérise les liens de dépendance des processus de l'entreprise aux émissions
☐compte les émissions qui ont lieu avant l'usage du produit par un client

Question 15 Parmi ces personnes évoquées en cours, laquelle est celle qui a la première compris le rôle des flux physiques des machines dans la production économique ?

☐Dennis Meadow ☐Charles Dupin
☐Svante Arrhenius ☐Jean-Baptiste Say

Question 16 En cas d'augmentation de l'effet de serre, la stratosphère

☐reste à la même température ☐se réchauffe
☐voit sa limite avec la troposphère baisser ☐se refroidit

Question 17 Si elle conduit à une évolution inverse de ce qui a été historiquement constaté, la sobriété énergétique devrait conduire la fraction de la population qui habite en ville à

☐augmenter à terme ☐il est impossible de se prononcer
☐baisser à terme ☐rester stable

Question 18 Lequel de ces noyaux n'est pas fissile ?

☐U233 ☐Pu240
☐Pu241 ☐Pu239

Question 19 La quantié d'ENR par personne est aujourd'hui (dans le monde)

☐inférieure à ce qu'elle était en 1860 ☐supérieure à ce qu'elle était en 1860
☐égale à ce qu'elle était en 1860 ☐très supérieure à ce qu'elle était en 1860

Question 20 Lorsque l'on utilise du pétrole pour déplacer un individu dans une voiture, le rendement d'ensemble de l'opération est

☐de l'ordre de 20% ☐de l'ordre de 5%
☐de l'ordre de 1% ☐de l'ordre de 10%

Question 21 Dans le cadre du réchauffement climatique, il y a plus d'évaporation donc globalement plus de précipitations. Les facteurs proposés pour expliquer cela sont : 1 - Le surplus de pluie tombera surtout dans l'océan ; 2 - L'évaporation augmente ; 3 - Les épisodes pluvieux intenses vont augmenter ; 4 - La circulation atmosphérique à large échelle va se modifier. A votre avis lesquels interviennent réellement ?

☐2 3 et 4 ☐1 3 et 4
☐1 2 et 3 ☐1 2 3 et 4

Question 22 Au biut d'un an un puits de pétrole de roche mère a généralement perdu quelle fraction de sa production maximale ?

☐10% ☐50%
☐80% ☐20%

Question 23 Le Groenland

☐a commencé à fondre mais cela s'arrêtera quand les émissions deviendront nulles
☐a déjà commencé à fondre et c'est irreversible
☐ne peut pas fondre car la température y restera négative même avec réchauffement
☐va commencer à fondre bientôt si nous ne baissons pas les émissions

Question 24 Quels pays détiennent le plus de charbon ?

☐Inde et USA ☐Chine et Russie
☐USA et Russie ☐Chine et Inde

Question 25 En un siècle le prix réel de la viande a été divisé par

☐environ 20 ☐environ 10
☐environ 30 ☐environ 5

Question 26 Quelle part de l'effet de serre supplémentaire contribue à réchauffer l'atmosphére ?

☐environ 2% ☐environ 20%
☐environ 8% ☐environ 5%

Question 27 Si elle conduit à une évolution inverse de ce qui a été historiquement constatée, la sobriété énergétique devrait conduire la quantité de produits et services dont nous disposons à

☐baisser à terme ☐il est impossible de se prononcer
☐augmenter à terme ☐rester stable

Question 28 Quand les chiffres sont exactes, une réserve prouvée est

☐toujours égale à la réserve ultime ☐toujours supérieure à la réserve ultime
☐sans lien avec la réserve ultime ☐toujours inférieure à la réserve ultime

Question 29 La première source de CO2 dans le monde vient de

☐l'usage du pétrole ☐l'usage du charbon
☐la déforestation ☐l'usage du gaz

Question 30 Combien de temps e-t-il fallu pour former l'essentiel des combustibles fossiles à partir d'organismes anciens ?

☐de 100 à 400 millions d'années ☐de 5 à 400 millions d'années
☐de 10 à 100 millions d'années ☐de 50 à 200 millions d'années

Question 31 Quelle est la production électrique annuelle typique d'un réacteur nucléaire

☐plus de 15 TWh ☐2 a 5 TWh
☐5 à 10 TWh ☐10 à 15 TWh

Topo - Calcul Diff / Calcul Intégral

UE 11

Examen

MINES ParisTech

28/10/2022

3 heures

Documents autorisés

Les réponses aux 2 parties doivent être rendues **séparément**

Topologie – Calcul Différentiel

QUIZZ (8 points) Pour les questions qui suivent, on justifiera la réponse par un **court** argument ou un contre exemple, selon le cas.

Q1) Préciser l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle (on pourra ici se contenter de donner la réponse sans justification).

$$A_1 = \mathbb{Q}\,,\ A_2 = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,,\ A_3 = \mathbb{N}\,,\ A_4 = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, A_5 =]-\infty, 0[\cup]0,1].$$

Q2) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de l'intérieur de F est-elle toujours égal à F ?

Q3) Tout fermé de $\mathbb{R}$ est-il réunion dénombrable de singletons ?

Q4) Parmi les ensembles ci-dessous, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle, préciser ceux qui sont compacts et ceux qui ne le sont pas.

$$A = [-1, 0[\cup]0,1]\,,\ B = \{1/n\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\ n\geq 1\}\ ,\ C = B\cup\{0\}$$

Q5) Écrire la matrice jacobienne des applications suivantes (on précisera l'ensemble des points où ces notions sont bien définies)

$f\ :\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1+x_2+x_3, x_1x_2x_3)\in\mathbb{R}^2$

$g\ :\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto |x_1|+|x_2|\in\mathbb{R}$

Q6) Soit g une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le gradient de

$$G\ :\ x\longmapsto \cos^2(g(x))$$

en fonction de celui de g.

Q7) Calculer les matrices hessiennes (en précisant leurs domaines de définition) des fonctions suivantes:

$$f(x_1,x_2) = x_1^3x_2^2\,,\ g(x_1,x_2) = \frac{x_2}{x_1^2}.$$

PROBLÈME (12 points)

Soit n un entier ≥ 1. On considère

$$F\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une application continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que F vérifie la propriété suivante:

$$\langle F(y)-F(x)\,|\,y-x\rangle \geq 0 \quad \forall x\,,\ y\in\mathbb{R}^n. \qquad (\star)$$

On appellera *monotone* une telle application.

1) a) Dans le cas $n=1$, comment appelle-t-on une fonction qui vérifie la propriété de monotonie ci-dessus ?

b) À quelle condition sur λ l'application $x\in\mathbb{R}^n \longmapsto F(x)=\lambda x$ est-elle monotone au sens $(\star)$?

c) On suppose dans cette question que F est une application linéaire (avec $n \geq 1$ quelconque), que l'on assimile à sa représentation matricielle dans la base canonique. Montrer que F est monotone si est seulement si sa partie symétrique est positive, c'est-à-dire si

$$M = \frac{1}{2}(F + {}^tF),$$

est telle que $\langle Mh \,|\, h \rangle \geq 0$ pour tout h, où ${}^tF$ est la transposée de F.

Après l'étude de ces cas particuliers, on revient au cas général d'une application F continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et monotone.

2) Montrer que la différentielle de F est positive en tout point, au sens où

$$\langle dF(x) \cdot h \,|\, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

(On pourra considérer des variations du type $x + th$, où $h \in \mathbb{R}^n$ est fixé, et t est un réel proche de 0.)

On s'intéresse dans la suite à l'application $\Phi = \mathrm{Id} + F$, qui à x associe $x + F(x)$.

3) Montrer que l'application $\Phi = \mathrm{Id} + F$ est injective.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $y = \Phi(x)$. Montrer qu'il existe des ouverts U et V contenant x et y, respectivement, tels que la restriction de Φ à U soit un C^1- difféomorphisme entre U et V.

5) Montrer que l'image de Φ, notée $\Phi(\mathbb{R}^n)$, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

6) Montrer que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \|\Phi(x)\| = +\infty.$$

7) Montrer que $\Phi(\mathbb{R}^n)$, l'image de Φ, est *fermée*.

8) On cherche à montrer que $R = \Phi(\mathbb{R}^n)$, qui est à la fois ouvert et fermé, est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Si ça n'est pas le cas, R est strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$, il existe alors $y_0 \in R$, $y_1 \notin R$, et l'on considère

$$S = \{t \in [0,1]\,,\ y_0 + t(y_1 - y_0) \in R\}\,.$$

Montrer que S est un fermé de l'intervalle $[0,1]$. Expliquer pourquoi il contient sa borne supérieure, et mettre en évidence une contradiction avec le fait que R soit ouvert.

9) Déduire de ce qui précède que Φ est un C^1–difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et montrer que l'application réciproque Φ^{-1} est 1-Lipschitzienne.

10) On considère ici une fonction g continument différentiable sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est convexe, c'est à dire que

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y) \quad \forall x\,,\ y \in \mathbb{R}^n\,,\ t \in]0,1[.$$

a) Montrer que, pour tout x et tout h dans $\mathbb{R}^n$, tout $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{g(x+th) - g(x)}{t} \leq g(x+h) - g(x) \leq \frac{g(x+h) - g(x+h-th)}{t}.$$

b) Montrer que l'application $x \longmapsto \nabla g(x)$ est monotone (c'est-à-dire qu'elle vérifie $(\star)$).

c) Tout opérateur monotone continûment différentiable est-il le gradient d'une fonction convexe C^2 ? *(On pourra traiter en premier lieu le cas $n = 1$, puis le cas $n \geq 2$).*

Calcul intégral

QUIZZ (8 points) Pour les questions qui suivent, on justifiera la réponse par un **court** argument ou un contre exemple, selon le cas.

Q1) On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Donner des exemples de boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que

$$(i)\ \lambda(\partial A) = \lambda(A)\,,\ (ii)\ \lambda(\partial A) < \lambda(A)\,,\ (iii)\ \lambda(\partial A) > \lambda(A).$$

Q2) On se place sur $\mathbb{N}$ muni de sa tribu discrète. A toute partie A de $\mathbb{N}$, on associe $\mu(A)$ la borne supérieure de A (qui vaut $+\infty$ si la partie n'est pas bornée, et fixée à 0 pour l'ensemble vide). L'application μ est-elle une mesure ? une mesure extérieure ? ni l'une ni l'autre ?

Q3) On se place sur $\mathbb{N}$. Les familles ci-dessous engendrent-elles la tribu discrète sur $\mathbb{N}$?

(i) La famille des singletons.

(ii) La famille des parties du type $\{n, n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

(iii) La famille des parties du type $\{2n, 2n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

Q4) Pour les suites de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous, préciser la fonction qui est limite simple de la suite, la limite des intégrales, l'intégrale de la limite, et préciser si ces 3 suites (f_n^1), (f_n^2), et (f_n^3), rentrent dans le cadre du théorème de convergence monotone ou du théorème de convergence dominée :

$$f_n^1(x) = \frac{1}{|x|^2}\mathbb{1}_{]1/n,1[}\,,\ f_n^2(x) = \frac{1}{|x|}\mathbb{1}_{]n,2n[}.$$

$$f_n^3(x) = -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{]0,n[}.$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$

Q5) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction f est elle même intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Même question que précédemment si l'on suppose que f est nulle en dehors de l'intervalle $]0,1[$. *(On pourra considérer la fonction $g = \max(1, |f|)$.*

Q6) Soit $P(x,y)$ un polynôme des deux variables x et y, de degré quelconque. L'identité

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} P(x,y)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} P(x,y)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dy\right) dx$$

est-elle vérifiée en général ?

PROBLÈME (12 points)

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, avec μ une mesure finie (i.e. $\mu(X) < +\infty$), et une application T de X dans X, mesurable, qui *conserve la mesure*, c'est-à-dire telle que la mesure image $T_\sharp\mu$ de μ par T est μ elle même. En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

où

$$T^{-1}(A) = \{x \in X\,,\ T(x) \in A\}$$

est l'image réciproque de A par T.

1) Montrer que l'application

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}$$

est mesurable et conserve la mesure.

2) On considère dans cette question le cas $X =]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue définie sur la tribu des boréliens. On définit l'application T par

$$x \in]0,1[\longmapsto \left| \begin{array}{ll} 2x & \text{si} \quad x \in]0,1/2[\\ 2(1-x) & \text{si} \quad x \in [1/2,1[\end{array} \right.$$

a) Tracer le graphe de T, et préciser l'image réciproque par T d'un intervalle $]a,b[\subset]0,1[$.

b) Montrer que T préserve la mesure, c'est-à-dire que $T_\sharp \mu = \mu$.

Soit $A \in \mathcal{A}$, on définit $\hat{A}$ comme l'ensemble des points de A tels que les itérés de T reviennent dans A une infinité de fois:

$$\hat{A} = \{x \in A\,,\ T^n(x) \in A \text{ pour une infinité de valeurs de } n\}$$

On cherche à montrer que $\hat{A}$ est de mesure pleine, ce qui signifie simplement dans ce contexte que $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$B_n = \left\{x \in A\,,\ T^k(x) \notin A \quad \forall k \geq n\right\}.$$

3) Montrer que $B_n \in \mathcal{A}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'image réciproque de B_n par T^{nk}, que l'on note $T^{-nk}(B_n)$.

4) Montrer les ensembles $T^{-nk}(B_n)$ sont disjoints deux à deux.

(Indication : on pourra raisonner par l'absurde, considérer $x \in T^{-nk}(B_n) \cap T^{-nk'}(B_n)$, avec $k' > k$, et s'intéresser à $T^{nk}(x)$)

5) Déduire de ce qui précède que $\mu(B_n) = 0$.

6) Montrer que $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

7) On revient ici à la définition d'une application qui conserve la mesure. Soit T une telle application.

a) Montrer que, si X est de cardinal $N < +\infty$, muni de sa tribu discrète et de la mesure de comptage définie par $\mu(A) = \text{Card}(A)$, alors T est nécessairement bijective. Quel est le nombre d'applications qui conservent la mesure ?

b) Décrire l'ensemble des applications qui conservent la mesure lorsque l'ensemble est infini dénombrable, disons $X = \mathbb{Z}$ pour fixer les idées, muni de sa mesure de comptage sur la tribu discrète. Expliquer pourquoi le résultat général démontré précédemment ne s'applique pas ici, et donner un exemple d'application T sur $\mathbb{Z}$ qui conserve la mesure et qui invalide la propriété $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

c) Montrer que, dans le cas général d'un ensemble infini non dénombrable, dans le cadre des hypothèses du début d'énoncé, T n'est pas nécessairement bijective (on pourra considérer $X =]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue).

Topo - Calcul diff / intégral - Corrigé

Rédigé par LETURCQ–DALIGAUX Mattéo,merci de signaler toute erreur ou incompréhension

31 août 2023

1 Topologie - Calcul Différentiel

Quizz Pour les questions qui suivent, on justifiera la réponse par un court argument ou un contre exemple, selon le cas.

Q1) Préciser l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle (on pourra ici se contenter de donner la réponse sans justification).

$$A_1 = \mathbb{Q},\ A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ A_3 = \mathbb{N},\ A_4 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N},\ A_5 =]-\infty, 0[\cup]0, 1]$$

Q1)
$\mathring{A}_1 = \emptyset$, $\overline{A_1} = \mathbb{R}$

$\mathring{A}_2 = \emptyset$, $\overline{A_2} = \mathbb{R}$

$\mathring{A}_3 = \emptyset$, $\overline{A_3} = \mathbb{N}$

$\mathring{A}_4 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\overline{A_4} = \mathbb{R}$

$\mathring{A}_5 =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $\overline{A_5} =]-\infty, 1]$

Q2) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de l'intérieur de F est-elle toujours égale à F ?

Q2) On prend $F = \{0\}^n$.
Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergente est constante nulle donc converge vers $0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi F est fermé.
De plus, on a $\mathring{F} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = \emptyset$ donc $\overline{\mathring{F}} = \emptyset \neq F$.

Q3) Tout fermé de $\mathbb{R}$ est-il réunion dénombrable de singletons ?

Q3) On considère $\mathbb{R}$, fermé de $\mathbb{R}$.
Supposons que $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable de singletons. Alors nécessairement $\mathbb{R}$ est dénombrable, ce qui est absurde.
Donc l'assertion est fausse.

Q4) Parmi les ensembles ci-dessous, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle, préciser ceux qui sont compacts et ceux qui ne le sont pas.

$$A = [-1, 0[\cup]0, 1],\ B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\},\ C = B \cup \{0\}$$

Q4)

1. On considère la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in A^{\mathbb{N}}$. Cette suite converge vers $0 \notin A$ donc A n'est pas fermé. Donc A n'est pas compact.
2. On considère la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in B^{\mathbb{N}}$. Cette suite converge vers $0 \notin B$ donc B n'est pas fermé. Donc B n'est pas compact.

3. On a $C \subset [-1,1]$ donc C est borné.
   De plus, on considère $D = \mathbb{R} \setminus C$. Soit $x \in D$.
   — <u>cas 1</u> : $x < 0$.
   On considère $r = \frac{-x}{2} > 0$. Alors $B(x,r) \subset D$.
   — <u>cas 2</u> : $x > 1$.
   On considère $r = \frac{x-1}{2} > 0$. Alors $B(x,r) \subset D$.
   — <u>cas 3</u> : $x \in]0,1[$.
   Alors, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{N+1} < x < \frac{1}{N}$ en prenant $N = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.
   On considère alors $r = \min(\frac{x - \frac{1}{N+1}}{2}, \frac{\frac{1}{N} - x}{2}) > 0$. Alors $B(x,r) \subset D$.
   Ainsi, $\forall x \in D$, $\exists r > 0$, $B(x,r) \subset D$. Donc D est ouvert. Donc C est fermé.
   C est un fermé borné de $\mathbb{R}$, espace de dimension finie, donc C est compact.

Q5) Ecrire la matrice jacobienne des applications suivantes (on précisera l'ensemble des points où ces notions sont bien définies)

$$f \,:\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_1+x_2+x_3, x_1x_2x_3) \in \mathbb{R}^2$$

$$g \,:\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x_1| + |x_2| \in \mathbb{R}$$

Q5)

1. L'application f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 J_f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}$$

2. L'application $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 donc g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On a alors :

$$\forall (x_1,x_2) in (\mathbb{R}^*)^2 J_g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x_1|} & \frac{x_2}{|x_2|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(x_1) & \mathrm{sgn}(x_2) \end{pmatrix}$$

Q6) Soit g une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le gradient de

$$G \,:\, x \mapsto \cos^2(g(x))$$

en fonction de celui de g.

Q6) L'application $x \mapsto \cos(x)$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ donc G est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions différentiables.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \nabla G(x) = -2\cos(g(x))\sin(g(x))\nabla g(x)$$

Q7) Calculer les matrices hessiennes (en précisant leurs domaines de définition) des fonctions suivantes

$$f \,:\, (x_1,x_2) \mapsto x_1^3x_2^2,\ g \,:\, (x_1,x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1^2}$$

Q7) L'application f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1x_2^2 & 6x_1^2x_2 \\ 6x_1^2x_2 & 2x_1^3 \end{pmatrix}$$

L'application g est une fraction rationnelle, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ouvert de définition $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ H_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6x_2}{x_1^4} & \frac{-2}{x_1^3} \\ \frac{-2}{x_1^3} & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

une application continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que F vérifie la propriété suivante :

$$\langle F(y) - F(x) | y - x \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (\star)$$

On appelera *monotone* une telle application.

1) a) Dans le cas $n = 1$, comment appelle-t-on une fonction qui vérifie la propriété de monotonie ci-dessus ?

Dans le cas $n = 1$, la propriété $(\star)$ devient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (F(y) - F(x))(y - x) \geq 0$$

Donc, $y - x \geq 0 \implies F(y) - F(x) \geq 0$

On appelle alors F une fonction croissante.

b) A quelle condition sur λ l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda x$ est-elle monotone au sens de $(\star)$?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que F vérifie $(\star)$. On a alors :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle F(y) - F(x) | y - x \rangle \geq 0 \quad \implies \langle \lambda y - \lambda x | y - x \rangle \geq 0 \implies \lambda \langle y - x | y - x \rangle \geq 0$$

Or par positivité du produit scalaire, $\langle y - x | y - x \rangle \geq 0$ donc nécessairement $\lambda \geq 0$.

c) On suppose dans cette question que F est une application linéaire (avec $n \geq 1$ quelconque), que l'on assimile à sa représentation matricielle dans la base canonique ? Montrer que F est monotone si et seulement si sa partie symétrique est positive, c'est-à-dire si

$$M = \frac{1}{2}(F + F^T)$$

est telle que $\langle Mh | h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

— Supposons que F soit monotone.
Soit $h \in \mathbb{R}^n$.
En remplaçant $y = h$ et $x = 0$ dans $(\star)$, on obtient :

$$\langle Fh - F0 | h - 0 \rangle \geq 0 \implies \langle Fh | h \rangle \geq 0$$

On décompose de manière unique $F = M + A$ avec $M = \frac{1}{2}(F + F^T)$ et $A = \frac{1}{2}(F - F^T)$ en parties symétrique et antisymétrique. On a alors :
$\langle Mh + Ah | h \rangle = \langle Mh | h \rangle + \langle Ah | h \rangle \geq 0$
Or $\langle Ah | h \rangle = \langle A^T h | h \rangle = -\langle Ah | h \rangle$ donc $\langle Ah | h \rangle = 0$.
Donc $\langle Mh | h \rangle \geq 0$.

— Supposons que $\langle Mh|h\rangle \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
On a alors :

$$\langle F(y) - F(x)|y - x\rangle = \langle M(y - x)|y - x\rangle + \langle A(y - x)|y - x\rangle \quad = \langle M(y - x)|y - x\rangle \geq 0$$

Donc F est monotone.

Après l'étude de ces cas particuliers, on revient au cas général d'une application F continûment différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et monotone

2) Montrer que la différentielle de F est positive en tout point, au sens où

$$\langle dF(x) \cdot h|h\rangle \geq 0 \quad \forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

(On pourra considérer es variations du type $x + th$, où $h \in \mathbb{R}^n$ est fixé, et t est un réel proche de 0)

Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $t > 0$.
Par différentiabilité de F en x, on a $F(x + th) =_{t\to 0} F(x) + dF(x) \cdot th + o(t)$.
Or, par monotonie de F, on a :

$$\langle F(x + th) - F(x)|x + th - x\rangle \geq 0 \implies \langle dF(x) \cdot th + o(t)|th\rangle \geq 0 \quad \implies \langle dF(x) \cdot h|h\rangle + \langle \frac{o(t)}{t}|h\rangle \geq 0$$

Or $y \mapsto \langle y|h\rangle$ est linéaire donc continue donc $\langle \frac{o(t)}{t}|h\rangle \to_{t\to 0} 0$.
Donc en passant à la limite on obtient $\langle dF(x) \cdot h|h\rangle \geq 0$.

On s'intéressse dans la suite à l'application $\Phi = Id + F$, qui à x associe $x + F(x)$.

3) Montrer que $\Phi = Id + F$ est injective.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $\Phi(x) = \Phi(y)$.
Alors, $x + F(x) = y + F(y)$ donc $x - y = F(y) - F(x)$.
Or, par monotonie de F, on a $\langle F(y) - F(x)|y - x\rangle \geq 0$ d'où $\langle x - y|y - x\rangle \geq 0$.
Donc $\langle y - x|y - x\rangle \leq 0$, or par positivité du produit scalaire, on a $\langle y - x|y - x\rangle \geq 0$.
D'où $\langle y - x|y - x\rangle = 0$ et donc, par définition de $\langle \cdot|\cdot\rangle$, $y - x = 0$ ie $x = y$.
Donc Φ est injective.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n, y = \Phi(x)$. Montrer qu'il existe des ouverts U et V contenant x et y, respectivement, tels que la restriction de Φ à U soit un C^1-difféomorphisme entre U et V.

L'application Id est linéaire donc de classe $\mathcal{C}^1$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse. Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

On calcule alors la différentielle de Φ en $x \in \mathbb{R}^n$:
$d\Phi(x) = d(Id + F)(x) = dId(x) + dF(x) = Id + dF(x)$.

Soit $h \in \ker d\Phi(x)$.
Alors $d\Phi(x) \cdot h = h + dF(x) \cdot h = 0$ donc $-h = dF(x) \cdot h$.
Or $\langle dF(x) \cdot h|h\rangle \geq 0$ par 2) donc $\langle -h|h\rangle \geq 0$ ainsi $\langle h|h\rangle \leq 0$.
Et par positivité du produit scalaire, on a $\langle h|h\rangle \geq 0$ donc $\langle h|h\rangle = 0$ d'où par définition de $\langle \cdot|\cdot\rangle$, $h = 0$.
Ainsi on a $\ker d\Phi(x) = \{0\}$ donc $d\Phi(x)$ est injective et donc inversible car $d\Phi(x)$ est un endomorphisme.
D'après le théorème d'inversion local, il existe des ouverts U et V contenant x et $y = \Phi(x)$ respectivement, tels que la restriction de Φ à U soit un C^1-difféomorphisme entre U et V.

5) Montrer que l'image de Φ, notée $\Phi(\mathbb{R}^n)$, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $y \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = \Phi(x)$.
On considère les ouverts U et V définis en 4) tels que Φ soit un C^1-difféomorphisme entre U et V.
V est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset V = \Phi(U) \subset \Phi(\mathbb{R}^n)$.
Donc $\Phi(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

6) Montrer que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} ||\Phi(x)|| = +\infty$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
On a

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)||^2 = ||x + F(x)||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x|F(x)\rangle + ||F(x)||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\langle x - 0|F(x) - F(0)\rangle + ||F(x)||^2 + 2\langle x|F(0)\rangle \\ &\geq ||x||^2 + 2\langle x|F(0)\rangle \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que F est monotone.
De plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x|F(0)\rangle| \leq ||x||\,||F(0)|| \implies 2\langle x|F(0)\rangle \geq -2||x||\,||F(0)||$$

On a donc $||\Phi(x)||^2 \geq ||x||^2 - 2||x||\,||F(0)||$.
Or, $||x||^2 - 2||x||\,||F(0)|| \to_{||x|| \to +\infty} +\infty$ donc $||\Phi(x)||^2 \to_{||x|| \to +\infty} +\infty$.
Et $||\Phi(x)|| \geq 0$ donc $||\Phi(x)|| \to_{||x|| \to +\infty} +\infty$.

7) Montrer que $\Phi(\mathbb{R}^n)$, l'image de Φ, est fermée.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \to y$.
Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \Phi(x_n)$.

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.
Alors, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(||x_{\varphi(n)}||) \to +\infty$.
D'après 6), on a $||\Phi(x_{\varphi(n)})|| \to_{n\to+\infty} +\infty$ d'où $||y_{\varphi(n)}|| \to_{n\to+\infty} +\infty$.
Ainsi par unicité de la limite, $||y|| = +\infty$ ce qui est absurde donc (x_n) est bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierestrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$.
Par continuité de Φ on a $\Phi(x_{\varphi(n)}) \to_{n\to+\infty} \Phi(x)$ et $\Phi(x_{\varphi(n)}) \to_{n\to+\infty} y$ donc $\Phi(x) = y$ par unicité de la limite.
Ainsi $y \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ donc $\Phi(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

8) On cherche à montrer que $R = \Phi(\mathbb{R}^n)$, qui est à la fois ouvert et fermé, est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Si ce n'est pas le cas, R est strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$, il existe alors $y_0 \in R, y_1 \notin R$, et l'on considère

$$S = \{t \in [0, 1] | y_0 + t(y_1 - y_0) \in R\}$$

Montrer que S est un fermé de l'intervalle $[0, 1]$. Expliquer pourquoi il contient sa borne supérieur, et mettre en évidence une contradiction avec le fait que R soit ouvert.

• Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to_{n\to+\infty} t$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, y_0 + t_n(y_1 - y_0) \in R$.
Or R est fermé donc $y_0 + t(y_1 - y_0) \in R$ en passant à la limite, et donc $t \in S$.
Ainsi S est fermé.

• S est non vide car $0 \in S$.
De plus, $S \subset [0, 1]$ donc S est borné ainsi S admet une borne supérieure t_0.
Soit $(t_n) \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to t_0$,
Alors $t_0 \in S$ car S est fermé donc S contient sa borne supérieure.

• $y_1 \notin R$ donc $1 \notin S$. Donc $t_0 < 1$.
Par décroissance de la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $t_0 < t_0 + \frac{1}{n} < 1$.
Donc, $\forall n \geq N, y_0 + (t_0 + \frac{1}{n})(y_1 - y_0) \in \mathbb{R}^n \setminus R$.
Or, R est ouvert dans $\mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}^n \setminus R$ est fermé et $y_0 + (t_0 + \frac{1}{n})(y_1 - y_0) \to_{n\to+\infty} y_0 + t_0(y_1 - y_0)$.
Donc $y_0 + t_0(y_1 - y_0) \in \mathbb{R} \setminus R$ d'où $t_0 \notin S$ ce qui est absurde.

9) Déduire de ce qui précde que Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et montrer que l'application réciproque Φ^{-1} est 1-lipschitzienne.

• D'après 3), Φ est injective et d'après 8), $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ donc Φ est surjective donc bijective.
De plus, Φ est différentiable et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d\Phi(x)$ est inversible donc Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\begin{aligned}
||\Phi(y) - \Phi(x)||^2 &= ||y + F(y) - x - F(x)||^2 \\
&= ||y - x + F(y) - F(x)||^2 \\
&= ||y - x||^2 + 2\langle y - x, F(y) - F(x)\rangle + ||F(y) - F(x)||^2 \\
&\geq ||y - x||^2
\end{aligned}$$

La dernière inégalité venant du fait que F soit monotone.
On a donc, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $||\Phi(y) - \Phi(x)|| \geq ||y - x||$.
Et donc par bijectivité de Φ, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $||\Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(x)|| \leq ||y - x||$.
Ainsi, Φ^{-1} est 1-lipschitzienne.

10) On considère ici une fonction g continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est convexe, c'est-à-dire que

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y), \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \forall t \in]0, 1[$$

a) Montrer que, pour tout x et tout h dans $\mathbb{R}^n$, tout $t \in]0, 1[$, on a

$$\frac{g(x + th) - g(x)}{t} \leq g(x + h) - g(x) \leq \frac{g(x + h) - g(x + h - th)}{t}$$

Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $t \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
&g(x + th) = g((1-t)x + t(x + h)) \\
&\implies g(x + th) \leq (1-t)g(x) + tg(x + h) \\
&\implies g(x + th) - g(x) \leq t(g(x + h) - g(x)) \\
&\implies \frac{g(x + th) - g(x)}{t} \leq g(x + h) - g(x)
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
&g(x + (1-t)h) = g((1-t)(x + h) + tx) \\
&\implies g(x + h - th) \leq (1-t)g(x + h) + tg(x) \\
&\implies t(g(x + h) - g(x)) \leq g(x + h) - g(x + h - th) \\
&\implies g(x + h) - g(x) \leq \frac{g(x + h) - g(x + h - th)}{t}
\end{aligned}$$

b) Montrer que l'application $x \mapsto \nabla g(x)$ est monotone (c'est-à-dire qu'elle vérifie $(\star)$).

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in]0, 1[$.

L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc on a :
$g(x+th)-g(x)=\langle\nabla g(x)|th\rangle+o(t)$ et $g(x+h)-g(x+h-th)=\langle\nabla g(x+h)|th\rangle+o(t)$.
Donc, par a), on a :

$$\frac{\langle\nabla g(x)|th\rangle+o(t)}{t}\leq g(x+h)-g(x)\leq\frac{\langle\nabla g(x+h)|th\rangle+o(t)}{t}$$
$$\Longrightarrow\ \langle\nabla g(x)|h\rangle+\frac{o(t)}{t}\leq\langle\nabla g(x+h)|h\rangle+\frac{o(t)}{t}$$

Donc en passant à la limite $t\to 0$, on a :

$$\langle\nabla g(x)|h\rangle\leq\langle\nabla g(x+h)|h\rangle$$
$$\Longrightarrow\ \langle\nabla g(x+h)-\nabla g(x)|h\rangle\geq 0$$

Et en posant $h=y-x$, on a bien $\langle\nabla g(y)-\nabla g(x)|y-x\rangle\geq 0$.
Donc ∇g est monotone.

c) Tout opérateur monotone continûment différentiable est-il le gradient d'une fonction convexe $\mathcal{C}^2$?
(On pourra traiter en premier le cas $n=1$, puis le cas $n\geq 2$).

• <u>cas 1 : $n=1$</u> :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction monotone (donc croissante) de classe $\mathcal{C}^1$.
On pose $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=f(x)$.
Or f est croissante donc g est convexe. Ainsi f est bien le gradient d'une fonction convexe $\mathcal{C}^2$.
• <u>cas 2 : $n\geq 2$</u> :
On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,...,x_n) & \longmapsto & (-x_2,x_1,0,...,0)\end{array}$$

$\langle f(y)-f(x)|y-x\rangle=(-y_2+x_2)(y_1-x_1)+(y_1-x_1)(y_2-x_2)=0$. Donc f est monotone.
Supposons qu'il existe une application convexe g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla g=f$.
Alors on a $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,...,x_n)=f_1(x_1,...,x_n)=-x_2$. Donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 x_1}(x_1,...,x_n)=-1$.
De plus, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,...,x_n)=f_2(x_1,...,x_n)=x_1$. Donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 x_2}(x_1,...,x_n)=1$.
Or g est de classe $\mathcal{C}^2$ donc d'après le théorème de Schwarz, on a $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 x_1}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 x_2}$ donc $1=-1$ ce qui est absurde.
Ainsi il n'existe pas d'application convexe g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\nabla g=f$.
Donc tout opérateur monotone continûment différentiable n'est pas le gradient d'une fonction convexe $\mathcal{C}^2$.

2 Calcul intégral

Quizz Pour les questions qui suivent, on justifiera la réponse par un court argument ou un contre exemple, selon le cas.

Q1) On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Donner des exemples de boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que

$$(i)\, \lambda(\partial A) = \lambda(A),\ (ii)\, \lambda(\partial A) < \lambda(A),\ (iii)\, \lambda(\partial A) > \lambda(A).$$

— (i) $A = \{0\}$.
$\partial A = \{0\} \setminus \emptyset = 0$, donc $\partial A = A$ d'où $\lambda(\partial A) = \lambda(A) = 0$.
— (ii) $A = \mathbb{R}$.
$\partial A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ donc $\lambda(\partial A) = 0 < \infty = \lambda(A)$.
— (iii) $A = \mathbb{Q}$.
$\partial A = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ donc $\lambda(\partial A) = \infty > 0 = \lambda(A)$.

Q2) On se place sur $\mathbb{N}$ muni de sa tribu discrète. A toute partie A de $\mathbb{N}$, on associe $\mu(A)$ la borne supérieure de A (qui vaut $+\infty$ si la partie n'est pas bornée, et fixée à 0 pour l'ensemble vide). L'application μ est-elle une mesure ? une messure extérieure ? ni l'une ni l'autre ?

• $\mu(\{1\} \uplus \{2\}) = \mu(\{1,2\}) = 2$ et $\mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) = 1 + 2 = 3$ donc μ n'est pas une mesure.
•
— $\mu(\emptyset) = 0$ par définition.
— Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ tel que $A \subset B$.
Si B n'est pas bornée, alors $\mu(B) = +\infty \geq \mu(A)$.
Si B est bornée, alors A est bornée et, pour $x \in A$ on a $x \in B$ donc $x \leq \mu(B)$ et en particulier $\mu(A) \leq \mu(B)$.
— Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$.
Si l'un des A_i n'est pas bornée alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ n'est pas borné et donc $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = +\infty = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$.
Si tout les A_i sont bornées, deux cas sont possibles.
— cas 1 : $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est borné
Alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \max(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \max(\max_{i\in\mathbb{N}}(A_i)) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \max(A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$.
— cas 2 : $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ n'est pas borné
Alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = +\infty$
De plus, la suite $(\mu(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ n'est alors pas bornée donc elle ne tend par vers 0 ainsi la série $\sum \mu(A_i)$ diverge vers $+\infty$.
Donc $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$.
Ainsi μ est une mesure extérieure.

Q3) On se place sur $\mathbb{N}$. Les familles ci-dessous engendrent-elles la tribu discrète sur $\mathbb{N}$?
— (i) La famille des singletons.
— (ii) La famille des parties du type $\{n, n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.
— (iii) La famille des parties du type $\{2n, 2n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

— (i) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,
Alors $A = \bigcup_{n\in A}\{n\}$ et A est dénombrable donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \sigma(\{\{n\}, n \in \mathbb{N}\})$.
D'où $\sigma(\{\{n\}, n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
— (ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
Alors, $\{n\} = \{n, n+1\} \cap \{n-1, n\}$ donc $\{n\} \in \sigma(\{\{n, n+1\}, n \in \mathbb{N}\})$.
De plus $\{0\} = \{0, 1\} \setminus \{1\}$ donc $\{0\} \in \sigma(\{\{n, n+1\}, n \in \mathbb{N}\})$.
Donc $\sigma(\{\{n\}, n \in \mathbb{N}\}) \subset \sigma(\{\{n, n+1\}, n \in \mathbb{N}\})$.

D'où d'après (i), $\sigma(\{\{n, n+1\}, n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

— (iii) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \neq m$,
Alors $2n \neq 2m$ et $2n+1 \neq 2m+1$ donc $\{2n, 2n+1\} \cap \{2m, 2m+1\} = \emptyset$ ie toutes ces parties sont disjointes.
En particulier, il est impossible d'obtenir un singleton par union ou intersection de ces parties.
Donc $\sigma(\{\{2n, 2n+1\}, n \in \mathbb{N}\}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Q4) Pour les suites de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous, préciser la fonction qui est limite simple de la suite, la limite des intégrales, l'intégrale de la limite, et préciser si ces 3 suites (f_n^1), (f_n^2), et (f_n^3), rentrent dans le cadre du théorème de convergence monotone ou du théorème de convergence dominée :

$$f_n^1(x) = \frac{1}{|x|^2}\mathbf{1}_{]\frac{1}{n},1[}(x),\ f_n^2(x) = \frac{1}{|x|}\mathbf{1}_{]n,2n[}$$

$$f_n^3(x) - \frac{1}{n}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)$$

1. Les fonctions f_n^1 sont des indicatrices de fonctions continues (donc mesurables) donc elles sont mesurables.
   • Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
   — si $x \in]0, 1[$, alors par décroissance de la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq x$.
   Alors, $\forall n \geq N$, $f_n^1(x) = \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n^1(x) = \frac{1}{x^2}$.
   — si $x \in]1, +\infty[$, alors $f_n^1(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n^1(x) = 0$.
   — si $x = 0$, alors $f_n^1(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n^1(x) = 0$.
   Donc la limite simple est $f^1 : x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{]0,1[}$.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n^1 = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = n - 1 \to_{n\to+\infty} +\infty$$

   • De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} f^1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$$

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$,
   — si $x \leq \frac{1}{n+1}$ ou $x \geq 1$, $f_{n+1}^1(x) = 0 = f_n^1(x)$.
   — si $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, $f_{n+1}^1(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0 = f_n^1(x)$.
   — si $x \in]\frac{1}{n}, 1[$, $f_{n+1}^1(x) = \frac{1}{x^2} = f_n^1(x)$.
   La suite (f_n^1) est croissante donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone.
2. Les fonctions f_n^2 sont des indicatrices de fonctions continues (donc mesurables) donc elles sont mesurables.
   • Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
   Par croissance de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $n \geq x$.
   Alors, $\forall n \geq N, f_n^2(x) = 0 \to_{n\to+\infty} 0$.
   La limite simple de la suite est donc la fonction $f^2 : x \mapsto 0$.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n^2 = \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_n^{2n} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2) \to_{n\to+\infty} \ln(2)$$

• De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0$$

• On a $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n^2 \neq \int_{\mathbb{R}} f^2$ donc on ne peut pas appliquer le théorème de convergence monotone ou dominée.

3. Les fonctions f_n^3 sont des indicatrices de fonctions continues (donc mesurables) donc elles sont mesurables.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

Par croissance de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $n \geq x$.

Alors, $\forall n \geq N$, $f_n^3(x) = -1/n \to_{n\to+\infty} 0$.

La limite simple de la suite est donc la fonction $f^3 : x \mapsto 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n^3 = \int_0^n -\frac{1}{n} dx = -1 \to_{n\to+\infty} -1$$

• De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} f^3 = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0$$

• On a $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n^3 \neq \int_{\mathbb{R}} f^3$ donc on ne peut pas appliquer le théorème de convergence monotone ou dominée.

Q5) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction f est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Même question que précédemment si l'on suppose que f est nulle en dehors de l'intervalle $]0, 1[$.

(On pourra considérer la fonction $g = \max(1, |f|)$.)

— (i) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$

Alors la fonction f est bien mesurable comme produit de fonctions mesurables.

De plus, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Or la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ donc l'assertion est fausse.

— (ii) On a $f \leq 1 + f^2$ or la fonction $1 + f^2$ est intégrable sur $[0, 1]$ donc f est intégrable sur $[0, 1]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

L'assertion est donc vraie.

Q6) Soit P une fonction polynomiale des deux variables x et y, de degré quelconque. L'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P(x, y) e^{-(x^2+y^2)}\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P(x, y) e^{-(x^2+y^2)}\, dy \right) dx$$

est-elle vérifiée en général ?

La fonction $f : (x, y) \mapsto P(x, y)e^{-(x^2+y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, $|P(x, y)e^{-(x^2+y^2)}| = |P(x, y)|e^{-(x^2+y^2)}$ et $|P(x, y)|e^{-(x^2+y^2)} =_{\pm\infty} o(\frac{1}{x^2+y^2})$ or $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$ est intégrable en $\pm\infty$.

On en déduit que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité souhaitée.

PROBLEME

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, avec μ une mesure **finie** (i.e. $\mu(X) < +\infty$), et une application T de X dans X, mesurable, qui *conserve la mesure*, c'est-à-dire telle que la mesure image $T_\sharp\mu$ de μ par T est μ elle-même. En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

où

$$T^{-1}(A) = \{x \in X \,,\, T(x) \in A\}$$

est l'image réciproque de A par T.

1) Montrer que l'applications

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}$$

est mesurable et conserve la mesure.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: T^n est mesurable et conserve la mesure.

— Initialisation $\mathcal{P}_1$ est vraie par définition.

— Hérédité Soit $n \geq 2$, supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie.

Soit $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} T^{-n}(A) &= \{x \in X \,,\, T^n(x) \in A\} \\ &= \{x \in X \,,\, T^{n-1}(T(x)) \in A\} \\ &= \{x \in X \,,\, T(x) \in T^{-(n-1)}(A)\} \\ &= T^{-1}(T^{-(n-1)}(A)) \end{aligned}$$

Or d'après $\mathcal{P}_{n-1}$, $T^{-(n-1)}(A) \in \mathcal{A}$ donc $T^{-n}(A) \in \mathcal{A}$ car T est mesurable.

De plus, $\mu(T^{-n}(A)) = \mu(T^{-1}(T^{-(n-1)}(A))) = \mu(T^{-(n-1)}(A)) = \mu(A)$ d'après $\mathcal{P}_{n-1}$ et puisque que T conserve la mesure.

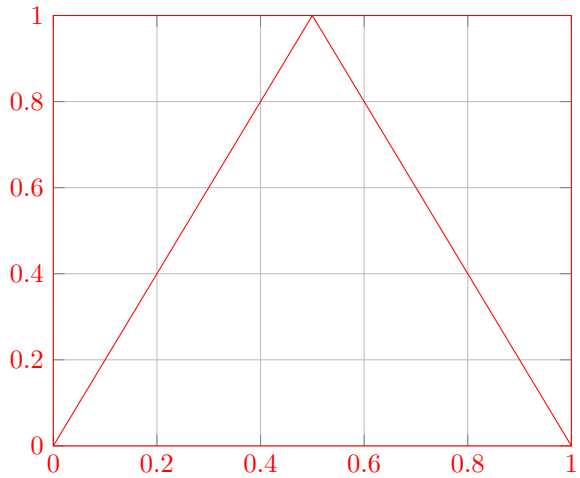
Donc T^n conserve la mesure ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, T^n est mesurable et conserve la mesure.

2) On considère dans cette question le cas $X =]0, 1[$ muni de la mesure de Lebesgue définie sur la tribu des boréliens. On définit l'application T par

$$x \in]0,1[\mapsto \left| \begin{array}{lll} 2\text{x} & \text{si} & \text{x} \in]0, \frac{1}{2}[\\ 2(1\text{-x}) & \text{si} & \text{x} \in [\frac{1}{2}, 1[\end{array} \right.$$

a) Tracer le graphe de T, et préciser l'image réciproque par T d'un intervalle $]a, b[\subset]0, 1[$.



Soit $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$.
Nous allons montrer que $T^{-1}(]a,b[) =]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[\cup]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[$.
• Soit $x \in]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[\cup]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[$.
— Si $x \in]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[$, alors $x \leq \frac{b}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $T(x) = 2x \in]a,b[$ par croissance de T sur $]0, \frac{1}{2}[$.
D'où $x \in T^{-1}(]a,b[)$.
— Si $x \in]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[$, alors $x \geq 1-\frac{b}{2} \geq \frac{1}{2}$ donc $T(x) = 2(1-x) \in]a,b[$ par décroissance de T sur $[\frac{1}{2}, 1[$.
D'où $x \in T^{-1}(]a,b[)$.
• Soit $x \in T^{-1}(]a,b[)$.
— Si $x \in]0, \frac{1}{2}[$, alors $T(x) = 2x \in]a,b[$ donc $a < 2x < b$.
Donc $\frac{a}{2} < x < \frac{b}{2}$
D'où $x \in]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[$.
— Si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, alors $T(x) = 2(1-x) \in]a,b[$ donc $a < 2(1-x) < b$.
Donc $1-\frac{b}{2} < x < 1-\frac{a}{2}$.
D'où $x \in]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[$.
Ainsi $T^{-1}(]a,b[) =]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[\cup]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[$.

b) Montrer que T préserve la mesure, c'est-à-dire que $T_\sharp \mu = \mu$.

La tribu $\mathcal{B}(]0,1[)$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a,b[$ avec $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$.
Il suffit alors de montrer que l'application T conserve la mesure des intervalles de la forme $]a,b[$ avec $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$.
Ainsi, soit $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$.

$$\mu(T^{-1}(]a,b[)) = \mu(]\frac{a}{2}, \frac{b}{2}[\uplus]1-\frac{b}{2}, 1-\frac{a}{2}[) = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + 1 - \frac{a}{2} - 1 + \frac{b}{2} = b - a = \mu(]a,b[)$$

Donc T conserve la mesure.

Soit $A \in \mathcal{A}$, on définit $\hat{A}$ comme l'ensemble des points de A tels que les itérés de T reviennent dans A une infinité de fois :

$$\hat{A} = \{x \in A \,,\, T^n(x) \in A \,\text{pour un infinité de valeurs de } n\}$$

On cherche à montrer que $\hat{A}$ est de mesure pleine, ce qui signifie simplement dans ce contexte que $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$B_n = \{x \in A \,,\, T^k(x) \notin A \quad \forall k \geq n\}$$

3) Montrer que $B_n \in \mathcal{A}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$B_n = \{x \in A\,,\, T^k(x) \notin A \forall k \geq n\} \quad = \bigcap_{k \geq n} \{x \in A\,,\, T^k(x) \notin A\} = \bigcap_{k \geq n} \{x \in A\,,\, T^k(x) \in A^c\} \quad = \bigcap_{k \geq n} (A \cap T^{-k}(A^c))$$

Or $A \in \mathcal{A}$ donc $A^c \in \mathcal{A}$.
De plus, d'après 1), T^k est mesurable donc $T^{-k}(A^c) \in \mathcal{A}$.
Ainsi, $A \cap T^{-k}(A^c) \in \mathcal{A}$.
D'où $B_n \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'image réciproque de B_n par T^{nk}, que l'on note $T^{-nk}(B_n)$.

4) Montrer que les ensembles $T^{-nk}(B_n)$ sont disjoints deux à deux.
(Indication : on pourra raisonner par l'absurde, considérer $x \in T^{-nk}(B_n) \cap T^{-nk'}(B_n)$ avec $k' > k$, et s'intéresser à $T^{nk}(x)$)

Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < l$.
Supposons par l'absurde que $T^{-nk}(B_n) \cap T^{-nl}(B_n) \neq \emptyset$.
Soit $x \in T^{-nk}(B_n) \cap T^{-nl}(B_n)$.
Alors $T^{nk}(x) \in B_n$ et $T^{nl}(x) \in B_n$.
Donc $\forall i \geq n$, $T^{nk+i}(x) \notin A$.
En particulier en prenant $i = n(l-k) \geq n$, on a $T^{nl}(x) \notin A$.
Mais $T^{nl}(x) \in B_n \implies T^{nl}(x) \in A$ donc on a une contradiction.
Ainsi $T^{-nk}(B_n) \cap T^{-nl}(B_n) = \emptyset$.

5) Déduire de ce qui précède que $\mu(B_n) = 0$.

On a

$$\mu(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} T^{-nk}(B_n)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(T^{-nk}(B_n)) \quad = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$$

La dernière égalité vient du fait que T^{nk} conserve la mesure d'apèrs 1).
Or μ est une mesure finie et $\biguplus_{k \in \mathbb{N}} T^{-nk}(B_n) \subset X$ donc $\mu(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} T^{-nk}(B_n)) < +\infty$.
Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_n) < +\infty$ ainsi la famille $(\mu(B_n))_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable et constante donc nécessairement nulle.
D'où $\mu(B_n) = 0$.

6) Montrer que $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

On a

$$\complement_A \hat{A} = \{x \in A,\, \exists n \in \mathbb{N},\, \forall k \geq n,\, T^k(x) \notin A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Or on remarque que $B_n \subset B_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi par limite croissante on a

$$\mu(\complement_A \hat{A}) = \mu(\overset{\uparrow}{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

Or μ est une mesure finie donc $\mu(\complement_A \hat{A}) = \mu(A) - \mu(\hat{A})$.
D'où $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

7) On revient ici à la définition d'une application qui conserve la mesure. Soit T une telle application.

a) Montrer que, si X est de cardinal $N < +\infty$, muni de sa tribu discrète et de la mesure de comptage définie par $\mu(A) = \text{Card}(A)$, alors T est nécessairement bijective. Quel est le nombre d'applications qui conservent la mesure ?

• Soit $(x, y) \in X^2$ tel que $T(x) = T(y)$.
Alors $x \in T^{-1}(\{T(y)\})$ et $y \in T^{-1}(\{T(y)\})$.
Or T conserve la mesure donc $\mu(T^{-1}(\{T(y)\})) = \mu(\{T(y)\}) = |\{T(y)\}| = 1$.
Donc $|T^{-1}(\{T(y)\})| = 1$. De plus, $\{x, y\} \subset T^{-1}(\{T(y)\})$ donc $1 \leq |\{x, y\}| \leq 1$.
Ainsi $|\{x, y\}| = 1$ donc $x = y$.
Donc T est injective d'un ensemble fini dans lui-même, elle est donc bijective.
• Soit $T : X \to X$ une application bijective.
Soit $A \in \mathcal{P}(X)$.
Par bijectivité de T, $\forall y \in A$, $\exists! x \in X$, $T(x) = y$.
Or

$$T^{-1}(A) = \{x \in X, T(x) \in A\} \quad = \{x \in X, \exists y \in A, T(x) = y\} = \biguplus_{y \in A} \{x \in X, T(x) = y\}$$

Or $\forall y \in A$, $|\{x \in X, T(x) = y\}| = 1$ donc $|T^{-1}(A)| = \sum_{y \in A} 1 = |A|$.
Donc T conserve la mesure.
• Il y a donc autant d'applications qui conservent la mesure que de bijections sur X i.e. il y en a $N!$.

b) Décrire l'ensemble des applications qui conservent la mesure lorsque l'ensemble est infini dénombrable, disons $X = \mathbb{Z}$ pour fixer les idées, muni de sa mesure de comptage sur la tribu discrète. Expliquer pourquoi le résultat général démontré précédemment ne s'applique pas ici, et donner un exemple d'application T sur $\mathbb{Z}$ qui conserve la mesure et qui invalide la propriété $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$.

• Soit $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une application qui conserve la mesure.
Soit $y \in \mathbb{Z}$.
Alors $|T^{-1}(\{y\})| = |\{y\}| = 1$.
Donc $\exists! x \in \mathbb{Z}$, $T(x) = y$. Ainsi T est bijective.
• Soit $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une application bijective.
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
— <u>cas 1 : A est fini</u>
Alors avec un raisonnement identique au précédent on a $|T^{-1}(A)| = |A|$.
— <u>cas 2 : A est infini dénombrable</u>
On a $T^{-1}(A) = \biguplus_{y \in A} \{x \in \mathbb{Z}, T(x) = y\}$. Cette ensemble est une union dénombrable de parties de $\mathbb{Z}$, il appartient donc bien a la tribu discète et donc on peut en prendre sa mesure.
Or $\forall y \in A$, $|\{x \in \mathbb{Z}, T(x) = y\}| = 1$ donc $|T^{-1}(A)| = \sum_{y \in A} 1 = +\infty = |A|$.
L'application T conserve donc la mesure.
Ainsi les applications qui conserve la mesure dans ce cas sont les applications bijectives.
• La mesure considérée ici n'est pas finie donc le résultat général de 6) ne s'applique pas.
En effet, considérons $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $T(x) = x + 1$.
On a alors $\mu(\{0\}) = 1$ et $\mu(\{\hat{0}\}) = \mu(\emptyset) = 0$.
Donc $\mu(\{\hat{0}\}) \neq \mu(\{0\})$.

c) Montrer que, dans le cas général d'un ensemble infini non dénombrable, dans le cadre des hypothèses du début d'énoncé, T n'est pas nécessairement bijective (on pourra considérer $X =]0, 1[$ muni de la mesure de Lebesgue).

La question 2) nous donne un exemple d'application conservant la mesure qui n'est pas bijective.

Examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Lundi 7 novembre 2022

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/12/8 pour une note sur 40.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2

Formulaire : gradient et laplacien en coordonnées polaires.

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \qquad , \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

1 Potentiel bidimensionnel à symétrie de rotation

On se pose le problème des états quantiques liés dans un potentiel bidimensionnel à symétrie de rotation. On considère donc une particule quantique de masse μ pouvant se déplacer dans le plan (Oxy). Cette particule est placée dans le potentiel V défini par :

$$V(x, y) = V(r)$$

où r est la distance du point (x, y) au centre O du repère.

1. Écrire le hamiltonien $\hat{H}$ du système dans sa forme générale en fonction des opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{V}$, puis écrire son application à une fonction ψ en représentation x, en coordonnées polaires (on explicitera l'opération différentiel).
2. En s'appuyant sur le cours, montrer que l'opérateur de moment cinétique $\hat{L}$ peut s'écrire :

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1}$$

3. Expliquer, en vous appuyant sur des méthodes vues dans le cours, pourquoi l'on peut chercher des états stationnaires sous la forme $\psi(r, \theta) = R(r)f(\theta)$, où f est une fonction propre de l'opérateur $\hat{L}$. Écrire la condition de normalisation de la fonction d'onde sous forme de deux conditions de normalisation, l'une sur R et l'autre sur f.

4. On cherche les fonctions f possibles, vecteurs propres de l'opérateur $\hat{L}$. On écrit la valeur propre de f sous la forme $m\hbar$, où m est a priori un réel. Quelle équation vérifie f ? Donner sa solution et en déduire une condition de quantification sur m. Comment se traduit la condition de normalisation sur f ?
5. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$. On introduira la quantité a telle que $E = \hbar^2/(2\mu a^2)$. Quelle est la dimension de la quantité a ?
6. On adimensionne l'équation en posant : $g(\rho) = \sqrt{\rho} R(a\rho)$, où a est une longueur caractéristique et $\rho = r/a$ est la distance adimensionnée. Montrer tout d'abord que :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, g''(\rho) = a^2 \left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r} - \frac{R(r)}{4r^2} \right)$$

   En déduire que g vérifie une équation différentielle que l'on écrira. On posera $\varepsilon = -\dfrac{2\mu a^2 E}{\hbar^2}$. Comment se traduit sur g la contrainte de normalisation de R vue à la question 4 ?
7. On suppose que $V(r) = \alpha/r^2$ (ce n'est pas un potentiel coulombien). Montrer que l'équation différentielle en g devient :

$$g'' + \frac{K}{\rho^2} g = \varepsilon\, g$$

   où l'on exprimera la constante K en fonction de μ, m, $\hbar$ et α. Pour les états de moment angulaire nul, montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la constante K s'annule. Quel est le signe de ε dans ce cas ?
8. Résoudre dans ce cas, l'équation sur g. Que peut-on en conclure ?

2 Collisions de particules relativistes

On considère une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un repère lié au laboratoire (avec un facteur de Lorentz associé γ), qui vient heurter une autre particule de masse m, cette dernière étant au repos dans le même repère. Après la collision, les particules ont respectivement des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, toujours dans le même repère.

1. Écrire la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le repère lié au laboratoire.
2. En déduire que l'on a :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right)$$

   où γ_1 et γ_2 sont les facteurs de Lorentz associés aux deux particules après la collision.
3. Montrer que dans la limite des basses vitesses, les particules s'en vont dans des directions perpendiculaires l'une de l'autre. Quel est l'angle entre les directions d'éloignement des particules dans le repère du centre de masse du système des deux particules ?
4. Si les deux particules sont des électrons, et que la première particule a été accélérée par un potentiel de 500 kV, quelle est sa vitesse ? Quel est le facteur γ correspondant ?
5. On suppose maintenant que la première particule n'est plus massive, mais que c'est un photon. Il vient heurter une particule de masse m au repos. On appelle cette fois $\vec{p}_1$ l'impulsion du photon avant la collision, $\vec{p}_2$ son impulsion après la collision, et $\vec{v}$ la vitesse de la particule m après la

collision (attention au changement de notation). En suivant un raisonnement analogue aux questions précédentes, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{mc}\,(1 - \cos\theta)$$

où $p_1 = |\vec{p}_1|$, $p_2 = |\vec{p}_2|$, et θ est l'angle entre $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$.

3 Exercices courts

3.1 Mouvement de spin

On considère une particule de spin 1/2 qui se trouve à $t = 0$ dans l'état propre de $\hat{S}_{\vec{u}}$ avec la valeur propre $+\hbar/2$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Cette particule est plongée dans un champ magnétique homogène $\vec{B}$ dirigé suivant Oz : $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. En raison de son moment angulaire intrinsèque $\vec{S}$ (son spin), elle porte un moment magnétique $\vec{M}$ proportionnel à $\vec{S}$, tel que $\vec{M} = \gamma\,\vec{S}$. Son énergie dans le champ magnétique est alors $E = -\vec{M}\cdot\vec{B}$.

1. Donnez l'équation décrivant l'évolution de l'état de la particule au cours du temps. En utilisant la condition initiale, donnez l'état de la particule à tout instant.
2. Existe-t-il un temps τ au bout duquel la particule se retrouve dans son état initial ? Si oui, donnez son expression en fonction des paramètres du problème.
3. Toujours en suivant la même évolution à partir de $t = 0$, on mesure au temps $t = \frac{\tau}{2}$ le spin de la particule dans la direction Ox. Quelles sont les probabilités P_+ et P_- d'obtenir respectivement $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$?

3.2 Orthogonalité

On considère un qubit $|\psi\rangle$ exprimé dans une base orthonormée à deux états quantiques $|0\rangle$ et $|1\rangle$, tel que

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + be^{i\phi}\,|1\rangle$$

où a, b et ϕ sont réels. Donnez dans la même base l'expression de l'état $|\psi_1\rangle$ orthogonal à $|\psi\rangle$ (on n'oubliera pas de vérifier la normalisation de $|\psi_1\rangle$).

Corrigé de l'examen de Physique I
Relativité et Mécanique Quantique

Lundi 7 novembre 2022

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/12/8 pour une note sur 40.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2

Formulaire : gradient et laplacien en coordonnées polaires.

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \qquad , \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

1 Potentiel bidimensionnel à symétrie de rotation

On se pose le problème des états quantiques liés dans un potentiel bidimensionnel à symétrie de rotation. On considère donc une particule quantique de masse μ pouvant se déplacer dans le plan (Oxy). Cette particule est placée dans le potentiel V défini par :

$$V(x, y) = V(r)$$

où r est la distance du point (x, y) au centre O du repère.

1. Écrire le hamiltonien $\hat{H}$ du système dans sa forme générale en fonction des opérateurs $\hat{p}$ et $\hat{V}$, puis écrire son application à une fonction ψ en représentation x, en coordonnées polaires (on explicitera l'opération différentiel).

   Réponse :

   Le hamiltonien du système s'écrit comme somme des parties cinétique et potentielle :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \hat{V}$$

   Dans la représentation x, en coordonnées polaires, cela donne :

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + V\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right] + V\psi$$

2. En s'appuyant sur le cours, montrer que l'opérateur de moment cinétique $\hat{L}$ peut s'écrire :

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{1}$$

Réponse :

De la même façon que pour la recherche des orbitales atomiques de l'hydrogène, on peut utiliser l'invariance par rotation pour chercher des vecteurs propres de l'opérateur associé à la conservation du moment cinétique. Comment tout l'exercice se situe dans le plan, le seul moment cinétique qui demeure ici par rapport au cas 3D est suivant Oz :

$$\hat{L} = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x$$

Cet opérateur correspond en fait à l'opérateur $\hat{L}_z$ dans le problème à symétrie sphérique à 3 dimensions. On peut donc reprendre l'expression trouvée dans le cours (l'angle φ à 3D correspondant à l'angle θ à 2D) :

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Une autre possibilité est de reprendre le calcul effectué en 3D, mais à deux dimensions cette fois. Le gradient en coordonnées polaires s'écrit $\vec{\nabla}f = (\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta})$, d'où :

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}} = \hat{r}\vec{e}_r \wedge \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right) = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z = \hat{L}\,\vec{e}_z$$

L'écriture est vectorielle, mais l'opérateur est en fait scalaire car il n'a qu'une seule composante.

3. Expliquer, en vous appuyant sur des méthodes vues dans le cours, pourquoi l'on peut chercher des états stationnaires sous la forme $\psi(r,\theta) = R(r)f(\theta)$, où f est une fonction propre de l'opérateur $\hat{L}$. Écrire la condition de normalisation de la fonction d'onde sous forme de deux conditions de normalisation, l'une sur R et l'autre sur f.

Réponse :

Les états stationnaires sont des états propres de l'opérateur hamiltonien. Le hamiltonien possédant la symétrie de rotation, il commute donc avec $\hat{L}$. On peut alors chercher ses vecteurs propres comme également vecteurs propres de $\hat{L}$. Comme vu dans le cours pour les orbitales atomiques de l'atome d'hydrogène, en représentation x, les fonctions de ces vecteurs sont alors séparables suivant les degrés de liberté (r,θ).
La condition de normalisation de la fonction d'onde s'écrit :

$$\iint |\psi(r,\theta)|^2\, r dr d\theta = 1 = \int_0^{+\infty} |R(r)|^2\, r dr \times \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

On peut donc séparer la condition de normalisation en deux conditions :

$$\int_0^{+\infty} |R(r)|^2\, r dr = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 1$$

4. On cherche les fonctions f possibles, vecteurs propres de l'opérateur $\hat{L}$. On écrit la valeur propre de f sous la forme $m\hbar$, où m est a priori un réel. Quelle équation vérifie f ? Donner sa solution et en déduire une condition de quantification sur m. Comment se traduit la condition de normalisation sur f ?

   Réponse :

   Par définition, la fonction f doit vérifier :

$$\hat{L}f = m\hbar\, f \qquad \text{soit} \qquad \frac{\hbar}{i} f'(\theta) = m\hbar\, f(\theta)\,, \qquad \text{ou encore} \qquad f'(\theta) = im f(\theta).$$

   La solution de cette équation différentielle est $f(\theta) = A\, e^{im\theta}$. La condition de périodicité en $\theta = 2\pi$ impose donc que m soit entier. On détermine A en utilisant la condition de la normalisation vue à la question précédente :

$$1 = \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |A|^2 d\theta = 2\pi |A|^2 \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

   On peut prendre A réel positif sans perte de généralité, car la fonction d'onde est définie à un facteur de phase près.

5. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$. On introduira la quantité a telle que $E = \hbar^2/(2\mu a^2)$. Quelle est la dimension de la quantité a ?

   Réponse :

   Si l'on suppose que la fonction d'onde de l'état stationnaire prend la forme séparable $\psi(r,\theta) = R(r)f(\theta)$ de la question 3, alors le terme $\partial^2/\partial\theta^2$ de l'équation de Schrödinger devient un simple multiplication par $-m^2$. L'équation satisfaite par R s'obtient alors en substituant cette forme dans l'équation $\hat{H}\psi = E\psi$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}R\right] + V(r)\,R = E\,R$$

   soit encore

$$\frac{1}{r}\big(rR'\big)' - \frac{m^2}{r^2}R - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}R = E\,R$$

   ou

$$R'' + \frac{R'}{r} - \frac{m^2}{r^2}R - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}R = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}\,R$$

6. On adimensionne l'équation en posant : $g(\rho) = \sqrt{\rho}R(a\rho)$, où a est une longueur caractéristique et $\rho = r/a$ est la distance adimensionnée. Montrer tout d'abord que :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, g''(\rho) = a^2\left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r} - \frac{R(r)}{4r^2}\right)$$

   En déduire que g vérifie une équation différentielle que l'on écrira. On posera $\varepsilon = -\dfrac{2\mu a^2 E}{\hbar^2}$. Comment se traduit sur g la contrainte de normalisation de R vue à la question 4 ?

   Réponse :

On utilise l'identité : $(f_1 f_2)'' = f_1'' f_2 + 2 f_1' f_2' + f_1 f_2''$, avec $f_1 = \sqrt{\rho}$ et $f_2 = R(a\rho)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, g'' &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[-\frac{1}{4}\rho^{-3/2} R(a\rho) + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\,\frac{d}{d\rho} R(a\rho) + \sqrt{\rho}\,\frac{d^2}{d\rho^2} R(a\rho)\right] \\ &= a^2 R''(r) + a\frac{R'(r)}{\rho} - \frac{1}{4\rho^2} R(r) = a^2\left[R''(r) + \frac{R'(r)}{r} - \frac{R(r)}{4r^2}\right]\end{aligned}$$

On voit que les deux premiers termes de l'équation différentielle satisfaite par R à la question précédente sont aussi les deux premiers termes de l'expression ci-dessus. On multiplie donc par a^2 l'équation différentielle en R :

$$a^2\left[R'' + \frac{R'}{r} - \frac{m^2}{r^2} R - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} R\right] = -\frac{2\mu a^2 E}{\hbar^2} R$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, g'' + \frac{a^2}{4r^2} R(r) - \frac{m^2 a^2}{r^2} R - \frac{2\mu a^2 V(r)}{\hbar^2} R = -\frac{2\mu a^2 E}{\hbar^2} R$$

et donc, en multipliant tout par $\sqrt{\rho}$:

$$g'' + \frac{g}{4\rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2} g - \frac{2\mu a^2 V(a\rho)}{\hbar^2} g = -\frac{2\mu a^2 E}{\hbar^2} g = \varepsilon\, g$$

La contrainte de normalisation sur R devient :

$$1 = \int_0^{+\infty} |R(r)|^2\, r dr = \int_0^{+\infty} |\sqrt{a\rho} R(a\rho)|^2\, d(a\rho) = a^2 \int_0^{+\infty} |g(\rho)|^2\, d\rho$$

donc

$$\int_0^{+\infty} |g(\rho)|^2\, d\rho = a^{-2}$$

7. On suppose que $V(r) = \alpha/r^2$ (ce n'est pas un potentiel coulombien). Montrer que l'équation différentielle en g devient :

$$g'' + \frac{K}{\rho^2} g = \varepsilon\, g$$

où l'on exprimera la constante K en fonction de μ, m, $\hbar$ et α. Pour les états de moment angulaire nul, montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la constante K s'annule. Quel est le signe de ε dans ce cas ?

Réponse :

Si $V(r) = -\alpha/r^2$, alors l'équation différentielle devient :

$$g'' + \frac{g}{4\rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2} g - \frac{2\mu a^2 \alpha}{\hbar^2 (a\rho)^2}\, g = \varepsilon\, g$$

soit

$$g'' + \frac{K}{\rho^2} g = \varepsilon\, g \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{1}{4} - m^2 - \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}$$

Si $m = 0$, alors $K = 0$ pour $\alpha = \dfrac{\hbar^2}{8\mu}$.

On voit donc que α est positif. Par conséquent, le potentiel V est positif, ce qui implique que les valeurs propres du hamiltonien aussi (car l'énergie cinétique est toujours positive). ε est donc négatif.

8. Résoudre dans ce cas, l'équation sur g. Que peut-on en conclure ?

   Réponse :

   L'équation différentielle est simplement $g'' = \varepsilon\, g$, avec $\varepsilon < 0$. Ses solutions sont forcément des combinaisons linéaires de $\sin(\rho)$ et $\cos(\rho)$. Elles ne sont donc pas normalisables sur $\mathbb{R}^2$. C'est normal car, si $\alpha > 0$, les énergies sont positives, le potentiel n'est pas confinant et donc ce n'est pas un puits. Pour avoir des solutions normalisables, il faut borner le domaine, par exemple, à l'intérieur d'un disque de rayon r_0.

2 Collisions de particules relativistes

On considère une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un repère lié au laboratoire (avec un facteur de Lorentz associé γ), qui vient heurter une autre particule de masse m, cette dernière étant au repos dans le même repère. Après la collision, les particules ont respectivement des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, toujours dans le même repère.

1. Écrire la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le repère lié au laboratoire.

   Réponse :

   Le quadrivecteur énergie-impulsion du système particule incidente + particule au repos, dans le repère du laboratoire, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} E_S \\ \vec{p_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{et} \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

   Après la collision, ce même vecteur énergie-impulsion vaut On a donc

$$\begin{pmatrix} E_S \\ \vec{p_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \vec{p}_i = \gamma_i m \vec{v}_i \quad \text{et} \quad E_i = \sqrt{p_i^2c^2 + m^2c^4}$$

   La conservation de l'énergie-impulsion débouche donc sur deux équations :

$$E_1 + E_2 = E + mc^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

2. En déduire que l'on a :

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)$$

   où γ_1 et γ_2 sont les facteurs de Lorentz associés aux deux particules après la collision.

   Réponse :

   Pour simplifier, on se place dans un système d'unités où $c = 1$ et on prend le carré de la conservation de l'impulsion, ce qui donne :

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

   et on exprime les carrés d'impulsions en fonction des énergies

$$E^2 - m^2 = E_1^2 - m^2 + E_2^2 - m^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

On utilise alors la conservation de l'énergie pour obtenir $(E+m)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$, que l'on réinjecte dans l'équation précédente :

$$2E_1E_2 - 2mE = 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

On utilise alors les relations $E = \gamma m$ et $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ appliquées à toutes les particules :

$$2\gamma_1\gamma_2\, m^2 - 2\gamma m^2 = 2\gamma_1\gamma_2\, m^2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

Il suffit alors de diviser tout par $2m^2$ pour obtenir la relation : $\gamma = \gamma_1\gamma_2\,(1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$.

3. Montrer que dans la limite des basses vitesses, les particules s'en vont dans des directions perpendiculaires l'une de l'autre. Quel est l'angle entre les directions d'éloignement des particules dans le repère du centre de masse du système des deux particules ?

   Réponse :

   Dans la limite des basses vitesses, les facteurs γ sont égaux à 1 au premier ordre en $\beta = v/c$. La relation précédente s'écrit donc au premier ordre : $1 = 1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, soit $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Les vitesses après la collision sont donc orthogonales.

   Dans le repère du centre de masse, la somme des impulsions est nulle. Les directions des impulsions, et donc des vitesses, sont par conséquent opposées. L'angle entre les directions d'éloignement est π.

4. Si les deux particules sont des électrons, et que la première particule a été accélérée par un potentiel de 500 kV, quelle est sa vitesse ? Quel est le facteur γ correspondant ?

   Réponse :

   La masse au repos de l'électron est d'environ 500 keV/c^2. Si un électron est accéléré par un potentiel de 500 kV, alors son énergie cinétique est également de 500 keV/c^2. Or l'énergie cinétique T est l'énergie totale à laquelle on a ôté l'énergie au repos : $T = E - mc^2$. Ceci implique que l'énergie totale est le double de l'énergie de masse. Par conséquent

$$E = 2mc^2 = \gamma mc^2 \qquad \text{soit} \qquad \gamma = 2$$

   La vitesse correspondante est telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \qquad \text{d'où} \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{ou encore} \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c \approx 0,86\ c$$

5. On suppose maintenant que la première particule n'est plus massive, mais que c'est un photon. Il vient heurter une particule de masse m au repos. On appelle cette fois $\vec{p}_1$ l'impulsion du photon avant la collision, $\vec{p}_2$ son impulsion après la collision, et $\vec{v}$ la vitesse de la particule m après la collision (attention au changement de notation). En suivant un raisonnement analogue aux questions précédentes, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{mc}\,(1 - \cos\theta)$$

   où $p_1 = |\vec{p}_1|$, $p_2 = |\vec{p}_2|$, et θ est l'angle entre $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$.

   Réponse :

On réécrit la conservation de l'énergie et de l'impulsion, en appelant E l'énergie de la particule après la collision (en n'oubliant pas que l'énergie du photon s'écrit pc, si p est le module de son impulsion) :

$$p_1 c + mc^2 = p_2 c + E \qquad \text{et} \qquad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}$$

On se replace dans un système d'unités où $c = 1$. On écrit le carré de l'impulsion de la particule de masse m après la collision :

$$p^2 = E^2 - m^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos\theta$$

On utilise la conservation de l'énergie pour exprimer E^2 :

$$(p_1 - p_2 + m)^2 - m^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos\theta$$

soit

$$-2p_1p_2 + 2m(p_1 - p_2) = -2p_1p_2 \cos\theta \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{p_1 - p_2}{p_1p_2} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta)$$

3 Exercices courts

3.1 Mouvement de spin

On considère une particule de spin 1/2 qui se trouve à $t = 0$ dans l'état propre de $\hat{S}_{\vec{u}}$ avec la valeur propre $+\hbar/2$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Cette particule est plongée dans un champ magnétique homogène $\vec{B}$ dirigé suivant Oz : $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. En raison de son moment angulaire intrinsèque $\vec{S}$ (son spin), elle porte un moment magnétique $\vec{M}$ proportionnel à $\vec{S}$, tel que $\vec{M} = \gamma\,\vec{S}$. Son énergie dans le champ magnétique est alors $E = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

1. Donnez l'équation décrivant l'évolution de l'état de la particule au cours du temps. En utilisant la condition initiale, donnez l'état de la particule à tout instant.

   Réponse :

   L'équation d'évolution est l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial t}$$

   Le hamiltonien est donné par l'énergie magnétique :

$$\hat{H} = -\hat{\vec{M}} \cdot \vec{B} = -\gamma B\,\hat{S}_z$$

   Si l'on écrit l'état $|\psi\rangle = \alpha\,|z+\rangle + \beta\,|z-\rangle$, dans la base des états propres de $\hat{S}_z$, alors l'équation de Schrödinger devient :

$$-\gamma B \times \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}$$

   ce qui se traduit par les deux équations scalaires suivantes :

$$\dot{\alpha} = i\omega\,\alpha \qquad \text{et} \qquad \dot{\beta} = -i\omega\,\beta\,, \qquad \text{en posant} \qquad \omega = \frac{\gamma B}{2}$$

La solution générale est donc : $|\psi(t)\rangle = \alpha(0)\, e^{i\omega t}\, |z+\rangle + \beta(0)\, e^{-i\omega t}\, |z-\rangle$
où $\alpha(0)$ et $\beta(0)$ sont les coefficients de décomposition de l'état initial dans la base $(|z+\rangle\,, |z-\rangle)$. Pour les connaître, on exprime la matrice de $\hat{S}_{\vec{u}}$ en utilisant les matrices de Pauli :

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre (α, β) associé à la valeur propre $+\hbar/2$ vérifie :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) = \alpha\,, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \left(\sqrt{2} - 1\right)\alpha$$

Or $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (on peut prendre les coefficients réels), d'où :

$$\alpha^2\left(1 + (\sqrt{2}-1)^2\right) = 1\,, \qquad \text{soit} \qquad \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \beta(0) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

2. Existe-t-il un temps τ au bout duquel la particule se retrouve dans son état initial ? Si oui, donnez son expression en fonction des paramètres du problème.

   Réponse :

   Il faut pour cela que le rapport entre les coefficients de la décomposition soient identiques à t et $t = 0$ (l'état est le même à un facteur de phase totale près), et donc que :

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\,, \qquad \text{et donc} \qquad e^{2i\omega t} = 1$$

   Le premier temps τ qui vérifie cela est tel que $\omega\tau = \pi$, soit $\tau = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\gamma B}$.

3. Toujours en suivant la même évolution à partir de $t = 0$, on mesure au temps $t = \frac{\tau}{2}$ le spin de la particule dans la direction Ox. Quelles sont les probabilités P_+ et P_- d'obtenir respectivement $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$?

   Réponse :

   Les vecteurs propres de $\hat{S}_x$ sont respectivement $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ dans la base des états propres de $\hat{S}_z$. Les probabilités d'obtenir $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ sont donc :

$$\begin{cases} P_+(t) & = |\langle x+|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\alpha(t) + \beta(t)|^2 \\ P_-(t) & = |\langle x-|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\alpha(t) - \beta(t)|^2 \end{cases}$$

   Au bout d'un temps $\tau/2$, on a $e^{i\omega\tau/2} = i$, d'où

$$P_+\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2}|i\alpha(0) - i\beta(0)|^2 = \frac{1}{2}|\alpha(0) - \beta(0)|^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2(4-2\sqrt{2})} = \frac{1}{4}, \qquad \text{et donc} \quad P_-\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

3.2 Orthogonalité

On considère un qubit $|\psi\rangle$ exprimé dans une base orthonormée à deux états quantiques $|0\rangle$ et $|1\rangle$, tel que

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + be^{i\phi}\,|1\rangle$$

où a, b et ϕ sont réels. Donnez dans la même base l'expression de l'état $|\psi_1\rangle$ orthogonal à $|\psi\rangle$ (on n'oubliera pas de vérifier la normalisation de $|\psi_1\rangle$).

Réponse :

Si l'on pose $|\psi_1\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, le produit scalaire (sesquilinéaire) entre $|\psi\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ s'écrit :

$$\langle\psi|\psi_1\rangle = \alpha a + b\beta\, e^{-i\phi} = 0$$

On voit facilement que le couple $(\alpha, \beta) = (-b, ae^{i\phi})$ satisfait la condition d'orthognalité. Par ailleurs la somme des modules carrés des coefficients est identique à celle de l'état $|\psi\rangle$, donc l'état est bien normalisé également. La réponse est donc (à un facteur de phase total près) :

$$|\psi\rangle = -b\,|0\rangle + ae^{i\phi}\,|1\rangle$$

Examen de Physique II
Physique Statistique

Jeudi 26 janvier 2023

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Poly de Physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Il est demandé de donner des explications claires et complètes ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/6/4 pour une note sur 30.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06 \times 10^{-34}$ J·s , vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m·s^{-1} ,
charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2,
constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}, masse du nucléon : $m_N \approx 1$ Gev/c^2.
magnéton nucléaire : $\mu_N = \dfrac{e\hbar}{2m_N} \approx 5.10^{-27}$ J/T

On rappelle en outre qu'à température ambiante, $k_BT \approx \dfrac{1}{40}$ eV.

Formulaire

L'équation "$x\tanh(x) = 1$" ne possède qu'une seule solution positive, $x_0 \approx 1,2$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Modélisation de la matière magnétique

Le but de l'exercice est de modéliser avec une complexité croissante un système magnétique constitué de N spins 1/2, où le nombre N est fixé (et supposé très grand). Chaque spin est porté par un atome différent (au sein d'un cristal), et ce spin confère à l'atome un moment magnétique $\vec{\mu} = \gamma_N \vec{S}$, où $\gamma_N = e/m_N$ est le rapport gyromagnétique de l'atome (supposé égal à celui du proton. NB : le 'N' en indice de γ_N et μ_N signifie « nucléaire » et n'a rien à voir avec N, le nombre total de spins). Le système complet est placé à une température donnée T.

1. On suppose que les spins sont indépendants et qu'ils ne peuvent prendre que deux valeurs possibles dans la direction Oz, $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$. Le système complet est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Le seul type d'énergie intervenant dans le problème est l'énergie magnétique donnée par $E = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Dans quel ensemble thermodynamique se place-t-on naturellement pour décrire le système ? Écrire la fonction de partition du système complet comme une fonction simple de N, T et $\varepsilon = \gamma\hbar B/2$.

2. En déduire l'énergie libre du système, l'énergie moyenne du système, puis la capacité calorifique du système en fonction du paramètre $\beta = 1/(k_B T)$, pour un champ magnétique donné. Vérifier l'homogénéité de vos formules.
3. Tracer la forme de la courbe $C(\beta)$ de la capacité calorifique en fonction de β, pour β allant de $-\infty$ à $+\infty$. Pour quelle(s) valeur(s) de β cette capacité calorifique est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? (On donnera numériquement le facteur intervenant dans la formule de $\max(C)$). Expliquer ce résultat en analysant qualitativement les limites basse et haute température.
4. Quelle est la valeur numérique de la température correspondant à la capacité calorifique maximale pour un système de spins atomiques plongé dans un champ magnétique de 1 tesla ? Quel commentaire pouvez-vous faire à partir de cette valeur ?
5. On considère maintenant que les spins sont en fait représentés de manière classique par un vecteur de norme $\hbar/2$ qui fait un angle θ avec l'axe Oz ($\theta \in [0, \pi]$). On suppose que les positions possibles de ce vecteur se situent dans un plan Oxz constant. Un micro-état du système est alors donné par l'ensemble des angles $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ de chacun des spins avec la direction Oz. Écrire l'expression de U, l'énergie totale du système, en fonction de ε et des $\{\theta_i\}$.
6. Écrire la fonction de partition du système, que l'on exprimera à partir d'une intégrale simple dépendant de N, β et ε (on suppose que les états de spin sont répartis de façon uniforme sur toutes les valeurs de l'angle θ, soit l'équivalent d'une densité d'états constante). On ne cherchera pas particulièrement à normaliser la densité d'états ou la fonction de partition. En déduire l'expression formelle de l'énergie moyenne du système comme rapport entre deux intégrales que l'on ne cherchera pas à calculer pour le moment.
7. On s'intéresse à la limite haute température. En utilisant un développement au premier ordre de e^x autour de $x = 0$, donner un comportement asymptotique (au premier ordre en β) de l'énergie moyenne en fonction de N, k_B, ε et T. En déduire le comportement asymptotique de la capacité calorifique $C(T)$. Commenter la différence entre cette expression et celle trouvée à la question 2.
8. On s'intéresse maintenant à la limite basse température. En justifiant que le support des intégrales est essentiellement contenu dans un intervalle $\theta \in [0, \pi/2]$ sur lequel on peut utiliser l'approximation $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$, montrer que l'on peut écrire $\bar{U}$ sous la forme :

$$\bar{U}(T) = -N\varepsilon\,(1 - A)$$

où l'on exprimera A en fonction des paramètres du problème (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sqrt{\frac{\beta\varepsilon}{2}}\,\theta$). En déduire le comportement asymptotique de $\bar{U}(T)$ et de $C(T)$. Comparer avec le résultat de la question 2 (spin à deux états).

2 Fluctuations d'une masse suspendue à un ressort

On considère une masse m suspendue verticalement au bout d'un ressort de raideur k, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Le but de l'exercice est de calculer les fluctuations de position et de vitesse de la masse autour de sa position d'équilibre. On suppose que le mouvement de la masse est unidimensionnel le long d'un axe Ox orienté verticalement vers le haut, l'origine étant pris au point d'équilibre du ressort. On appelle $x(t)$ la position de la masse au cours du temps et $p(t)$ sa quantité de mouvement. On suppose qu'il n'y pas de limite vers le haut ou vers le bas à la position de la masse.

1. Quelle est l'énergie mécanique E_m de la masse à tout instant en fonction de x et de p ?
2. On suppose que la masse est dans un milieu à température T fixée. Quel est l'ensemble thermodynamique naturel pour étudier le problème ? En déduire la fonction de partition $Z(\beta)$ de la masse sous la forme d'une intégrale sur l'espace des phases où on ne cherchera pas à introduire de volume élémentaire dû à la physique quantique.
3. Factoriser la fonction de partition en un produit de deux termes, $Z(\beta) = Z_1(\beta)Z_2(\beta)$, le premier pour la contribution en x et le second pour celle en p. Simplifier et exprimer Z_1 et Z_2 comme deux fonctions de β, m, g et k, et en déduire l'expression finale simple de $Z(\beta)$. Donner les distributions de probabilité respectives des valeurs de x et des valeurs de p à l'équilibre thermodynamique.
4. En déduire l'énergie moyenne de la masse plongée dans un environnement à température T, ainsi que sa capacité calorifique.

3 Exercice court : potentiel chimique d'un gaz de fermions 2D

Donner la relation entre le potentiel chimique μ, la température T et le nombre de particules N pour une population de fermions de spin 1/2, de masse m, sans interaction, dans une boîte bidimensionnelle de « volume » S (donc en fait une surface). En déduire l'expression du potentiel chimique sous la forme d'une fonction simple de la densité $\rho = N/S$ et de la température T. Quelle est sa limite quand T tend vers 0 ? Quel nom porte cette valeur ?

Corrigé de l'examen de Physique II
Physique Statistique

Jeudi 26 janvier 2023

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Poly de Physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Il est demandé de donner des explications claires et complètes ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/6/4 pour une note sur 30.*

Constantes :
constante de Planck : $\hbar = 1,06 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s , vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} ,
charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2,
constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}, masse du nucléon : $m_N \approx 1$ GeV/c^2.
magnéton nucléaire : $\mu_N = \dfrac{e\hbar}{2m_N} \approx 5.10^{-27}$ J/T
On rappelle en outre qu'à température ambiante, $k_B T \approx \dfrac{1}{40}$ eV.

Formulaire
L'équation "$x \tanh(x) = 1$" ne possède qu'une seule solution positive, $x_0 \approx 1,2$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad , \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Modélisation de la matière magnétique

Le but de l'exercice est de modéliser avec une complexité croissante un système magnétique constitué de N spins 1/2, où le nombre N est fixé (et supposé très grand). Chaque spin est porté par un atome différent (au sein d'un cristal), et ce spin confère à l'atome un moment magnétique $\vec{\mu} = \gamma_N \vec{S}$, où $\gamma_N = e/m_N$ est le rapport gyromagnétique de l'atome (supposé égal à celui du proton. NB : le 'N' en indice de γ_N et μ_N signifie « nucléaire » et n'a rien à voir avec N, le nombre total de spins). Le système complet est placé à une température donnée T.

1. On suppose que les spins sont indépendants et qu'ils ne peuvent prendre que deux valeurs possibles dans la direction Oz, $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$. Le système complet est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Le seul type d'énergie intervenant dans le problème est l'énergie magnétique donnée par $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Dans quel ensemble thermodynamique se place-t-on naturellement pour décrire le système ? Écrire la fonction de partition du système complet comme une fonction simple de N, T et $\varepsilon = \gamma\hbar B/2$.

Réponse :

Chaque spin ne peut prendre que deux états possibles, dont les énergies sont respectivement $-\gamma\hbar B/2 = -\varepsilon$ et $\gamma\hbar B/2 = \varepsilon$. La température étant fixée, ainsi que le nombre de spins, l'ensemble naturel pour décrire le système est l'ensemble canonique. Les spins étant indépendants et situés sur des atomes différents, la fonction de partition totale se factorise :

$$Z = z^N \qquad \text{où} \qquad z = e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}$$

On a donc : $Z(T, N, \varepsilon) = \left[2\cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)\right]^N$.

2. En déduire l'énergie libre du système, l'énergie moyenne du système, puis la capacité calorifique du système en fonction du paramètre $\beta = 1/(k_B T)$, pour un champ magnétique donné. Vérifier l'homogénéité de vos formules.

Réponse :

On peut réécrire la fonction de partition sous la forme $Z = [2\cosh(\beta\varepsilon)]^N$. Par conséquent, l'énergie libre du système est :

$$F = -k_B T \ln Z = -N\,\frac{\ln(2\cosh(\beta\varepsilon))}{\beta}$$

L'énergie moyenne du système est, quant à elle :

$$\bar{U} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon)$$

On en déduit la capacité calorifique :

$$C(\beta) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} = \frac{d\beta}{dT}\cdot\frac{\partial \bar{U}}{\partial \beta} = -k_B\beta^2 \times \frac{-N\varepsilon^2}{\cosh^2(\beta\varepsilon)} = Nk_B\left(\frac{(\beta\varepsilon)}{\cosh(\beta\varepsilon)}\right)^2$$

La quantité $(\beta\varepsilon)$ étant sans dimension, la première formule est bien homogène à une énergie (terme $1/\beta$), la deuxième formule est aussi homogène à une énergie (terme ε), et la troisième à une capacité calorifique (terme k_B).

3. Tracer la forme de la courbe $C(\beta)$ de la capacité calorifique en fonction de β, pour β allant de $-\infty$ à $+\infty$. Pour quelle(s) valeur(s) de β cette capacité calorifique est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? (On donnera numériquement le facteur intervenant dans la formule de $\max(C)$). Expliquer ce résultat en analysant qualitativement les limites basse et haute température.

Réponse :

La courbe $C(\beta)$ est paire : on peut donc se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction positive qui s'annule en $x = 0$ et en $x \to +\infty$. Elle doit donc atteindre un maximum sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère alors la fonction $f(x) = x^2/\cosh^2(x)$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = 2\frac{x}{\cosh(x)}\left(\frac{\cosh(x) - x\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\right) = \frac{2x(1 - x\tanh(x))}{\cosh^2(x)}$$

Cette dérivée s'annule en $x = 0$ (minimum de la fonction), ainsi qu'aux points vérifiant $1 = x\tanh(x)$, soit le point $x = x_0 \approx 1,2$, défini dans le formulaire. La fonction est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, +\infty($. Au total, le graphe de la fonction est celui de la figure 1.

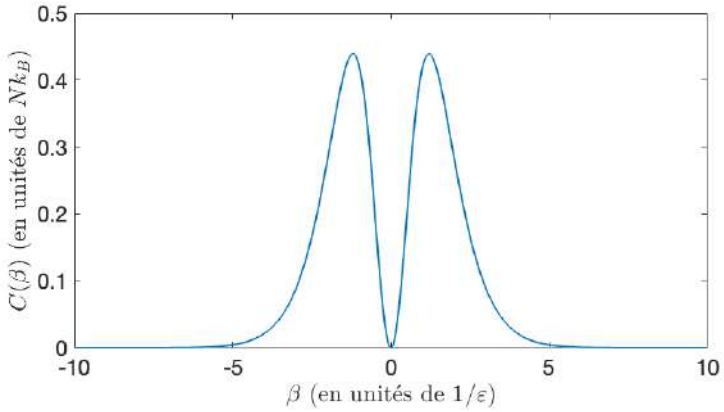


FIGURE 1 – Capacité calorifique en fonction du paramètre β.

La capacité calorifique est donc maximale aux points $\beta_0 = x_0/\varepsilon$ et $-\beta_0$, et sa valeur est :

$$C(\beta_0) = Nk_B \left(\frac{(\beta_0\varepsilon)}{\cosh(\beta_0\varepsilon)}\right)^2 = Nk_B \frac{x_0^2}{\cosh^2(x_0)}$$

Or

$$\frac{1}{\cosh^2(x_0)} = 1 - \tanh^2(x_0) = 1 - \frac{1}{x_0^2}$$

d'où finalement :

$$C(\beta_0) = Nk_B \frac{x_0^2}{\cosh^2(x_0)} = Nk_B(x_0^2 - 1) \approx 0,44\, Nk_B$$

On peut comprendre ce résultat en regardant les deux limites. La limite $T = 0$ correspond à $\beta = +\infty$. Dans ce cas, l'énergie devient pratiquement indépendante de β (limite de tanh) et vaut $\bar{U} \approx -N\varepsilon$. La capacité calorifique est donc nulle. La limite $T = +\infty$ correspond à $\beta = 0$. L'énergie dépend bien de β, mais elle tend vers 0 (désordre maximal, autant de spin vers le haut que vers le bas) et donc la courbe $\bar{U}(T)$ possède une asymptote horizontale. $C(T)$ tend donc vers 0. L'efficacité maximale de stockage de l'énergie se situe donc à une température intermédiaire, lorsque k_BT est de l'ordre de ε ($k_BT \approx \varepsilon/1,2$ précisément).

4. Quelle est la valeur numérique de la température correspondant à la capacité calorifique maximale pour un système de spins atomiques plongé dans un champ magnétique de 1 tesla ? Quel commentaire pouvez-vous faire à partir de cette valeur ?

Réponse :

D'après le formulaire, $\dfrac{\gamma_N\hbar}{2} = \mu_N$, donc :

$$\text{A.N. :} \qquad T = \frac{\varepsilon}{1,2k_B} = \frac{\gamma_N\hbar B}{2\times 1,2\,k_B} = \frac{\mu_N B}{1,2\,k_B} = \frac{5.10^{-27}\ \text{J/T} \times 1\ \text{T}}{1,2\times 1,38.10^{-23}\ \text{J/K}} \approx 3.10^{-4}\ \text{K} = 0,3\ \text{mK}$$

Cette valeur montre que ce système peut être efficace pour effectuer des transferts d'énergie même à très basse température. Le refroidissement magnétique est ainsi exploité pour refroidir des systèmes à des températures de quelques fractions de kelvin.

5. On considère maintenant que les spins sont en fait représentés de manière classique par un vecteur de norme $\hbar/2$ qui fait un angle θ avec l'axe Oz ($\theta \in [0, \pi]$). On suppose que les positions possibles de ce vecteur se situent dans un plan Oxz constant. Un micro-état du système est alors donné par l'ensemble des angles $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ de chacun des spins avec la direction Oz. Écrire l'expression de U, l'énergie totale du système, en fonction de ε et des $\{\theta_i\}$.

   Réponse :

   L'énergie d'un spin est toujours donnée par la formule $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma_N \vec{S} \cdot \vec{B} = -\mu_N B \cos(\theta)$. L'énergie totale du système est donc :

$$U = \sum_{i=1}^{N} (-\mu_N B \cos(\theta_i)) = -\mu_N B \left[\sum_{i=1}^{N} \cos(\theta_i) \right] = -\varepsilon \left[\sum_{i=1}^{N} \cos(\theta_i) \right]$$

6. Écrire la fonction de partition du système, que l'on exprimera à partir d'une intégrale simple dépendant de N, β et ε (on suppose que les états de spin sont répartis de façon uniforme sur toutes les valeurs de l'angle θ, soit l'équivalent d'une densité d'états constante). On ne cherchera pas particulièrement à normaliser la densité d'états ou la fonction de partition. En déduire l'expression formelle de l'énergie moyenne du système comme rapport entre deux intégrales que l'on ne cherchera pas à calculer pour le moment.

   Réponse :

   Les spins étant toujours indépendants, la fonction de partition se factorise. Par ailleurs, l'angle θ va de 0 (spin aligné avec le champ) à π (spin opposé au champ) :

$$Z = z^N \qquad \text{avec} \qquad z(\beta) = \int_0^{\pi} e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)}\, d\theta$$

   L'énergie moyenne du système est donc :

$$\bar{U} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \varepsilon \cos(\theta)\, e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)}\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)}\, d\theta} = -N\varepsilon \left(\frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(\theta)\, e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)}\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)}\, d\theta} \right)$$

7. On s'intéresse à la limite haute température. En utilisant un développement au premier ordre de e^x autour de $x = 0$, donner un comportement asymptotique (au premier ordre en β) de l'énergie moyenne en fonction de N, k_B, ε et T. En déduire le comportement asymptotique de la capacité calorifique $C(T)$. Commenter la différence entre cette expression et celle trouvée à la question 2.

   Réponse :

   On utilise $e^{\beta\varepsilon\cos(\theta)} \approx 1 + \beta\varepsilon\cos(\theta)$. On en déduit :

$$\bar{U} \approx -N\varepsilon \left(\frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \beta\varepsilon \cos^2(\theta)\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \beta\varepsilon\cos(\theta))\, d\theta} \right) = -N\beta\varepsilon^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \right) = -\frac{N\varepsilon^2}{2k_B T}$$

   La capacité calorifique dans cette limite est alors :

$$C(T) = \frac{N k_B}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^2$$

On retrouve la même expression que celle de la question 2, la seule différence résidant dans la présence d'un facteur 2 au dénominateur. Cette différence provient du fait que seuls deux angles sont autorisés dans le premier cas (0 et π), tandis que tous les angles entre ces deux valeurs sont parcourus dans le deuxième cas.

8. On s'intéresse maintenant à la limite basse température. En justifiant que le support des intégrales est essentiellement contenu dans un intervalle $\theta \in [0, \pi/2]$ sur lequel on peut utiliser l'approximation $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$, montrer que l'on peut écrire $\bar{U}$ sous la forme :

$$\bar{U}(T) = -N\varepsilon\,(1 - A)$$

où l'on exprimera A en fonction des paramètres du problème (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sqrt{\frac{\beta\varepsilon}{2}}\,\theta$). En déduire le comportement asymptotique de $\bar{U}(T)$ et de $C(T)$. Comparer avec le résultat de la question 2 (spin à deux états).

Réponse :

Lorsque T tend vers 0, le facteur β tend vers $+\infty$. Les termes dominants dans l'intégrale sont ceux ayant un terme positif dans l'exponentielle, et donc tels que $\cos(\theta) \geq 0$, soit $\theta \in [0, \pi/2]$. On peut alors utiliser l'approximation de $\cos(\theta)$ pour calculer le comportement asymptotique :

$$\bar{U} \approx -N\varepsilon \left(\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \theta^2/2)\, e^{\beta\varepsilon(1-\theta^2/2)}\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\beta\varepsilon(1-\theta^2/2)}\, d\theta} \right) = -N\varepsilon \left(\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \theta^2/2)\, e^{-\beta\varepsilon\theta^2/2}\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-\beta\varepsilon\theta^2/2}\, d\theta} \right) = -N\varepsilon(1 - A)$$

$$\text{avec} \qquad A = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta^2\, e^{-\beta\varepsilon\theta^2/2}\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-\beta\varepsilon\theta^2/2}\, d\theta} = \frac{1}{2}\frac{2}{\beta\varepsilon} \frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\beta\varepsilon}{2}}\frac{\pi}{2}} x^2\, e^{-x^2}\, dx}{\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\beta\varepsilon}{2}}\frac{\pi}{2}} e^{-x^2}\, dx},$$

en effectuant le changement de variable $x = \sqrt{\frac{\beta\varepsilon}{2}}\,\theta$. Lorsque β tend vers $+\infty$, la fraction devient une constante et on a donc (avec le formulaire) :

$$\bar{U} \approx -N\varepsilon \left(1 - \frac{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx} \frac{k_B T}{\varepsilon} \right) = -N\varepsilon \left(1 - \frac{k_B T}{2\varepsilon} \right)$$

La capacité calorifique est alors, de façon asymptotique :

$$C(T) = \frac{d\bar{U}}{dT} = \frac{N k_B}{2}$$

Le comportement asymptotique est cette fois très différent du cas discret. Dans la question 2, on voit que la capacité calorifique s'écroule exponentiellement lorsque $\beta \to +\infty$ ($T \to 0+$), tandis qu'ici elle tend vers une constante ! La raison est que, dans cette question, la présence d'états continument proches du minimum d'énergie $-\varepsilon$ offre en permanence une capacité au système d'explorer des états d'énergie tout juste un peu plus élevée que $-\varepsilon$, tandis que dans le cas discret, il faut effectuer un saut de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ qui devient exponentiellement improbable quant $T \to 0+$.

2 Fluctuations d'une masse suspendue à un ressort

On considère une masse m suspendue verticalement au bout d'un ressort de raideur k, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Le but de l'exercice est de calculer les fluctuations de position et de vitesse de la masse autour de sa position d'équilibre. On suppose que le mouvement de la masse est unidimensionnel le long d'un axe Ox orienté verticalement vers le haut, l'origine étant pris au point d'équilibre du ressort. On appelle $x(t)$ la position de la masse au cours du temps et $p(t)$ sa quantité de mouvement. On suppose qu'il n'y pas de limite vers le haut ou vers le bas à la position de la masse.

1. Quelle est l'énergie mécanique E_m de la masse à tout instant en fonction de x et de p ?

   Réponse :

   L'énergie mécanique est constituée de l'énergie potentielle de la masse dans le champ de pesanteur, de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie cinétique de la masse :

$$E_m = mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p^2}{2m}$$

2. On suppose que la masse est dans un milieu à température T fixée. Quel est l'ensemble thermodynamique naturel pour étudier le problème ? En déduire la fonction de partition $Z(\beta)$ de la masse sous la forme d'une intégrale sur l'espace des phases où on ne cherchera pas à introduire de volume élémentaire dû à la physique quantique.

   Réponse :

   L'ensemble thermodynamique est l'ensemble canonique (température fixée, 1 seul constituant). La fonction de partition s'écrit comme une intégrale sur l'espace des phases

$$Z(\beta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\beta\left(mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p^2}{2m}\right)\right) dxdp$$

3. Factoriser la fonction de partition en un produit de deux termes, $Z(\beta) = Z_1(\beta)Z_2(\beta)$, le premier pour la contribution en x et le second pour celle en p. Simplifier et exprimer Z_1 et Z_2 comme deux fonctions de β, m, g et k, et en déduire l'expression finale simple de $Z(\beta)$. Donner les distributions de probabilité respectives des valeurs de x et des valeurs de p à l'équilibre thermodynamique.

   Réponse :

   Clairement, on a :

$$Z_1(\beta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\beta\left(mgx + \frac{1}{2}kx^2\right)\right) dx \qquad \text{et} \qquad Z_2(\beta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\beta\frac{p^2}{2m}\right) dp$$

   Le premier terme se traite en réécrivant le polynôme du second degré :

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgx = \frac{k}{2}\left(x^2 + \frac{2mgx}{k}\right) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \text{avec} \quad x_0 = -\frac{mg}{k}$$

   x_0 s'interprète comme la position d'équilibre de la masse au bout du ressort. Par conséquent

$$\begin{aligned} Z_1 &= e^{\frac{\beta k}{2}x_0^2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\beta k}{2}(x - x_0)^2\right) dx = e^{\frac{\beta m^2 g^2}{2k}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\beta k}{2}x^2}\, dx \\ &= e^{\frac{\beta m^2 g^2}{2k}} \sqrt{\frac{2}{\beta k}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}} e^{\frac{\beta m^2 g^2}{2k}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la contribution de l'espace p se calcule directement :

$$Z_2(\beta) = \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-u^2\right)\, du = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

Pour finir, on a l'expression suivante de la fonction de partition

$$Z(\beta) = \frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\frac{m}{k}} e^{\frac{\beta m^2 g^2}{2k}}$$

Les distributions de probabilité des valeurs de x et de p se lisent directement dans l'intégrant de la fonction de partition, normalisés par les fonctions de partition associées, soit :

$$P_x(x) = \frac{1}{Z_1}\exp\left(-\beta\left(mgx + \frac{1}{2}kx^2\right)\right) = \sqrt{\frac{\beta k}{2\pi}}\exp\left(-\frac{\beta k}{2}(x-x_0)^2\right)$$
$$P_p(p) = \frac{1}{Z_2}\exp\left(-\beta\frac{p^2}{2m}\right) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi m}}\exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right)$$

Ce sont deux gaussiennes centrées respectivement en $x = x_0$ et en $p = 0$ et d'écarts-types proportionnels à la racine de la température.

4. En déduire l'énergie moyenne de la masse plongée dans un environnement à température T, ainsi que sa capacité calorifique.

Réponse :

l'énergie moyenne et la capacité calorifique sont alors :

$$\bar{U} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{m^2 g^2}{2k} \qquad \text{et} \qquad C(T) = \frac{d\bar{U}}{dT} = k_B$$

Le terme constant dans l'énergie moyenne est l'énergie minimale de la masse à température nulle, sur sa position d'équilibre x_0 :

$$mgx_0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{-m^2g^2}{k} + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = -\frac{m^2g^2}{2k},$$

tandis que l'autre terme est l'énergie thermique. On retrouve une capacité calorifique k_B due aux deux degrés de liberté dont l'énergie dépend de façon quadratique (x pour l'énergie élastique du ressort et p pour l'énergie cinétique de la masse). C'est un cas particulier d'application du théorème d'équipartition. La présence du champ de pesanteur n'ajoute aucune capacité calorifique.

3 Exercice court : potentiel chimique d'un gaz de fermions 2D

Donner la relation entre le potentiel chimique μ, la température T et le nombre de particules N pour une population de fermions de spin 1/2, de masse m, sans interaction, dans une boîte bidimensionnelle de « volume » S (donc en fait une surface). En déduire l'expression du potentiel chimique sous la forme d'une fonction simple de la densité $\rho = N/S$ et de la température T. Quelle est sa limite quand T tend vers 0 ? Quel nom porte cette valeur ?

Réponse :

La première étape consiste à calculer la densité d'états $g(\varepsilon)$ dans la boîte bidimensionnelle. C'est le calcul vu dans la PC4. L'énergie d'une particule est uniquement cinétique (pas d'interaction). Elle vaut $\varepsilon = p^2/2m$, où p est le module l'impulsion. Le nombre d'états d'énergie disponible dans l'intervalle $[p, p+dp]$ est donc :

$$dn = \frac{2\pi p\, dp}{\left(\frac{2\pi\hbar}{L_x} \times \frac{2\pi\hbar}{L_y}\right)} = \frac{S}{2\pi\hbar^2}\, p\, dp = \frac{S}{2\pi\hbar^2}\, d\left(\frac{p^2}{2}\right) = \frac{mS}{2\pi\hbar^2}\, d\varepsilon$$

Il faut doubler cette densité à cause du spin 1/2 (deux états quantiques par état d'énergie possible). On en déduit donc

$$g(\varepsilon) = 2\,\frac{dn}{d\varepsilon} = \frac{mS}{\pi\hbar^2}$$

La deuxième étape consiste à insérer cette expression dans la formule liant le nombre (moyen) de particules au potentiel chimique (elle sort de l'intégrale car elle est indépendante de ε :

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \int_0^{+\infty} \bar{n}(\varepsilon)\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{mS}{\pi\hbar^2}\int_0^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta}\Big[\beta\varepsilon - \ln\Big(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\Big)\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta}\Big[-\ln\Big(e^{-\beta\mu}+e^{-\beta\varepsilon}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta}\Big(-\ln\Big(e^{-\beta\mu}\Big)+\ln\Big(1+e^{-\beta\mu}\Big)\Big) = \frac{mS}{\pi\hbar^2\beta}\ln\Big(1+e^{\beta\mu}\Big)\end{aligned}$$

On inverse cette relation, ce qui donne :

$$\mu = k_B T \ln\left[\exp\left(\frac{\pi\hbar^2\rho}{mk_BT}\right) - 1\right]$$

Quand la température T tend vers 0, le premier terme du logarithme devient prépondérant et on a alors :

$$\lim_{T\to 0+} k_B T \ln\left[\exp\left(\frac{\pi\hbar^2\rho}{mk_BT}\right) - 1\right] = \lim_{T\to 0+}\left(k_BT \times \frac{\pi\hbar^2\rho}{mk_BT}\right) = \frac{\pi\hbar^2\rho}{m}$$

Le potentiel chimique à température nulle est le niveau (ou énergie) de Fermi E_F.

Cours « Questions Sociopolitiques et Environnementales »
Examen final 2023

Merci d'indiquer en haut de votre copie le groupe de PC auquel vous appartenez.
(Rappel des responsables PC : PC1 : Alexandre Mallard ; PC2 : Anne-Sophie Breitwiller ; PC3 : Jérôme Denis ; PC4 : Valentin Rio ; PC5 : Vololona Rabeharisoa)
Durée de l'épreuve : 2h00. Tous les documents sont autorisés. Pas d'utilisation d'ordinateur sauf pour les étudiants bénéficiant d'une dérogation.

PARTIE A – « Info ou intox ? »

Voici une liste d'affirmations concernant des théories ou des approches de sciences sociales qui vous ont été présentées dans le cours d'amphi de QSE. Il vous est demandé, pour chacune de ces affirmations, de dire si elle est correcte ou non. A chaque fois, vous justifierez votre position : si l'affirmation vous semble vraie (ou plutôt vraie), vous donnerez des détails complémentaires montrant votre compréhension de la question concernée ; si elle vous semble fausse (ou plutôt fausse), vous en donnerez les raisons et/ou vous proposerez une formulation corrigée plus adéquate.
Vous pouvez aborder les questions dans l'ordre de votre choix, en indiquant seulement son numéro.

1	La sociologie pragmatique s'appuie sur une grammaire des relations de pouvoir pour expliquer le déroulement des conflits sociaux.
2	En anthropologie, questionner les liens entre les institutions de la parenté et l'organisation politique d'une société relève d'une démarche culturaliste.
3	L'approche de Durkheim identifie la notion d'illusion comme ressort psychologique primordial pour expliquer le phénomène de croyance religieuse.
4	Une notion centrale pour appréhender la démarche structuraliste en anthropologie est celle de relation.
5	Karl Marx pensait que la transformation de la société de son temps passerait avant tout par une remise en cause de la morale bourgeoise.
6	Selon Pierre Bourdieu, dans une société donnée, les membres des groupes dominés sont aussi bien placés que les membres des groupes dominants pour identifier les différenciations sociales.
7	Un des objectifs de la sociologie des problèmes publics est d'analyser les institutions politiques pour améliorer le fonctionnement de la démocratie.
8	La sociologie des sciences fournit un outillage intellectuel adapté pour trancher entre les versions alternatives de la réalité proposées par des scientifiques différents dans une situation de controverse.
9	Selon Bruno Latour, le développement de l'écologie politique passe par la construction de nouveaux rapports de force entre les groupes sociaux qui s'opposent sur les questions d'environnement (État, consommateurs, entreprises, ONG...)
10	La posture de John Dewey sur les questions de participation politique conduit naturellement à soutenir des démarches comme celles de l'éducation populaire et de la vulgarisation scientifique et technique.

PARTIE B – Commentaire d'articles parus dans la presse

La contamination des Antilles par le chlordécone, un pesticide classé cancérogène, constitue une des grandes affaires politiques et médiatiques de ces dernières années. Soulevée il y a plusieurs décennies, elle a doné lieu à de nombreux rebondissements. Les deux articles ci-dessous, issus du magazine « M » (associé au journal Le Monde) et du site Reporterre, rendent compte de différents développements liés à cette affaire.

1. A partir d'une posture de sociologie des problèmes publics, vous indiquerez quelles sont les différentes problématisations dont le chlordécone a fait l'objet au fil du temps. Là où cela parait possible et pertinent en fonction de l'information disponible dans ces deux articles, vous indiquerez à chaque fois quels ont été les acteurs ou les groupes sociaux porteurs de ces formes spécifiques de problématisation.

2. Ces deux récits journalistiques permettent d'apercevoir, de façon plus ou moins précise et extensive, les arènes dans lesquelles le problème a circulé et a été structuré. Vous dresserez une liste de ces arènes et vous indiquerez brièvement les éléments de caractérisation de chacune d'entre elles.

3. Si les deux articles reprennent pour partie un canevas identique dans le tracé de l'affaire du chlordécone, ils en présentent néanmoins des versions et des interprétations différentes. On peut repérer une lecture de l'affaire en termes de controverse, et une lecture en termes de conflit social. Vous montrerez comment les articles alimentent chacune de ces deux versions, et vous expliciterez les interprétations en question. Pour cela vous pointerez dans le texte les marques spécifiques qui permettent un décryptage des positions et orientent vers l'une ou l'autre lecture. Vous mobiliserez pour cela au besoin les notions et outils analytiques présentés dans différentes séances du cours QSE.

Article 1

La première fois que « Le Monde » a écrit « chlordécone »

Paru dans « M le magazine du Monde »
Par Agnès Gautheron. Publié le 27 novembre 2019 à 18h32, mis à jour le 28 novembre 2019 à 16h50

Un rapport parlementaire estime que l'État est le « premier responsable » de la contamination des Antilles au chlordécone, un pesticide classé cancérogène possible. C'est en mars 1999 que le mot a été employé pour la première fois dans les colonnes du « Monde ».

« *L'État doit prendre sa part de responsabilité* », avait affirmé Emmanuel Macron en Martinique en septembre 2018. Il évoquait le scandale du chlordécone, ce pesticide ultratoxique et ultrapersistant utilisé dans les bananeraies des Antilles jusqu'à son interdiction, en 1993, et en cause dans plusieurs pathologies. Une commission d'enquête parlementaire présentée ce 26 novembre va bien plus loin : elle juge l'État « premier responsable » de ce « désastre sanitaire et environnemental ».

Si l'usage du chlordécone aux Antilles remonte aux années 1970, il ne sera mentionné dans *Le Monde* que deux décennies plus tard. Le journal rend certes compte, en 1974, de la grève des ouvriers agricoles de la banane, mais sans évoquer l'une de leurs revendications : l'arrêt de l'usage du chlordécone, dont ils avaient déjà éprouvé la toxicité.

Lorsque *Le Monde* évoque enfin la molécule, en mars 1999, il n'est pas question de la santé des hommes mais de celle des coraux, *« menacés par les pollutions agricoles liées à la spéculation bananière »*. Citant le Comité de bassin de la Guadeloupe, le correspondant local explique que des *« analyses de sédiments effectuées dans une rivière jouxtant une importante zone de production "ont montré des teneurs en chlordécone, un insecticide organo-chloré interdit à la vente et à l'usage, dix fois supérieures à la norme admise". »*

Poison lent

Malgré ce constat préoccupant, il faudra des années avant que les inquiétudes sanitaires transparaissent dans le journal. Le cancérologue Dominique Belpomme joue les lanceurs d'alerte en septembre 2007. Dans un rapport, il révèle que *« la pollution liée à l'usage intensif de pesticides sur de petits territoires a "empoisonné" la Martinique et la Guadeloupe »*, écrit Gaëlle Dupont le 19 septembre 2007.

Le médecin constate que la Martinique rencontre *« trois types de problèmes : l'augmentation du nombre des cancers de la prostate et du sein, une baisse de la fécondité, et la possibilité d'une augmentation d'incidence des malformations congénitales et de troubles du développement chez les enfants. »*

Ces pathologies sont-elles liées au chlordécone ? On le sait aujourd'hui, mais à l'époque les études manquent. *« Au gouvernement, les voix divergent,* relève, le 22 septembre 2007, Patrice Louis, correspondant aux Antilles. *Michel Barnier, ministre de l'agriculture, parle de situation "très grave" quand Roselyne Bachelot, sa collègue de la santé, tempère en disant que M. Belpomme "pose des questions", mais qu'il "n'apporte pas de réponse formelle". »*

Voix divergentes

« Ce n'est pas tout à fait une psychose. Plutôt une inquiétude », constate Xavier Ternisien, envoyé spécial aux Antilles le 1er novembre 2007 suite au rapport Belpomme. Il y rencontre des professionnels de santé qui *« s'efforcent de calmer les esprits ». « Les études menées aux États-Unis montrent que des troubles sont avérés chez l'homme à partir d'une présence de chlordécone de l'ordre d'un milligramme par litre de sang,* explique le docteur Luc Multigner, chercheur à l'Inserm et coordonnateur des études sur le sujet. *Or, les doses relevées sur les ouvriers agricoles en Guadeloupe sont cent fois inférieures. »*

Autre témoignage rassurant cité par le journaliste, celui du professeur Pascal Blanchet, chef du service d'urologie au CHU de Pointe-à-Pitre : *« D'une manière générale, il y a moins de cancers en Guadeloupe et en Martinique qu'en métropole.* (...) *La seule exception concerne le cancer de la prostate. Or, on soupçonne une prédisposition à ce type de pathologie chez les populations afro-américaines. »*

Ironie de l'histoire, ces deux scientifiques œuvreront quelques années plus tard à mettre en évidence des liens entre cancer de la prostate et exposition au chlordécone. Preuve que la science a besoin de temps. Ou qu'elle n'est pas imperméable au discours des autorités. Cité, lui aussi, par Xavier Ternisien en 2007, Philippe Quénel, qui était à l'époque responsable de la cellule interrégionale épidémiologique Antilles-Guyane, *« estime que l'État a fait son travail » : « Je connais peu de dossiers pour lesquels autant d'efforts ont été consentis. La pollution au chlordécone aux Antilles est mieux documentée que celle par les pesticides dans le Bordelais ou par les nitrates en Bretagne. »*

Forme de colonialisme

Une documentation qui arrive tard : toute la chaîne alimentaire est aujourd'hui contaminée et la quasi-totalité des Antillais ont été exposés. Dans son éditorial du 23 juin 2010, *Le Monde* voit une forme de colonialisme dans la crise du chlordécone : *« L'inquiétude locale est d'autant plus forte que le risque sanitaire est socialement injuste.* (...) *Constater que les planteurs sont des "békés" et que les ouvriers agricoles, ceux-là mêmes qui ont subi une exposition professionnelle pendant vingt ans, sont noirs n'est pas une caricature. »*

De fait, Paul Benkimoun, l'un des spécialistes santé du *Monde*, rappelle le 25 août 2010 : *« Les alertes sur les dangers pour la population des Antilles françaises du chlordécone* (...) *ont été négligées, voire ignorées, sous la pression des grands planteurs.* » Un lobbying qui a conduit à occulter la toxicité du chlordécone, pourtant connue depuis 1968.

Sous le titre « Chlordécone : *"une honte d'État"* », Stéphane Foucart, spécialiste des questions d'environnement au *Monde*, signe, le 11 juin 2018, une chronique implacable : *« Environ 800 000 personnes vivent désormais dans un monde dystopique, où chaque tranche de gigot, chaque poisson, chaque œuf, chaque crustacé devient suspect, où il ne reste parfois plus aucune rivière propre – c'est le cas en Martinique et à Basse-Terre, où la pêche est interdite dans presque tous les cours d'eau. Le plus surprenant est peut-être que, pour ces torts irréparables, nul n'ait jusqu'à présent eu l'idée de présenter aux Antillais des excuses au nom de l'État français. »*

Article 2

Le chlordécone et l'impunité empoisonnent les Antilles

Paru sur le site Reporterre
Par Alexandre-Reza Kokabi. Publié le 6 novembre 2020 à 09h48Mis à jour le 26 août 2021 à 14h51

Du début des années 1970 à 1993, les planteurs de bananes de Martinique et de Guadeloupe ont eu recours massivement au chlordécone pour lutter contre un ravageur. Pourtant, dès 1979, l'OMS avertissait de la dangerosité de ce produit. Sur place, des mouvements populaires réclament justice depuis des années.) local

Le 16 juillet dernier, Keziah Nuissier, un jeune homme de 21 ans, était passé à tabac par les forces de l'ordre à Fort-de-France, en Martinique, alors qu'il manifestait contre la répression du mouvement anti-chlordécone. Dans un autre article, *Reporterre* vous raconte cette histoire et les mensonges des gendarmes et d'un policier pour accabler le militant.

« Mais, au-delà de ce qui m'est arrivé, le point de départ de cette histoire, ne l'oublions pas, c'est l'empoisonnement massif des Antilles au chlordécone », a insisté Keziah Nuissier. *Reporterre* fait le point sur ce scandale sanitaire, environnemental et social encore trop méconnu dans l'Hexagone, sur les vives inquiétudes et colères qu'il suscite, et sur la répression subie par les citoyens qui osent lutter pour obtenir réparation.

Qu'est-ce que le chlordécone ?

Le chlordécone est un pesticide qui a été utilisé en Guadeloupe et en Martinique à partir de 1972. Cette année-là, la Commission des toxiques en agriculture acceptait son homologation, trois ans après l'avoir rejetée à cause de la toxicité de la molécule. Jusqu'en 1993, les bananeraies de Guadeloupe et de Martinique en ont été aspergées massivement pour lutter contre le charançon de la banane, un insecte qui détruisait les

cultures et menaçait de ralentir une production estimée à 270.000 tonnes de bananes par an, dont 70 % sont envoyées en métropole.

L'utilisation massive de ce produit est à l'origine d'un des plus grands scandales sanitaires de ce siècle. En effet, le chlordécone est un perturbateur endocrinien reconnu comme neurotoxique — dangereux pour le système nerveux —, reprotoxique — il altère la fertilité —, et classé cancérogène *« possible »* dès 1979 par l'Organisation mondiale de la santé (OMS). Faisant fi de ces alertes, la France ne l'a interdit qu'en 1990. Aux Antilles, il a même été autorisé jusqu'en 1993, par deux dérogations signées, sous François Mitterrand, par les ministres de l'Agriculture de l'époque Louis Mermaz et Jean-Pierre Soisson.

Un champ de bananes près du quartier Bochette, au Lamentin.

Affaire classée ? Loin de là. Car la molécule est très rémanente dans l'environnement : elle ne disparaîtrait qu'au bout de sept siècles. Dans les années 2000, des chercheurs ont démontré que le poison du chlordécone s'y répandait partout ou presque : dans les sols, dans l'eau des rivières, du littoral, dans les animaux, les crustacés... et dans les organismes humains. Plus de 90 % des Guadeloupéens et des Martiniquais — soit 800.000 habitants — sont aujourd'hui contaminés, essentiellement par voie alimentaire, comme l'a révélé une étude de Santé publique France publiée en octobre 2019.

Les conséquences sur la santé des Antillais sont sidérantes. La Martinique détient notamment le record du monde de cancers de la prostate, avec 227 nouveaux cas pour 100.000 hommes chaque année. La Guadeloupe est elle aussi très touchée par cette maladie. En tout, ces cancers sont deux fois plus fréquents et deux fois plus graves aux Antilles qu'en métropole. Le chlordécone augmente aussi le risque de prématurité et d'effets négatifs sur le développement cognitif et moteur des nourrissons, une réduction de la fertilité, une multiplication exponentielle des cancers du sein et des ovaires, ou encore les cas d'endométrioses sévères.

« Le bilan humain et écologique de cet empoisonnement dépasse l'entendement », dit Alex Granville, militant et membre du Komite 13 Janvié, qui revendique la légitimité de la lutte pour la réparation et la justice. *« Ce produit a été utilisé en connaissance de cause, c'est donc un empoisonnement volontaire des populations, des terres et de l'eau aux Antilles françaises »*, dénonce-t-il. Keziah Nuissier parle, lui, de *« la plus grande humiliation que le peuple martiniquais ait eu à subir depuis l'abolition de l'esclavage »*.

Où en sont les mouvements sociaux contre le chlordécone ?

Depuis dix-huit ans, les citoyens se mobilisent pour réclamer vérité, justice et réparation. Leur colère est dirigée contre les responsables du scandale, désormais clairement identifiés. Cet empoisonnement est *« consécutif au système de profit mis en place par de grands planteurs issus des familles esclavagistes* (les békés), *qui bâtirent leur fortune à l'ombre du Code noir de Colbert,* écrivaient des acteurs et collectifs de la société civile, dont le chercheur Malcom Ferdinand, dans une tribune publiée en août par Mediapart. *Un empoisonnement criminel qui aura duré des décennies avec la complicité de l'État français accordant des dérogations pour un pesticide interdit en France. »*

En 2018, Emmanuel Macron a déclaré que l'État devait « prendre sa part de *responsabilité dans cette pollution et doit avancer dans le chemin de la réparation et des projets »*, mais n'a pas reconnu officiellement les effets du chlordécone sur la santé humaine. Il les a « présumés ». En 2019, une commission d'enquête parlementaire a conclu que l'État français était *« le premier responsable »* de la pollution au chlordécone, et *« a fait subir des risques inconsidérés, au vu des connaissances scientifiques de l'époque, aux populations et territoires de Guadeloupe et de Martinique ».*

Manifestation anti-chlordécone à Fort-de-France, le 27 août 2020, devant le tribunal de la ville.

« Mais depuis, aucune démarche d'ordre pénale ou financière n'a été lancée en réparation du préjudice subi par les populations », regrette le Komite 13 Janvié, qui réunit une dizaine d'associations écologistes, syndicales et culturelles. Une mauvaise habitude : *« Les plaintes déposées ne trouvent aucune réponse, et ce depuis 18 ans »*, déplore le collectif. Comme pour les victimes de l'amiante, les débats sur le lien de causalité entre le chlordécone et les cancers continuent d'entraver le chemin de la réparation. *« On se moque de nous, on nie notre humanité, notre droit à vivre dans un endroit sain. Dans l'indifférence générale, ici, des centaines de personnes meurent chaque années de cancers. Nos sœurs, nos frères, nos mères, nos cousins...* explique Keziah Nuissier.

Excédés, les militants anti-chlordécone ont lancé, dans la foulée du mouvement des Gilets jaunes, une phase d'actions de désobéissance civile. Depuis novembre 2019, chaque samedi, des militants bloquent les accès aux supermarchés qui appartiennent aux familles de *békés*, notamment ceux du Groupe Bernard Hayot (GBH), reconnu et identifié comme l'un des principaux responsables de l'empoisonnement. *« Nous cohabitons depuis des siècles avec ces familles, dans un schéma dominant-dominé,* explique Madly Etilé, militante et mère de Keziah Nuissier. *Malgré nos plaintes ou nos marches, l'État les a laissés nous étouffer alors nous avons décidé d'entrer dans un rapport de force direct avec elles pour attirer leur attention, leur montrer qu'on souffre et qu'il faut réagir. »*

Comment ces mouvements sont-ils accueillis par l'État ?

La réponse de l'État au boycott des supermarchés a été cinglante. Une quarantaine d'interpellations ont été dénombrées depuis novembre 2019, dont treize à domicile. *« Les militants subissent un acharnement des forces de l'ordre »*, dénonce Naéma Rainette-Dubo, du collectif Zéro chlordécone. *« L'État a, ni plus ni moins, mis les forces de l'ordre à disposition des* békés *et de leurs biens, pour intimider celles et ceux qui protestent et faire taire leurs revendications »*, regrette Keziah Nuissier.

Le 23 novembre 2019, alors qu'ils bloquaient l'Euromarché Océanis à Robert, propriété de GBH, des heurts ont éclaté lors de l'intervention des forces de l'ordre. Cinq jours après, des militants ont été interpellés et placés en garde à vue. En décembre 2019, sept autres militants ont été interpellés à leur domicile et accusés d'avoir commis des actes de violence envers les forces de l'ordre.

L'Euromarché Océanis à Robert, propriété de GBH.

Le 13 janvier 2020, jour annoncé du procès des militants, 400 personnes qui manifestaient leur soutien aux activistes devant le tribunal ont été attaquées sans sommation par les forces de l'ordre. Certaines ont reçu des tirs de lanceurs de balles de défense et des éclats de grenades de désencerclement. Le procès dit des *« Sept d'Océanis »* a été dépaysé — c'est-à-dire transféré — à Paris.

Le 16 juillet, Denzel Guillaume, Frédéric Maupeu et Esaie Maxime, accusés d'avoir volontairement commis des violences sur des fonctionnaires de police et des gendarmes le 13 janvier, puis le 15 mai 2020, ont été interpellés dès 6 heures du matin et leur

domicile perquisitionné. Keziah Nuissier, venu les soutenir avec son tambour, a été passé à tabac par des militaires et un policier, et a essuyé des propos à caractère raciste.

Le 27 août, Denzel Guillaume, Frédéric Maupeu, Esaie Maxime et Keziah Nuissier devaient comparaître devant le tribunal correctionnel de Fort-de-France. Les trois premiers ont été condamnés à 1 an et 7 mois de prison ferme, et à 4.500 euros d'amende. Des peines supérieures aux réquisitions. Leurs avocats ont fait appel. Le procès de Keziah a lui été renvoyé au 9 novembre, car le jeune homme n'était pas encore remis de son agression par la police.

L'entrée du centre commercial Océanis, bloquée le 23 novembre 2019 par les militants anti-chlordécone.

Ces procès sont désormais qualifiés de *« procès de la honte »* en Martinique. *« Les empoisonneurs n'ont même pas été inquiétés — pas une mise en examen, pas une audition —, alors que leurs victimes sont traduites et lourdement condamnées devant les tribunaux »*, déplore Naéma Rainette-Dubo. *« C'est le monde à l'envers »*, dit-elle. *« Le procès qui devrait avoir lieu, c'est celui de ce pesticide qui continue de couler dans le sang des Antillais »*, dit Alex Granville.

Fiche de correction individuelle
QSE 2022-2023

Nom	SOMSON
Prénom	Benjamin
PC	4
Exposé	
Groupe exposé	31
Ouvrage exposé	Gabrielle Hecht(2004) Le rayonnement de la France: énergie nucléaire et identité nationale après la Seconde guerre mondiale, Paris, La Découverte.
Note exposé (sur 10)	**8,5**
Examen écrit	
Note partie A (sur 10)	**9,5**
Ajustement correction	-0,5
Question B1 (sur 4)	3
Question B2 (sur 3)	3
Question B3 (sur 3)	2,5
Note partie B (sur 10)	**8,5**
Note totale écrit (sur 20) (=A + B)	**18**
Appréciation	
Toutes vos réponses au QCM sont brillantes de clarté et de justesse. Aucune erreur valant la peine d'être relevée, bravo. Pour le commentaire de documents, on reste sur la même qualité d'écriture et d'analyse. Vous restituez parfaitement les étapes et arènes cardinales de l'affaire. Cependant, on peut regretter que vous mettiez l'accent sur "les phases de la problématisation" alors qu'il s'agissait de mieux faire la part entre différentes "formes spécifiques" de problématisation telles qu'indiqué dans la consigne : exemple, mieux distinguer par les problématisations sanitaires : santé publique, ou au travail, ou environnementale. Aussi, il aurait été bien que vous mobilisiez une grille d'analyse sociologique pour différencier les deux articles, notamment en relevant la rhétorique marxiste (exploiteur-exploité) dans celui de Reporterre. Mais cela reste du détail, votre copie est excellente dans l'ensemble.	
Note finale QSE	
Note finale (sur 20) (Moyenne exposé et écrit)	**18**

Notes Questions partie A avant ajustement									
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

PC4

MINES ParisTech

Note / Evaluation :

Nom : SOMSON
Prénom : Benjamin
Date : 26/01/2023 Promotion : P22
Examen de : Questions sociopolitiques et environnementales

Feuille n° 01 / 02

Partie A : Info ou intox ?

① Plutôt faux : la sociologie pragmatique vise plutôt à établir la grammaire des formes de justification intervenant dans les conflits sociaux, elle s'intéresse à l'activité critique elle-même et pas aux rapports qui la sous-tendent.

② Faux : cette approche relève plutôt d'une démarche anthropologiste fonctionnaliste, qui analyse les institutions dans leur contexte social.

(4) Vrai : Comme dans la démarche linguistique dont elle s'inspire, l'anthropologie structuraliste se penche sur les relations entre des éléments structurels : par exemple, dans le cas des mythes, les renvois, inversions, ou omissions des différents mythèmes.

(3) Plutôt faux : dans l'approche durkheimienne du phénomène religieux, le ressort psychologique est distingué de l'idée de fait social, qui n'est pas réductible à un individu. Le délire fondé et l'effervescence religieuse sont des faits plus sociaux que psychologiques.

⑤ Faux : pour Karl Marx, la morale fait partie de la superstructure, qui consolide la domination de la bourgeoisie. Le cœur de la transformation sociale passe par l'infrastructure : la révolution découle de la récupération des moyens de production par les ouvriers.

⑥ Vrai : l'approche Bourdieusienne des processus de classement au cœur de la distinction sociale s'intéresse au "goût" à la fois du dominant et du dominé. Ses enquêtes quantitatives distingue les représentations du monde social de chaque individu, et toutes les perspectives se valent pour comprendre.

ou autre interprétation de la question : FAUX : les capitaux culturels, économiques et sociaux du dominant lui donnent une idée de la façon dont il doit juger et "goûter" (l'habitus), qui lui donne un "avantage" sur le dominé.

⑦ Plutôt faux : la sociologie des problèmes publics se distingue de celle des problèmes sociaux (Dewey, Lippman) en ce qu'elle s'intéresse à la trajectoire du problème dans toute la société, pas seulement dans les institutions politiques qui ne sont qu'une arène parmi d'autres.

⑧ Faux : Là où l'épistémologie et la philosophie des sciences s'intéressent à la vérité et à la validité d'une connaissance, le champ STS fournit un outillage pour comprendre la trajectoire de la controverse mais pas pour la résoudre : il s'agit seulement d'observer la science comme elle se fait.

⑨ Faux : Bruno Latour ne se questionne pas sur les rapports entre acteurs de l'écologie politique mais sur la façon dont celle-ci doit agir et être définie. C'est plutôt sur notre rapport de force avec le non-humain qu'il préconise une suspension de notre vision comme moyen, pour à terme intégrer l'environnement dans les fins de la morale Kantienne.

⑩ Vrai : John Dewey aborde la question de la démocratie participative sous le prisme de la capacité d'intervention des acteurs. Il préconise l'éducation des publics pour pouvoir les faire participer. On peut donc tout à fait étendre cette conception à la vulgarisation technique, car les problèmes

publics découlent parfois de controverses scientifiques.

Partie B : Le chlordécone

① Le chlordécone a connu plusieurs phases de problématisation, portées par différents acteurs : l'utiliser ou non, a-t-il des effets sur la santé / l'environnement, et l'État est-il responsable ? :

- D'abord, à l'origine de son utilisation, la question était la protection des bananes, et donc l'utilisation du chlordécone dans les Antilles contre des ravageurs. La commission sanitaire de l'agriculture décide de l'autoriser malgré sa toxicité supposée.
- Le problème émerge à nouveau sous forme de scandale sanitaire : les ouvriers réclament en 1974 l'arrêt de son utilisation, puis le monde scientifique et médical s'empare du problème et s'oppose sur la toxicité. À la fin de la controverse, tous s'accordent sur les conséquences dramatiques sur la santé, comme le rapport Belpomme l'affirmait dès 2007.
- Le chlordécone pose aussi un problème environnemental soulevé discrètement en 1976 par le Comité de Bassin de la Guadeloupe et défendu aujourd'hui par des activistes qui, sur la base de faits scientifiques, montrent que leur environnement naturel a été dévasté. La trajectoire environnementale est d'ailleurs partie des coraux pour s'étendre à tout l'écosystème antillais.
- Plus récemment enfin, le spectre du colonialisme éclaire d'un nouveau jour le problème public : des activistes et collectifs voient le traitement par l'État comme emblématique de l'exploitation des Antilles par la métropole ainsi que de l'oppression, notamment via l'usage des forces de l'ordre. La question divise : si des spécialistes et politiciens affirment que l'État a joué son rôle pour protéger la population de Guadeloupe et de Martinique, des rapports parlementaires et des déclarations de dirigeants tendent à incriminer les pouvoirs publics. En dehors des articles, notons que la justice joue un rôle clé dans cette problématisation de responsabilité de l'État et qu'elle l'a acquitté en appel très récemment.

② Le problème public du chlordécone a traversé plusieurs arènes au fil du temps. D'abord, un milieu syndical professionnel, celui des ouvriers agricoles. Puis il est entré dans l'arène scientifique sous forme de controverse, ce qui s'est traduit matériellement par des rapports et des études. Ensuite, la rue, support d'un activisme de désobéissance civile, a été le support d'affrontements au sens propre entre les forces de l'ordre et les manifestants. Le monde politique, i.e le Parlement et la présidence de la République, a été le siège de rapports et de déclarations. La justice et les tribunaux ont eu à traiter des procès intentés envers l'État, et aussi envers les manifestants antillais. Enfin, il est primordial de noter le rôle important de la presse en tant qu'arène : grâce à ses correspondants, il s'agit d'un pont direct vers la métropole. Comme le montre d'ailleurs l'article du Monde, les proportions prises par le problème sont grandement dépendantes du traitement médiatique accordé.

③ Du fait de son existence en tant que produit chimique, le chlordécone a fait l'objet d'une controverse scientifique. L'article du Monde nous rappelle l'histoire de cette controverse qui présente une caractéristique dû à son caractère médical : on ne peut pas volontairement faire d'expérience. L'incertitude est mise en relief à plusieurs reprises ("à l'époque, les études manquent", "la science a besoin de temps"). On comprend ainsi l'évolution des positions des scientifiques au fil des découvertes. Cette perspective est plutôt absente de l'article de Reporterre. Le début de cet article brosse un portrait du chlordécone comme d'un produit dont la dangerosité était avérée dès l'origine de son utilisation et parle même d'"empoisonnement volontaire". Il y aurait donc eu consensus, et l'origine du problème est plutôt un conflit social métropole / Antilles et békés blancs / ouvriers noirs dans un but productiviste. L'article met en exergue la lutte de la population et s'autorise quelques hyperboles ("plus grand scandale sanitaire de ce siècle"), renvoyant à l'Histoire d'exploitation coloniale du territoire (mention du Code Noir). Enfin, le journaliste n'hésite pas à dénoncer l'à part de la police et de la justice dans ce conflit. L'article du Monde

Reconnait aussi l'existence du conflit social en identifiant les victimes et les responsables, mentiant pas l'influence des lobbys.

Ainsi, ces deux perspectives sont nourries de façon très inégale par chacun des deux articles.

Micro-économie

Ah la micro-économie… Seule matière ~~dont personne n'a aucun souvenir~~ où même les plus honnêtes de la promo ont copieusement triché. Me concernant c'était la seule fois, c'est pour dire.

Mais Mattéo, non seulement n'a pas fait 100% de son devoir sur chatGPT mais a aussi pensé à screen les questions pour le palum (on était en février), quel taré !

Par contre comme il n'est pas très bon il a n'a pas eu plus que chatGPT, ainsi ne faites pas totalement confiance aux réponses données, elles ne sont pas forcément vraies, c'est juste là pour vous donner des idées.

Les consommateurs d'un bien ont une disponibilité à payer v distribuée uniformément sur l'intervalle $[1, 3]$

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [x] La fonction de demande inverse est linéaire dans l'intervalle où les quantités sont positives
- [ ] La fonction de demande est nulle pour un prix supérieur à 2
- [ ] La fonction de demande inverse est croissante
- [x] La fonction de demande est plate hors de l'intervalle de prix $[1, 3]$

On considère un duopole symétrique avec des coût variables nuls

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Le bien-être social sera toujours maximal quel que soit le mode de concurrence
- [ ] Aucune des autres réponses
- [ ] Les quantités à l'équilibre de Bertrand sont supérieures à celle à l'équilibre de Cournot
- [x] Le prix d'équilibre de Bertrand ne dépend pas de l'élasticité de la demande
- [ ] Les équilibres de Bertrand et de Cournot sont alors identiques

Elasticité et marge

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Toutes les réponses, incluant celle-ci
- [ ] La marge d'un producteur en monopole est infinie si son coût est nul
- [ ] Les quantités vendues par un monopole sont croissantes en fonction de l'élasticité de la demande
- [ ] Dans l'oligopole de Cournot une demande plus élastique implique des profits plus faibles

A l'équilibre concurrentiel

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Les consommateurs choisissent des quantités achetées
- [ ] Les quantités sont inférieures à l'optimum
- [x] Les producteurs choisissent quelles quantités vendre
- [ ] Le prix est égal au coût moyen

Réglementer un monopole naturel

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Aucune des autres réponses
- [ ] Implique des arbitrages entre l'efficacité et le besoin de financement
- [ ] Ne peut se faire sans appels d'offre
- [ ] Peut nécessiter de redessiner le contour des activités
- [ ] Nécessite un contrôle direct des quantités

L'échange améliore la situation au sens de Pareto

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Aucune des autres réponses
- [ ] En l'absence de contrainte de budget
- [ ] Seulement avec deux biens
- [ ] Si des prix existent pour chaque bien
- [x] Quand il est librement consenti

Dans un jeu à deux joueurs

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Une stratégie dominante pour un joueur dépend de la stratégie de l'autre
- [ ] Un équilibre de Nash correspond nécessairement à deux stratégies dominantes
- [ ] L'équilibre en stratégie dominante s'il existe est strictement meilleur pour les deux joueurs que l'équilibre de Nash
- [ ] S'il existe une stratégie dominante pour un joueur, la décision stratégique de l'autre est rendue plus complexe
- [x] Aucune des autres réponses

Dans la théorie du marché concurrentiel, la courbe d'offre

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Dépend su prix d'équilibre
- [ ] Dépend du nombre de consommateurs
- [x] N'influence pas la fonction de demande
- [ ] Correspond au coût marginal de l'un des producteurs

La droite de budget dans une économie à deux biens

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Décrit l'utilité relative de deux biens
- [ ] Dépend de l'utilité
- [x] A une pente qui dépend des prix relatifs
- [x] Dépend du revenu
- [ ] Est obtenue à partir de courbes d'indifférence
- [ ] Représente les lieux d'échange Pareto-optimaux

Un vendeur en télétravail a pour objectif de maximiser ses revenus moins ses coûts de ventes, a priori équivalents à 10 euros par heures. Il peut vendre une unité par heure et a un contrat mensuel avec des commissions de 12 euros pour chacune des 50 premières unités vendues, 11 euros pour les 50 suivantes, 10 euros pour les 50 suivantes, 9 pour les 50 suivantes et ainsi de suite. Combien d'heures va-t-il travailler par mois ?

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Au moins 200 heures si ses coûts horaires sont constants
- [ ] 100 heures si ses coûts horaires sont constants mais qu'il peut, plutôt que de travailler, jouer à la Playstation pour une utilité équivalente à 50 centimes par heure.
- [ ] Entre 100 et 150 heures si ses coûts horaires sont constants
- [x] 200 heures si c'est addictif, ce qui fait que chaque unité vendue fait baisser sont coût horaire perçu de 6 centimes.

Une fonction de demande

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Croît avec le prix
- [ ] Dépend des coûts de production
- [ ] Agrège des utilités marginales
- [x] Aucune des autres réponses
- [ ] Relie les quantités achetées aux quantités vendues

On considère le jeu suivant

(2,4)	(0,2)
(0,3)	(5,8)

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Il possède un unique équilibre de Nash
- [ ] L'équilibre est toujours Pareto-optimal
- [x] A au moins deux équilibres de Nash
- [ ] Il décrit une situation où chaque joueur peut ignorer le choix de l'autre
- [ ] Aucune des autres réponses

Le surplus des consommateurs

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [x] Est un indicateur important pour la réglementation
- [ ] Mesure l'efficacité totale d'un marché
- [ ] Prend en compte les inégalités
- [ ] Est un objectif que cherchent à maximiser les producteurs

Le but des modèles théoriques en économie

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [x] De discuter des différentes hypothèses sous lesquelles on obtient différents résultats
- [ ] De pouvoir appliquer directement des vérités indiscutables
- [ ] De styliser pour se concentrer sur les mécanismes de premier ordre
- [ ] De comprendre ce que racontent les économistes
- [ ] De décrire toute la réalité en détails
- [ ] De ne jamais devoir regarder la réalité en face

Externalité et bien public

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [x] La diffusion du COVID-19 peut être analysée comme un problème d'externalité
- [ ] Aucune des autre réponses
- [x] Un vaccin implique des externalités positives
- [ ] Les incitations individuelles sont toujours alignées avec le bien-être social
- [x] Les confinements et mesures barrières réduisent les externalités négatives

On considère le jeu suivant

(3 , 3)	(51, 0)
(3 , 50)	(9, 51)

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Toutes les réponses, incuant celle-ci
- [x] La puissance publique peut améliorer la situation en interdisant une stratégie d'un des joueurs
- [ ] L'équilibre est Pareto-optimal
- [x] A l'équilibre les deux joueurs sont frustrés, surtout le joueur 2
- [ ] L'équilibre est en stratégies dominantes

Une entreprise en monopole fait face à un demande $X(p) = 100 - 2p$ et produit à un coût unitaire de 20. En l'absence de réglementation

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Le marge sur chaque unité vendue est 10
- [ ] Toutes les réponses, incluant celle-ci
- [x] Le monopole vend une quantité égale à 30
- [ ] Le prix de monopole est égal à 25
- [ ] Le prix qui maximise le bien-être social est 25

Les différentes pratiques de discrimination tarifaire

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Peuvent être désirables pour les producteurs et les consommateurs simultanément
- [x] Nuisent toujours aux consommateurs
- [ ] Nuisent aux vendeurs les pratiquant
- [x] Ne sont faisables que si le vendeur connaît chaque consommateur individuellement

Profit

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Aucune des autres réponses
- [x] Le profit d'un producteur dépend uniquement de sa technologie
- [ ] La somme des profits sur un marché correspond au profit d'un monopole
- [ ] Le profit d'un producteur dépend uniquement du nombre total de producteur

La fonction de coût d'une entreprise est $C(q) = 800 + 2q^2$ où q est une quantité.

Veuillez choisir au moins une réponse.

- [ ] Si le prix unitaire est 3, l'entreprise est rentable.
- [ ] Le coût fixe est décroissant en q.
- [ ] Le coût moyen atteint son unique minimum en q=10.
- [x] Le coût marginal est 4q.

OPTIMISATION
EXAMEN. DURÉE 2H30
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS.

Mines Paris – PSL *Vendredi 7 avril 2023*

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 40 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [7 points]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le problème

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad & f(x,y) = ay - \ln(1+x) \\ \text{tel que} \quad & 0 \le x \le 1, \\ & y \le 2x, \\ & y \ge x - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

On note $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\,,\ y \le 2x\,,\ y \ge x-1\}$ l'ensemble admissible.

1. Représenter graphiquement l'ensemble admissible et tracer les lignes de niveau de la fonction objectif pour $a = 0$.
2. Montrer que le problème (1) admet une solution.
3. Montrer que tout minimum local de f sur K est un minimum global de f sur K. Y a-t-il unicité a priori ?
4. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, résoudre ce problème en fonction de la valeur de a.

Exercice 2 Décomposition en valeurs singulières [18 points]

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \le 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, où on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et soit M une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$. On cherche à étudier le problème

$$\max_{(u,v)\in B^2} u^\top M v \tag{2}$$

On suppose dans la suite que les valeurs propres de $M^\top M$ sont strictement positives.

1. Soit σ^2 une valeur propre de $M^\top M$ et x un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que $\|Mx\| > 0$ et justifier que, avec $1/\mu = \max\{\|x\|, \|Mx\|\} > 0$, on a $\mu Mx \in B$ et $\mu x \in B$.
   (b) En déduire que
   $$\max_{(u,v)\in B^2} u^\top M v \ge \mu^2\sigma^2\|x\|^2 > 0 \tag{3}$$
2. Réécrire le problème (2) sous la forme $-\min_{c(u,v)\le 0} f(u,v)$ avec $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ différentiables. Justifier qu'il admet au moins une solution.

3. Soit $(u^\star, v^\star)$ une solution du problème (2) . Montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} Mv^\star = \lambda_1 u^\star \\ M^\top u^\star = \lambda_2 v^\star \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

4. En déduire que $f(u^\star, v^\star) = -\lambda_1\|u^\star\|^2 = -\lambda_2\|v^\star\|^2 < 0$ et donc que $\|u^\star\| = \|v^\star\| = 1$.
5. Montrer que $(u^\star)^\top M v^\star = \lambda_1 = \lambda_2$ et que $u^\star$ et $v^\star$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ pour $MM^\top$ et $M^\top M$, respectivement.

On suppose construits $k \geq 1$ vecteurs propres orthonormaux $(u^1, \ldots, u^k)$ de $MM^\top$ et $k \geq 1$ vecteurs propres orthonormaux $(v^1, \ldots, v^k)$ de $M^\top M$ associés aux valeurs propres $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)$ et tels que $Mv^i = \sigma_i u^i$ et $M^\top u^i = \sigma_i v^i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

On définit $U_k = \mathrm{Vect}(u^1, \ldots, u^k)$ et $V_k = \mathrm{Vect}(v^1, \ldots, v^k)$. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on s'intéresse au problème

$$\max_{(u,v) \in B^2 \cap (U_k^\perp \times V_k^\perp)} u^\top M v \tag{5}$$

où $U_k^\perp$ et $V_k^\perp$ sous-espaces vectoriels orthogonaux à, respectivement, U_k et V_k.

6. Ecrire le problème (5) sous la forme $-\min_{c_{eq}(u,v)=0,\, c_{in}(u,v)\leq 0} f(u,v)$ avec $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $c_{in} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ différentiables et $c_{eq} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2k}$ linéaire. Justifier qu'il admet au moins une solution.
7. Soit $(u^\star, v^\star)$ une solution du problème (5). En réécrivant la contrainte $c_{eq}(u,v) = 0$ comme $c_{eq}(u,v) \leq 0$ et $-c_{eq}(u,v) \leq 0$, montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ tels que

$$\begin{cases} Mv^\star = \lambda_1 u^\star + \sum_{i=1}^k \mu_i u^i \\ M^\top u^\star = \lambda_2 v^\star + \sum_{i=1}^k \nu_i v^i \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \\ c_{eq}(u^\star, v^\star) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

8. Montrer que $\mu_i = (u^i)^\top M v^\star = 0$ et que $\nu_i = (v^i)^\top M^\top u^\star = 0$.
9. En déduire que $u^\star$ et $v^\star$ vecteurs propres unitaires de, respectivement, $MM^\top$ et $M^\top M$, associés à $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ et que $(u^\star)^\top M v^\star = \lambda_1 = \lambda_2$.
10. Déduire de ce qui précède le théorème de décomposition suivant, dans le cas où $M^\top M$ est définie positive.

Théorème 1 (Théorème de décomposition en valeurs singulières). *Soit M une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Il existe U et V deux matrices orthogonales de $\mathbb{R}^{n\times n}$ telles que*

$$M = U\Sigma V^\top$$

où Σ est la matrice diagonale des racines carrées des valeurs propres de $M^\top M$, appelées valeurs singulières de M. Par ailleurs, les colonnes de U sont vecteurs propres de $MM^\top$ et les colonnes de V sont les vecteurs propres de $M^\top M$.

Exercice 3 Opérateur Proximal sous contraintes [16 points]

Dans cet exercice, on s'intéresse à la formulation du problème de minimisation sous contraintes d'une fonction convexe non-différentiable à l'aide d'un opérateur proximal. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) convexe et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) convexe et telle que, pour un certain $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $c_i(\hat{x}) < 0$ pour c_i non-affine (condition de Slater). On considère le problème de minimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{tel que} \quad & c(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

et l'opérateur proximal sous contraintes associé

$$\begin{aligned} \mathrm{Prox}_{f,c} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \quad & f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2 \\ \text{tel que} \quad & c(s) \leq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $s \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\|s - x\|^2$ est fortement convexe et en déduire que $h : s \in \mathbb{R}^n \mapsto f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2$ l'est également.

(b) Justifier que le problème (8) admet une unique solution.

(c) On note $s = \mathrm{Prox}_{f,c}(x)$. Justifier qu'il existe $\lambda \in (\mathbb{R}_+)^m$ tel que

$$0 \in \partial f(s) + s - x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial c_i(s) \quad \text{et} \quad \lambda^\top c(s) = 0 \tag{9}$$

(d) En déduire que $x^\star$ solution de (7) si et seulement si

$$x^\star = \mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star) \tag{10}$$

Dans la suite de l'exercice, on considère le problème

$$\min_{\mathbb{1}^\top x = d} \quad f(x) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \min\{x_i, b_i\} \tag{11}$$

où $a_i \geq 0$, $b_i \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{1}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

2. Montrer que f est convexe[1].

3. Formuler (11) sous la forme du problème (7), à l'aide de deux contraintes inégalité.

On cherche à déterminer la solution du problème (11). Pour ce faire, on s'intéresse tout d'abord à l'opérateur proximal sans contrainte

$$\mathrm{Prox}_f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2 \right) \tag{12}$$

4. (a) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $(\mathrm{Prox}_f(x))_i = \mathrm{Prox}_{g_i}(x_i)$ où $g_i(x_i) = -a_i \min\{x_i, b_i\}$.

(b) Que vaut $\partial g_i(x_i)$ selon la valeur de x_i ?

(c) En déduire, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'expression de $(\mathrm{Prox}_f(x))_i$ (on pourra distinguer les cas $x_i < b_i - a_i$, $x_i \in [b_i - a_i, b_i]$ et $x_i > b_i$).

5. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $s = \mathrm{Prox}_{f,c}(x)$. A l'aide de (9), justifier qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$s = \mathrm{Prox}_f(x - \mu\mathbb{1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}^\top s = d \tag{13}$$

6. En déduire que, si $x^\star$ solution de (11), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Prox}_f(x^\star - \mu\mathbb{1}) = x^\star \quad \text{et} \quad \mathbb{1}^\top x^\star = d \tag{14}$$

7. (a) A l'aide de l'expression de Prox_f obtenue en question 4.(c), montrer que $x^\star = \mathrm{Prox}_f(x^\star - \mu\mathbb{1})$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(i)\ \mu = a_i \text{ et } x_i^\star < b_i \quad \text{ou} \quad (ii)\ \mu \in [0, a_i] \text{ et } x_i^\star = b_i \quad \text{ou} \quad (iii)\ \mu = 0 \text{ et } x_i^\star > b_i \tag{15}$$

(b) On suppose que les a_i sont deux à deux distincts et que $\sum_{i=1}^n b_i \geq d$. En déduire la solution $x^\star$ de (11).

1. On pourra admettre que, pour tous $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\min\{\alpha z_1 + \beta z_2, \alpha z_3 + \beta z_4\} \geq \alpha \min\{z_1, z_3\} + \beta \min\{z_2, z_4\}$$

Optimisation
Examen. Durée 2h30
Tous documents autorisés.

Mines Paris – PSL *Vendredi 7 avril 2023*

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 40 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [7 points]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le problème

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad & f(x,y) = ay - \ln(1+x) \\ \text{tel que} \quad & 0 \le x \le 1, \\ & y \le 2x, \\ & y \ge x - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

On note $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\,,\ y \le 2x\,,\ y \ge x-1\}$ l'ensemble admissible.

1. Représenter graphiquement l'ensemble admissible et tracer les lignes de niveau de la fonction objectif pour $a = 0$.
   Solution:

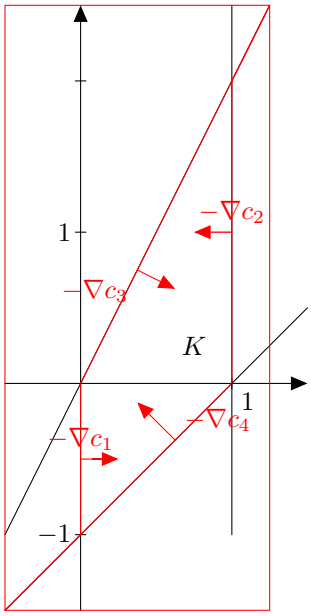


Figure 1 – Ensemble admissible K

2. Montrer que le problème (1) admet une solution.
   Solution: On note $f(x,y) = ay - \ln(1+x)$ et $c(x,y) = (-x, x-1, y-2x, x-y-1)$. L'ensemble admissible $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c(x,y) \le 0\}$ est un compact et f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \supset K$. On conclut donc par le théorème de Weierstrass.
3. Montrer que tout minimum local de f sur K est un minimum global de f sur K. Y a-t-il unicité a priori ?

a	0		$1/2$		1
	$(1,-2)$	$\{(1,y) \mid y \in [0,2]\}$	$(1,0)$	$(1/a-1, 1/a-s)$	$(0,-1)$

TABLE 1 – Ensemble des minimiseurs selon la valeur de a

Solution: K est un ensemble convexe et f est une fonction convexe (son hessien est $\nabla^2 f(x,y) = \mathrm{diag}(\frac{1}{(1+x)^2}, 0)$ qui est une matrice positive). Tout minimum local de f sur K est donc global (Théorème 7). En revanche, ce minimum n'est pas unique a priori.

4. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, résoudre ce problème en fonction de la valeur de a.

Solution: Pour $a < 0$, f est une fonction strictement décroissante de x et y. Elle atteint donc son minimum sur K en $(x^\star, y^\star) = (1, 2)$.

Pour $a = 0$, f est une fonction strictement décroissante de x. Elle atteint donc son minimum en tout point $(x^\star, y^\star) = (1, y^\star)$ avec $y^\star \in [0, 2]$.

Pour $a > 0$, puisque $\nabla f(x,y) = (-\frac{1}{1+x}, a)$, graphiquement, on observe que c_4 doit être active pour vérifier les conditions de KKT. Par ailleurs, le problème étant convexe, les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes (puisque l'intérieur de K est non-vide, Théorème 27). Supposons donc que c_4 est la seule contrainte active en un point candidat $(x^\star, y^\star) \in K$. Alors,

$$\begin{cases} \nabla f(x^\star, y^\star) + \lambda_4 \nabla c_4(x^\star, y^\star) = 0 \\ c_4(x^\star, y^\star) = 0 \\ c_1(x^\star, y^\star) < 0 \text{ et } c_2(x^\star, y^\star) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+x^\star} \\ a \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ y^\star - x^\star + 1 = 0 \\ 0 < x^\star < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = a > 0 \\ x^\star = \dfrac{1}{a} - 1 \\ y^\star = x^\star - 1 \\ 0 < x^\star < 1 \end{cases}$$

Les conditions de KKT sont donc vérifiées et $(x^\star, y^\star) = (1/a - 1, 1/a - 2)$ est l'unique minimiseur de f sur K si $a \in]1/2, 1[$. Supposons maintenant que c_1 et c_4 sont actives, cad que $(x^\star, y^\star) = (0, -1)$. Alors,

$$\nabla f(x^\star, y^\star) + \lambda_1 \nabla c_1(x^\star, y^\star) + \lambda_4 \nabla c_4(x^\star, y^\star) = 0 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\lambda_4 = a > 0$ et $\lambda_1 = \lambda_4 - 1$ qui est positif si et seulement si $a \geq 1$. Aussi, $(x^\star, y^\star) = (0, -1)$ unique minimiseur de f sur K pour $a \geq 1$. Enfin, supposons que c_2 et c_4 sont actives, cad que $(x^\star, y^\star) = (1, 0)$. Alors,

$$\nabla f(x^\star, y^\star) + \lambda_2 \nabla c_2(x^\star, y^\star) + \lambda_4 \nabla c_4(x^\star, y^\star) = 0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\lambda_4 = a > 0$ et $\lambda_2 = 1/2 - \lambda_4$ qui est positif si et seulement si $a \leq 1/2$. Aussi, $(x^\star, y^\star) = (0, -1)$ unique minimiseur de f sur K pour $a \in [0, 1/2]$.

En résumé, l'ensemble des minimiseurs de f sur K est comme indiqué en Table 1.

Exercice 2 Décomposition en valeurs singulières [18 points]

Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, où on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et soit M une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$. On cherche à étudier le problème

$$\max_{(u,v) \in B^2} u^\top M v \tag{2}$$

On suppose dans la suite que les valeurs propres de $M^\top M$ sont strictement positives.

1. Soit σ^2 une valeur propre de $M^\top M$ et x un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que $\|Mx\| > 0$ et justifier que, avec $1/\mu = \max\{\|x\|, \|Mx\|\} > 0$, on a $\mu Mx \in B$ et $\mu x \in B$.
   (b) En déduire que
$$\max_{(u,v)\in B^2} u^\top Mv \geq \mu^2\sigma^2\|x\|^2 > 0 \tag{3}$$

   Solution: $\|Mx\| > 0$ car $x^\top M^\top Mx = \| Mx\|^2 = \sigma^2\|x\|^2 > 0$. De plus, par définition, le maximum est supérieur à la valeur obtenue avec $u = \mu Mx \in B$ et $v = \mu x \in B$, qui est $\mu^2 x^\top M^\top Mx = \mu^2\sigma^2\|x\|^2$, strictement positive car les valeurs propres de $M^\top M$ sont strictement positives.
2. Réécrire le problème (2) sous la forme $-\min_{c(u,v)\leq 0} f(u,v)$ avec $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ différentiables. Justifier qu'il admet au moins une solution.
   Solution: On définit $f(u,v) = -u^\top Mv$ et $c(u,v) = (\|u\|^2 - 1, \|v\|^2 - 1)$. f étant continue et B^2 compact, le théorème de Weierstrass assure l'existence d'une solution au problème.
3. Soit $(u^\star, v^\star)$ une solution du problème (2) . Montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que
$$\begin{cases} Mv^\star = \lambda_1 u^\star \\ M^\top u^\star = \lambda_2 v^\star \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

   Solution: Ce sont les conditions de KKT du problème, car $\nabla f(u,v) = (-Mv, -M^\top u)$, $\nabla c_1(u,v) = 2u$ et $\nabla c_2(u,v) = 2v$.
4. En déduire que $f(u^\star, v^\star) = -\lambda_1\|u^\star\|^2 = -\lambda_2\|v^\star\|^2 < 0$ et donc que $\|u^\star\| = \|v^\star\| = 1$.
   Solution: Les premières égalités s'obtiennent directement en remplaçant. Le fait que $f(u^\star, v^\star) < 0$ provient de la Question 1. On en déduit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et, par la dernière égalité de KKT, $\|u^\star\| = \|v^\star\| = 1$.
5. Montrer que $(u^\star)^\top Mv^\star = \lambda_1 = \lambda_2$ et que $u^\star$ et $v^\star$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ pour $MM^\top$ et $M^\top M$, respectivement.
   Solution: La première égalité est une conséquence directe de la question précédente. Avec les conditions de KKT, on obtient par ailleurs $M^\top Mv^\star = \lambda_1 Mu^\star = \lambda_1\lambda_2 v^\star$ et, par ailleurs, $MM^\top u^\star = \lambda_2 M^\top v^\star = \lambda_2\lambda_1 u^\star$. Ceci donne le résultat voulu puisque $u^\star$ et $v^\star$ sont non-nuls.

On suppose construits $k \geq 1$ vecteurs propres orthonormaux $(u^1, \ldots, u^k)$ de $MM^\top$ et $k \geq 1$ vecteurs propres orthonormaux $(v^1, \ldots, v^k)$ de $M^\top M$ associés aux valeurs propres $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)$ et tels que $Mv^i = \sigma_i u^i$ et $M^\top u^i = \sigma_i v^i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

On définit $U_k = \mathrm{Vect}(u^1, \ldots, u^k)$ et $V_k = \mathrm{Vect}(v^1, \ldots, v^k)$. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on s'intéresse au problème
$$\max_{(u,v)\in B^2\cap(U_k^\perp \times V_k^\perp)} u^\top Mv \tag{5}$$
où $U_k^\perp$ et $V_k^\perp$ sous-espaces vectoriels orthogonaux à, respectivement, U_k et V_k.

6. Ecrire le problème (5) sous la forme $-\min_{c_{eq}(u,v)=0\,,\, c_{in}(u,v)\leq 0} f(u,v)$ avec $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $c_{in} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ différentiables et $c_{eq} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2k}$ linéaire. Justifier qu'il admet au moins une solution.
   Solution: On définit $f(u,v) = -u^T Mv$, $c_{in} = c$ et $c_{eq}(u,v) = ((u_i^\top u)_{1\leq i\leq k}, (v_i^\top v)_{1\leq i\leq k})$.
7. Soit $(u^\star, v^\star)$ une solution du problème (5). En réécrivant la contrainte $c_{eq}(u,v) = 0$ comme $c_{eq}(u,v) \leq 0$ et $-c_{eq}(u,v) \leq 0$, montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ tels que
$$\begin{cases} Mv^\star = \lambda_1 u^\star + \sum_{i=1}^k \mu_i u^i \\ M^\top u^\star = \lambda_2 v^\star + \sum_{i=1}^k \nu_i v^i \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \\ c_{eq}(u^\star, v^\star) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Solution: En notant $c = (c_{in}, c_{eq}, -c_{eq}) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2+4k}$, les conditions des KKT donnent l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^{2+4k}$ tel que

$$\begin{cases} -Mv^\star + \lambda_1 u^\star + \sum_{i=3}^{k+2} \lambda_i u^i - \sum_{i=3+2k}^{3k+2} \lambda_i u^i = 0 \\ -M^\top u^\star + \lambda_2 v^\star + \sum_{i=k+3}^{2k+2} \lambda_i v^i - \sum_{i=3+3k}^{4k+2} \lambda_i v^i = 0 \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \\ (u^\star)^\top u^i = (v^\star)^\top v^i = 0\,,\ 1 \le i \le k \end{cases} \tag{7}$$

soit le résultat voulu avec $\mu_i = \lambda_{2+i} - \lambda_{2+2k+i}$ et $\nu_i = \lambda_{2+k+i} - \lambda_{2+3k+i}$.

8. Montrer que $\mu_i = (u^i)^\top M v^\star = 0$ et que $\nu_i = (v^i)^\top M^\top u^\star = 0$.

   Solution: A l'aide des équations précédentes, on a $(u^i)^\top M v^\star = \lambda_1 (u^i)^\top u^\star + \sum_{j=1}^k \mu_j (u^i)^\top u^j = \mu_i \|u^i\|^2 = \mu_i$ et, de même, $(v^i)^\top M^\top u^\star = \lambda_2 (v^i)^\top v^\star + \sum_{j=1}^k \nu_j (v^i)^\top v^j = \nu_i$. Or, par ailleurs, $(u^i)^\top M v^\star = (M^\top u^i)^\top v^\star = (\sigma_i v^i)^\top v^\star = 0$ et $(v^i)^\top M^\top u^\star = (M v^i)^\top u^\star = (\sigma_i u^i)^\top u^\star = 0$.

9. En déduire que $u^\star$ et $v^\star$ vecteurs propres unitaires de, respectivement, $MM^\top$ et $M^\top M$, associés à $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ et que $(u^\star)^\top M v^\star = \lambda_1 = \lambda_2$.

   Solution: Les relations précédentes de simplifient donc en

$$\begin{cases} Mv^\star = \lambda_1 u^\star \\ M^\top u^\star = \lambda_2 v^\star \\ \lambda_1(\|u^\star\|^2 - 1) = \lambda_2(\|v^\star\|^2 - 1) = 0 \\ (u^\star)^\top u^i = (v^\star)^\top v^i = 0\,,\ 1 \le i \le k \end{cases}$$

   Comme précédemment, on obtient que $f(u^\star, v^\star) = -(u^\star)^\top M v^\star = -\lambda_1 \|u^\star\|^2 = -\lambda_2 \|v^\star\|^2 > 0$ (en évaluant f en $(u, v) = (\mu x, \mu M x)$ avec $1/\mu = \max\{\|x\|, \|Mx\|\}$ et x vecteur propres de $M^\top M$ choisi dans $V_k^\perp$, qui existe par théorème spectral pour $M^T M$). On en déduit que $\|u^\star\| = \|v^\star\| = 1$ et que $f(u^\star, v^\star) = \lambda_1 = \lambda_2$. De plus, $MM^\top u^\star = \lambda_2 M v^\star = \lambda_2 \lambda_1 u^\star$ et $M^\top M v^\star = \lambda_1 M^\top u^\star = \lambda_1 \lambda_2 v^\star$, ce qui permet de conclure.

10. Déduire de ce qui précède le théorème de décomposition suivant, dans le cas où $M^\top M$ est définie positive.

    Théorème 1 (Théorème de décomposition en valeurs singulières)**.** *Soit M une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Il existe U et V deux matrices orthogonales de $\mathbb{R}^{n\times n}$ telles que*

$$M = U \Sigma V^\top$$

    où Σ est la matrice diagonale des racines carrées des valeurs propres de $M^\top M$, appelées valeurs singulières de M. Par ailleurs, les colonnes de U sont vecteurs propres de $MM^\top$ et les colonnes de V sont les vecteurs propres de $M^\top M$.

    Solution: Avec ce qui précède, on construit par récurrence $U = (u^1, \dots, u^n)$ matrice orthogonale dont la $i$ème colonne est un vecteur propre de $MM^\top$ associé à σ_i^2 et $V = (v^1, \dots, v^n)$ matrice orthogonale dont la $i$ème colonne est un vecteur propre de $M^\top M$ associé à σ_i^2. Par ailleurs, ces colonnes sont telles que $(u^i)^T M v^i = \sigma_i$ et $(u^i)^T M v_j = (u^i)^T \sigma_j u_j = 0$ par orthogonalité. Ainsi, on a

$$U^\top M V = \Sigma$$

    et on conclut par orthogonalité de U et V.

Exercice 3 Opérateur Proximal sous contraintes [16 points]

Dans cet exercice, on s'intéresse à la formulation du problème de minimisation sous contraintes d'une fonction convexe non-différentiable à l'aide d'un opérateur proximal. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) convexe et $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) convexe et telle que, pour un certain $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $c_i(\hat{x}) < 0$ pour c_i non-affine (condition de Slater). On considère le problème de minimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{tel que} \quad & c(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

et l'opérateur proximal sous contraintes associé

$$\begin{aligned} \mathrm{Prox}_{f,c} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \quad & f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2 \\ \text{tel que} \quad & c(s) \leq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $s \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\|s - x\|^2$ est fortement convexe et en déduire que $h : s \in \mathbb{R}^n \mapsto f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2$ l'est également.

(b) Justifier que le problème (9) admet une unique solution.

(c) On note $s = \mathrm{Prox}_{f,c}(x)$. Justifier qu'il existe $\lambda \in (\mathbb{R}_+)^m$ tel que

$$0 \in \partial f(s) + s - x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial c_i(s) \quad \text{et} \quad \lambda^\top c(s) = 0 \tag{10}$$

Solution: Il s'agit des conditions de KKT pour la fonction $h_x : s \mapsto f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2$ car $\partial h_x(s) = \partial f(s) + s - x$.

(d) En déduire que $x^\star$ solution de (8) si et seulement si

$$x^\star = \mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star) \tag{11}$$

Solution: Selon la question précédente, $x^\star = \mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star)$ ssi il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} & 0 \in \partial f(x^\star) + \mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star) - x^\star + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(\mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star)) = \partial f(x^\star) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x^\star) \\ & \text{et } \lambda^\top c(\mathrm{Prox}_{f,c}(x^\star)) = \lambda^\top c(x^\star) = 0 \end{aligned}$$

càd ssi les conditions de KKT sont vérifiées pour le problème (8). Or, f et c étant deux fonctions convexes et étant donnée l'existence de $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $x^\star$ soit une solution de (8).

Dans la suite de l'exercice, on considère le problème

$$\min_{\mathbb{1}^\top x = d} \quad f(x) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \min\{x_i, b_i\} \tag{12}$$

où $a_i \geq 0$, $b_i \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{1}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

2. Montrer que f est convexe [1].

Solution: On considère $\lambda \in [0, 1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On obtient

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \min\{\lambda x_i + (1 - \lambda) y_i, b_i\}$$

1. On pourra admettre que, pour tous $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\min\{\alpha z_1 + \beta z_2, \alpha z_3 + \beta z_4\} \geq \alpha \min\{z_1, z_3\} + \beta \min\{z_2, z_4\}$$

où, à l'aide de l'indication avec $(z_1, z_2, z_3, z_4, \alpha, \beta) = (x_i, y_i, b_i, b_i, \lambda, 1-\lambda)$,

$$\min\{\lambda x_i + (1-\lambda)y_i, b_i\} \geq \lambda \min\{x_i, b_i\} + (1-\lambda)\min\{y_i, b_i\}$$

Ainsi, puisque $a_i \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda y)) &\leq -\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\lambda \min\{x_i, b_i\} + (1-\lambda)\min\{y_i, b_i\}\right) \\ &= -\lambda a^\top \min\{x, b\} - (1-\lambda) a^\top \min\{y, b\} = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

3. Formuler (12) sous la forme du problème (8), à l'aide de deux contraintes inégalité.
   Solution: On définit $c(x) = (\mathbb{1}^\top x - d, d - \mathbb{1}^\top x)$, qui est une fonction affine, donc convexe.

On cherche à déterminer la solution du problème (12). Pour ce faire, on s'intéresse tout d'abord à l'opérateur proximal sans contrainte

$$\mathrm{Prox}_f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \underset{s \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \left(f(s) + \frac{1}{2}\|s - x\|^2 \right) \tag{13}$$

4. (a) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $(\mathrm{Prox}_f(x))_i = \mathrm{Prox}_{g_i}(x_i)$ où $g_i(x_i) = -a_i \min\{x_i, b_i\}$.
   Solution: Par définition, $f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$. Ainsi, en notant $\xi = \mathrm{Prox}_f(x)$, on a

$$0 \in \partial f(\xi) + \xi - x = (\partial g_i(\xi_i))_{1 \leq i \leq n} + \xi - x = (\partial g_i(\xi_i) + \xi_i - x_i)_{1 \leq i \leq n} \tag{14}$$

   On en déduit donc $\xi_i = \mathrm{Prox}_{g_i}(x_i)$.

   (b) Que vaut $\partial g_i(x_i)$ selon la valeur de x_i ?
   Solution:

$$\partial g_i(x_i) = \begin{cases} \{-a_i\} & \text{si } x_i < b_i \\ [-a_i, 0] & \text{si } x_i = b_i \\ \{0\} & \text{si } x_i > b_i \end{cases}$$

   (c) En déduire, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'expression de $(\mathrm{Prox}_f(x))_i$ (on pourra distinguer les cas $x_i < b_i - a_i$, $x_i \in [b_i - a_i, b_i]$ et $x_i > b_i$).
   Solution: Avec les notations précédentes, on a $0 \in \partial g_i(\xi_i) + \xi_i - x_i$ et donc
   - $\xi_i = x_i + a_i$ si $\xi_i < b_i$ càd si $x_i < b_i - a_i$
   - $\xi_i \in [x_i, x_i + a_i]$ si $\xi_i = b_i$ càd $x_i \in [b_i - a_i, b_i]$ si $\xi_i = b_i$
   - $\xi_i = x_i$ si $x_i > b_i$

   On obtient ainsi

$$(\mathrm{Prox}_f(x))_i = \begin{cases} x_i + a_i & \text{si } x_i < b_i - a_i \\ b_i & \text{si } x_i \in [b_i - a_i, b_i] \\ x_i & \text{si } x_i > b_i \end{cases}$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $s = \mathrm{Prox}_{f,c}(x)$. A l'aide de (10), justifier qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$s = \mathrm{Prox}_f(x - \mu \mathbb{1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}^\top s = d \tag{15}$$

   Solution: La première condition de KKT s'écrit dans le cas présent $0 \in \partial f(s) + s - x + \lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 \mathbb{1}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, soit, avec $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, $0 \in \partial f(s) + s - (x - \mu \mathbb{1})$. On en déduit donc $s = \mathrm{Prox}_f(x - \mu \mathbb{1})$.

6. En déduire que, si $x^\star$ solution de (12), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Prox}_f(x^\star - \mu \mathbb{1}) = x^\star \quad \text{et} \quad \mathbb{1}^\top x^\star = d \tag{16}$$

   Solution: C'est une conséquence directe de la question précédente et de la question 1.(b).

7. (a) A l'aide de l'expression de Prox_f obtenue en question 4.(c), montrer que $x^\star = \mathrm{Prox}_f(x^\star - \mu\mathbb{1})$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(i)\ \mu = a_i \text{ et } x_i^\star < b_i \ \text{ ou } \ (ii)\ \mu \in [0, a_i] \text{ et } x_i^\star = b_i \ \text{ ou } \ (iii)\ \mu = 0 \text{ et } x_i^\star > b_i \tag{17}$$

Solution: En résolvant, on obtient pour la $i$ème composante

$$\begin{cases} x_i^\star = x_i^\star - \mu + a_i \text{ si } x_i^\star - \mu < b_i - a_i \\ x_i^\star = b_i \text{ si } x_i^\star - \mu \in [b_i - a_i, b_i] \\ x_i^\star = x_i^\star - \mu \text{ si } x_i^\star - \mu > b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = a_i \text{ si } x_i^\star < b_i \\ \mu \in [0, a_i] \text{ si } x_i^\star = b_i \\ \mu = 0 \text{ si } x_i^\star > b_i \end{cases}$$

(b) On suppose que les a_i sont deux à deux distincts et que $\sum_{i=1}^n b_i \geq d$. En déduire la solution $x^\star$ de (12).

Solution: Soit j l'unique indice tel que $a_j = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$. Les conditions précédentes devant être vérifiées pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on en déduit $\mu \in [0, a_j]$ et donc $x_i^\star \geq b_i$ pour $i \neq j$. Par ailleurs, pour satisfaire la contrainte, il faut

$$x_j^\star = d - \sum_{i \neq j} x_i^\star \leq d - \sum_{i \neq j} b_i \leq b_j$$

car $d \leq \sum_{i=1}^n b_i$. Par ailleurs, du fait de la contrainte, $x_j^\star$ est une fonction décroissante des autres composantes $x_i^\star$. Comme $f(x^\star) = -a_j x_j^\star - \sum_{i \neq j} a_i b_i$ est le minimum recherché, il s'ensuit donc nécessairement que $x_i^\star = b_i$ pour $i \neq j$, sans cela $f(x^\star)$ ne serait pas un minimum. On obtient donc $x_i^\star = b_i$ pour $i \neq j$ et $x_j^\star = d - \sum_{i \neq j} b_i$. La solution optimale revient donc à privilégier les composantes correspondants aux plus fortes valeurs de a.

Examen de traitement du signal 2023

MINES Paris - Tronc Commun 1A

Durée : 1h30. Tous documents autorisés.

Exercice (7 points) :

On considère le signal continu $s : t \mapsto \sin(2\pi 5t + 3) + \frac{1}{4}\cos(4\pi t)$ défini sur $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les fréquences présentes dans le signal ? A quelle fréquence faut-il échantillonner le signal pour que le critère de Nyquist soit vérifié ? Le signal est-il périodique ?
2. On échantillonne le signal avec une fréquence $f_e = 20$ Hz sur l'intervalle de temps $0 - 2$s. Tracer la TFD, en fonction des indices entiers et des fréquences en Hz correspondantes.
3. On échantillonne le signal avec une fréquence $f_e = 8$ Hz. Tracer le spectre du signal en fonction de la fréquence exprimée en Hz.

Exercice 2 : Banc de filtres à reconstruction parfaite (12 points)

1. Soient $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ deux signaux discrets dans l'ensemble $\ell^1(\mathbb{Z})$ des signaux sommables :
$$\ell_1(\mathbb{Z}) = \left\{ x[n], n \in \mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]| < \infty \right\}.$$
On définit le produit de convolution $x * y$ de x par y en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$x * y[n] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x[m]y[n-m].$$
On admettra que le signal $x*y$ est bien défini et dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que la transformée de Fourier en temps discret (TFTD) de $\widehat{x*y}$ n'est autre que le produit des TFTDs $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$.

2. Soit $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ un signal discret. On considère le signal discret $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :
$$y[n] = x[2n].$$
Montrer que la transformée de Fourier en temps discret (TFTD) $\widehat{y}$ de y vérifie, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{y}(2\omega) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x}(\omega) + \widehat{x}(\omega+\pi)\right).$$
En comparant l'expression obtenue à celle de la transformée de Fourier continue de la fonction $t \mapsto x(2t)$, donner une interprétation du terme $\widehat{x}(\omega+\pi)$.

3. Soit $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ un signal discret. On considère le signal discret $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :
$$y[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer la TFTD du signal y.

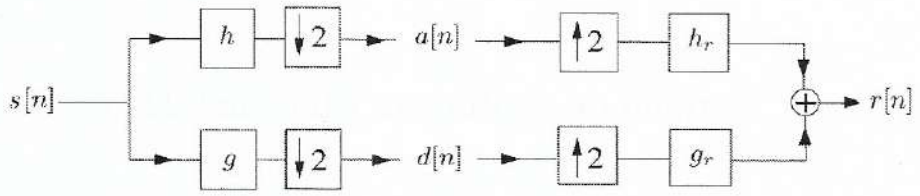


FIGURE 1 – Décomposition et reconstruction du signal.

Une manière classique d'encoder un signal s consiste à séparer ses composantes de hautes et de basses fréquences en filtrant ce dernier par un filtre passe-haut h et un filtre passe-bas g, puis à sous-échantillonner d'un facteur 2 les deux signaux obtenus afin d'obtenir un signal d contenant les variations à hautes fréquences (les "détails") du signal d'origine et un signal a contenant les variations à basses fréquences ("l'approximation") du signal d'origine :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, a[n] = s * g[2n], \qquad d[n] = s * h[2n].$$

On reconstruit ensuite le signal d'origine en sur-échantillonnant a et d par insertion de zéros et en filtrant les signaux obtenus par deux nouveaux filtres g_r et h_r. On note r le signal reconstruit :

$$r[n] = g_r * \check{a}[n] + h_r * \check{d}[n],$$

où le signal $\check{x}$ est défini par

$$\check{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Exprimer la TFTD du signal reconstruit en fonction des TFTDs $\widehat{s}$ du signal d'origines et des TFTDs des filtres h, g, h_r, g_r.

X 5. Déterminer une condition suffisante portant sur les TFTDs des filtres h_r et g_r pour qu'il soit possible de reconstruire exactement le signal d'origine, i.e pour que $r = s$.

Exercice 3 : Echantillonnage (9 points)

Soit f un signal continu dans $L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que le support de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f soit inclus dans l'intervalle $]-\pi/s, \pi/s[$. On considère enfin la fonction f_s définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$f_s(t) := \int_{t-s/2}^{t+s/2} f(u)\mathrm{d}u.$$

On admettra que la fonction f_s est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce qui peut être aisément prouvé en appliquant le théorème de Fubini).

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f_s.

$\hat{f}_s = \frac{1}{\hat{\varphi}_s} \hat{f}$ $\quad \hat{f} = \hat{\varphi}_s \hat{f}_s$

$f = \varphi_s * f_s$

2. Montrer que la fonction f s'exprime en fonction de f_s par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(u)\varphi_s(t-u)\mathrm{d}u.$$

où la transformée de Fourier de φ_s est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\varphi_s}(\omega) = \frac{\omega/2}{\sin(s\omega/2)} 1_{[-\pi/s,\pi/s]}(\omega).$$

$\Delta t \leq s$

3. Supposons que le signal f_s soit échantillonné avec un pas de temps $\Delta t = s/4$. Le critère de Nyqist est-il-respecté ? Proposer qualitativement une méthode permettant de reconstruire le signal f à partir des observations des échantillons $\{f_s(n\Delta t), n \in \mathbb{Z}\}$.

$\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ $\quad \Delta t \leq T$

Traitement du signal - Corrigé

Rédigé par LETURCQ–DALIGAUX Mattéo,
merci de signaler toute erreur ou incompréhension

31 août 2023

1 Exercice 1

On considère le signal continu $s : t \mapsto \sin(2\pi 5t + 3) + \frac{1}{4}\cos(4\pi t)$ défini sur $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les fréquences présentes dans le signal ? A quelle fréquence faut-il échantillonner le signal pour que le critère de Nyquist soit vérifié ? Le signal est-il périodique ?

   Les fréquences présentes dans le signal sont 5 Hz et 2 Hz. Il faut donc échantillonner le signal à une fréquence d'au moins $2 \times 5 = 10$ Hz.
   On a pour $t \in \mathbb{R}$, $s(t+1) = \sin(2\pi 5t + 10\pi + 3) + \frac{1}{4}\cos(4\pi t + 4\pi) = \sin(2\pi 5t + 3) + \frac{1}{4}\cos(4\pi t) = s(t)$, donc le signal est périodique de période 1.

2. On échantillonne le signal avec une fréquence $f_e = 20$ Hz sur l'intervalle de temps $0 - 2$s. Tacer la TFD, en fonction des indices entiers et des fréquences en Hz correspondantes.

2 Exercice 2 : Banc de filtres à reconstruction parfaite

1. Soient $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ deux signaux discrets dans l'ensemble $\ell^1(\mathbb{Z})$ des signaux sommables :

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ \{x[n], n \in \mathbb{Z}\} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| < \infty \right\}$$

On définit le produit de convolution $x \star y$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$x \star y[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] y[n-m]$$

On admettra que le signal $x \star y$ est bien défini et dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que la transformée de Fourier en temps discret (TFTD) $x \hat{\star} y$ n'est quetre que le produit des TFTDs $\hat{x}$ et $\hat{y}$.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\widehat{x \star y}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (x \star y)[n] e^{-i\omega n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} x[m] y[n-m] \right) e^{-i\omega n} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n-m] e^{-i\omega n} \right) \right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] e^{-i\omega (n+m)} \right) \right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] e^{-i\omega n} e^{-i\omega m} \right) \right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] e^{-i\omega m} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] e^{-i\omega n} \right) \right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] e^{-i\omega m} \hat{y}(\omega) \right) \\
&= \hat{y}(\omega) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(x[m] e^{-i\omega m} \right) \\
&= \hat{y}(\omega) \hat{x}(\omega)
\end{aligned}
$$

Donc $\widehat{x \star y} = \hat{x}\hat{y}$.

2. Soit $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ un signal discret. On considère le signal discret $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$y[n] = x[2n]$$

Montrer que la transformée de Fourier en temps discret (TFTD) $\hat{y}$ de y vérifie, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\hat{y}(2\omega) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega + \pi))$$

En comparant l'expression obtenue à celle de la transformée de Fourier continue de la fonction $t \mapsto x(2t)$, donner une interprétation du terme $\hat{x}(\omega + \pi)$.

• Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega + \pi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-i\omega n - i\pi n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega} e^{-i\pi n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega} (-1)^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(x[n] e^{-in\omega} (1 + (-1)^n) \right)
\end{aligned}
$$

Or $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Donc $\hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega + \pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2x[2n] e^{-i2n\omega} = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} x[2n] e^{-i2n\omega} = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] e^{-i2n\omega} = 2\hat{y}(2\omega)$.
D'où $\hat{y}(2\omega) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\omega) + \hat{x}(\omega + \pi))$.

• XXXXXXXXXX

3. Soit $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ un signal discret. On considère le signal discret $\{y[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$y[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la TFTD du signal y.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]e^{-i\omega n} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \underbrace{y[2p]}_{x[p]} e^{-i\omega 2p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \underbrace{y[2p+1]}_{0} e^{-i\omega(2p+1)} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} x[p]e^{-i\omega 2p} \\
&= \hat{x}(2\omega)
\end{aligned}$$

Donc $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\hat{y}(\omega) = \hat{x}(2\omega)$.

Une manière classique d'encoder un signal s consistz à séparer ses composantes de hautes et de basses fréquences en filtrant ce dernier par un filtre passe-haut h et un filtre passe-bas g, puis à sous-échantillonner d'un facteur 2 les deux signaux obtenus ain d'obtenir un signal d contenant les variations à hautes fréquences (les "détails") du signal d'origine et un signal a contenant les variations à basses fréquences ("l'approximation") du signal d'origine :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ a[n] = s \star g[2n] \quad d[n] = s \star h[2n]$$

On reconstruit ensuite le signal d'origine en sur-échantillonant a et d par insertion de zéros et en filtrant les signaux obtenus par deux nouveaux filtres g_r et h_r. On note r le signal reconstruit :

$$r[n] = g_r \star \breve{a}[n] + h_r \star \breve{d}[n],$$

où le signal $\breve{x}$ est défini par

$$\breve{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon} n \end{cases}$$

4. Exprimer la TFTD du signal reconstruit en fonction des TFTDs $\hat{s}$ du signal d'origine et des TFTDs des filtres h, g, h_r et g_r.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{r}(\omega) = \hat{g_r}(\omega)\hat{\breve{a}}(\omega) + \hat{h_r}(\omega)\hat{\breve{d}}(\omega)$$

Or $\hat{\breve{a}}(\omega) = \hat{a}(2\omega) = \frac{1}{2}(\widehat{s \star g}(\omega) + \widehat{s \star g}(\omega + \pi))$
Donc

$$\begin{aligned}
\hat{r}(\omega) = \hat{g_r}&\frac{1}{2}(\hat{s}(\omega)\hat{g}(\omega) + \hat{s}(\omega+\pi)\hat{g}(\omega+\pi)) \\
&+ \hat{h_r}\frac{1}{2}(\hat{s}(\omega)\hat{h}(\omega) + \hat{s}(\omega+\pi)\hat{h}(\omega+\pi)) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\hat{s}(\omega)\left(\hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega)\right) \\
&+ \hat{s}(\omega+\pi)\left(\hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega+\pi) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega+\pi)\right)
\end{aligned}$$

5. Déterminer une condition suffisante portant sur les TFTDs des filtres h_r et g_r pour qu'il soit possible de reconstruire exactement le signal d'origine, i.e pour que $r = s$.

On souhaite que $r = s$ ce qui est équivalent à $\hat{r} = \hat{s}$.
Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{r}(\omega) = \hat{s}(\omega) \implies \frac{1}{2}\Big(\hat{s}(\omega)\left(\hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega)\right) + \hat{s}(\omega+\pi)\left(\hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega+\pi) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega+\pi)\right)\Big) = \hat{s}(\omega)$$

Donc en prenant $\hat{h_r}(\omega)$ et $\hat{g_r}(\omega)$ tels que

$$\begin{cases} \hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega) = 2 \\ \hat{g_r}(\omega)\hat{g}(\omega+\pi) + \hat{h_r}(\omega)\hat{h}(\omega+\pi) = 0 \end{cases}$$

On obtient bien le résultat voulu $\hat{r}(\omega) = \hat{s}(\omega)$.
Ainsi une condition suffisante est : $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\hat{g_r}(\omega) = \frac{2\hat{h}(\omega+\pi)}{\hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega+\pi) - \hat{g}(\omega+\pi)\hat{h}(\omega)}$ et $\hat{h_r}(\omega) = \frac{-2\hat{g}(\omega+\pi)}{\hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega+\pi) - \hat{g}(\omega+\pi)\hat{h}(\omega)}$.

3 Exercice 3 : Echantillonnage

Soit f un signal continu dans $L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que le support de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f soit inclus dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}[$. On consière enfin la fonction f_s définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$f_s(t) := \int_{t-\frac{s}{2}}^{t+\frac{s}{2}} f(u)du.$$

On admettra que la fonction f_s est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce qui peut être aisément prouveé en appliquant le théorème de Fubini).

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f_s.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f_s}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_s(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{t-\frac{s}{2}}^{t+\frac{s}{2}} f(u)du\right) e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{t-\frac{s}{2}}^{t+\frac{s}{2}} f(u)e^{-i\omega t}dudt \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} f(u)e^{-i\omega t}\mathbf{1}_{[t-\frac{s}{2},t+\frac{s}{2}]}(u)dudt \end{aligned}$$

Or $(t,u) \mapsto f(u)e^{-i\omega t}\mathbf{1}_{[t-\frac{s}{2},t+\frac{s}{2}]}(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ car f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc d'après le théorème de Fubini,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega t} \mathbf{1}_{[u-\frac{s}{2}, u+\frac{s}{2}]}(t) dt \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{u-\frac{s}{2}}^{u+\frac{s}{2}} f(u) e^{-i\omega t} dt \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{u-\frac{s}{2}}^{u+\frac{s}{2}} e^{-i\omega t} dt \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\frac{e^{-i\omega(u+\frac{s}{2})} - e^{-i\omega(u-\frac{s}{2})}}{-i\omega} \right) du \\
&= \frac{1}{-i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} \left(e^{-i\omega\frac{s}{2}} - e^{i\omega\frac{s}{2}} \right) du \\
&= \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} \sin\left(\frac{\omega s}{2}\right) du \\
&= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega s}{2}\right) \hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

Donc, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_s(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega s}{2}\right) \hat{f}(\omega)$.

2. Montrer que la fonction f s'exprime en fonction de f_s par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(u) \varphi_s(t-u) du$$

où la transformée de Fourier de φ_s est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{\varphi}_s(\omega) = \frac{\omega/2}{\sin(s\omega/2)} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}]}(\omega).$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, alors d'après 1) on a :

$$\hat{f}_s(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega s}{2}\right) \hat{f}(\omega).$$

Donc $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega/2}{\sin(s\omega/2)} \hat{f}_s(\omega) \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}]}(\omega) = \hat{\varphi}_s(\omega) \hat{f}_s(\omega)$.
Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t) = \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}_s) \star \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_s) \right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(u) \varphi_s(t-u) du.$$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(u) \varphi_s(t-u) du$

3. Supposons que le signal f soit échantillonné avec un pas de temps $\Delta t = \frac{s}{4}$. Le critère de Nyquist est-il respecté ? Proposer qualitativement une méthode permettant de reconstruire le signal f à partir des observations des échantillons $\{f_s(n\Delta t),\ n \in \mathbb{Z}\}$.

On a $\omega_{max} = \frac{\pi}{s}$ donc $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{1}{2s}$.
Or ici $f_e = \frac{1}{\Delta t} = \frac{4}{s} > \frac{1}{s} = 2 f_{max}$ donc le critère de Nyquist est respecté.

Module de cisaillement apparent d'un bloc élastique
Singularité de contrainte dans un coin du bloc
Viscosité effective d'une suspension dans un fluide newtonien

En l'honneur des 200 ans du tenseur des contraintes de Cauchy (Cauchy, 1823).

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment même si l'objet de la deuxième partie est motivé par certaines observations de la première partie. Ce fait n'empêche pas la résolution indépendante de cette deuxième partie.

Première partie
Encadrement du module de cisaillement d'un matériau élastique isotrope

On considère un échantillon d'un matériau élastique homogène et isotrope, en forme de bloc parallélépipédique rectangle de largeur L, de hauteur h et d'épaisseur e, comme sur la figure 1. Le repérage adopté est cartésien orthonormé $OX_1X_2X_3$ de sorte que le bloc occupe le domaine Ω défini par :

$$-\frac{L}{2} \leq X_1 \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq X_2 \leq e, \quad 0 \leq X_3 \leq h$$

La pesanteur étant négligée, on se propose de réaliser l'expérience suivante dans le contexte isotherme :

- la face inférieure du bloc $X_3 = 0$ est encastrée dans un bâti rigide immobile ;
- la face supérieure $X_3 = h$ est soumise au déplacement uniforme $\underline{\boldsymbol{u}}(X_1, X_2, h) = U\underline{\boldsymbol{e}}_1$ (conditions de Dirichlet) ;
- les quatre faces latérales du bloc ($X_1 = \pm L/2, X_2 = 0, X_2 = e$) restent libres de tout effort surfacique (conditions de Neumann).

L'étude sera menée dans le cadre des petites perturbations. La loi de comportement du matériau est décrite à l'aide des coefficients de Lamé λ et μ ou du module de Young E et du coefficient de Poisson ν. Le matériau est initialement dans son état naturel.

1. Cinématique du glissement simple

On se demande, dans un premier temps, si la solution en déplacement du problème d'équilibre élastique posé pourrait être donnée par

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{gs}}(X_1, X_2, X_3) = U\frac{X_3}{h}\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{1}$$

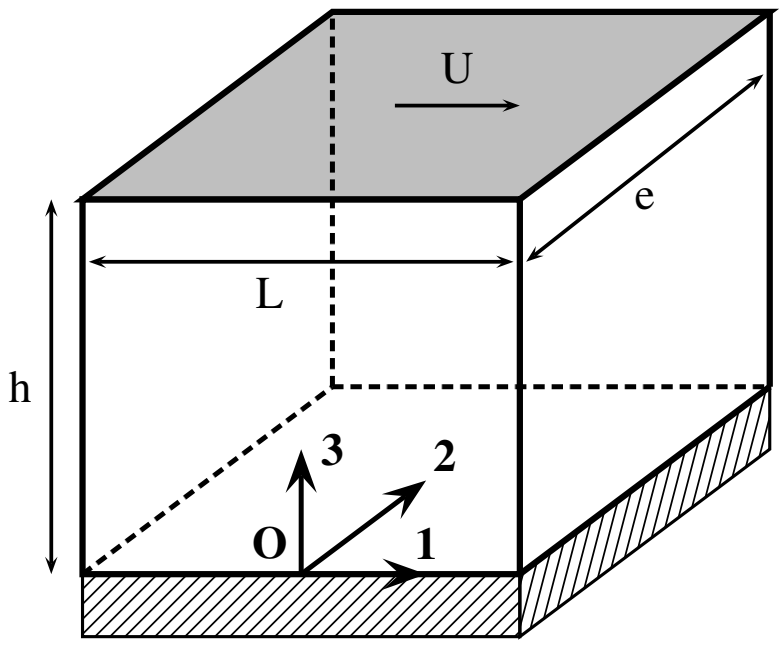


FIGURE 1: Bloc parallélépipédique encastré à sa base et dont la face supérieure est soumise à un déplacement dans la direction OX_1.

1.1. Une solution invalide

Montrer que le champ $\boldsymbol{u}^{\text{gs}}$ précédent n'est pas solution du problème posé.

Indiquer les efforts surfaciques $\boldsymbol{t}^d$ qu'il faudrait appliquer sur les parois latérales du bloc (les autres données de l'expérience restant inchangées) pour que la cinématique du glissement simple s'établisse dans le bloc.

1.2. Torseur résultant sur la face supérieure en glissement simple

On continue d'étudier le glissement simple (1) malgré son invalidité pour le problème de départ. Calculer la résultante $\boldsymbol{R}$, dont la composante selon $\boldsymbol{e}_1$ est notée F^{gs}, des efforts sur la surface $X_3 = h$ en fonction des caractéristiques du problème dans le cas du glissement simple.

Calculer le moment des forces sur la face $X_3 = h$ par rapport à un point A appartenant à cette face. Indiquer les points A conduisant à un moment nul. Le torseur $(A, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{M} = 0)$ correspondant est appelé un *glisseur*.

2. Premier encadrement du module de cisaillement apparent

On désigne par F l'intensité de la **composante selon $\boldsymbol{e}_1$ de l'effort résultant** appliqué à la face supérieure pour réaliser le déplacement U souhaité dans l'expérience de la figure 1. Par analogie avec la question 1.2, on note :

$$F = \mu^{\text{app}} S \frac{U}{h}, \quad \text{avec} \quad S = eL \tag{2}$$

Les deux exp´eriences n'´etant pas identiques, on pr´ejuge $F \neq F^{\text{gs}}$ et par cons´equent $\mu^{\text{app}} \neq \mu$. L'exp´erience de la figure 1 ne permet pas id´ealement de d´eterminer le module de cisaillement. Cependant, on va rechercher un encadrement de la quantit´e μ^{app} et on examinera alors les circonstances pour lesquelles sa mesure permettrait d'estimer valablement le module μ du mat´eriau.

2.1. Conditions aux limites de l'expérience

Définir soigneusement, en termes de $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ et/ou $\underline{\boldsymbol{t}}^d$, toutes les conditions aux limites qui fondent l'expérience réelle décrite en préambule et sur la figure 1.

2.2. Formulations variationnelles du problème d'élastostatique

Enoncer le problème étudié sous deux formes variationnelles.
Confirmer que la quantité susceptible d'être encadrée vaut ici

$$\mu^{\text{app}} \frac{V}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 \quad \text{avec} \quad V = eLh$$

et préciser les expressions fonctionnelles dont elle est la borne commune.

2.3. Premier encadrement

En choisissant des champs respectivement cinématiquement admissible $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ et statiquement admissible $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$, établir l'encadrement :

$$0 \leq \mu^{\text{app}} \leq \mu \tag{3}$$

3. Amélioration du minorant du module de cisaillement apparent

On s'intéresse à une classe de champs de contraintes statiquement admissibles de la forme suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger = f(X_1)(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + (X_3 - \frac{h}{2})g(X_1)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{4}$$

où $f(X_1)$ et $g(X_1)$ sont des fonctions tests à optimiser.

3.1. Relation entre les fonctions f et g

Justifier brièvement le choix de la forme proposée des contraintes.
Montrer qu'un tel champ de contraintes est acceptable à condition que les fonctions f et g soient convenablement liées et que la fonction f obéisse à des conditions aux limites que l'on précisera.
On fera appel dorénavant uniquement à la fonction f et on pourra utiliser la notation abrégée $f(x)$, avec x mis pour X_1.

3.2. Evaluation de l'énergie complémentaire pour le champ des contraintes proposé

Calculer l'expression, portant sur la fonction f, de la fonctionnelle à optimiser.

3.3. Optimisation du champ de contraintes proposé

On met la fonctionnelle à minimiser sous la forme

$$J(f) = \frac{e}{E} \int_{-L/2}^{L/2} \mathcal{L}(f, f') dX_1$$

Définir le lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction de f, f', ν, h, U et E.
Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange conduisent à l'équation différentielle suivante :

$$h^3 f'' - 24(1+\nu)hf + 12EU = 0 \tag{5}$$

à résoudre avec des conditions aux limites sur f que l'on précisera.
Sa résolution est repoussée à la question suivante.

3.4. Champ de contraintes estimé et calcul du minorant

Résoudre entièrement l'équation différentielle (5).
Justifier que l'estimation des contraintes trouvée, certes plausible, n'est pas la solution du problème.
Muni de cette fonction optimale $\bar{f}$, il reste à calculer le minimum de l'énergie complémentaire. Pour éviter des calculs fastidieux, on admettra que le minimum s'obtient en évaluant :

$$J(\bar{f}) = -\frac{Ue}{2}\int_{-L/2}^{L/2} \bar{f}\, dX_1 \tag{6}$$

Montrer enfin que la borne inférieure suivante du module de cisaillement apparent est obtenue :

$$1 - \frac{\tanh(\omega L/2)}{\omega L/2} \leq \frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2}{h}\sqrt{6(1+\nu)} \tag{7}$$

4. Amélioration du majorant du module de cisaillement apparent

Pour améliorer le majorant, il faut enrichir les champs cinématiquement admissibles. On ne peut pas se contenter du déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}^{\text{gs}}$ qui est linéaire en X_3. Les bords $X_1 = \pm L/2$ ne restent pas plans lors de la déformation. Un développement polynomial est une manière d'enrichir le champ en conservant l'imparité de u_1. On propose de considérer la classe suivante :

$$u_1^*(X_3) = U\left(\frac{1}{2} + A\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^3\right) \tag{8}$$

$$u_2^* = 0, \quad u_3^*(X_1, X_3) = U\frac{C}{h^3}X_1X_3(X_3 - h) \tag{9}$$

où les constantes A, B, C sont amenées à être optimisées.
On a également autorisé une fluctuation $u_3^* \neq 0$.

4.1. Une liaison entre les paramètres du champ test

Vérifier que le champ proposé $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ précédent est cinématiquement admissible à condition que

$$A + \frac{B}{4} = 1 \tag{10}$$

4.2. Evaluation de l'énergie potentielle pour le champ de déplacement proposé

Calculer l'expression de la fonction des variables A et C à optimiser.
Au passage, justifier que l'estimation proposée n'est pas solution du problème.

4.3. Calcul du majorant

Indiquer les étapes permettant d'aboutir à l'expression d'un majorant optimisé par rapport à C et A.
On admet alors que la réalisation de ces calculs un peu délicats conduit au majorant suivant :

$$\frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \leq \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{-1} \tag{11}$$

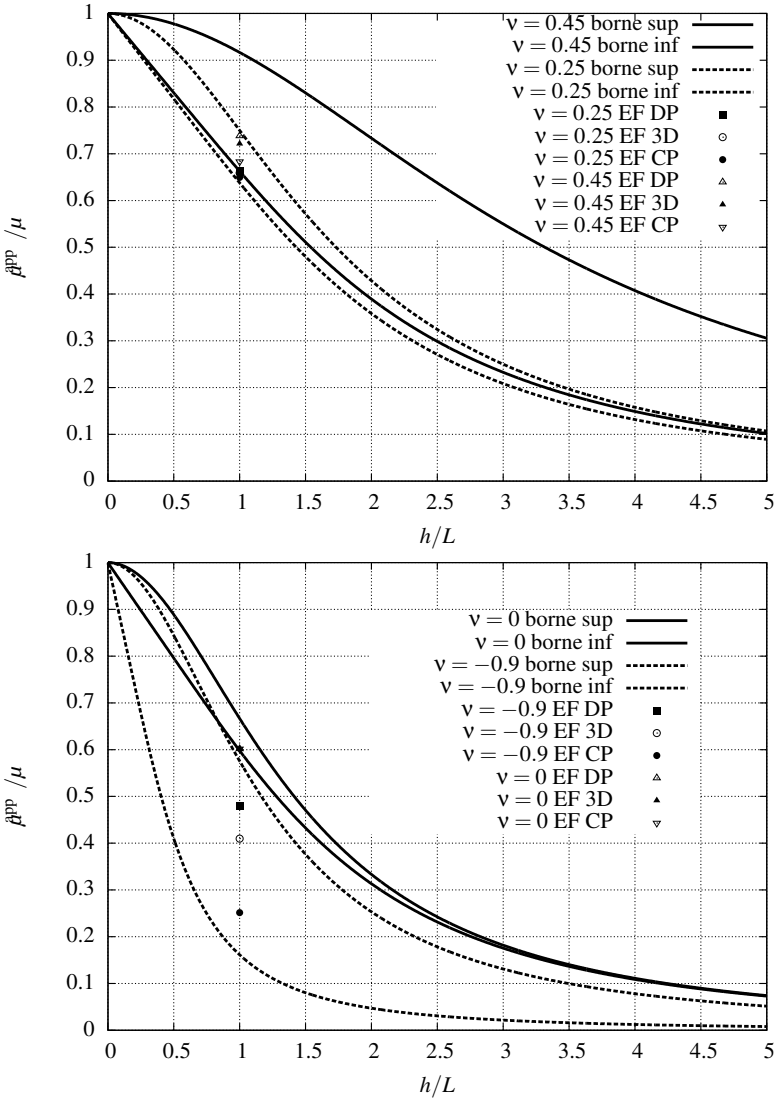


FIGURE 2: Bornes inférieures et supérieures du module de cisaillement apparent normalisé en fonction de l'élancement h/L de l'échantillon et de la valeur du coefficient de Poisson. Des résultats de calculs par éléments finis 3D pour $h/L = 1, e/L = 1$ et 2D ($h/L = 1$) en contraintes planes (CP) ou déformations planes (DP) sont également indiqués.

5. Discussion des résultats

A l'issue de ce travail conséquent, on aboutit à l'encadrement suivant du module de cisaillement apparent :

$$1 - \frac{\tanh(\sqrt{6(1+\nu)}L/h)}{\sqrt{6(1+\nu)}L/h} \leq \frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \leq \left(1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{-1} \tag{12}$$

5.1. Cas limites de la galette et de la poutre élancée

Commenter les deux cas limites $h/L \to 0$ (bloc très plat comme une galette) et $h/L \to \infty$ (poutre élancée).

Quel rapport h/L faut-il prévoir pour que la mesure de μ^{app} issue de l'expérience permette de connaître la valeur de μ à 1% près ?

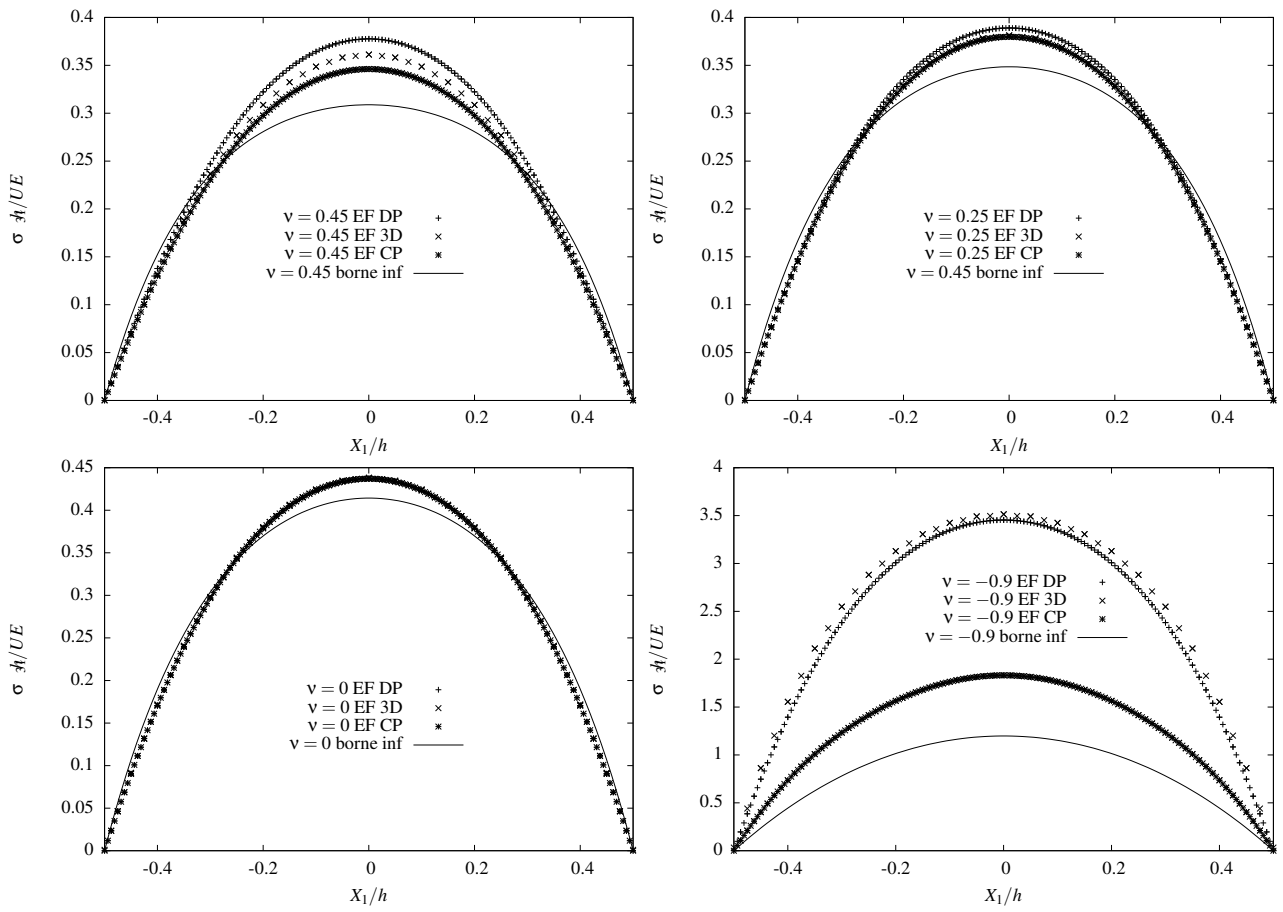


FIGURE 3: Profils de la contrainte σ_{31} normalisée le long de la ligne $X_2 = e/2, X_3 = h/2$: estimation analytique et calculs par éléments finis (EF) en 2D et 3D, pour 4 valeurs du coefficient de Poisson.

5.2. Tracé des encadrements en fonction du coefficient de Poisson

Les bornes inférieures et supérieures sont tracées sur la figure 2 pour quatre valeurs emblématiques du coefficient de Poisson, allant du milieu auxétique (ν négatif voire proche de -1) au cas incompressible $\nu = 1/2$, en passant par $\nu = 0$ et la valeur courante $\nu = 0.25$.
Commenter ces tracés.
Ces r´esultats th´eoriques sont compar´es `a des simulations num´eriques r´ealis´ees par la m´ethode des ´el´ements finis. On distingue les simulations `a deux dimensions (2D) : d´eformations planes (DP) ou contraintes planes (CP), des simulations `a trois dimensions (3D).
Commenter ces résultats.

5.3. Comparaison des champs avec des calculs par éléments finis

On s'interroge sur la qualité de l'estimation en contraintes trouvée au paragraphe 3.4. Pour cela, la figure 3 compare les profils de la composante σ_{31} le long de la ligne $X_2 = e/2, X_3 = h/2$ pour l'estimation théorique et trois résultats de calculs par éléments finis pour quatre valeurs du coefficient de Poisson.
Les champs de contraintes obtenus dans le cadre des d´eformations planes sont ´egalement donn´es sur la figure 4. La contrainte de cisaillement est visible sur la figure 5 dans le cas tridimensionnel pour deux valeurs du coefficient de Poisson.
Commenter ces résultats.

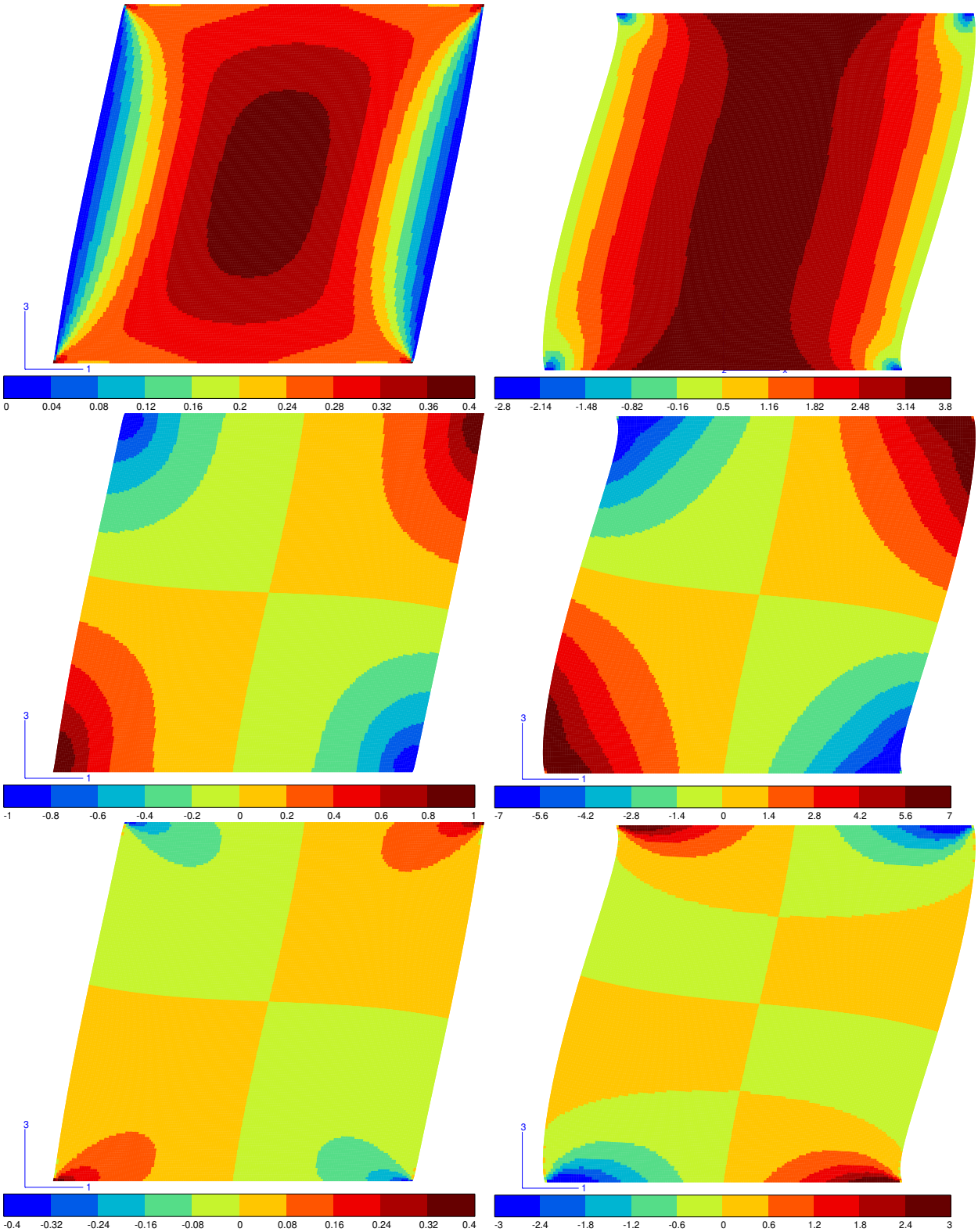


FIGURE 4: Cartes des contraintes normalisées (par EU/h) dans le plan (X_1, X_3) issues de simulations par éléments finis en 2D (déformations planes) : σ_{31} en haut, σ_{22} au milieu, σ_{11} en bas. La colonne de gauche correspond à $\nu = 0.25$ (matériau métallique par exemple) et celle de droite à $\nu = -0.9$ (matériau auxétique).

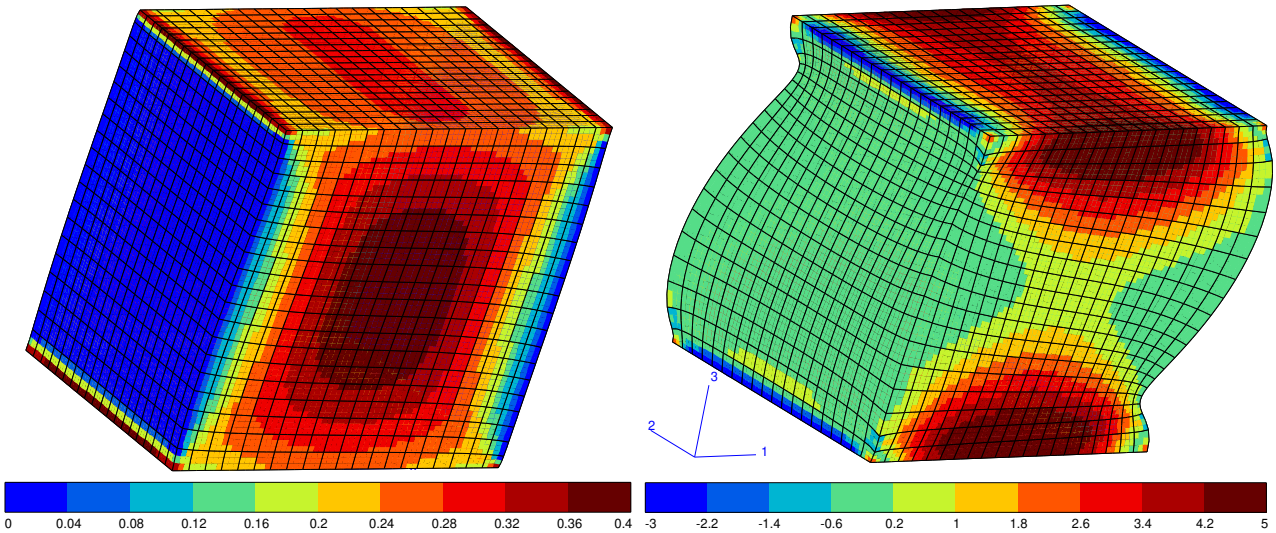


FIGURE 5: Carte des contraintes σ_{31} normalisées (par EU/h) dans le plan (X_1, X_3) issues d'un calcul par éléments finis en 3D ($h/L = e/L = 1$) : pour $\nu = 0.25$ (matériau métallique par exemple) à gauche et $\nu = -0.9$ (matériau auxétique) à droite.

5.4. Effet de l'épaisseur sur le module de cisaillement apparent

Les résultats des simulations par éléments finis de la figure 2, suggèrent que le module de cisaillement apparent obtenu pour un calcul tridimensionnel est encadré par ceux obtenus en 2D, en contraintes planes et en déformations planes. On observe que les profils de contraintes de la figure 3 respectent également cet encadrement sur le large spectre de valeurs du coefficient de Poisson.

La résolution en contraintes planes consiste à rechercher une solution

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(X_1, X_3) = \sigma_{11}(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma_{33}(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \sigma_{31}(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) \tag{13}$$

c'est-à-dire que les contraintes hors plan $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ sont supposées nulles. Elle correspond à une plaque fine $e \simeq 0$.

La solution en déformations planes porte quant à elle sur un champ de déplacements de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(X_1, X_3) = u_1(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_3(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{14}$$

caractérisée par l'absence de déplacement u_2 et aucune dépendance en X_2. Elle correspond à une plaque épaisse qui ne subit pas de déformation selon 2 sauf près des bords lointains.

En interprétant ces solutions comme des champs-tests convenables, établir, sans réel calcul, l'encadrement suggéré par les calculs numériques :

$$\mu^{\text{app}}(e = 0) \leq \mu^{\text{app}}(e) \leq \mu^{app}(e = \infty) \tag{15}$$

Deuxième partie
Analyse d'une singularité de contrainte en élasticité linéarisée

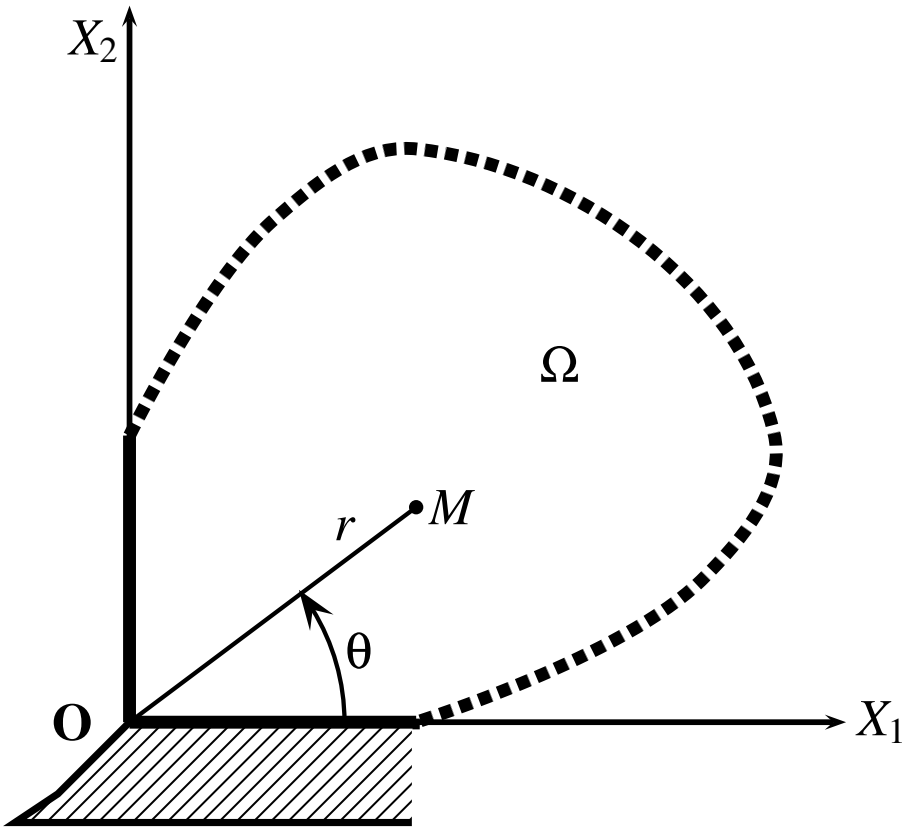


FIGURE 6: Portion Ω d'un corps matériel présentant un coin à angle droit au point O et encastré sur l'axe X_1. Coordonnées polaires des points de Ω.

Les simulations par éléments finis de l'essai de cisaillement sur l'échantillon de la figure 1 révèlent de fortes concentrations de contraintes le long des arêtes $X_1 = \pm L/2, X_3 = 0, h$. C'est le cas des calculs bidimensionnels de la figure 4 mais aussi dans le cas 3D, cf. figure 5. L'objectif de cette deuxième partie est de prouver l'existence d'une singularité des contraintes et des déformations le long de ces lignes et de la caractériser autant que possible. L'origine de cette singularité est le conflit entre l'existence inévitable de contraintes de cisaillement non nulles σ_{31} dans le plan $X_3 = 0$ par exemple et l'exigence de cisaillement nul le long des faces latérales. Le hiatus est patent le long des arêtes d'intersection des faces latérales $X_1 = \pm L/2$ et des faces $X_3 = 0, h$.

Pour limiter les calculs, le matériau étudié est supposé incompressible. De la sorte, une seule caractéristique matériau subsiste, à savoir le module de cisaillement $\mu > 0$. La loi de Hooke (cas isotherme dans l'état initial naturel) prend alors la forme réduite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \tag{16}$$

où le champ de pression p (inhérent à la liaison d'isochorie), à ce stade arbitraire, sera trait é comme une inconnue.

L'analyse proposée est purement locale et concerne le voisinage de la singularité étudiée. Il est en effet très délicat de traiter l'ensemble du problème. C'est pourquoi, on s'intéresse à un corps cylindrique Ω de longueur indéfinie, dont la section Ω par un plan perpendiculaire à la direction des génératrices, voir figure 6, possède **un coin à angle droit**, de sommet O et de côtés portés par les axes du repérage cartésien orthonormé OX_1X_2, en lequel nous rechercherons la présence éventuelle des singularités désignées ci-dessus. Une telle étude étant par essence *locale*, le trait pointillé de la figure 6 suggère que seules importeront la définition de la géométrie de la section et la formulation des conditions aux limites *au voisinage du point* O, à savoir :

- la face horizontale, le long de OX_1, est encastrée dans un massif rigide définitivement immobile ;
- la face verticale, le long de OX_2, est appelée à subir un effort surfacique donné $\underline{\boldsymbol{t}}^d$.

Concrètement, le coin considéré correspond par exemple au coin en bas à gauche des blocs cisaillés de la figure 4. Mais le problème est plus général et pourrait également correspondre à la schématisation du socle d'un barrage.

On se restreint au cadre bidimensionnel des déformations planes dans le plan X_1, X_2 avec un champ des déplacements de la forme

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_1(X_1, X_2)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_2(X_1, X_2)\underline{\boldsymbol{e}}_2$$

Dès lors, faisant usage des coordonnées polaires centrées en O ($\theta = 0$ selon OX_1), nous envisageons que le champ de déplacement recherché se comporte de la manière suivante au voisinage du point O :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(r, \theta) = r^\alpha f(\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_r + r^\alpha g(\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \qquad [+o(r^\alpha)] \tag{17}$$

avec la restriction $0 < \alpha < 1$ pour les raisons suivantes :

- $\alpha > 0$: le déplacement est ainsi régulier (continu, sans valeur infinie). De plus la densité d'énergie élastique reste finie [1] ;
- $\alpha < 1$: afin que déformations et contraintes soient effectivement singulières en O.

Pour répondre à la préoccupation annoncée, il convient alors d'exhiber les termes dominants, lorsque $r \to 0$, dans toute équation pertinente. De ce fait, puisque les efforts donnés, tant volumiques que surfaciques, sont réputés réguliers et interviennent, dans les équations qui les concernent, en compétition avec le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ délibérément espéré singulier, il est inévitable de les choisir nuls dans l'analyse à venir, de sorte que l'on affirmera, du point de vue statique :

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega, \quad \underline{\boldsymbol{t}}^d = 0 \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

Finalement, nous sommes confrontés à l'examen d'un problème d'équilibre élastique en petites perturbations, de caractère bi-dimensionnel, posé sur le quart du plan [2] $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2$, mais avec des conditions à la limite dont la formulation, restreinte à OX_1 et OX_2, est incomplète. Ce problème, où toutes les données sont homogènes à zéro, est donc susceptible de receler un espace de solutions de dimension non nulle, lequel va être recherché sous la forme déjà indiquée.

1. Pour un déplacement en r^α, les contraintes et les déformations sont en $r^{\alpha-1}$, la densité volumique d'énergie $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est de l'ordre $r^{2\alpha-2}$. Multipliée par l'élément de volume $Hrdrd\theta$, cette densité peut être intégrée sur Ω. Il apparaît que l'intégrale est convergente à condition que $\alpha > 0$.

2. Il s'agit d'un zoom sur le voisinage du point O légitime dans le cadre d'une analyse asymptotique.

6. Construction des équations différentielles régissant les fonctions recherchées

6.1. Condition d'isochorie

Ecrire la relation entre les fonctions f et g issue de la condition d'incompressibilité du milieu.

6.2. Deux autres équations sur les fonctions inconnues et le champ de pression

Etablir deux autres équations de champ portant sur les trois fonctions f, g et $p(r, \theta)$.

6.3. Equation différentielle portant sur g

En déduire que la fonction g est solution de l'équation différentielle d'ordre 4 suivante :

$$g'''' + ((1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2)g'' + (1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 g = 0 \tag{19}$$

On repousse sa résolution à la question suivante.

7. Ordre de la singularité

7.1. Détermination de la forme de f et g

Recenser les valeurs de s ($s \in \mathbb{C}$) pour lesquelles $\exp(s\theta)$ est solution de cette équation et déduire que $g(\theta)$ s'exprime par une combinaison linéaire de quatre termes trigonométriques mettant en jeu autant de constantes.
Déterminer alors $f(\theta)$ en fonction des mêmes constantes.

7.2. Traduction des conditions aux limites

Traduire la prise en compte des conditions à la limite grâce à quatre équations scalaires formant un système linéaire dont les inconnues sont les constantes apparues dans la question précédente.

7.3. Détermination de l'ordre de la singularité

En déduire que la puissance α de la singularité est solution de l'équation transcendante suivante :

$$\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \alpha \tag{20}$$

Indiquer sa valeur, avec deux décimales.
Commenter cette valeur par rapport à d'autres singularités que vous auriez rencontrées en mécanique.

7.4. Facteur d'intensité des déplacements

Montrer que les 4 constantes s'expriment en fonction d'une constante multiplicative commune K sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= K\sqrt{1-\alpha^2}, \quad B = K(1-\alpha) \\ C &= -K\sqrt{1-\alpha^2}, \quad D = -K(1+\alpha) \end{aligned} \tag{21}$$

L'espace de dimension 1 ainsi identifi´e, solution de notre probl`eme d'´equilibre local, est cens´e d´ecrire le comportement asymptotique au point $O$ de tout champ de d´eplacement solution d'un probl`eme d'´equilibre ayant trait `a la structure consid´er´ee, sollicit´ee en d´eformation plane, et t´emoigne bien de la pr´esence de contraintes singuli`eres sur l'ar^ete du coin, pourvu que $K \neq 0$.
Comment accède-t-on à la connaissance d'une valeur particulière de K ?
Ne pas essayer de le faire dans le cas du problème de la première partie car c'est hors de portée.

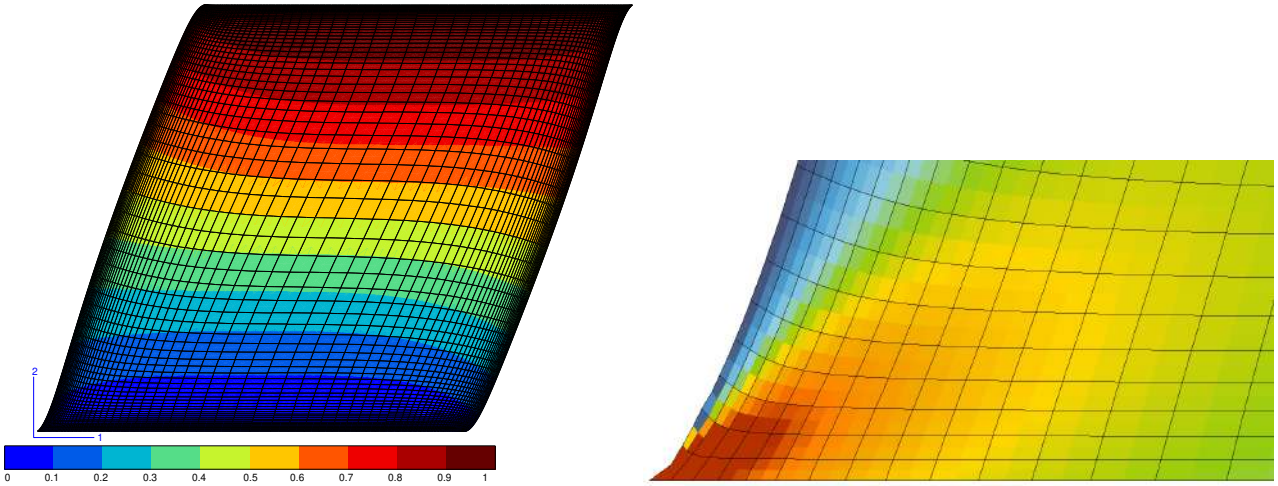


FIGURE 7: Bloc carré encastré à sa base et dont la face supérieure est soumise à un déplacement U dans la direction OX_1 (simulation par éléments finis dans le cas des déformations planes) : champ du déplacement u_1/U (à gauche), zoom sur le champ de contrainte de cisaillement dans le coin inférieur gauche (à droite, les couleurs indiquant l'intensité du cisaillement σ_{12}).

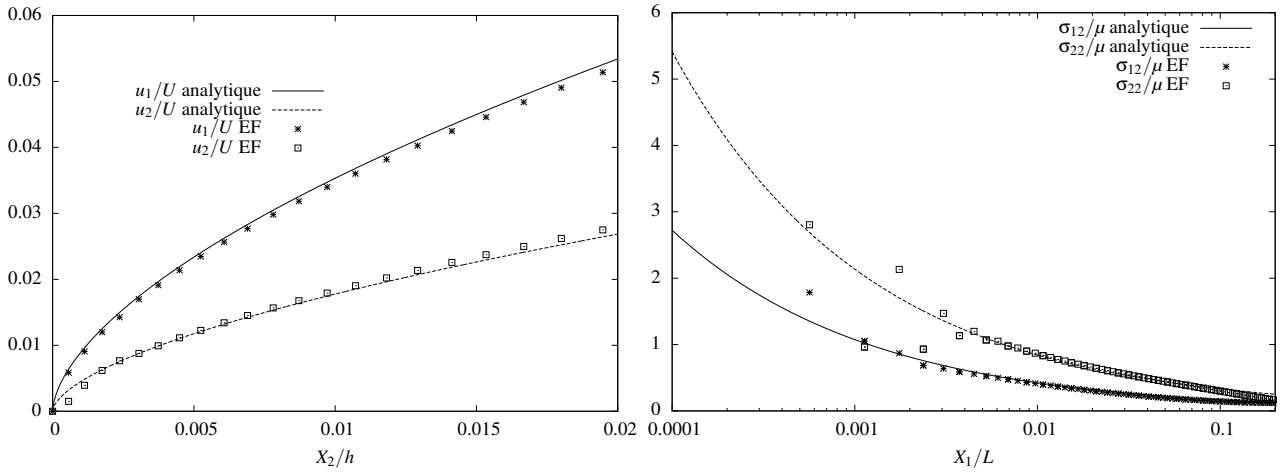


FIGURE 8: Comparaison des déplacements et des contraintes obtenus analytiquement et par la méthode des éléments finis. Le déplacement relatif imposé est $U/h = 0.2$ et le facteur d'intensité de déplacement a été identifié : $K = 0.055$ m$^{1-\alpha}$.

8. Déformée de la paroi libre et comparaison à des simulations numériques

8.1. Déplacements des points de la paroi libre

Montrer que les points de la paroi libre $\theta = \pi/2$, suffisamment proches de O, subissent les déplacements suivants

$$u_1(X_2) = 2KX_2^\alpha, \quad u_2(X_2) = 2K\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}X_2^\alpha \tag{22}$$

dans le repère cartésien.
Indiquer l'angle que fait la tangente à la courbe déformée de la paroi libre en O avec l'horizontale.

8.2. Contraintes le long de l'encastrement

Calculer les contraintes σ_{12} et σ_{22} le long de la ligne encastrée $X_2 = 0$.
Constater que ces deux composantes sont singulières au coin O.
Que peut-on craindre dans ces conditions sur la réponse de la structure au voisinage du coin ?

8.3. Une question relative au contexte infinitésimal

L'existence d'une singularité près du coin met en défaut la condition des déformations infinitésimales au voisinage du coin, ce qui remet en question la validité de la solution, au moins dans cette zone. Quelles améliorations dans la résolution de ce problème pourrait-on proposer ?
Il se trouve que la solution construite dans le contexte infinitésimal garde une validité pratique au moins au-delà d'un voisinage du coin.
Estimer alors le rayon r_0 au-delà duquel le contexte infinitésimal est respecté par la solution trouvée en fonction du chargement appliqué représenté par le paramètre $|K|$.

8.4. Comparaison avec des simulations par éléments finis

Des résultats de la simulation par éléments finis d'un bloc initialement carré encastré à sa base et dont la face supérieure est translatée horizontalement de U, comme dans la première partie du problème, sont illustrés et discutés dans cette section. La figure 7 montre la déformée à gauche. On voit qu'un maillage très fin a été utilisé sur les bords afin de capter au mieux les singularités au coin. Un zoom sur le coin gauche est montré sur la figure 7 à droite. Commenter cette image et comparer le résultat au calcul analytique réalisé précédemment de la déformée du bord libre près du coin.

La valeur du facteur K a été identifiée pour se rapprocher au mieux des profils de déplacements le long du bord libre et des contraintes le long du bord encastré sur la figure 8, dans un voisinage du coin. Commenter ces résultats.

Troisième partie
Viscosité effective d'une suspension dans un fluide : formule d'Einstein dans le cas dilué

Un fluide contenant un grand nombre de particules solides fines en suspension peut être considéré comme un milieu homogène lorsqu'on étudie des phénomènes caractérisés par des distances qui sont grandes devant les dimensions des particules. Un tel milieu aura une viscosité effective $\bar{\mu}$ différente de la viscosité μ du fluide newtonien dans lequel baignent les particules. On peut calculer plus facilement la viscosité $\bar{\mu}$ de la suspension si la concentration ϕ des particules qui y sont dispersées est faible, c'est-à-dire si le volume total occupé par les particules est faible devant le volume du fluide. Einstein (1906) a effectué ce calcul dans le cas de particules sphériques et l'établissement, partiel cependant, de ce résultat fait l'objet de cette partie.

Dans le cas dilué ($\phi \ll 1$), un volume élémentaire représentatif idéalisé de la suspension est constitué de deux sphères concentriques S_∞ et S_p, comme sur la figure 9. Le volume V_∞ contient le volume V_p de la particule. La suspension se comporte comme un agrégat de telles cellules élémentaires remplissant l'espace, au prix de combler les vides avec des cellules homothétiques puisque, on le verra, le rayon R lui-même de chaque particule ne joue pas au premier ordre étudié ici, seul compte le rapport de longueurs R/R_∞.

Le fluide est supposé visqueux incompressible obéissant à la loi de Stokes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{avec} \quad \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = 0 \tag{23}$$

où μ désigne ici la viscosité de cisaillement (unité Pa.s ou Poiseuille).

On étudie le problème stationnaire, sans effet d'inertie et en l'absence d'efforts volumiques (pas de gravité pour simplifier).

Le champ des vitesses est recherché sous la forme

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{v}}^{(0)} + \underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} \tag{24}$$

La contribution $\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)}$ désigne le mouvement du fluide non affecté par les particules et est imposée de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\infty} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} \tag{25}$$

où $\underline{\boldsymbol{x}}$ désigne les points de l'espace eulérien et $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\infty}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique, uniforme et constant. Ce dernier représente une vitesse de déformation constante imposée à la suspension, on le verra.

Le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ désigne, quant à lui, la fluctuation introduite dans la déformation du fluide par la présence des particules.

Les particules solides sont réputées rigides, i.e. indéformables, et immobiles, en raison de la symétrie des vitesses de déformations imposées.

9. Champ de pression loin des particules

Exprimer la fraction volumique ϕ de particules en fonction de R et R_∞ en considérant l'agrégat décrit précédemment de cellules élémentaires de la figure 9.

Montrer que le champ des vitesses $\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)}$ est associé à un champ de pression $p^{(0)}$ uniforme et constant.

Quelles conditions doit vérifier la fluctuation $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ sur le bord de la particule en $r = R$?

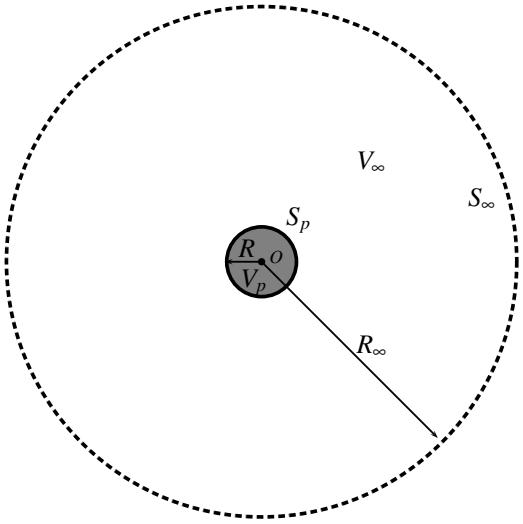


FIGURE 9: Particule sphérique de rayon R dans un fluide newtonien : cellule représentative sphérique de rayon extérieur R_∞.

10. Vitesse de déformation moyenne de la cellule représentative

Montrer que la vitesse de déformation moyenne sur la cellule représentative vaut :

$$\underset{\sim}{\bar{\boldsymbol{D}}} := \frac{1}{V_\infty} \int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\, dv = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty \tag{26}$$

On utilisera le théorème de la divergence (théorème de Gauss) et le fait que le champ des vitesses s'identifie à $\boldsymbol{v}^{(0)}$ sur le bord de V_∞, c'est-à-dire en $r = R_\infty$ (cas dilué).

11. Contrainte moyenne dans la cellule représentative

Montrer que la contrainte moyenne sur la cellule représentative peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underset{\sim}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} := \frac{1}{V_\infty} \int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv = -\bar{p}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty + \underset{\sim}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^p \tag{27}$$

où $\bar{p} = 1/V_\infty \int_{V_\infty} p dv$ est la pression moyenne et le dernier terme est une intégrale portant sur la particule :

$$\underset{\sim}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^p := \frac{1}{V_\infty} \int_{V_p} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + p\underset{\sim}{\mathbf{1}}) dv \tag{28}$$

12. Un résultat préliminaire d'homogénéisation

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})$ un champ de contraintes auto-équilibrées, i.e. tel que $\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0$. Montrer que l'intégrale de telles contraintes sur un volume matériel V quelconque peut se calculer grâce à la seule connaissance des valeurs qu'elles prennent au bord ∂V de ce volume :

$$\int_V \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv = \frac{1}{2} \int_{\partial V} ((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) \otimes \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}))\, ds \tag{29}$$

On réécrit la formule en composantes pour éviter toute ambiguïté :

$$\int_V \sigma_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_{\partial V} (\sigma_{ik} n_k x_j + \sigma_{jk} n_k x_i)\, ds$$

Pour établir cette propriété remarquable, on utilisera à nouveau le théorème de Gauss et on s'aidera de l'intégration par parties de l'expression

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ik} \delta_{kj}$$

13. Formule d'Einstein

En déduire que

$$V_\infty \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p = \frac{1}{2} \int_{S_p} \left((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \otimes \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}} \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) - \frac{2}{3} (\underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \underset{\sim}{\mathbf{1}} \right) ds \tag{30}$$

autrement dit,

$$V_\infty \bar{\sigma}^p_{ij} = \frac{1}{2} \int_{S_p} \left(\sigma_{ik} n_k x_j + \sigma_{jk} b_k x_i - \frac{2}{3} \sigma_{lk} n_k x_l \delta_{ij} \right) ds$$

Le calcul de l'intégrale de volume définissant $\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p$ pose problème car les contraintes au sein de la particule rigide sont indéterminées. Le théorème précédent permet de se ramener à un calcul sur la surface de la particule et d'utiliser les expressions des contraintes trouvées dans le fluide grâce à la continuité du vecteur-contraintes sur S_p.

On admet que[3]

$$V_\infty \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p = \frac{20}{3} \mu \pi R^3 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty \tag{31}$$

En déduire l'expression de la viscosité effective de la suspension $\bar{\mu}$ en fonction de μ et ϕ.
Ce résultat constitue la formule d'Einstein publiée en 1906, même si la méthode utilisée est différente de celle présentée ici (Einstein, 1906). Cet article comportait une erreur de calcul corrigée dans (Einstein, 1911). Cette erreur putative avait été signalée à Einstein par des expérimentateurs qui trouvaient des valeurs de viscosité effectives sensiblement différentes dans leurs manipulations de suspensions.

Références

Cauchy, A.L., 1823. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. Bulletin de la Société Philomatique , 9–13.

Einstein, A., 1906. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Annalen der Physik 324, 289–306. doi :10.1002/andp.19063240204.

Einstein, A., 1911. Berichtigung zu meiner Arbeit : Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Annalen der Physik 339, 591–592. doi :10.1002/andp.19113390313.

3. Le calcul nécessite la détermination du champ $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$, non entreprise ici, et le calcul quelque peu délicat des intégrales (30).

Module de cisaillement apparent d'un bloc élastique
Singularité de contrainte dans un coin du bloc
Viscosité effective d'une suspension dans un fluide newtonien

Première partie
Encadrement du module de cisaillement d'un matériau élastique isotrope

On considère [1] un échantillon d'un matériau élastique homogène et isotrope, en forme de bloc parallélépipédique rectangle de largeur L, de hauteur h et d'épaisseur e, comme sur la figure 1. Le repérage adopté est cartésien orthonormé $OX_1X_2X_3$ de sorte que le bloc occupe le domaine Ω défini par :

$$-\frac{L}{2} \leq X_1 \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq X_2 \leq e, \quad 0 \leq X_3 \leq h$$

La pesanteur étant négligée, on se propose de réaliser l'expérience suivante dans le contexte isotherme :

- la face inférieure du bloc $X_3 = 0$ est encastrée dans un bâti rigide immobile ;
- la face supérieure $X_3 = h$ est soumise au déplacement uniforme $\underline{\boldsymbol{u}}(X_1, X_2, h) = U\underline{\boldsymbol{e}}_1$ (conditions de Dirichlet) ;
- les quatre faces latérales du bloc ($X_1 = \pm L/2, X_2 = 0, X_2 = e$) restent libres de tout effort surfacique (conditions de Neumann).

L'étude sera menée dans le cadre des petites perturbations. La loi de comportement du matériau est décrite à l'aide des coefficients de Lamé λ et μ ou du module de Young E et du coefficient de Poisson ν. Le matériau est initialement dans son état naturel.

1. Cinématique du glissement simple

On se demande, dans un premier temps, si la solution en déplacement du problème d'équilibre élastique posé pourrait être donnée par

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{gs}}(X_1, X_2, X_3) = U\frac{X_3}{h}\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{1}$$

1. Le texte de cette première partie est une transcription fidèle d'un problème posé par M. Amestoy. Il bénéficie des notes précieuses de correction fournies par G. Dammame et a pour origine le travail de J.J. Marigo. Il est agrémenté de résultats de simulations par éléments finis permettant de juger de la qualité des estimations établies dans le texte.

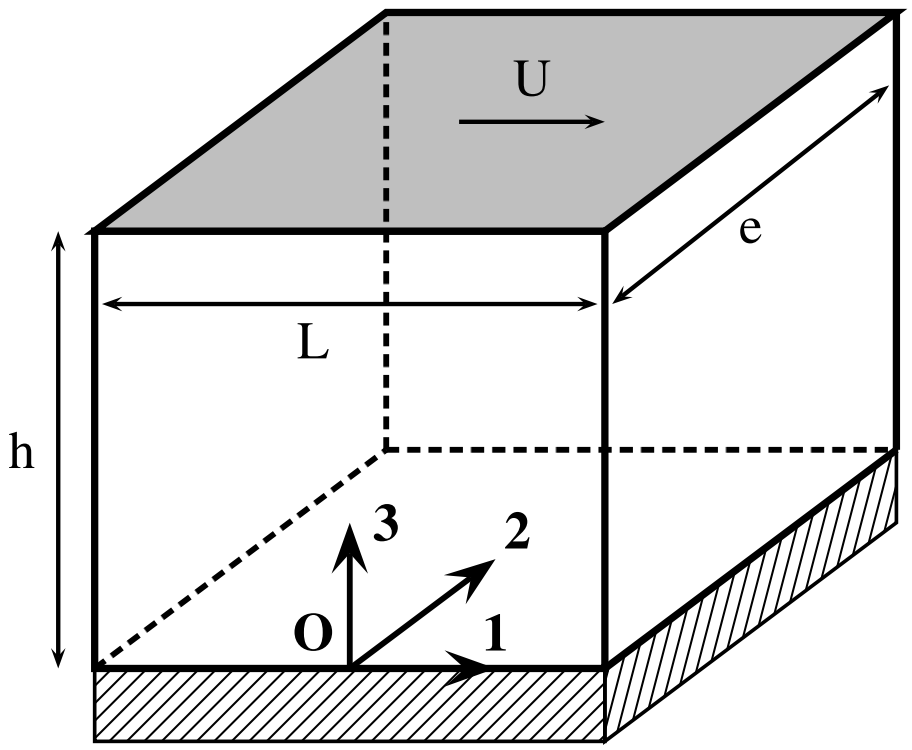


FIGURE 1: Bloc parallélépipédique encastré à sa base et dont la face supérieure est soumise à un déplacement dans la direction OX_1.

1.1. Une solution invalide

Montrer que le champ $\boldsymbol{u}^{\text{gs}}$ précédent n'est pas solution du problème posé.

Indiquer les efforts surfaciques $\boldsymbol{t}^d$ qu'il faudrait appliquer sur les parois latérales du bloc (les autres données de l'expérience restant inchangées) pour que la cinématique du glissement simple s'établisse dans le bloc.

Le champ proposé est cinématiquement admissible car il vérifie les conditions de Dirichlet en $X_3 = 0, h$. Le gradient du champ de déplacement et le tenseur des déformations infinitésimales associé à (1) sont

$$\text{Grad}\,\boldsymbol{u}^{\text{gs}} = \frac{U}{h}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}^{\text{gs}} = \frac{U}{2h}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) \tag{2}$$

Le tenseur des contraintes associées vaut alors

$$\underset{\sim}{\sigma}^{\text{gs}} = \mu\frac{U}{h}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) \tag{3}$$

Le vecteur-contrainte sur la paroi latérale de droite de normale $\boldsymbol{e}_1$ est

$$\boldsymbol{t}^d = \underset{\sim}{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \mu\frac{U}{h}\boldsymbol{e}_3 \tag{4}$$

Une valeur oppos´ee est obtenue sur la paroi de gauche. Ces valeurs non nulles sont en contradiction avec l'hypoth`ese de surface libre consid´er´ee dans l'exp´erience. Les faces avant et arri`ere sont libres comme dans l'exp´erience ´etudi´ee. Pour que $\boldsymbol{u}^{\text{gs}}$ soit solution, il faudrait donc appliquer les efforts surfaciques (4) sur les parois lat´erales gauche et droite.

1.2. Torseur résultant sur la face supérieure en glissement simple

On continue d'étudier le glissement simple (1) malgré son invalidité pour le problème de départ. Calculer la résultante $\underline{\boldsymbol{R}}$, dont la composante selon $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ est notée F^{gs}, des efforts sur la surface $X_3 = h$ en fonction des caractéristiques du problème dans le cas du glissement simple.

Calculer le moment des forces sur la face $X_3 = h$ par rapport à un point A appartenant à cette face. Indiquer les points A conduisant à un moment nul. Le torseur $(A, \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}} = 0)$ correspondant est appelé un *glisseur*.

En $X_3 = h$, la résultante efforts vaut

$$\underline{\boldsymbol{R}} = F^{\text{gs}}\underline{\boldsymbol{e}}_1, \quad \text{avec} \quad F^{\text{gs}} = \mu\frac{U}{h}eL$$

Par rapport à un point $A(X_1^A, X_2^A, h)$, le moment des forces appliquées sur la face $X_3 = h$ vaut

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \int_{X_3=h} \underline{\boldsymbol{AM}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\, dX_1 dX_2 = \int_{X_3=h} -(X_2 - X_2^A)\mu\frac{U}{h}\underline{\boldsymbol{e}}_3\, dX_1 dX_2 = -\mu\frac{U}{h}L(\frac{e^2}{2} - X_2^A e)\,\underline{\boldsymbol{e}}_3$$

On voit que le moment est nul si $X_2^A = e/2$ c'est-à-dire si A est sur la droite parallèle à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ passant par le milieu des arêtes gauche et droite de la face supérieure.

2. Premier encadrement du module de cisaillement apparent

On désigne par F l'intensité de la **composante selon $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ de l'effort résultant** appliqué à la face supérieure pour réaliser le déplacement U souhaité dans l'expérience de la figure 1. Par analogie avec la question 1.2, on note :

$$F = \mu^{\text{app}} S\frac{U}{h}, \quad \text{avec} \quad S = eL \tag{5}$$

Les deux expériences n'étant pas identiques, on préjuge $F \neq F^{\text{gs}}$ et par conséquent $\mu^{\text{app}} \neq \mu$. L'expérience de la figure 1 ne permet pas idéalement de déterminer le module de cisaillement. Cependant, on va rechercher un encadrement de la quantité μ^{app} et on examinera alors les circonstances pour lesquelles sa mesure permettrait d'estimer valablement le module μ du matériau.

2.1. Conditions aux limites de l'expérience

Définir soigneusement, en termes de $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ et/ou $\underline{\boldsymbol{t}}^d$, toutes les conditions aux limites qui fondent l'expérience réelle décrite en préambule et sur la figure 1.

Il faut indiquer les conditions appliquées à chacune des faces du bloc :

- Les faces $X_1 = \pm\frac{L}{2}$ et $X_2 = 0, e$ sont soumises aux conditions de Neumann : $\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d = 0$, dites de surfaces libres.
- La face $X_3 = 0$ est encastrée : $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}^d = 0$.
- La face $X_3 = h$ est soumise à la translation : $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}^d = U\underline{\boldsymbol{e}}_1$ où U est uniforme.

2.2. Formulations variationnelles du problème d'élastostatique

Enoncer le problème étudié sous deux formes variationnelles.
Confirmer que la quantité susceptible d'être encadrée vaut ici

$$\mu^{\text{app}} \frac{V}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 \quad \text{avec} \quad V = eLh$$

et préciser les expressions fonctionnelles dont elle est la borne commune.

Les champs solutions $(\underline{\boldsymbol{u}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ du problème considéré vérifient les inégalités variationnelles suivantes :

$$\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} \in \mathcal{SA}, \quad -\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}) \leq -\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) \leq \mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^{*}), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^{*} \in \mathcal{CA} \tag{6}$$

où $\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^{*})$ et $\mathcal{E}^{\star}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger})$ désigne respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire du corps matériel sollicité et où $\underline{\boldsymbol{u}}^{*}$ (resp. $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$) est un champ de déplacement cinématiquement (resp. de contraintes statiquement) admissible.
L'énergie potentielle associée au champ solution est évaluée grâce au théorème de Clapeyron :

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) = \int_{\Omega} W(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\, dV = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS = \frac{1}{2} \int_{X_3=h} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}\, dS \tag{7}$$

en tenant compte du fait que les faces latérales sont libres d'efforts et que le travail des efforts surfaciques sur la face $X_3 = 0$ est nul en raison de l'encastrement. On calcule alors

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2} \int_{X_3=h} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_3) \cdot U \underline{\boldsymbol{e}}_1\, dS = \frac{1}{2} U F = \frac{1}{2} U^2 \mu^{\text{app}} \frac{S}{h} = \frac{V}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 \mu^{\text{app}} \tag{8}$$

qui est le résultat annoncé pour la grandeur à encadrer.

2.3. Premier encadrement

En choisissant des champs respectivement cinématiquement admissible $\underline{\boldsymbol{u}}^{*}$ et statiquement admissible $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger}$, établir l'encadrement :

$$0 \leq \mu^{\text{app}} \leq \mu \tag{9}$$

Le champ de contraintes nulles $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} = 0$ est statiquement admissible (à divergence nulle et compatibles avec les surfaces latérales libres). L'évaluation de l'énergie complémentaire pour ce champ fournit $0 \leq \mu^{\text{app}}$.
La cinématique de glissement simple fournit un champ cinématiquement admissible $\underline{\boldsymbol{u}}^{*} = \underline{\boldsymbol{u}}^{\text{gs}}$.
L'évaluation de l'énergie potentielle pour ce champ conduit à

$$\mathcal{E}(\underline{\boldsymbol{u}}^{\text{app}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{app}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{app}}\, dV = \frac{V}{2} \mu \left(\frac{U}{h}\right)^2$$

On obtient ainsi la deuxième partie de l'encadrement $\mu^{\text{app}} \leq \mu$.

3. Amélioration du minorant du module de cisaillement apparent

On s'intéresse à une classe de champs de contraintes statiquement admissibles de la forme suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\dagger} = f(X_1)(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + (X_3 - \frac{h}{2}) g(X_1) \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{10}$$

où $f(X_1)$ et $g(X_1)$ sont des fonctions tests à optimiser.

3.1. Relation entre les fonctions f et g

Justifier brièvement le choix de la forme proposée des contraintes.
Montrer qu'un tel champ de contraintes est acceptable à condition que les fonctions f et g soient convenablement liées et que la fonction f obéisse à des conditions aux limites que l'on précisera.
On fera appel dorénavant uniquement à la fonction f et on pourra utiliser la notation abrégée $f(x)$, avec x mis pour X_1.

L'étude du glissement simple a montré que la contrainte de cisaillement σ_{31} uniforme n'est pas satisfaisante. Elle doit varier avec X_1 pour s'annuler sur les bords $X_1 = \pm L/2$. Si l'on accepte une dépendance $\sigma_{31}(X_1)$ alors l'équation d'équilibre $\sigma_{31,1}+\sigma_{33,3} = 0$ requiert l'existence d'une contrainte axiale $\sigma_{33}(X_1, X_3)$. En supposant que σ_{31} ne dépende que de X_1, l'intégration de l'équation d'équilibre montre que σ_{33} sera linéaire en X_3. Considérant que la symétrie du problème par rapport à $X_3 = h/2$, on prend une fonction impaire par rapport à $X_3 - h/2$.
L'équation d'équilibre $\sigma_{31,1} + \sigma_{33,3} = 0$ appliquée aux contraintes proposées exige que

$$f'(x) + g(x) = 0$$

Cette condition est nécessaire pour que le champ de contraintes soit statiquement admissible. On remplacera donc $g(x)$ par $-f'(x)$ dans la suite.
Enfin, les conditions de surfaces latérales libres exigent que

$$f(\pm\frac{L}{2}) = 0$$

3.2. Evaluation de l'énergie complémentaire pour le champ des contraintes proposé

Calculer l'expression, portant sur la fonction f, de la fonctionnelle à optimiser.

On part du tenseur des contraintes de la forme proposée et on calcule les déformations associées par la loi de Hooke, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger := \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \frac{\nu}{E}(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)\underset{\sim}{\mathbf{1}}$,

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & -(X_3 - \frac{h}{2})f' \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger] = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{E}(X_3 - \frac{h}{2})f' & 0 & \frac{f}{2\mu} \\ 0 & \frac{\nu}{E}(X_3 - \frac{h}{2})f' & 0 \\ \frac{f}{2\mu} & 0 & -\frac{1}{E}(X_3 - \frac{h}{2})f' \end{bmatrix} \tag{12}$$

La densité volumique d'énergie élastique vaut

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger = \frac{f^2}{2\mu} + \frac{1}{2E}(X_3 - \frac{h}{2})^2 f'^2$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)dV &= eh\int_{-L/2}^{L/2}\frac{f^2}{2\mu}dX_1 + \frac{e}{2E}\int_0^h (X_3 - \frac{h}{2})^2 dX_3 \int_{-L/2}^{L/2} f'^2 dX_1 \\ &= \frac{eh}{E}\int_{-L/2}^{L/2}\left((1+\nu)f^2 + \frac{h^2}{24}f'^2\right)dX_1 \end{aligned} \tag{13}$$

L'énergie complémentaire s'en déduit

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) &= \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)dV - \int_{X_3=h} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_3) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d dS \\
&= \int_\Omega W^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger)dV - eU \int_{-L/2}^{L/2} f\, dX_1 \\
&= \frac{e}{E} \int_{-L/2}^{L/2} \left((1+\nu)hf^2 + \frac{h^3}{24} f'^2 - UEf \right) dX_1 \qquad (14)
\end{aligned}$$

3.3. Optimisation du champ de contraintes proposé

On met la fonctionnelle à minimiser sous la forme

$$J(f) = \frac{e}{E} \int_{-L/2}^{L/2} \mathcal{L}(f, f')dX_1$$

Définir le lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction de f, f', ν, h, U et E.
Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange conduisent à l'équation différentielle suivante :

$$h^3 f'' - 24(1+\nu)hf + 12EU = 0 \qquad (15)$$

à résoudre avec des conditions aux limites sur f que l'on précisera.
Sa résolution est repoussée à la question suivante.

Il faut minimiser l'énergie complémentaire (14) qui fait intervenir le lagrangien

$$\mathcal{L}(f, f') = (1+\nu)hf^2 + \frac{h^3}{24} f'^2 - UEf$$

Les équations d'Euler-Lagrange conduisent à

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dX_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = 2(1+\nu)hf - \frac{h^3}{12} f'' - UE = 0$$

qui fournit l'équation différentielle annoncée (15). La fonction f doit satisfaire les conditions de bord $f(\pm L/2) = 0$.

3.4. Champ de contraintes estimé et calcul du minorant

Résoudre entièrement l'équation différentielle (15).
Justifier que l'estimation des contraintes trouvée, certes plausible, n'est pas la solution du problème.
Muni de cette fonction $\bar{f}$, il reste à calculer le minimum de l'énergie complémentaire. Pour éviter des calculs fastidieux, on admettra que le minimum s'obtient en évaluant :

$$J(\bar{f}) = -\frac{Ue}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \bar{f}\, dX_1 \qquad (16)$$

Montrer enfin que la borne inférieure suivante du module de cisaillement apparent est obtenue :

$$1 - \frac{\tanh(\omega L/2)}{\omega L/2} \leq \frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2}{h}\sqrt{6(1+\nu)} \qquad (17)$$

Une solution particulière de (15) est $UE/2(1+\nu)h$. La solution générale est exponentielle. Finalement,

$$\bar{f}(x) = \frac{UE}{2(1+\nu)h} + A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x)$$

avec ω donné dans (17). Les conditions $\bar{f}(\pm L/2) = 0$ permettent de déterminer les constantes d'intégration

$$B = 0, \quad A\cos(\omega\frac{L}{2}) = -\frac{UE}{2(1+\nu)h}$$

de sorte que :

$$\bar{f}(X_1) = \frac{UE}{2(1+\nu)h}\left(1 - \frac{\cosh(\omega x)}{\cosh(\omega L/2)}\right) \tag{18}$$

On peut se demander si le champ de contraintes trouvé ne serait pas, par chance, la véritable solution du problème. C'est le cas si les déformations (12) vérifient les équations de compatibilité avec la fonction $\bar{f}$. Les composantes de déformations en jeu sont :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{\nu}{E}(X_3 - \frac{h}{2})f'(X_1) = -\nu\varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{31} = f(X_1)/2\mu$$

Les équations de compatibilité impliquant ces composantes sont

$$\varepsilon_{22,33} = 0, \quad \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} = 2\varepsilon_{31,31} = 0$$

La première est effectivement vérifiée mais la deuxième exige que $f''' = 0$ ce qui n'est pas le cas avec la fonction exponentielle trouvée.
Pour établir la propriété (16), considérons le cas général d'une fonctionnelle à minimiser de la forme :

$$J(f) = \int_{-a}^{a} \alpha f'^2 + \beta f^2 - 2\gamma f dx + K \tag{19}$$

Les équations d'Euler-Lagrange fournissent :

$$\alpha f'' - \beta f + \gamma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha f'' f - \beta f^2 + \gamma f = 0$$

ce qui permet d'éliminer f^2 dans la fonctionnelle (19) :

$$J(f) = \int_{-a}^{a} \alpha f'^2 + \alpha f'' f - \gamma f dx + K$$

L'intégration par parties du premier terme $f'f' = (f'f)' - f''f$ donne

$$J(f) = \int_{-a}^{a} \alpha(f'f)' - \gamma f\, dx + K$$

Le premier terme de l'intégrale est nulle si $f(\pm a) = 0$, ce qui est le cas du problème présent et établit le résultat (16), en prenant

$$a = L/2, \quad \alpha = \frac{h^3}{24}, \quad \beta = (1+\nu)h, \quad \gamma = \frac{UE}{2}, \quad K = 0$$

L'énergie complémentaire est évaluée en $\bar{f}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\star(\bar{\underset{\sim}{\sigma}}) &= -\frac{Ue}{2}\int_{-L/2}^{L/2} \bar{f}\, dX_1 \\
&= -\frac{EV}{4(1+\nu)}\left(\frac{U}{h}\right)^2\left(1-\frac{\tanh(\omega L/2)}{\omega L/2}\right) \qquad (20)\\
&= -\frac{V}{2}\mu\left(\frac{U}{h}\right)^2\left(1-\frac{\tanh(\omega L/2)}{\omega L/2}\right) \qquad (21)
\end{aligned}$$

avec $V = ehL$. La minoration s'obtient finalement sous la forme

$$-\mathcal{E}^\star(\bar{\underset{\sim}{\sigma}}) = \mu\frac{V}{2}\left(\frac{U}{h}\right)^2\left(1-\frac{\tanh(\omega L/2)}{\omega L/2}\right) \leq \mu^{\text{app}}\frac{V}{2}\left(\frac{U}{h}\right)^2$$

4. Amélioration du majorant du module de cisaillement apparent

Pour améliorer le majorant, il faut enrichir les champs cinématiquement admissibles. On ne peut pas se contenter du déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}^{\text{gs}}$ qui est linéaire en X_3. Les bords $X_1 = \pm L/2$ ne restent pas plans lors de la déformation. Un développement polynomial est une manière d'enrichir le champ en conservant l'imparité de u_1. On propose de considérer la classe suivante :

$$\begin{aligned}
u_1^*(X_3) &= U\left(\frac{1}{2}+A\left(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2}\right)^3\right) \qquad (22)\\
u_2^*=0, \quad u_3^*(X_1,X_3) &= U\frac{C}{h^3}X_1X_3(X_3-h) \qquad (23)
\end{aligned}$$

où les constantes A, B, C sont amenées à être optimisées.
On a également autorisé une fluctuation $u_3^* \neq 0$.

4.1. Une liaison entre les paramètres du champ test

Vérifier que le champ proposé $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ précédent est cinématiquement admissible à condition que

$$A + \frac{B}{4} = 1 \qquad (24)$$

Le champ proposé doit satisfaire les conditions aux limites du problème étudié. La fluctuation u_3^* a le bon goût de s'annuler en $X_3 = 0, h$, comme il se doit. Cette condition justifie l'emploi du polynôme $X_3(X_3 - h)$.
La composante u_1^* doit également obéir aux conditions

$$u_1^*(0) = U(\frac{1}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{8}) = 0, \quad u_1^*(h) = U(\frac{1}{2}+\frac{A}{2}+\frac{B}{8}) = U$$

qui sont simultanément satisfaites ssi A et B sont liés par l'équation (24).

4.2. Evaluation de l'énergie potentielle pour le champ de déplacement proposé

Calculer l'expression de la fonction des variables A et C à optimiser.
Au passage, justifier que l'estimation proposée n'est pas solution du problème.
On calcule le gradient du champ de déplacement proposé :

$$[\text{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}}^*] = \frac{U}{h}\begin{bmatrix} 0 & 0 & A+12(1-A)(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2})^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{C}{h^2}X_3(X_3-h) & 0 & \frac{2C}{h^2}X_1(X_3-\frac{h}{2}) \end{bmatrix} \tag{25}$$

dont se déduisent les composantes non nulles des déformations :

$$\varepsilon^*_{33} = \frac{2CU}{h^3}X_1(X_3-\frac{h}{2}) \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^*_{13} &= \frac{U}{2h}\left(A+12(1-A)(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2})^2+\frac{C}{h^2}X_3(X_3-h)\right) \\ &= \frac{U}{2h}\left(A-\frac{C}{4}+4\left(3-3A+\frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{27}$$

La seconde expression a le mérite de faire apparaître la seule contribution $(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2})$, ce qui sera utile dans la suite.
La loi de Hooke permet d'accéder aux contraintes :

$$\sigma^*_{11} = \sigma^*_{22} = \lambda\frac{2UC}{h^3}X_1(X_3-\frac{h}{2}) \tag{28}$$

$$\sigma^*_{33} = (\lambda+2\mu)\frac{2UC}{h^3}X_1(X_3-\frac{h}{2}) \tag{29}$$

$$\sigma^*_{13} = \mu\frac{U}{h}\left(A-\frac{C}{4}+4\left(3-3A+\frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2}\right)^2\right) \tag{30}$$

A ce stade, il est patent que la contrainte σ^*_{11} ne peut s'annuler en $X_1 = \pm L/2$ ssi $C = 0$. Dans ce cas, $\sigma^*_{11} = 0$ et la première équation d'équilibre $\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0$ exige que σ_{31} ne dépende pas de X_3. Cette contrainte est alors uniforme et ne vérifie pas la condition de bord libre en $X_1 = \pm L/2$. Décidément, le champ proposé n'est pas la solution du problème. Cela dit, on ne lui en demande pas tant. Nous allons donc optimiser A et C pour améliorer l'estimation.
On calcule la densité volumique d'énergie élastique associée au champ-test :

$$\begin{aligned}W(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) &= \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^* : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = 2(\lambda+2\mu)\left(\frac{U}{h}\right)^2\frac{C^2}{h^4}X_1^2\left(X_3-\frac{h}{2}\right)^2 \\ &+ \frac{\mu}{2}\left(\frac{U}{h}\right)^2\left(A-\frac{C}{4}+4\left(3-3A+\frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h}-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2\end{aligned} \tag{31}$$

L'expression à optimiser est l'intégrale de $W(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)$ précédente sur le corps Ω.

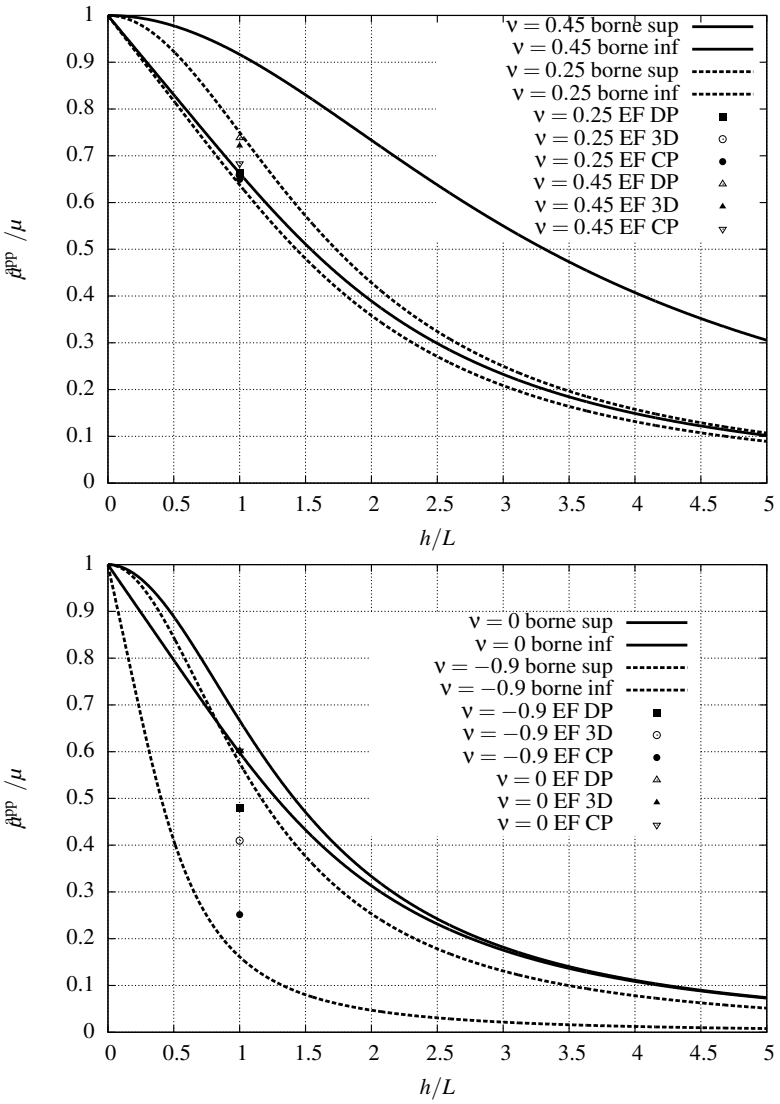


FIGURE 2: Bornes inférieures et supérieures du module de cisaillement apparent normalisé en fonction de l'élancement h/L de l'échantillon et de la valeur du coefficient de Poisson. Des résultats de calculs par éléments finis 3D pour $h/L = 1, e/L = 1$ et 2D ($h/L = 1$) en contraintes planes (CP) ou déformations planes (DP) sont également indiqués.

4.3. Calcul du majorant

Indiquer les étapes permettant d'aboutir à l'expression d'un majorant optimisé par rapport à C et A.

On admet alors que la réalisation de ces calculs un peu délicats conduit au majorant suivant :

$$\frac{\mu^{\mathrm{app}}}{\mu} \leq \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{-1} \tag{32}$$

L'optimisation par rapport à A et C exige de dériver l'expression précédente par rapport à A et C. Commençons par

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \mu\left(\frac{U}{h}\right)^2\left(A - \frac{C}{4} + 4\left(3 - 3A + \frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1 - 12\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

L'intégrale sur le volume Ω de la dérivée partielle précédente doit être nulle pour assurer l'optimalité de la borne :

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial A} dV = \mu e L \left(\frac{U}{h}\right)^2 \int_0^h (A - \frac{C}{4}) \left(1 - 12\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$+ 4\left(3 - 3A + \frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - 48\left(3 - 3A + \frac{C}{4}\right)\left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^4 dX_3 = 0 \qquad (33)$$

Elle met en jeu les intégrales suivantes

$$\int_0^h \left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 dX_3 = \frac{h}{12}, \quad \int_0^h \left(\frac{X_3}{h} - \frac{1}{2}\right)^4 dX_3 = \frac{h}{80}$$

On en déduit que le premier terme de l'intégrale (33) est nul. Il s'ensuit que le reliquat ne peut s'annuler que si le facteur $3 - 3A + C/4$ est nul, d'où la relation :

$$A = 1 + \frac{C}{12} \qquad (34)$$

Ce résultat conduit à des déformation et contrainte de cisaillement uniformes, d'après (27) et (30) :

$$\varepsilon_{13}^* = \frac{U}{2h}(1 - \frac{C}{6}), \quad \sigma_{13}^* = \mu \frac{U}{h}(1 - \frac{C}{6})$$

La densité d'énergie (31) se réduit alors à

$$W(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) = 2(\lambda + 2\mu)\left(\frac{U}{h}\right)^2 \frac{C^2}{h^4} X_1^2 \left(X_3 - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{U}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{C}{6}\right)^2$$

On dérive maintenant cette expression par rapport à C :

$$\frac{\partial W}{\partial C} = 4(\lambda + 2\mu)\left(\frac{U}{h}\right)^2 \frac{C}{h^4} X_1^2 \left(X_3 - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\mu}{6}\left(\frac{U}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{C}{6}\right)$$

On intègre sur le volume du corps étudié :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial C} &= e(\lambda + 2\mu)\left(\frac{U}{h}\right)^2 \frac{4C}{h^4} \int_{-L/2}^{L/2} X_1^2 dX_1 \int_0^h \left(X_3 - \frac{h}{2}\right)^2 dX_3 - V\frac{\mu}{6}\left(\frac{U}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{C}{6}\right) \\ &= V\left(\frac{U}{h}\right)^2 \left(4C(\lambda + 2\mu)\frac{L^2}{12^2 h^2} - \frac{\mu}{6}\left(1 - \frac{C}{6}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $C(\lambda + 2\mu)(L/h)^2 = \mu(6 - C)$ et finalement

$$C = 6\left(1 + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\left(\frac{L}{h}\right)^2\right)^{-1} \qquad (35)$$

Il reste à évaluer l'énergie potentielle pour la valeur obtenue de C. Il est possible de faire ce calcul de manière particulièrement astucieuse. Pour cela, on revient à l'expression d'origine de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}(\underset{\sim}{\varepsilon}^*) = \frac{1}{2}\int_V (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}^2 + 4\mu\varepsilon_{13}^2 dV$$

Le terme ε_{33} est linéaire en C. Par conséquent,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C} C = \int_V (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}^2 + 4\mu\varepsilon_{13}\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial C} C \, dV \; = 0$$

On appelle $\bar{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ la valeur de $\underset{\sim}{\varepsilon}^*$ obtenue avec la valeur optimale trouvée pour C. On peut calculer l'énergie potentielle minimale en évitant le calcul de ε_{33}^2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\bar{\underset{\sim}{\varepsilon}}) &= \frac{1}{2}\int_V -4\mu\varepsilon_{13}\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial C} C + 4\mu\varepsilon_{13}^2 \, dV \\
&= \frac{1}{2} V \left(\frac{U}{h}\right)^2 \mu (1 - \frac{C}{6})(1 - \frac{C}{6} + \frac{C}{6}) \\
&= \frac{1}{2} V \left(\frac{U}{h}\right)^2 \mu \frac{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\left(\frac{L}{h}\right)^2}{1 + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\left(\frac{L}{h}\right)^2} = \frac{1}{2} V \left(\frac{U}{h}\right)^2 \mu \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{-1}
\end{aligned}$$

ce qui fournit le majorant annoncé.

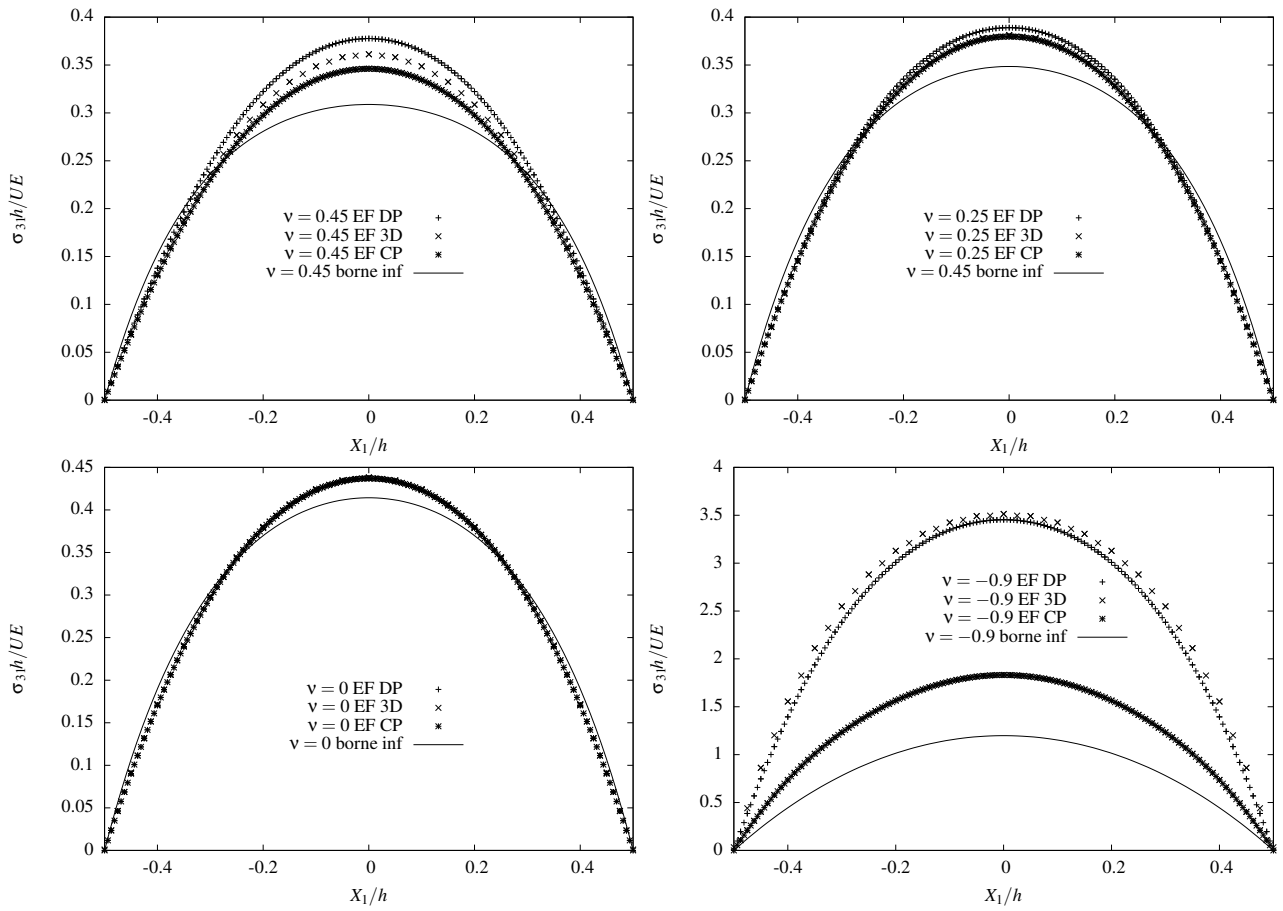


FIGURE 3: Profils de la contrainte σ_{31} normalisée le long de la ligne $X_2 = e/2, X_3 = h/2$: estimation analytique et calculs par éléments finis (EF) en 2D et 3D, pour 4 valeurs du coefficient de Poisson.

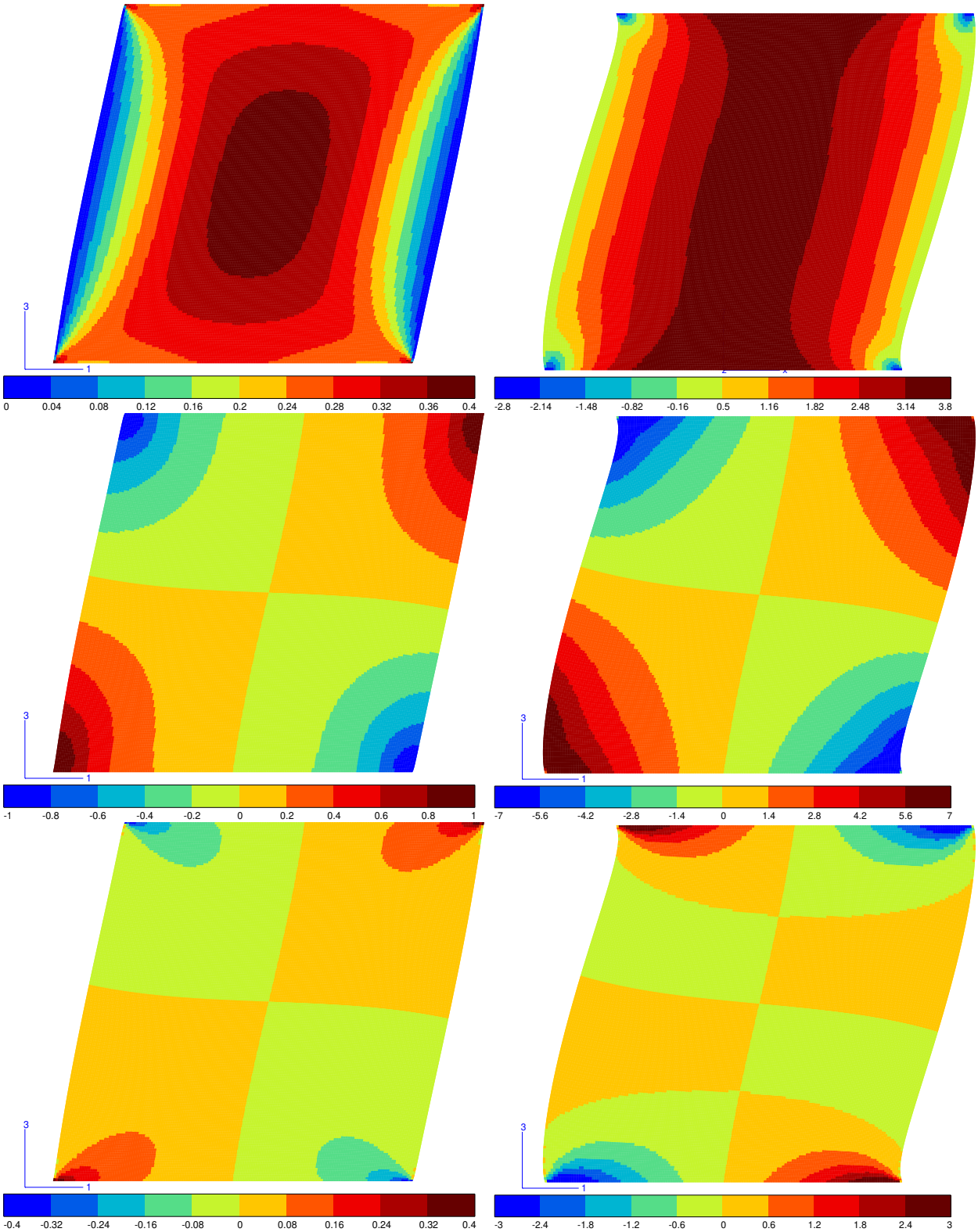


FIGURE 4: Cartes des contraintes normalisées (par EU/h) dans le plan (X_1, X_3) issues de simulations par éléments finis en 2D (déformations planes) : σ_{31} en haut, σ_{22} au milieu, σ_{11} en bas. La colonne de gauche correspond à $\nu = 0.25$ (matériau métallique par exemple) et celle de droite à $\nu = -0.9$ (matériau auxétique).

5. Discussion des résultats

A l'issue de ce travail conséquent, on aboutit à l'encadrement suivant du module de cisaillement apparent :

$$1 - \frac{\tanh(\sqrt{6(1+\nu)}L/h)}{\sqrt{6(1+\nu)}L/h} \leq \frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \leq \left(1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)^{-1} \tag{36}$$

5.1. Cas limites de la galette et de la poutre élancée

Commenter les deux cas limites $h/L \to 0$ (bloc très plat comme une galette) et $h/L \to \infty$ (poutre élancée).

Quel rapport h/L faut-il prévoir pour que la mesure de μ^{app} issue de l'expérience permette de connaître la valeur de μ à 1% près ?

Lorsque $h/L \to 0$, les deux bornes tendent vers une limite commune égale à μ. Au contraire, lorsque $h/L \to \infty$, les deux bornes tendent vers zéro de sorte que l'expérience ne permet pas de mesurer quoi que ce soit de pertinent. Dans ce dernier cas, il s'agit d'une poutre en flexion simple qui, si elle est très élancée, se courbe sans se déformer significativement.

Pour estimer le module de cisaillement on se place donc dans le cas $h/L \ll 1$. Le développement limité de l'encadrement (36) donne alors

$$1 - \frac{1}{\sqrt{6(1+\nu)}}\frac{h}{L} \leq \frac{\mu^{\text{app}}}{\mu} \leq 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

L'inversion des inégalités et un développement limité permettent d'encadrer μ :

$$1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{h}{L}\right)^2 \leq \frac{\mu}{\mu^{\text{app}}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{6(1+\nu)}}\frac{h}{L} \tag{37}$$

Au premier ordre en h/L, on a

$$\mu^{\text{app}} \leq \mu \leq \mu^{\text{app}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6(1+\nu)}}\frac{h}{L}\right)$$

L'erreur relative vaut donc $h/L\sqrt{6(1+\nu)}$. On a

$$\frac{h}{L} \leq \epsilon\sqrt{6(1+\nu)}$$

En prenant, $\epsilon = 0.01$ et $\nu = 1/4$, il faut prendre $h/L \leq 0.027$.

5.2. Tracé des encadrements en fonction du coefficient de Poisson

Les bornes inférieures et supérieures sont tracées sur la figure 2 pour quatre valeurs emblématiques du coefficient de Poisson, allant du milieu auxétique (ν négatif voire proche de -1) au cas incompressible $\nu = 1/2$, en passant par $\nu = 0$ et la valeur courante $\nu = 0.25$.

Commenter ces tracés.

Ces r´esultats th´eoriques sont compar´es `a des simulations num´eriques r´ealis´ees par la m´ethode des ´el´ements finis. On distingue les simulations `a deux dimensions (2D) : d´eformations planes (DP) ou contraintes planes (CP), des simulations `a trois dimensions (3D).

Commenter ces résultats.

Le cas ν proche de -1 conduit à une limite finie de la borne supérieure tandis que la borne inférieure tend vers 0 à h/L donné lorsque $\nu \to -1$ (prendre l'équivalent $x - x^3/3$ pour tanh en 0 pour le voir).
Au contraire, dans le cas $\nu = 0.5$, la borne supérieure n'est pas améliorée par rapport à la borne supérieure triviale μ.
Les modules apparents calculés par éléments finis respectent l'encadrement théorique, comme il se doit. On constate qu'ils sont proches de la borne inférieure, sauf dans le cas $\nu = -0.9$ du matériau auxétique. Il semble que les trois estimations numériques coïncident et sont très proches de la borne inférieure (peut-être même sont-elles égales à cette borne) dans le cas $\nu = 0$. Dans le cas $\nu = 0$, il n'y a pas de contraction latérale selon $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ et la solution est bidimensionnelle, les solutions en contraintes et déformations planes coïncident alors. L'encadrement établi à la question 5.4 indique alors que la solution 3D est identique.

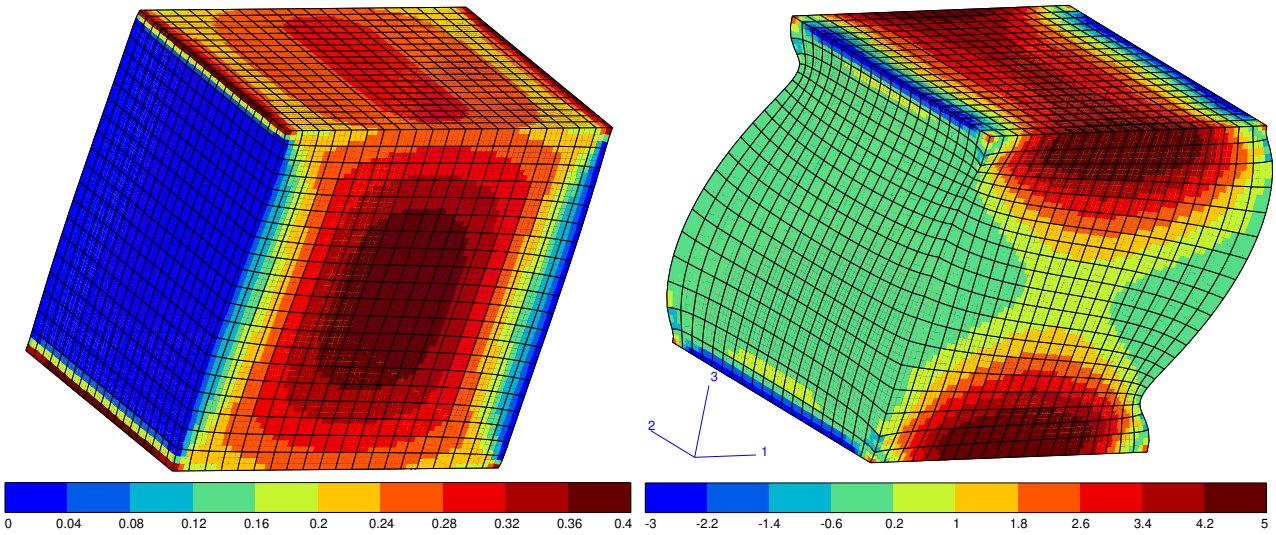


FIGURE 5: Carte des contraintes σ_{31} normalisées (par EU/h) dans le plan (X_1, X_3) issues d'un calcul par éléments finis en 3D ($h/L = e/L = 1$) : pour $\nu = 0.25$ (matériau métallique par exemple) à gauche et $\nu = -0.9$ (matériau auxétique) à droite.

5.3. Comparaison des champs avec des calculs par éléments finis

On s'interroge sur la qualité de l'estimation en contraintes trouvée au paragraphe 3.4. Pour cela, la figure 3 compare les profils de la composante σ_{31} le long de la ligne $X_2 = e/2, X_3 = h/2$ pour l'estimation théorique et trois résultats de calculs par éléments finis pour quatre valeurs du coefficient de Poisson.
Les champs de contraintes obtenus dans le cadre des déformations planes sont également donnés sur la figure 4. La contrainte de cisaillement est visible sur la figure 5 dans le cas tridimensionnel pour deux valeurs du coefficient de Poisson.
Commenter ces résultats.

On constate que les profils de contrainte par éléments finis sont rangés dans l'ordre $\sigma_{31}^{CP} \leq \sigma_{31}^{ED} \leq \sigma^{DP}{}_{31}$, sauf dans le cas aux´etique, et sont assez proches en g´en´eral de la borne inf´erieure th´eorique donn´ee par l'´equation (18). Les ´ecarts sont cependant tr`es importants dans le cas du mat´eriau aux´etique. Dans le cas $\nu = 0$, on a vu que les 3 estimations EF du module apparent co¨ıncident et semblent ˆetre identiques `a la borne inf´erieure sur la figure 2. On pourrait se

demander si on n'a pas trouvé la solution dans ce cas. On a montré également au paragraphe 3.4 que l'estimation théorique en contrainte ne convient pas. Cela se confirme sur les profils de contraintes de la figure 3, qui, s'ils sont proches, sont nettement distincts. On peut comprendre l'origine de ces écarts. La figure 4 montre que la contrainte σ_{11} n'est pas nulle en général. Or cette composante a été exclue de l'estimation (10).

5.4. Effet de l'épaisseur sur le module de cisaillement apparent

Les résultats des simulations par éléments finis de la figure 2, suggèrent que le module de cisaillement apparent obtenu pour un calcul tridimensionnel est encadré par ceux obtenus en 2D, en contraintes planes et en déformations planes. On observe que les profils de contraintes de la figure 3 respectent également cet encadrement sur le large spectre de valeurs du coefficient de Poisson.

La résolution en contraintes planes consiste à rechercher une solution

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(X_1, X_3) = \sigma_{11}(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma_{33}(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \sigma_{31}(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 + \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) \tag{38}$$

c'est-à-dire que les contraintes hors plan $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ sont supposées nulles. Elle correspond à une plaque fine $e \simeq 0$.

La solution en déformations planes porte quant à elle sur un champ de déplacements de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(X_1, X_3) = u_1(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_3(X_1, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{39}$$

caractérisée par l'absence de déplacement u_2 et aucune dépendance en X_2. Elle correspond à une plaque épaisse qui ne subit pas de déformation selon 2 sauf près des bords lointains.

En interprétant ces solutions comme des champs-tests convenables, établir, sans réel calcul, l'encadrement suggéré par les calculs numériques :

$$\mu^{\text{app}}(e = 0) \leq \mu^{\text{app}}(e) \leq \mu^{app}(e = \infty) \tag{40}$$

Le champ des contraintes issu de la solution en contraintes planes est statiquement admissible et peut être utilisé comme champ-test dans le théorème de l'énergie complémentaire.
Le champ des déplacements issu de la solution en déformations planes est cinématiquement admissible et peut être utilisé comme champ-test dans le théorème de l'énergie potentielle.
L'encadrement proposé s'en déduit.

Deuxième partie
Analyse d'une singularité de contrainte en élasticité linéarisée

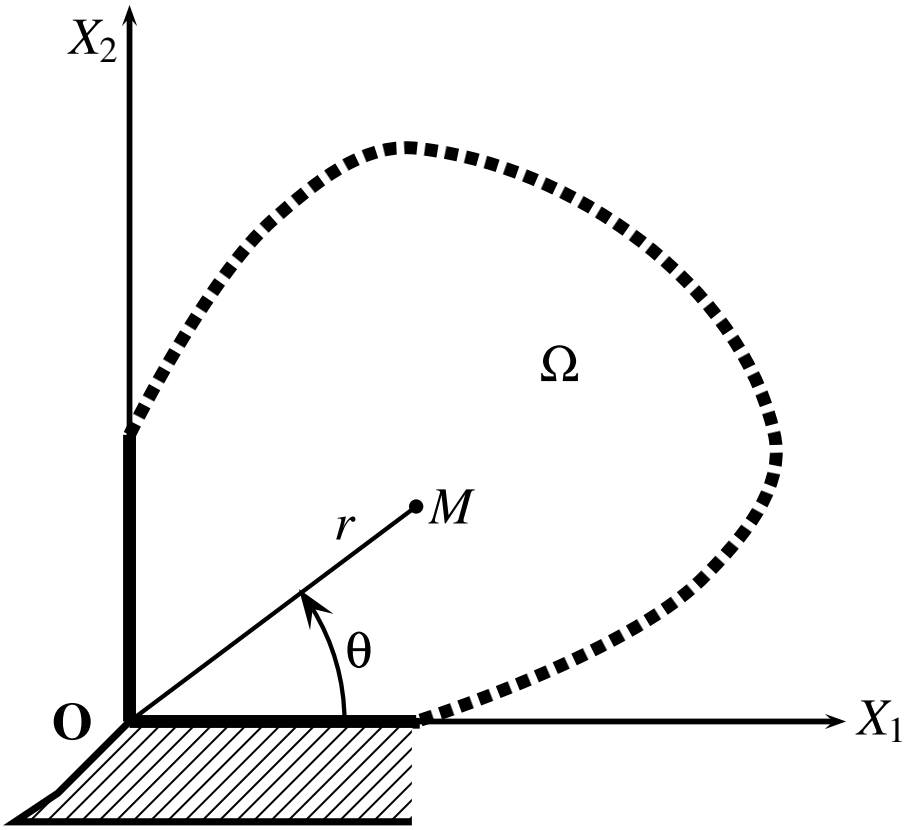


FIGURE 6: Portion Ω d'un corps matériel présentant un coin à angle droit au point O et encastré sur l'axe X_1. Coordonnées polaires des points de Ω.

Les simulations par éléments finis de l'essai de cisaillement sur l'échantillon de la figure 1 révèlent de fortes concentrations de contraintes le long des arêtes $X_1 = \pm L/2, X_3 = 0, h$. C'est le cas des calculs bidimensionnels de la figure 4 mais aussi dans le cas 3D, cf. figure 5. L'objectif de cette deuxième partie [2] est de prouver l'existence d'une singularité des contraintes et des déformations le long de ces lignes et de la caractériser autant que possible. L'origine de cette singularité est le conflit entre l'existence inévitable de contraintes de cisaillement non nulles σ_{31} dans le plan $X_3 = 0$ par exemple et l'exigence de cisaillement nul le long des faces latérales. Le hiatus est patent le long des arêtes d'intersection des faces latérales $X_1 = \pm L/2$ et des faces $X_3 = 0, h$.

Pour limiter les difficultés, le matériau étudié est supposé incompressible. De la sorte, une seule caractéristique matériau subsiste, à savoir le module de cisaillement $\mu > 0$. La loi de

2. Ce problème est une transcription directe de l'examen posé par M. Amestoy en 2004 à l'Ecole des Mines. Le corrigé suit fidèlement le texte rédigé par P. Ballard. Le problème est complété par des simulations par éléments finis illustrant quantitativement la singularité étudiée dans le cas de l'essai de cisaillement.

Hooke (cas isotherme dans l'état initial naturel) prend alors la forme réduite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \tag{41}$$

où le champ de pression p (inhérent à la liaison d'isochorie), à ce stade arbitraire, sera traité comme une inconnue.

L'analyse proposée est purement locale et concerne le voisinage de la singularité étudiée. Il est en effet très délicat de traiter l'ensemble du problème. C'est pourquoi, on s'intéresse à un corps cylindrique Ω de longueur indéfinie, dont la section Ω par un plan perpendiculaire à la direction des génératrices, voir figure 6, possède **un coin à angle droit**, de sommet O et de côtés portés par les axes du repérage cartésien orthonormé OX_1X_2, en lequel nous rechercherons la présence éventuelle des singularités désignées ci-dessus. Une telle étude étant par essence *locale*, le trait pointillé de la figure 6 suggère que seules importeront la définition de la géométrie de la section et la formulation des conditions aux limites *au voisinage du point* O, à savoir :

- la face horizontale, le long de OX_1, est encastrée dans un massif rigide définitivement immobile ;
- la face verticale, le long de OX_2, est appelée à subir un effort surfacique donné $\underline{\boldsymbol{t}}^d$.

Concrètement, le coin considéré correspond par exemple au coin en bas à gauche des blocs cisaillés de la figure 4. Mais le problème est plus général et pourrait également correspondre à la schématisation du socle d'un barrage.

On se restreint au cadre bidimensionnel des déformations planes dans le plan X_1, X_2 avec un champ des déplacements de la forme

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_1(X_1, X_2)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_2(X_1, X_2)\underline{\boldsymbol{e}}_2$$

Dès lors, faisant usage des coordonnées polaires centrées en O ($\theta = 0$ selon OX_1), nous envisageons que le champ de déplacement recherché se comporte de la manière suivante au voisinage du point O :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(r,\theta) = r^\alpha f(\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_r + r^\alpha g(\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \qquad [+o(r^\alpha)] \tag{42}$$

avec la restriction $0 < \alpha < 1$ pour les raisons suivantes :

- $\alpha > 0$: le déplacement est ainsi régulier (continu, sans valeur infinie). De plus la densité d'énergie élastique reste finie [3] ;
- $\alpha < 1$: afin que déformations et contraintes soient effectivement singulières en O.

Pour répondre à la préoccupation annoncée, il convient alors d'exhiber les termes dominants, lorsque $r \to 0$, dans toute équation pertinente. De ce fait, puisque les efforts donnés, tant volumiques que surfaciques, sont réputés réguliers et interviennent, dans les équations qui les concernent, en compétition avec le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ délibérément espéré singulier, il est inévitable de les choisir nuls dans l'analyse à venir, de sorte que l'on affirmera, du point de vue statique :

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega, \quad \underline{\boldsymbol{t}}^d = 0 \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \tag{43}$$

Finalement, nous sommes confrontés à l'examen d'un problème d'équilibre élastique en petites perturbations, de caractère bi-dimensionnel, posé sur le quart du plan [4] $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, mais

3. Pour un déplacement en r^α, les contraintes et les déformations sont en $r^{\alpha-1}$, la densité volumique d'énergie $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est de l'ordre $r^{2\alpha-2}$. Multipliée par l'élément de volume $Hrdrd\theta$, cette densité peut être intégrée sur Ω. Il apparaît que l'intégrale est convergente à condition que $\alpha > 0$.

4. Il s'agit d'un zoom sur le voisinage du point O légitime dans le cadre d'une analyse asymptotique.

avec des conditions à la limite dont la formulation, restreinte à OX_1 et OX_2, est incomplète. Ce problème, où toutes les données sont homogènes à zéro, est donc susceptible de receler un espace de solutions de dimension non nulle, lequel va être recherché sous la forme déjà indiquée.

6. Construction des équations différentielles régissant les fonctions recherchées

6.1. Condition d'isochorie

Ecrire la relation entre les fonctions f et g issue de la condition d'incompressibilité du milieu.

On calcule le gradient du champ des déplacements (42) et le tenseur des déformations infinitésimales en coordonnées cylindriques :

$$[\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}}] = \begin{bmatrix} \alpha r^{\alpha-1} f & r^{\alpha-1}(f'-g) & 0 \\ \alpha r^{\alpha-1} g & r^{\alpha-1}(f+g') & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \alpha r^{\alpha-1} f & r^{\alpha-1}(f'-(1-\alpha)g)/2 & 0 \\ r^{\alpha-1}(f'-(1-\alpha)g)/2 & r^{\alpha-1}(f+g') & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Les notations introduites sont les suivantes : $f' = df/d\theta, g' = dg/d\theta$.

La variation de volume est fournie, dans le contexte infinitésimal, par la divergence des déplacements ou, de manière équivalente, la trace du tenseur des déformations infinitésimales. Le condition d'isochorie de la transformation s'écrit :

$$\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}} = \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = r^{\alpha-1}((1+\alpha)f + g') = 0 \quad \Longrightarrow \quad g' = -(1+\alpha)f \tag{45}$$

6.2. Deux autres équations sur les fonctions inconnues et le champ de pression

Etablir deux autres équations de champ portant sur les trois fonctions f, g et $p(r,\theta)$.

La loi de Hooke dans le cas incompressible (41) permet de calculer les composantes non nulles de contraintes :

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\alpha r^{\alpha-1} f \tag{46}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu r^{\alpha-1}(f+g')$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu r^{\alpha-1}(f'-(1-\alpha)g) \tag{47}$$

Les composantes non nulles de la divergence des contraintes sont, quant à elles,

$$(\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu r^{\alpha-2}(2\alpha(\alpha-1)f - 2((1-\alpha)f+g') + f'' - (1-\alpha)g')$$

$$(\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu r^{\alpha-2}((\alpha-1)(f'-(1-\alpha)g) + 2(2f'+g''-(1-\alpha)g))$$

L'équilibre local (43) exige la nullité de la divergence des contraintes de sorte que

$$\frac{1}{\mu} r^{2-\alpha}\frac{\partial p}{\partial r} = f'' + (\alpha-3)g' + 2(\alpha^2-1)f \tag{48}$$

$$\frac{1}{r\mu} r^{2-\alpha}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 2g'' + (\alpha+3)f' + (\alpha^2-1)g \tag{49}$$

Ce sont les deux équations recherchées.

6.3. Equation différentielle portant sur g

En déduire que la fonction g est solution de l'équation différentielle d'ordre 4 suivante :

$$g'''' + ((1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2)g'' + (1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 g = 0 \tag{50}$$

On repousse sa résolution à la question suivante.

En dérivant l'équation (48) par rapport à θ, on obtient

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta\partial r} = \left(f''' + (\alpha-3)g'' + 2(\alpha^2-1)f'\right) r^{\alpha-2}$$

La dérivation de (49) par rapport à r conduit ensuite à

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta} = (\alpha-1)r^{\alpha-2}\left(2g'' + (3+\alpha)f' + (\alpha^2-1)g\right)$$

L'égalité de Schwarz exige que les membres de droite des deux équations précédentes soient égaux, ce qui fournit l'équation suivante :

$$f''' - (1+\alpha)g'' + (1-\alpha^2)f' + (1-\alpha)^2(1+\alpha)g = 0$$

On élimine la fonction f dans l'équation précédente en utilisant la condition d'isochorie $f = -g'/(1+\alpha)$. C'est ainsi qu'on obtient l'équation différentielle du quatrième ordre (50).

7. Ordre de la singularité

7.1. Détermination de la forme de f et g

Recenser les valeurs de s ($s \in \mathbb{C}$) pour lesquelles $\exp(s\theta)$ est solution de cette équation et déduire que $g(\theta)$ s'exprime par une combinaison linéaire de quatre termes trigonométriques mettant en jeu autant de constantes.

Déterminer alors $f(\theta)$ en fonction des mêmes constantes.

Les nombres complexes recherchés doivent être solutions de l'équation polynomiale suivante, de degré 4 :

$$s^4 + ((1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2)s^2 + (1+\alpha)^2(1-\alpha)^2 = 0 \tag{51}$$

$y = s^2$ est donc solution d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $16\alpha^2$. On trouve alors

$$y^+ = -(1-\alpha)^2, \quad y^- = -(1+\alpha)^2$$

d'où les quatre racines de l'équation (51) :

$$s = \pm i(1+\alpha) \quad \text{ou} \quad s = \pm i(1-\alpha)$$

où $i^2 = -1$. La fonction g étant à valeurs réelles, on ne s'intéresse qu'aux parties réelles de $\exp(s\theta)$. Il existe donc 4 constantes, A, B, C et D, telles que

$$g(\theta) = A\cos((1+\alpha)\theta) + B\sin((1+\alpha)\theta) + C\cos((1-\alpha)\theta) + D\sin((1-\alpha)\theta) \tag{52}$$

La fonction $f = -g'/(1+\alpha)$ vaut alors

$$f(\theta) = A\sin((1+\alpha)\theta) - B\cos((1+\alpha)\theta) + C\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\sin((1-\alpha)\theta) - D\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cos((1-\alpha)\theta) \tag{53}$$

7.2. Traduction des conditions aux limites

Traduire la prise en compte des conditions à la limite grâce à quatre équations scalaires formant un système linéaire dont les inconnues sont les constantes apparues dans la question précédente.

L'arête $X_2 = 0$ est encastrée, donc

$$\underline{\boldsymbol{u}}\,(r, \theta = 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = g(0) = 0$$

L'arête $X_1 = 0$ est une surface libre d'effort : $\underline{\boldsymbol{t}}^d = 0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}$ avec $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{e}}_\theta(\theta = \pi/2)$, de sorte $\underline{\boldsymbol{t}}^d = \sigma_{r\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$. La condition

$$\sigma_{r\theta}(\theta = \pi/2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\pi/2) + (\alpha - 1)g(\pi/2) = 0$$

D'autre part

$$\sigma_{\theta\theta}(\pi/2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -p(\pi/2) + 2\mu r^{\alpha-1}(f(\pi/2) + g'(\pi/2)) = 0 \tag{54}$$

Pour évaluer cette condition, il faut déterminer la pression. En intégrant l'équation (48) par rapport à r, on obtient

$$\frac{p}{\mu} = \frac{r^{\alpha-1}}{\alpha - 1}f'' + \frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}r^{\alpha-1}g' + 2(1 + \alpha)r^{\alpha-1}f + a(\theta)$$

avec la fonction d'intégration $a(\theta)$. La dérivation de cette expression de p par rapport à θ conduit à

$$\frac{1}{\mu}r^{2-\alpha}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{\alpha - 1}f''' + \frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}g'' + 2(1 + \alpha)f' + a'(\theta)r^{\alpha-2}$$

Or, l'équation (49) indique que le membre de droite de l'équation précédente est une fonction de la seule variable θ. Cela exige donc que $a' = 0 \Longrightarrow a = a_0$.

On peut maintenant revenir à la condition (54) :

$$2(f(\pi/2) + g'(\pi/2)) = \frac{1}{\alpha - 1}f''(\pi/2) + \frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}g'(\pi/2) + 2(1 + \alpha)f(\pi/2) + a_0 r^{1-\alpha}$$

Cette égalité doit être vraie $\forall r$, ce qui exige que $a_0 = 0$. Par conséquent,

$$f''(\pi/2) - (1 + \alpha)g'(\pi/2) + 2\alpha(\alpha - 1)f(\pi/2) = 0$$

On obtient la quatrième condition en éliminant g' de l'équation précédente :

$$f''(\pi/2) + (1 + 3\alpha^2)f(\pi/2) = 0 \tag{55}$$

7.3. Détermination de l'ordre de la singularité

En déduire que la puissance α de la singularité est solution de l'équation transcendante suivante :

$$\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \alpha \tag{56}$$

Indiquer sa valeur, avec trois décimales.

Commenter cette valeur par rapport à d'autres singularités que vous auriez rencontrées en mécanique.

Deux équations sont obtenues aisément :

$$\begin{aligned} f(0) &= -B - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}D = 0 \\ g(0) &= A + C = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Après avoir calculé les dérivées successives de f à partir de (53), les équations (54) et (55) fournissent

$$A(1+\alpha)\cos(1+\alpha)\frac{\pi}{2}) + B(1+\alpha)\sin((1+\alpha)\frac{\pi}{2}) - C(1-\alpha)\cos((1-\alpha)\frac{\pi}{2}) - D(1-\alpha)\sin((1-\alpha)\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$A\sin(1+\alpha)\frac{\pi}{2}) - B\cos((1+\alpha)\frac{\pi}{2}) - C\sin((1-\alpha)\frac{\pi}{2}) + D\cos((1-\alpha)\frac{\pi}{2}) = 0$$

Si l'on remarque que

$$\cos((1+\alpha)\frac{\pi}{2}) = -\sin(\pi\alpha/2) = -\cos((1-\alpha)\frac{\pi}{2})$$

$$\sin((1-\alpha)\frac{\pi}{2}) = \sin((1+\alpha)\frac{\pi}{2}) = \cos(\pi\alpha/2)$$

et que l'on élimine C et D grâce à (57), les expressions se simplifient pour fournir deux équations portant sur A et B :

$$A\alpha\sin(\pi\alpha/2) - B(1+\alpha)\cos(\pi\alpha/2) = 0$$

$$A(1-\alpha)\cos(\pi\alpha/2) - B\alpha\cos(\pi\alpha/2) = 0$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène qui fournit une solution non triviale lorsque son déterminant est nul :

$$\det\begin{bmatrix} \alpha\sin(\pi\alpha/2) & -(1+\alpha)\cos(\pi\alpha/2) \\ (1-\alpha)\cos(\pi\alpha/2) & -\alpha\cos(\pi\alpha/2) \end{bmatrix} = \cos^2(\pi\alpha/2) - \alpha^2 = 0$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on trouve que α est solution de l'équation (56) et que $\alpha \simeq 0.596$.
Au moins deux situations de singularités de contraintes et déformations ont été rencontrées dans le cours. Le cas de la fissure présente un champ de déplacement en $\sqrt{r}$ ($\alpha = 1/2$) autour de la pointe et donc une singularité de contrainte en $1/\sqrt{r}$, cf. équation (**??**). L'étude du problème de Flamant correspondant à l'application d'une distribution linéique de forces, cf. chapitre **??**, a révélé une singularité de contrainte en $1/r$ ($\alpha = 0$) et un déplacement en $\log(r)$. En comparaison, la singularité du coin à angle droit est moins sévère car α est plus proche de 1.

7.4. Facteur d'intensité des déplacements

Montrer que les 4 constantes s'expriment en fonction d'une constante multiplicative commune K sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= K\sqrt{1-\alpha^2}, \quad B = K(1-\alpha) \\ C &= -K\sqrt{1-\alpha^2}, \quad D = -K(1+\alpha) \end{aligned} \tag{58}$$

L'espace de dimension 1 ainsi identifi´e, solution de notre probl`eme d'´equilibre local, est cens´e d´ecrire le comportement asymptotique au point $O$ de tout champ de d´eplacement solution d'un probl`eme d'´equilibre ayant trait `a la structure consid´er´ee, sollicit´ee en d´eformation plane, et

témoigne bien de la présence de contraintes singulières sur l'arête du coin, pourvu que $K \neq 0$. Comment accède-t-on à la connaissance d'une valeur particulière de K ?

Les calculs de la question précédente permettent de déterminer les constantes en fonction de B sous la forme :

$$A = \sqrt{1-\alpha^2}\frac{B}{1-\alpha}, \quad C = -A, \quad D = -(1+\alpha)\frac{B}{1-\alpha}$$

En notant $K = B/(1-\alpha)$, on trouve les relations (58) annoncées. Les fonctions f et g sont désormais entièrement déterminées à la constante K près :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= K\Big(\sqrt{1-\alpha^2}\sin((1+\alpha)\theta) - (1-\alpha)\cos((1+\alpha)\theta) \\ &- (1-\alpha)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\sin((1-\alpha)\theta) + (1-\alpha)\cos((1-\alpha)\theta)\Big) \qquad (59) \\ g(\theta) &= K\Big(\sqrt{1-\alpha^2}\cos((1+\alpha)\theta) + (1-\alpha)\sin((1+\alpha)\theta) \\ &- \sqrt{1-\alpha^2}\cos((1-\alpha)\theta) - (1+\alpha)\sin((1-\alpha)\theta)\Big) \qquad (60) \end{aligned}$$

Le facteur K traduit l'intensité de la singularité et reste indéterminé dans l'analyse locale. C'est l'analyse du problème complet (global) qui peut, en principe, y donner accès, grâce à un raccordement de la solution asymptotique trouvée avec la solution lointaine du problème aux limites. C'est une tâche délicate en général, qui n'est pas entreprise ici. On trouvera la théorie correspondante et des exemples dans l'ouvrage de Leguillon and Sanchez-Palencia (1987) pour les singularités en général et (Leblond, 2003; Bui, 2006) pour le cas de la mécanique de la rupture.

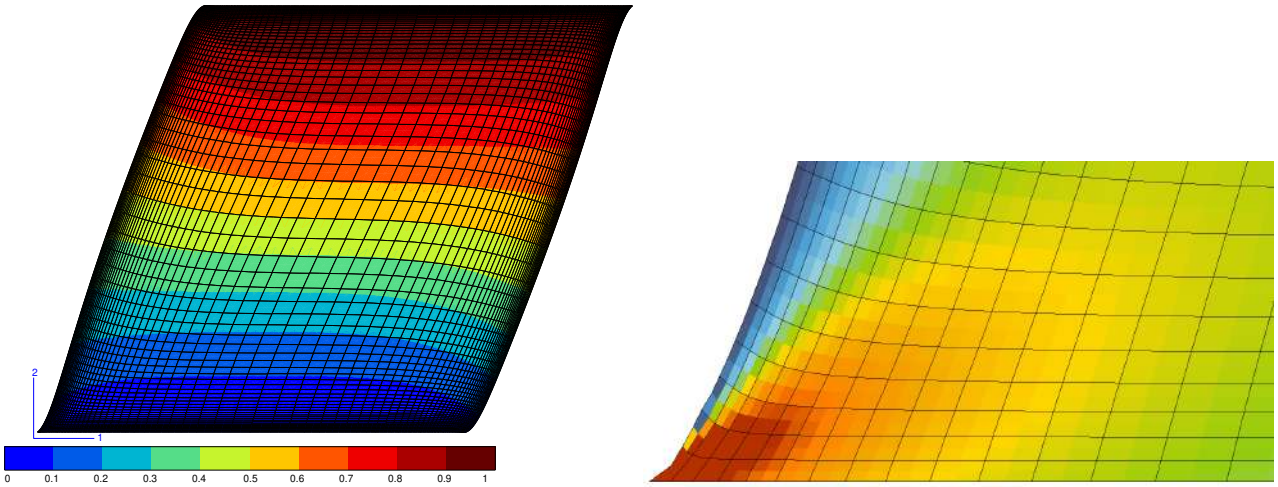


FIGURE 7: Bloc carré encastré à sa base et dont la face supérieure est soumise à un déplacement U dans la direction OX_1 (simulation par éléments finis dans le cas des déformations planes) : champ du déplacement u_1/U (à gauche), zoom sur le champ de contrainte de cisaillement dans le coin inférieur gauche (à droite, les couleurs indiquant l'intensité du cisaillement σ_{12}).

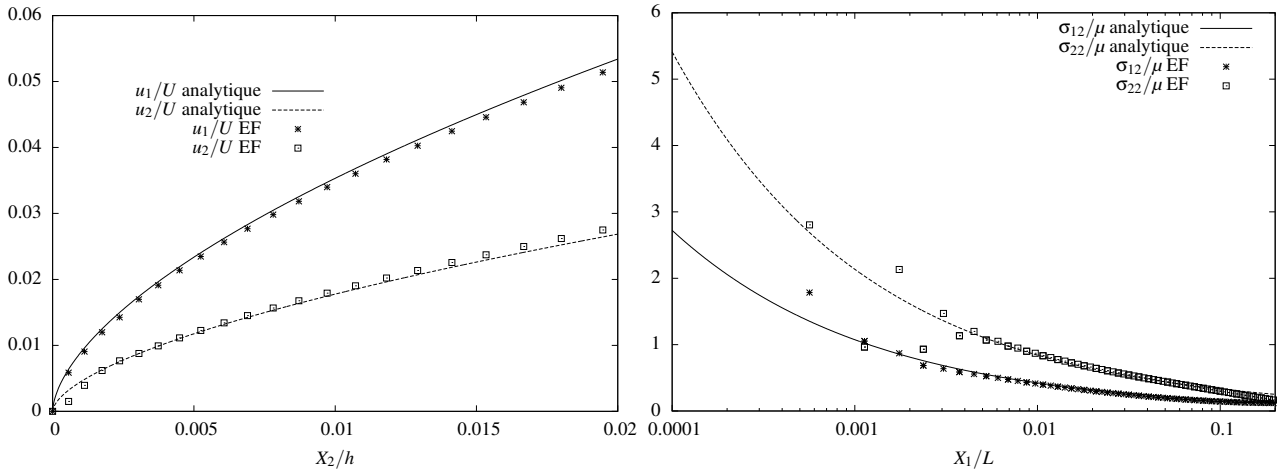


FIGURE 8: Comparaison des déplacements et des contraintes obtenus analytiquement et par la méthode des éléments finis. Le déplacement relatif imposé est $U/h = 0.2$ et le facteur d'intensité de déplacement a été identifié : $K = 0.055$ m$^{1-\alpha}$.

8. Déformée de la paroi libre et comparaison à des simulations numériques

8.1. Déplacements des points de la paroi libre

Montrer que les points de la paroi libre $\theta = \pi/2$, suffisamment proches de O, subissent les déplacements suivants

$$u_1(X_2) = 2KX_2^\alpha, \quad u_2(X_2) = 2K\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}X_2^\alpha \tag{61}$$

dans le repère cartésien.
Indiquer l'angle que fait la tangente à la courbe déformée de la paroi libre en O avec l'horizontale.

La paroi libre est constituée des points d'angle $\theta = \pi/2$. Le déplacement de ces points est

$$\boldsymbol{u}\,(r = X_2, \theta = \pi/2) = X_2^\alpha f(\pi/2)\boldsymbol{e}_2 - X_2^\alpha g(\pi/2)\boldsymbol{e}_1$$

On calcule, en tenant compte de (56),

$$f(\pi/2) = \frac{2K\alpha}{1+\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}\cos(\pi\alpha/2) + 2K(1-\alpha)\sin(\pi\alpha/2) = 2K\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

De même $g(\pi/2) = -2K$, ce qui conduit à (61). Les équations paramétriques de la paroi déformée sont

$$x_1 = X_1 + u_1 = 2KX_2^\alpha, \quad x_2 = X_2 + u_2 = X_2 + 2K\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}X_2^\alpha$$

L'équation de cette déformée est donc

$$x_2 = X_2 + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}x_1$$

ce qui permet de lire la tangente en $X_2 = 0$:

$$\tan\theta_{def} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad \theta_{def} \simeq 26.7^\circ$$

On voit que la concavité de la déformée est tournée vers les $X_2 > 0$ quel que soit le signe de K.

8.2. Contraintes le long de l'encastrement

Calculer les contraintes σ_{12} et σ_{22} le long de la ligne encastrée $X_2 = 0$.
Constater que ces deux composantes sont singulières au coin O.
Que peut-on craindre dans ces conditions sur la réponse de la structure au voisinage du coin ?

Le vecteur-contrainte sur la facette $\theta = 0$ dont la normale sortante est $\underline{\boldsymbol{n}} = -\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ se calcule à l'aide des contraintes (46-47)

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{t}} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (-\underline{\boldsymbol{e}}_\theta) \\ &= -\mu r^{\alpha-1}(f'(0) + (\alpha-1)g(0))\underline{\boldsymbol{e}}_1 + (p(r,0) - 2\mu r^{\alpha-1}(f(0) + g'(0)))\underline{\boldsymbol{e}}_2 \end{aligned} \tag{62}$$

On en déduit que

$$\sigma_{12}(r,0) = \mu r^{\alpha-1}(f'(0) + (\alpha-1)g(0)) = \mu X_1^{\alpha-1} 4\alpha K \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \tag{63}$$

après un calcul tenant compte de (56). Quant à σ_{22} un calcul similaire fournit

$$\sigma_{22} = -p(0) + 2\mu r^{\alpha-1}(f(0) + g'(0)) = 4\alpha K \mu r^{\alpha-1}$$

Ces deux contraintes sont infinies en 0 car $0 < \alpha < 1$. Même si ces contraintes infinies n'ont pas de réel sens physique, elles indiquent un forte concentration locale susceptible de provoquer la décohésion de l'interface près du coin.

8.3. Une question relative au contexte infinitésimal

L'existence d'une singularité près du coin met en défaut la condition des déformations infinitésimales au voisinage du coin, ce qui remet en question la validité de la solution, au moins dans cette zone. Quelles améliorations dans la résolution de ce problème pourrait-on proposer ?
Il se trouve que la solution construite dans le contexte infinitésimal garde une validité pratique au moins au-delà d'un voisinage du coin.
Estimer alors le rayon r_0 au-delà duquel le contexte infinitésimal est respecté par la solution trouvée en fonction du chargement appliqué représenté par le paramètre $|K|$.

La singularité est un indicateur de la présence de forte contraintes qui exigeraient une analyse en grandes déformations et/ou en tenant compte de la plasticité/endommagement du matériau. Ces travaux sont menés en général de manière numérique.
Un ordre de grandeur du rayon critique au-delà duquel la condition de petite perturbation est valide s'obtient en considérant les composantes du gradient de la transformation (44). En particulier, il faut que

$$|\alpha r^{\alpha-1} f(r,\theta)| \ll 1$$

Or, un majorant grossier de $|f|$ est $4|K|$, d'après (59). On en déduit que le contexte infinitésimal est respecté pour

$$(4\alpha|K|)^{1/(1-\alpha)} = r_0 \ll r$$

Un ordre de grandeur similaire s'obtient à partir des autres composantes du gradient du déplacement. Logiquement, ce rayon critique est nul lorsque $K = 0$.

8.4. Comparaison avec des simulations par éléments finis

Des résultats de la simulation par éléments finis d'un bloc initialement carré encastré à sa base et dont la face supérieure est translatée horizontalement de U, comme dans la première partie du problème, sont illustrés et discutés dans cette section. La figure 7 montre la déformée à gauche. On voit qu'un maillage très fin a été utilisé sur les bords afin de capter au mieux les singularités au coin. Un zoom sur le coin gauche est montré sur la figure 7 à droite. Commenter cette image et comparer le résultat au calcul analytique réalisé précédemment de la déformée du bord libre près du coin.

La valeur du facteur K a été identifiée pour se rapprocher au mieux des profils de déplacements le long du bord libre et des contraintes le long du bord encastré sur la figure 8, dans un voisinage du coin. Commenter ces résultats.

Le zoom de la figure 7 montre la déformée du bord libre en particulier. L'angle de la tangente en O ne semble pas très éloigné des 27° prédits par la théorie. Mais la discrétisation ne permet pas une description fine du voisinage immédiat du coin O.

On constate un bon accord entre les calculs analytiques et par éléments finis (EF) de la figure 8. On voit également certains points EF peu pertinents tout près du coin. Cela montre la difficulté qu'a la méthode numérique à rendre compte de la singularité. Le calcul a été réalisé avec des éléments finis quadrangles à interpolation quadratique (8 nœuds) et intégration réduite (4 points de Gauss), assez standards en pratique. Il existe des éléments finis spécifiques capables de mieux représenter les singularités en élasticité linéaire.

Troisième partie
Viscosité effective d'une suspension dans un fluide : formule d'Einstein dans le cas dilué

Un fluide contenant un grand nombre de particules solides fines en suspension peut être considéré comme un milieu homogène lorsqu'on étudie des phénomènes caractérisés par des distances qui sont grandes devant les dimensions des particules. Un tel milieu aura une viscosité effective $\bar{\mu}$ différente de la viscosité μ du fluide newtonien dans lequel baignent les particules. On peut calculer plus facilement la viscosité $\bar{\mu}$ de la suspension si la concentration ϕ des particules qui y sont dispersées est faible, i.e. si le volume total occupé par les particules est faible devant le volume du fluide (Landau and Lifchitz, 1959,1989). Einstein (1906) a effectué ce calcul dans le cas de particules sphériques et l'établissement, partiel cependant, de ce résultat fait l'objet de cette partie.

Dans le cas dilué ($\phi \ll 1$), un volume élémentaire représentatif idéalisé de la suspension est constitué de deux sphères concentriques S_∞ et S_p, comme sur la figure 9. Le volume V_∞ contient le volume V_p de la particule. La suspension se comporte comme un agrégat de telles cellules élémentaires remplissant l'espace, au prix de combler les vides avec des cellules homothétiques [5] puisque, on le verra, le rayon R lui-même de chaque particule ne joue pas au premier ordre étudié ici, seul compte le rapport de longueurs R/R_∞.

Le fluide est supposé visqueux incompressible obéissant à la loi de Stokes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \text{avec} \quad \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = 0 \tag{64}$$

où μ désigne ici la viscosité de cisaillement (unité Pa.s ou Poiseuille).

On étudie le problème stationnaire, sans effet d'inertie et en l'absence d'efforts volumiques (pas de gravité pour simplifier). Cela signifie que les équations du mouvement se réduisent aux équations de Stokes (**??**). La validité de cette approximation a été étudiée pour un obstacle sphérique dans un écoulement de fluide newtonien au paragraphe **??** dont la conclusion indique sa pertinence dans le cas d'obstacle très petits commme dans les suspensions.

Le champ des vitesses est recherché sous la forme

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{v}}^{(0)} + \underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} \tag{65}$$

La contribution $\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)}$ désigne le mouvement du fluide non affecté par les particules et est imposée de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\infty} \cdot \underline{\boldsymbol{x}} \tag{66}$$

où $\underline{\boldsymbol{x}}$ désigne les points de l'espace eulérien et $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{\infty}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique, uniforme et constant. Ce dernier représente une vitesse de déformation constante imposée à la suspension, on le verra.

Le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ désigne, quant à lui, la fluctuation introduite dans la déformation du fluide par la présence des particules.

Les particules solides sont réputées rigides, i.e. indéformables, et immobiles, en raison de la symétrie des vitesses de déformations imposées.

5. Voir les assemblages de sphères de Hashin considérés pour les composites à renforts particulaires, figure **??** de la section **??**.

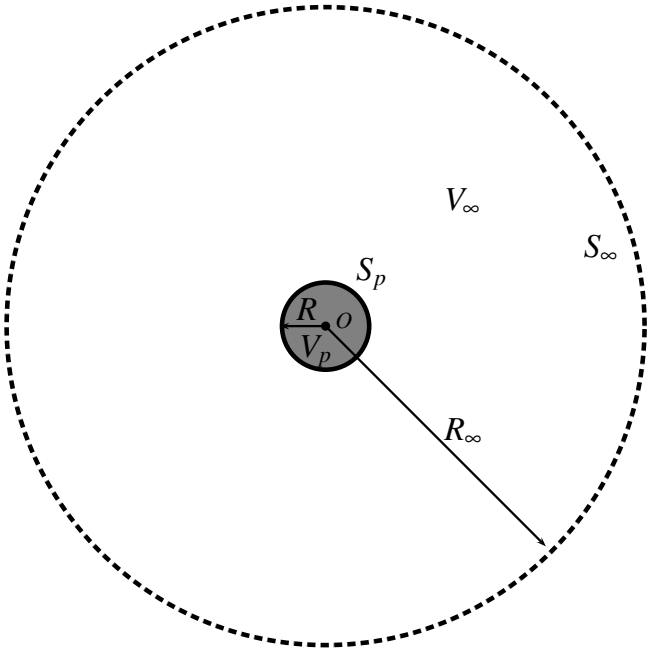


FIGURE 9: Particule sphérique de rayon R dans un fluide newtonien : cellule représentative sphérique de rayon extérieur R_∞.

9. Champ de pression loin des particules

Exprimer la fraction volumique ϕ de particules en fonction de R et R_∞ en considérant l'agrégat décrit précédemment de cellules élémentaires de la figure 9.

Montrer que le champ des vitesses $\boldsymbol{v}^{(0)}$ est associé à un champ de pression $p^{(0)}$ uniforme et constant.

Quelles conditions doit vérifier la fluctuation $\boldsymbol{v}^{(1)}$ sur le bord de la particule en $r = R$?

Le motif des sphères concentriques fournit la fraction volumique suivante

$$\phi = \frac{V_p}{V_\infty} = \frac{4\pi R^3/3}{4\pi R_\infty^3/3} = \frac{R^3}{R_\infty^3}$$

pour la particule. On suppose $R \ll R_\infty$.

Le champ des vitesses conduit au champ des déformations uniforme et constant suivant :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \operatorname{grad} \boldsymbol{v}^{(0)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty$$

Par conséquent, les contraintes valent $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty$.

La divergence des contraintes doit s'annuler, ce qui exige que $\operatorname{grad} p^{(0)} = 0$ de sorte que le champ de pression correspondant est uniforme.

La vitesse totale s'annule sur le bord de la particule :

$$\boldsymbol{v}\,(r = R) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(1)}(r = R) = -R\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty \cdot \boldsymbol{e}_r$$

10. Vitesse de déformation moyenne de la cellule représentative

Montrer que la vitesse de déformation moyenne sur la cellule représentative vaut :

$$\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}} := \frac{1}{V_\infty}\int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\, dv = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty \tag{67}$$

On utilisera le théorème de la divergence (théorème de Gauss) et le fait que le champ des vitesses s'identifie à $\underline{\boldsymbol{v}}^{(0)}$ sur le bord de V_∞, c'est-à-dire en $r = R_\infty$ (cas dilué).

On revient à la définition du gradient des vitesses en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
2\int_{V_\infty} D_{ij}\, dv &= \int_{V_\infty} (v_{i,j} + v_{j,i})\, dv \\
&= \int_{S_\infty} (v_i n_j + v_j n_i) ds \\
&\simeq \int_{S_\infty} (D^\infty_{ik} x_k n_j + D^\infty_{jk} x_k n_i) ds \\
&= \int_{V_\infty} (D^\infty_{ik}\delta_{kj} + D^\infty_{jk}\delta_{ki}) dv \\
&= 2D^\infty_{ij} V_\infty
\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat annoncé. On a donc utilisé deux fois le théorème de Gauss dans le sens $V_\infty \to S_\infty$ puis $S_\infty \to V_\infty$.

11. Contrainte moyenne dans la cellule représentative

Montrer que la contrainte moyenne sur la cellule représentative peut se mettre sous la forme suivante :

$$\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} := \frac{1}{V_\infty}\int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv = -\bar{p}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty + \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p \tag{68}$$

où $\bar{p} = 1/V_\infty \int_{V_\infty} p dv$ est la pression moyenne et le dernier terme est une intégrale portant sur la particule :

$$\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p := \frac{1}{V_\infty}\int_{V_p} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + p\underset{\sim}{\mathbf{1}}) dv \tag{69}$$

On calcule les différentes contributions de la contrainte moyenne :

$$\begin{aligned}
\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{1}{V_\infty}\int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv = \frac{1}{V_\infty}\int_{V_f} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv + \frac{1}{V_\infty}\int_{V_p} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv \\
&= \frac{1}{V_\infty}\left(\int_{V_f} (-p\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}) dv + \int_{V_p} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv\right) \\
&= \frac{1}{V_\infty}\left(\int_{V_f} (-p\underset{\sim}{\mathbf{1}}) dv + 2\mu\int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} dv + \int_{V_p} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv\right) \\
&= \frac{1}{V_\infty}\left(\int_{V_\infty} (-p\underset{\sim}{\mathbf{1}}) dv + 2\mu\int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} dv + \int_{V_p} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + p\underset{\sim}{\mathbf{1}})\, dv\right) \\
&= -\bar{p}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty + \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p
\end{aligned}$$

où V_f est la portion fluide du motif représentatif, telle que $V_f \cup V_p = V_\infty$. Pour la démonstration, on a utilisé le fait que la particule est indéformable :

$$\int_{V_f} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\, dv = \int_{V_\infty} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\, dv$$

12. Un résultat préliminaire d'homogénéisation

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ un champ de contraintes auto-équilibrées, i.e. tel que $\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0$. Montrer que l'intégrale de telles contraintes sur un volume matériel V quelconque peut se calculer grâce à la seule connaissance des valeurs qu'elles prennent au bord ∂V de ce volume :

$$\int_V \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\, dv = \frac{1}{2}\int_{\partial V} \left((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \otimes \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}} \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}})\right) ds \tag{70}$$

On réécrit la formule en composantes pour éviter toute ambiguïté :

$$\int_V \sigma_{ij} dv = \frac{1}{2}\int_{\partial V} (\sigma_{ik} n_k x_j + \sigma_{jk} n_k x_i)\, ds$$

Pour établir cette propriété remarquable, on utilisera à nouveau le théorème de Gauss et on s'aidera de l'intégration par parties de l'expression

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ik}\delta_{kj}$$

Comme les contraintes considérées sont auto-équilibrées

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ik}\delta_{kj} = \sigma_{ij}$$

que l'on intègre sur un volume V :

$$\int_V \sigma_{ij} dv = \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k}\, dv = \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k\, ds$$

La propriété de symétrie du tenseur des contraintes conduit alors à (70). Le théorème (70) est établi par exemple dans (Landau and Lifchitz, 1959,1989; Guazzelli and Morris, 2011). Le membre de droite a été baptisé du joli nom de *stresslet*, c'est-à-dire un moment de la distribution surfacique de contraintes, par Batchelor (1970). C'est un théorème également utilisé dans la théorie d'homogénéisation des composites solides (Bornert et al., 2001; Besson et al., 2009; François et al., 2012).

13. Formule d'Einstein

En déduire que

$$V_\infty \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p = \frac{1}{2}\int_{S_p} \left((\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \otimes \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{x}} \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) - \frac{2}{3}(\underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}})\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) ds \tag{71}$$

autrement dit,

$$V_\infty \bar{\sigma}^p_{ij} = \frac{1}{2}\int_{S_p} \left(\sigma_{ik} n_k x_j + \sigma_{jk} b_k x_i - \frac{2}{3}\sigma_{lk} n_k x_l \delta_{ij}\right) ds$$

Le calcul de l'intégrale de volume définissant $\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p$ pose problème car les contraintes au sein de la particule rigide sont indéterminées. Le théorème précédent permet de se ramener à un calcul sur la surface de la particule et d'utiliser les expressions des contraintes trouvées dans le fluide grâce à la continuité du vecteur-contraintes sur S_p.

On admet que[6]

$$V_\infty \bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p = \frac{20}{3}\mu\pi R^3 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty \tag{72}$$

En déduire l'expression de la viscosité effective de la suspension $\bar{\mu}$ en fonction de μ et ϕ.
Ce résultat constitue la formule d'Einstein publiée en 1906, même si la méthode utilisée est différente de celle présentée ici (Einstein, 1906). Cet article comportait une erreur de calcul corrigée dans (Einstein, 1911). Cette erreur potentielle avait été signalée à Einstein par des expérimentateurs qui trouvaient des valeurs de viscosité effective sensiblement différentes dans leurs manipulations de suspensions.

Le théorème 70 s'applique idéalement au calcul de $\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p$. Il faut cependant lui adjoindre le terme de pression pour laquelle le théorème peut également être utilisé en contractant les indices :

$$\int_{V_p} \sigma_{ll} = \int_{S_p} \sigma_{lk} n_k x_l \, dv$$

Le résultat admis (72) permet de conclure que

$$\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^p = 5\mu\phi \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty$$

Repartant alors de (68), on obtient la loi de comportement effective de la suspension :

$$\bar{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = -\bar{p}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\bar{\mu}\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\infty, \quad \text{avec} \quad \bar{\mu} = \mu(1 + \frac{5}{2}\phi) \tag{73}$$

C'est une relation extrêmement simple qui a ouvert la voie aux recherches nombreuses et riches sur la mécanique des suspensions ou solutions colloïdales et, plus généralement, les méthodes d'homogénéisation en mécanique des matériaux (composites, fluides chargés, etc.).

Références

Batchelor, G.K., 1970. The stress system in a suspension of force-free particles. Journal of Fluid Mechanics 41, 545–570. doi :10.1017/S0022112070000745.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L., Forest, S., Blétry, M., 2009. Non–Linear Mechanics of Materials. Solid Mechanics and Its Applications 167, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi :10.1007/978-90-481-3356-7.

Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. Homogénéisation en mécanique des matériaux. Hermès.

Bui, H.D., 2006. Fracture mechanics. Springer, The Netherlands. doi :10.1007/978-1-4020-4837-1.

6. Le calcul nécessite la détermination du champ $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$, non entreprise ici, et le calcul quelque peu délicat des intégrales (71). On renvoie le lecteur à (Landau and Lifchitz, 1959,1989; Guazzelli and Morris, 2011) pour plus de détails sur ces calculs.

Einstein, A., 1906. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Annalen der Physik 324, 289–306. doi :10.1002/andp.19063240204.

Einstein, A., 1911. Berichtigung zu meiner Arbeit : Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. Annalen der Physik 339, 591–592. doi :10.1002/andp.19113390313.

François, F., Pineau, A., Zaoui, A., 2012. Mechanical Behaviour of Materials. Volume 1 : Micro and Macroscopic Constitutive Behaviour. Solid Mechanics and its Applications, Vol. 180, Springer.

Guazzelli, E., Morris, J., 2011. A Physical Introduction to Suspension Dynamics. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press. doi :10.1017/CBO9780511894671.

Landau, L., Lifchitz, D., 1959,1989. Mécanique des fluides. Mir.

Leblond, J.B., 2003. Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermès.

Leguillon, D., Sanchez-Palencia, E., 1987. Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. Masson Paris, John Wiley, New York.

Exam thermodynamique 1ère année IC

PROMO 2022

18 avril 2023

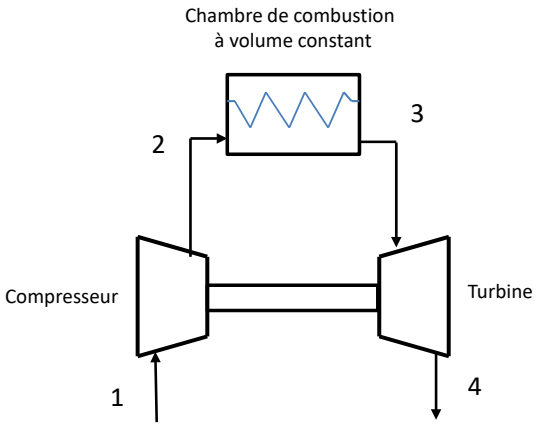
2 H 30

Supports de cours, ouvrage du cours, TD et calculatrice autorisés

Autres documents, téléphone et ordinateurs interdits

Partie 1 : Etude d'un cycle de Humphrey

Le cycle d'Humphrey consiste en une compression isentropique, un chauffage à volume constant et une détente isentropique. Il combine les avantages des cycles des moteurs à combustion interne et des turbines à gaz.



Questions

I - Etude du cycle d'Humphrey (10 PTS)

En entrée du compresseur, 1, on considère un débit volume d'air de 5 m^3/s à la pression de p_1= 0,1 MPa et à la température de 25°C.

Le taux de compression du compresseur est de p_2/p_1=12. En sortie de la chambre de combustion, la température de l'air est de 1200°C. En sortie de la turbine, l'air est détendu jusqu'à 0,1 MPa.

Les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine sont de 0,9.

On fera l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait. Le rapport des chaleurs massiques de l'air, γ, est de 1,4. La chaleur massique de l'air est de 1,004 kJ/kg/K. On négligera le débit de combustible dans la chambre de combustion, autrement dit, on considérera le même débit d'air en entrée et en sortie de la chambre de combustion.

1. Déterminer les pressions et températures aux points 2, 3 et 4 du cycle.

2. Tracer le cycle dans un diagramme (T,s) ainsi que, pour comparaison, le cycle de Brayton dans lequel les conditions d'entrée seraient les mêmes, le compresseur et la turbine seraient identiques et la chambre de combustion isobare aurait pour but de chauffer les gaz à la même température de 1200°C.

3. Calculer la puissance de compression et de détente.

4. Calculer la puissance utile (nette fournie par le cycle) sachant que :

La combustion à volume constant est réalisée dans une chambre de combustion dépendant du temps. Le modèle vise à représenter cela par un état thermodynamique équivalent à la sortie de la combustion qui pourrait ensuite être utilisé pour un modèle en régime permanent d'un système thermodynamique ouvert. Une façon de représenter ce passage d'un système fermé à un système ouvert dans le cycle, consiste à considérer un travail d'écoulement consommé pour expulser les gaz de la chambre de combustion comme :

$$w_{flux} = v_2(p_3 - p_2)$$

Montrer que la puissance nette peut s'écrire comme

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}_a\left[c_v(T_3 - T_2) - c_p(T_4 - T_1)\right]$$

5. Déterminer la puissance thermique à fournir dans la chambre de combustion à volume constant, en déduire le débit de gaz naturel sachant que son pouvoir calorifique est de 10,83 kWh/kg. Vérifier l'hypothèse du débit de gaz naturel négligeable devant le débit d'air

6. Calculer le rendement du cycle et comparer au rendement de Carnot. En déduire le rendement exergétique de la machine de Humphrey.

7. Montrer que le rendement du cycle de Brayton dans un cas idéal peut s'écrire :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

Avec le ratio de température $\tau = \frac{T_3}{T_1}$ et taux de compression $\beta = \frac{P_2}{P_1}$

Calculer le rendement dans le cas d'un cycle de Brayton idéal dans les mêmes conditions de température et de pression et comparer à la valeur obtenue en 6. Expliquer pourquoi la valeur est inférieure à la valeur obtenue en 6.

II Comparaison du cycle d'Humphrey avec les cycles de Brayton, Diesel et d'Otto (ou Beau de Rochas). (3 PTS)

Pour rappel

Cycle	Compression	Combustion	Détente	Echappement
Otto	isentrope	Isochore	isentrope	Refroidissement isochore
Diesel		Isobare		
Brayton		Isobare		à la pression atmosphérique
Humphrey		isochore		

1. Tracer qualitativement dans un diagramme de Clapeyron PV les 4 cycles en considérant pour chaque cycle :

- le même taux de compression,
- la même température de sortie pour les chambres de combustion à volume constant
- la même augmentation de volume pour les chambres de combustion à pression constante.

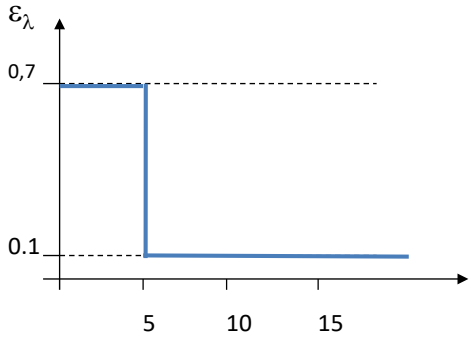
2. Analyser le travail disponible dans chaque cas et expliquer les avantages du cycle d'Humphrey.

Partie 2 : Isolation de la chambre de combustion (8 PTS)

On suppose une chambre de combustion cylindrique de rayon intérieur, r, 1,5 m et de longueur, L, 6 m. La température des gaz de combustion dans la chambre est de 1200°C
La paroi de la chambre est constituée d'acier (de conductivité 50 W/m/K et d'épaisseur 2cm) puis d'une couche d'isolant (perlite de conductivité 0,06 W/m/K et d'épaisseur 10cm).
Les coefficients d'échange convectifs sont de h_{ci} =30 W/m²/K à l'intérieur du cylindre et de $h_{ce} = 5$ W/m²/K à l'extérieur du cylindre.
L'émissivité (ε) de la paroi extérieure du cylindre est de 0,9. La chambre de combustion est placée dans un environnement à 20°C.
Pour les calculs, on négligera la surface de la base même si elle représente 20% de la surface totale.

1 – On se place en régime permanent. On fait l'hypothèse d'un régime stationnaire monodirectionnel (radial).
1.1. La puissance perdue est-elle la même à travers l'acier et l'épaisseur d'isolant ?
1.2. Calculer un coefficient d'échange lié au rayonnement. Pour cela on exprimera la puissance nette échangée par rayonnement entre la paroi extérieure de la chambre de combustion et l'environnement. On linéarisera pour faire apparaitre un coefficient d'échange radiatif analogue au coefficient d'échange convectif. Faire une hypothèse sur la température de la paroi extérieure pour calculer le coefficient d'échange radiatif.
1.3. Calculer la résistance thermique globale de la paroi. On fera un schéma électrique représentant les résistances thermiques et les températures.
1.4. En déduire la puissance perdue au travers de la paroi latérale.
1.5. Calculer la température de la paroi extérieure. Que dire de l'hypothèse que vous avez prise ? Proposer une méthode pour obtenir une puissance échangée plus précise.

2 – On propose de recouvrir la surface extérieure d'une peinture à faible émissivité avec les propriétés spectrales suivantes.



2.1. Estimer la nouvelle émissivité totale. Justifier la valeur retenue.

2.2. Calculer la nouvelle résistance globale puis la puissance perdue. Evaluer les gains associés à cette peinture.

CORRECTION

Partie 1

I.

1/

Calcul du point en sortie de compresseur.

$$p_2 = p_1 . \tau = 1{,}2 \cdot 10^6\ Pa$$

Cas isentropique

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_{2is} = 606{,}4\ K$$

Cas réel

$$\eta_{is} = \frac{W_{is}}{W_{réel}} = \frac{cp_a(T_{2is} - T_1)}{cp_a(T_2 - T_1)}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{(T_{2is} - T_1)}{\eta_{is}}$$

$$T_2 = 640{,}7\ K$$

Calcul du point en sortie de la chambre combustion (chauffage isochrore)

$$p_3 V = nR\ T_3$$

$$p_2 V = nR\ T_2$$

D'où

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

Comme $T_3 = 1473.15\ K$

$$p_3 = 2{,}76 \cdot 10^6\ Pa$$

Calcul du point en sortie de la turbine.

Cas isentropique

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_{4is} = 570{,}9\ K$$

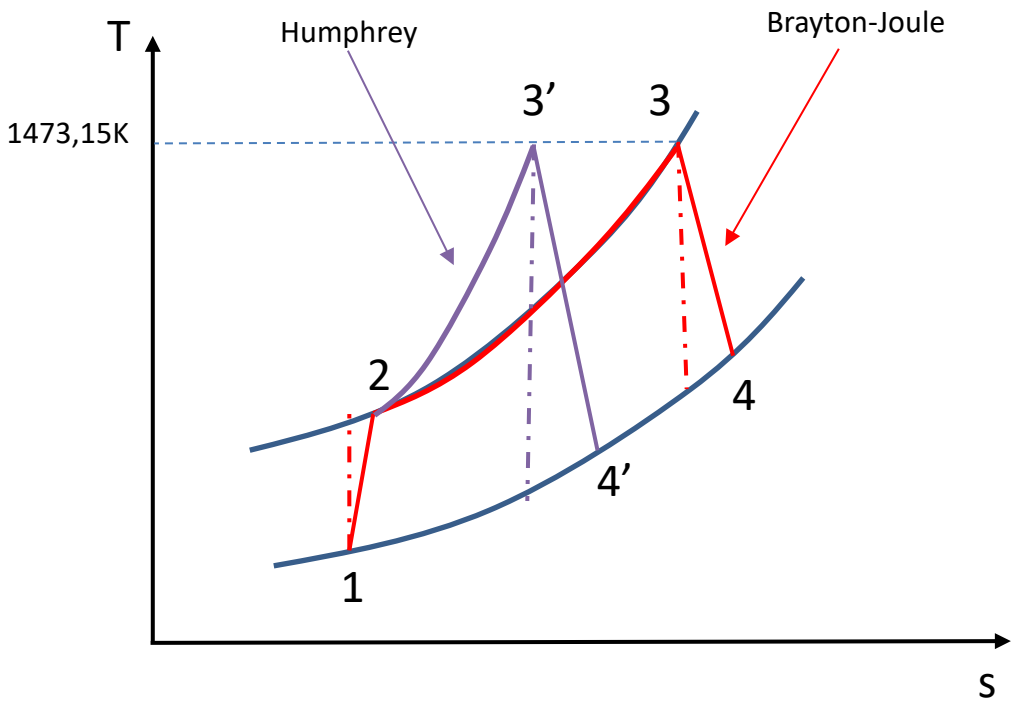
Cas réel

$$\eta_{is} = \frac{W_{réel}}{W_{is}} = \frac{cp_a(T_4 - T_3)}{cp_a(T_{4is} - T_3)}$$

$$T_4 = T_3 + \eta_{is}(T_{4is} - T_3)$$

$$T_2 = 661.2\ K$$

2/



3/ Puissance compresseur et Puissance utile.

$$\dot{m}_a = \frac{Pa}{\frac{R}{M}.T}\dot{V}_a = 5{,}8\ kg/s$$

$$W_{comp} = \dot{m}_a cp_a(T_2 - T_1)$$

$$W_{comp} = 2011{,}6\ kW\ \mathbf{0}$$

$$W_{urbine} = \dot{m}_a cp_a(T_3 - T_4)$$

$$W_{turbine} = 4768{,}7\ kW$$

4/ Puissance utile

Si on considère le travail utile ci-dessus et la puissance thermique dans la chambre de combustion à volume constant considéré comme un système fermé, cela conduit à des efficacités supérieures à l'unité pour des taux de compression suffisamment importants, ce qui est impossible. Le problème provient du volume de contrôle à flux constant pour une chambre de combustion temporairement fermée, ce qui est intrinsèquement le cas du cycle de Humphrey . Il s'avère qu'il y a un terme de travail supplémentaire. Il faut prendre en compte ce travail de flux, qui est principalement dû au passage d'un système ouvert à un système fermé dans le cycle.

$$w_{ecoulement} = v_2(p_3 - p_2)$$

$$w_{utile} = w_{turbine} - w_{comp} - w_{ecoulement}$$

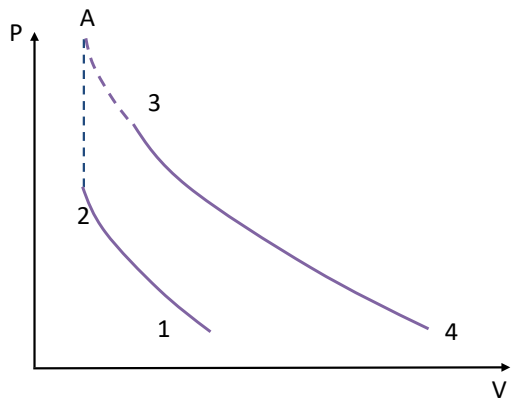
$$w_{utile} = \dot{m}_a cp_a(T_3 - T_4) - \dot{m}_a cp_a(T_2 - T_1) - \dot{m}_a v_2(p_3 - p_2)$$

$$w_{utile} = \dot{m}_a cp_a(T_3 - T_4) - \dot{m}_a cp_a(T_2 - T_1) - \dot{m}_a R(T_3 - T_2)$$

$$\dot{W}_{net} = \dot{m}_a\left[c_v(T_3 - T_2) - c_p(T_4 - T_1)\right]$$

$$W_{utile} = W_{turbine} - W_{comp} - W_{ecoulement} = 1360{,}3\ kW$$

La combustion à volume constant est réalisée dans une chambre de combustion dépendant du temps. Le modèle vise à représenter cela par un état thermodynamique équivalent à la sortie de la combustion qui pourrait ensuite être utilisé pour un modèle en régime permanent d'un système thermodynamique ouvert. Pour ce faire, le travail d'écoulement consommé pour expulser les gaz de la chambre de combustion doit être pris en compte. Cela se fait par un processus d'expansion depuis l'état final du processus d'addition de chaleur (A) jusqu'à l'état de sortie équivalent de la chambre de combustion (3).



Enfin, la pression au point 3 peut être calculée à l'aide des équations de base qui décrivent un processus d'expansion avec un rendement isentropique donné. Ce rendement isentropique sera utilisé dans ce travail pour tenir compte de toutes les irréversibilités dans le processus d'expansion interne de la chambre de combustion.

5/ chambre de combustion

$$W_{Combustion} = \dot{m}_a cv_a(T_A - T_2) = \dot{m}_a \cdot \gamma \cdot cp_a(T_A - T_2)$$

$$W_{comb} = 3492{,}2\ kW$$

$$W_{Combustion} = \dot{m}_{GN} PCI$$

$$\dot{m}_{GN} = \frac{W_{Combustion}}{PCI} = 0{,}0896\,\frac{kg}{s}$$

Hypothèse vérifiée

(1,53% du débit d'air)

6/ Calculer le rendement du cycle et comparer au rendement de Carnot

$$\eta_{cycle} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur} - W_{ecoulement}}{W_{comb}} = 38{,}95\%$$

Rendement de Carnot

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{Ta}{Tmax} = 79{,}8\%$$

$$\eta_{ex} = \frac{\eta_{cycle}}{\eta_{Carnot}} = 48{,}8\%$$

7/ Donner une expression du rendement du cycle de Brayton. Calculer le rendement dans le cas d'un cycle de Brayton dans les mêmes conditions de température et de pression et comparer à la valeur obtenue en 6.

$$\eta_{cycle} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur}}{W_{comb}} = \frac{\dot{m}_a cp_a (T_3 - T_4) - \dot{m}_a cp_a (T_2 - T_1)}{\dot{m}_a cp_a (T_3 - T_2)}$$

$$\eta_{cycle} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

$$\eta_{cycle} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$\eta_{cycle} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$\eta_{cycle\ brayton} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_4 \cdot \beta^{(\gamma-1)/\gamma} - T_1 \cdot \beta^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

Car p_4=p_1 et p_3=p_2 (chambre isobare du cycle de Brayton)

D'où

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

Avec le ratio de température $\tau = \frac{T_3}{T_1}$ et taux de compression $\beta = \frac{P_2}{P_1}$

$$\eta_{cycle\ brayton} = 50{,}8\%$$

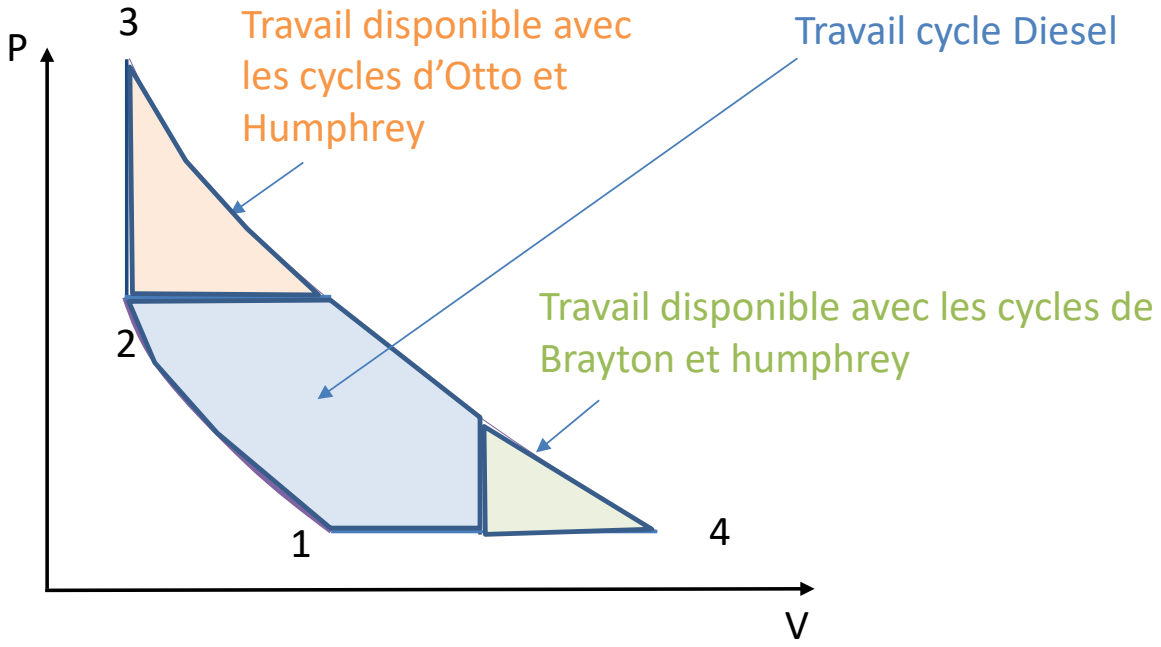
Ce qui peut paraitre plus performant qu'un cycle d'Humphrey mais en fait on n'a pas pris en compte les irréversibilités dans le compresseur et la turbine ici. Le calcul du rendement de cycle de Humphrey sans irréversibilités internes donne : 57,37%

8/ Montrer le rendement du cycle d'humphrey peut s'écrire comme

$$\eta_{cycle} = \frac{W_{turbine} - W_{compresseur}}{W_{comb}} = \frac{\dot{m}_a cp_a (T_3 - T_4) - \dot{m}_a cp_a (T_2 - T_1)}{\dot{m}_a cp_a (T_3 - T_2)}$$

$$\eta = 1 - \gamma \left\{ \frac{\left(\frac{\tau}{\beta^{(\gamma-1)/\gamma}}\right)^{1/\gamma} - 1}{\tau - \beta^{(\gamma-1)/\gamma}} \right\}$$

II.



L'avantage fondamental du cycle d'Atkinson/Humphrey par rapport au cycle de Brayton est que l'ajout de chaleur s'accompagne d'une augmentation de la pression en raison du confinement volumétrique.

Atkinson/Humphrey présente un taux de détente beaucoup plus important que le taux de compression. Cela permet aux moteurs à cycle Humphrey de produire plus de puissance qu'un moteur à cycle de Brayton avec le même état d'entrée dans la chambre de combustion. Par conséquent, le rendement du cycle Atkinson/Humphrey devrait dépasser celui du cycle de Brayton pour la même compression. En conclusion, le cycle Atkinson/Humphrey combine les meilleures caractéristiques d'Otto (moteur à combustion interne) et de Brayton (moteur à turbine). Il bénéficie d'une combustion à volume constant comme celle d'un moteur à piston et à manivelle ainsi que de la détente complète des gaz de travail comme celle référencée pour un moteur à turbine.

Partie 2

1 –

1.1. La puissance perdue est-elle la même à travers l'acier et l'épaisseur d'isolant ?

OUI, continuité du flux qui traverse les parois en régime permanent.

1.2. Calcul la résistance thermique liée au rayonnement. Pour cela on exprimera la puissance nette échangée entre la paroi extérieure de la chambre de combustion et l'environnement. On linéarisera pour faire apparaitre un coefficient d'échange radiatif analogue au coefficient d'échange convectif. Faire une hypothèse sur la température de la paroi extérieure pour calculer du coefficient d'échange radiatif.

$$\phi = \varepsilon_1 S_1 \sigma \left(T_p^4 - T_a^4\right)$$

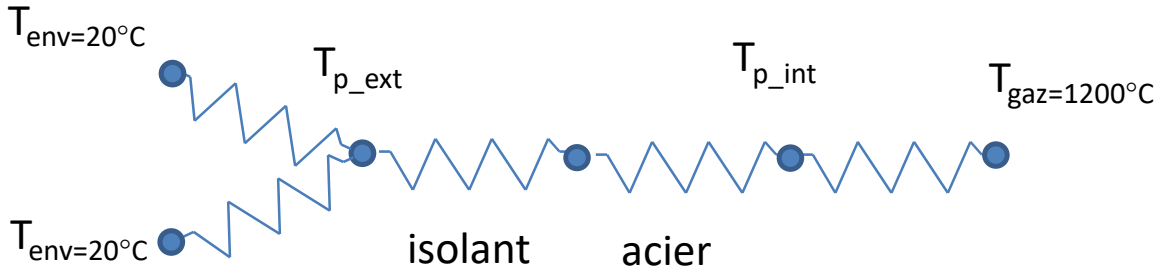
$$\phi \cong 4.\varepsilon_1 S_1 \sigma \left(\frac{T_p + T_a}{2}\right)^3 \left(T_p - T_a\right)$$

$$h_{rad} = 4.\varepsilon_1 \sigma \left(\frac{T_p + T_a}{2}\right)^3$$

On suppose que $T_p = 50°C$

On trouve $h_{rad} = 5{,}97 \frac{W}{M^2}/K$

1.3. Calculer la résistance thermique globale de la paroi. On fera un schéma électrique représentant les résistances thermiques et les températures.



$$R_{tot} = R_{int} + R_{acier} + R_{iso} + R_{ext}$$

$$R_{tot} = \frac{1}{h_{ci} S_{int}} + \frac{ln\left(\frac{r + e_{acier}}{r}\right)}{2\pi\lambda_{acier} L} + \frac{ln\left(\frac{r + e_{acier} + e_{iso}}{r + e_{acier}}\right)}{2\pi\lambda_{iso} L} + \frac{1}{(h_{ce} + h_{rad}) S_{ext}}$$

$$R_{tot} = 0{,}0436\ K.m^2/W$$

1.4. En déduire la puissance perdue au travers de la paroi latérale.

$$\phi = \frac{1}{R_{tot}}\left(T_p - T_a\right)$$

$$\phi = 27\ kW$$

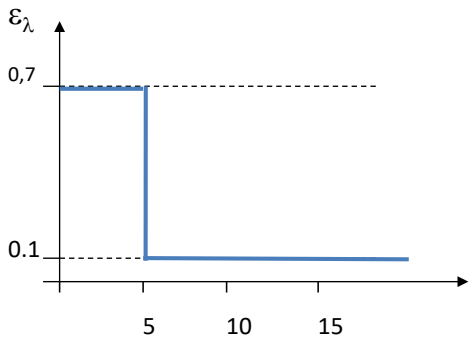
1.5. Calculer la température de la paroi extérieure. Que dire de l'hypothèse que vous avez prise ? Proposer une méthode pour obtenir une puissance échangée plus précise.

$$T_{p-ext} - T_a \quad \frac{\phi}{(h_{ce} + h_{rad})S_{ext}}$$

$$T_{p-ext} = 59°C$$

Par itération, en réinjectant la nouvelle température de paroi, et ce jusqu'à convergence.

2 – On propose de recouvrir la surface extérieure d'une peinture à faible émissivité avec les propriétés spectrales suivantes.



2.1. Estimer la nouvelle émissivité totale. Justifier la valeur retenue.

Loi de Wien, nous dis comme la température de paroi est de l'ordre de 50°C que la longueur d'onde max est pour

$$\lambda_{max} = 9\ \mu m$$

95% du rayonnement d'un cops noir se situe entre 0,5 λ_{max} à 5λ_{max}. Dans cette plage, on peut estimer que l'émissivité est égale à 0,1.

On peut faire sinon un calcul plus précis suivant $\varepsilon = \varepsilon_1 \times F_{0-5\times323} + \varepsilon_2 \times (1 - F_{0-5\times323})$

$$F_{0-5\times323} = 0{,}021$$

On obtient $\varepsilon = 0{,}117$

2.2. Calculer la nouvelle résistance globale puis la puissance perdue. Evaluer les gains associés à cette peinture.

$$R_{tot} = 0{,}0449\ K.m^2/W$$

$$\phi = \frac{1}{R_{tot}}(T_p \ - T_a\ )$$

$$\phi = 26{,}3\ kW$$

Le gain est d'environ 3% ce qui est assez faible mais rapidement rentabilisé.

Examen 1A MPI (UE23) - Matériaux pour l'Ingénieur

Lundi 3 juillet 2023 **Durée de l'épreuve : 1h30**

Documents autorisés - Répondre directement sur les feuilles de l'énoncé

- Pour certaines questions, vous devez barrer la ou les réponses fausses
- Quand les cases sont vides, à vous de les renseigner ou de les cocher

---

Groupe : **Nom et prénom :** **Signature :**

I-Cristallographie, solutions solides

I-1/ Dans un réseau cubique, la direction [110] représente :

Une arête du cube	Une diagonale d'une face	Une diagonale du cube

I-2/ Dans un réseau quadratique (a = b ≠ c), les directions [001] et [100] sont équivalentes :

Vrai	Faux

I-3/ Lequel de ces défauts cristallins est un défaut planaire :

Le joint de grains	La lacune	La dislocation

I-4/ La composition chimique d'une phase définit sa structure cristalline

Vrai	Faux

Les aciers (systèmes Fe-C) sont présents dans de nombreux secteurs industriels (bâtiments, automobile, médical, …). Leurs propriétés finales dépendent fortement de leur microstructure, et donc du traitement thermique appliqué. Le fer pur possède une transformation allotropique depuis une phase cubique centrée (la ferrite, fer α) vers une phase cubique face centrée (l'austénite, fer γ) à 911°C lors du chauffage.

I-5/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans la ferrite ?	

I-6/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans l'austénite ?	

Le paramètre de maille de la ferrite est de 0.29 nm, celui de l'austénite de 0.36 nm, et un atome de Fer a un diamètre de 0.13 nm. La compacité est définie comme le rapport entre le volume occupé par les atomes et le volume total de la maille cristalline.

I-7/ Quelle est la compacité de la maille ferritique ?	

I-8/ Quel est la compacité de la maille austénitique ?	

I-9/ La transformation de la ferrite vers l'austénite induit-elle une contraction ou une dilatation du matériau ?

Contraction	Dilatation

I-10/ Le carbone a un rayon atomique d'environ 70 pm. Selon vous, l'acier est une solution solide de type :

Interstitielle	Substitutionnelle

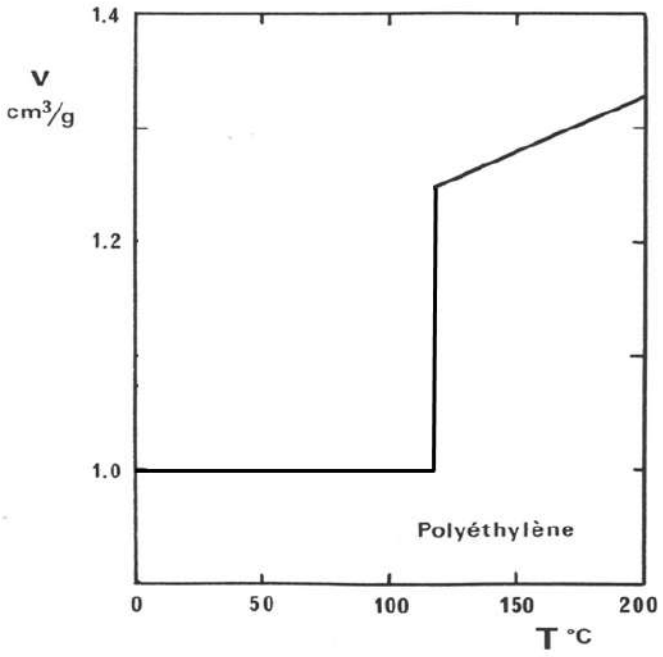
II-Architecture moléculaire et propriétés des polymères

II-1/ Dans un polymère, la conformation est un arrangement spatial qui est fixé par liaisons chimiques et ne peut changer qu'à la suite d'une rupture de liaison.

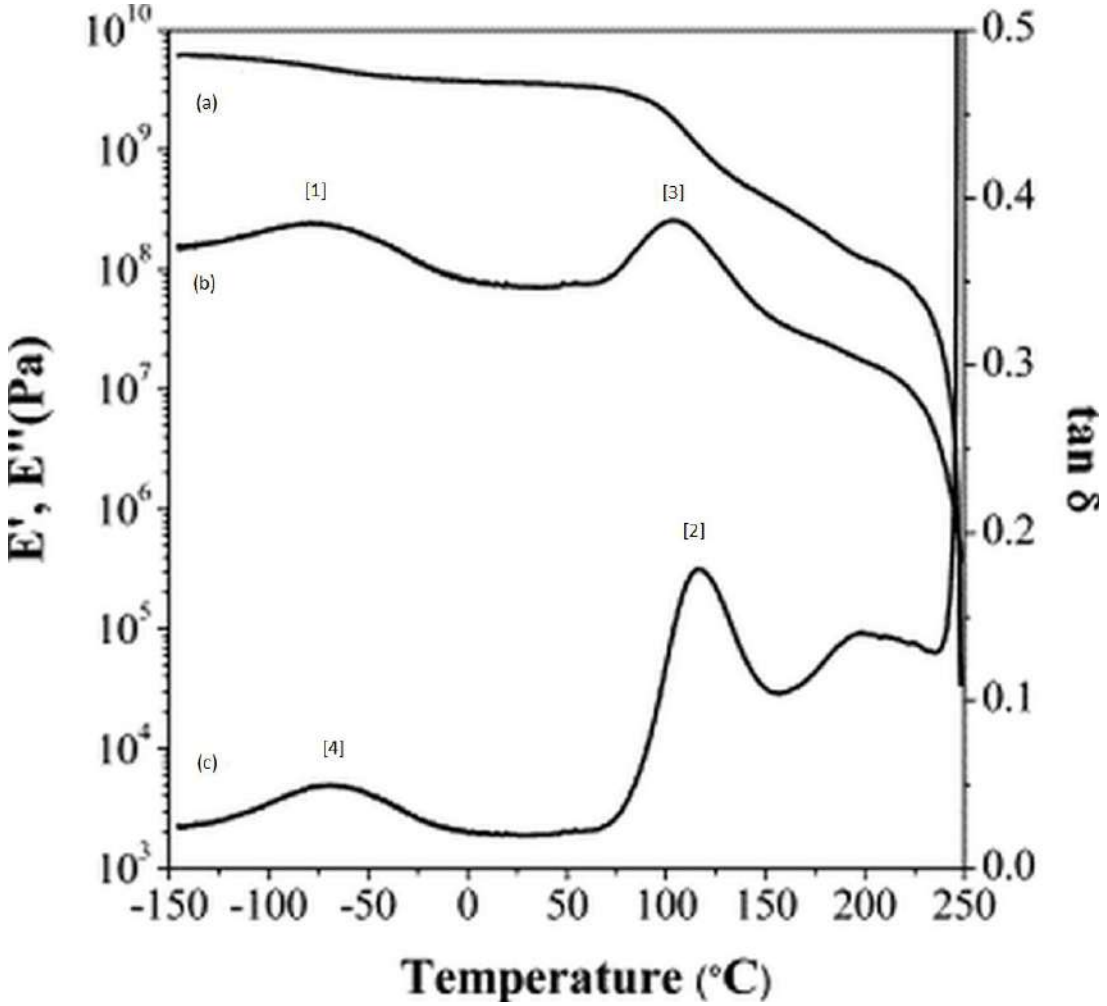
Vrai	Faux

II-2/ On peut déterminer le taux de cristallinité d'un polymère (en masse et en volume) à partir d'une mesure de sa masse volumique (ou de son volume spécifique v), si l'on connaît les masses volumiques ρ, indicées c et a, pour les phases cristalline et amorphe. Donner, sans la démonstration, l'expression de la fraction *Xc* (en masse) adéquate :

II-3/ Déterminer le taux de cristallinité, en masse, du polyéthylène à 50 °C en vous aidant du graphe ci-contre et noter sur le graphe vos prises de mesures.



II-4/ On considère une mesure de spectroscopie d'impédance mécanique sur un polymère effectuée en mode dynamique sinusoïdale, en fonction de la température T (essai DMTA). Différentes grandeurs ont été reportées dans le graphique ci-dessous. Vous devez reconnaitre ces dernières et ainsi quelques éléments distinctifs de certaines courbes.



II-4-1/ La courbe (a) correspond au :

Module de rigidité, E'	Module de perte, E''	Coefficient de perte, tan δ

II-4-2/ La courbe (b) correspond au :

Module de rigidité, E'	Module de perte, E''	Coefficient de perte, tan δ

II-4-3/ La courbe (c) correspond au

Module de rigidité, E'	Module de perte, E''	Coefficient de perte, tan δ

II-4-4/ Le polymère voit sa conformation de chaîne évoluer sans cesse en autorisant différents changements de conformations locales, et ceci est évidemment très dépendant de la

température. Quand il n'y a pas coopérativité des changements le long du squelette de la chaîne, quel est le mécanisme nécessitant le moins d'énergie ?

Mouvement de type « vilebrequin » impliquant quelques liaisons chimiques de la chaîne	Rotation d'un groupement chimique (radical), perpendiculairement au squelette de la chaîne	Désenchevêtrement de la chaîne associée à la libération des nœuds chimiques entres les chaines

II-4-5/ Quand il y a coopérativité de ces changements le long du squelette de la chaîne, une transition, s'accompagnant d'une relaxation des propriétés mécaniques, est constatée. S'il n'y a pas de coopérativité de ces changements de conformations, l'impact est bien moins prononcé mais il résulte toutefois une relaxation.

a) Le pic [1] de la courbe (b) correspond à la relaxation :

Alpha	Bêta

b) Le pic [3] de la courbe (b) correspond à la relaxation :

Alpha	Bêta

c) Situer la température de transition vitreuse Tg sur la courbe (c) et donner sa valeur :

III-Diagramme de phases

III-1/ La figure suivante présente le diagramme de phase du système binaire argent - cuivre. La représentation est proposée en fonction de la composition molaire du cuivre (Cu) dans l'argent (Ag). La température est indiquée en degré Celsius (°C).

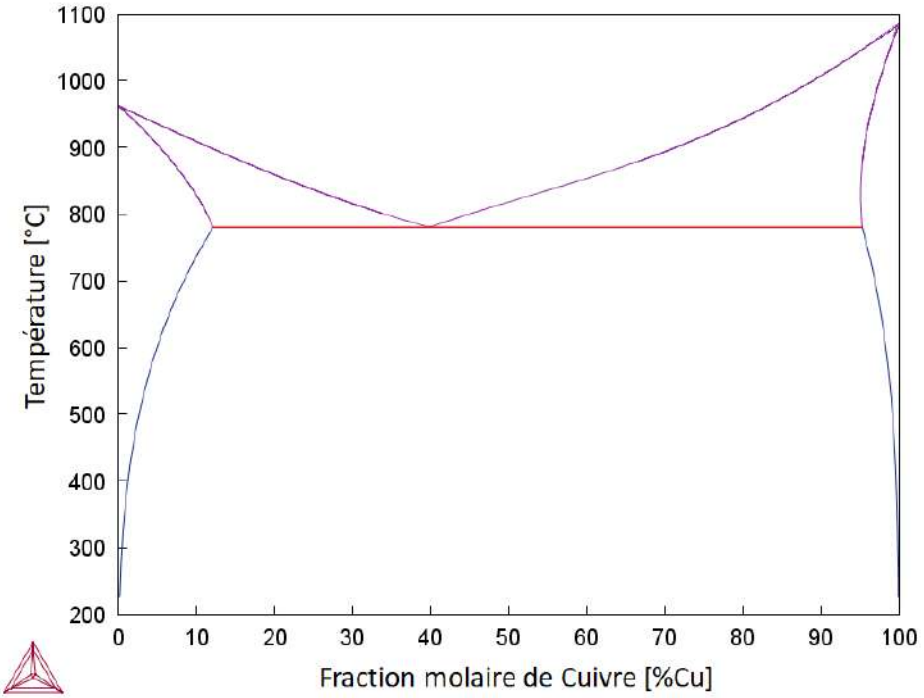


Diagramme de phase du système binaire Argent-Cuivre (Calcul Thermocalc)

Trois phases sont présentes dans ce système :

- Une phase liquide (l) à haute température
- Une phase solide (α) pour une composition faible en cuivre
- Une phase solide (β) pour une composition forte en cuivre

Sur la base de la représentation du diagramme de phase ci-dessus, et en vous appuyant sur ces informations, il vous est demandé de répondre aux questions suivantes :

a) Indiquez sur chaque domaine monophasé ou multiphasé de ce diagramme Ag-Cu, les différentes phases présentes.

b) Précisez les valeurs de la variance associée à chacun de ces domaines, monophasé ou multiphasé, en les indiquant sur le diagramme

III-2/ Répondez aux questions suivantes :

a) Quelle est la température eutectique du système argent-cuivre	

b) Quelle est la variance de ce même système sur ce point eutectique	

c) On se place très légèrement au-dessus de la température eutectique. En considérant que le système a les compositions molaires en cuivre suivantes, quelles sont les phases présentes, leur composition et leur fraction ?

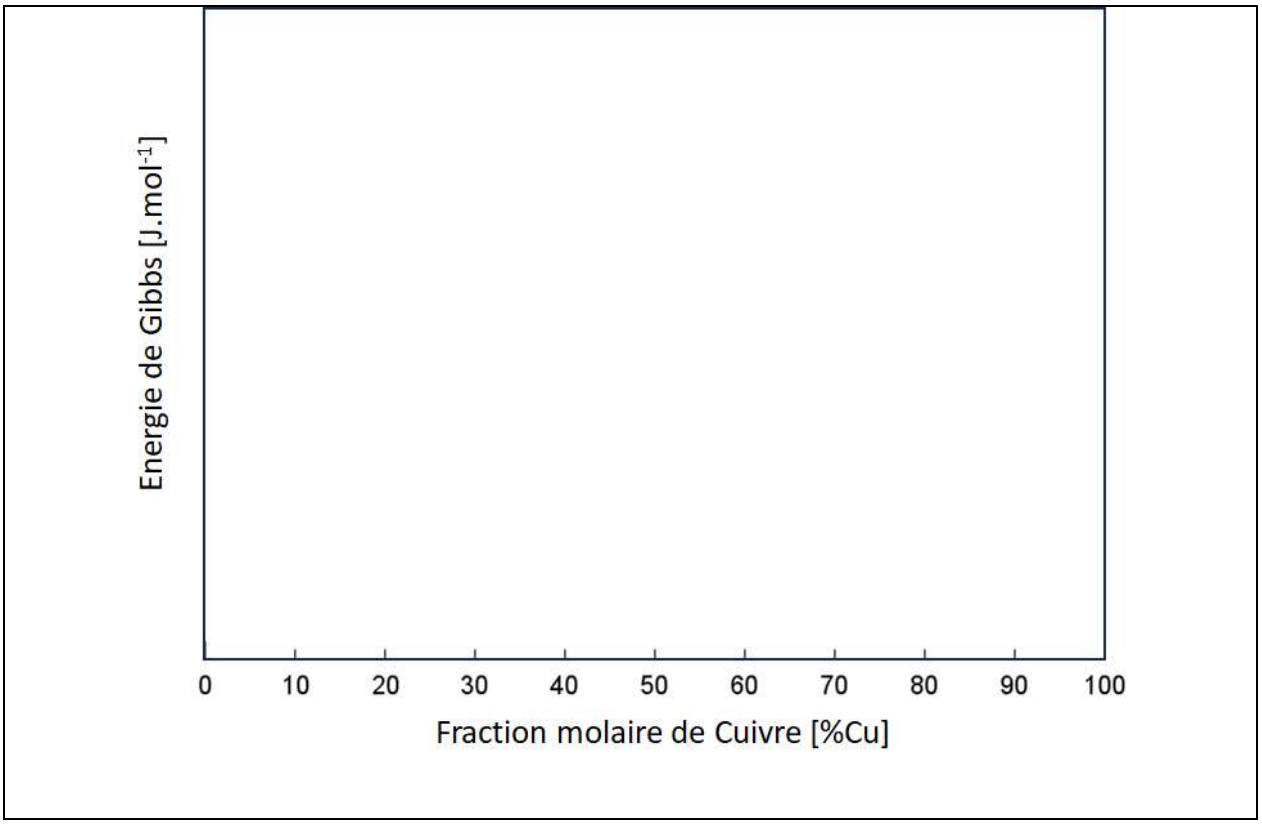
- Composition de cuivre de 20 % molaire

Phases présentes	
Fraction molaire des phases	
Composition molaire des phases	

- Composition de cuivre de 70 % molaire

Phases présentes	
Fraction molaire des phases	
Composition molaire des phases	

d) Représentez schématiquement, <u>à la température de 900 °C</u>, les courbes d'évolution des énergies de Gibbs des trois phases liquide (l), α et β dans le cadre suivant.

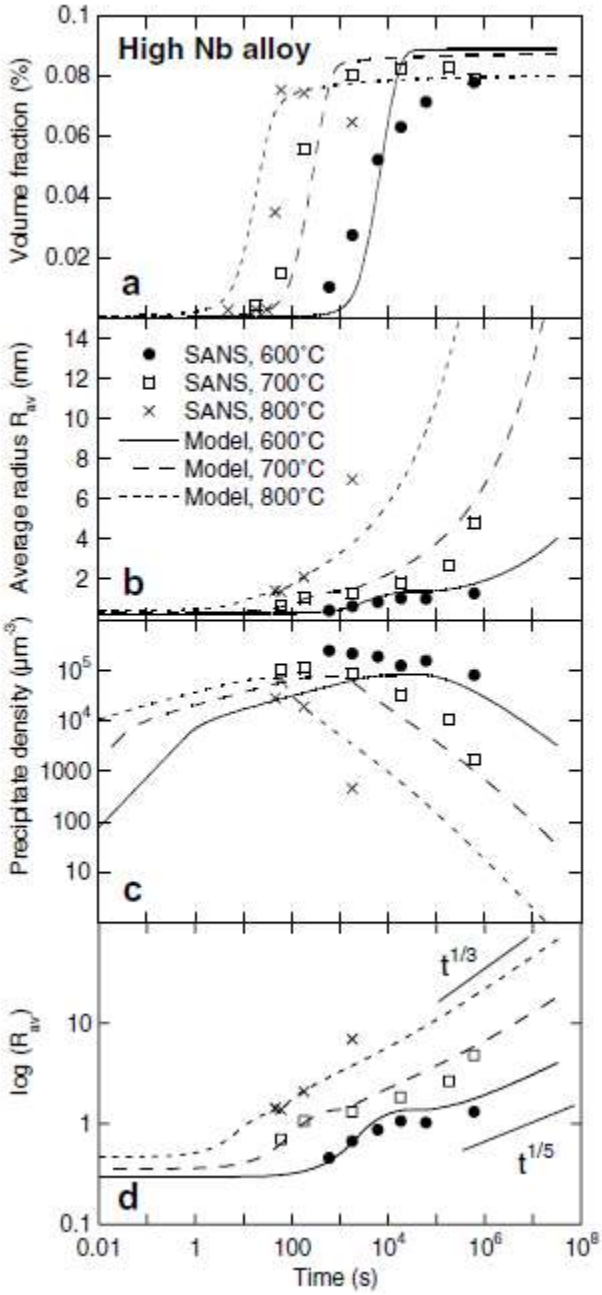


III-3/ Représentez schématiquement l'état du matériau (phase(s) présente(s), …) pour une composition molaire de cuivre de 20 %, aux températures suivantes :

T = 1000 °C	T = 800 °C	T = 600 °C

IV-Cinétique des transformations de phases

L'article [i] [Perrard, F., Deschamps, A., & Maugis, P. (2007), *Acta Materialia*, *55*(4), 1255-1266] analyse la précipitation de la phase NbC dans un acier ferritique.
La figure suivante présente des mesures de diffusion de neutrons aux petits angles (Small Angle Neutron Scattering) de l'évolution de plusieurs grandeurs au cours du temps pour trois températures différentes, (a) fraction volumique de phase NbC, (b) rayon moyen des précipités, (c) densité de précipités, et (d) logarithme du rayon moyen des précipités.



Mesures et modélisation de la précipitation de phase NbC dans une phase matricielle riche en fer [1]

IV-1/ Pour l'expérience à 700°C, à quel temps est-ce que le système atteint un état d'équilibre thermodynamique ?

10s	10^3s	10^5s

IV-2/ Le coefficient de diffusion du niobium suit une loi d'Arrhenius avec comme coefficient pré-exponentiel $D_0 = 1.27 \times 10^{-5} m^2/s$ et comme énergie d'activation $Q = 224 kJ/mol$. Avec la constante des gaz parfaits $R = 8.314 J/K/mol$, quel est le coefficient de diffusion du Niobium à 700°C ?

$1.2022 \times 10^{-17} m^2/s$	$1.3416 \times 10^{7} m^2/s$	$2.44 \times 10^{-22} m^2/s$

IV-3/ Pour les trois températures, les points de mesures sont pris majoritairement dans l'étape de :

Germination	Croissance	Coalescence

Justifiez votre réponse :

IV-4/ Pour l'expérience à 700°C, à quelle étape de la précipitation correspondent les points expérimentaux où la fraction volumique de précipités augmente :

Germination	Croissance	Coalescence

Justifiez votre réponse :

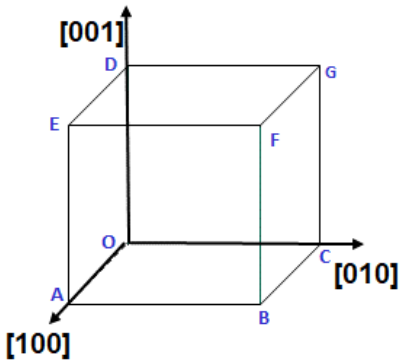
V-Anisotropie

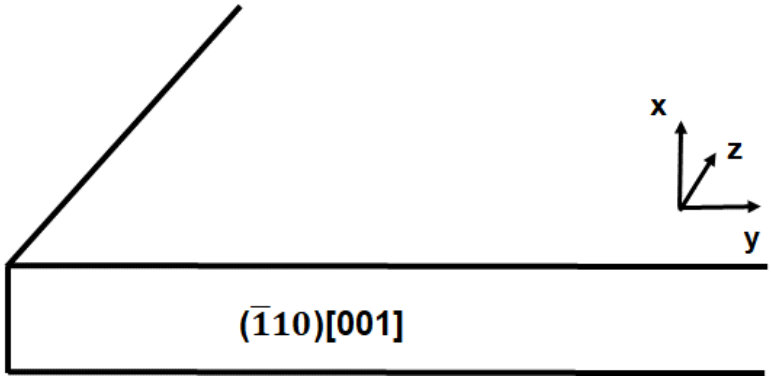
V-1/ Dans le cas de tôles d'aciers (fer α, cubique centré, contenant du silicium) destinées à la réalisation de transformateurs, il est important de connaître l'orientation cristalline des grains (cristaux) par rapport au repère de la pièce. Cela permet de découper les pièces du transformateur en considérant les directions d'aimantation cristallines, dites « faciles » (les directions <100> dans le fer α).

Une notation métallurgique est ainsi employée, (HKL)[UVW], qui définit :
- un plan (HKL) de la maille contenu dans le plan de la pièce (zy),
- une direction [UVW] de la maille est parallèle à la direction y.

Cette définition implique que la direction [UVW] est contenue dans le plan (HKL).

V-1-1/ Pour l'orientation $(\bar{1}10)[001]$, dessiner ci-dessous, dans le repère (x,y,z), le cristal (assimilé à un cube), en perspective. Les arêtes du cube seront en trait plein au-dessus du plan (yz) et en tiret au-dessous du plan (yz) (en tiret également, ce qui est derrière).
Reporter les lettres A à G sur votre dessin.
Dessiner préalablement le plan $(\bar{1}10)$ dans le repère cristallin ([100],[010],[001]) (maille à gauche). Pour cela, vous pouvez être amené à "ramener" le plan dans la maille, par simple translation.



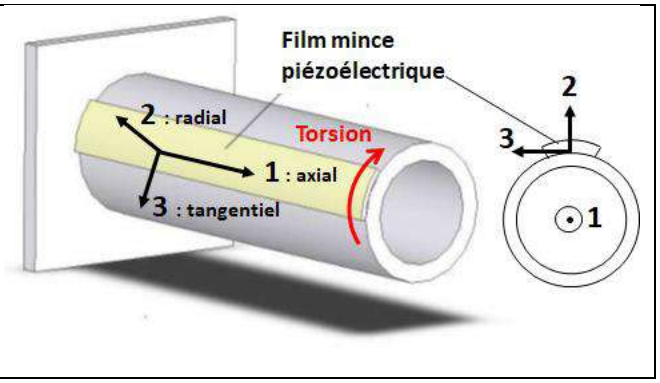


V-1-2/ Dans le fer α, les directions d'aimantation cristallines dites « dures » sont les directions <111>. Représentez la direction $[\bar{1}\bar{1}1]$, ramenée (par simple translation) dans le plan $(\bar{1}10)$, dans votre dessin.

V-1-3/ Quel est l'angle entre ces deux directions d'aimantation, [001] et $[\bar{1}\bar{1}1]$?

V-2/ Dans le cadre de la récupération d'énergie, il s'agit d'étudier le cas d'un tube circulaire soumis à une torsion. Le tube est encastré d'un côté, des contraintes de cisaillement se développent sur la circonférence (contraintes maximales sur la partie la plus externe). Une couche piézoélectrique fixée sur cette dernière permet de produire des charges électriques lors de torsions répétées.

Le film monocristallin piézoélectrique s'étend sur toute la longueur du tube. L'épaisseur et la largeur du film sont très faibles par rapport aux dimensions du tube. Ainsi, si l'angle de torsion (pure) est faible, l'hypothèse d'un cisaillement pur est faite, soit la composante σ_{12} pour le film [ii]. Cette configuration est analysée dans le cadre du système cristallin cubique.



[ii] V. Kulkarni, R. Ben Mrad, E. Prasad and S. Nemana, *A shear-mode piezoceramic device for energy harvesting applications*, Smart materials, structures & NDT in aerospace 2011 Conference

Pour le système cubique, les équations de couplage électromécaniques, exprimées dans le repère cristallographique (1=[100],2=[010],3=[001]), sont :

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = C_{11kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k11}.E_k^{(1,2,3)} = \left(C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3\right) \quad (1)$$
$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = C_{22kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k22}.E_k^{(1,2,3)} = \left(C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3\right) \quad (2)$$
$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = C_{33kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k33}.E_k^{(1,2,3)} = \left(C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_3\right) \quad (3)$$
$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{23kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k23}.E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_4 - e_{14}.E_1 \qquad \gamma_4 = 2.\varepsilon_4 \quad (4)$$
$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{13kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k13}.E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_5 - e_{14}.E_2 \qquad \gamma_5 = 2.\varepsilon_5 \quad (5)$$
$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{12kl}.\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k12}.E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_6 - e_{14}.E_3 \qquad \gamma_6 = 2.\varepsilon_6 \quad (6)$$

Le repère du tube est le même que celui du cristal, l'axe 1 du tube correspond donc à [100], l'axe 2 à [010] et l'axe 3 à [001]. Ce choix permet donc utiliser directement les équations (1) à (6) pour décrire le système en torsion (d'un point de vue technologique, il est effectivement possible de « déposer », sur le tube, le film monocristallin avec cette orientation cristallographique).

V-2-1/ <u>Pour toute la suite</u>, il est fait l'hypothèse que les composantes de cisaillement des tenseurs de contraintes et de déformation, σ_{12} et ε_{12} $(= \varepsilon_6)$, sont les seules non nulles.
Ainsi, quel champ électrique sera généré ?

E_1	E_2	E_3

V-2-2/ En se basant sur les équations électromécaniques ci-dessus, donner l'expression du champ électrique généré :

V-2-3/ Pour l'arséniure de gallium (cubique), les constantes d'élasticité et le coefficient piézoélectrique sont :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 11{,}9\ 10^{10}\ N.m^{-2}$$
$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = 5{,}4\ 10^{10}\ N.m^{-2}$$
$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = 5{,}9\ 10^{10}\ N.m^{-2}$$
$$e_{14} = -0{,}16\ C.m^{-2}$$

Pour un état appliqué de contrainte (σ_{12}) de 100 MPa (1 MPa vaut 10^6 N.m^{-2}), ainsi qu'une déformation $\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 = 10^{-5}$, calculer le champ électrique généré (en V.m^{-1}).

Matériaux pour l'ingénieur - Corrigé

Rédigé par LETURCQ–DALIGAUX Mattéo,
merci de signaler toute erreur ou incompréhension

17 septembre 2023

1 I-Cristallographie, solutions solides

I-1/ Dans un réseau cubique, la direction [110] représente :

Une arête du cube	Une diagonale d'une face	Une diagonale du cube

La direction [110] représente une **diagonale d'une face**.

I-2/ Dans un réseau quadratique ($a = b \neq c$), les directions [001] et [100] sont équivalentes :

Vrai	Faux

Faux

I-3/ Lequel de ces défauts cristallins est un défaut planaire :

La dislocation	La lacune	Le joint de grains

Le seul défaut planaire ici est **la dislocation**. La lacune est un défaut ponctuel et le joint de grains est un défaut volumique.

I-4/ La composition chimique d'une phase définit sa structure cristalline :

Vrai	Faux

Faux

Les aciers (systèmes Fe-C)sont présents dans de nombreux secteurs industriels (bâtiments, automobile, médiacal, ...). leurs propriétés finales dépendent fortement de leur microstructure, et donc du traitement thermique appliqué. Le fer pur possède une transformation allotropique depuis une phase cubique centrée (la ferrite, fer α) vers une phase cubique face centrée (l'austénite, fer γ) à 911°C lors du chauffage.

I-5/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans la ferrite ?	

I-5/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans la ferrite ?	$\frac{1}{8} \times 8 + 1 = 2$

I-6/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans l'austénite ?	

I-6/ Quel est le nombre d'atomes de Fer contenu dans l'austénite ?	$\frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{2} \times 6 = 4$

Le paramètre de maille de la ferrite est de $0.29nm$, celui de l'austénite de $0.36nm$, et un atome de Fer a un diamètre de $0.13nm$. La compacité est définie comme le rapport entre le volume occupé par les atomes et le volume total de la maille cristalline.

I-7/ Quelle est la compacité de la maille ferritique ?	

Il y avait une erreur dans cette question, 0.13 nm correspond au RAYON de l'atome de fer

I-7/ Quelle est la compacité de la maille ferritique ?	$\frac{2 \times \frac{4}{3}\pi(0.13)^3}{(0.29)^3} = 0.68$

I-8/ Quelle est la compacité de la maille austénitique ?	

I-8/ Quelle est la compacité de la maille austénitique ?	$\frac{4 \times \frac{4}{3}\pi(0.13)^3}{(0.36)^3} = 0.74$

I-9/ La transformation de la ferrite vers l'austéite induit-elle une contraction ou une dilatation du matériau ?

Contraction	Dilatation

Cette transforamtion induit une **Contraction** du matériau.

I-10/ Le carbone a un rayon atomique d'environ $70pm$. Selon vous, l'acier est une solution solide de type :

Interstitielle	Substitutionnelle

Les sites interstitiels sont trop petis pour contenir les atomes de carbone donc l'acier est une solution solide de type **Substitutionnelle**.

2 II-Architecture moléculaire et propriété des polymères

II-1/ Dans un polymère, la conformation est un arrangement spatial qui est fixé par liaisons chimiques et ne peut varier qu'à la suite d'une rupture de liaison.

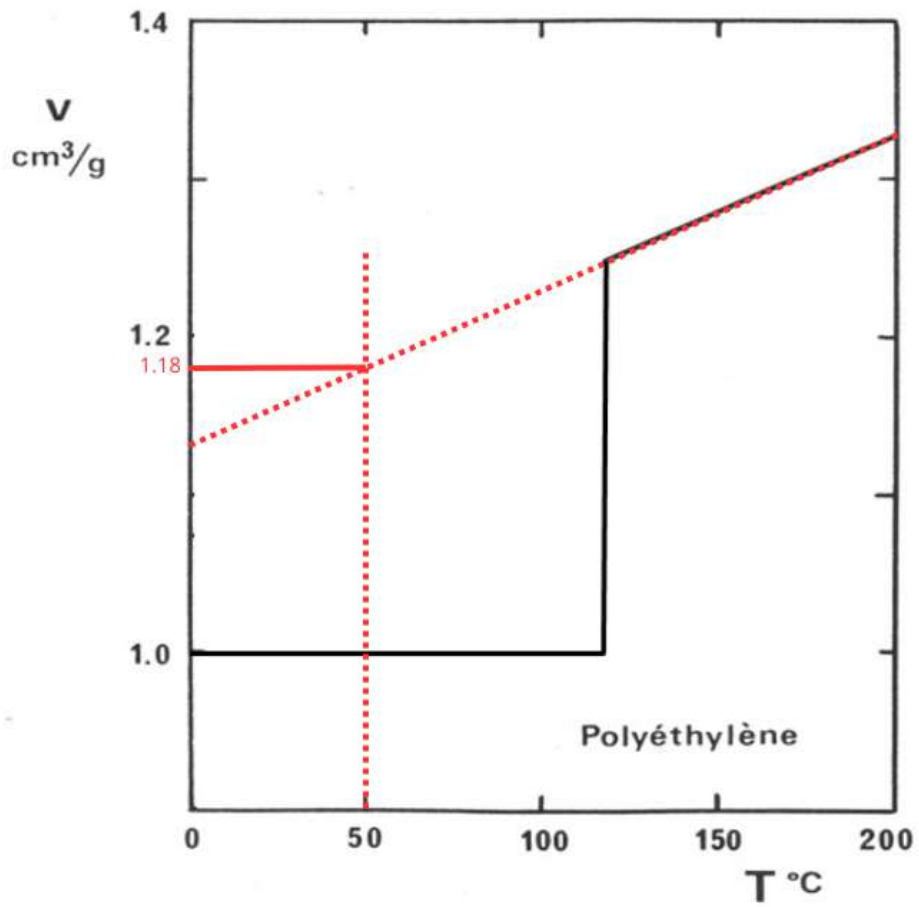
Vrai	Faux

Faux, la conformation est un arrangement spatial qui est fixé par liaisons chimiques et peut varier sans rupture de liaison (rotation d'un groupement).

II-2/ On peut d"terminer le taux de cristallinité d'un polymère (en masse et en volume) à partir d'une mesure de sa masse volumique (ou de son volume spécifique v), si l'on connaît les masses volumiques ρ, indicées c et a, pour les phases cristalline et amorphe. Donner, sans la démonstration, l'exxpression de la fraction x_c (en masse) adéquate.

$x_c = \frac{v_a - v}{v_a - v_c}$ avec $v = \frac{1}{\rho}$

II-3/ Déterminer le taux de cristallinité, en masse, du polyéthylène à $50°C$ en vous aidant du graphe ci-contre et noter sur le graphe vos prises de mesures.



Comme on voit sur le graphe, à $50°C$ on a $v = 1\,cm^3.g{-}1$ et $v_a = 1.18\,cm^3.g{-}1$.
De plus $v_c = 0.994 cm^3.g^{-1}$. *Je crois que c'est la valeur donnée dans la PC*
Alors $x_c = \frac{1.18-1}{1.18-0.994} = 0.97$

II-4/ On considère une mesure de spectroscopie d'impédance mécanique sur un polymère effectuée en mode dynamique sinusoïdale, en fonction de la température T (essai DMTA). Différentes grandeurs ont été reportées dans le grpahique ci-dessous. Vous devez reconnaître ces dernières ainsi que quelques éléments distinctifs de certaines courbes.

II-4-1/ La courbe (a) correspond au :

Module de rigidité, E'	Module de perte, E"	Coefficient de perte, tan δ

La courbe (a) correspond au **Module de rigidité, E'**, en effet c'est la courbe la plus haute.

II-4-2/ La courbe (b) correspond au :

Module de rigidité, E'	Module de perte, E"	Coefficient de perte, tan δ

La courbe (b) correspond au **Module de perte, E"**, en effet par élimination.

II-4-3/ La courbe (c) correspond au :

Module de rigidité, E'	Module de perte, E"	Coefficient de perte, tan δ

La courbe (c) correspond au **Coefficient de perte, tan δ**, en effet c'est la courbe avec un pic bien marqué et c'est la seule qui est croissante.

II-4-4/ Le polymère voit sa conformation de chaîne évoluer sans cesse en autorisant différents changements de conformations locales, et ceci est évidemment très dépendant de la température. Quand il n'y a pas de coopérativité des changements le long du squelette de la chaîne, quel est le mécanisme nécessitant le moins d'énergie ?

Mouvement de type "vilebrequin" impliquant quelques liaisons chimiques de la chaîne	Rotation d'un groupement chimique (radical), perpendiculairement au squelette de la chaîne	Désenchevêtrement de la chaîne associée à la libération des noeuds chimiques entre les chaînes

Le mécanisme nécessitant le moins d'énergie est la **Rotation d'un groupement chimique (radical), perpendiculairement au squelette de la chaîne**.

II-4-5/ Quand il y a coopérativité de ces changements le long du squelette de la chaîne, une transition, s'accompagnant d'une relaxation des propriétés mécaniques, est constatée. S'il n'y a pas de coopérativité de ces changements de conformations, l'impact est bien moins prononcé mais il résulte toutefois une relaxation.

a) Le pic [1] de la courbe (b) correspond à la relaxation :

Alpha	Bêta

Le pic [1] de la courbe (b) correspond à la relaxation **Alpha** car c'est la première à apparaître puisqu'elle demande le moins d'énergie (rotation d'un groupement chimique).

b) Le pic [3] de la courbe (b) correspond à la relaxation :

Alpha	Bêta

Le pic [3] de la courbe (b) correspond à la relaxation **Bêta** car c'est la dernière à apparaître puisqu'elle demande le plus d'énergie (désenchevêtrement de la chaîne).

c) Situer la température de transition vitreuse T_g sur la courbe (c) et donner sa valeur.

La température de transition vitreuse T_g est située au niveau du pic [2] de la courbe (c) et sa valeur est de **120°C**.

3 III-Diagramme de phases

III-1/ La figure suivante présente le diagramme de phase du système binaire argent-cuivre. La représentation est proposée en fonction de la composition molaire du cuivre (Cu) dans l'argent (Ag). La température est indiquée en degré Celsius (°C).

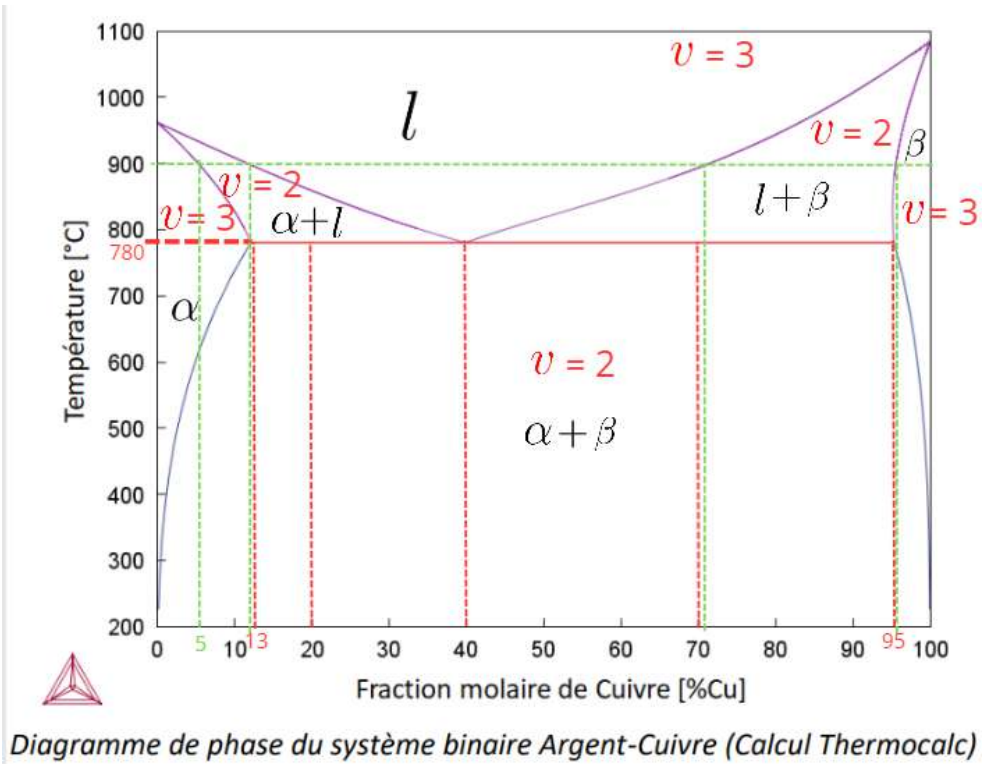


FIGURE 1 – Diagramme de phases

Trois phases sont présentes dans ce système :
— Une phase liquide (l) à haute température
— Une phase solide (α) pour une composition faible en cuivre
— Une phase solide (β) pour une composition forte en cuivre
Sur la base de la représentation du diagramme de phase ci-dessus, et en vous appuyant sur ces infor

mations, il vous est demandé de répondre aux questions suivantes :

a) Indiquez sur chaque domaine monophasé ou multiphasé de ce diagramme Ag-Cu, les différentes phases présentes.

Voir figure 1.

b) Précisez les valeurs de la variance associée à chacun de ces domaines, monophasé ou multiphasé, en les indiquant sur le diagramme.

Voir figure 1 sachant que $\nu = c + 2 - \phi$ avec c le nombre de constituants et ϕ le nombre de phases. Dans ce cas on a $c = 2$ d'où $\nu = 4 - \phi$.

III-2/ Répondez aux questions suivantes :

a) Quelle est la température eutectique du système argent-cuivre	

La température eutectique du système argent-cuivre est de **780°C** (voir figure 1).

b) Quelle est la variance de ce même système sur ce point eutectique	

La variance de ce système sur ce point eutectique est de **1** car $v = 4 - \varphi = 1$. Les 3 phases coexistent au point eutectique.

c) On se place très légérement au-dessus de la température eutectique. En considérant que le système a les composisitions molaires en cuivre suivantes, quelles sont les phases présentes, leur composition et leur fraction ?

- Composition de cuivre de 20% molaire

Phases présentes	
Fraction molaire des phases	
Composition molaire des phases	

- Composition de cuivre de 70% molaire

Phases présentes	
Fraction molaire des phases	
Composition molaire des phases	

- Composition de cuivre de 20% molaire

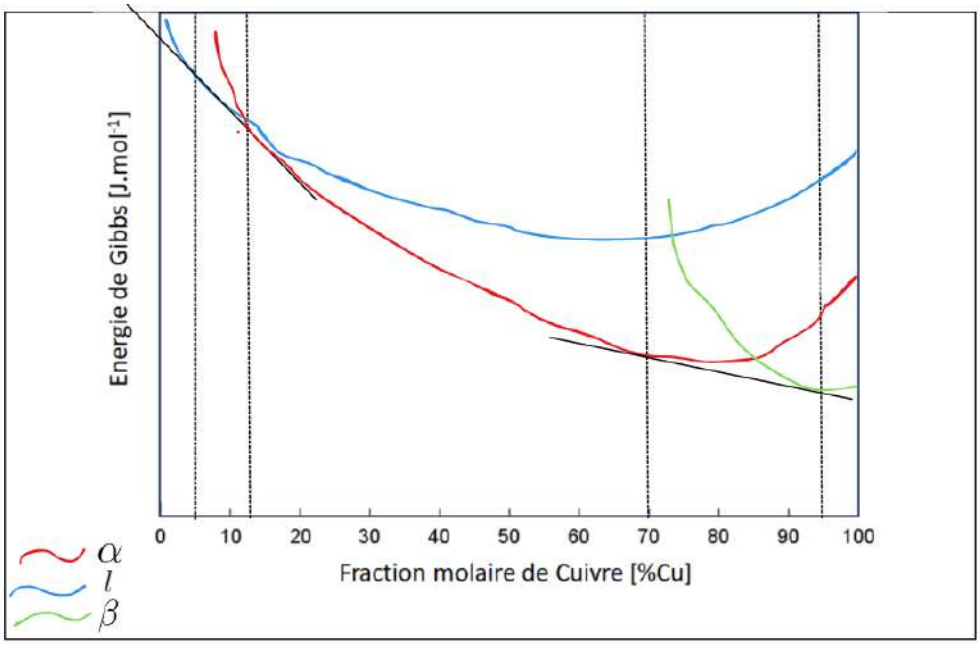
Phases présentes	l et α
Fraction molaire des phases	$x_l = \frac{20-13}{40-13} = 0.26 \quad x_\alpha = 1 - x_l = 0.74$
Composition molaire des phases	Dans l, $x_{Cu} = 40\%, \quad x_{Ag} = 60\%$ Dans α, $x_{Cu} = 13\%, \quad x_{Ag} = 87\%$

- Composition de cuivre de 70% molaire

Phases présentes	l et β
Fraction molaire des phases	$x_l = \frac{95-70}{95-40} = 0.45 \quad x_\beta = 1 - x_l = 0.55$
Composition molaire des phases	Dans l, $x_{Cu} = 40\%, \quad x_{Ag} = 60\%$ Dans α, $x_{Cu} = 95\%, \quad x_{Ag} = 5\%$

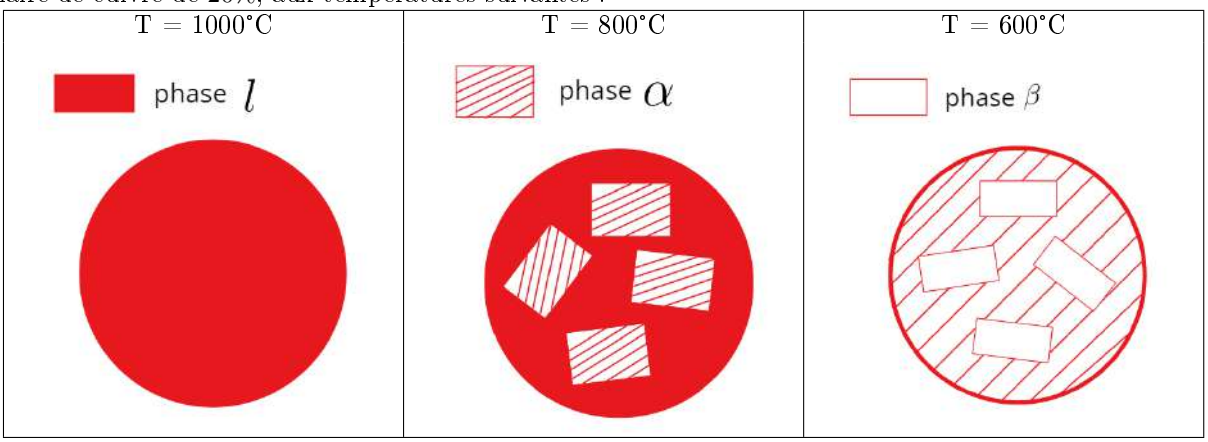
Voir figure 1 pour les différentes valeurs (tracé rouge).

d) Représentez schématiquement, à la température 900°C, les courbes d'évolution des énergies de Gibbs des trois phases liquide(l), α et β dans le cadre suivant.



Voir les tracés verts figure 1.

III-3/ Représentez schématiquement l'état du matériau (phase(s) présente(s), ...) pour une composition molaire de cuivre de 20%, aux températures suivantes :



4 IV-Cinétique des transformations de phases

L'article [i] [Perrard, F., Deschamps, A., Maugis, P. (2007), *Acta Materialia, 55*(4), 1255-1266] analyse la précipitation de la phase NbC dans un acier ferritique.

La figure suivante présente les mesures de diffusion de neutrons aux petits angles (Small angles Neutron Scattering) de l'évolution de plusieurs grandeurs au cours du temps pour trois températures différentes,

(a) fraction volumique de phase NbC, (b) rayon moyen des précipités, (c) densité de précipités, et (d) logarithme du rayon moyen des précipités.

IV-1/ Pour l'expérience à 700°C, à quel temps est-ce que le système atteint un état d'équilibre thermodynamique ?

10 s	10^3s	10^5s

On voit notamment sur la courbe (a) au niveau du deuxième palier que l'équilibre est atteint pour t = $10^5 s$.

IV-2/ Le coefficent de diffusion du niobium suit une loi d'Arrhénius avec comme coefficient pré-exponentiel $D_0 = 1.27 \times 10^{-5} m^2/s$ et comme énergie d'activation $Q = 224 kJ/mol$. Avec la constante des gaz parfaits $R = 8.314 J/mol/K$, quel est le coefficent de diffusion du Niobium à 700°C ?

1.2022 $\times 10^{-17} m^2/s$	1.3416 $\times 10^{7} m^2/s$	2.44 $\times 10^{-22} m^2/s$

On a $D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}} = 1.27 \times 10^{-5} e^{-\frac{224 \times 10^3}{8.314 \times 973.15}} = 1.2022 \times 10^{-17} m^2/s$
La bonne réponse est donc $1.202210^{-17} m^2/s$ (réponse 1).

IV-3/ Pour les trois températures, les points de mesures sont pris majoritairement dans l'étape de :

Germination	Croissance	Coalescence

Justifiez votre réponse.

Les points de mesures sont pris à un moment où le rayon moyen augmente fortement avec la fraction volumique de phase NbC.
Cela correspond à la phase de **croissance**.

IV-4/ Pour l'expérience à 700°C, à quelle étape de la précipitation correspondent les points expérimentaux où la fraction volumique de précipités augmente :

Germination	Croissance	Coalescence

Justifiez votre réponse.

La fraction volumique augmente lors de l'apparition des premiers précipités soit pendant la phase de **germination**.

5 V-Anisotropie

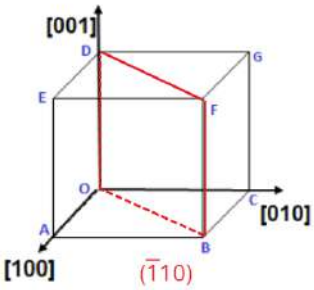
V-1/ Dans le cas de tôles d'aciers (fer α, cubique centré, contenant du silicium) destinées à la réalisation de transformateurs, il est important de connaître l'orientation cristalline des grains (cristaux) par rapport au repère de la pièce. Cela permet de découper les pièces du transformateur en considérant les directions d'aimantation cristallines, dites "faciles" (les directions <100> dans le fer α).

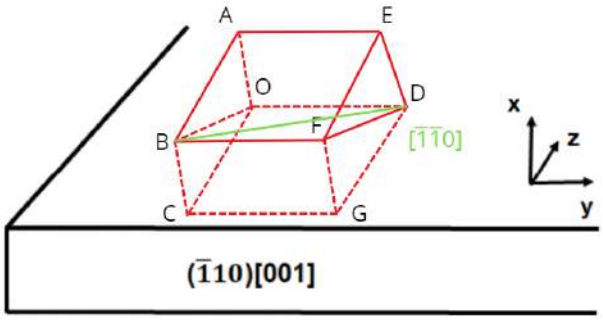
Une notation metallurgique est ainsi employée, (HKL)[UVW], qui définit :
- un plan (HKL) de la maille contenu dans le plan de la pièce (zy),
-une direction [UVW] de la maille est parallèle à la direction y.
Cette définition implique que la direction [UVW] est contenue dans le plan (HKL).

V-1-1/ Pour l'orientation $(\bar{1}10)[001]$, dessiner ci-desssous, dans le repère (x,y,z), le cristal (assimilé à un cube), en perspective. Les arêtes du cube seront en trait plein au-dessus du plan (yz) et en tiret au-dessous du plan (yz) (en tiret également, ce qui est derrière).

Reporter les lettres A à G sur votre dessin.

Dessiner préalablement le plan $(\bar{1}10)$ dans le repère cristallin ([100],[010],[001]) (maille à gauche). Pour cela, vous pouvez être amené à "ramener" le plan dans la maille, par simple translation.





V-1-2/ Dans le fer α, les directions d'aimantation cristallines dites "dures" sont les directions <111>. Représentez la direction $[\bar{1}\bar{1}1]$, ramenée (par simple translation) dans le plan $(\bar{1}10)$, dans votre dessin.

V-1-3/ Quel est l'angle entre ces deux directions d'aimantation, [001] et $[\bar{1}\bar{1}1]$?

On remarque en faisant un dessin (désolé je le fais pas flemme il est 1h du mat quand j'écris ces lignes), que l'angle entre les deux directions est de $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 54.7$.

V-2/ Dans le cadre de la récupération d'énergie, il s'agit d'étudier le cas d'un tube circulaire soumis à une torsion. Le tube esr encastré d'un côté, des contraintes de cisaillement se développent sur la circonférence (contraintes maximales sur la partie la plus externe). Une couche piézoélectrique fixée sur cette dernière permet de produire des charges électriques lors de torsions répétées.

Pour le système cubique, les équations de couplage électromagnétiques, exprimées dans le repère cristallographique (1=[100], 2=[010], 3=[001]) sont :

$$\sigma_{11}^{(1,2,3)} = C_{11kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k11}E_k^{(1,2,3)} = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3$$

$$\sigma_{22}^{(1,2,3)} = C_{22kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k22}E_k^{(1,2,3)} = C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3$$

$$\sigma_{33}^{(1,2,3)} = C_{33kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k33}E_k^{(1,2,3)} = C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_3$$

$$\sigma_{23}^{(1,2,3)} = C_{23kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k23}E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_4 - e_{14}E_1, \quad \gamma_4 = 2\varepsilon_4$$

$$\sigma_{13}^{(1,2,3)} = C_{13kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k13}E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_5 - e_{14}E_2, \quad \gamma_5 = 2\varepsilon_5$$

$$\sigma_{12}^{(1,2,3)} = C_{12kl}\varepsilon_{kl}^{(1,2,3)} - e_{k12}E_k^{(1,2,3)} = C_{44}\gamma_6 - e_{14}E_3, \quad \gamma_6 = 2\varepsilon_6$$

Le repère du tube est le même que celui du cristal, l'axe 1 du tube correspond à [100], l'axe 2 à [010] et l'axe 3 à [001]. Ce choix permet donc d'utiliser directement les équations (1) à (6) pour décrire le système

en torsion (d'un point de vue technologique, il est effectivement possible de "déposer", sur le tube, le film monocristallin avec cette orientation cristallographique).

V-2-1/ Pour toute la suite, il est fait l'hypothèse que les composantes de cisaillement des tenseurs de contraintes et de déformation, σ_{12} et ε_{12} ($= \varepsilon_6$), sont les seules non nulles.

Ainsi, quel champ électrique sera généré ?

E_1	E_2	E_3

On a $\sigma_{12} = C_{44}\gamma_6 - e_{14}E_3$ et $\varepsilon_{12} = \gamma_6 = 2\varepsilon_6$.
Donc le seul champ non nul est E_3.

V-2-2/ En se basant sur les équations électromagnétiques ci-dessus, donner l'expression du champ électrique généré.

En utilisant l'équation (6) on a $E_3 = \frac{2C_{44}\varepsilon_6 - \sigma_{12}}{e_{14}}$

V-2-3/ Pour l'arséniure de gallium (cubique), les constantes d'élasticité et le coefficient piézoélectrique sont :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 11,9 \times 10^{10}\, N.m^{-2}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = 5,4 \times 10^{10}\, N.m^{-2}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = 5,9 \times 10^{10}\, N.m^{-2}$$

$$e_{14} = -0,16\, C.m^{-2}$$

Pour un état appliqué de contrainte (σ_{12}) de 100 MPa (1 MPa vaut $10^6\, N.m^{-2}$), ainsi qu'une déformation $\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 = 10^{-5}$, calculer le champ électrique généré (en $V.m^{-1}$).

On a $E_3 = \frac{\cancel{2C_{44}\varepsilon_6 - \sigma_{12}}}{e_{14}} = \frac{2\times5,9\times10^{10}\times10^{-5} - 100\times10^6}{-0,16} = 6,2 \times 10^8\, V.m^{-1}$

Examen de Science des données 2023

MINES Paris - Tronc Commun 1A

Durée : 1h30. Tous documents autorisés.

QCM (5 points)

Plusieurs réponses peuvent être correctes. Aucun point n'est enlevé en cas de réponse incorrecte.

1. L'erreur quadratique moyenne d'un estimateur non-biaisé est nécessairement plus faible que celle d'un estimateur biaisé.
   - A. Vrai
   - B. Faux
2. Lorsqu'on effectue une analyse en composantes principales sur un jeu de données,
   - A. Il est préférable d'utiliser des variables réduites lorsque les variables ont des unités différentes
   - B. L'utilisation de variables réduites donne la même importance à toutes les variables
3. La matrice de covariance d'un jeu de données comprenant n vecteurs de dimension d est de taille
   - A. $n \times n$
   - B. $n \times d$
   - C. $d \times n$
   - D. $d \times d$
4. On entraîne un modèle d'apprentissage supervisé sur un jeu de données d'entraînement $(\vec{x}^i, y_i)_{i=1}^m$. Lorsqu'on augmente m,
   - A. Le biais du modèle ne change pas mais sa variance augmente
   - B. Le biais et la variance du modèle diminuent
   - C. Le biais et la variance du modèle restent identiques
   - D. Le biais du modèle reste identique mais sa variance diminue
5. On entraîne un modèle d'apprentissage supervisé sur un jeu de données d'entraînement $(\vec{x}^i, y_i)_{i=1}^m$. Le risque du modèle obtenu estimé sur des données de test
   - A. est nécessairement plus élevé que le risque estimé sur la base d'entraînement
   - B. est du même ordre de grandeur que le risque estimé sur la base d'entraînement
   - C. est nul dès lors le prédicteur minimise le risque empirique sur la base d'entraînement
   - D. peut être moins élevé que le risque d'entrainement.

Exercice 1: Estimation (7 points)

Dans cet exercice, nous cherchons à estimer la loi de probabilité du nombre de véhicules s'arrêtant à un feu rouge pendant une durée T fixée. Pour ce faire, nous disposons d'un capteur placé à la hauteur du feu qui permet de mesurer le temps qui s'écoule entre le moment où le feu passe au rouge et l'arrivée de la première voiture qui s'arrête. Nous ferons l'hypothèse que le feu reste au vert suffisamment longtemps pour que toutes les voitures à l'arrêt aient le temps de circuler avant que le feu repasse au rouge.

1. Modélisation

Fixons un temps $t > 0$. On peut découper l'intervalle de temps $[0, t]$ en n segments temporels de durée Δt

$$\Delta t := \frac{t}{n}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre de voitures qui s'arrêtent au feu au cours de l'intervalle de temps $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$. Pour Δt suffisamment petit, on fait l'hypothèse que:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ avec probabilité } \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ 0 \text{ avec probabilité } 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre inconnu.

1. *(1 point)* Montrer que la variable aléatoire

$$N_{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

suit la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(N_{\Delta t} = k) = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} + o(1).$$

A quel évènement cette variable aléatoire correspond-elle?

2. *(1 point)* En faisant tendre Δt vers 0 dans l'expression précédente, en déduire que le nombre $N(t)$ de véhicules s'arrêtant au feu rouge entre les instants 0 et t suit une loi de Poisson de paramètre λt:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

3. *(1 point)* On note $\mathcal{T} = \inf_{t>0}\{N(t) \geq 1\}$ le temps d'arrivée de la première voiture. Montrer que la variable aléatoire $\mathcal{T}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que la densité p d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

$$p(t) = \lambda \exp(-\lambda t).$$

2. Estimation du paramètre λ

4. *(2 points)* On dispose grâce au capteur d'un échantillon $(\tau_1, \ldots \tau_m)$ de réalisations de la variable aléatoire $\mathcal{T}$. Proposer un estimateur du paramètre λ à partir du principe du maximum de vraisemblance.

5. *(2 points)* On suppose maintenant que la loi de distribution *a priori* du paramètre λ est une loi gamma de paramètres α et β. On rappelle que la densité d'une loi Gamma est donnée par:

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)},$$

et que l'espérance de cette loi est α/β. Proposer un estimateur de Bayes du paramètre λ. Quelle est la valeur de cet estimateur lorsque $m = 0$? Lorsque $m \to +\infty$?

Exercice 2: Boosting (8 Points)

On dispose d'un jeu de données $((\vec{x}^i, y^i) \in \mathbb{R}^p \times \{-1, 1\}, i = 1, \ldots, m)$. On cherche à entraîner un classifieur sur ce jeu de données en utilisant la méthode du *boosting*. Cette méthode vise à construire une

fonction de décision f_N qui combine linéairement différents classifieurs $(h_k)_{k=1,\dots,N}$ dits *faibles* appartenant à un espace d'hypothèse $\mathcal{F}$ fixé. Pour ce faire, on procède en minimisant le risque empirique évalué avec une fonction de coût exponentielle:

$$R(f) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(\vec{x_i})).$$

On notera bien que les classifieurs faibles $(h_k)_{k=1,\dots,N}$ de $\mathcal{F}$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\{-1,1\}$, et que la fonction de décision f_N est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *(1 point)* Montrer que le risque empirique $R(f)$ calculé avec une fonction de coût exponentielle est un majorant du risque empirique calculé avec la fonction de coût 0/1.

La fonction de décision finale obtenue avec la méthode du boosting est $f_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k h_k$, où pour tout $k = 1, \dots, N$, α_k est un coefficient de pondération positif et h_k un classifieur faible de $\mathcal{F}$. f_N est construit itérativement en N étapes successives. A l'initialisation, on fixe $f_1 = h_1$ où

$$h_1 \in \arg\min_{h\in\mathcal{F}} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{y_i \neq h(\vec{x}^i)}.$$

2. *(2 points)* A une itération n quelconque, on a $f_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k h_k$, les coefficients $(\alpha_k)_{k=1,\dots,n-1}$ et les classifieurs faibles $(h_k)_{k=1,\dots,n-1}$ ayant été fixés aux itérations précédentes. On cherche à incorporer un nouveau classifieur faible h_n dans l'expression de f_n, de sorte que

$$f_n = f_{n-1} + \alpha_n h_n$$

Montrer que le classifieur faible h_n permettant de minimiser le risque empirique associé au classifieur f_n est solution de

$$h_n = \arg\min_{h\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{(n)} 1_{h_n(\vec{x_i})=y_i},$$

où on explicitera la valeur de $w_i^{(n)}$. Que peut-on dire de la valeur de $w_i^{(n)}$ lorsque la donnée $\vec{x^i}$ est correctement classifiée par le classifieur associé à la fonction de décision f_{n-1} ?

3. *(2 points)* Supposons maintenant le classifieur faible h_n fixé. Comment peut-on sélectionner la valeur du coefficient α_n? Montrer que cela conduit à fixer la valeur de ce paramètre égale à

$$\alpha_n = \log\sqrt{\frac{\sum_{i\in\mathcal{T}} w_i^{(n)}}{\sum_{i\in\mathcal{T}^c} w_i^{(n)}}}$$

où l'ensemble $\mathcal{T}$ est défini par:

$$\mathcal{T} = \{i \in [\![1,m]\!], h_n(\vec{x}^i) = y^i\}.$$

4. *(2 points)* Expliquer qualitativement comment on peut fixer en pratique le nombre d'itérations N utilisées pour construire le classifieur f_n.

Examen de Science des données 2023

MINES Paris - Tronc Commun 1A

Durée : 1h30. Tous documents autorisés.

QCM (5 points)

Plusieurs réponses peuvent être correctes. Aucun point n'est enlevé en cas de réponse incorrecte.

1. L'erreur quadratique moyenne d'un estimateur non-biaisé est nécessairement plus faible que celle d'un estimateur biaisé.
   - A. Vrai
   - B. Faux X
2. Lorsqu'on effectue une analyse en composantes principales sur un jeu de données,
   - A. Il est préférable d'utiliser des variables réduites lorsque les variables ont des unités différentes X
   - B. L'utilisation de variables réduites donne la même importance à toutes les variables X
3. La matrice de covariance d'un jeu de données comprenant n vecteurs de dimension d est de taille
   - A. $n \times n$
   - B. $n \times d$
   - C. $d \times n$
   - D. $d \times d$ X
4. On entraîne un modèle d'apprentissage supervisé sur un jeu de données d'entraînement $(\vec{x}^i, y_i)_{i=1}^m$. Lorsqu'on augmente m,
   - A. Le biais du modèle ne change pas mais sa variance augmente
   - B. Le biais et la variance du modèle diminuent
   - C. Le biais et la variance du modèle restent identiques
   - D. Le biais du modèle reste identique mais sa variance diminue X
5. On entraîne un modèle d'apprentissage supervisé sur un jeu de données d'entraînement $(\vec{x}^i, y_i)_{i=1}^m$. Le risque du modèle obtenu estimé sur des données de test
   - A. est nécessairement plus élevé que le risque estimé sur la base d'entraînement
   - B. est du même ordre de grandeur que le risque estimé sur la base d'entraînement
   - C. est nul dès lors le prédicteur minimise le risque empirique sur la base d'entraînement
   - D. peut être moins élevé que le risque d'entrainement. X

Exercice 1: Estimation (9 points)

Dans cet exercice, nous cherchons à estimer la loi de probabilité du nombre de véhicules s'arrêtant à un feu rouge pendant une durée T fixée. Pour ce faire, nous disposons d'un capteur placé à la hauteur du feu qui permet de mesurer le temps qui s'écoule entre le moment où le feu passe au rouge et l'arrivée de la première voiture qui s'arrête. Nous ferons l'hypothèse que le feu reste au vert suffisamment longtemps pour que toutes les voitures à l'arrêt aient le temps de circuler avant que le feu repasse au rouge.

1. Modélisation

Fixons un temps $t > 0$. On peut découper l'intervalle de temps $[0, t]$ en n segments temporels de durée Δt

$$\Delta t := \frac{t}{n}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre de voitures qui s'arrêtent au feu au cours de l'intervalle de temps $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$. Pour Δt suffisamment petit, on fait l'hypothèse que:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ avec probabilité } \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ 0 \text{ avec probabilité } 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre inconnu.

1. *(1 point)* Montrer que la variable aléatoire

$$N_{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

suit la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(N_{\Delta t} = k) = \binom{n}{k}(\lambda\Delta t)^k(1 - \lambda\Delta t)^{n-k} + o(1).$$

A quel évènement cette variable aléatoire correspond-elle?

Solution: La variable aléatoire $N_{\Delta t}$ indique le nombre de véhicule qui arrivent au feu entre les instants 0 et t. $N_{\Delta t} = k$ si et seulement si il existe exactement k intervalles de temps $([(i_j - 1)\Delta t, i_j\Delta t])_{1 \leq j \leq k}$ pour lesquels $X_j = 1$. A k fixé, il existe exactement $\binom{n}{k}$ choix possibles pour ces intervalles. On en déduit donc:

$$\mathbb{P}(N_{\Delta t} = k) = \binom{n}{k}(\lambda\Delta t)^k(1 - \lambda\Delta t)^{n-k} + o(1).$$

2. *(1 point)* En faisant tendre Δt vers 0 dans l'expression précédente, en déduire que le nombre $N(t)$ de véhicules s'arrêtant au feu rouge entre les instants 0 et t suit une loi de Poisson de paramètre λt:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Solution: En utilisant le fait que $\Delta t = t/n$, on vérifie que

$$\mathbb{P}(N_{\Delta t} = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!}\frac{(\lambda t)^k}{n^k}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} + o(1)$$

lorsque $n \to +\infty$. Or, on vérifie que

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \to e^{-\lambda t}.$$

lorsque $n \to +\infty$.

3. *(1 point)* On note $\mathcal{T} = \inf_{t>0}\{N(t) \geq 1\}$ le temps d'arrivée de la première voiture. Montrer que la variable aléatoire $\mathcal{T}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que la densité p d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

$$p(t) = \lambda \exp(-\lambda t).$$

Solution: On vérifie que $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0)$. On en déduit que la fonction de répartition de $\mathcal{T}$ est $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. La variable aléatoire $\mathcal{T}$ suit donc bien une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Estimation du paramètre λ

4. *(3 points)* On dispose grâce au capteur d'un échantillon $(\tau_1, \dots \tau_m)$ de réalisations de la variable aléatoire $\mathcal{T}$. Proposer un estimateur du paramètre λ à partir du principe du maximum de vraisemblance.

Solution: La vraisemblance de l'échantillon est

$$L(\tau_1, \dots \tau_n; \lambda) = \Pi_{i=1}^m \lambda \exp(-\lambda \tau_i) = \lambda^m \exp(-\lambda \sum_{i=1}^m \tau_i).$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est donc

$$\hat{\lambda}_{\text{MSE}}^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_i.$$

5. *(3 points)* On suppose maintenant que la loi de distribution *a priori* du paramètre λ est une loi gamma de paramètres α et β. On rappelle que la densité d'une loi Gamma est donnée par:

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)},$$

et que l'espérance de cette loi est α/β. Proposer un estimateur de Bayes du paramètre λ. Quelle est la valeur de cet estimateur lorsque $m = 0$? Lorsque $m \to +\infty$?

Solution: D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(\lambda | \tau_1, \dots, \tau_m) \propto \mathbb{P}(\tau_1, \dots, \tau_m | \lambda) \mathbb{P}(\lambda).$$

Or, on vérifie que

$$\mathbb{P}(\tau_1, \dots, \tau_m | \lambda) \mathbb{P}(\lambda) \propto \lambda^{m+\alpha-1} \exp(-\lambda(\beta + \sum_{i=1}^m \tau_i))$$

La probabilité a posteriori est donc une loi Gamma de paramètres $\alpha' = \alpha + m$ et $\beta' = \beta + \sum_{i=1}^m \tau_i$. L'estimateur de Bayes est donc:

$$\lambda_{\text{Bayes}} = \frac{\alpha + m}{\beta + \sum_{i=1}^m \tau_i} = \frac{\alpha + m}{\beta + m \lambda_{\text{MSE}}^{-1}}.$$

Exercice 2: Boosting (6 Points)

On dispose d'un jeu de données $((\vec{x}^i, y^i) \in \mathbb{R}^p \times \{-1, 1\}, i = 1, \ldots, m)$. On cherche à entraîner un classifieur sur ce jeu de données en utilisant la méthode du *boosting*. Cette méthode vise à construire une fonction de décision f_N qui combine linéairement différents classifieurs $(h_k)_{k=1,\ldots,N}$ dits *faibles* appartenant à un espace d'hypothèse $\mathcal{F}$ fixé. Pour ce faire, on procède en minimisant le risque empirique évalué avec une fonction de coût exponentielle:

$$R(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(\vec{x_i})).$$

On notera bien que les classifieurs faibles $(h_k)_{k=1,\ldots,N}$ de $\mathcal{F}$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, et que la fonction de décision f_N est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *(2 points)* Montrer que le risque empirique $R(f)$ calculé avec une fonction de coût exponentielle est un majorant du risque empirique calculé avec la fonction de coût $0/1$.

Solution: Le risque empirique calculé avec la fonction de coût $0/1$ est

$$R_{0/1}(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} 1_{y_i \neq f(\vec{x_i})}$$

On vérifie que $1_{y_i \neq f(\vec{x_i})} \leq \exp(-y_i f(\vec{x_i})$ pour tout i. On a donc bien $R_{O/1}(f) \leq R(f)$.

La fonction de décision finale obtenue avec la méthode du boosting est $f_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k h_k$, où pour tout $k = 1, \ldots, N$, α_k est un coefficient de pondération positif et h_k un classifieur faible de $\mathcal{F}$. f_N est construit itérativement en N étapes successives. A l'initialisation, on fixe $f_1 = h_1$ où

$$h_1 \in \arg\min_{h \in \mathcal{F}} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} 1_{y_i \neq h(\vec{x}^i)}.$$

2. *(2 points)* A une itération n quelconque, on a $f_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k h_k$, les coefficients $(\alpha_k)_{k=1,\ldots n-1}$ et les classifieurs faibles $(h_k)_{k=1,\ldots n-1}$ ayant été fixés aux itérations précédentes. On cherche à incorporer un nouveau classifieur faible h_n dans l'expression de f_n, de sorte que

$$f_n = f_{n-1} + \alpha_n h_n$$

Montrer que le classifieur faible h_n permettant de minimiser le risque empirique associé au classifieur f_n est solution de

$$h_n = \arg\min_{h \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{(n)} 1_{h_n(\vec{x_i}) = y_i},$$

où on explicitera la valeur de $w_i^{(n)}$. Que peut-on dire de la valeur de $w_i^{(n)}$ lorsque la donnée $\vec{x^i}$ est correctement classifiée par le classifieur associé à la fonction de décision f_{n-1} ?

Solution: Le risque empirique associé au classifieur f_n est donné par:

$$R(f_n) = \sum_{i=1}^{m} \exp\left(-y_i f_{n-1}(\vec{x_i})\right) \exp\left(-y_i \alpha_n h_n(\vec{x_i})\right).$$

Le classifieur h_n recherché est donc solution de

$$h_n \in \arg\min_{h \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{(n)} \exp\left(-y_i \alpha_n h_n(\vec{x_i})\right),$$

où on a posé $w_i^{(n)} = \exp\left(-y_i f_{n-1}(\vec{x_i})\right)$. On remarque que les minima du problème considéré sont identiques à ceux de

$$h_n \in \arg\min_{h \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{(n)} 1_{h_n(\vec{x_i})=y_i},$$

ce qui permet de conclure. Lorsque la donnée $\vec{x^i}$ est correctement classifiée, on a $f_{n-1}(\vec{x^i}) < 0$ et donc $w_i^{(n)} < 1$. Inversement, lorsque la donnée $\vec{x^i}$ est mal classifiée, $w_i^{(n)} > 1$: on donne plus de poids aux données mal classifiées pour entraîner le classifieur faible h_n.

3. *(1 points)* Supposons maintenant le classifieur faible h_n fixé. Comment peut-on sélectionner la valeur du coefficient α_n? Montrer que cela conduit à fixer la valeur de ce paramètre égale à

$$\alpha_n = \log \sqrt{\frac{\sum_{i \in \mathcal{T}} w_i^{(n)}}{\sum_{i \in \mathcal{T}^c} w_i^{(n)}}}$$

où l'ensemble $\mathcal{T}$ est défini par:

$$\mathcal{T} = \{i \in [\![1, m]\!], h_n(\vec{x}^i) = y^i\}.$$

Solution: On fixe la valeur de α_n de sorte que

$$\alpha_n = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} w_i^{(n)} \exp(-\alpha h_n(\vec{x_i})).$$

Or, on a

$$J(\alpha) = e^{-\alpha} \sum_{i \in \mathcal{T}} w_i^{(n)} + e^{\alpha} \sum_{i \in \mathcal{T}^c} w_i^{(n)}.$$

Cette quantité est minimale lorsque

$$e^{2\alpha} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{T}} w_i^{(n)}}{\sum_{i \in \mathcal{T}^c} w_i^{(n)}},$$

d'où la solution.

4. *(1 points)* Expliquer qualitativement comment on peut fixer en pratique le nombre d'itérations N utilisées pour construire le classifieur f_n.

Solution: En augmentant N, on augmente la complexité du modèle de classification utilisé. Il y a donc un risque de sur-apprentissage. En pratique, on pourra considérer N comme un hyper-paramètre du modèle et fixer sa valeur à l'aide de données de validation.