1A

2019 / 2020

CAMINO ROYALE

Élève mineur,

Le document qui est entre vos mains ne l'est pas par hasard. Votre mission est de préparer la prochaine pâle, qui est selon toute probabilité demain puisque vous lisez ces lignes.
Vous avez beau être un professionnel, toute cette affaire commence à sentir gentiment le cramé. La sueur commence à couler sur votre front, vous voyez déjà venir le F, le rattrapage, le déshonneur, la honte, l'abandon…
Mais ne paniquez pas ! Vous avez tout ici pour réussir. Le concentré de millénaires entiers de sagesse - au moins 12 mois, c'est dire -, des exemplaires de pâles qui constitueront selon toute probabilité 50% de votre examen, des corrigés sélectionnés chez les plus grands, voire même écrits par les professeurs…
Au travail donc (ça rend libre paraît-il) ! Biérologue, listeux, peigne, picheur, fraîcheur, chaleur, qui que vous soyez ce palum a beaucoup à vous apprendre.
Je ne vous retiens pas plus longtemps, filez découvrir ces pages.

À faire avec ce palum :
- Le lire (si)
- En faire le moyen de moments de convivialité, de partage, de rencontre, de douceur
- Limiter sa consommation de viande et le pousser à préférer le vélo à la voiture
- Le consoler, l'honorer, le garder, dans la maladie comme dans la santé, pour l'aimer et le chérir, jusqu'à ce que la mort vous sépare

À ne pas faire avec ce palum :
- Le boire avec des glaçons
- Le tenir en laisse
- Confondre son expression de genre et son identité de genre
- Lui mentir sur le prix des cotisations de début d'année

PS : Merci beaucoup à
- Thomas Schwarz (VP Palum des Polaromines) de nous avoir aidés à rédiger ce Palum
- Anthony Gandon de l'avoir mis en page
- Aymeric Vinçotte d'avoir écrit cette préface
- Loïc Yezeguelian d'avoir désigné la couverture

Julie Chalony et Elyes Kaak,
les VP Palum Camino Royale

TABLE DES MATIÈRES

MATHS 1, SUJET ET CORRIGÉ 4
INFORMATIQUE, SUJET ET COPIE 11
COMPTABILITÉ, SUJET 19
THERMODYNAMIQUE, SUJET ET CORRIGÉ 26
PHYSIQUE QUANTIQUE, SUJET ET CORRIGÉ 37
MMC, SUJET ET CORRIGÉ 51
MATHS 2 INTERMÉDIAIRE, SUJET ET CORRIGÉ 75
AUTOMATIQUE, SUJET ET CORRIGÉ 79
PHYSIQUE STATISTIQUE, SUJET ET CORRIGÉ 101
MATHS 2 FINAL, SUJET ET CORRIGÉ 115
PROBABILITÉ, SUJET ET CORRIGÉ 125
ÉNERGIE, SUJET 130

ENSMP

MATHÉMATIQUES 1 (1121)
Lundi 05 novembre 2018

TEST INTERMÉDIAIRE DE MATHÉMATIQUES

---

2 heures

Calculatrices, portables et documents interdits.

Indiquez vos NOM, PRÉNOM et NUMÉRO DE GROUPE sur votre copie.

(groupe 1 : M. Vigne ; groupe 2 : D. Surroop ; groupe 3 : D. Bresch-Pietri ;
groupe 4 : S. Blusseau ; groupe 5 : S. Niculescu)

Les trois exercices sont indépendants. Les questions les plus difficiles sont signalées par une étoile. On pourra admettre les résultats des questions non traitées.

QUESTION DE COURS : Énoncer le théorème du cours concernant le problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles quasilinéaire du premier ordre :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)u_{x_i} &= b(x,u), \quad x \in U, \\ u(f(y)) &= g(y), \quad y \in V. \end{aligned}$$

EXERCICE 1. (Stabilité d'un système avec deux paramètres)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ deux paramètres. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1,x_2) = \big(\alpha x_1 + (x_2)^n, \alpha x_2 - (x_1)^n\big)$ et le problème de Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

où $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la stabilité du point d'équilibre $a = (0,0)$.

1. Montrer que pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale.

2. On suppose dans cette question que $\alpha = 0$.

2.1 On suppose que n est *impair*. Montrer que le point d'équilibre $a=(0,0)$ est stable, mais pas localement asymptotiquement stable (indication : introduire la fonction $V(x_1,x_2)=(x_1)^{n+1}+(x_2)^{n+1}$).

2.2. On suppose que n est *pair*. On pose $x_1(t)=(1-(n-1)t)^{-\frac{1}{n-1}}$ et $x_2(t)=-x_1(t)$. Montrer que l'application $t\mapsto x(t)=(x_1(t),x_2(t))$, définie sur un intervalle (maximal) que l'on précisera, est une solution maximale de $x'=f(x)$. Utilisant la limite de $x(t)$ lorsque $t\to-\infty$, montrer que le point d'équilibre $a=(0,0)$ n'est pas stable pour (P).

3. On suppose dans cette question que $\alpha<0$.

3.1 Montrer que le point d'équilibre $a=(0,0)$ est *localement* asymptotiquement stable (indication : considérer la fonction $\widetilde{V}(x_1,x_2)=(x_1)^2+(x_2)^2$).

3.2 Montrer que le point d'équilibre $a=(0,0)$ est *globalement* asymptotiquement stable si n est *impair*.

3.3 Montrer qu'il existe un autre point d'équilibre si n est *pair*. Que peut-on en déduire ?

4.* (hors barème) On suppose que $\alpha>0$. Montrer que le point d'équilibre $a=(0,0)$ n'est pas stable.

EXERCICE 2. (Théorème d'Artstein-Sontag)

Notations : on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle. Pour des applications $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ et $V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ de classe C^1, on note $L_fV(x)=\nabla V(x)\cdot f(x)$.

Soient $N,M\in\mathbb{N}^*$, $f,g_1,\dots,g_M\in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ avec $f(0)=0$. On suppose qu'il existe une application $V\in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *définie positive* et *propre* telle que, si on note $F(x,u)=L_fV(x)+\sum_{i=1}^M u_iL_{g_i}V(x)$ pour $x\in\mathbb{R}^N$ et $u=(u_1,\dots,u_M)\in\mathbb{R}^M$, on ait

$$\forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},\ \exists u\in\mathbb{R}^m,\ F(x,u)<0. \tag{1}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\forall x\in\mathbb{R}^N\quad(0<\|x\|<\delta\Rightarrow\exists u\in\mathbb{R}^M \text{ avec } \|u\|<\varepsilon \text{ et } F(x,u)<0). \tag{2}$$

On va construire une loi de commande $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ qui est continue, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, nulle en zéro et telle que $a=(0,\dots,0)$ soit un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système

$$x'=f(x)+\sum_{i=1}^M u_i(x)g_i(x). \tag{3}$$

On pose $a(x)=L_fV(x)$ et $b_i(x)=L_{g_i}V(x)$ pour $1\le i\le M$. Soit $b(x)=\sum_{i=1}^M b_i(x)^2$ et $u(x)=(u_1(x),\dots,u_M(x))$, où

$$u_i(x)=\begin{cases}-b_i(x)\frac{a(x)+\sqrt{a(x)^2+b(x)^2}}{b(x)} & \text{si } b(x)\neq0,\\ 0 & \text{si } b(x)=0.\end{cases}$$

1. Soit $\Omega=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2;\ b>0 \text{ ou } a<0\}$ et soit l'application $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(a,b)=\begin{cases}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} & \text{si } b\neq0,\\ 0 & \text{si } b=0.\end{cases}$$

1.1 Dessiner Ω et montrer que ϕ est continue sur Ω.

1.2 Montrer que ϕ est de classe C^∞ sur Ω. (Indication : on pourra appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $bp^2-2ap-b=0$.) En déduire que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. (Indication : on montrera que $(a(x),b(x))\in\Omega$ pour tout $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$.)

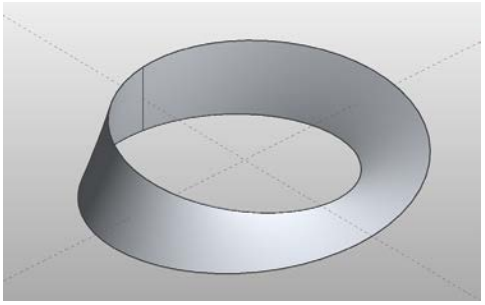


Figure 1: Ruban de Möbius

2.* Montrer que $a(0) = 0$ et que $b_1(0) = \cdots = b_M(0) = 0$. Montrer que u est continue en 0 (on pourra distinguer les sous-cas $a(x) < 0$ et $a(x) \geq 0$, et utiliser (2)).

3. Montrer que $\nabla V(x) \cdot [f(x) + \sum_{i=1}^{M} u_i(x) g_i(x)] < 0$ pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Conclure.

EXERCICE 3. (Ruban de Möbius)

Le ruban de Möbius est une surface *non orientable* obtenue en prenant un segment pivotant dont le centre décrit un cercle fixe. L'objet de cet exercice est de démontrer que c'est une surface régulière dont on connait une représentation paramétrique.

Soit $\varphi : \mathbb{R}\times]-1,1[\to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(\theta,t) = \big((2+t\cos\theta)\cos(2\theta), (2+t\cos\theta)\sin(2\theta), t\sin\theta\big), \quad (\theta,t) \in \mathbb{R}\times]-1,1[,$$

et soit $\Sigma = \varphi(\mathbb{R}\times]-1,1[)$.

1. Montrer que φ est de classe C^∞.

2. Calculer la matrice jacobienne $J_\varphi(\theta,t)$ pour tout $(\theta,t) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$. Que peut-on dire de son rang *a priori* ?

3.* Montrer, dans chacun des cas suivants, que la matrice jacobienne $J_\varphi(\theta,t)$ est de rang 2 :
(i) $t = 0$ et $\cos\theta \neq 0$;
(ii) $t = 0$ et $\cos\theta = 0$;
(iii) $t \neq 0$ et $\cos\theta \neq 0$;
(iv) $t \neq 0$ et $\cos\theta = 0$.
Que peut-on en déduire pour la différentielle $d\varphi(\theta,t)$?

4. On rappelle la propriété suivante classique : *pour tout* $\theta_0 \in \mathbb{R}$, *l'application* $\theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = 1\} \setminus \{(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\}$ *est un homéomorphisme.*
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$U_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \neq (0,0) \text{ et } (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \neq (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))\}.$$

4.1 Montrer que U_α est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
4.2 Montrer que $\varphi\big(]\alpha, \alpha+\pi[\times]-1,1[\big) \subset \Sigma \cap U_\alpha$.
4.3* Montrer que $\Sigma \cap U_\alpha \subset \varphi\big(]\alpha, \alpha+\pi[\times]-1,1[\big)$.
4.4 En déduire que $\varphi_{|]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[}$ est un homéomorphisme de $]\alpha, \alpha+\pi[\times]-1,1[$ sur $\Sigma \cap U_\alpha$

5. Conclure que Σ est une surface régulière de classe C^∞.

CORRIGÉ DU TEST DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

1. L'application f est de classe C^∞, vu que ses composantes sont polynomiales. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à x. Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz que pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy (P).

2.1 Si n est impair, la fonction $V(x_1, x_2) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ est définie positive. En effet, $x_1^{n+1} \geq 0$, $x_2^{n+1} \geq 0$, donc $V(x_1, x_2) \geq 0$, et $V(x_1, x_2) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. De plus, la fonction V est propre, vu que V est continue (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^2$ et que $\lim_{\|(x_1,x_2)\| \to +\infty} V(x_1, x_2) = +\infty$. Enfin

$$L_f V(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = (n+1)\,(x_1^n x_2^n + x_2^n(-1)x_1^n) = 0.$$

Il résulte du théorème de Lyapunov (i) que $a = (0, 0)$ est un point d'équilibre stable pour le système $x' = f(x)$. Enfin pour toute solution maximale de (P), on a $V(x(t)) = V(x^0) > 0$ (si $x^0 \neq 0$) pour tout t dans son intervalle de définition I. Par le théorème des bouts $I = \mathbb{R}$, et l'on n'a pas $x(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi le point d'équilibre $a = (0, 0)$ n'est pas attractif, donc il n'est pas localement asymptotiquement stable.

2.2 On suppose n pair. Notons d'abord que l'application $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est définie et de classe C^1 sur $I =]-\infty, 1/(n-1)[$, avec

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -(n-1) \cdot (\frac{-1}{n-1})(1-(n-1)t)^{-\frac{n}{n-1}} = (x_1(t))^n = (x_2(t))^n, \\ x_2'(t) &= -x_1'(t) = -(x_1(t))^n. \end{aligned}$$

On a bien vérifié que $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ était solution de $x' = f(x)$. Cette solution est maximale, car $\lim_{t \to (1/(n-1))^-} x_1(t) = +\infty$. Puisque $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$ et $x(0) = (1, -1) \neq (0, 0)$, l'origine $(0, 0)$ n'est pas stable. En effet, si l'origine était stable, on pourrait associer à $\varepsilon = 1/2$ un nombre $\delta > 0$ tel que pour $\|\tilde{x}^0\| \leq \delta$, la solution maximale $\tilde{x}$ de (P) (avec $\tilde{x}^0$ au lieu de x^0) serait définie pour tout $t \geq 0$ et vérifierait $\|\tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Choisissant $t_0 < 0$ tel que $\|x(t_0)\| \leq \delta$, puis $\tilde{x}^0 = x(t_0)$, on obtient

$$\tilde{x}(|t_0|) = x(t_0 + |t_0|) = x(0) = (1, -1)$$

et $\|(\tilde{x}(|t_0|)\| > \varepsilon$, une contraction.

3. On suppose que $\alpha < 0$.

3.1 On pose $\widetilde{V}(x) = x_1^2 + x_2^2$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\widetilde{V}$ est définie positive, propre, de classe C^∞ et vérifie

$$L_f \widetilde{V}(x) = 2x_1(\alpha x_1 + x_2^n) + 2x_2(\alpha x_2 - x_1^n) = -2|\alpha|(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 x_2^n - x_2 x_1^n).$$

Utilisant l'inégalité $2|ab| \leq a^2 + b^2$ deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} 2|x_1 x_2^n| &\leq |\alpha| x_1^2 + \frac{1}{|\alpha|} x_2^{2n}, \\ 2|x_2 x_1^n| &\leq |\alpha| x_2^2 + \frac{1}{|\alpha|} x_1^{2n}, \end{aligned}$$

et

$$L_f\widetilde{V}(x) \leq -|\alpha|(x_1^2+x_2^2) + \frac{1}{|\alpha|}(x_1^{2n}+x_2^{2n}).$$

Si $\|x\| \leq \delta$, on a $x_1^{2n} = x_1^2 \cdot x_1^{2n-2} \leq \delta^{2n-2}x_1^2$ et de même $x_2^{2n} \leq \delta^{2n-2}x_2^2$, de sorte que

$$L_f\widetilde{V}(x) \leq -|\alpha|(x_1^2+x_2^2) + \frac{\delta^{2n-2}}{|\alpha|}(x_1^2+x_2^2).$$

Il suffit de choisir $\delta = (\alpha^2/2)^{\frac{1}{2n-2}}$ pour avoir $L_f\widetilde{V(x)} \leq -\frac{|\alpha|}{2}(x_1^2+x_2^2)$. Ceci montre que l'origine est localement asymptotiquement stable, par le théorème de Lyapunov (ii).
3.2 On considère $V(x_1,x_2) = x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ comme à la question 2.1. Alors

$$L_fV(x_1,x_2) = (n+1)\left(x_1^n(\alpha x_1+x_2^n) + x_2^n(\alpha x_2 - x_1^n)\right) = -|\alpha|(n+1)(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}),$$

donc $L_fV(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$. Puisque V est définie positive et propre, on déduit du théorème de Lyapunov (iii) que l'origine est globalement asymptotiquement stable.
3.3. On résout l'équation $f(x) = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2^n = 0, \\ \alpha x_2 - x_1^n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha x_1 + (\frac{x_1^n}{\alpha})^n = 0, \\ x_2 = \frac{x_1^n}{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha x_1 \left(1 - (\frac{x_1^{n^2-1}}{|\alpha|^{n+1}}\right) = 0, \\ x_2 = \frac{x_1^n}{\alpha}. \end{cases}$$

On trouve un autre point d'équilibre $a' = (|\alpha|^{\frac{1}{n-1}}, -|\alpha|^{\frac{1}{n-1}-1})$. Il en résulte que l'origine n'est pas globalement asymptotiquement stable.
3.4 Si $x(t)$ est solution de $x' = f(x)$, alors $y(t) = x(-t)$ est solution de

$$(P') \quad \begin{cases} y_1' &= -\alpha y_1 - y_2^n, \\ y_2' &= -\alpha y_2 + y_1^n. \end{cases}$$

Procédant comme à la question 3.1, on voit que l'origine est localement asymptotiquement stable pour (P'). Donc pour x^0 assez proche de $(0,0)$, $x(-t) = y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Le même argument que pour la question 2.2 montre que l'origine n'est pas stable pour $x' = f(x)$.

EXERCICE 2
1. $\Omega = \mathbb{R}\times]0,+\infty[\cup]-\infty,0[\times\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La fonction ϕ est clairement continue en tout point $(a,b) \in \Omega$ avec $b \neq 0$. Soit $\bar{a} < 0$. Alors pour $b \neq 0$ et $a < 0$

$$\phi(a,b) = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{|a|}{b}(-1+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}).$$

Il s'en suit que $\phi(a,b) \sim \frac{b}{2|\bar{a}|}$ lorsque $(a,b) \to (\bar{a},0)$, $b \neq 0$. Comme $\phi(a,0) = 0$ pour tout $a < 0$, on a bien la continuité de ϕ en $(\bar{a},0)$. On a prouvé que ϕ était continue sur Ω.
2. La fonction ϕ est clairement de classe C^∞ sur $\Omega\backslash]-\infty[\times\{0\}$. Montrons que ϕ est de classe C^∞ au voisinage de chaque point $(\bar{a},0)$ avec $\bar{a} < 0$. Soit $G(a,b,p) = bp^2 - 2ap - b$ pour $(a,b,p) \in \Omega\times\mathbb{R}$. L'application G est de classe C^∞ sur $\Omega\times\mathbb{R}$ (car polynomiale), et il est clair que $G(a,b,\phi(a,b)) = 0$ pour tout $(a,b) \in \Omega$. Soit $\bar{a} < 0$. Comme

$$\frac{\partial G}{\partial p}(\bar{a},0,\phi(\bar{a},0)) = 2(0\cdot\phi(\bar{a},0) - \bar{a}) = -2\bar{a} \neq 0,$$

on obtient que $d_2G(\bar{a},0,\phi(\bar{a},0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, d_2 désignant la différentielle partielle en la variable p. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de $(\bar{a},0)$ dans Ω, un voisinage ouvert V de $0=\phi(\bar{a},0)$ dans $\mathbb{R}$ et une application $g:U\to V$ de classe C^∞ telle que $g(\bar{a},0)=0$ et

$$\forall (a,b)\in U,\ \forall p\in V \quad (G(a,b,p)=0 \iff p=g(a,b))\,.$$

Or $G(a,b,\phi(a,b))=0$ et, par continuité de ϕ, il existe un voisinage ouvert $U'\subset U$ de $(\bar{a},0)$ tel que $\phi(a,b)\in V$ lorsque $(a,b)\in U'$. Il s'en suit que $\phi(a,b)=g(a,b)$ pour tout $(a,b)\in U'$, et ainsi $\phi_{|U'}$ est de classe C^∞. On conclut que ϕ est de classe C^∞ sur Ω.

Soit $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Alors soit $b(x)>0$, soit $b(x)=0$, auquel cas $b_i(x)=0$ pour $i=1,...,M$ et on a $a(x)<0$ par (1). Dans tous les cas $(a(x),b(x))\in\Omega$. Puisque $u_i(x)=-b_i(x)\phi(a(x),b(x))$, et que l'application $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\to(a(x),b(x))\in\Omega$ est de classe C^∞, on déduit que $u_{|\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}$ est de classe C^∞.

2. Notons d'abord que $b_i(0)=0$ pour tout $i\in\{1,...,M\}$, vu que $\nabla V(0)=0$. Soit $\varepsilon>0$ donné. Il existe $\delta_1>0$ tel que $|b_i(x)|\le\varepsilon/N$ pour $\|x\|\le\delta_1$ et $i=1,...,M$.
Si $x\neq 0$ est tel que $a(x)<0$, alors $0\le a(x)+\sqrt{a(x)^2+b(x)^2}\le b(x)$, d'où $|u_i(x)|\le|b_i(x)|\le\varepsilon/N$ si de plus $\|x\|\le\delta_1$. Si $x\neq 0$ et $a(x)\ge 0$, notant $B(x)=(b_1(x),...,b_M(x))\in\mathbb{R}^M$, on a par (2) l'existence d'un nombre $\delta_2>0$ tel que si $0<\|x\|<\delta_2$, il existe $u\in\mathbb{R}^M$ avec $\|u\|<\varepsilon/3$ et $a(x)+B(x)\cdot u<0$. Quitte à réduire δ_2, on peut supposer que $\|B(x)\|\le\varepsilon/3$ si $\|x\|<\delta_2$. Cela donne $0\le a(x)\le|B(x)\cdot u|\le\varepsilon\|B(x)\|/3$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis (si $b(x)>0$)

$$\phi(a(x),b(x))=\frac{a(x)+\sqrt{a(x)^2+\|B(x)\|^4}}{\|B(x)\|^2}\le\frac{2a(x)+\|B(x)\|^2}{\|B(x)\|^2}\le\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\|B(x)\|}+1,$$

et donc $\|u(x)\|=\phi(a(x),b(x))\|B(x)\|\le\frac{2}{3}\varepsilon+\|B(x)\|\le\varepsilon$. C'est bien sûr encore vrai si $b(x)=0$. On en déduit que $\|u(x)\|\le\varepsilon$ dès que $\|x\|\le\min(\delta_1,\delta_2)$. Ceci montre la continuité de u en 0 (et donc sur $\mathbb{R}^N$).

3. La fonction V est une fonction de Lyapunov stricte pour le système $x'=f(x)+\sum_{i=1}^M u_i(x)g_i(x)$, puisque pour $x\neq 0$

$$\nabla V(x)\cdot[f(x)+\sum_{i=1}^M u_i(x)g_i(x)]=a(x)-\phi(a(x),b(x))b(x)=-\sqrt{a(x)^2+b(x)^2}<0.$$

Comme V est propre, on déduit du théorème de Lyapunov (iii) que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour le système $x'=f(x)+\sum_{i=1}^M u_i(x)g_i(x)$.

EXERCICE 3

1. Chaque composante de φ est un produit de fonctions C^∞ de θ et de t, donc φ est de classe C^∞.
2. La matrice représentant $d\varphi$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est la matrice jacobienne

$$J_\varphi(\theta,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\sin\theta\cos(2\theta)-2\sin(2\theta)(2+t\cos\theta) & \cos\theta\cos(2\theta)\\ -t\sin\theta\sin(2\theta)+2\cos(2\theta)(2+t\cos\theta) & \cos\theta\sin(2\theta)\\ t\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

qui est de rang au plus 2.

3. Pour $t=0$, la matrice jacobienne se simplifie en

$$J_\varphi(\theta,0)=\begin{pmatrix}-4\sin(2\theta) & \cos\theta\cos(2\theta)\\ 4\cos(2\theta) & \cos\theta\sin(2\theta)\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}$$

(i) Si $t=0$ et $\cos\theta \neq 0$, on remarque que $\begin{vmatrix} -4\sin(2\theta) & \cos\theta\cos(2\theta) \\ 4\cos(2\theta) & \cos\theta\sin(2\theta) \end{vmatrix} = -4\cos\theta \neq 0$, donc $J_\varphi(\theta,0)$ est de rang 2.

(ii) Si $t=0$ et $\cos\theta = 0$, on voit que $\begin{vmatrix} 4\cos(2\theta) & \cos\theta\sin(2\theta) \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = 4(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta = -4\sin\theta \neq 0$, donc $J_\varphi(\theta,0)$ est encore de rang 2.

(iii) Si $t \neq 0$ et $\cos\theta \neq 0$, alors

$$\begin{vmatrix} -t\sin\theta\cos(2\theta) - 2\sin(2\theta)(2+t\cos\theta) & \cos\theta\cos(2\theta) \\ -t\sin\theta\sin(2\theta) + 2\cos(2\theta)(2+t\cos\theta) & \cos\theta\sin(2\theta) \end{vmatrix} = -2\cos\theta(2+t\cos\theta) \neq 0,$$

donc $J_\varphi(\theta,t)$ est de rang 2.
(iv) Si $t \neq 0$ et $\cos\theta = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} -t\sin\theta\sin(2\theta) + 2\cos(2\theta)(2+t\cos\theta) & \cos\theta\sin(2\theta) \\ t\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -4\sin\theta \neq 0,$$

et $J_\varphi(\theta,t)$ est encore de rang 2. Ainsi pour tout $(\theta,t) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, la matrice jacobienne $J_\varphi(\theta,t)$ est de rang 2, et par le théorème du rang, la différentielle $d\varphi(\theta,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective.
4.1 L'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est continue, donc $\Omega_1 = f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ est ouvert. De même, l'application $g : (x,y,z) \in \Omega_1 \mapsto (x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbb{R}^2$ est continue, donc $\Omega_2 = g^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\cos(2\alpha),\sin(2\alpha))\})$ est ouvert dans Ω_1, donc dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi $U_\alpha = \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
4.2 Soit $(\theta,t) \in]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[$ et soit $(x,y,z) = \varphi(\theta,t)$. alors

$$x^2+y^2 = (2+t\cos\theta)^2(\cos^2(2\theta)+\sin^2(\theta)) = (2+t\cos\theta)^2 \geq 1,$$

puisque $|t\cos\theta| \leq 1$. Ainsi $(x,y) \neq (0,0)$. De plus

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (\cos(2\theta),\sin(2\theta)) \neq (\cos(2\alpha),\sin(2\alpha))$$

puisque $\theta \in]\alpha,\alpha+\pi[$. On a montré que $\varphi(\theta,t) \in U_\alpha$, et puisque $\varphi(\theta,t) \in \Gamma$ par définition de Γ, $\varphi(\theta,t) \in \Gamma \cap U_\alpha$.
4.3 Soit $(x,y,z) \in \Gamma \cap U_\alpha$. Il existe $(\tilde\theta,\tilde t) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$ tel que $\varphi(\tilde\theta,\tilde t) = (x,y,z)$. Alors $\sqrt{x^2+y^2} = 2+\tilde t\cos\tilde\theta$ et $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (\cos(2\tilde\theta),\sin(2\tilde\theta)) \neq (\cos(2\alpha),\sin(2\alpha))$. Par le rappel, il existe un unique $\theta \in]\alpha,\alpha+\pi[$ tel que $(\cos(2\theta),\sin(2\theta)) = (\cos(2\tilde\theta),\sin(2\tilde\theta))$. Il s'en suit que $2\theta = 2\tilde\theta + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, d'où $\theta = \tilde\theta + k\pi$ et $\cos\theta = (-1)^k\cos\tilde\theta$, $\sin\theta = (-1)^k\sin\tilde\theta$. On pose $t = (-1)^k\tilde t \in]-1,1[$, de sorte que $t\cos\theta = \tilde t\cos\tilde\theta$, $t\sin\theta = \tilde t\sin\tilde\theta$, et que $\varphi(\theta,t) = \varphi(\tilde\theta,\tilde t) = (x,y,z)$. On a bien montré que $\Sigma \cap U_\alpha \subset \varphi(]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[)$. On conclut que $\Sigma \cap U_\alpha = \varphi(]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[)$.
4.4. D'après le rappel, le θ construit à la question 4.3 est unique. Puisque $t = z/\sin\theta$ est aussi unique, on voit que $\varphi_{|]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[}$ est injective. Enfin φ est de classe C^∞ donc continue sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$, et φ^{-1} est continue sur $\Sigma \cap U_\alpha$ puisque l'application $(x,y) \mapsto \theta$ est continue (d'après le rappel) et que $t = z/\sin\theta$. On en déduit que l'application $\varphi_{|]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[} :]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[\to \Sigma \cap U_\alpha$ est un homéomorphisme.
5 Soit $M = (x,y,z) \in \Sigma$. On choisit $(\theta,t) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$ tel que $\varphi(\theta,t) = (x,y,z)$, puis on pose $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$. Alors par la question 4.4. $\varphi_{|]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[}$ est un homéomorphisme de $]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[$ sur $\Sigma \cap U_\alpha$, et $M \in \Sigma \cap U_\alpha$. Par ailleurs, par la question 3., $d\varphi_{|]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[}(\tilde\theta,\tilde t)$ est injective pour tout $(\tilde\theta,\tilde t) \in]\alpha,\alpha+\pi[\times]-1,1[$. Il en résulte que Σ est une surface régulière de classe C^∞.

Examen d'informatique 1ère année - Promotion 2018

Durée : 1h - Documents autorisés, appareils électroniques interdits.

Les 4 parties sont indépendantes, et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.
Le barème est donné à titre indicatif, et peut être sujet à variations

On attachera un soin particulier à la clarté de la rédaction et à la précision des réponses.

Indiquez vos nom, prénom et numéro de groupe sur toutes vos copies

1. *Question de cours* *(2 pts)*

Pour chaque cas d'usage ci-dessous, quelle structure de données vous paraît la plus adaptée parmi `List`, `Queue`, `Stack`, `Set` ou `Map` ? Expliciter chaque choix brièvement.
a) pour gérer une liste d'élèves qu'on devra trier de temps à autres,
b) pour gérer les remises de devoirs des élèves,
c) pour traiter les demandes de rendez-vous dans l'ordre d'arrivée,
d) pour gérer un recueil des sujets de projets

2. *Ecriture de programmes* *(6 pt)*

4.1 Fonction formate

Ecrire une fonction **`formate`** qui prend comme paramètres 2 chaînes de caractères - la première étant un « format » ou « masque » où les caractères **#** représentent des chiffres, la deuxième une chaîne composée exclusivement de chiffres - et qui doit renvoyer une chaîne au format dessiné par le masque, ou null si le masque n'est pas applicable [1].

Exemples :
`formate("##H##","1208")` doit renvoyer : `"12H08"`
`formate("(##)#.##.##.##.##","33140186422")` doit renvoyer : `"(33)1.40.18.64.22"`.
Mais `formate("##/##/####","281216")` ou `formate("##","3a")` doivent renvoyer `null` .

4.2 Fonction pascal

Ecrire une fonction qui prend un entier **`n`** en paramètre et renvoie un tableau d'entiers à 2 dimensions tel que l'élément `t[i][j]` soit la valeur du triangle de pascal en ligne **`i`** et colonne **`j`** (coefficient binomial `C(i,j)`)

Exemple :
`pascal(6)` retournera :
`{{1}, {1, 1}, {1, 2, 1}, {1, 3, 3, 1}, {1, 4, 6, 4, 1}, {1, 5, 10, 10, 5, 1}}`

[1] On rappelle l'existence de la méthode statique `isDigit(char c)` de la classe `Character` qui retourne le booléen **`true`** si le caractère **`c`** est un chiffre, **`false`** sinon.

3. Ecriture d'une classe (9 pts)

On veut créer un planning de tâches. Chaque tâche peut dépendre d'une autre tâche, possède une priorité (de 0 à 9), et est définie par le numéro du jour où elle doit débuter et celui où elle doit finir.
Ecrire une classe Tache qui soit compatible avec la fonction `main` ci-dessous, et dont l'exécution donnera, à l'écran, le résultat encadré en page de droite.

```
public class Execution {

  public static void main(String[] args) {

    Tache jf = Tache.creeFerie(1);
    Tache t0 = new Tache("Couper l'électricité", 10, 10, 5);
    Tache t1 = new Tache("Installer l'onduleur", t0, 11, 13, 5);
    Tache t2 = new Tache("Remettre l'électricité", t1, 15, 15, 9);
    Tache t3 = new Tache("Installer serveur", 10, 12);
    Tache.changeAnneeRef("2020");
    Tache t4 = new Tache("Réunion de responsables", 52, 52, 6);
    System.out.println(jf);
    System.out.println(t0);
    System.out.println(t1);
    System.out.println(t2);
    System.out.println(t3);
    System.out.println(t4);
    System.out.println("----------");

    Tache.decaler(t4,10);
    System.out.println("t4 décalée : " + t4);
    System.out.println("----------");
    System.out.println("t1 dépend de t2 ? " + t1.dependDe(t2));
    System.out.println("t2 dépend de t1 ? " + t2.dependDe(t1));
    System.out.println("t1 dépend de t4 ? " + t1.dependDe(t4));
    System.out.println("----------");

    if(t0.nonLiee(t1)) System.out.println("t0 et t1 sont indépendantes");
    else System.out.println("t0 et t1 sont dépendantes");
    if(t2.nonLiee(t1)) System.out.println("t1 et t2 sont indépendantes");
    else System.out.println("t1 et t2 sont dépendantes");
    if(t0.nonLiee(t3)) System.out.println("t0 et t3 sont indépendantes");
    else System.out.println("t0 et t3 sont dépendantes");
    System.out.println("----------");

    //Changement de priorité de certaines tâches
    t0.reclasser(3);
    t4.reclasser(-2);
    t2.reclasser();
    t3.reclasser(-1);
    System.out.println("----------");

    t0.afficher();
    t1.afficher();
    t2.afficher();
    t3.afficher();
    t4.afficher();
  }
}
```

Voir exécution page suivante →

Résultat d'exécution

```
[JOUR FERIE] du jour 1 au jour 1 de 2019 (Priorité = 0)
[Couper l'électricité] du jour 10 au jour 10 de 2019 (Priorité = 5)
[Installer l'onduleur] du jour 11 au jour 13 de 2019 (Priorité = 5)
[Remettre l'électricité] du jour 15 au jour 15 de 2019 (Priorité = 9)
[Installer serveur] du jour 10 au jour 12 de 2019 (Priorité = 0)
[Réunion de responsables] du jour 52 au jour 52 de 2020 (Priorité = 6)
----------
t4 décalée : [Réunion de responsables] du jour 62 au jour 62 de 2020 (Priorité = 6)
----------
t1 dépend de t2 ? false
t2 dépend de t1 ? true
t1 dépend de t4 ? false
----------
t0 et t1 sont dépendantes
t1 et t2 sont dépendantes
t0 et t3 sont indépendantes
----------
[Remettre l'électricité] : Priorité maximum atteinte
[Installer serveur] : Priorité minimum atteinte
----------
Tâche [Couper l'électricité (8)]

Tâche [Installer l'onduleur (5)]
*** dépend de : Tâche [Couper l'électricité (8)]

Tâche [Remettre l'électricité (9)]
*** dépend de : Tâche [Installer l'onduleur (5)]
*** dépend de : Tâche [Couper l'électricité (8)]

Tâche [Installer serveur (0)]

Tâche [Réunion de responsables (4)]
```

4ème partie page suivante →

4. *Analyse de programmes* *(3 pts)*

On considère la classe **`Exercice4`** et sa fonction **`main`** ci-dessous :

```
import java.util.LinkedList;
import java.util.Scanner;

public class Exercice4 {

  public static void main(String[] args) {
    boolean up=false;
    int n=1;
    LinkedList<String> l1 = new LinkedList<String>();
    for (String s : args) {
      //Ouverture scanner sur une String pour lire chaque "mot"
      Scanner sc = new Scanner (s);
      if(sc.hasNextInt()) {
        int k = sc.nextInt();
        if (k>0) n=k;
      }
      else {
        switch (s) {
        case "-u" :
          up=true;
          break;
        default :
          for (int i=1 ; i<=n ; i++) {
            if (up) l1.add(s.toUpperCase());
            else l1.add(s);
          }
        }
      }
      sc.close();
    }
    for (String s : l1) System.out.println(s);
  }
}
```

2.1 Que donnerait l'exécution du programme ci-dessus si invoqué avec les arguments :

a) x y zou
b) x -u y zou
c) x -u 4 y 2 zou

2.2 Dans un terminal Linux, quelle commande invoquer pour exécuter ce programme avec les arguments : x -u 4 y 2 zou ?

2.3 Que faut-il ajouter pour que le résultat de la commande s'inscrive dans un fichier f ?

MINES ParisTech

Note / Evaluation : > 20 +++ → A+

Nom et Prénom : ACUIR Denis Groupe 1

Date : 21 janvier 2019 Promotion : P18

Examen de : Informatique

Feuille n° 1 / 1

1) a) La liste doit posseder un ordre et il ne semble pas important d'acceder directement aux elements centraux de la liste. On ne veut pas en faire une file ou une pile, donc List semble être le plus adapté.

3,25

b) On doit pouvoir savoir, à un élève donné, la liste des devoirs qu'il a remis. On peut utiliser pour cela le seul conteneur associatif proposé, Map.

c) Etant donné qu'on traite des données dans l'ordre d'arrivée, on peut utiliser un conteneur implemmtant la file FIFO, comme Queue

d) Les sujets de projets n'ont pas besoin d'être ordonnés et on veut acceder à chacun d'entres eux. Ils n'ont pas à être trouvés par des clés, donc le type le plus adapté est Set.

2) 4.1) static String formate (String masque , String nombres)

= null ?

3,75

```
{
    String res = "";
    int j = 0;
    for ( int i = 0; i < masque.length(); i++) {
        if( masque.charAt(i) == '#') {
            if ( j < nombres.length() && Character.isDigit(nombres.charAt(j))) {
                res = res + nombres.charAt(j++); }
            else return null; }
        else res = res + masque.charAt(i); }
    return res; }
```

(1.2) static int[][] pascal(int n) {

```
int coefs[][] = new int[n+1][n+1];   coefs[0][0]=1;
```

n sinon pas "triangle" mais carré

OK

2,2

```
for (int i=1; i <= n; i++) {
    for (int j=0; j <= i; j++) {
        coefs[i][j]= coefs[i-1][j]; // i>0, pas de problème
        if (j>0) coefs[i][j] += coefs[i-1][j-1];
    }
}
return coefs; }.
```

9,5

Exercice 3)

0,5 class Tache {

+0,5

```
private int debut, fin, priorite;
private String annee;
```

0,5 private static String annee_ref="2019";

0,5 private Tache dependance;

```
private String titre;
```

0,5 public Tache (String n_titre, Tache dep, int deb, int fi, int prio){
titre = n_titre; debut=deb; fin=fi; dependance=dep; priorite=prio; annee=annee_re

0,5 public Tache (String n_titre, int deb, int fi, int prio){
this(n_titre, null, deb, fi, prio); }

0,5 public Tache (String n_titre, int deb, int fi){ this(n_titre, null, deb, fi, 0); }

Ok public Tache (String n_titre, Tache dep, int deb, int fi){ this(n_titre, dep, deb, fi, 0); }

0,5 public static Tache creeFerie(int jour) { return new Tache ("JOUR FERIE", jour, jour); }

0,5 public static void changeAnneeRef (String n) { annee_ref= n; }

0,5
```
public String toString() {
    return "[" + titre + "] du jour " + debut + " au jour " + fin + " de " +
            annee + " (Priorité = " + priorite + ")"; }
```

0,5
```
public static void decaler (Tache t, int delta){
    t.debut += delta;
    t.fin += delta; }
```

0,5
```
public boolean dependDe (Tache o) {
    if ( dependance == null) return false;
    else if (dependance == o) return true;
    else return dependance.dependDe (o); }
```

ou pas demandé

0,5
```
public boolean liee (Tache o) { return o.dependDe (this) || this.dependDe (o); }
public boolean nonLiee ( Tache o) { return !liee(o); }
```

1
```
public void reclasser (int i) { priorite += i;
    if (priorite > 9){System.out.println("[" + titre + "] : Priorité maximale atteinte");
            priorite = 9; }
    else if (priorite < 0) { System.out.println("[" + titre + "] : Priorite minimale atteinte");
            priorite = 0; }
}
```

TB

0,4
```
public void reclasser () { reclasser (1); }
```

i ? → 1
1 ? → TB

```
public void afficher () {
    System.out.println(" Tâche [" + titre + " (" + priorite + ")]")
    if (dependance != null) { System.out.print("*** dépend de : ");
        dependance.afficher(); }
    else System.out.println();
}
}
```

Exercice 4)

3

2.1) a) Pour les arguments " x y zou", le programme affiche :

x
y
zou

b) Le programme affiche :

x
y
zou

c) Le programme affiche :

x
y
y
y
y
zou
zou

2.2) Il faut invoquer : "java Exercice4 x -u 4 y 2 zou" dans le répertoire contenant Exercice4.class.

2.3) On peut ajouter " >f " pour rediriger le flux standard de sortie du programme vers f.

1ère année
1er semestre

EXAMEN DE COMPTABILITE GENERALE
du 1er Février 2019

Durée : 2h15
Total sur 200 points

Les machines à calculer de poche sont recommandées. L'ordinateur est interdit.
Documents autorisés : le manuel de compta, à l'exclusion de tout autre document.

Rqe : les chiffres entre parenthèses signifient qu'ils sont négatifs.

EXERCICE 1 : (30 points)

Commenter l'article de presse suivant : « Publicis : l'AMF saisie à propos d'une opération non déclaré », publié dans LE MONDE ECONOMIE, le 18.05.2017.

1) **Quel est l'objet du conflit entre Publicis et la société des petits porteurs ?**

2) **Quels sont les principes comptables que Publicis n'aurait pas respecté ?**

3) **Quel est le point de vue du commissaire aux comptes ? Comment l'expliquer ?**

Publicis : l'AMF saisie à propos d'une opération non déclarée
Une société de défense de petits porteurs demande au gendarme de la Bourse d'examiner une transaction conclue avec SAP.

Publicis a-t-il artificiellement gonflé ses résultats ? C'est le sérieux doute émis par l'un des actionnaires de la société Gouvernance en action, une société de défense des petits porteurs. Son fondateur, Fabrice Rémon, a adressé le 17 mai un courrier au président du directoire du groupe de publicité, s'étonnant de l'absence dans les comptes de l'entreprise d'une opération financière réalisée avec l'éditeur allemand de logiciels pour entreprises SAP.
Selon l'accord à l'amiable, SAP a versé à Publicis 150 millions d'euros à titre de dédommagement.
On apprend par cette lettre, d'abord dévoilée par L'Obs, que Publicis a connu des déboires avec SAP à l'occasion d'un projet prévoyant la mise en place d'un progiciel de gestion, un système d'information qui permet de suivre au jour le jour l'activité des différentes entités opérationnelles de l'entreprise.

Las, le projet a connu du retard sur plusieurs années, des surcoûts et empêché Publicis de réaliser les économies engendrées par ce genre d'outil. Au point que les deux sociétés ont finalement conclu sous l'égide d'un tribunal arbitral un accord à l'amiable actant un dédommagement au bénéfice de Publicis pour un montant de 150 M€. La somme, révélée par le courrier de Fabrice Rémon, n'est pas confirmée par Publicis, engagé par une clause de confidentialité.
L'essentiel du versement – 85 millions d'euros, selon nos informations – a eu lieu au dernier trimestre 2014, le reste ayant été affecté aux exercices 2015 et 2016. Ainsi, la somme encaissée fin 2014 a permis de donner un coup de fouet aux marges, après les surcoûts subis entre 2008 et 2014 en raison des défaillances du projet informatique, reconnaît un proche du dossier. De fait, l'année 2014 s'est bien terminée, une amélioration que le directeur financier avait attribuée en février 2015 à « une amélioration des coûts de management », sans évoquer l'indemnité transactionnelle perçue de la part de SAP.
Pourquoi un tel mystère ? Aucune entreprise n'aime étaler sur la place publique les problèmes qu'elle peut connaître, d'autant que les règlements à l'amiable sont la plupart du temps assortis d'une obligation de discrétion. Ce genre d'affaires est, de fait, particulièrement pénalisante pour SAP, en tant que fournisseur de services. Le document de référence de Publicis de 2014 ne mentionne aucune « procédure judiciaire ou d'arbitrage », dans la mesure où ces sommes n'ont eu aucun effet « significatif sur les résultats ».
Ce manque d'information a pu induire en erreur des actionnaires ayant acheté des titres en février 2015.
C'est pourtant cette discrétion que Fabrice Rémon remet en cause. Invisible dans les comptes, l'opération a été comptabilisée dans le résultat d'exploitation classique et non dans la case « éléments exceptionnels » comme cela aurait dû être le cas, selon lui. Dans un communiqué, Publicis assure que « ce traitement comptable a été validé par les commissaires aux comptes qui ont aussi jugé qu'il n'était pas nécessaire de faire mention de cette information, ni dans les notes annexes aux comptes de l'année 2014 ni dans le rapport de gestion ».

EXERCICE 2 : (50 points + 20 pts bonus pour question 4) **:**

Jeune diplômé, vous venez d'être embauché chez Satim SA, une filiale d'un grand groupe coté de services parapétroliers qui produit des tubes utilisés à partir de plates-formes de forage offshore à grande profondeur (FPSO).
Satim SA est une filiale portant une des usines du groupe, située dans le grand Est de la France. Le Directeur Général de Satim SA a de bonnes raisons de penser que son entreprise va être vendue par la maison-mère. Dans ce contexte et pour préserver les intérêts des actionnaires minoritaires (essentiellement la famille du fondateur, qui a cédé le contrôle en 1987), il souhaite dans un premier temps analyser la santé financière de son entreprise.
Pour cet exercice, il fait confiance à vos connaissances comptables et financières ainsi qu'à votre bon sens.

1. **Compléter les tableaux de l'annexe A3 concernant les immobilisations**
2. **Remplir les cases avec un « ? » dans les bilans et comptes de résultat (Annexes A1 et A2)**
3. **Identification des charges et produits se traduisant par un flux de trésorerie**

Lister sur l'annexe A2 les éléments du compte de résultat qui se traduisent par un flux de trésorerie au moment de - ou peu après- leur enregistrement en comptabilité.

4. Question Bonus (20 pts) : Audit des comptes de Satim SA

Les prédictions du Directeur Général se sont avérées exactes : la maison-mère a émis un communiqué de presse ce matin à 7h30 mentionnant que Satim SA est à vendre. Une major pétrolière néerlandaise a fait savoir vers 11h qu'elle était intéressée, a obtenu de la maison-mère le droit de procéder à une due diligence de Satim SA pendant une semaine à partir du lundi suivant, et a mandaté un cabinet d'audit renommé pour cette intervention.
Au vu des états financiers, du secteur d'activité de Satim SA et de votre expérience, quels seraient les éléments que vous jugeriez les plus significatifs, risqués, ou que vous souhaiteriez analyser de manière approfondie la semaine suivante si vous étiez membre de cette équipe d'audit ?

ANNEXES :
A-1. Bilans 2017 et 2018
A-2. Comptes de résultat 2017 et 2018
A-3. Tableau de passage des immobilisations corporelles et financières

A-1. Bilans 2017 et 2018

ACTIF

	2018			2017		
	Brut	Amo. et dép.	Net	Brut	Amo. et dép.	Net
Immobilisations incorporelles						
Frais d'établissement						
Frais de R&D						
Concessions, brevets, licences						
Immobilisations corporelles						
Terrains	3 214 930		?	3 214 930		?
Constructions	4 000 000	1 898 550	2 101 450	4 450 000	2 570 550	1 879 450
Installations tech., matériel et outillage	737 200	537 200	200 000	737 200	717 200	20 000
Autres immos corps.	361 250	?	300 000	661 250	39 250	622 000
Immobilisations financières						
Participations	?	?	?	?	?	?
Stock et en-cours						
Matières premières et autres approvisionnements	200 000		200 000	?		?
Produits intermédiaires et finis	232 500	50 000	182 500	?	50 000	?
Marchandises						
Créances						
Créances clients et comptes rattachés	1 286 960	130 460	1 156 500	981 220	85 000	896 220
Créances diverses	420 000		420 000	270 000		270 000
Capital souscrit-appelé, non versé	20 000		20 000			
Disponibilités	20 590		20 590	250 000		250 000
TOTAL	**10 593 430**	**2 702 460**	**7 890 970**	**11 080 380**	**3 477 000**	**7 603 380**

PASSIF (avt. répartition)

2018	2017

Situation nette		
Capital social	2 200 000	1 800 000
Primes	136 200	126 200
Réserve légale	131 590	98 490
Réserves statutaires	626 310	397 410
Résultat net de l'exercice	?	?
Subvention d'investissement		
Provisions		
Provisions réglementées	350 500	350 000
Provisions pour risques	?	120 000
Dettes financières		
Emprunts et dettes auprès des établissements de crédit	2 856 000	3 456 000
Dettes d'exploitation		
Dettes fournisseurs et comptes rattachés	213 200	190 000
Dettes fiscales et sociales	10 080	8 280
Dettes sur immobilisations	233 200	170 000
Dettes fiscales (IS)	250 000	225 000
TOTAL	**7 890 970**	**7 603 380**

A-2. Comptes de résultat 2017 et 2018

	Charges			Produits	
	2018	**2017**		**2018**	**2017**
Exploitation			**Exploitation**		
Achats de mat. 1ères	650 000	585 000	Production vendue	4 362 000	3 929 500
Variation de stocks	21 520	(36 240)	Production stockée	38 240	(35 460)
Services extérieurs	742 000	667 800	Rep.dép et prov.	540	600
Impôts et taxes	141 400	127 260			
Charges de personnel	638 300	574 470			
Dotations aux amortissements s/ immos	70 000	86 700			
Dotations aux dépréciations s/ actif circulant	46 000	105 000			
Dotations aux provisions pour risques	10 000	9 000			
Charges exploitation	**2 319 220**	**2 118 990**	**Produits exploitation**	**4 400 780**	**3 894 640**
Financières			**Financiers**		
Dotations aux provisions	30 000	20 000	Intérêts et assimilés	488 780	207 780
Intérêts et ch. assimilées	1 230 000	824 700	Rep. s/ prov	25 000	10 000
Charges financières	**1 260 000**	**844 700**	**Produits financiers**	**513 780**	**217 780**
Exceptionnelles			**Exceptionnels**		

S/ opé. de gestion	12 000	10 800	S/ opé. de gestion	8 000	7 200
S/ opé. en capital	600 000	540 000	S/ opé. en capital	400 000	388 320
Dot. aux prov réglementées	3 000	2 700	Reprise s/ prov et dépréciations	2 500	2 250
Charges exceptionnelles	**615 000**	**553 500**	**Produits exceptionnels**	**410 500**	**397 770**
Impôt s/ les sociétés	376 950	331 000			
Résultat net	?	?			
TOTAL	**5 325 060**	**4 510 190**	**TOTAL**	**5 325 060**	**4 510 190**

A-3. Tableau de passage des immobilisations

A-3-a. Immobilisations corporelles

	31/12/2017	+	-	31/12/2018
Valeur brute		750.000	1.500.000	
Amortissements et dépréciations		70.000	900.000	
Valeur nette				

A-3-b. Immobilisations financières

	31/12/2017	+	-	31/12/2018
Valeur brute	100.000	/	/	100.000
Amortissements et dépréciations	15.000	30.000	20.000	25.000
Valeur nette				

EXERCICE 3 – (70 points) **: Bilan et compte de résultat:**

1 - Une augmentation du poste correspondant à l'un des comptes ci-après se traduit-elle par un débit ou par un crédit ? - mettre une croix

	Débit	***Crédit***
Clients - factures à établir		
Dotations aux provisions pour risques et charges d'exploitation		
Valeurs comptables des éléments d'actif cédés		
Amortissements des immobilisations incorporelles		
Variation des stocks de produits		
Fournisseurs - effets à payer		

Reprises sur provisions pour dépréciation des actifs circulants		
Variation des stocks de matières premières (et fournitures)		
Valeurs mobilières de placement		
Sécurité sociale		
Charges constatées d'avance		
Actionnaires : capital souscrit - non appelé		
Subventions d'équipement		
Provisions pour dépréciation des titres de participation		
Emprunt obligataire		

2 - Par quelles écritures se traduisent au journal général

a) l'émission d'un emprunt obligataire de 10 000 obligations de prix d'émission 150 € ;
b) une émission de 20 000 actions en numéraire, de valeur nominale 100 €, et de prix d'émission 120 € ? Le capital social correspondant n'est appelé et libéré qu'à 25 %. Selon la loi, la prime est quant à elle entièrement libérée à la souscription ;
c) Le 31/10, l'entreprise se voit exiger le paiement d'une amende pour litige d'un montant 45 000 €, payable sous trois mois. Elle avait été antérieurement provisionnée à 35 000 €.
d) Au 31/12, l'inventaire révèle que les stocks de matières premières ont diminué de 15 000 €. Au début de l'exercice, ils étaient de 90 000 €. On constate des détériorations sur certaines références, et on estime la perte de valeur probable à 5 000 €.
e) en fin d'année, l'immobilisation de frais de recherche et développement, estimés globalement à 800 000 € (les dépenses de personnel, fournitures et services extérieurs correspondantes ont été constatées et comptabilisées en charges tout au long de l'année) ;
f) en fin d'année, la constatation qu'on n'a pas reçu l'avis de la banque sur le montant des frais financiers qu'on devra lui payer au titre de l'exercice ; on évalue ces derniers à 150 000 € ;
g) Achat de fournitures informatiques pour 500 € et d'un ordinateur pour 5 000 €, le fournisseur acceptant de faire crédit de 3 000 € payables à 90 jours fin de mois

EXERCICE 4. (50 points) **: Evénements de Janvier 2017 de la société Paul19 :**

On donne ci-après, en milliers d'Euros, les bilans simplifiés après répartition de 2018 et de 2017 et le compte de résultat de 2018 de la société Paul19.

BILANS 2017 et 2018 en k€

ACTIF	2017	2018	PASSIF	2017	2018
Immobilisations nettes	6 900	11 000	Capital	5 000	7 300
Stocks	1 570	1 230	Primes	0	300
Titres de participation	530	200	Réserves	900	1000
Clients et comptes rattachés	1 620	1 950	Report à nouveau	30	70

Disponibilités	350	390	Prov. pour risques et charges	360	150
			Emprunts	2 500	4 000
			Fournisseurs et cptes rattachés	2 070	1 770
			Dettes fiscales et sociales	110	180
Total	10 970	14 770		10 970	14 770

COMPTE DE RESULTAT 2018 en k€

CHARGES		*PRODUITS*	
Charges d'exploitation		**Produits d'exploitation**	
. Achats de matières premières	2 760	. Production vendue	7 610
. Variation des stocks de matières premières	200	. Production stockée	-140
. Autres charges externes	610	. Production immobilisée	560
. Impôts, taxes et versements assimilés	430		
. Charges de personnel	3 780		
. Dotations aux amortissements	590		
Charges financières		**Produits financiers**	
Charges d'intérêt	390	Dividendes	50
Charges exceptionnelles		**Produits exceptionnels**	
sur opérations de gestion	410	. sur opérations en capital	1960
. sur opérations en capital	700	. reprises de provisions	330
. dotations aux provisions	120		
Impôts sur les bénéfices	220		
Bénéfice	160		
Total	10 370	Total	10 370

Questions :

1) Calculer l'investissement en immobilisations en 2018
2) QCM :

	VRAI	FAUX
D1) Le bénéfice de 160 est net		
D2) Paul19 a consommé pour 2760 k€ de matières premières en 2018		
D3) Elle a versé 50 k€ à ses actionnaires		
D4) L'entreprise a remboursé 390 d'emprunt à son banquier en 2018		
D5) Les stocks ont diminué en 2018		
D6) Paul19 a procédé à une augmentation de capital en 2018		
D7) Paul19 a payé 430 k€ d'impôts et taxes en 2018		

EXERCICE 5. (5 points BONUS) **:**

Que signifie le sigle : « VNCEAC » ?

Examen de Thermo-Mécanique des Fluides – 2h30 heures

31 janvier 2019

Etude d'un chauffage industriel à air- Transfair

—o—

Support de cours et calculatrice autorisés – Téléphone et ordinateur interdits
Les Parties I et II sont indépendantes – la partie III est partiellement indépendante

On vous demande d'expertiser un nouveau système de chauffage appelé Transfair®. Il s'agit d' un dispositif de chauffage de grands locaux industriels (hangars, garages...) basé sur le principe d'une dalle rayonnante. L'avantage du chauffage par dalles rayonnantes sur les convecteurs thermiques est qu'elles permettent un confort d'utilisation très supérieur à dépense énergétique équivalente. Dans de très grands volumes en effet, l'être humain placé à distance d'une paroi rayonnante en ressentira la chaleur de manière efficace, même si l'air environnant est à une température plus basse. Le dispositif de chauffage industriel Transfair® allie dalle rayonnante et convecteur thermique (cf. figure 1.1). L'air passe d'abord par une chaufferie, puis est amené dans les tuyaux installés dans une dalle. L'air réchauffe la dalle, et donc le local. La circulation de l'air est assurée par une pompe située en aval de la dalle. Une partie du flux est ensuite injectée directement dans le local (boucle de chauffage convectif), puis aspiré vers la chaufferie via un extracteur, le reste est remis en circulation (boucle de recirculation). La répartition des débits entre deux boucles est effectuée par deux tés.

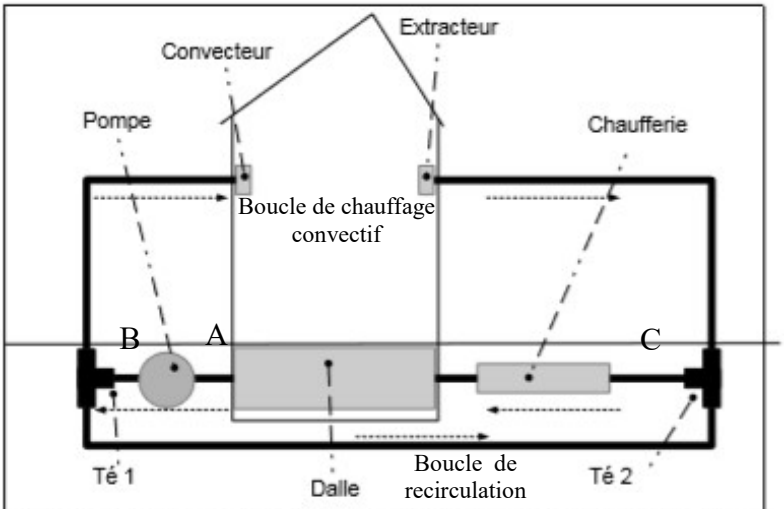


Illustration 1.1 : Schéma général d'une installation de chauffage de type Transfair®.

Partie I : Etude Fluides

1. Dimensionnement du réseau

On désire chauffer un local de 1000 m^2, avec une hauteur sous plafond de 6,5m. Pour des raisons d'encombrement, on utilise pour la construction du réseau des tuyaux cylindriques de diamètre D=10 cm. Pour la suite du problème on va considérer que la vitesse de l'air dans la branche de la chaufferie au régime nominal est V=20 m.s^{-1}.

Question 1 : Calculer le nombre de Reynolds et le débit volume Q_v ?

2 Étude de l'échangeur de la dalle

L'échangeur de la dalle de plancher est constitué de 161 tubes de longueur L = 20 m reliés en série par des coudes. L'ensemble est relié en amont à la chaufferie, et en aval à la pompe. Les tuyaux constituant l'échangeur sont de diamètre D (cf. question 1), sont en PVC lisse de rugosité ϵ, et on considère que l'air y circule avec la vitesse V donnée en question 1.

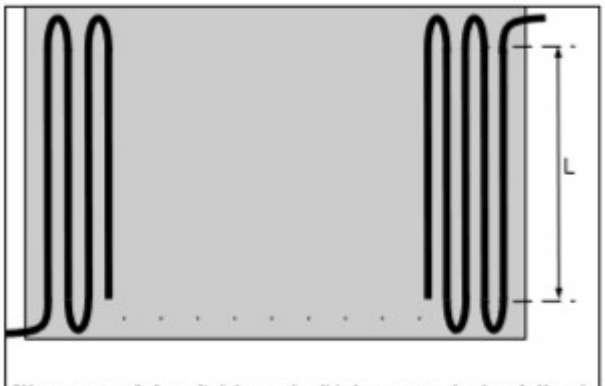


Illustration 2.1 : Schéma de l'échangeur de la dalle de plancher, et montage de ses épingles

Les tubes rectilignes sont reliés entre eux par des coudes à 180° de coefficient de perte de charge k_{180}, et l'ensemble est raccordé au réseau par deux coudes à 90° de coefficient de perte de charge k_{90}.

Question 2 : Quelle est la perte de charge de l'échangeur ?

<u>3 Étude des pertes dans les boucles</u>

Le circuit de chauffage peut-être considéré comme une pompe mettant en circulation l'air dans un réseau constitué de trois branches (figure 3.1). La pompe est placée entre les points A et B, tandis qu'entre les points B et C se placent en parallèle les deux boucles (chauffage convectif et de recirculation), et enfin la chaufferie et la dalle sont entre les points C et A. On appelle respectivement R1, R2 et R3 les résistances hydrauliques de la branche dalle + chaufferie (R1), de la boucle de chauffage convectif (R2) et de la boucle recirculation (R3).

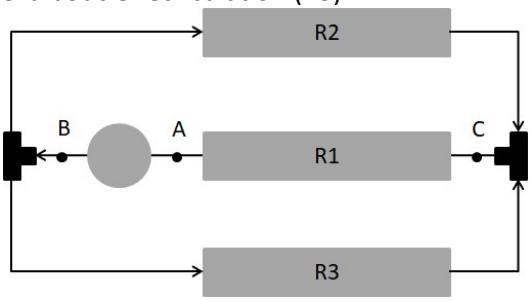


Illustration 3.1 : Schéma équivalent du réseau

Question 3 : Montrer que la résistance hydraulique totale du réseau peut s'écrire :

$$R_T = R_1 + R_{eq}$$

On définit ici la résistance hydraulique comme :

$$R = \frac{\Delta P}{\left(\frac{1}{2}.\rho.\dot{Q}^2/S^2\right)}$$

R_{eq} est la résistance de l'ensemble des deux boucles parallèles (chauffage convectif et de recirculation) y compris les 2 tés. Rappelons que les tuyaux de l'échangeur et des 2 boucles parallèles ont le même diamètre D.

Question 4 : Calculer R_1.

Question 5 : Montrer qu'entre les points B et C la résistance R_{eq} des deux boucles parallèles peut s'écrire:

$$\frac{1}{\sqrt{R_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}$$

2

Les 2 tés T_1 et T_2 créent des pertes de charges sur les 2 boucles parallèles avec des coefficients k_{T1} et k_{T2} par boucle. On considérera que la résistivité λ dans les boucles de recirculation et de chauffage convectif est la même que celle calculée à la question 2.

Question 6 : Calculer R_2, R_3 et R_{eq} pour le régime nominal, et calculer la perte de charge entre B et C.

4 Bilan des pertes de charge

On considère l'ensemble des pertes de charge entre les points B et A du réseau (cf. figure 3.1). La chaufferie est pourvue d'une pompe autonome qui assure la compensation des pertes internes, il n'y a donc pas de perte de charge à prendre en compte pour cet élément.

Question 7:
Calculer R_T pour le régime nominal, ainsi que la perte de charge totale du réseau.

5 Dimensionnement de la pompe

On prendra pour les pertes de charges entre B et A, $\Delta\Pi_{AB}$ = 172 938 Pa et Q_v = 0,157 m^3s^{-1}
Pour ces calculs, on prendra une valeur de rendement η_p pour la pompe.

Question 8: Quelle sera la puissance requise pour cette machine ?

Données numériques :

Constantes physiques

ρ	1,23 $kg.m^{-3}$	Masse volumique de l'air à 20 C
μ	1,8 10^{-5} Pa.s	Viscosité de l'air à 20 C
g	9,81 $m.s^{-2}$	Accélération moyenne de la pesanteur à la surface de la terre
Paramètres techniques		
V	20 $m.s^{-1}$	Vitesse de l'air dans la branche principale
Caractéristiques communes aux tubes du réseau :		
D	0,1 m	Diamètre
ϵ	0,05 mm	Rugosité des tubes (PVC)
Caractéristiques pour la dalle :		
L	20 m	Longueur des tubes des épingles de la dalle
k_{180}	0,35	Coefficient de perte de charge coude à 180 °
k_{90}	0,15	Coefficient de perte de charge coude à 180 °
Caractéristiques pour les deux boucles parallèles :		
k_{T1}	1	Coefficient de perte de charge par branche pour le Té 1
k_{T2}	3	Coefficient de perte de charge par branche pour le Té 2
L_R	15 m	Longueur totale de tubes pour la boucle de recirculation
L_C	30 m	Longueur totale de tubes pour la boucle de chauffage convectif
k_C	1	Coefficient de perte de charge pour la bouche de soufflage du convecteur
k_E	0,3	Coefficient de perte de charge pour la bouche d'extraction du convecteur
Caractéristiques de la pompe :		
η_p	0,65	Rendement

Partie II : Etude thermique

1. Déperditions du local

Le local de surface au sol 1000 m² (20m*50m) et de hauteur sous plafond H=6,5 m.
Les parois horizontales et la toiture sont constituées d'une épaisseur de béton de 20 cm et d'une épaisseur d'isolant de 20 cm.
Pour le dimensionnement de l'installation, on considérera une température extérieure de -7°C et une température de l'air intérieur de 18°C.
Question 1 : Calculer les pertes thermiques pour les parois verticales et pour la paroi horizontale (toiture). En déduire les pertes totales aux parois (en W). A cette étape, les échanges radiatifs sont négligés. Par ailleurs, les pertes thermiques par le sol sont négligées.

Question 2 : Calculer les pertes liées au renouvèlement d'air. En déduire les pertes thermiques totales du bâtiment.
Le débit d'air neuf pour la ventilation du local est de 0,5 volume/heure. En d'autres termes, en deux heures, le volume total du local est renouvelé.

2. Températures des parois internes

Question 3 : Calculer la température de paroi interne pour les parois verticales et pour la paroi horizontale.

3. Puissance thermique à fournir par le système

Question 4 : sachant que les apports internes du local sont de 10 kW (occupants et machines), quelle est la puissance thermique à fournir au local pour le maintenir à une température intérieure de 18°C.

Question 5 : Quelle est la température (que l'on supposera homogène) de la surface du sol (chauffé par le système Transfair) requise pour apporter la puissance nécessaire. On fera un bilan thermique entre la surface supérieure de la dalle et le local. Le sol est considéré comme un corps gris isotrope d'émissivité 0,8. On considérera que la surface du sol chauffée correspond à 80% de la surface totale au sol.

Question 6 : Quel est l'écart de température nécessaire entre l'entrée et la sortie de l'air passant dans la dalle pour transmettre la puissance ?
On prendra comme débit volume d'air 0,157 $m^3.s^{-1}$.

Données :

h_{ext}	25 W/m²/K	coefficient d'échange convectif externe (paroi verticale ou horizontale)
$h_{int,vert}$	7,7 W/m²/K	coefficient d'échange convectif interne (paroi verticale)
$h_{int,hor}$	5,9 W/m²/K	coefficient d'échange convectif interne (paroi horizontale, c-a-d sol et plafond)
$\lambda_{béton}$	0,92 W/m/K	conductivité thermique du béton
$\lambda_{isolant}$	0,035 W/m/K	conductivité thermique de la laine de verre
T_{ext}	-7°C	température extérieure
T_{int}	18°C	température intérieure
cp_{air}	1007 W/kg/K	chaleur massique de l'air
ε_{sol}	0,8	émissivité du sol
ε_{parois}	0,8	émissivité des parois
ρ_{air}	1,2 kg/m^3	mase volumique de l'air
σ	5,67 10^{-8} W/m²/K^4	constante de Stefan Boltzmann

Partie III : Bilan sur le système

Question 1 :
A partir des résultats de l'étude fluides et de l'étude thermique, peut-on dire que l'installation est adaptée et performante ?
Proposer un design de l'échangeur de la dalle chauffante qui permettrait de diffuser la chaleur de façon plus homogène dans le local et limiterait les pertes de charges.
Par rapport à l'eau, pourquoi l'utilisation de l'air comme vecteur d'énergie dans la dalle n'est pas idéale ?

CORRECTION

Partie I : Etude Fluides

1 Dimensionnement du réseau

Question 1: Calculer le nombre de Reynolds et le débit Q_v ? Nous examinons maintenant la solution d'un chauffage par rayonnement du plancher. L'énoncé indique que la vitesse débitante retenue est de 20 $m.s^{-1}$. Le nombre de Reynolds et le débit de volume correspondants à ces conditions sont :

$$\Re = \rho V D \mu = 1{,}23 \cdot 20 \cdot 0{,}1/1{,}8105 = 137\,000 \quad (1)$$

$$Qv = V \cdot S = 0{,}157\ m^3 \cdot s^{-1}$$

Ce qui correspond à un régime turbulent transitoire.

2 Étude de l'échangeur de la dalle

Question 2 : Quelle la perte de charge de l'échangeur ? L'échangeur est constitué d'un ensemble de tubes rectilignes, reliés par des coudes. Le calcul des pertes de charges fait donc intervenir deux termes, l'un pour les pertes linéiques, et l'autre pour les pertes singulières :

$$\Delta\Pi ec = 1/2.\rho.Qv^2/S^2 * (k_{lin} + k_{sing}) \quad (2)$$

Avec :

$$k_{lin} = n_1 \cdot (L/D).\lambda(\Re;\ \epsilon/D)$$

$$k_{sing} = n_2.k_{90} + n_3.k_{180} \quad (3)$$

Où n_1, n_2 et n_3 sont respectivement le nombre de tubes de longueur L, le nombre de coudes à 90° et le nombre de coudes à 180° dans l'échangeur, et λ est la résistivité hydraulique du tube utilisé. Un examen de la figure 2.1 nous permet d'effectuer ces décomptes : $n_1 = 2N+1 = 161$, $n_2 = 2$, et $n_3 = N$. Soient respectivement : n1 = 161 =2*80+1, n2 = 2, et n3 = 160.

Le calcul des pertes linéiques sera à reprendre pour d'autres branches du réseau : calculons la résistance hydraulique pour un mètre de tube, nous noterons R_{1m} ce terme. La lecture de l'abaque de Moody dans le cours (chapitre V, page 79) pour Re = 137 000 et ϵ/D = 0,0005 nous donne une résistivité λ = 0,02. On peut noter que ce facteur ne varie pas notablement dans les branches parallèles pour un réseau équilibré : le débit, et donc le nombre de Reynolds, y sont réduits de moitié, et le résultat ne change pas.

Calculons d'abord la résistance hydraulique pour un mètre de tube :

$$R_{1m} = (1/0{,}1).\lambda(137\,000; 5 \cdot 10^{-3}) = 0{,}02/0{,}1 = 0{,}2 m^{-1} \quad (4)$$

Appelons ΔPdyn la pression dynamique, et calculons ce terme qui servira à d'autres occasions :

$$\Delta Pdyn = 1/2.\rho.Qv^2/S^2 = 1/2.\rho.V^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}23 \cdot 400 = 246\ Pa \quad (5)$$

Au final nous avons :

$$\Delta\Pi ec = 246 \cdot (161 \cdot 20 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}15 + 160 \cdot 0{,}35) = 172\,274\ Pa \quad (6)$$

3 Étude des pertes dans les boucles

Question 3: Montrer que la perte de charge totale du réseau peut s'écrire : $R_T = R_1 + R_{eq}$

On considère le réseau redessiné conformément à la figure 3.1. Appelons ΔP_{pompe} la pression délivrée par la pompe entre les points A et B. Le théorème de Bernoulli généralisé appliqué sur cette boucle fermée au point B permet d'écrire le bilan des pertes de charge dans le réseau :

$$\Delta\Pi_{BB} = \Delta\Pi_{BC} + \Delta\Pi_{CA} - \Delta P_{pompe} = 0$$

$$\Delta P_{pompe} = \Delta\Pi_{BC} + \Delta\Pi_{CA} \quad (7)$$

Introduisons maintenant les résistances hydrauliques dans chacune des branches du réseau, R_{eq} est la résistance hydraulique équivalente à la partie BC, et R_1 est la résistance hydraulique dans la branche CA :

$$\Delta\Pi_{BC} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_{eq}$$
$$\Delta\Pi_{CA} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_1 \qquad (8)$$

Ce qui se réécrit :

$$\Delta P_{pompe} = \Delta\Pi_{BC}+\Delta\Pi_{CA} = ½.\rho.Qv^2/S^2.\ R_T = 1/2.\rho.Qv^2/S^2\ (R_{eq}+R_1)\ (9)$$

L'équation 9 donne immédiatement le résultat cherché

Question 4: ***Calculer R1***

Le calcul de R1 est immédiat, puisque l'énoncé indique que l'on peut assimiler la résistance hydraulique dans cette branche aux pertes dans l'échangeur. On a donc R1 = 172 274 / 246 = 700,3.

Sachant que $\Delta Pdyn=1/2.\rho.Qv^2/S^2=246$ Pa

Question 5 : Montrer qu'entre les points B et C la résistance R_{eq} des deux boucles parallèles peut s'écrire:

Entre les points B et C le fluide prend deux chemins différents (circuit en montage parallèle), mais on note qu'aux points B et C la chute de pression ne dépend pas du chemin emprunté par le fluide. Reprenons l'équation 8 en BC, en observant qu'elle peut maintenant se réécrire en considérant séparément les branches 2 et 3 du réseau :

$$\Delta\Pi_{BC} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_{eq} = 1/2.\rho.Q_{v2}^2/S^2.R_2 = 1/2.\rho.Q_{v3}^2/S^2.R_3 \quad (10)$$

Expressions dans lesquelles R_2 et R_3 sont respectivement les résistances hydrauliques du réseau dans les branches 2 et 3. Q_V, Q_{v2} et Q_{v3} sont reliés par la conservation du débit en B :

$$Q_v = Q_{v2} + Q_{v3} \quad (11)$$

Pour établir la relation entre les résistances hydrauliques, on part de l'équation 10 :

$$Q_v = K.\ 1/\sqrt{R_{eq}}$$
$$Q_{v2} = K.\ 1/\sqrt{R_2}$$
$$Q_{v3} = K.\ 1/\sqrt{R_3}$$
$$\text{avec: } K = (2.S^2.\Delta\Pi_{BC}/\rho) \qquad (12)$$

Les équations 12 reprises dans l'équation 11 donnent finalement la relation recherchée :

$$\frac{1}{\sqrt{R_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} \qquad (13)$$

Question 6 : Calculer R_2, R_3 et R_{eq} pour le régime nominal, et calculer la perte de charge correspondante.

La branche R_2 fait intervenir des pertes singulières aux Tés et aux bouches de convection, plus des pertes linéiques. Pour ces dernières on peut admettre que la résistance hydraulique par unité de longueur ne varie pas de manière significative lorsque l'on passe du débit dans la branche principale au débit moitié dans l'une des deux branches. Avec les éléments donnés dans l'énoncé, il vient :

$$R_2 = k_{T1} + k_{T2} + k_c + k_e + L_c\cdot R_{1m} = 1+3+1+0,3+30\cdot 0,2 = 11,3$$
$$R_3 = k_{T1} + k_{T2} + L_r\cdot R_{1m} = 1+3+15\cdot 0,2 = 7 \quad (14)$$

D'où le calcul approché pour la résistance équivalente et la perte de charge entre B et C :

$R_{eq} = 2,2$

$\Delta\Pi_{BC} = \Delta P_{dyn} R_{eq} = 246 \cdot 2,2 = 539$ Pa (15)

4 Bilan des pertes en régime nominal

Question 7: Calculer RT pour le régime nominal, ainsi que la perte de charge totale du réseau. Le calcul de R1 est immédiat, puisque l'énoncé indique que l'on peut assimiler la résistance hydraulique dans cette branche aux pertes dans l'échangeur. On a donc R1 = 172 274 / 246 = 700.3. Ce qui donne pour RT :

$$R_T = R_1 + R_{eq} = 700,3 + 2,2 = 703$$

$$\Delta\Pi_{AB} = \Delta P_{dyn.} R_T = 246 \cdot 703 \approx 172\,938 \text{ Pa} \quad (16)$$

On observe que l'essentiel des pertes est occasionné par l'échangeur de la dalle, le reste du réseau contribue à hauteur de 0,4%, ce qui justifie a posteriori des approximations faites dans la partie 3.
NB : Le calcul exact imposerait de considérer que dans les équations 12 et 13 les résistances R_2 et R_3 sont inconnues, il faut alors procéder de manière itérative en estimant les résistivités dans chaque branche en fonction des débits Q_{v2} et Q_{v3}.

5 Dimensionnement de la pompe

Question 8: Quelle sera la puissance requise pour cette machine ?

La réponse est immédiate :

$$W_{mec} = Q_v . \Delta\Pi_{AB} = 0,157 \cdot 172\,938 = 27\,151 \text{ W}$$

$$W_{requis} = W_{mec} / \eta = 27\,151 / 0,65 = 41\,771 \text{ W} \quad (17)$$

Partie II : Etude thermique

1. **Déperditions du local**

Question 1 : Calculer les pertes thermiques pour les parois verticales et pour la paroi horizontale (toiture). En déduire les déperditions totales aux parois (en W).

La résistance thermique pour les parois verticales s'écrit :

$$R_{pv} = \frac{1}{h_{ext} \cdot S} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant} \cdot S} + \frac{e_{béton}}{\lambda_{béton} \cdot S} + \frac{1}{h_{int,vert} \cdot S}$$

$$R_{ph} = \frac{1}{h_{ext} \cdot S} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant} \cdot S} + \frac{e_{béton}}{\lambda_{béton} \cdot S} + \frac{1}{h_{int,hor} \cdot S}$$

$$\Delta T = R . \phi$$

$$\phi_{pv} = \frac{\Delta T}{\mathrm{R_{pv}}} = \left(18 - (-7)\right)\left(\frac{2}{0.0188} + \frac{2}{0.0469}\right) = 3728 \text{ W}$$

$$\phi_{ph} = \frac{\Delta T}{\mathrm{R_{ph}}} = \frac{(18 - (-7))}{(0.0061)} = 4071 \text{ W}$$

Déperdition totale $\phi_{parois} = \phi_{ph} + \phi_{pv}$ =7799 W

Question 2 : Calculer les pertes liées au renouvèlement d'air.

$$\phi_{ventilation} = \rho.\dot{V}.cp.\Delta T = 1{,}2 * \frac{0.5 * (1000 * 6.5)}{3600} * 1007 * \big(18 - (-7)\big) = 27\,273 \text{ W}$$

En déduire les pertes thermiques totales du bâtiment.

$$\phi_{totales} = \phi_{ventilation} + \phi_{parois} = 35\,072 \text{ W}$$

2. Températures des parois internes

Question 3 : Calculer la température de paroi interne pour les parois verticales et pour la paroi horizontale.

Prenons une paroi verticale (50*6.5 m²)

$$\phi_{pv1} = \frac{\Delta T}{\mathrm{R_{pv}}} = \big(18 - (-7)\big)\left(\frac{1}{0.0188}\right) = 1331.6 \text{ W}$$

On peut écrire aussi

$$\phi_{pv} = h_{int,vert}.S_{p1}.(T_{int} - \mathrm{T_{p1,int}})$$

D'où

$$\mathrm{T_{p1,int}} = T_{int} - \frac{\phi_{pv1}}{h_{int,vert}.S_{p1}} = 17{,}5°C$$

Prenons une paroi horizontale (1000 m²)

$$\phi_{ph} = \frac{\Delta T}{\mathrm{R_{pv}}} = 4070 \text{ W}$$

On peut écrire aussi

$$\phi_{ph} = h_{int,ho}\ .S_{ph}.(T_{int} - \mathrm{T_{p1,int}})$$

D'où

$$\mathrm{T_{p1,int}} = T_{int} - \frac{\phi_{ph}}{h_{int,hor}.S_{ph}} = 17{,}3°C$$

On trouve pratiquement la même valeur dans les deux cas.

3 Puissance thermique à fournir par le système

Question 4 : sachant que les apports internes du local sont de 10 kW (occupants et machines), quelle est la puissance thermique à fournir au local pour le maintenir à une température intérieure de 18°C.

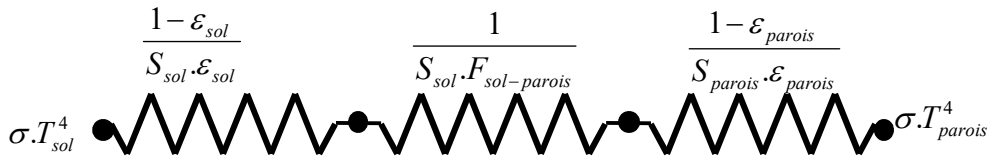
Puissance = déperditions – apports = 25 072 W

Question 5 : Quelle est la température de surface du sol (chauffé par le système Transfair) requise pour apporter la puissance nécessaire. Le sol est considéré comme un corps gris isotrope d'émissivité 0,8. On considérera que la surface du sol chauffée correspond à 80% de la surface total au sol.

On acceptera la solution simplifiée en considérant l'expression d'une petite surface dans un environnement de grandes dimensions. On a montré que les parois étaient à peu près à la même température (question 3)).

$$\phi_{\grave{a}fournir} = h_{int}.(\%chauffée)S_{sol}.(T_{sol} - T_{int}) + \varepsilon.\sigma.(\%chauffée)S_{sol}.\big(T_{sol}^4 - T_{parois}^4\big)$$

On peut faire un calcul sans simplification, à partir d'une analogie électrique pour le calcul du rayonnement entre deux surfaces grises.



$$\Phi_{net}^{12} = \left(M_1^0 - M_2^0\right)\cdot\left[\frac{1-\varepsilon_{sol}}{\varepsilon_{sol}S_{sol}} + \frac{1}{S_{sol}\cdot F_{sol-parois}} + \frac{1-\varepsilon_{parois}}{\varepsilon_{parois}S_{parois}}\right]^{-1}$$

Le facteur de forme $F_{sol\text{-}parois}$=1.

$$\Phi_{net}^{12} = \left(M_1^0 - M_2^0\right)\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon_{sol}S_{sol}} + \frac{1-\varepsilon_{parois}}{\varepsilon_{parois}S_{parois}}\right]^{-1}$$

S_{sol} = 1000 m²
S_{parois} = 1000 +6.5*50*2+6.5*20*2= 1910 m²

$\Phi_{net}^{12} = \left(M_1^0 - M_2^0\right)\cdot r.S_{sol}$ avec r $==\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon_{sol}} + \frac{\left(1-\varepsilon_{parois}\right)S_{sol}}{\varepsilon_{parois}S_{parois}}\right]^{-1}$ =0,724 ~0,8 l'hypothèse précédente est acceptable.

En partant de l'équation avec l'hypothèse de simplification, on résout l'équation.
Soit on linéarise, soit on utilise un solveur.
Avec solveur, on obtient Tsol= 20,7°C
En linérisant

$$\phi_{\text{à}fournir} = (h_{int} + h_{rad}).(\%chauffée)S_{sol}.(T_{sol} - T_{int})$$

Avec $h_{rad} = 4\varepsilon.\sigma.T_{moyenne}^3$
On en déduit en prenant $T_{moyenne} = T_{parois}$

$$T_{sol} = T_{int} + \frac{\phi_{\text{à}fournir}}{(h_{int} + h_{rad}).(\%chauffée)S_{sol}}$$

On obtient Tsol= 21,03 °C

On réinjecte avec Tsol= 21,03 °C

$$h_{rad} = 4\varepsilon.\sigma.T_{moyenne}^3$$

On obtient Tsol= 21,0 °C (on a convergé).

On obtient 21,1°C en utilisant la formule du rayonnement détaillé.

Question 6 : Quel est l'écart de température nécessaire entre l'entrée et la sortie de l'air passant dans la dalle pour transmettre la puissance ?

$$\phi_{air} = \rho.\dot{V}.cp.\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\phi_{air}}{\rho.\dot{V}.cp} = \frac{25072}{1.2.0.157.1007} = 132{,}2°C$$

Partie III : Bilan sur le système

Question 1 :
A partir des résultats de l'étude fluides et de l'étude thermique, peut-on dire que l'installation est adaptée et performante ?
Proposer un design qui permettrait de diffuser la chaleur de façon homogène dans le local et limiterait les pertes de charges.
Par rapport à l'eau, pourquoi l'utilisation de l'air comme vecteur d'énergie dans la dalle n'est pas idéale ?

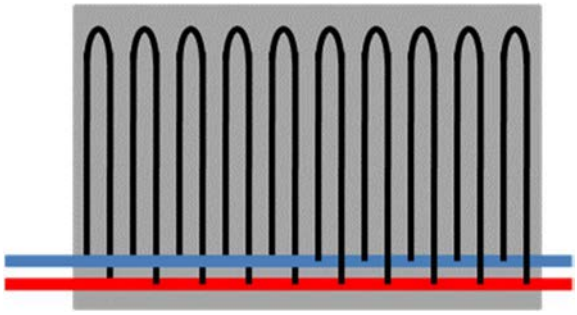
Les consommations de pompes sont très importantes.
Les écarts de températures dans la dalle ne sont pas acceptables. Une partie de la dalle sera trop chaude.

Il faut mettre les tubes en parallèle avec une épingle (voir schéma ci-dessous) pour limiter les pertes de charges (il faudra toutefois ajouter les pertes de charges liées aux collecteurs, le débit d'air dans chaque tube pourra être réduit. On réduit les pertes de charges linéiques par 80 qui représentent l'essentiel des pertes de charges. Les consommations de pompes seront fortement réduites.

$$\phi_{air} = n_{tubes}\rho.\dot{V}.cp.\Delta T$$

Si on se donne un DT max de 5 K. le débit total d'air serait de 3,52 m.s^{-1} à répartir dans 80 tubes. Le débit par tube descendrait à 0,044 m.s^{-1}. La vitesse dans les tubes serait réduite d'un facteur 3,5 et en conséquence les pertes de charge seraient elles aussi réduites.

Le vecteur d'air n'est cependant pas très intéressant. Comparé à l'eau **sa chaleur massique est plus faible et sa masse volumique aussi**. Il faut donc un débit volumique beaucoup plus important pour transport la même puissance. Les **consommations de pompes sont proportionnelles à $\Delta P/\rho$** et donc d'autant plus fortes que la masse volumique est faible. Par ailleurs, le **coefficients d'échange** convectif de l'air est beaucoup plus faible que celui de l'eau (facteur 20 environ).



Examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Jeudi 18 avril 2019

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/12/8 pour une note sur 40.*

Constantes :
Constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
Charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2, masse du nucléon $M \approx 1$ Gev/c^2 , constante d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}$

On rappelle que la fonction d'onde de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique de masse m et de pulsation ω est :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

On donne également l'intégrale sans dimension : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u^4 e^{-u^2}\, du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

1 La molécule diatomique : l'oscillateur anharmonique

Les vibrations longitudinales d'une molécule diatomique (considérée comme formée de deux atomes chacun de masse m) peuvent être modélisées en s'intéressant uniquement au degré de liberté x représentant la distance entre les deux atomes. On suppose que, pour ce degré de liberté, l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes peut être approximée par la fonction $V(x)$ définie sur $[0, +\infty($ par :

$$V(x) = V_0 \left(1 - 2e^{-\alpha x}\right)^2,$$

α étant une constante strictement positive. L'objectif de ce problème est d'étudier la spectroscopie de cette molécule (les fréquences des divers modes de vibration) ainsi que les déviations dues au caractère non harmonique de ce potentiel.

1. En quel point x_0 ce potentiel atteint-il son minimum ? Tracer le graphe de $V(x)$. Expliquer pourquoi le degré de liberté de vibration considéré peut être assimilé à une quasi-particule quantique de masse $m/2$. Donner l'écriture générale du hamiltonien $\hat{H}$ correspondant à cette quasi-particule, puis son écriture en représentation x.

2. Développer le potentiel V au $4^{\text{ème}}$ ordre en $y = x - x_0$ autour de $x = x_0$. On appelle $V_2(y)$ le développement au deuxième ordre du potentiel V en fonction de y. En écrivant que l'opérateur quantité de mouvement associé à la variable y est $\hat{p}_1 = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}$, en déduire que le hamiltonien $\hat{H}$ peut également s'écrire en représentation y :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$$

3. Déduire de l'expression du hamiltonien obtenue à la question précédente la valeur de la pulsation ω_0 de l'oscillateur harmonique équivalent en fonction des données du problème. En déduire les énergies des états stationnaires (on pourra se reporter aux résultats de la PC4 sur l'oscillateur harmonique). Donner en particulier l'expression l'énergie E_0 de l'état fondamental en fonction de ces mêmes données, ainsi que celle de la fonction d'onde $\psi_0(x)$.
4. On considère maintenant un hamiltonien $\hat{H}$ tout à fait général (pas forcément celui des questions précédentes) et on appelle $(E_n, n \in \mathbb{N})$ ses valeurs propres et $(|\psi_n\rangle)$ les vecteurs propres correspondants. On ajoute une perturbation $\hat{W}$ à ce hamiltonien et l'on s'intéresse aux valeurs et vecteurs propres du hamiltonien modifié $(\hat{H}+\hat{W})$ que l'on appelle respectivement $(E_n+\delta E_n)$ et $(|\psi_n+\delta\psi_n\rangle)$. Montrer qu'au premier ordre, $|\psi_n\rangle$ et $|\delta\psi_n\rangle$ sont orthogonaux. En déduire qu'au premier ordre, on a :

$$\delta E_n = \langle\psi_n|\hat{W}|\psi_n\rangle$$

5. On s'intéresse maintenant à la première correction non harmonique du hamiltonien de la question 2. On appelle V_4 le développement limité de V à l'ordre 4 en y autour de $x = x_0$ (et donc de $y = 0$). On introduit la correction de potentiel $W(x)$ d'ordre 3 et 4 telle que :

$$DL_4(V(x_0+y)) = V_4(y) = V_2(y) + W(y)$$

On traite cette correction W comme une petite perturbation, analogue à celle de la question 4. Montrer alors que la correction E_0 de l'énergie du fondamental due à l'ordre 3 dans $W(x)$ est nulle.
6. Écrire sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$ la correction δE_0 à E_0 induite par l'ordre 4 de W. On explicitera notamment clairement la dépendance en σ en introduisant une intégrale sans dimension. En déduire la valeur de δE_0 en fonction de V_0, α et m.
7. On introduit maintenant les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{A}^\dagger$ définis par (cf. PC4) :

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \quad \text{et} \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \qquad \text{avec} \quad X = \frac{y}{\sigma} = \frac{x-x_0}{\sigma} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dX}$$

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{A}\,|\psi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\psi_{n-1}\rangle$ et $\hat{A}^\dagger\,|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\psi_{n+1}\rangle$.
En écrivant l'opérateur $\hat{X}$ en fonction de $\hat{A}$ et $\hat{A}^\dagger$, exprimer l'état $\hat{X}^2\,|\psi_n\rangle$ dans la base des $(|\psi_k\rangle)$. Utiliser ce résultat pour retrouver le résultat de la question précédente.
8. On considère une molécule diatomique de diazote N_2 pour laquelle la distance moyenne entre les deux atomes d'azote est $x_0 = 1,1$ Å, l'énergie de liaison est $V_0 = 946$ kJ/mole et la masse atomique de l'azote (élément) est $M_A = 14$. En déduire la valeur de la pulsation de l'oscillateur, l'énergie E_0 et la correction δE_0 due à l'anharmonicité du potentiel. Que peut-on en conclure ?

2 Mouvement supraluminique apparent

Un noyau actif de galaxie est un système très commun dans l'Univers. Il consiste en un trou noir supermassif qui agrège de la matière au centre d'une galaxie. Il est caractérisé par l'existence d'un jet de matière émis perpendiculairement au disque d'accrétion. La matière dans les jets de noyaux actifs de galaxies peut être accélérée jusqu'à des vitesses relativistes. L'objet de cet exercice est d'évaluer la vitesse apparente mesurée depuis la Terre de ce jet de matière, et d'interpréter le résultat obtenu.

On considère donc le noyau actif de la galaxie 3C 273 qui est situé à une distance D d'environ 2 milliards d'années-lumière. Il est représenté dans l'image ci-dessous en imagerie par rayons X (gauche) et en ondes radio (au centre). Dans la figure centrale, on voit une partie du jet de matière à deux dates différentes (1977 et 1980), ses positions étant repérées par les pointillés et séparées par un écart angulaire.

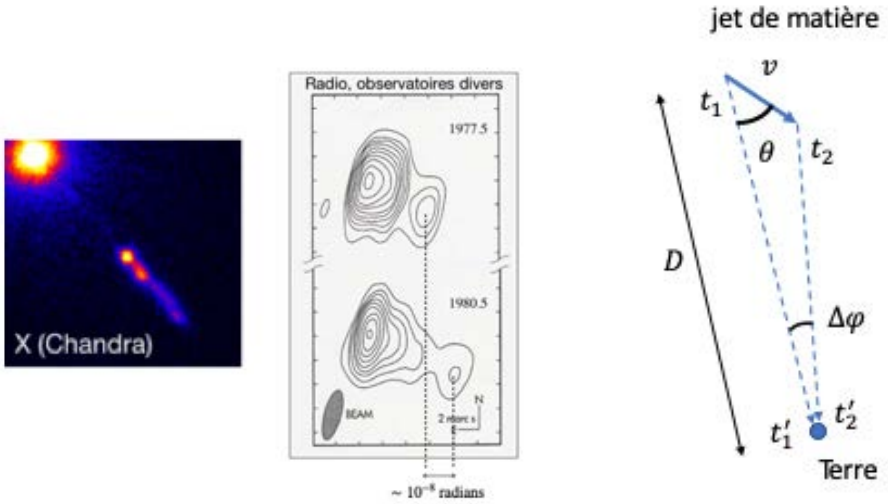


FIGURE 1 – À gauche : imagerie par rayons X du jet de matière sortant du noyau actif (en haut à gauche de l'image). Au centre : vue à deux instants différents du jet de matière. À droite : représentation schématique du déplacement du jet de matière par rapport à la Terre, et des deux rayons lumineux émis par le jet et reçus sur Terre.

On appelle $\Delta\varphi$ l'écart angulaire apparent (que l'on suppose très faible devant toutes les autres quantités) entre les deux observations dont la mesure est indiquée sur la figure du centre. Ces deux observations correspondent à deux rayons lumineux émis depuis le jet de matière et arrivés sur Terre. On suppose que le premier rayon a été émis au temps t_1 dans le repère lié à la Terre et qu'il est arrivé sur Terre au temps t'_1 (le temps de la première observation, soit en 1977). Le second rayon a été émis au temps t_2 (toujours dans un repère lié à la Terre) et arrivé sur Terre au temps t'_2 (le temps de la deuxième observation, soit 1980).

1. Donner l'expression algébrique de la distance apparente d_{app} vue de la Terre séparant les endroits des deux observations de la figure centrale (on supposera que la distance Terre-jet de matière change très peu), et en déduire la vitesse moyenne apparente $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$ d'avancée du jet de matière. Calculer numériquement et commenter.
2. On suppose que le jet de matière se déplace en fait en se rapprochant de la Terre à une vitesse v selon une direction qui fait un angle θ avec la ligne Terre-jet de matière (voir figure de droite). Écrire les expressions de t'_1 et t'_2 en fonction de t_1, t_2, θ, D et $\beta = v/c$. En déduire une relation entre les écarts $t'_2 - t'_1$ et $t_2 - t_1$.

3. Établir la relation entre la distance d_{app} et v, θ, t_1 et t_2. En déduire l'expression de β_{app} en fonction de β et θ. Pour quelle valeur de θ cette vitesse apparente est-elle maximale ? Quelle est alors l'expression de $\beta_{\text{app}}^{\max}$ correspondant ?
4. On se place dans le cas où la distance apparente est maximale. Donner alors l'expression de la durée τ séparant les deux événements d'émission des deux rayons lumineux **dans le repère lié au jet de matière** en fonction de l'écart de temps entre les observations sur Terre. Donnez une estimation numérique de cette durée.

3 Exercices rapides

3.1 Exercice 1

On considère une particule de spin 1/2 et on appelle $|z+\rangle$ (resp. $|z-\rangle$) l'état de spin $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$) dans la direction Oz. La même convention est utilisée dans toutes les directions.

1. Montrer que l'état $|x-\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle - |z+\rangle\right)$ est bien état propre de $\hat{S}_x$ avec la valeur propre $-\hbar/2$.
2. On considère l'état $|\psi\rangle = \sqrt{2}\,|z+\rangle - |x-\rangle$. Montrer que cet état est bien normalisé. On mesure dans cet état le spin dans la direction Oz. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$. En déduire la valeur moyenne du spin dans la direction Oz ainsi que l'écart-type correspondant à cette mesure.

3.2 Exercice 2

Montrer que si $\psi(x)$ est une fonction d'onde réelle d'un état quantique $|\psi\rangle$, alors la valeur moyenne de l'impulsion dans cet état est nulle. Que peut-on en conclure pour les états stationnaires d'un hamiltonien de la forme $\hat{H} = \left(\dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)$ où $V(x)$ est un potentiel réel ?

Examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Jeudi 18 avril 2019

Durée : 2h30.
Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs ***en justifiant vos réponses****. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 20/12/8 pour une note sur 40.*

Constantes :
Constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.
Charge absolue de l'électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg $= 511$ KeV/c^2, masse du nucléon $M \approx 1$ Gev/c^2 , constante d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}$

On rappelle que la fonction d'onde de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique de masse m et de pulsation ω est :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

On donne également l'intégrale sans dimension : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u^4 e^{-u^2}\, du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

1 La molécule diatomique : l'oscillateur anharmonique

Les vibrations longitudinales d'une molécule diatomique (considérée comme formée de deux atomes chacun de masse m) peuvent être modélisées en s'intéressant uniquement au degré de liberté x représentant la distance entre les deux atomes. On suppose que, pour ce degré de liberté, l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes peut être approximée par la fonction $V(x)$ définie sur $[0, +\infty($ par :

$$V(x) = V_0 \left(1 - 2e^{-\alpha x}\right)^2,$$

α étant une constante strictement positive. L'objectif de ce problème est d'étudier la spectroscopie de cette molécule (les fréquences des divers modes de vibration) ainsi que les déviations dues au caractère non harmonique de ce potentiel.

1. En quel point x_0 ce potentiel atteint-il son minimum ? Tracer le graphe de $V(x)$. Expliquer pourquoi le degré de liberté de vibration considéré peut être assimilé à une quasi-particule quantique de masse $m/2$. Donner l'écriture générale du hamiltonien $\hat{H}$ correspondant à cette quasi-particule, puis son écriture en représentation x.

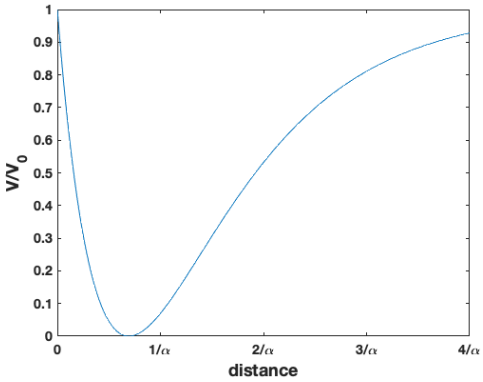
Réponse :

Le potentiel est défini sur $\mathbb{R}_+$, il est clairement positif et le minimum est atteint lorsque la parenthèse s'annule, c'est-à-dire pour

$$1 = 2e^{-\alpha x} \qquad \text{soit} \qquad x_0 = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

Le potentiel V peut donc se réécrire

$$V(x) = V_0 \left(1 - e^{-\alpha(x-x_0)}\right)^2$$



Le hamiltonien de la molécule diatomique s'écrit dans l'espace (x_1, x_2) des positions des deux atomes. Comme pour le cas du système à deux corps dans l'atome d'hydrogène, on se ramène à un système à un corps en posant $x = x_1 - x_2$, et comme autre variable la position du centre de masse. La masse correspondant au degré de liberté x est alors la masse réduite μ telle que $\mu^{-1} = m^{-1} + m^{-1}$, soit $\mu = m/2$. Par conséquent, le hamiltonien du système réduit s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2\mu} + \hat{V} = \frac{p^2}{m} + \hat{V}$$

Son écriture en représentation x est alors :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \times$$

2. Développer le potentiel V au 4ème ordre en $y = x - x_0$ autour de $x = x_0$. On appelle $V_2(y)$ le développement au deuxième ordre du potentiel V en fonction de y. En écrivant que l'opérateur quantité de mouvement associé à la variable y est $\hat{p}_1 = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}$, en déduire que le hamiltonien $\hat{H}$ peut également s'écrire en représentation y :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$$

Réponse :

On développe le potentiel autour de $x = x_0$ (soit autour de $y = 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{V(x)}{V_0} &= 1 - 2e^{-\alpha(x-x_0)} + e^{-2\alpha(x-x_0)} = 1 - 2e^{-\alpha y} + e^{-2\alpha y} \\ &= (1-2+1) + (2\alpha - 2\alpha)y + (-2\alpha^2 + 4\alpha^2)\frac{y^2}{2} + (2\alpha^3 - 8\alpha^3)\frac{y^3}{6} + (-2\alpha^4 + 16\alpha^4)\frac{y^4}{24} \\ &= \alpha^2 y^2 - \alpha^3 y^3 + \frac{7}{12}\alpha^4 y^4\end{aligned}$$

On a donc $V_2(y) = \alpha^2 y^2$. En réutilisant l'expression du hamiltonien obtenue à la question 1 et en remarquant que $d/dx = d/dy$, il vient immédiatement que :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dy^2} + \hat{V}_2(y) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2 V_0 \hat{y}^2$$

3. Déduire de l'expression du hamiltonien obtenue à la question précédente la valeur de la pulsation ω_0 de l'oscillateur harmonique équivalent en fonction des données du problème. En déduire les énergies des états stationnaires (on pourra se reporter aux résultats de la PC4 sur l'oscillateur harmonique). Donner en particulier l'expression l'énergie E_0 de l'état fondamental en fonction de ces mêmes données, ainsi que celle de la fonction d'onde $\psi_0(x)$.

   Réponse :

   Le hamiltonien obtenu à la question précédente est le hamiltonien d'un oscillateur harmonique dont la pulsation ω_0 équivalente est telle que :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\omega_0^2 = \alpha^2 V_0 \qquad \text{d'où} \qquad \omega_0 = 2\alpha\sqrt{\frac{V_0}{m}}$$

   Par conséquent les énergies de cet oscillateur s'écrivent $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0$. En particulier, l'énergie et la fonction d'onde de l'état fondamental sont :

$$E_0 = \hbar\alpha\sqrt{\frac{V_0}{m}} \qquad \text{et} \qquad \psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{\frac{m}{2}\omega_0}} = \left(\frac{\hbar^2}{\alpha^2 m V_0}\right)^{\frac{1}{4}}$$

4. On considère maintenant un hamiltonien $\hat{H}$ tout à fait général (pas forcément celui des questions précédentes) et on appelle $(E_n, n \in \mathbb{N})$ ses valeurs propres et $(|\psi_n\rangle)$ les vecteurs propres correspondants. On ajoute une perturbation $\hat{W}$ à ce hamiltonien et l'on s'intéresse aux valeurs et vecteurs propres du hamiltonien modifié $(\hat{H} + \hat{W})$ que l'on appelle respectivement $(E_n + \delta E_n)$ et $(|\psi_n + \delta\psi_n\rangle)$. Montrer qu'au premier ordre, $|\psi_n\rangle$ et $|\delta\psi_n\rangle$ sont orthogonaux. En déduire qu'au premier ordre, on a :

$$\delta E_n = \langle\psi_n|\hat{W}|\psi_n\rangle$$

   Réponse :

   Les états propres du hamiltonien et du hamiltonien modifié sont normalisés. Si l'on écrit la condition de normalisation des états du hamiltonien modifié, on obtient :

$$\langle\psi_n + \delta\psi_n|\psi_n + \delta\psi_n\rangle = 1$$

On développe cette expression au premier ordre :

$$\langle \psi_n + \delta\psi_n | \psi_n + \delta\psi_n \rangle = \langle \psi_n | \psi_n \rangle + \langle \delta\psi_n | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \delta\psi_n \rangle$$

Le terme $\langle \psi_n | \psi_n \rangle$ du membre de droite vaut 1 à cause de la normalisation de $|\psi_n\rangle$, et les deuxième et troisième termes sont égaux en raison du caractère réel des états propres. On en conclut que $\langle \psi_n | \delta\psi_n \rangle = 0$.
L'équation de Schrödinger indépendante du temps satisfaite par les états propres du hamiltonien modifié s'écrit :

$$\left(\hat{H} + \hat{W}\right) |\psi_n + \delta\psi_n\rangle = (E_n + \delta E_n) \, |\psi_n + \delta\psi_n\rangle$$

On prend le produit hermitien de cette égalité avec $\langle \psi_n |$:

$$\langle \psi_n | \left(\hat{H} + \hat{W}\right) |\psi_n + \delta\psi_n\rangle = E_n + \delta E_n$$

On développe le membre de gauche :

$$\langle \psi_n | \hat{H} | \psi_n + \delta\psi_n \rangle + \langle \psi_n | \hat{W} | \psi_n \rangle = E_n + \delta E_n$$

(le terme en $\langle \psi_n | \hat{W} | \delta\psi_n \rangle$ est ignoré car il est du deuxième ordre). On utilise le fait que $|\psi_n\rangle$ est état propre de $\hat{H}$ à gauche dans le premier terme, d'où :

$$E_n \, \langle \psi_n | \psi_n + \delta\psi_n \rangle + \langle \psi_n | \hat{W} | \psi_n \rangle = E_n + \delta E_n$$

En utilisant la normalisation de $|\psi_n\rangle$ et son orthogonalité à $|\delta\psi_n\rangle$, on aboutit finalement à :

$$\delta E_n = \langle \psi_n | \hat{W} | \psi_n \rangle$$

5. On s'intéresse maintenant à la première correction non harmonique du hamiltonien de la question 2. On appelle V_4 le développement limité de V à l'ordre 4 en y autour de $x = x_0$ (et donc de $y = 0$). On introduit la correction de potentiel $W(x)$ d'ordre 3 et 4 telle que :

$$DL_4(V(x_0 + y)) = V_4(y) = V_2(y) + W(y)$$

On traite cette correction W comme une petite perturbation, analogue à celle de la question 4. Montrer alors que la correction E_0 de l'énergie du fondamental due à l'ordre 3 dans $W(x)$ est nulle.

Réponse :

D'après la question 2, on déduit que $W(y) = -\alpha^3 V_0 \, y^3 + \dfrac{7}{12}\alpha^4 V_0 \, y^4$. Si on se limite au premier ordre de W (c'est-à-dire au 3ème ordre en y), alors la correction sur la valeur propre s'écrit :

$$\delta E_0 = \langle \psi_0 | -\alpha^3 V_0 \, \hat{y}^3 | \psi_0 \rangle = -\alpha^3 V_0 \, \langle \psi_0 | \hat{y}^3 | \psi_0 \rangle$$

La fonction ψ_0 est paire en y tandis que y^3 est impaire. L'intégrale est donc nulle, et la correction δE_0 à l'ordre 3 également.

6. Écrire sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$ la correction δE_0 à E_0 induite par l'ordre 4 de W. On explicitera notamment clairement la dépendance en σ en introduisant une intégrale sans dimension. En déduire la valeur de δE_0 en fonction de V_0, α et m.

Réponse :

On utilise le résultat de la question 4 pour déterminer la correction δE_0 à l'énergie fondamentale :

$$\delta E_0 = \langle\psi_0|\hat{W}|\psi_0\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \frac{7}{12}\left(\alpha^4 V_0 y^4\right) \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\ dy = \frac{7}{12}\frac{\alpha^4 V_0}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} y^4 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}\ dy$$
$$= \frac{7}{12\sqrt{\pi}}(\alpha\sigma)^4 V_0 \int_{\mathbb{R}} u^4 e^{-u^2}\ du$$

On en déduit la valeur de δE_0 en fonction des paramètres du problème :

$$\delta E_0 = \frac{7}{12\sqrt{\pi}}\alpha^4 \frac{\hbar^2}{\alpha^2 m V_0} V_0 \int_{\mathbb{R}} u^4 e^{-u^2}\ du = \frac{7}{12\sqrt{\pi}}\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{7}{16}\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}$$

7. On introduit maintenant les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{A}^\dagger$ définis par (cf. PC4) :

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \quad \text{et} \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \qquad \text{avec} \quad X = \frac{y}{\sigma} = \frac{x - x_0}{\sigma} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dX}$$

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{A}\,|\psi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\psi_{n-1}\rangle$ et $\hat{A}^\dagger\,|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\psi_{n+1}\rangle$.
En écrivant l'opérateur $\hat{X}$ en fonction de $\hat{A}$ et $\hat{A}^\dagger$, exprimer l'état $\hat{X}^2\,|\psi_n\rangle$ dans la base des $(|\psi_k\rangle)$.
Utiliser ce résultat pour retrouver le résultat de la question précédente.

Réponse :

On écrit $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{A} + \hat{A}^\dagger\right)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\hat{X}^2\,|\psi_n\rangle &= \frac{1}{2}\left(\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{A} + \hat{A}^{\dagger 2}\right)|\psi_n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n(n-1)}\,|\psi_{n-2}\rangle + (n+1)\,|\psi_n\rangle + n\,|\psi_n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|\psi_{n+2}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n(n-1)}\,|\psi_{n-2}\rangle + (2n+1)\,|\psi_n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|\psi_{n+2}\rangle\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc la valeur du coefficient de matrice $\langle\psi_n|\hat{X}^4|\psi_n\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_n|\hat{X}^4|\psi_n\rangle &= \langle\hat{X}^2\psi_n|\hat{X}^2\psi_n\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} + (2n+1)\psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}| \\
&\qquad |\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} + (2n+1)\psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left[n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2)\right] = \frac{1}{4}\left(6n^2 + 6n + 3\right) \\
&= \frac{3}{4}(2n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on retrouve $\langle\psi_0|\hat{X}^4|\psi_0\rangle = \frac{3}{4}$, et donc la correction δE_0 à l'énergie du fondamental est :

$$\delta E_0 = \langle\psi_0|\frac{7}{12}\alpha^4 V_0 \hat{X}^4|\psi_0\rangle = \frac{7}{12}\alpha^4\sigma^4 V_0\,\langle\psi_0|\hat{X}^4|\psi_0\rangle = \frac{7}{12}\alpha^4\sigma^4 V_0 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{16}\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}$$

8. On considère une molécule diatomique de diazote N_2 pour laquelle la distance moyenne entre les deux atomes d'azote est $x_0 = 1,1$ Å, l'énergie de liaison est $V_0 = 946$ kJ/mole et la masse atomique de l'azote (élément) est $M_A = 14$. En déduire la valeur de la pulsation de l'oscillateur, l'énergie E_0 et la correction δE_0 due à l'anharmonicité du potentiel. Que peut-on en conclure ?

   Réponse :

   La valeur de α est $\ln(2)/x_0$ (voir question 1) et la masse m vaut $14M$, M étant la masse du nucléon. Les valeurs de la pulsation et de l'énergie (mesurée par rapport au minimum du potentiel, soit 0) sont :

$$\omega_0 = 2\alpha\sqrt{\frac{V_0}{m}} = \frac{2\ln 2}{x_0}\sqrt{\frac{V_0}{14M}} \qquad \text{et} \qquad \delta E_0 = \frac{7}{16}\frac{\hbar^2(\ln 2)^2}{14Mx_0^2} = \frac{\hbar^2(\ln 2)^2}{32Mx_0^2}$$

   A.N. :

$$\omega_0 \approx \frac{1}{10^{-10}} \times 3.10^8 \times \sqrt{\frac{946.10^3}{6.10^{23} \times 1,6.10^{-19} \times 14 \times 10^9}} \approx \frac{3}{4}.10^{18}\sqrt{\frac{10^6}{10^{24-19+9}}} = 75 \text{ THz}$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \approx \frac{10^{-34} \times 75.10^{12}}{2 \times 1,6.10^{-19}} \text{ eV} \approx 0,02 \text{ eV}$$

$$\delta E_0 = \frac{10^{-68}/4 \times (3.10^8)^2}{32 \times (1,6.10^{-19})^2 \times 10^9 \times (10^{-10})^2} \approx \frac{10^{-68+17}}{3.10^{2-38+9-20}} \approx 3.10^{-5} \text{ eV}$$

   L'anharmonicité de cet oscillateur effectif est très faible (environ 10^{-3}). Les décalages relatifs de raies spectroscopiques (énergies de transition entre états) vont être du même ordre de grandeur.

2 Mouvement supraluminique apparent

Un noyau actif de galaxie est un système très commun dans l'Univers. Il consiste en un trou noir supermassif qui agrège de la matière au centre d'une galaxie. Il est caractérisé par l'existence d'un jet de matière émis perpendiculairement au disque d'accrétion. La matière dans les jets de noyaux actifs de galaxies peut être accélérée jusqu'à des vitesses relativistes. L'objet de cet exercice est d'évaluer la vitesse apparente mesurée depuis la Terre de ce jet de matière, et d'interpréter le résultat obtenu.

On considère donc le noyau actif de la galaxie 3C 273 qui est situé à une distance D d'environ 2 milliards d'années-lumière. Il est représenté dans l'image ci-dessous en imagerie par rayons X (gauche) et en ondes radio (au centre). Dans la figure centrale, on voit une partie du jet de matière à deux dates différentes (1977 et 1980), ses positions étant repérées par les pointillés et séparées par un écart angulaire.

On appelle $\Delta\varphi$ l'écart angulaire apparent (que l'on suppose très faible devant toutes les autres quantités) entre les deux observations dont la mesure est indiquée sur la figure du centre. Ces deux observations correspondent à deux rayons lumineux émis depuis le jet de matière et arrivés sur Terre. On suppose que le premier rayon a été émis au temps t_1 dans le repère lié à la Terre et qu'il est arrivé sur Terre au temps t'_1 (le temps de la première observation, soit en 1977). Le second rayon a été émis au temps t_2 (toujours dans un repère lié à la Terre) et arrivé sur Terre au temps t'_2 (le temps de la deuxième observation, soit 1980).

1. Donner l'expression algébrique de la distance apparente d_{app} vue de la Terre séparant les endroits des deux observations de la figure centrale (on supposera que la distance Terre-jet de matière change très peu), et en déduire la vitesse moyenne apparente $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$ d'avancée du jet de matière. Calculer numériquement et commenter.

   Réponse :

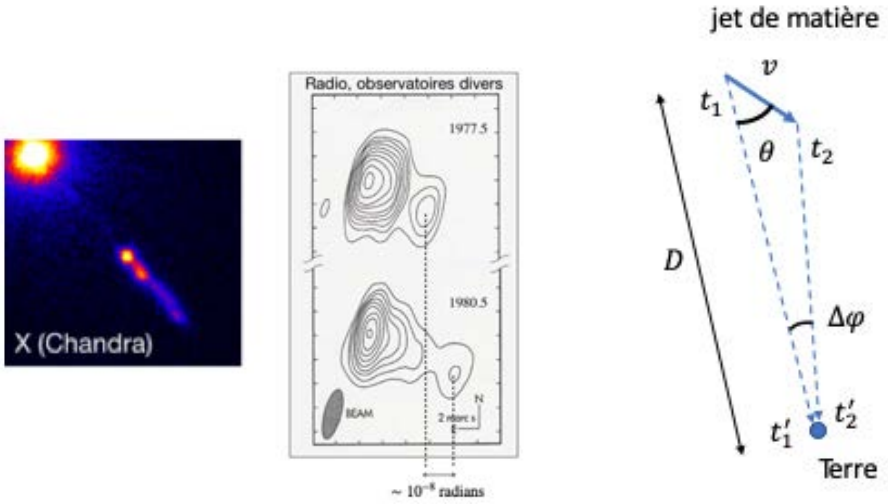


FIGURE 1 – À gauche : imagerie par rayons X du jet de matière sortant du noyau actif (en haut à gauche de l'image). Au centre : vue à deux instants différents du jet de matière. À droite : représentation schématique du déplacement du jet de matière par rapport à la Terre, et des deux rayons lumineux émis par le jet et reçus sur Terre.

La distance apparente d_{app} entre les deux positions du jet de matière est $D\Delta\varphi$ (le mouvement de la Terre est négligeable par rapport aux distances considérées). La vitesse apparente sans dimension s'écrit donc : $\beta_{\text{app}} = \dfrac{v_{\text{app}}}{c} = \dfrac{1}{c}\dfrac{d_{\text{app}}}{t'_2 - t'_1} = \dfrac{1}{c}\dfrac{D\Delta\varphi}{t'_2 - t'_1}$

L'écart angulaire mesuré et reporté sur la figure est de 10^{-8} rad. La distance depuis la Terre étant de 2.10^9 années-lumière, la distance apparente d_{app} est :

$$d_{\text{app}} = 10^{-8} \times 2.10^9 = 20 \text{ années-lumière}$$

et donc la vitesse apparente vaut :

$$\beta_{\text{app}} = \frac{v_{\text{app}}}{c} = \frac{20 \text{ années-lumière}}{3 \text{ ans} \times c} = \frac{20}{3} \approx 6,7$$

On obtient donc une vitesse apparente supra-luminique ! Ceci est bien évidemment impossible.

2. On suppose que le jet de matière se déplace en fait en se rapprochant de la Terre à une vitesse v selon une direction qui fait un angle θ avec la ligne Terre-jet de matière (voir figure de droite). Écrire les expressions de t'_1 et t'_2 en fonction de t_1, t_2, θ, D et $\beta = v/c$. En déduire une relation entre les écarts $t'_2 - t'_1$ et $t_2 - t_1$.

   Réponse :

   Le rayon lumineux se déplace à la vitesse c sur une distance D dans le repère lié à la Terre. On a donc $t'_1 = t_1 + \dfrac{D}{c}$. La même relation s'applique pour le deuxième rayon, mais la distance s'est réduite de $v\cos\theta$ (au premier ordre, en supposant cette distance faible devant D). On a donc

$$t'_2 = t_2 + \frac{D - v\cos\theta(t_2 - t_1)}{c}$$

Par conséquent

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 - \beta(t_2 - t_1)\cos\theta \qquad \text{d'où} \qquad t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)(1 - \beta\cos\theta)$$

3. Établir la relation entre la distance d_{app} et v, θ, t_1 et t_2. En déduire l'expression de β_{app} en fonction de β et θ. Pour quelle valeur de θ cette vitesse apparente est-elle maximale ? Quelle est alors l'expression de $\beta_{\text{app}}^{\max}$ correspondant ?

   Réponse :

   La distance apparente d_{app} correspond au déplacement latéral apparent, d'où $d_{\text{app}} = v\sin\theta(t_2 - t_1)$. On en déduit, en utilisant le résultat de la question 1 :

$$\beta_{\text{app}} = \frac{1}{c}\frac{d_{\text{app}}}{t_2' - t_1'} = \frac{1}{c}\frac{v\sin\theta(t_2 - t_1)}{t_2' - t_1'} = \beta\frac{\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta}$$

   On dérive cette expression par rapport à θ pour obtenir le maximum :

$$\frac{d\beta_{\text{app}}}{d\theta} = \beta\frac{\cos\theta(1 - \beta\cos\theta) - \beta\sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^2} = \beta\frac{\cos\theta - \beta}{(1 - \beta\cos\theta)^2}$$

   Le maximum est atteint pour $\cos\theta = \beta$, ce qui donne :

$$\beta_{\text{app}}^{\max} = \beta\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\beta$$

4. On se place dans le cas où la distance apparente est maximale. Donner alors l'expression de la durée τ séparant les deux événements d'émission des deux rayons lumineux **dans le repère lié au jet de matière** en fonction de l'écart de temps entre les observations sur Terre. Donnez une estimation numérique de cette durée.

   Réponse :

   Comme dans le cas des muons dans le cours, il y a dilatation des temps dans le repère lié à la Terre par rapport aux événements liés au jet de matière. Cette dilatation est donnée par le facteur de Lorentz γ. La différence de temps τ est donc :

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} = \frac{t_2 - t_1}{(t_2' - t_1')\gamma}(t_2' - t_1') = \frac{1}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}(t_2' - t_1') = \frac{1}{\gamma(1 - \beta^2)}(t_2' - t_1') = \gamma(t_2' - t_1')$$

   On sait que $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ d'où $\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$. D'après la question 3, on sait que :

$$\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \beta_{\text{app}}^{\max} \qquad \text{d'où} \qquad \gamma = \sqrt{1 + \beta_{\text{app}}^{\max\,2}} \approx \beta_{\text{app}}^{\max} \quad \text{dans notre cas}$$

   La durée séparant les émissions des deux rayons lumineux dans le repère lié au jet de matière est donc environ 20 ans.

3 Exercices rapides

3.1 Exercice 1

On considère une particule de spin 1/2 et on appelle $|z+\rangle$ (resp. $|z-\rangle$) l'état de spin $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$) dans la direction Oz. La même convention est utilisée dans toutes les directions.

1. Montrer que l'état $|x-\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle - |z-\rangle\right)$ est bien état propre de $\hat{S}_x$ avec la valeur propre $-\hbar/2$.

   Réponse :

   Dans la base des états propres de $\hat{S}_z$, l'opérateur $\hat{S}_x$ s'écrit $\dfrac{\hbar}{2}\hat{\sigma_1}$:

   $$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Par conséquent :

   $$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. On considère l'état $|\psi\rangle = \sqrt{2}\,|z+\rangle - |x-\rangle$. Montrer que cet état est bien normalisé. On mesure dans cet état le spin dans la direction Oz. Quelles sont les probabilités respectives de trouver $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$. En déduire la valeur moyenne du spin dans la direction Oz ainsi que l'écart-type correspondant à cette mesure.

   Réponse :

   Le vecteur $|\psi\rangle$ s'écrit également :

   $$|\psi\rangle = \sqrt{2}\,|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle - |x-\rangle\right) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle$$

   La base canonique des vecteurs propres de $\hat{S}_z$ étant orthonormée, le carrée de la norme de $|\psi\rangle$ est :

   $$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

   La décomposition dans la base des vecteurs propres de $\hat{S}_z$ montre immédiatement que les probabilités de trouver $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$ sont 1/2, 1/2. La moyenne et l'écart-type associés à la mesure sont :

   $$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2} - \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta S_z = \sqrt{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{4}} = \frac{\hbar}{2}$$

3.2 Exercice 2

Montrer que si $\psi(x)$ est une fonction d'onde réelle d'un état quantique $|\psi\rangle$, alors la valeur moyenne de l'impulsion dans cet état est nulle. Que peut-on en conclure pour les états stationnaires d'un hamiltonien de la forme $\hat{H} = \left(\dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)$ où $V(x)$ est un potentiel réel ?

Réponse :

On va démontrer cette propriété à 1 dimension (la généralisation est immédiate à plusieurs dimensions). La valeur moyenne de l'impulsion pour une fonction d'onde quelconque est :

$$\langle \psi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) \ dx$$

Pour une fonction d'onde réelle, on a donc :

$$\langle \psi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dx}(x) \ dx = \frac{\hbar}{2i} [\psi^2(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

La fonction s'annule à l'infini car elle est de norme 1. Les états stationnaires d'un hamiltonien de la forme donnée dans l'énoncé sont des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients réels. On peut trouver une base de fonctions propres constituée de fonctions réelles. Les états stationnaires du hamiltonien ont donc une impulsion moyenne nulle. C'est ce qui reste en physique quantique de la notion classique d'équilibre pour la position de la particule.

L'essai brésilien de compression diamétrale

à l'occasion des 75 ans de l'invention, au Brésil, de cet essai mécanique aujourd'hui largement utilisé en mécanique des roches et des sols, ainsi que pour bien d'autres matériaux.

Je suis brésilien, j'ai de l'or,
Et j'arrive de Rio-Janeire
Plus riche aujourd'hui que naguère,
Paris, je te reviens encor– !
Rondeau du Brésilien, *La Vie Parisienne*, Jacques Offenbach.

La détermination expérimentale de la limite d'élasticité en traction simple des matériaux fragiles est particulièrement délicate. En effet, les essais de traction sur des éprouvettes en forme *d'os de chien*[1] conduisent à une rupture précoce dans les congés, en raison des concentrations de contraintes qui s'y développent. Ils ne donnent donc pas accès à la limite d'élasticité de traction simple qui correspondrait à une rupture dans le fût de l'éprouvette. L'essai brésilien, appelé aussi essai de traction indirect[2] est un essai de compression diamétrale sur un cylindre ou un disque d'épaisseur h. C'est un essai complexe dans le sens où les champs de contraintes et de déformations ne sont pas homogènes dans l'échantillon. Cependant, on va voir dans ce problème comment cet essai simple et astucieux, dont l'interprétation n'est pas sans difficulté, permet d'estimer la limite d'élasticité en traction d'un matériau fragile.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes qui règnent dans un cylindre ou un disque placé entre deux plateaux rigides parallèles soumis à deux forces résultantes opposées de norme F, comme sur la figure 1a. Le cylindre a une épaisseur h et un rayon R. Il est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope. L'idéalisation de cet essai conduit au problème aux limites de la figure 1b où le cylindre est soumis à deux forces opposées. Ces forces correspondent en fait à deux distributions linéiques de forces F/h appliquées sur deux génératrices diamétralement opposées du cylindre. La solution de ce problème idéalisé est proposée d'abord en utilisant de manière astucieuse la solution du problème de Flamant. Les contraintes obtenues permettent ensuite de prévoir la limite d'élasticité de la structure pour les matériaux fragiles. La dernière partie aborde les inconvénients de l'idéalisation de l'essai brésilien en considérant différents types de conditions aux limites plus réalistes.

Les efforts dus à la pesanteur et à toute autre force volumique sont négligés. L'analyse est limitée au cas statique et isotherme. Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope et initialement dans son état naturel. Toutes les surfaces du disque sont libres. Les efforts ne sont appliqués qu'aux points O_1 et O_2. Il est donc légitime de se placer dans le contexte des contraintes planes, i.e. $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$, où la direction 3 coïncide à l'axe du cylindre.

Les questions du problème peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s'il faut les aborder dans l'ordre proposé.

1. Champ de contrainte dans un disque en compression diamétrale

On considère le problème de la compression diamétrale de la figure 1b où les génératrices représentées par les points diamétralement opposés O_1 et O_2 sont soumises respectivement aux forces $-F\underline{\boldsymbol{e}}_2$ et $F\underline{\boldsymbol{e}}_2$, supposées uniformément réparties sur l'épaisseur h.

1. *Dogbone samples*, en anglais, expression imagée décrivant la forme d'une éprouvette élancée avec des têtes massives permettant le serrage sur une machine d'essai mécanique.
2. *Splitting tension test* ou *indirect tension test* en anglais.

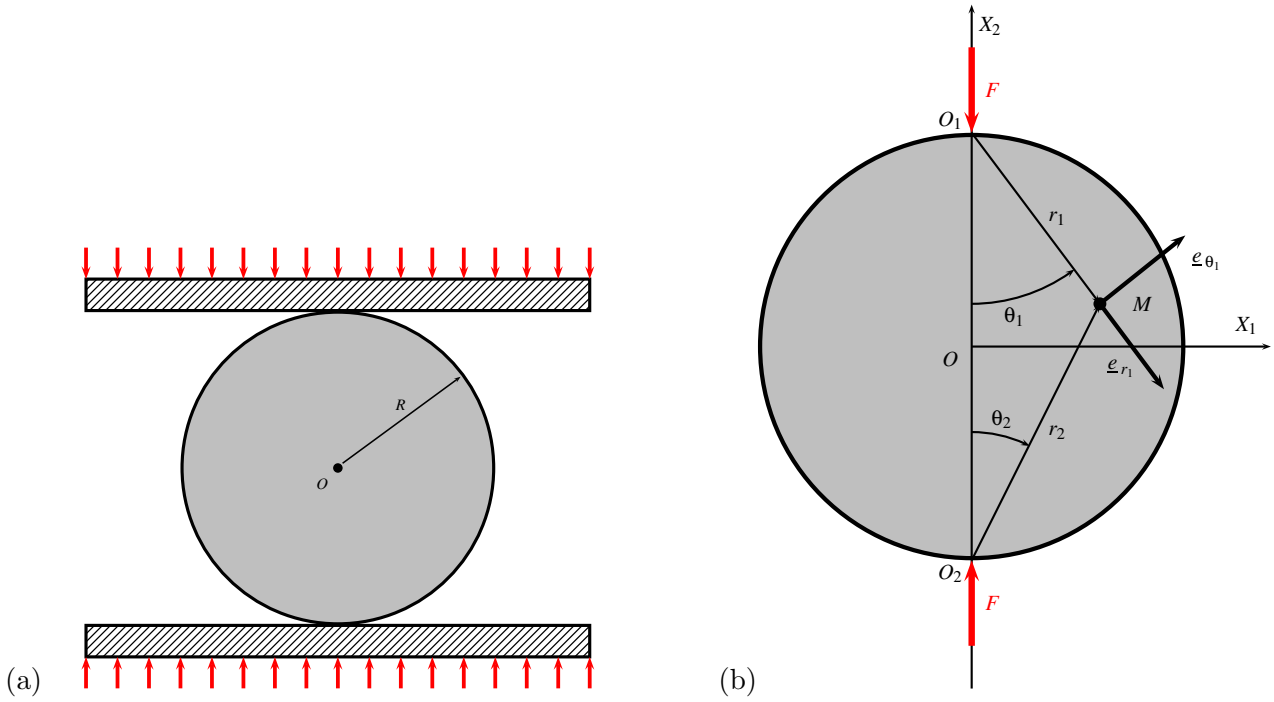


FIGURE 1: Compression diamétrale d'un disque de centre O et de rayon R : (a) schéma de la réalisation pratique de l'essai ; (b) idéalisation de l'essai brésilien, ainsi que le repérage d'un point du disque par les coordonnées polaires (r_1, θ_1) ou (r_2, θ_2).

Une manière élégante et efficace de résoudre le problème de compression diamétrale consiste à le décomposer en trois problèmes élémentaires présentés sur la figure 2, à savoir deux problèmes de Flamant et un problème de traction radiale qui reste à définir.

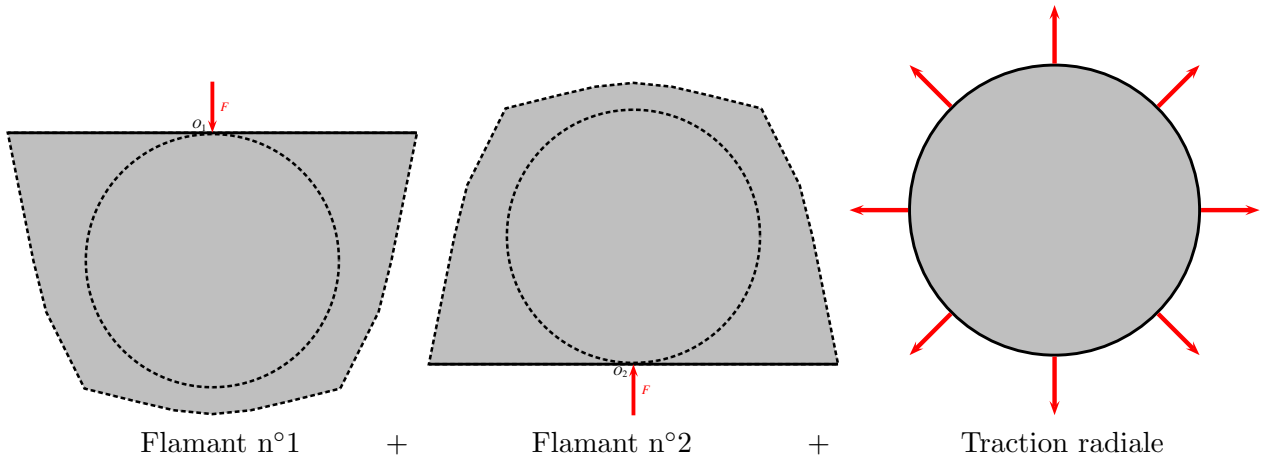


FIGURE 2: Décomposition du problème de compression diamétrale en la superposition de trois problèmes distincts.

1.1. Problème de Flamant n°1

On considère le problème de Flamant n°1 de la figure 2 où une force $-F\underline{\boldsymbol{e}}_2$ est appliquée uniformément sur la ligne parallèle à la direction 3 (perpendiculaire à la figure) passant par le point O_1 à la surface d'un massif occupant un demi–espace infini.

En utilisant le repérage polaire (r_1, θ_1) de la figure 1b, donner le champ de contrainte solution de ce problème tel qu'il a été obtenu en exercice dans le cours de MMC. Constater qu'il est purement radial. On ne demande pas d'établir ces formules mais simplement de les adapter aux notations utilisées ici.

Montrer ensuite que cette composante radiale de contrainte est constante le long du cercle de rayon R et tangent en O_1 à la surface du massif de rayon R. Ce cercle est représenté en pointillé sur le dessin de gauche de la figure 2. Exprimer cette valeur en fonction de F, h et R.

Calculer le vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}_1$ agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle précédent. L'exprimer en fonction de F, h, R et du vecteur $\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1}$.

1.2. Problème de Flamant n°2

Reprendre les trois questions du paragraphe 1.1 dans le cas du problème de Flamant n°2 de la figure 2. Ce problème consiste en une force linéique $F/h\underline{\boldsymbol{e}}_2$ agissant sur la ligne parallèle à l'axe 3 passant par O_2 sur le demi–espace $X_2 \geq -R$ d'après le repère de la figure 1. On utilisera le jeu de coordonnées polaires (r_2, θ_2). On notera $\underline{\boldsymbol{t}}_2$ le vecteur–contrainte agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle tangent au plan $X_2 = -R$ passant par O_2.

1.3. Traction radiale sur le cercle tangent

Montrer que la superposition des efforts surfaciques précédents $\underline{\boldsymbol{t}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{t}}_2$ sur un point quelconque du cercle de centre O et de rayon R de la figure 1 vaut :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{(1)} + \underline{\boldsymbol{t}}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{1}$$

où $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ est le vecteur normal sortant au cercle étudié.

On considère alors le troisième problème de la figure 2 (à droite), à savoir la traction radiale d'un disque de rayon R et de centre O soumis à la densité surfacique d'efforts donnée suivante :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{d} = \frac{F}{\pi h R}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{2}$$

Trouver un champ de contraintes statiquement admissible dans le disque pour la sollicitation (2). Montrer qu'il conduit à un champ de déformation compatible.

1.4. Résolution à l'aide du principe de superposition

Justifier que le champ de contraintes solution du problème de l'essai brésilien idéalisé de la figure 1b est la somme, sur le domaine occupé par le disque, des champs solutions des trois problèmes individuels de la figure 2.

1.5. Champ de contraintes pour l'essai brésilien

Montrer que les composantes non nulles des contraintes dans le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$ associé aux coordonnées X_1 et X_2 indiquées sur la figure 1b, sont

$$\sigma_{11} = -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)X_1^2}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)X_1^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R}\right) \tag{3}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)^3}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R}\right) \tag{4}$$

$$\sigma_{12} = \frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)^2 X_1}{r_1^4} - \frac{(R+X_2)^2 X_1}{r_2^4}\right) \tag{5}$$

avec $r_1^2 = X_1^2 + (R-X_2)^2$ et $r_2^2 = X_1^2 + (R+X_2)^2$.

1.6. Contraintes le long du diamètre comprimé $X_1 = 0$

Donner l'expression des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$.
Souligner deux caractéristiques remarquables de ces profils de contraintes.
Donner les expressions des contraintes au centre O. Commenter.
Justifier la dénomination d'"essai de traction indirect" parfois utilisée pour désigner l'essai brésilien.

1.7. Contraintes le long du diamètre $X_2 = 0$

Donner les contraintes le long de la ligne $X_2 = 0$.
Commenter ces profils en vous aidant de la figure 3 sur laquelle sont tracées ces contraintes ainsi que celles trouvées précédemment.

1.8. Observation des champs

On a représenté les champs de contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} sur les figures 3b, c et d, respectivement. A partir de ces champs, on a pu calculer la contrainte principale maximale et le cisaillement maximal en tout point, sur la figure 4. Montrer qu'avec la forme du tenseur des contraintes dont les seules composantes non nulles sont $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, le cisaillement maximal vaut :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{6}$$

Les observations de photoélasticimétrie de l'essai brésilien conduisent aux lignes isochromes de la figure 5. A la lumière des champs de contraintes calculés et représentés sur les figures 3 et 4, commenter ces résultats expérimentaux.

1.9. Application d'un critère de rupture

Proposer un critère de rupture fragile, par exemple adapté à la prévision de la rupture du béton pour lequel l'essai brésilien a d'ailleurs été développé à l'origine.
En supposant que la rupture ait lieu dans la zone centrale, hypothèse que l'on tentera de justifier, exprimer la force F_c à rupture en fonction des caractéristiques de l'essai et du matériau. Vous serez amené à introduire une nouvelle caractéristique importante du matériau, contenue dans le critère proposé.
Quelle est l'orientation de la fissure ? Dessiner l'échantillon rompu.

1.10. Application numérique

Calculer la force F à appliquer pour rompre un disque d'épaisseur 1 cm et de rayon 5 cm constitué d'un béton dont la limite d'élasticité coïncide avec la contrainte à rupture en traction et vaut 5 MPa.

2. Etude du champ des déformations

2.1. Méthode de calcul du champ des déformations et des déplacements

Indiquer comment calculer les déformations à partir des résultats précédents. On ne demande pas de le faire explicitement car c'est un peu long à écrire. On va se contenter de calculer les déformations diamétrales dans la question suivante.

Indiquer la méthode de construction du champ de déplacement à partir du champ des déformations ainsi obtenues. Il n'est pas demandé de le faire car ce n'est guère possible dans le temps imparti. Pensez-vous que cette démarche pourra aboutir ?

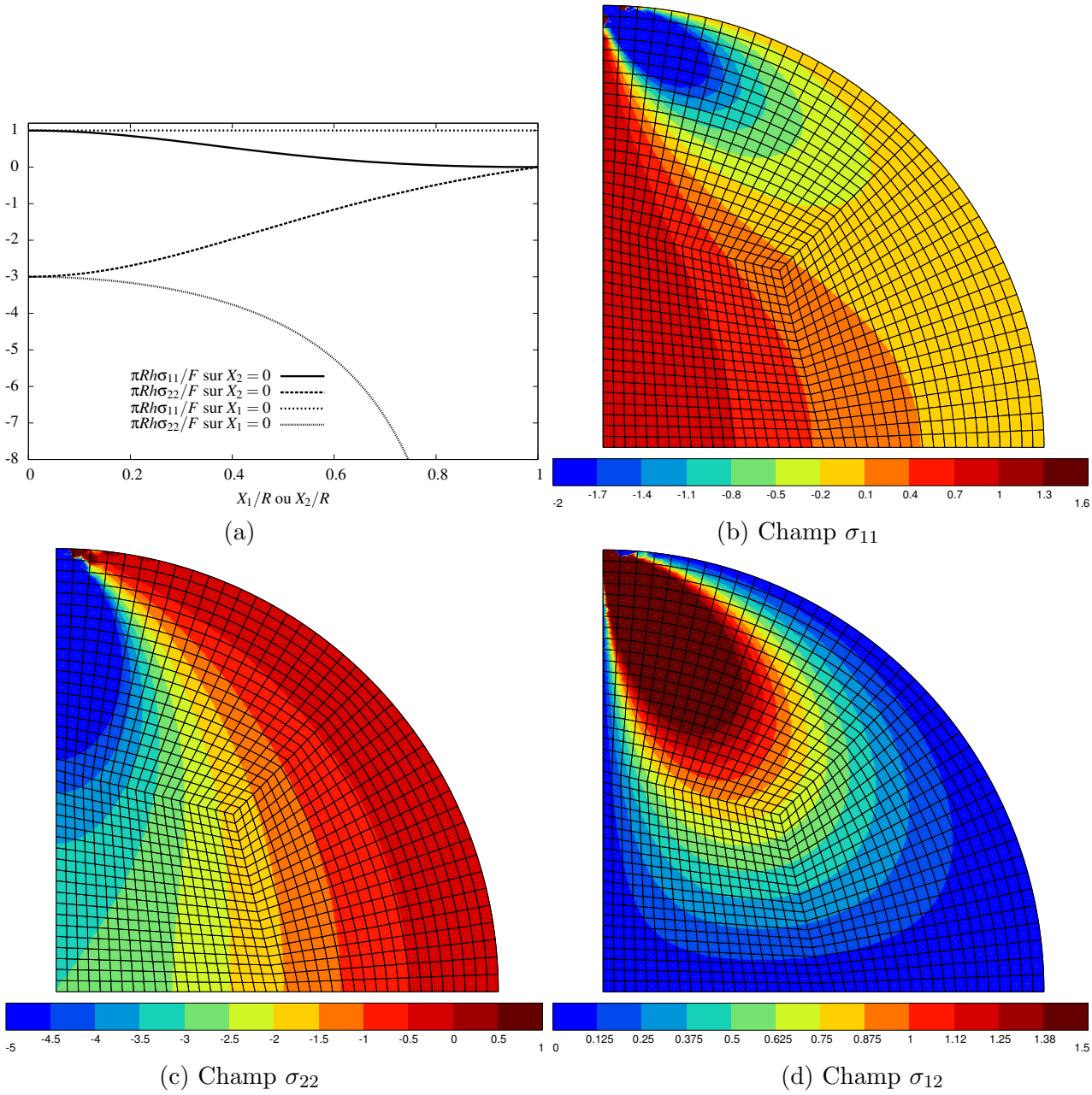


FIGURE 3: (a) Profils des contraintes normalisées le long des diamètres $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, cf. figure 1 pour le système de coordonnées. Les abscisses sont limitées à $X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$ pour des raisons de symétrie. Champs des contraintes (b) σ_{11}, (c) σ_{22} et (d) σ_{12}. Ces contraintes, calculées grâce à la méthode des éléments finis, sont normalisées par $F/\pi Rh$. Un quart du disque seulement est représenté pour des raisons de symétrie. Le coin correspond au centre O du disque. Les quelques artefacts visibles près du point O_1 sont dus aux effets de maillage à l'endroit de l'application de la force. Ils dépendent de la finesse du maillage dans cette zone.

2.2. Déformations diamétrales

Montrer que la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{22} = \frac{F}{\pi ERh}\left(1 - \nu - \frac{4R^2}{R^2 - X_2^2}\right) \tag{7}$$

Montrer que la déformation ε_{11} le long du diamètre $X_2 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{\pi ERh}\left(1 - \nu - \frac{4R^2(X_1^2 - \nu R^2)}{(R^2 + X_1^2)^2}\right) \tag{8}$$

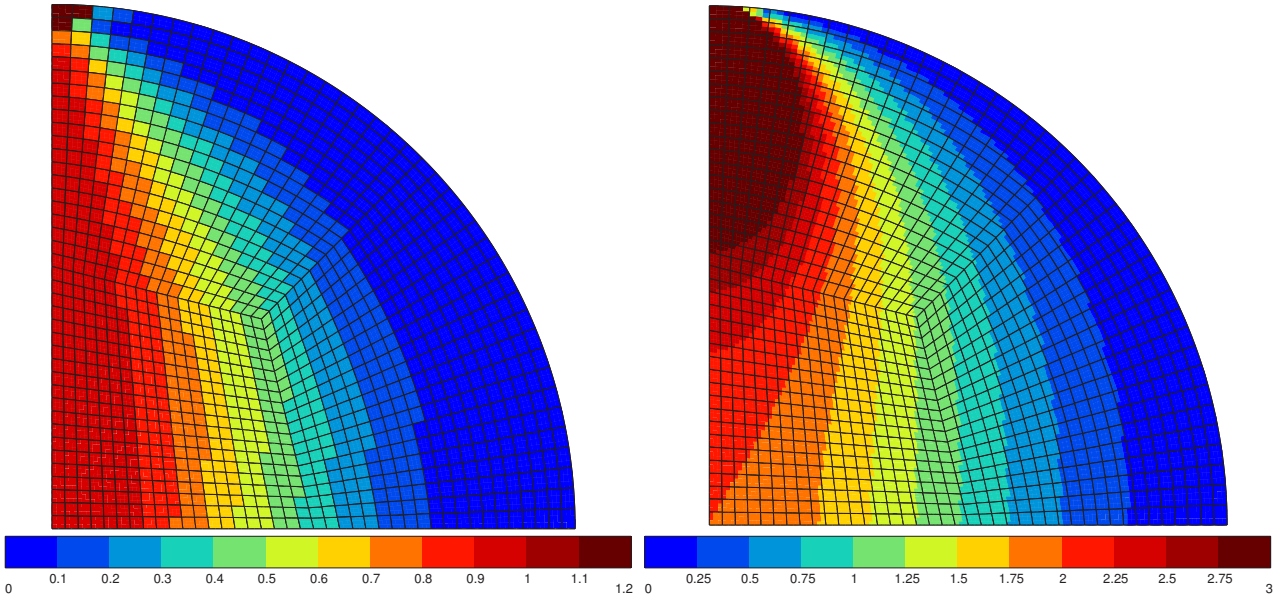


FIGURE 4: Champs de la contrainte principale maximale (à gauche) et du cisaillement maximal (à droite). Elles sont normalisées par la contrainte de référence $F/\pi Rh$.

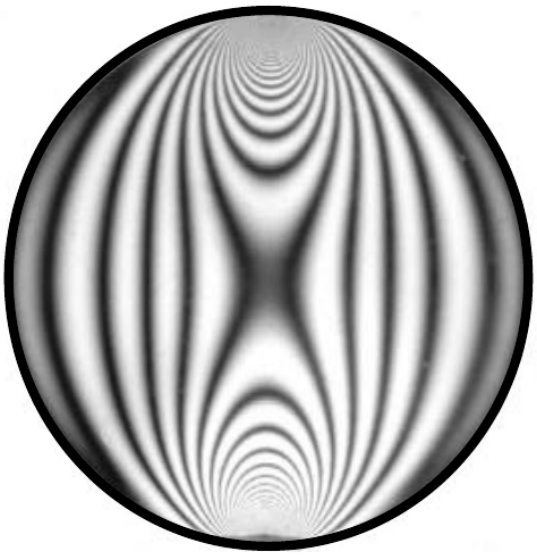


FIGURE 5: Lignes isochromes obtenues par photoélasticité de l'essai brésilien sur un polymère biréfringent soumis à l'essai de compression diamétrale.

Calculer la variation de longueur de ces deux diamètres. Vous allez rencontrer une difficulté dans un des cas. Commenter.

2.3. Identification des modules d'élasticité

Calculer les déformations ε_{11}^{O} et ε_{22}^{O} au centre O.
A partir des expressions des déformations au centre du disque, établir une condition nécessaire permettant de respecter le contexte infinitésimal.
Montrer que la mesure de ces déformations, avant rupture, permet de déterminer expérimentalement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Exprimer ces modules en fonction de la

charge F appliquée, des caractéristiques du disque et des déformations mesurées dans la zone centrale. Comment mesurer ces déformations expérimentalement ?

3. Considération de conditions aux limites plus réalistes

L'application d'une force concentrée en O_1 et en O_2 est une idéalisation de l'essai brésilien qui entraine certaines difficultés de comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Pour s'approcher de conditions plus réalistes, on propose de passer de l'application de forces concentrées à des forces distribuées sur une surface.

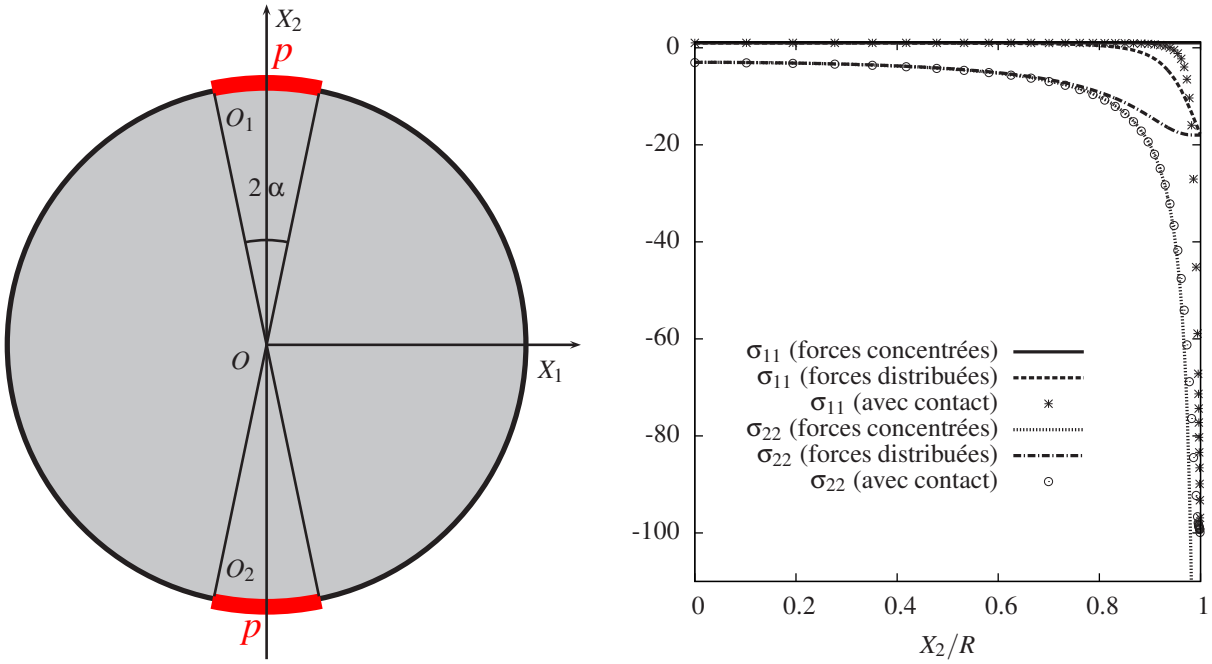


FIGURE 6: A gauche : disque soumis à une pression constante p sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés par un trait épais rouge. A droite : Comparaison des profils de contraintes normalisées le long du diamètre $X_1 = 0$ pour trois types de conditions aux limites permettant de s'approcher des conditions de plus en plus réalistes de l'essai brésilien : forces concentrées ou pression distribuée (solutions analytiques trouvées ou données dans le problème, avec $2\alpha = 10°$ pour la force distribuée) et prise en compte du contact disque/plateau (calcul par éléments finis).

3.1. Charge distribuée sur un arc d'angle α

On remplace la force ponctuelle considérée précédemment par une distribution de pression p constante imposée sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés sur la figure 6.

Quelle est la force F résultante associée à la pression p appliquée sur l'arc centré en O_1 ?

La résolution de ce problème peut se faire grâce à la superposition des solutions associées à des forces élémentaires connues d'après le travail précédent. On ne demande pas de le faire. On se contente de donner ici les expressions des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi R h \alpha}\left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2)\sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2\cos 2\alpha + X_2^4} - \arctan\left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2}\tan\alpha\right)\right) \quad (9)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F}{\pi R h \alpha}\left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2)\sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2\cos 2\alpha + X_2^4} + \arctan\left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2}\tan\alpha\right)\right) \quad (10)$$

Comparer ce champ à celui trouvé au paragraphe 1.6 en extrayant deux faits remarquables. On pourra s'aider de la figure 7.

Exprimer ces contraintes au centre O. Vérifier la cohérence avec les expressions trouvées au paragraphe 1.6.
Calculer la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$.
Etes–vous en mesure de calculer la réduction diamétrale ?

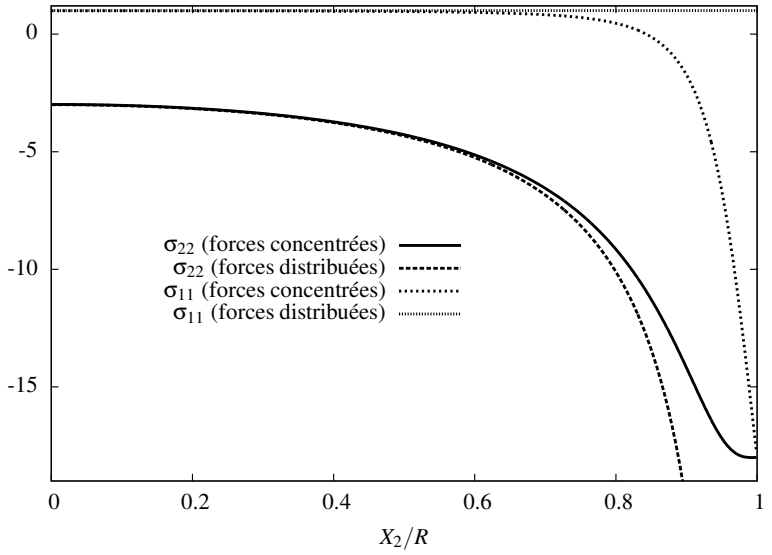


FIGURE 7: Profils des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$ obtenus en appliquant au disque des efforts concentrés F ou en distribuant ces efforts grâce à une pression p appliquée sur deux arcs d'angle au centre $2\alpha = 10°$. Les contraintes sont normalisées par $F/\pi Rh$.

3.2. Prise en compte du contact

L'application de la charge lors de l'essai brésilien résulte bien plutôt du contact entre une plaque rigide (comme sur la figure 1a). La surface de contact entre le corps rigide et l'échantillon est une inconnue du problème. Autrement dit, l'angle α de la question précédente n'est pas une donnée du problème réel. En outre, les efforts de contact diffèrent d'une pression uniforme. Pour déterminer toutes ces inconnues il faut recourir à la théorie de Hertz du contact, non présentée ici. Il est possible également de réaliser un calcul par éléments finis prenant en compte le contact entre la plaque et l'échantillon. La surface de contact est initialement nulle et augmente progressivement avec la charge appliquée. C'est un problème non linéaire en raison des conditions de contact. Le contact peut être supposé glissant ou non glissant en première approximation. Le frottement est une question importante supplémentaire qui doit également être prise en compte dans une analyse plus fine. Le frottement introduit des contraintes de cisaillement s'ajoutant au contraintes normales sur la surface de l'échantillon en contact avec la plaque.

Les contraintes σ_{11} et σ_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ sont données sur la figure 6b et comparées aux estimations précédentes. Elles ont été obtenues grâce à un calcul par éléments finis prenant en compte le contact d'une plaque sans frottement avec l'échantillon.
Commenter les différences entre les prévisions des différents modèles.

* * *

L'essai brésilien de compression diamétrale

à l'occasion des 75 ans de l'invention de cet essai mécanique aujourd'hui largement utilisé en mécanique des roches et des sols, ainsi que pour bien d'autres matériaux, cf. (Carneiro, 1943; Fairbairn and Ulm, 2002).

Je suis brésilien, j'ai de l'or,
Et j'arrive de Rio-Janeire
Plus riche aujourd'hui que naguère,
Paris, je te reviens encor– !
Rondeau du Brésilien, *La Vie Parisienne*, Jacques Offenbach.

La détermination expérimentale de la limite d'élasticité en traction simple des matériaux fragiles ou quasi–fragiles [1] est particulièrement délicate. En effet, les essais de traction sur des éprouvettes en forme *d'os de chien* [2] conduisent à une rupture précoce dans les congés, en raison des concentrations de contraintes qui s'y développent. Ils ne donnent donc pas accès à la limite d'élasticité de traction simple qui correspondrait à une rupture dans le fût de l'éprouvette. L'essai brésilien, appelé aussi essai de traction indirect [3] est un essai de compression diamétrale sur un cylindre ou un disque d'épaisseur h. C'est un essai complexe dans le sens où les champs de contraintes et de déformations ne sont pas homogènes dans l'échantillon. Cependant, on va voir dans ce problème comment cet essai simple et astucieux, dont l'interprétation n'est pas sans difficulté, permet d'estimer la limite d'élasticité en traction d'un matériau quasi–fragile.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes qui règnent dans un cylindre ou un disque placé entre deux plateaux rigides parallèles soumis à deux forces résultantes opposées de norme F, comme sur la figure 1a. Le cylindre a une épaisseur h et un rayon R. Il est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope. L'idéalisation de cet essai conduit au problème aux limites de la figure 1b où le cylindre est soumis à deux forces opposées. Ces forces correspondent en fait à deux distributions linéiques de forces F/h appliquées sur deux génératrices diamétralement opposées du cylindre. La solution de ce problème idéalisé est proposée d'abord en utilisant de manière astucieuse la solution du problème de Flamant. Les contraintes obtenues permettent ensuite de prévoir la limite d'élasticité de la structure pour les matériaux fragiles. La dernière partie aborde les inconvénients de l'idéalisation de l'essai brésilien en considérant différents types de conditions aux limites plus réalistes. On utilisera pour cela des résultats que l'on peut trouver dans les références Markides et al. (2010); Li and Wong (2013); Markides and Kourkoulis (2013).

Les efforts dus à la pesanteur et à toute autre force volumique sont négligés. L'analyse est

1. Les matériaux quasi–fragiles s'endommagent un peu avant de rompre brutalement. Les céramiques et les verres sont des matériaux fragiles. Le béton quant à lui présente un endommagement avant la rupture.

2. *Dogbone samples*, en anglais, expression imagée décrivant la forme d'une éprouvette élancée avec des têtes massives permettant le serrage sur une machine d'essai mécanique.

3. *Splitting tension test* ou *indirect tension test* en anglais.

limitée au cas statique et isotherme. Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope et dans son état naturel. Toutes les surfaces du disque sont libres. Les efforts ne sont appliqués qu'aux points O_1 et O_2. Il est donc légitime de se placer dans le contexte des contraintes planes, i.e. $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$.

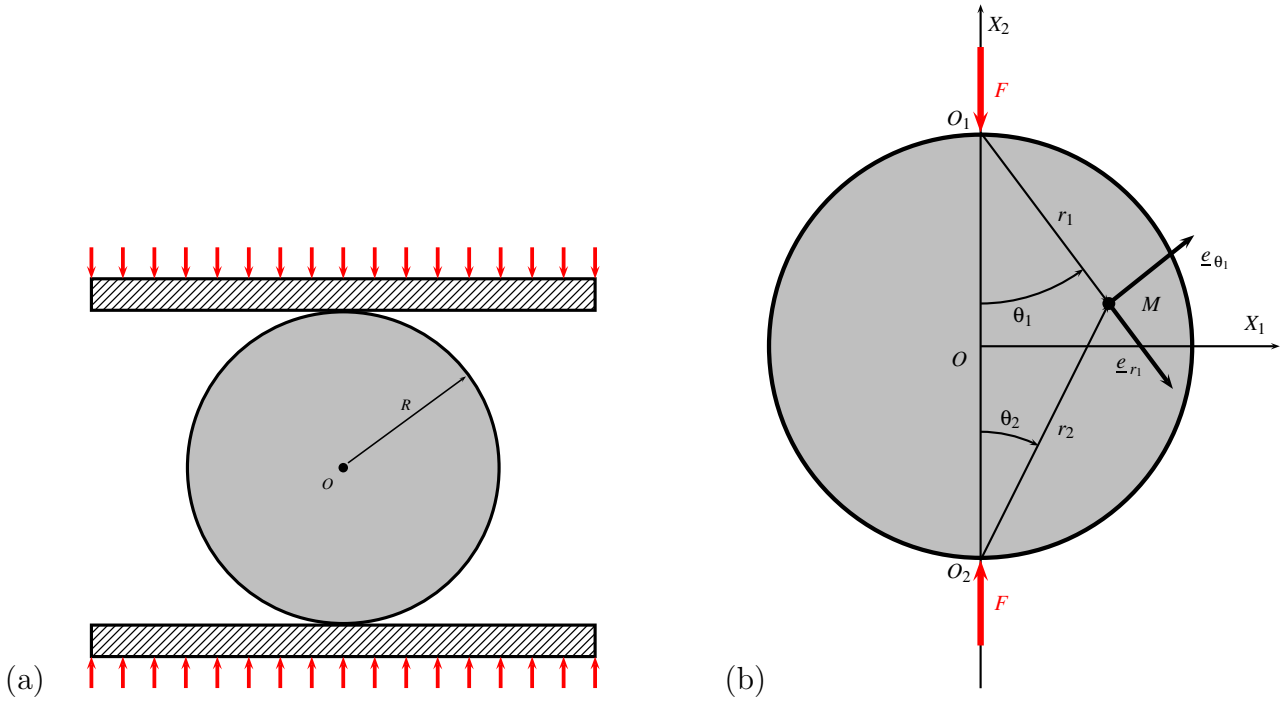


FIGURE 1: Compression diamétrale d'un disque de centre O et de rayon R : (a) schéma de la réalisation pratique de l'essai ; (b) idéalisation de l'essai brésilien, ainsi que le repérage d'un point du disque par les coordonnées polaires (r_1, θ_1) ou (r_2, θ_2).

Les questions du problème peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s'il faut les aborder dans l'ordre proposé.

1. Champ de contrainte dans un disque en compression diamétrale

On considère le problème de la compression diamétrale de la figure 1b où les génératrices représentées par les points diamétralement opposés O_1 et O_2 sont soumises respectivement aux forces $-F\underline{\boldsymbol{e}}_2$ et $F\underline{\boldsymbol{e}}_2$, supposées uniformément réparties sur l'épaisseur h.

Une manière élégante et efficace de résoudre le problème de compression diamétrale consiste à le décomposer en trois problèmes élémentaires présentés sur la figure 2, à savoir deux problèmes de Flamant et un problème de traction radiale qui reste à définir. Cette résolution à l'aide du principe de superposition est dû à Timoshenko and Goodier (1970). C'est la démarche présentée plus récemment dans Sadd (2005) qui est suivie ici.

1.1. Problème de Flamant n°1

On considère le problème de Flamant n°1 de la figure 2 où une force $-F\underline{\boldsymbol{e}}_2$ est appliquée uniformément sur la ligne parallèle à la direction 3 (perpendiculaire à la figure) passant par le point O_1 à la surface d'un massif occupant un demi–espace infini.

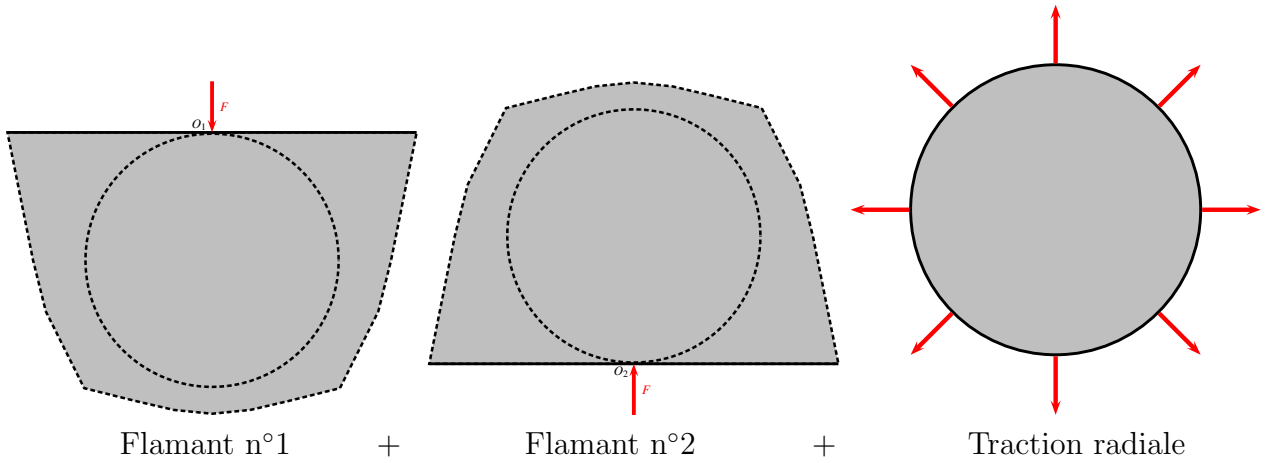


FIGURE 2: Décomposition du problème de compression diamétrale en la superposition de trois problèmes distincts.

En utilisant le repérage polaire (r_1, θ_1) de la figure 1b, donner le champ de contrainte solution de ce problème tel qu'il a été obtenu en exercice au chapitre **??**. Constater qu'il est purement radial. On ne demande pas d'établir ces formules mais simplement de les adapter aux notations utilisées ici.

Montrer ensuite que cette composante radiale de contrainte est constante le long du cercle de rayon R et tangent en O_1 à la surface du massif de rayon R. Ce cercle est représenté en pointillé sur le dessin de gauche de la figure 2. Exprimer cette valeur en fonction de F, h et R.

Calculer le vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}_1$ agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle précédent. L'exprimer en fonction de F, h, R et du vecteur $\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1}$.

D'après les résultats (**??**) et (**??**), le champ de contraintes est purement radial et de la forme :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = -\frac{2F}{\pi h}\frac{\cos\theta_1}{r_1}\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} \tag{1}$$

En considérant l'angle au centre du cercle en pointillé dont la valeur est $2\theta_1$, on établit que

$$r_1 = 2R\cos\theta_1$$

Par suite,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(r_1 = 2R\cos\theta_1) = -\frac{F}{\pi h R}\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{r_1}, \quad \sigma^{(1)}_{r_1 r_1} = -\frac{F}{\pi h R}$$

Il est remarquable que cette valeur soit identique tout le long du cercle de rayon R !
Le vecteur normal au cercle tangent en O_1 et de rayon R est

$$\underline{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta_1\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} + \sin\theta_1\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \tag{2}$$

Le vecteur–contrainte agissant sur la facette de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ vaut donc

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{(1)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}(r_1 = 2R\cos\theta_1)\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_r = -\frac{F}{\pi h R}\cos\theta_1\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} \tag{3}$$

1.2. Problème de Flamant n°2

Reprendre les trois questions du paragraphe 1.1 dans le cas du problème de Flamant n°2 de la figure 2. Ce problème consiste en une force linéique $F/h\underline{\boldsymbol{e}}_2$ agissant sur la génératrice du cylindre passant par O_2 sur le demi–espace $X_2 \geq -R$ d'après le repère de la figure 1. On utilisera le jeu de coordonnées polaires (r_2, θ_2). On notera $\underline{\boldsymbol{t}}_2$ le vecteur–contrainte agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle tangent au plan $X_2 = -R$ passant par O_2.

On calcule successivement :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} = -\frac{2F}{\pi h}\frac{\cos\theta_2}{r_2}\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(r_2 = 2R\cos\theta_2) = -\frac{F}{\pi hR}\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}, \quad \sigma^{(2)}_{r_2 r_2} = -\frac{F}{\pi hR}$$

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{(2)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}(r_2 = 2R\cos\theta_2)\cdot\underline{\boldsymbol{e}}_r = -\frac{F}{\pi hR}\cos\theta_2\,\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}$$

1.3. Traction radiale sur le cercle tangent

Montrer que la superposition des efforts surfaciques précédents $\underline{\boldsymbol{t}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{t}}_2$ sur un point quelconque du cercle de centre O et de rayon R de la figure 1 vaut :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{(1)} + \underline{\boldsymbol{t}}^{(2)} = -\frac{F}{\pi hR}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{4}$$

où $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ est le vecteur normal sortant au cercle étudié.

On considère alors le troisième problème de la figure 2 (à droite), à savoir la traction radiale d'un disque de rayon R et de centre O soumis à la densité surfacique d'efforts donnée suivante :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{d} = \frac{F}{\pi hR}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{5}$$

Trouver un champ de contraintes statiquement admissible dans le disque pour la sollicitation (5). Montrer qu'il conduit à un champ de déformation compatible.

On a les relations suivantes entre les systèmes de coordonnées (r_1, θ_1) et (r_2, θ_2) pour un point appartenant à la frontière du cercle de rayon R et de centre O (voir figure 1b) :

$$\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2} = \underline{\boldsymbol{e}}_{\theta_1}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

de sorte que

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{(1)} + \underline{\boldsymbol{t}}^{(2)} = -\frac{F}{\pi hR}(\cos\theta_1\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} + \cos\theta_2\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}) = -\frac{F}{\pi hR}(\cos\theta_1\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} + \sin\theta_1\underline{\boldsymbol{e}}_{\theta_1}) = -\frac{F}{\pi hR}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r$$

en utilisant (2).

Le troisième problème aux limites de la figure 2 consiste à appliquer le vecteur–contrainte donné opposé au vecteur qui vient d'être calculé. La sollicitation au bord étant homogène, la solution homogène

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)} = \frac{F}{\pi hR}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta) = \frac{F}{\pi hR}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2) \tag{6}$$

remplit les conditions d'équilibre en volume (la divergence d'un champ homogène est nulle) et les conditions au bord (5). Il s'agit d'un état de traction équi-biaxiale. Le champ de déformation calculé à partir de la loi de Hooke est nécessairement compatible puisqu'il est homogène. Le champ de contraintes (6) est donc la solution du problème n°3.

1.4. Résolution à l'aide du principe de superposition

Justifier que le champ de contraintes solution du problème de l'essai brésilien idéalisé de la figure 1b est la somme, sur le domaine occupé par le disque, des champs solutions des trois problèmes individuels de la figure 2.

Les 3 champs solutions des problèmes de la figure 2 sont à divergence nulle. Leur somme vérifie donc les équations de champs d'équilibre statique en l'absence d'efforts volumiques. En tout point du bord du disque ($r = R$) autre que les points O_1 et O_2, le vecteur–contrainte est la somme des vecteurs–contraintes appliqués dans les trois problèmes :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^{(1)} + \underline{\boldsymbol{t}}^{(2)} + \underline{\boldsymbol{t}}^{d} = 0$$

de sorte que les bords du disque sont libres d'effort, condition requise par l'essai brésilien. Le vecteur–contrainte présente un singularité en O_1 et O_2 où sa valeur est indéterminée. La connaissance du problème de Flamant nous informe que les champs de contraintes de Flamant conduisent aux résultantes $-F\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $F\underline{\boldsymbol{e}}_1$. La mécanique des milieux continus à la Cauchy ne permet pas de relier le vecteur–contrainte à un effort ponctuel. On a vu que cette force ponctuelle doit s'interpréter comme la limite d'une distribution surfacique de la forme donnée au paragraphe **??**.

1.5. Champ de contraintes pour l'essai brésilien

Montrer que les composantes non nulles des contraintes dans le repère cartésien orthonormé $(O, \underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$ associé aux coordonnées X_1 et X_2 indiquées sur la figure 1b, sont

$$\sigma_{11} = -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)X_1^2}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)X_1^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R}\right) \tag{7}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)^3}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R}\right) \tag{8}$$

$$\sigma_{12} = \frac{2F}{\pi h}\left(\frac{(R-X_2)^2X_1}{r_1^4} - \frac{(R+X_2)^2X_1}{r_2^4}\right) \tag{9}$$

avec $r_1^2 = X_1^2 + (R-X_2)^2$ et $r_2^2 = X_1^2 + (R+X_2)^2$.

Le champ des contraintes est la somme des contributions des trois problèmes de la figure 2 :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)} \\ &= -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{\cos\theta_1}{r_1}\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} + \frac{\cos\theta_2}{r_2}\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_{r_2}\right) + \frac{F}{\pi R h}(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta) \end{aligned} \tag{10}$$

Pour le passage aux coordonnées cartésiennes, on utilise les relations

$$X_1 = r_1\sin\theta_1 = -r_2\sin\theta_2, \quad X_2 = R - r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 - R$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_{r_1} = \sin\theta_1\underline{\boldsymbol{e}}_1 - \cos\theta_1\underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_{r_2} = -\sin\theta_2\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\theta_2\underline{\boldsymbol{e}}_2$$

1.6. Contraintes le long du diamètre comprimé $X_1 = 0$

Donner l'expression des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$.
Souligner deux caractéristiques remarquables de ces profils de contraintes.
Donner les expressions des contraintes au centre O. Commenter.
Justifier la dénomination d'"essai de traction indirect" parfois utilisée pour désigner l'essai brésilien.

Les contraintes le long de l'axe diamétral comprimé valent

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h}\left(\frac{1}{R - X_2} + \frac{1}{R + X_2} - \frac{1}{2R}\right), \quad \sigma_{12} = 0 \tag{11}$$

Le diamètre est donc soumis à une contrainte de traction selon 1 de valeur constante. La contrainte selon 2 est quant à elle de compression et variable le long du diamètre. Elle présente une singularité en O_1 et O_2. Au centre du disque, l'état de contrainte est biaxial :

$$\boxed{\sigma_{11}^O = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_{22}^O = -\frac{3F}{\pi R h} = -3\sigma_{11}^O} \tag{12}$$

Les contraintes principales par ordre décroissant sont donc, au centre du disque :

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi R h}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{3F}{\pi R h}$$

La plus grande contrainte principale est de traction tandis que la plus petite est de compression mais trois fois plus grande en amplitude.

1.7. Contraintes le long du diamètre $X_2 = 0$

Donner les contraintes le long de la ligne $X_2 = 0$.
Commenter ces profils en vous aidant de la figure 3 sur laquelle sont tracées ces contraintes ainsi que celles trouvées précédemment.

On trouve sur cette ligne :

$$\sigma_{11}(X_1, 0) = \frac{F}{\pi R h}\left(\frac{R^2 - X_1^2}{R^2 + X_1^2}\right)^2, \quad \sigma_{22}(X_1, 0) = -\frac{F}{\pi R h}\left(\frac{4R^4}{r_1^4} - 1\right) \tag{13}$$

La contrainte σ_{22} reste de compression jusqu'au bord $X_1 = R, X_2 = 0$. La contrainte σ_{11} est toujours de traction mais décroissante du centre vers le bord le long de cette ligne.

1.8. Observation des champs

On a représenté les champs de contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} sur les figures 3b, c et d, respectivement. A partir de ces champs, on a pu calculer la contrainte principale maximale et le cisaillement maximal en tout point, sur la figure 4. Montrer qu'avec la forme du tenseur des contraintes dont les seules composantes non nulles sont $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, le cisaillement maximal vaut :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{14}$$

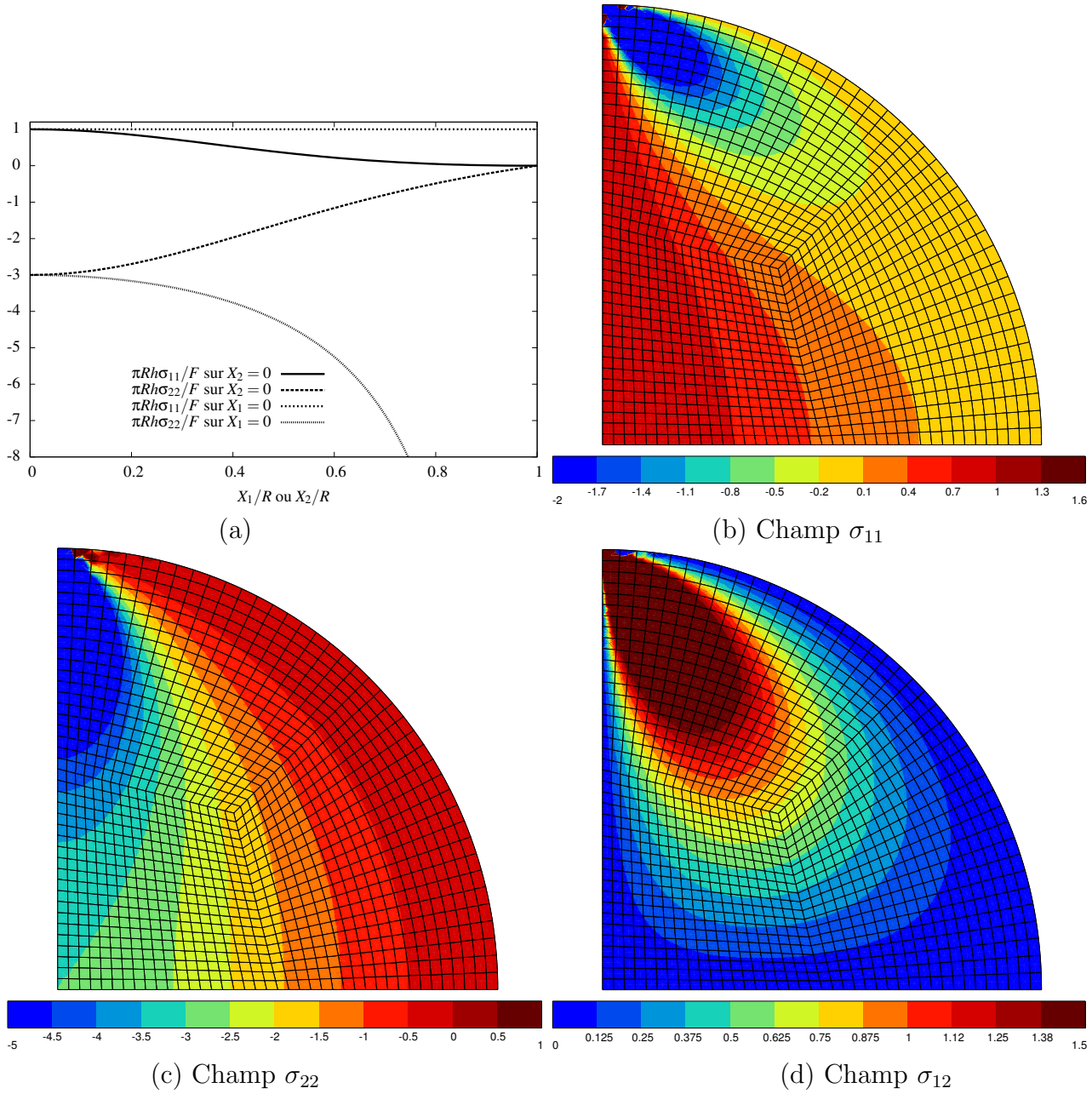


FIGURE 3: (a) Profils des contraintes normalisées le long des diamètres $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, cf. figure 1 pour le système de coordonnées. Les abscisses sont limitées à $X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$ pour des raisons de symétrie. Champs des contraintes (b) σ_{11}, (c) σ_{22} et (d) σ_{12}. Ces contraintes, calculées grâce à la méthode des éléments finis, sont normalisées par $F/\pi Rh$. Un quart du disque seulement est représenté pour des raisons de symétrie. Le coin correspond au centre O du disque. Les quelques artefacts visibles près du point O_1 sont dus aux effets de maillage à l'endroit de l'application de la force. Ils dépendent de la finesse du maillage dans cette zone.

Les observations de photoélasticimétrie de l'essai brésilien conduisent aux lignes isochromes de la figure 5. A la lumière des champs de contraintes calculés et représentés sur les figures 3 et 4, commenter ces résultats expérimentaux.

Les contraintes σ_{11} et σ_{22} sont les contraintes principales non nulles le long des diamètres $X_1 = 0$

et $X_2 = 0$. Il y en a une positive et une négative. La troisième est nulle. Les champs tracés révèlent que cette répartition des valeurs propres s'étend à l'ensemble du disque. La trace et le déterminant de la sous-matrice fournissent :

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_1\sigma_3 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

Avec ces relations, on établit alors en quelques lignes que

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$$

Le cisaillement maximal n'est autre que $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ce qui conduit à la relation recherchée (14). Les interférences de photoélasticimétrie sont directement liées à la différence des valeurs propres dans le plan et donc au champ de cisaillement maximal. C'est pourquoi les courbes obtenues ont des formes similaires aux lignes de niveau du cisaillement maximal de la figure 4.

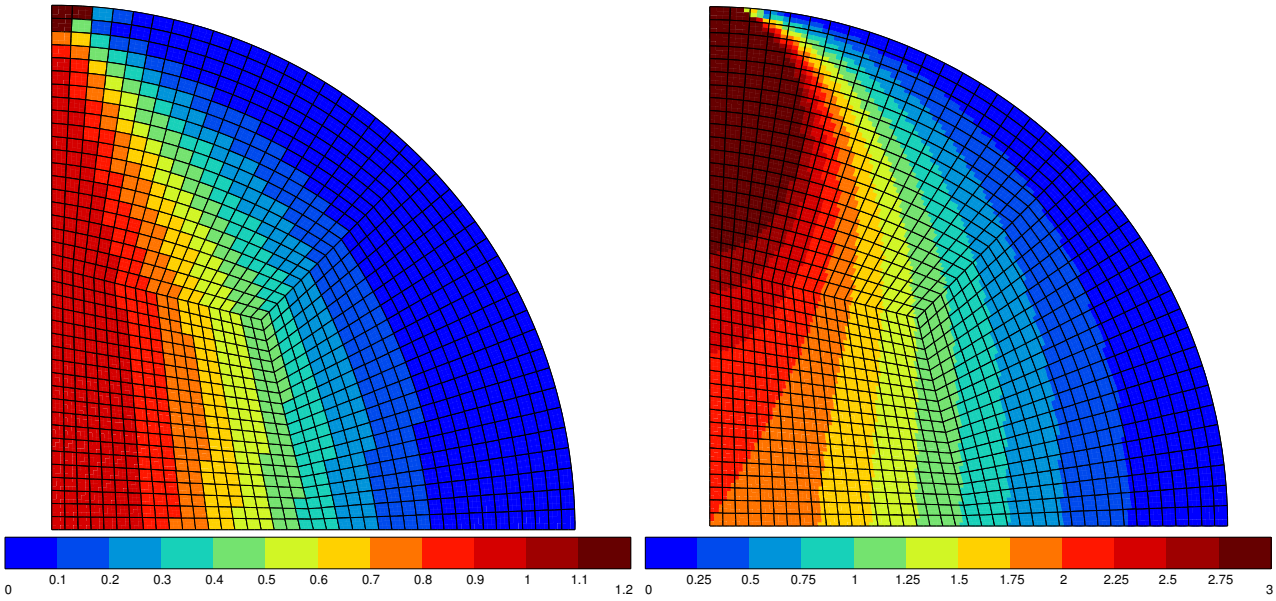


FIGURE 4: Champs de la contrainte principale maximale (à gauche) et du cisaillement maximal (à droite). Elles sont normalisées par la contrainte de référence $F/\pi Rh$.

1.9. Application d'un critère de rupture

Proposer un critère de rupture fragile, par exemple adapté à la prévision de la rupture du béton pour lequel l'essai brésilien a d'ailleurs été développé à l'origine.
En supposant que la rupture ait lieu dans la zone centrale, hypothèse que l'on tentera de justifier, exprimer la force F_c à rupture en fonction des caractéristiques de l'essai et du matériau. Vous serez amené à introduire une nouvelle caractéristique importante du matériau, contenue dans le critère proposé.
Quelle est l'orientation de la fissure ? Dessiner l'échantillon rompu.

Les matériaux fragiles se rompent typiquement lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique positive, σ_c. Cette caractéristique importante du matériau est la

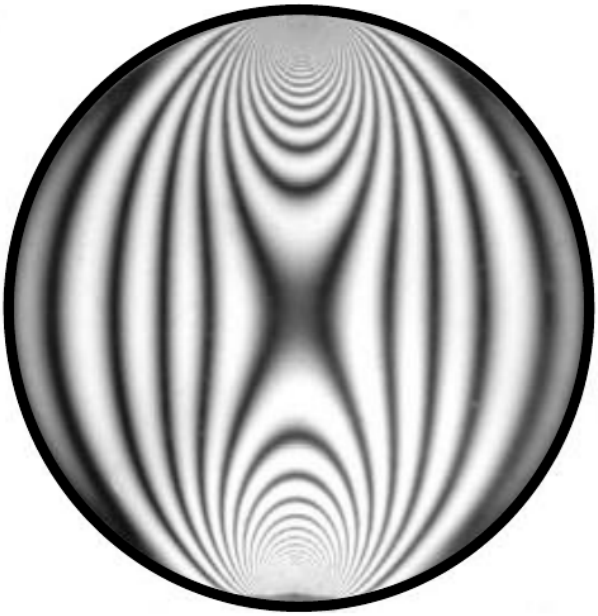


FIGURE 5: Lignes isochromes obtenues par photoélasticité de l'essai brésilien sur un polymère biréfringent soumis à l'essai de compression diamétrale (d'après Sadd (2005)).

contrainte à rupture en traction simple. Le champ de contrainte principale σ_1 est donné sur la figure 4. Si l'on excepte les zones des pôles O_1 et O_2, sièges d'une singularité des contraintes en $1/r$ et donc où ces valeurs n'ont pas de réel sens physique, la contrainte principale est maximale et positive tout le long du diamètre $X_1 = 0$. Cette contrainte de traction, si elle atteint la valeur critique σ_c, va provoquer la rupture. Dans cette zone diamétrale, la contrainte principale est proche de la contrainte σ_{11} de la figure 3b. Nous avons observé que σ_{11} est constante tout au long de ce diamètre. C'est cette contrainte qui va engendrer une fissure perpendiculaire à la direction principale X_1. L'échantillon est rompu en deux morceaux selon ce diamètre comme sur la figure 6. La valeur critique de la force est obtenue lorsque

$$\sigma_{11} = \frac{F_c}{\pi R h} = \sigma_c \quad \Longrightarrow \quad F_c = \pi \sigma_c R h$$

1.10. Application numérique

Calculer la force F à appliquer pour rompre un disque d'épaisseur 1 cm et de rayon 5 cm constitué d'un béton dont la contrainte à rupture en traction est de 3 MPa.

$F_c = 4712$ N

2. Etude du champ des déformations

2.1. Méthode de calcul du champ des déformations et des déplacements

Indiquer comment calculer les déformations à partir des résultats précédents. On ne demande pas de le faire explicitement car c'est un peu long à écrire. On va se contenter de calculer les déformations diamétrales dans la question suivante.

Indiquer la méthode de construction du champ de déplacement à partir du champ des déformations ainsi obtenues. Il n'est pas demandé de le faire car ce n'est guère possible dans le temps imparti. Pensez-vous que cette démarche pourra aboutir ?

La loi de Hooke nous permet de passer des contraintes calculées précédemment et données par les expressions (7) à (9).
L'existence du champ des déplacements dépend de la compatibilité des déformations ainsi obtenues. Il faut vérifier si les équations de compatibilité, données en coordonnées cartésiennes, sont satisfaites. Dans le cas favorable, la méthode de construction du champ de déplacement en passant par le calcul des rotations infinitésimales est possible dans le cas des coordonnées cartésiennes. Cela dit, les déformations sont également la superposition des déformations associées aux trois problèmes de la figure 2. Il est clair que le problème numéro 3 d'expansion biaxiale conduit indubitablement à un champ de déformation compatible. Le cas du problème de Flamant a été traité au paragraphe **??**. Il y est montré que les déplacements dans le plan peuvent être calculés mais qu'aucun champ u_3 satisfaisant ne peut être déduit. Cela remet en question l'absence de dépendance des champs de contraintes envisagés par rapport à X_3. On sait que la situation des contraintes planes ne permet pas, en général, d'aboutir à une solution tridimensionnelle acceptable, mais qu'elle fournit, dans certaines conditions, une estimation fructueuse, cf. les discussions des paragraphes **??** et **??**, voir également le chapitre **??**. C'est le cas ici et on va continuer à étudier la solution, approchée, déterminée précédemment.

2.2. Déformations diamétrales

Montrer que la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{22} = \frac{F}{\pi E R h}\left(1 - \nu - \frac{4R^2}{R^2 - X_2^2}\right) \tag{15}$$

Montrer que la déformation ε_{11} le long du diamètre $X_2 = 0$ vaut

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{\pi E R h}\left(1 - \nu - \frac{4R^2(X_1^2 - \nu R^2)}{(R^2 + X_1^2)^2}\right) \tag{16}$$

Calculer la variation de longueur de ces deux diamètres. Vous allez rencontrer une difficulté dans un des cas. Commenter.

La déformation le long du diamètre vertical $X_1 = 0$ se calcule à partir des contraintes (13) :

$$\varepsilon_{22}(X_1) = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})$$

La déformation le long du diamètre horizontal $X_2 = 0$ se calcule à partir des contraintes (13) :

$$\varepsilon_{11}(X_1) = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})$$

Pour trouver l'expression (16), on utilise le fait que

$$(R^2 - X_1^2)^2 = (R^2 + X_1^2)^2 - 4R^2X_1^2$$

La variation de longueur entre deux points du diamètre vertical avec $X_2 = \pm a/R$ est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_2(0,a) - u_2(0,-a) &= \int_{-a}^{a} u_{2,2} dX_2 = \int_{-a}^{a} \varepsilon_{22}\, dX_2 \\ &= \frac{F}{\pi E R h}\left((1-\nu)2a - 2R\int_{-a/R}^{a/R} \frac{1}{1-u}\, du\right) \\ &= \frac{F}{\pi E R h}\left((1-\nu)2a + 4R\log\frac{1-a/R}{1+a/R}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Cette expression n'a pas de limite quand $a \to R$. Cela est dû à la singularité des champs aux points O_1 et O_2. Le modèle ne permet pas de prévoir la réduction diamétrale correspondante.
La variation de longueur entre deux points du diamètre horizontal avec $X_1 = \pm a/R$ est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_1(a,0) - u_1(-a,0) &= \int_{-a}^{a} u_{1,1} dX_2 = \int_{-a}^{a} \varepsilon_{11}\, dX_1 \\ &= \frac{F}{\pi E R h}\left((1-\nu)2a - 4R\int_{-a/R}^{a/R} \frac{u^2-\nu}{(1+u)^2}\, du\right) \\ &= \frac{F}{\pi E R h}\left(2(1-\nu)(a - 2R\arctan\frac{a}{R}) + 4R^2(1+\nu)\frac{a}{R^2+a^2}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

En prenant $a = R$, on obtient la variation relative du diamètre horizontal :

$$\frac{u_1(R,0) - u_1(-R,0)}{2R} = \frac{\nu F}{\pi E R h}$$

On voit qu'il s'agit d'une augmentation du diamètre dès que $\nu > 0$.

2.3. Identification des modules d'élasticité

Calculer les déformations ε_{11}^O et ε_{22}^O au centre O.
A partir des expressions des déformations au centre du disque, établir une condition nécessaire permettant de respecter le contexte infinitésimal.
Montrer que la mesure de ces déformations, avant rupture, permet de déterminer expérimentalement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Exprimer ces modules en fonction de la charge F appliquée, des caractéristiques du disque et des déformations mesurées dans la zone centrale.
Comment mesurer ces déformations expérimentalement ?

Les déformations au centre se déduisent des contraintes (12)

$$\boxed{\varepsilon_{11}^O = \frac{(1+3\nu)F}{\pi E R h}, \quad \varepsilon_{22}^O = -\frac{(3+\nu)F}{\pi E R h} = -\frac{3+\nu}{1+3\nu}\varepsilon_{11}^O} \tag{19}$$

Elles peuvent être mesurées de manière classique grâce à des jauges de déformations collées à cet endroit. Aujourd'hui on a également recours à la méthode appelée DIC (*Digital Image*

Correlation) en filmant, au cours de l'essai, la surface de l'échantillon marquée par une réseau de lignes, de points, une peinture de motifs aléatoires noirs et blancs ou le contraste naturel, comme dans Han et al. (2018) [4]. Cette méthode a l'avantage de fournir non seulement une valeur locale mais également le champ bidimensionnel complet des déplacements.
Ces déformations doivent rester suffisamment petites ce qui exige que la force appliquée soit telle que

$$\frac{F}{ERh} \ll 1$$

On peut inverser les relations précédentes pour exprimer les modules d'élasticité en fonction des caractéristiques de l'expérience et des déformations mesurées :

$$E = -\frac{8F}{\pi Rh(\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22})}, \quad \nu = -\frac{3\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22}}$$

ce qui autorise une identification de ces paramètres intrinsèques du matériau à partir des mesures.

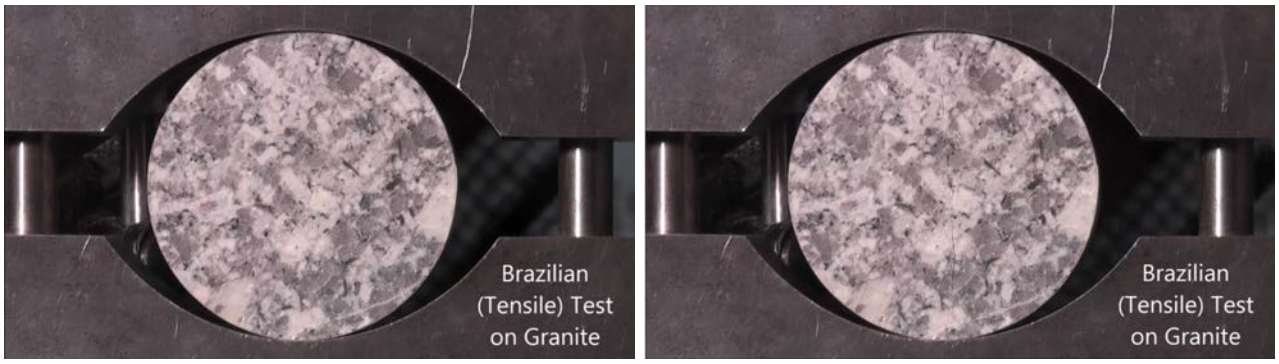


FIGURE 6: Réalisation de l'essai brésilien sur une carotte de granite : état initial (à gauche) et rompu (à droite). La fissure à droite est très fine et visible en zoomant. Le film de l'essai est consultable sur YouTube : https://www.youtube.com/watch?v=IsoN2dzJn6w.

3. Considération de conditions aux limites plus réalistes

L'application d'une force concentrée en O_1 et en O_2 est une idéalisation de l'essai brésilien qui entraine certaines difficultés de comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Pour s'approcher de conditions plus réalistes, on propose de passer de l'application de forces concentrées à des forces distribuées sur une surface.

3.1. Charge distribuée sur un arc d'angle α

On remplace la force ponctuelle considérée précédemment par une distribution de pression p constante imposée sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés sur la figure 7.

4. Noter que les expressions données par Han et al. (2018) sont fausses pour le cisaillement. Voir également le document en ligne :
http ://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr.sti/files/ressources/pedagogiques/5746/5746-application-de-la-correlation-dimages-identification-de-parametres-elastiques-ens-v2.pdf

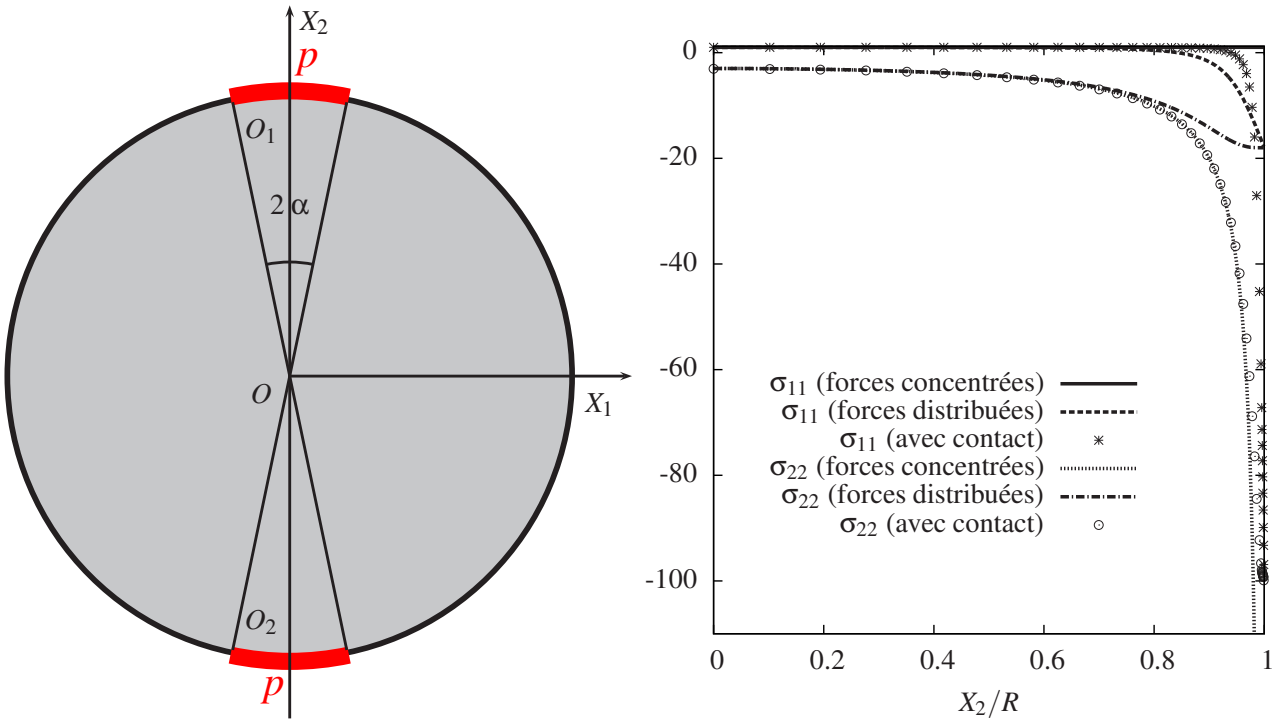


FIGURE 7: A gauche : disque soumis à une pression constante p sur les arcs de cercle d'angle 2α représentés par un trait épais rouge. A droite : Comparaison des profils de contraintes normalisées le long du diamètre $X_1 = 0$ pour trois types de conditions aux limites permettant de s'approcher des conditions de plus en plus réalistes de l'essai brésilien : forces concentrées ou pression distribuée (solutions analytiques trouvées dans le problème) et prise en compte du contact disque/plateau (calcul par éléments finis).

Quelle est la force F résultante associée à la pression p appliquée sur l'arc centré en O_1 ?

La résolution de ce problème peut se faire grâce à la superposition des solutions associées à des forces élémentaires connues d'après le travail précédent. On ne demande pas de le faire. On se contente de donner ici les expressions des contraintes [5] le long du diamètre $X_1 = 0$:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi R h \alpha}\left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2)\sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2\cos 2\alpha + X_2^4} - \arctan\left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2}\tan\alpha\right)\right) \quad (20)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F}{\pi R h \alpha}\left(\frac{R^2(R^2 - X_2^2)\sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2\cos 2\alpha + X_2^4} + \arctan\left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2}\tan\alpha\right)\right) \quad (21)$$

Comparer ce champ à celui trouvé au paragraphe 1.6 en extrayant deux faits remarquables. On pourra s'aider de la figure 8.
Exprimer ces contraintes au centre O.
Vérifier la cohérence avec les expressions trouvées au paragraphe 1.6.
Calculer la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$.
Etes–vous en mesure de calculer la réduction diamétrale ?

La pression appliquée p correspond à la force $F = 2phR\sin\alpha$.
Par rapport au champ de contrainte trouvé précédemment, on remarque que la contrainte σ_{11}

5. Elles sont issues de la référence Li and Wong (2013).

n'est pas constante. C'est une contrainte de traction sauf près des zones où la pression est appliquée. Il est remarquable que la contrainte σ_{22} n'est pas singulière en $X_2 = \pm R$. En effet, les expressions précédentes possèdent une limite finie lorsque $X_2 \to R$:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{F}{2Rh\alpha}$$

Elles tendent vers l'infini lorsque $\alpha \to 0$ et qu'on se rapproche de l'application d'une force concentrée. Les contraintes au centre valent :

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi Rh}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - 1\right), \quad \sigma_{22} = -\frac{F}{\pi Rh}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} + 1\right)$$

Elles tendent vers les valeurs (12) lorsque $\alpha \to 0$, comme il se doit.
La déformation $\varepsilon_{22} = (1-\nu)\sigma_{22}/E - \nu\sigma_{11}/E$ se calcule à partir des contraintes précédentes :

$$\varepsilon_{22} = -\frac{F}{\pi ERh\alpha}\left((1+\nu)\frac{R^2(R^2 - X_2^2)\sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2\cos 2\alpha + X_2^4} + (1-\nu)\arctan\left(\frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2}\tan\alpha\right)\right) \quad (22)$$

La contraction diamétrale se calcule en intégrant la déformation ε_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$:

$$-\frac{\pi Rh\alpha}{F}(u_2(O_2) - u_2(O_1)) = \int_{-1}^{1}(1+\nu)\frac{(1-u^2)\sin 2\alpha}{1 - 2u^2\cos 2\alpha + u^4} + (1-\nu)\arctan\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\tan\alpha\right) du$$

Ces deux intégrales ont le mérite d'être convergentes de sorte qu'il est loisible de calculer une contraction diamétrale finie en fonction de la force appliquée. C'est un progrès par rapport à la solution du problème avec des forces concentrées qui conduit à une divergence du déplacement relatif, cf. paragraphe 2.2.

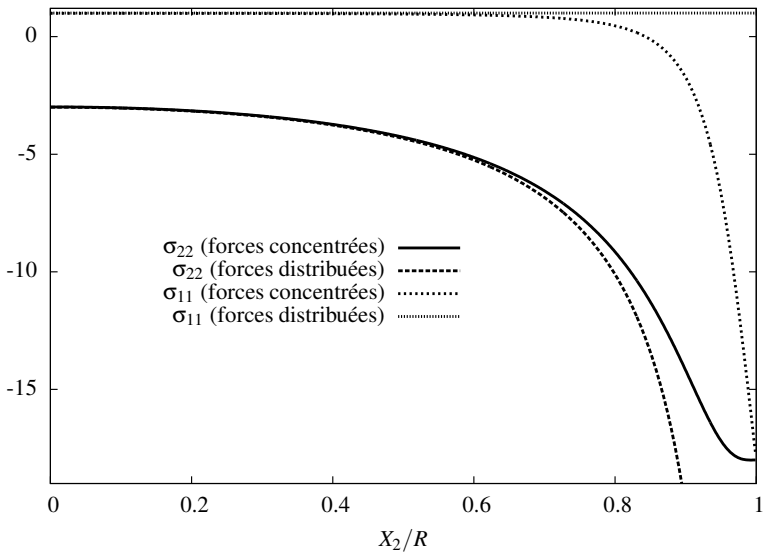


FIGURE 8: Profils des contraintes le long du diamètre $X_1 = 0$ obtenus en appliquant au disque des efforts concentrés F ou en distribuant ces efforts grâce à une pression p appliquée sur deux arcs d'angle au centre $2\alpha = 10°$. Les contraintes sont normalisées par $F/\pi Rh$.

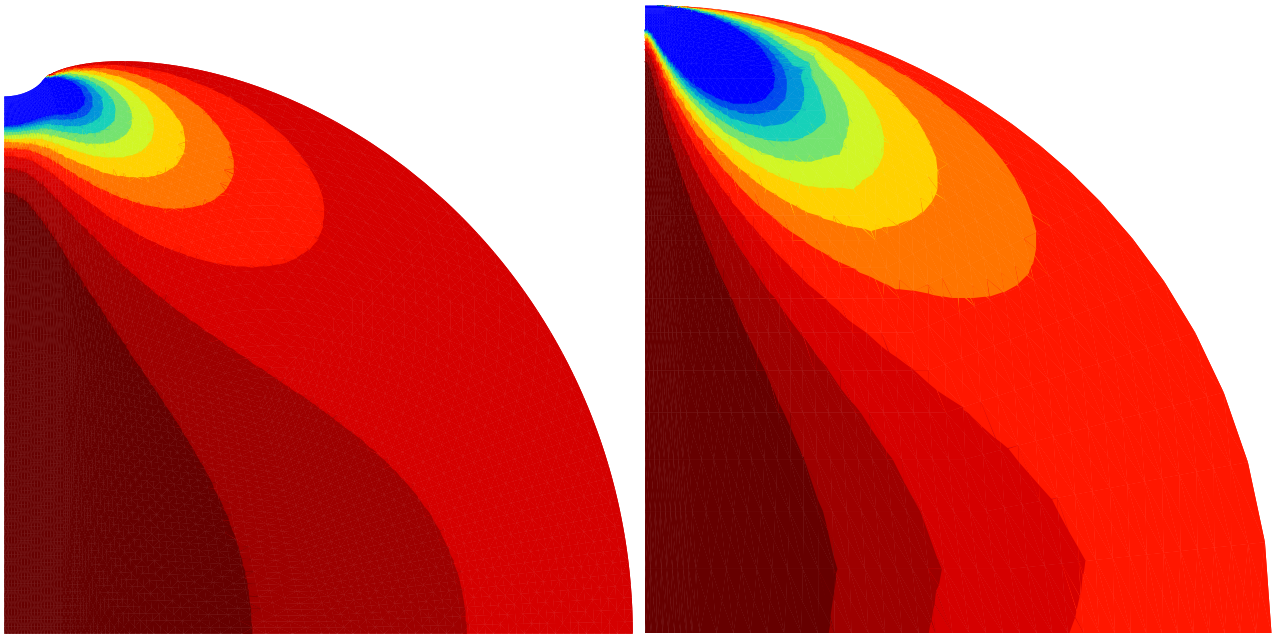


FIGURE 9: Comparaison qualitative des distributions de la contrainte σ_{11} obtenue par éléments finis pour deux types de conditions aux limites : pression imposée sur un secteur de 10° (à gauche) et contact avec une plaque rigide (à droite). Sur la figure de gauche, la déformée du disque a été amplifiée d'un facteur 2000 pour montrer que la surface d'application de la pression n'est pas plane, contrairement au cas de la prise en compte du contact.

3.2. Prise en compte du contact

L'application de la charge lors de l'essai brésilien résulte bien plutôt du contact entre une plaque rigide, plane (comme sur la figure 1a) ou courbe comme sur l'expérience de la figure 6. La surface de contact entre le corps rigide et l'échantillon est une inconnue du problème. Autrement dit, l'angle α de la question précédente n'est pas une donnée du problème réel. En outre, les efforts de contact diffèrent d'une pression uniforme. Pour déterminer toutes ces inconnues il faut recourir à la théorie de Hertz du contact, non présentée ici. Il est possible également de réaliser un calcul par éléments finis prenant en compte le contact entre la plaque et l'échantillon. La surface de contact est initialement nulle et augmente progressivement avec la charge appliquée. C'est un problème non linéaire en raison des conditions de contact. Le contact peut être supposé glissant ou non glissant en première approximation. Le frottement est une question importante supplémentaire qui doit également être prise en compte pour une analyse plus fine Markides and Kourkoulis (2013). Le frottement introduit des contraintes de cisaillement s'ajoutant au contraintes normales sur la surface de l'échantillon en contact avec la plaque.

Les contraintes σ_{11} et σ_{22} le long du diamètre $X_1 = 0$ sont données sur la figure 7b et comparées aux estimations précédentes. Elles ont été obtenues grâce à un calcul par éléments finis prenant en compte le contact d'une plaque (plane) sans frottement avec l'échantillon. Commenter les différences entre les prévisions des différents modèles.

Les solutions analytiques des deux problèmes traités représentent une bonne description du champ par solution par pression constante appliquée (cf. Markides and Kourkoulis (2013)), à condition que la rupture ne s'amorce pas dans la zone de contact. Une rupture à partir de la zone de contact peut se produire lorsque le frottement est non négligeable. La prise en compte du

contact conduit à des contraintes de compression plus fortes dans la zone de contact ($X_2 = R$) par rapport à la solution en pression appliquée. Les champs de contrainte σ_{11} dans le disque dans le cas d'une pression appliquée et dans le cas du contact sont représentées sur la figure 9. Ils sont qualitativement assez proches, les différences quantitatives étant marquées dans la zone d'application des efforts.

Références

Carneiro, F.L.L.B., 1943. A new method to determine the tensile strength of concrete, in : Proceedings of the 5th Meeting of the Brazilian Association for Technical Rules, 3d. Section, 16 Sept 1943, (in Portuguese).

Fairbairn, E.M.R., Ulm, F.J., 2002. A tribute to Fernando L. L. B. Carneiro (1913–2001) engineer and scientist who invented the Brazilian test. Materials and Structures 35, 195–196. doi :10.1007/BF02533589.

Han, Y., Lai, B., Liu, H.H., Li, H., 2018. Measurement of elastic properties in Brazilian disc test : solution derivation and numerical verification. Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources 4, 63–77. doi :10.1007/s40948-017-0075-1.

Li, D., Wong, L.N.Y., 2013. The Brazilian disc test for rock mechanics applications : Review and new insights. Rock Mechanics and Rock Engineering 46, 269–287. doi :10.1007/s00603-012-0257-7.

Markides, C.F., Kourkoulis, S.K., 2013. Naturally accepted boundary conditions for the Brazilian disc test and the corresponding stress field. Rock Mechanics and Rock Engineering 46, 959–980. doi :10.1007/s00603-012-0351-x.

Markides, C.F., Pazis, D.N., Kourkoulis, S.K., 2010. Closed full-field solutions for stresses and displacements in the Brazilian disk under distributed radial load. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 47, 227 – 237. doi :https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2009.11.006.

Sadd, M.H., 2005. Elasticity. Elsevier Academic Press.

Timoshenko, S., Goodier, J., 1970. Theory of elasticity. McGraw–Hill International Editions.

ENSMP

MATHÉMATIQUES 2 (1132)
Lundi 25 mars 2019

TEST DE MATHÉMATIQUES

1 heure, sans document ni calculette

Veuillez indiquer ici vos :

NOM : _____

PRÉNOM : _____

N^o DE GROUPE : _____

(groupe 1 : B. FIGLIUZZI ; groupe 2 : T. ROMARY ; groupe 3 : S. PIETRASZ ;
groupe 4 : P. MARTIN ; groupe 5 : S. NICULESCU.

L'énoncé est en **page 2**. Indiquez vos **réponses** sur les **deux pages suivantes**.

QUESTION DE COURS.
Énoncer le **théorème de convergence monotone de Beppo Levi**.

EXERCICE 1.
Soit $h : [0,1] \to [0,+\infty[$ une application borélienne telle que $0 < \int_0^1 h(x)\,dx < +\infty$, et soit $\alpha \in]0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = n \cdot \ln\left(1 + (\frac{h(x)}{n})^\alpha\right)$$

et

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie.
2. On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 h(x)dx$.
3. On suppose que $\alpha \in]1,+\infty[$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. (Indication : on pourra montrer que $1 + t^\alpha \leq (1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.)

4.* On suppose que $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

EXERCICE 2.
Soit $F : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x^2} e^{-x^2}\,dx, \quad \forall t \in [0,+\infty[.$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée. Montrer que

$$F'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\,F(t) \quad \forall t \in]0,+\infty[.$$

3. En déduire l'expression de $F(t)$ pour $t \in [0,+\infty[$.

CORRIGÉ DU TEST INTERMÉDIAIRE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1. 1. La fonction f_n est borélienne, comme composée de la fonction borélienne h et de la fonction continue (donc borélienne) $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto n\ln(1+(t/n)^\alpha) \in \mathbb{R}_+$. Puisque f_n est à valeurs positives, l'intégrale I_n est bien définie, avec $I_n \in [0,+\infty]$.
2. On suppose $\alpha = 1$, de sorte que $f_n(x) = n\ln(1+\frac{h(x)}{n})$. Clairement, $f_n(x) = 0$ si $h(x) = 0$. Puisque $\ln(1+y) \sim y$ lorsque $y \to 0$, on a que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs, on a $\ln(1+y) \leq y$ pour tout $y \in]-1,+\infty[$, par concavité de la fonction ln. Il s'en suit que

$$0 \leq f_n(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Par le théorème de convergence dominée, utilisant le fait que $h \in \mathscr{L}^1([0,1])$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 h(x)\,dx$.
3. On suppose que $\alpha \in]1,+\infty[$. Soit $g(t) = (1+t)^\alpha - (1+t^\alpha)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $g'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} \geq 0$ pour tout $t > 0$, g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$, donc $g(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, $1+t \leq e^t$ donne $(1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$. On a donc bien montré que

$$1+t^\alpha \leq (1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On en déduit que $0 \leq f_n(x) \leq n\ln(\exp(\alpha h(x)/n)) = \alpha h(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs, $f_n(x) = 0$ si $h(x) = 0$ et $f_n(x) \sim n^{1-\alpha}h(x)^\alpha$ si $h(x) \neq 0$, de sorte que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. On suppose que $\alpha \in]0,1[$. Si $h(x) = 0$, $f_n(x) = 0$, tandis que $f_n(x) \sim n^{1-\alpha}h(x)^\alpha$ si $h(x) > 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n = +\infty \mathbb{1}_{\{h>0\}}$. Il résulte du lemme de Fatou que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \geq \int_0^1 \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = +\infty \int_0^1 \mathbb{1}_{\{h>0\}}dx = +\infty \cdot \lambda(\{h>0\}),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Mais la fonction h étant positive et $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx > 0$, on a $\lambda(\{h>0\}) > 0$. Ainsi $\liminf_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

EXERCICE 2. On note $f(x,t) = e^{-t/x^2}e^{-x^2}$.
1. On constate que (i) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue donc borélienne sur $]0,+\infty[$; (ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; (iii) pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq f(x,t) \leq e^{-x^2}$, et la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Il résulte du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Il est clair que la fonction f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x^2}e^{-t/x^2}e^{-x^2} \quad \forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

Pour obtenir une fonction dominante intégrable, on se limite à $t \in]a,+\infty[$, où $a > 0$ est un nombre arbitraire. Alors (i) pour tout $t \in]a,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (question 1.) ; (ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]a,+\infty[$ de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x^2}e^{-t/x^2}e^{-x^2}$; (iii) pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times]a,+\infty[$, on a

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| = \frac{1}{x^2}e^{-t/x^2}e^{-x^2} \leq \frac{e^{-a/x^2}}{x^2}e^{-x^2} \leq \frac{M}{a}e^{-x^2}$$

où $M = \sup_{s>0} se^{-s} < +\infty$. Il résulte du théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que F est bien dérivable sur $]a,+\infty[$ de dérivée

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x^2}e^{-x^2}}{x^2}\,dx. \tag{1}$$

Le nombre $a > 0$ étant arbitraire, la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $F'(t)$ donné par (1) pour tout $t \in]0,+\infty[$. Faisant le changement de variables $y = \sqrt{t}/x$, d'où $dy = -(\sqrt{t}/x^2)dx$, on obtient

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{+\infty}^{0} e^{-y^2}e^{-t/y^2}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{t}}F(t), \quad t > 0.$$

Notons que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. La fonction F vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle linéaire $y' = -t^{-1/2}y$, qui s'intégre en $y(t) = Ce^{-2\sqrt{t}}$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$, la constante C n'est autre que $F(0) = \sqrt{\pi}/2$. Ainsi

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{t}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Automatique. Dynamique et contrôle des systèmes
Examen. Durée 2h30
Tous documents autorisés.

MINES ParisTech *23 avril 2019*

Les 3 exercices sont indépendants. Le barème comporte 50 points.

Exercice 1 Contrôle de puits de pétrole instables [14 points]

La dynamique d'un puits de pétrole instable peut être décrite par le modèle suivant

$$\dot{p} = w \tag{1}$$

$$\dot{w} = -a_1 p + (h_0 w - h_1 w^3) + (g_0 - g_1 w)\Delta + a_1 b_0 \tag{2}$$

$$\dot{\Delta} = \frac{u(t) - \Delta}{\tau} \tag{3}$$

où p est la pression en fond de puits, w sa dérivée temporelle, et Δ est lié à la perte de charge au niveau de la vanne de contrôle, située en haut du puits. La commande est $u(t)$. L'équation (3) représente le temps nécessaire aux ondes de pression pour se propager de la tête de puits vers le fond. Les paramètres a_1, h_0, h_1, g_0, g_1, b_0 dépendent des propriétés des fluides présents dans le puits **et sont tous strictement positifs**.

Etude en boucle ouverte

On suppose dans toute cette partie que la commande est fixe, i.e.

$$u(t) = \bar{u} > 0 \tag{4}$$

1. Etablir que pour chaque valeur $\bar{u}$ de la commande, il existe alors un unique point d'équilibre $(\bar{p}, \bar{w}, \bar{\Delta})$ que l'on explicitera.
2. Linéariser le système autour du point d'équilibre et discuter sa stabilité en fonction des valeurs de $\bar{u}$.
3. On suppose $\tau \ll 1$. Simplifier le modèle par perturbations singulières. On n'étudie plus, **dans toute la suite de l'exercice**, que le modèle réduit.
4. En considérant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = \gamma(p - \bar{p})^2 + (w - \bar{w})^2, \tag{5}$$

où γ est un paramètre à déterminer, discuter la stabilité *globale* du point d'équilibre.

Commande

5. Linéariser le système réduit autour du point d'équilibre $(\bar{p}, \bar{w})$.
6. Etudier la commandabilité du système linéarisé. Proposer un bouclage stabilisant.
7. On suppose qu'on mesure la pression en fond de puits p. Le système linéarisé est-il observable ? Proposer un observateur permettant de reconstituer tout l'état à partir de la mesure.
8. Comment choisir *a priori* les valeurs propres de l'observateur et du contrôleur ?
9. Plus rigoureusement, la propagation des ondes de pression correspond à un retard pur dans la chaîne de commande. L'équation (3) devrait être remplacée par

$$\Delta(t) = u(t - \tau) \tag{6}$$

Comment déterminer (on ne fera pas le calcul) si le système bouclé est toujours asymptotiquement stable ?

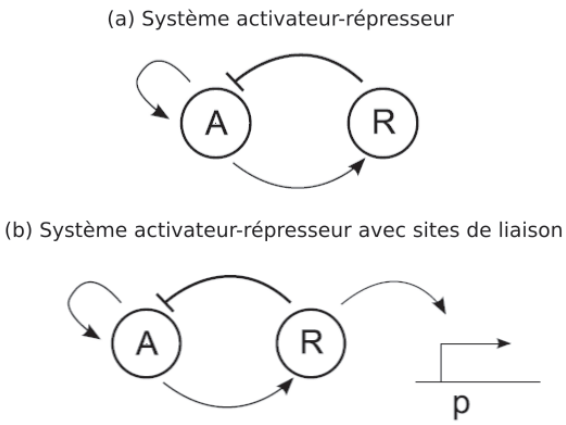


FIGURE 1 – Vue schématique du système activateur-répresseur considéré dans ce sujet.

10. On considère à nouveau le système non-linéaire (1)–(3). La variable p est en fait une sortie de Brunovsky nonlinéaire, appelée *sortie plate*. Montrer qu'il existe une nouvelle commande v et un changement de variables inversible ϕ tels que

$$(p, \dot{p}, \ddot{p}) = \phi(p, w, \Delta) \tag{7}$$
$$v = \psi(u, p, w, \Delta) \tag{8}$$

et tels que

$$p^{(3)} = v(t) \tag{9}$$

Donner alors une stratégie de contrôle non-linéaire.

Exercice 2 Analyse d'une horloge biologique [24 points]

La synthèse et l'analyse de systèmes oscillants ou périodiques est une thématique essentielle en biologie. Ces systèmes régissent en effet un grand nombre de processus naturels, tels que les cycles cellulaires. Par ailleurs, en biologie synthétique, de tels motifs peuvent être utilisés comme horloge, pour synchroniser différents modules. Dans ce contexte, ces cycles limites sont donc bénéfiques et on cherche à en exhiber.

Dans ce sujet, on considère un de ces systèmes, l'horloge activateur/répresseur. Cet oscillateur est composé de deux protéïnes, l'une activatrice A qui promeut sa propre expression et une protéïne répressive R. Cette dernière, quant à elle, réprime l'expression de la protéïne activatrice. Ce système est illustré en Figure 1(a). On s'intéresse dans ce sujet à l'analyse de ce système, pour déterminer dans quelles conditions il suit un comportement périodique, c.à.d un cycle limite.

Les deux parties ci-dessous sont largement indépendantes.

Motif activateur-répresseur isolé [12 points] En notant x_1 la concentration de protéïne A et x_2 celle de R (on supposera $x_1, x_2 \geq 0$ dans ce qui suit), les équations dynamiques du système sont données par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\nu\delta_1 x_1 + \nu g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1) \end{cases} \tag{10}$$

où ν, δ_1, δ_2 sont des constantes strictement positives et g_1, g_2 des fonctions de Hill

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad g_2(x_1) = \frac{2x_1^2 + 1}{1 + x_1^2} \tag{11}$$

1. Enoncer des conditions suffisantes pour que ce système admette un cycle limite. (On ne cherchera pas à expliciter ces contraintes en fonction des paramètres du système, ce sera l'objet des questions suivantes.)

Dans les questions qui suivent, on cherche à satisfaire ces conditions.

2. On considère la fonction Lyapunov $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ où l'on note $x = (x_1, x_2)$.
   (a) Montrer que g_1 et g_2 sont bornées.
   (b) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} < 0$ pour $\|x\| > M$.
   (c) En déduire qu'il existe un ensemble compact Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que toute trajectoire ayant sa condition initiale dans Ω reste dans Ω.
3. On étudie dans un premier temps l'existence d'un point d'équilibre.
   (a) Soit x^* un point d'équilibre éventuel du système. Formuler les équations de ce point d'équilibre sous la forme

$$x_2^* = h_1(x_1^*) = h_2(x_1^*) \tag{12}$$

   où l'on précisera l'expression des fonctions h_1 et h_2.
   (b) Montrer que l'équation $h_1(x_1^*) = h_2(x_1^*)$ admet toujours au moins une solution.

   On admet la propriété suivante (qui est obtenue par une étude des variations de h_1 et h_2) :

   Il existe deux intervalles $\Delta_1 \subset \mathbb{R}_+$ et $\Delta_2 \subset \mathbb{R}_+$ tels que

$$\delta_1 \in \Delta_1\,,\ \delta_2 \in \Delta_2 \Rightarrow x^* \textit{ défini par } (12) \textit{ est unique et } h_2'(x_1^*) > h_1'(x_1^*) > 0 \tag{13}$$

4. On étudie maintenant la stabilité de cet équilibre. Pour ce faire, on note $f_1(x_1, x_2) = \nu\left(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, x_2)\right)$ et $f_2(x_1, x_2) = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1)$.
   (a) Montrer qu'une condition suffisante pour que x^* soit instable est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) > 0 & (14) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) > 0 & (15) \end{cases}$$

   (b) Montrer que $h_1'(x_1^*) = -\frac{\partial f_1/\partial x_1(x^*)}{\partial f_1/\partial x_2(x^*)}$ et $h_2'(x_1^*) = -\frac{\partial f_2/\partial x_1(x^*)}{\partial f_2/\partial x_2(x^*)}$.
   (c) Calculer explicitement $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ et montrer que ces deux termes sont strictement négatifs (on rappelle que $x_1, x_2 \geq 0$). En déduire que (15) est satisfaite si $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta 2$, où Δ_1 et Δ_2 sont définis dans (13).
   (d) Montrer que (14) est satisfaite sous une certaine contrainte sur ν en fonction de δ_1, δ_2 et de $\partial g_1/\partial x_1(x^*)$.
5. Conclure en formulant des conditions suffisantes sur les paramètres ν, δ_1, δ_2 sous lesquelles ce système est oscillant.

Ajout de sites de liaison pour le répresseur [12 points] On s'intéresse maintenant à l'effet sur la dynamique du systèmes de sites de liaison p avec affinité sur la protéïne répresseur R. L'intéraction entre ces deux éléments est modélisée par la réaction suivante

$$R + p \underset{k}{\overset{k}{\leftrightarrows}} C \tag{16}$$

dans lequel C représente le complexe formé par R et p et $k > 0$ est la constante de dissociation et d'association. On note x_3 la concentration du complexe C et l'on suppose que la concentration totale de

sites de liaison $p_T = [p] + x_3 > 0$ est constante. Sous cette hypothèse, la nouvelle dynamique du système est alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu\left(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, x_2)\right) \\ \dot{x}_2 = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1) + k x_3 - k x_2 (p_T - x_3) \\ \dot{x}_3 = -k x_3 + k x_2 (p_T - x_3) \end{cases} \tag{17}$$

où les fonctions g_1, g_2 sont les mêmes que précédemment et données en (11). On suppose enfin que $k >> \delta_1, \delta_2$.

6. En définissant $\epsilon = \frac{\delta_2}{k}$ et $w = x_2 + x_3$, reformuler le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu\left(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, w - x_3)\right) \\ \dot{w} = -\delta_2 (w - x_3) + g_2(x_1) \\ \epsilon \dot{x}_3 = -\delta_2 x_3 + \delta_2 (w - x_3)(p_T - x_3) \end{cases} \tag{18}$$

7. Justfier que l'on puisse approximer le système précédent par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu\left(-\delta_1 x_1 + f_1(x_1, w - \rho(w, p_T))\right) \\ \dot{w} = -\delta_2 (w - \rho(w, p_T)) + f_2(x_1) \end{cases} \tag{19}$$

où $\rho(w, p_T)$ est une solution (préciser laquelle) de l'équation

$$x_3^2 - (p_T + w + 1)\, x_3 + p_T w = 0 \tag{20}$$

8. Montrer à l'aide de (20) que l'on peut obtenir les formulations suivantes

$$\rho(w, p_T) = \frac{p_T x_2}{x_2 + 1} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial w} = \frac{\rho(w, p_T) - p_T}{\rho(w, p_T) - (p_T + x_2 + 1)} \tag{22}$$

En déduire que

$$1 - \frac{\partial \rho}{\partial w} = \frac{(x_2 + 1)^2}{p_T + (x_2 + 1)^2} \tag{23}$$

9. Montrer que l'on peut ainsi reformuler (19) par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\nu \delta_1 x_1 + \nu g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = R(x_2, p_T)\left(-\delta_2(x_2) + g_2(x_1)\right) \end{cases} \tag{24}$$

où

$$R(x_2, p_T) = \frac{(x_2 + 1)^2}{p_T + (x_2 + 1)^2} > 0 \tag{25}$$

10. Montrer que ce système présente les mêmes points d'équilibre que (10). Formuler des conditions suffisantes d'instabilité portant sur son jacobien similaire à celles obtenues en (14)–(15).
11. Montrer que l'une de ces conditions reste inchangée par rapport à la partie précédente. En déduire qu'elle est satisfaite pour $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta_2$. Montrer que la seconde est satisfaite pour p_T suffisamment grand.
12. En déduire comment on peut rendre ce système oscillant à l'aide de l'ajout de sites de liaison.

Exercice 3 Stabilisation des oscillations de tangage [12 points]

Un avion (ou un autre objet aérodynamique) est souvent l'objet d'oscillations venant perturber son orientation. Ainsi, on a représenté sur la figure 2 deux types d'oscillations de l'angle de tangage, l'oscillation court-terme et l'oscillation phugoïde. Cette dernière est caractérisée par un alignement du corps de l'avion avec la trajectoire (on parle d'angle d'incidence nul).

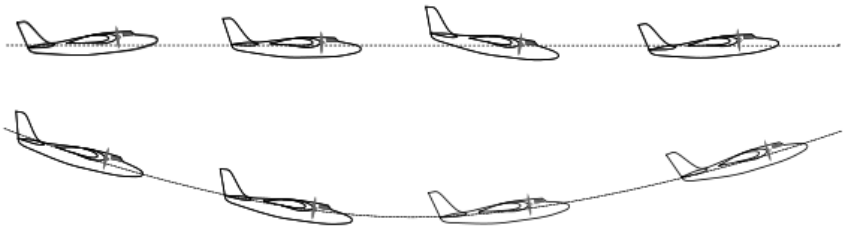


FIGURE 2 – Schéma de deux type d'oscillations de tangage. En bas oscillation de trajectoire phugoïde.

Ces oscillations sont dûes à la nature des forces aérodynamiques et à l'emplacement de leur point d'application.

Un document fondateur dans le domaine du contrôle dans le domaine aérospatial est le document donné en annexe.

On demande de proposer un système (capteur, actionneur, algorithme de contrôle) permettant de réduire les oscillations de tangage représentées sur la figure 2. On pourra s'inspirer du document donné en annexe. On pourra aussi librement utiliser toute autre source d'inspiration. On cherchera à décrire un système permettant de laisser au pilote la possibilité de manoeuvrer l'avion. On pourra proposer différents développements permettant au système de fonctionner à différentes altitudes, et imaginer différentes perturbations pouvant être maîtrisées. Le format de la réponse est libre. Il n'est pas impératif de proposer des équations.

Sept. 27, 1932. R. H. GODDARD 1,879,187

MECHANISM FOR DIRECTING FLIGHT

Filed Feb. 7, 1931 4 Sheets-Sheet 1

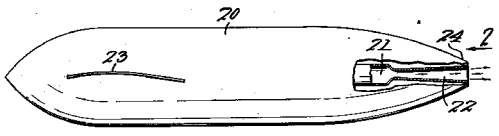


Fig. 1.

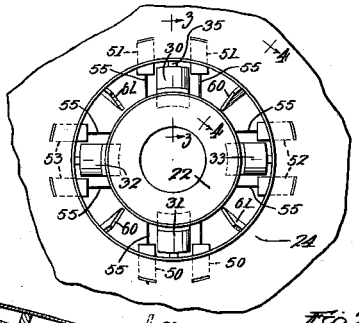


Fig. 2.

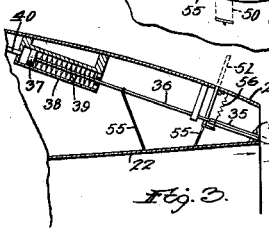


Fig. 3.

Inventor
Robert H. Goddard
By Attorneys
Southgate Fraser Hawley

Sept. 27, 1932. R. H. GODDARD 1,879,187

MECHANISM FOR DIRECTING FLIGHT

Filed Feb. 7, 1931 4 Sheets-Sheet 2

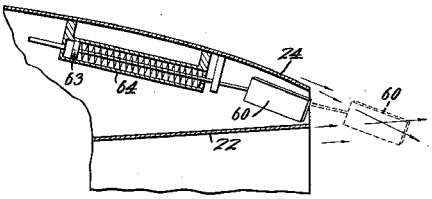


Fig. 4.

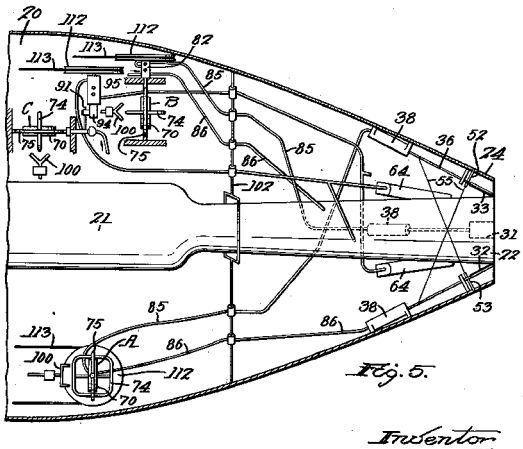


Fig. 5.

Inventor
Robert H. Goddard
By Attorneys
Southgate Fraser Hawley

Sept. 27, 1932. R. H. GODDARD 1,879,187

MECHANISM FOR DIRECTING FLIGHT

Filed Feb. 7, 1931 4 Sheets-Sheet 3

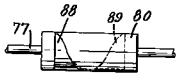


Fig. 7.

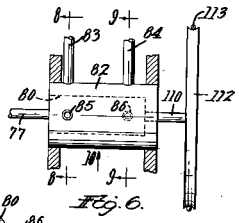


Fig. 6.

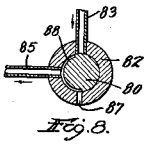


Fig. 8.

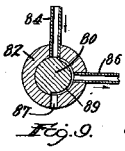


Fig. 9.

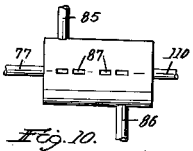


Fig. 10.

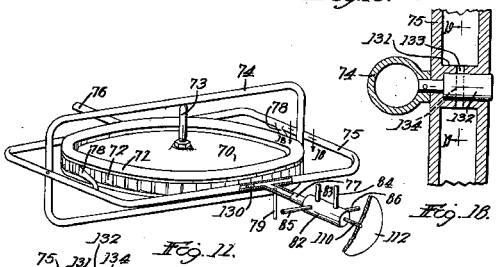


Fig. 11.

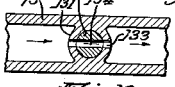


Fig. 19.

Inventor
Robert H. Goddard
By Attorneys
Southgate Fraser Hawley

Sept. 27, 1932. R. H. GODDARD 1,879,187

MECHANISM FOR DIRECTING FLIGHT

Filed Feb. 7, 1931 4 Sheets-Sheet 4

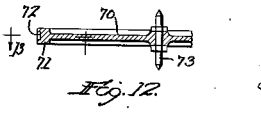


Fig. 12.

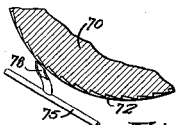


Fig. 13.

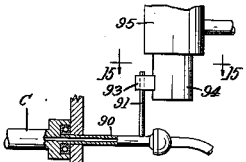


Fig. 14.

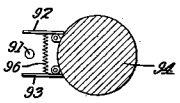


Fig. 15.

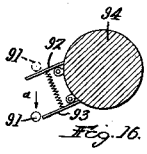


Fig. 16.

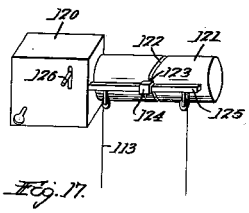


Fig. 17.

Inventor
Robert H. Goddard
By Attorneys
Southgate Fraser Hawley

Patented Sept. 27, 1932 1,879,187

UNITED STATES PATENT OFFICE

ROBERT H. GODDARD, OF WORCESTER, MASSACHUSETTS

MECHANISM FOR DIRECTING FLIGHT

Application filed February 7, 1931. Serial No. 514,290.

This invention relates to air-craft and particularly to air-craft of the rocket type, or craft in which propulsion is effected by the discharge of combustion gases through a rearwardly directed nozzle or passage.

It is the general object of my invention to provide mechanism which will enable such an air-craft to preserve its direction of flight and its orientation without manual supervision or attention.

A further object is to provide directing apparatus which will be operative under very low air pressure conditions or in a substantial vacuum. In the preferred form, my directing mechanism is equally effective under widely varying conditions of atmospheric pressure.

More specifically, my invention relates to the provision of directing vanes, controlled in position by a plurality of gyroscopes, and adapted to be projected into the atmosphere surrounding the air-craft or into the path of the discharge gases.

The direction of flight is effected by the pressure of the discharge gases against the directing vanes when the craft is in a vacuum or low pressure area and by the combined action of the discharge gases and the atmosphere against a plurality of vanes when in an area of more dense atmosphere.

Further features of the invention relate to the provision for manual control of the direction of flight and orientation of the craft and also for automatically diverting the flight from a predetermined straight course.

I also provide means for manually resetting the gyroscopes if they are accidentally displaced from their normal planes of rotation.

My invention further relates to arrangements and combinations of parts which will be hereinafter described and more particularly pointed out in the appended claims.

A preferred form of the invention is shown in the drawings, in which

Fig. 1 is a side elevation of a type of air-craft adapted to receive my improved directing mechanism;

Fig. 2 is an enlarged rear elevation of a portion of the craft, looking in the direction of the arrow 2 in Fig. 1;

Figs. 3 and 4 are detail sectional elevations, taken along the lines 3—3 and 4—4 in Fig. 2;

Fig. 5 is a partial sectional plan view of the rear portion of an air-craft, with the directing mechanism embodied therein;

Fig. 6 is a side elevation of one of the gyroscope control valves;

Fig. 7 is a side elevation of the movable valve member;

Figs. 8 and 9 are sectional end elevations, taken along the lines 8—8 and 9—9 in Fig. 6;

Fig. 10 is a bottom view of the valve mechanism, looking in the direction of the arrow 10 in Fig. 6;

Fig. 11 is a perspective view of one of the gyroscopes;

Fig. 12 is a partial sectional elevation of the rotating member of the gyroscope;

Fig. 13 is a partial sectional plan view, taken along the line 13—13 in Fig. 12 and showing the means for rotating the gyroscope;

Fig. 14 is a detail view showing the operative connections between the orienting gyroscope and its valve mechanism;

Figs. 15 and 16 are detail sectional views, taken along the line 15—15 in Fig. 14 and showing the valve member in different positions;

Fig. 17 is a detail perspective view of certain automatic directing apparatus;

Fig. 18 is a detail sectional plan view, taken along the line 18—18 in Fig. 11; and

Fig. 19 is a detail sectional elevation, taken along the line 19—19 in Fig. 18.

Referring to the drawings, I have indicated in Fig. 1 an air-ship 20 provided with a combustion chamber 21 and a rearwardly directed discharge nozzle 22. The air-ship may be provided with vanes or wings 23 for assisting in maintaining the direction of flight and may be provided with any suitable mechanism for intermittently supplying a fuel mixture or explosive charge to the combustion chamber 21.

The mechanism for supplying the mixture and igniting or exploding the same in the

combustion chamber forms no part of my present invention, which is concerned with the provision of mechanism for maintaining the direction of flight and orientation of the craft 20.

The discharge nozzle 22 is indicated as terminating at the rear end of the air-craft 20 and somewhat closely adjacent to the contracted external surface 24 thereof.

When such a craft is operated under very low pressure conditions or in a substantial vacuum, it is obvious that outwardly projecting vanes or rudders will have very little directing effect, on account of the extreme thinness of the atmosphere encountered thereby. Consequently, I utilize the flow of combustion gases through the discharge nozzle 22 for directing and orienting the craft.

For correcting vertical or horizontal deviations of flight, I provide vertically movable vanes 30 and 31 and horizontally movable vanes 32 and 33. Each of these vanes is mounted on a square supporting shaft 35 (Fig. 3) and is connected by a piston rod 36 to a piston 37 in an operating cylinder 38. Each vane is normally maintained in withdrawn or inoperative position by a coil spring 39 in the cylinder 38.

When it is desired to correct the direction of flight, gas pressure from any suitable source is admitted through a pipe 40 to the upper end of the selected cylinder 38, forcing the corresponding piston 37 downward and projecting the corresponding vane 30 to 33 into the path of the exhaust gases in the nozzle 22. A roller 41 may be provided for reducing frictional resistance to movement of the vane, caused by the pressure of the exhaust gases as soon as the end of the vane is projected into the nozzle 22.

It will be obvious that movement of the upper vane 30 into the path of the exhaust gases will cause the rear end of the craft 20 to be displaced upwardly, correspondingly depressing the front end and causing a downward correction of the line of flight.

Correspondingly, projection of the lower vane 31 into the discharge nozzle 22 causes an upward correction. The horizontal vane 32 similarly causes a correction to the right and the vane 33 causes a correction to the left.

While the projection of the vanes into the path of the discharge gases is effective in correcting the flight, it also reduces the efficiency of the propulsion mechanism by interference with the flow of the gases. Accordingly, it is desirable to take advantage as far as possible of the external atmosphere for correcting flight, where the density of the atmosphere is sufficient to produce a directing effect.

Accordingly, I have provided additional vanes 50, 51, 52 and 53 operative in conjunction with the vanes 30 to 33 previously described. These vanes 50 to 53 are normally withdrawn within the outer shell 24 of the air-craft but are adapted to be projected outward, as indicated in dotted lines in Fig. 3. The vanes 50 to 53 are cross-connected by cords 55 with the vanes 30 to 33 and are each provided with tension springs 56 (Fig. 3) connected to move the vanes outward.

The connections are so made that when one of the inwardly movable directing vanes 30 to 33 is advanced into the discharge nozzle, the associated opposite pair of vanes 50 to 53 will be released for movement outward by the associated springs 56. For example, when the upper vane 30 is projected into the discharge nozzle, the two lower vanes 50 will be projected into the atmosphere.

It will be obvious that a vane projecting inward at one side of the discharge passage will tend to turn the craft in the same direction as a vane projecting outward at the opposite side of the air-craft. I am thus able to take advantage of the atmosphere, when present in sufficient density, and of the discharge gases under all atmospheric conditions.

In order to preserve the orientation of the craft or to keep the craft on an even keel, I provide additional directing vanes 60 and 61 (Fig. 2) spaced about the rear end of the discharge nozzle 23.

It will be noted that the vanes 60 and 61 are not radially disposed, but that the vanes 60 are angularly displaced in one direction and the vanes 61 in the opposite direction. These orienting vanes are normally withdrawn between the nozzle 22 and the outer surface 24, as indicated in Fig. 4, but are adapted to be projected to the dotted line position in Fig. 4 by pistons 63 in cylinders 64, similar in all respects to the mechanism for moving the vanes 30 to 33 previously described.

When one of the vanes 60 or 61 is projected rearward, it is so positioned that an inner portion of the vane is in the path of the exhaust gases, while an outer portion of the vane is in the path of the atmosphere flowing along the outer surface 24 of the air-craft, thus taking advantage of the atmosphere when present in sufficient density, as with the elevating and horizontally deflecting vanes previously described.

The cylinders 64 are connected to operate in pairs, so that the two vanes 60 will be simultaneously moved to operative position, or the two vanes 61. The vanes 60 cause an angular correction in one direction and the vanes 61 cause a similar correction in the opposite direction.

Gyroscope control

I have provided gyroscope mechanism for regulating the admission of gas under pressure to the various cylinders 38 and 64, and this mechanism will now be described.

For this purpose, I have provided a gyroscope mechanism A for control of the right and left vanes 32 and 33, a gyroscope mechanism B for control of the elevating vanes 30 and 31, and a gyroscope mechanism C for control of the orienting vanes 60 and 61. The gyroscope mechanisms A and B are substantially similar and a description of the mechanism A shown in Fig. 11 will apply equally to the mechanism B.

A rotating member or wheel 70 (Fig. 12) is provided with a relatively heavy rim 71 having pockets 72 (Fig. 13) formed in the periphery thereof. The wheel 70 is provided with a pivot stud 73 by which it is supported in an inner gimbal ring 74, which in turn is pivotally mounted in an outer gimbal ring 75, which is normally in the plane of rotation of the wheel 70.

The outer ring 75 is formed of hollow tubing having outwardly projecting bearing portions 76 and 77. Nozzles 78 (Figs. 11 and 13) are mounted on the outer gimbal 75 and are provided with outlet openings adjacent the periphery of the wheel 70 and substantially in alignment with the pivotal connections between the gimbal rings 74 and 75.

A flexible pipe 79 (Fig. 11) is connected to a suitable source of air or other gas under pressure, so that a flow of gas may be directed through the nozzles 78 into the pockets 72 and thus maintains the wheel 70 in rapid rotation. When thus rapidly rotated, the wheel 70 follows the usual laws of rotating bodies and resists displacement from its plane of rotation, which property is utilized in controlling my directing mechanism.

It is apparent that air or gas should be applied through the nozzles 78 only when the gimbal rings 74 and 75 are substantially perpendicular to each other, as otherwise the blast of air or gas would tend to turn the inner gimbal ring 75 out of its control plane.

Accordingly, I provide a plug 130 (Fig. 11) in the outer ring 75 at the left of the pivot bearing 77, and I provide a valve casing 131 (Figs. 18 and 19) fixed in the tubing of the outer ring 75. I also provide a valve plug 132 fixed to turn with the inner ring 74 and preferably forming a pivotal connection between said rings. The casing 131 and plug 132 have narrow slots or passages 133 and 134 which are aligned when the gimbal rings 74 and 75 are perpendicular to each other but which are out of alignment when either ring is displaced, thus permitting air or gas to flow to the nozzles 78 only when the rings are in substantially perpendicular planes.

Valve Mechanism

The gyroscopes control the movements of the various directing vanes by opening or closing connections through which pressure gases are admitted to the cylinders 38 or 64. For thus controlling the gases, special valve mechanism is provided which will now be described, referring particularly to Figs. 7 to 11.

A cylindrical inner valve member 80 (Fig. 7) is mounted on an extension of the outer gimbal ring bearing portion 77 and is freely rotatable within a normally fixed valve casing 82. Pipes 83 and 84 extend from the valve casing 82 to a suitable source of supply of compressed air or other gas. Pipes 85 and 86 extend from the valve casing 82 to the cylinders 38 (Fig. 5) which control the laterally deflecting vanes 32 and 33.

Exhaust ports 87 are also formed in the valve casing 82 opposite the supply pipes 83 and 84. The valve member 80 is provided with shallow recessed portions 88 and 89, which are relatively broad at their lower or exhaust ends and much reduced in width at their upper or admission ends. The normal position of the member 80 is indicated in Figs. 8 and 9, with the pipes 85 and 86 connected through the recesses 88 and 89 to the exhaust ports 87.

If the air-craft deviates in a horizontal plane in either direction, the casing 82 will turn with the air-craft, while the valve member 80 is maintained in its initial position by the action of the gyroscope. Such turning movement in one direction will connect the pipe 83 through the recess 88 to the pipe 85, at the same time disconnecting the recess from the exhaust, and will thus cause operation of the vane 33, which will correct the flight by a movement to the left. If the deviation is in the opposite direction, the pipe 84 will be connected through the recess 89 to the pipe 86 to cause actuation of the vane 32.

The substantially triangular shape of the shallow recesses 88 and 89 in the valve member 80 is adopted for the following reason:

When the craft deviates only slightly from its course, the restoring force exerted by the vane or vanes should be relatively small, but when a considerable deviation occurs, a large force should be exerted. For a slight deviation, the compressed gas will enter through the narrow opening provided by the upper restricted end of the recess 88 or 89. This small amount of gas will cause the associated cylinder and piston to operate slowly and the connected vane or vanes will be pushed rearward only a short distance before the deviation is corrected.

If a large deviation occurs, the valve member 80 will be given a larger turning movement and a wider portion of the recess 88 or 89 will provide a larger port opening and more rapid movement of the associated piston and vane or vanes, producing a more strongly effective restoring force.

If the vanes were pushed to full operative position for a slight deviation, the restoring force of the vanes would be so great that the craft would be returned abruptly to and be-

yond its normal position and would tend to oscillate back and forth across its true direction of course.

This adaptation of the restoring force to the amount of deviation is particularly desirable when vanes are used which extend both into the discharge gases and into the external atmosphere, as in this case the restoring force is very large if the vanes are moved to full operative position.

The gyroscope mechanism B for operating the elevating vanes 30 and 31 is of exactly the same construction and operates in exactly the same manner as the gyroscope A above described.

The gyroscope C for controlling the orienting vanes 60 and 61 is also of similar construction but a special connection is provided between the extension 90 (Fig. 14) of the gyroscope C and the valve mechanism controlled thereby.

This extension 90 is provided with an outwardly extending rod 91, normally positioned between two arms 92 and 93 (Fig. 15) which are pivotally mounted on the periphery of an extended portion of the inner valve member 94, which is angularly movable in the casing 95 of the mechanism which controls the orienting vanes. Rolling or spinning movement of the air-craft will cause displacement of the rod 91 toward the arm 92 or the arm 93.

These arms are mounted to resist outward swinging movement relative to the valve member 94 but are yieldable inwardly toward each other and are normally yieldingly separated by a compression spring 96.

Assuming that the rod 91 is relatively displaced in the direction of the arrow *a* in Fig. 16, the rod will engage the arm 93, moving the valve member 94 to the position indicated in Fig. 16 and thus causing one pair of orienting vanes to be moved to operative position.

If the craft is spinning, the rod 91 may make one or more complete revolutions relative to the valve member 94 and by such continued movement will be brought to the dotted line position in Fig. 16 and into engagement with the outside of the arm 92. Upon such engagement, the arm 92 will yield inwardly, allowing the rod 91 to pass freely thereby.

As the craft is restored to normal orientation, however, the rod 91 will move relatively in the opposite direction, engaging the inside of the arm 92 and moving the valve member back to the position indicated in Fig. 15.

Resetting devices

It sometimes happens that a gyroscope will be displaced out of its normal plane of operation, particularly when the gyroscope wheel is at rest or running at low speed. For resetting the gyroscopes in their normal planes, I provide forked members 100 (Fig. 5), each of which may be manually moved forward to engage the inner gimbal ring 74 of one of the gyroscopes and to bring the same positively to a predetermined normal plane.

I also provide a valve rod 102 (Fig. 5) which may be moved axially to simultaneously shut off all of the control connections between the gyroscopes and the operating cylinders before advancing the forked members 100 to correct the positions of the gyroscopes.

The valve rod 102 may also be used for closing the connections whenever desired for any other purpose.

Manual control

The gyroscope mechanisms above described will control the air-craft and maintain its direction and orientation automatically for an extended flight, whether or not an operator is present. It is desirable, however, when an operator is at hand, that he should be able to deflect the craft from a predetermined straight course if desired and this may be accomplished by manually moving a selected valve casing 82 (Fig. 11) or 95 (Fig. 14) relative to the inner valve member 80 or 94.

For this purpose, the casings 82 and 95 are pivotally mounted and a short shaft 110 (Fig. 6) is secured in the end of each valve casing 82 or 95 and is provided with a grooved pulley 112 around which a cord or cable 113 extends. These cords 113 (Fig. 5) may be extended forward to any convenient position in the air-craft. By manual movement of the cords in one direction or the other, the corresponding valve casings may be turned relative to the inner valve members, thereby causing the corresponding vanes to be thrown into operation and causing a deflection of the ship from the normal straight path.

By throwing the orienting vanes into operation at the same time that the elevating or horizontal deflecting vanes are made operative, the ship may be caused to roll or bank as the direction of flight is fore or less abruptly altered.

Automatic deflection

I have also provided means by which the direction of flight may be changed automatically. For this purpose I have provided a clockwork 120 (Fig. 17) of any usual type by which a cylinder 121 may be slowly rotated. This cylinder is provided with a cam groove 122 which receives the end of a stud 123 carried by a slide 124 to which is connected one of the cords or cables 113.

The slide 124 is supported on a fixed guide-bar 125 and is movable along the guide-bar in accordance with the lay-out of the cam groove 122. The clockwork 120 may be placed in operation by movement of a release lever 126. When thus placed in operation, it is obvious that the cord 113 will be moved in one direction or the other in accordance with the shape of the cam groove 122, causing corre-

sponding movement of the attached valve casing 82 or 95 and thereby altering the course of the ship.

It will be understood that three automatic mechanisms such as are shown in Fig. 17 will be required for complete control of the course, one for each gyroscope mechanism.

The pipes 83 to 86 connected with the valve casings are made flexible to a sufficient extent to permit manual or automatic movement of the casings for altering the course of flight as above described.

Having described the construction and operation of my improved flight directing mechanism, the advantages thereof will be readily apparent. The mechanism is effective for maintaining both the vertical and horizontal direction of flight and also the orientation, without dependence on the density of the atmosphere through which the air-craft is traveling. The mechanism is effective even in a substantially perfect vacuum, a result which to my knowledge has never before been attained. Furthermore, I have provided for manual or automatic changes in the course of flight, and the automatic changes will be made in accordance with a predetermined plan.

Having thus described my invention and the advantages thereof, I do not wish to be limited to the details herein disclosed, otherwise than as set forth in the claims, but what I claim is:—

1. Directing mechanism for an air-craft having a combustion chamber with a rearwardly directed gas discharge passage, comprising vanes mounted adjacent said passage, means to advance a selected vane into said passage, and automatic devices effective to render said means operative upon deviation of the craft from a predetermined orientation.

2. Directing mechanism for an air-craft having a gas discharge passage, comprising vanes mounted adjacent said passage, additional vanes mounted adjacent the outer surface of the air-craft, and means to project one vane into said gas passage and to simultaneously project a vane from the outer surface at the opposite side of the air-craft.

3. Directing mechanism for an air-craft having a gas discharge passage, comprising vanes mounted adjacent said passage, additional vanes mounted adjacent the outer surface of the air-craft, and means to project one vane into said gas passage and to simultaneously project a vane from the outer surface at the opposite side of the air-craft, all of said vanes being entirely withdrawn from said passage and within said outer surface when in normal inoperative position.

4. In an air-craft, having an elongated enclosed body and supporting wings, a set of orienting vanes mounted in said body and adapted to turn the craft in one direction about its longitudinal axis, a second set of orienting vanes correspondingly mounted and adapted to turn the craft in the opposite direction, and means to advance a selected set of vanes into a gaseous stream adjacent said body to correct a roll or spin of the craft in a given direction.

5. In an air-craft, having an elongated enclosed body and supporting wings, a set of orienting vanes mounted in said body and at a fixed inclination to the path of travel of the air-craft and adapted to turn the craft in one direction about its longitudinal axis, a second set of vanes correspondingly mounted and adapted to turn the craft in the opposite direction, and automatic means to render either set operative upon deviation of the craft from an even keel in a given direction.

6. The combination in directing apparatus as set forth in claim 5, in which the orienting vanes when in operative position have their outer portions projecting beyond the outer surface of said air-craft body.

7. The combination in directing apparatus as set forth in claim 5, in which the air-craft has a gas discharge passage and in which the orienting vanes when in operative position have inner portions projecting into said gas passage and outer portions projecting beyond the outer surface of said air-craft.

8. In an air-craft, vanes to correct lateral or vertical deviation, orienting vanes, a plurality of gyroscopes connected to control the normal operation of said vanes, and automatic means to control said vanes to effect a predetermined variation in flight direction or orientation.

9. In an air-craft having a rearwardly contracting outer surface, a gas discharge nozzle having its rear end adjacent the rear end of said outer surface but inwardly radially spaced therefrom, orienting vanes normally housed between said passage and said outer surface adjacent the rear end thereof, and means to move said vanes rearward to a position in which the inner portions of the vanes project into said passage and the outer portions project beyond said outer surface.

10. In an air-craft having a discharge passage, a series of orienting vanes equally spaced about the periphery of said passage, with alternate vanes oppositely inclined with respect to an axial plane of said air-craft, and means to project all of the similarly inclined vanes into said passage upon deviation in orientation in one direction and all of the oppositely inclined vanes upon deviation in the opposite direction.

11. Direction apparatus for an air-craft having a combustion chamber and a discharge nozzle, comprising a vane mounted adjacent said nozzle but normally withdrawn therefrom, means to project said vane

into said nozzle, a gyroscope to control said projecting means, and means to rotate the gyroscope wheel.

12. The combination in direction apparatus as set forth in claim 11, in which the gyroscope wheel is provided with peripheral pockets, and in which means is provided for discharging a compressed gas into said pockets in the plane of the wheel and at such a tangential angle as to cause rapid rotation thereof.

13. The combination in direction apparatus as set forth in claim 11, in which the gyroscope wheel is provided with peripheral pockets, and in which means is provided for discharging a compressed gas into said pockets in the plane of the wheel and at such a tangential angle as to cause rapid rotation thereof, and in which means is provided to shut off the compressed gas when the gas-discharging means is displaced out of the plane of said wheel.

14. Directing mechanism for an air-craft having a gas discharge passage, comprising vanes mounted adjacent said passage, and means to advance a selected vane into said passage, and means to proportion the movement of the vane to the deviation of the craft from its course.

15. Directing mechanism for an air-craft comprising a vane, means to project said vane into a gaseous current moving within and axially rearward relative to said craft, and means to proportion the movement of the vane to the deviation of the craft from its course.

16. In an aircraft, a combustion chamber having a rearwardly directed gaseous discharge passage, and steering elements selectively projectable by straight line endwise movement into said passage and rendered effective by engagement by said gases.

17. In an aircraft, a directing vane, a cylinder and piston for advancing said vane to operative position, a gyroscope, valve mechanism positioned thereby and controlling the admission of a compressed gas to said cylinder, said valve mechanism comprising a valve casing and a valve member angularly movable therein, one of said parts being connected to said gyroscope and the other part being separately adjustable manually, and automatic means to adjust said second part.

18. In an air-craft, a body, a plurality of orienting vanes mounted on said body, certain of said vanes being angularly displaced from radial position in one direction and other vanes being angularly displaced in an opposite direction, and automatic control mechanism therefor by which selected vanes may be projected outward to operative position, said mechanism comprising a gyroscope wheel normally rotated in a plane parallel to the longitudinal axis of the air-craft and in a definite position in a cross section plane of said craft, and vane-moving mechanism controlled by the relative position of said gyroscope wheel in said cross section plane.

In testimony whereof I have hereunto affixed my signature,

ROBERT H. GODDARD.

Automatique. Dynamique et contrôle des systèmes
Corrigé

MINES ParisTech *23 avril 2019*

Exercice 1 Contrôle de puits de pétrole instables [14 points]

La dynamique d'un puits de pétrole instable peut être décrite par le modèle suivant

$$\dot{p} = w \tag{1}$$
$$\dot{w} = -a_1 p + (h_0 w - h_1 w^3) + (g_0 - g_1 w)\Delta + a_1 b_0 \tag{2}$$
$$\dot{\Delta} = \frac{u(t) - \Delta}{\tau} \tag{3}$$

où p est la pression en fond de puits, w sa dérivée temporelle, et Δ est lié à la perte de charge au niveau de la vanne de contrôle, située en haut du puits. La commande est $u(t)$. L'équation (3) représente le temps nécessaire aux ondes de pression pour se propager de la tête de puits vers le fond. Les paramètres a_1, h_0, h_1, g_0, g_1, b_0 dépendent des propriétés des fluides présents dans le puits **et sont tous strictement positifs**.

Etude en boucle ouverte

On suppose dans toute cette partie que la commande est fixe, i.e.

$$u(t) = \bar{u} > 0 \tag{4}$$

1. Etablir que pour chaque valeur $\bar{u}$ de la commande, il existe alors un unique point d'équilibre $(\bar{p}, \bar{w}, \bar{\Delta})$ que l'on explicitera. [**1 pts**]

$$\bar{w} = 0 \tag{5}$$
$$\bar{p} = b_0 + \frac{g_0 \bar{u}}{a_1} \tag{6}$$
$$\bar{\Delta} = \bar{u} \tag{7}$$

2. Linéariser le système autour du point d'équilibre et discuter sa stabilité en fonction des valeurs de $\bar{u}$. [**2 pts**]

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ w \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & h_0 - g_1\bar{u} & g_0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ w \\ \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{8}$$

En développant selon la dernière ligne, il vient

$$(s+1)\left(s^2 - s(h_0 - g_1\bar{u}) + a_1\right) \tag{9}$$

Donc le système est stable si $\bar{u} < h_0/g_1$, instable sinon.

3. On suppose $\tau \ll 1$. Simplifier le modèle par perturbations singulières. On n'étudie plus, **dans toute la suite de l'exercice**, que le modèle réduit. [**1 pts**]
trivial...

4. En considérant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = \gamma(p - \bar{p})^2 + (w - \bar{w})^2, \tag{10}$$

où γ est un paramètre à déterminer, discuter la stabilité *globale* du point d'équilibre. **[2 pts]**
En prenant $\gamma = a_1$, il vient

$$\dot{V}(t) = -(h_0 - g_1\bar{u})w^2 - h_1 w^4 \tag{11}$$

Par LaSalle, on obtient que le système est globalement asymptotiquement stable lorsque $\bar{u} < h_0/g_1$.

Commande

5. Linéariser le système réduit autour du point d'équilibre $(\bar{p}, \bar{w})$. **[0,5 pts]**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & h_0 - g_1\bar{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} u(t) \tag{12}$$

6. Etudier la commandabilité du système linéarisé. Proposer un bouclage stabilisant. **[1,5 pts]** Commandabilité triviale,

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 - g_0 k_1 & h_0 - g_1\bar{u} - g_0 k_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

donc il suffit de prendre

$$k_1 < -\frac{a_1}{g_0}, \qquad k_2 > \frac{h_0 - g_1\bar{u}}{g_0} \tag{14}$$

7. On suppose qu'on mesure la pression en fond de puits p. Le système linéarisé est-il observable ? Proposer un observateur permettant de reconstituer tout l'état à partir de la mesure. **[1,5 pts]**
Observabilité triviale,

$$A - LC = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ -a_1 - l_2 & h_0 - g_1\bar{u} \end{pmatrix} \tag{15}$$

donc il suffit de prendre

$$l_1 > h_0 - g_1\bar{u}, \qquad l_2 > l_1(h_0 - g_1\bar{u}) - a_1 \tag{16}$$

8. Comment choisir *a priori* les valeurs propres de l'observateur et du contrôleur ? **[1 pts]**
Il faut faire attention à ne pas aller plus vite que la dynamique négligée. En pratique, la mesure est très bruitée donc il vaut mieux prendre un observateur lent pour filtrer, et donc un contrôleur plus rapide pour séparer les spectres de l'observateur et du contrôleur
9. Plus rigoureusement, la propagation des ondes de pression correspond à un retard pur dans la chaîne de commande. L'équation (3) devrait être remplacée par

$$\Delta(t) = u(t - \tau) \tag{17}$$

Comment déterminer (on ne fera pas le calcul) si le système bouclé est toujours asymptotiquement stable ? **[0,5 pts]**
On écrit la fonction de transfert entre la mesure et l'entrée en boucle ouverte, puis on applique le critère de Nyquist...
10. On considère à nouveau le système non-linéaire (1)–(3). La variable p est en fait une sortie de Brunovsky nonlinéaire, appelée *sortie plate*. Montrer qu'il existe une nouvelle commande v et un changement de variables inversible ϕ tels que **[1,5 pts]**

$$(p, \dot{p}, \ddot{p}) = \phi(p, w, \Delta) \tag{18}$$
$$v = \psi(u, p, w, \Delta) \tag{19}$$

et tels que

$$p^{(3)} = v(t) \tag{20}$$

Il suffit de l'écrire...

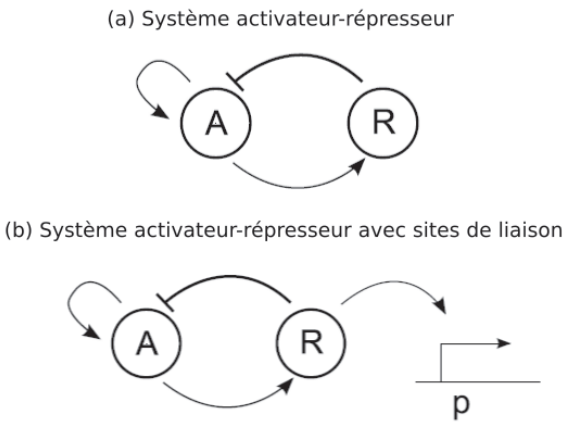


FIGURE 1 – Vue schématique du système activateur-répresseur considéré dans ce sujet.

Donner alors une stratégie de contrôle non-linéaire. **[1,5 pts]**

Il suffit de prendre

$$v(t) = \sigma_2 \ddot{p}(t) + \sigma_1 \dot{p} + \sigma_0 (p(t) - p^{ref}(t)) \tag{21}$$

et d'inverser ψ pour obtenir le contrôle dans les variables d'origine.

Exercice 2 Analyse d'une horloge biologique

La synthèse et l'analyse de systèmes oscillants ou périodiques est une thématique essentielle en biologie. Ces systèmes régissent en effet un grand nombre de processus naturels, tels que les cycles cellulaires. Par ailleurs, en biologie synthétique, de tels motifs peuvent être utilisés comme horloge, pour synchroniser différents modules. Dans ce contexte, ces cycles limites sont donc bénéfiques et on cherche à en exhiber.

Dans ce sujet, on considère un de ces systèmes, l'horloge activateur/répresseur. Cet oscillateur est composé de deux protéïnes, l'une activatrice A qui promeut sa propre expression et une protéïne répressive R. Cette dernière, quant à elle, réprime l'expression de la protéïne activatrice. Ce système est illustré en Figure 1(a). On s'intéresse dans ce sujet à l'analyse de ce système, pour déterminer dans quelles conditions il suit un comportement périodique, c.à.d un cycle limite.

Les deux parties ci-dessous sont largement indépendantes.

Motif activateur-répresseur isolé En notant x_1 la concentration de protéïne A et x_2 celle de R (on supposera $x_1, x_2 \geq 0$ dans ce qui suit), les équations dynamiques du système sont données par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\nu\delta_1 x_1 + \nu g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1) \end{cases} \tag{22}$$

où ν, δ_1, δ_2 sont des constantes strictement positives et g_1, g_2 des fonctions de Hill

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad g_2(x_1) = \frac{2x_1^2 + 1}{1 + x_1^2} \tag{23}$$

1. Enoncer des conditions suffisantes pour que ce système admette un cycle limite. (On ne cherchera pas à expliciter ces contraintes en fonction des paramètres du système, ce sera l'objet des questions suivantes.)
   Poincaré-Bendixon

Dans les questions qui suivent, on cherche à satisfaire ces conditions.

2. On considère la fonction Lyapunov $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ où l'on note $x = (x_1, x_2)$.

(a) Montrer que g_1 et g_2 sont bornées.
Direct.

(b) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} < 0$ pour $\|x\| > M$.
En dérivant, on obtient

$$\dot{V} = -\nu\delta_1 x_1^2 + \nu x_1 g_1(x_1, x_2) - \delta_2 x_2^2 + x_2 g_2(x_1) \tag{24}$$

f_1 et f_2 admettent des valeurs maximales que l'on note $M_1 = \max_{(x_1,2)\in\mathbb{R}^2} g_1(x_1, x_2)$ et $M_2 = \max_{x_1\in\mathbb{R}} g_2(x_1)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\nu\delta_1 x_1^2 + \nu M_1 x_1 - \delta_2 x_2^2 + M_2 x_2 \\ &\leq -\min\{\nu\delta_1, \delta_2\} V + \nu\frac{8M_1^2}{\nu\delta_1} + \frac{8M_2^2}{\delta_2}\end{aligned} \tag{25}$$

qui est négative pour $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{2\nu\frac{8M_1^2}{\nu\delta_1} + \frac{8M_2^2}{\delta_2}}{\min\{\nu\delta_1,\delta_2\}} = M$.

(c) En déduire qu'il existe un ensemble compact Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que toute trajectoire ayant sa condition initiale dans Ω reste dans Ω.
Direct.

3. On étudie dans un premier temps l'existence d'un point d'équilibre.

(a) Soit x^* un point d'équilibre éventuel du système. Formuler les équations de ce point d'équilibre sous la forme

$$x_2^* = h_1(x_1^*) = h_2(x_1^*) \tag{26}$$

où l'on précisera l'expression des fonctions h_1 et h_2.
On a

$$h_1(x_1) = \sqrt{\frac{x_1^2 + 1}{\delta_1 x_1} - 1 - x_1^2} \tag{27}$$

$$h_2(x_1) = \frac{1}{\delta_2} g_2(x_1) \tag{28}$$

où h_1 est définie sur un certain voisinage de l'origine.

(b) Montrer que l'équation $h_1(x_1^*) = h_2(x_1^*)$ admet toujours au moins une solution.
La fonction h_1 varie entre $+\infty$ et 0 et h_2 est croissante positive. Les deux fonctions étant continues, elles s'intersectent donc au moins en un point.

On admet la propriété suivante (qui est obtenue par une étude des variations de h_1 et h_2) :

Il existe deux intervalles $\Delta_1 \subset \mathbb{R}_+$ et $\Delta_2 \subset \mathbb{R}_+$ tels que

$$\delta_1 \in \Delta_1\,,\ \delta_2 \in \Delta_2 \Rightarrow x^* \textit{ défini par } (26) \textit{ est unique et } h_2'(x_1^*) > h_1'(x_1^*) > 0 \tag{29}$$

4. On étudie maintenant la stabilité de cet équilibre. Pour ce faire, on note $f_1(x_1, x_2) = \nu(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, x_2))$ et $f_2(x_1, x_2) = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1)$.

(a) Montrer qu'une condition suffisante pour que x^* soit instable est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) > 0 & (30) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) > 0 & (31)\end{cases}$$

Une condition suffisante est que le Jacobien en x^* admette deux valeurs propres à partie réelles positives. Les conditions viennent de la trace et du déterminant.

(b) Montrer que $h_1'(x_1^*) = -\frac{\partial f_1/\partial x_1(x^*)}{\partial f_1/\partial x_2(x^*)}$ et $h_2'(x_1^*) = -\frac{\partial f_2/\partial x_1(x^*)}{\partial f_2/\partial x_2(x^*)}$.
Provient de la différentiation directe de $f_1(x_1^*, h_1(x_1^*)) = 0$ et de $f_2(x_1^*, h_2(x_1^*)) = 0$.

(c) Calculer explicitement $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ et montrer que ces deux termes sont strictement négatifs (on rappelle que $x_1, x_2 \geq 0$). En déduire que (31) est satisfaite si $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta 2$, où Δ_1 et Δ_2 sont définis dans (29).
Si $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta 2$, on a $-\frac{\partial f_2/\partial x_1(x^*)}{\partial f_2/\partial x_2(x^*)} > -\frac{\partial f_1/\partial x_1(x^*)}{\partial f_1/\partial x_2(x^*)} > 0$. Or,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\nu \frac{x_1^2+1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} 2x_2 < 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\delta_2 < 0$$

Donc

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) > \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*)$$

(d) Montrer que (30) est satisfaite sous une certaine contrainte sur ν en fonction de δ_1, δ_2 et de $\partial g_1/\partial x_1(x^*)$.
On doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) - \delta_2 = -\nu\delta_1 + \nu\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) - \delta_2 > 0 \tag{32}$$

soit

$$\nu > \frac{\delta_2}{\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) - \delta_1} \tag{33}$$

5. Conclure sur des conditions suffisantes sous lesquelles ce système est oscillant.
Il suffit d'avoir $\delta_1 \in \Delta_1, \delta_2 \in \Delta_2$ et $\nu > \frac{\delta_2}{\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*)-\delta_1}$.

Ajout de sites de liaison pour le répresseur On s'intéresse maintenant à l'effet sur la dynamique du systèmes de sites de liaison p avec affinité sur la protéïne répresseur R. L'intéraction entre ces deux éléments est modélisée par la réaction suivante

$$R + p \underset{k}{\overset{k}{\leftrightarrows}} C \tag{34}$$

dans lequel C représente le complexe formé par R et p et $k > 0$ est la constante de dissociation et d'association. On note x_3 la concentration du complexe C et l'on suppose que la concentration totale de sites de liaison $p_T = [p] + x_3 > 0$ est constante. Sous cette hypothèse, la nouvelle dynamique du système est alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu\left(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, x_2)\right) \\ \dot{x}_2 = -\delta_2 x_2 + g_2(x_1) + kx_3 - kx_2(p_T - x_3) \\ \dot{x}_3 = -kx_3 + kx_2(p_T - x_3) \end{cases} \tag{35}$$

où les fonctions g_1, g_2 sont les mêmes que précédemment et données en (23). On suppose enfin que $k >> \delta_1, \delta_2$.

6. En définissant $\epsilon = \frac{\delta_2}{k}$ et $w = x_2 + x_3$, reformuler le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \nu\left(-\delta_1 x_1 + g_1(x_1, w - x_3)\right) \\ \dot{w} = -\delta_2(w - x_3) + g_2(x_1) \\ \epsilon\dot{x}_3 = -\delta_2 x_3 + \delta_2(w - x_3)(p_T - x_3) \end{cases} \tag{36}$$

Calcul direct.

7. Justfier que l'on puisse approximer le système précédent par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 =\nu\left(-\delta_1 x_1 + f_1(x_1, w-\rho(w,p_T))\right) \\ \dot{w} = -\,\delta_2(w-\rho(w,p_T)) + f_2(x_1) \end{cases} \tag{37}$$

où $\rho(w,p_T)$ est une solution (préciser laquelle) de l'équation

$$x_3^2 - (p_T + w + 1)\, x_3 + p_T w = 0 \tag{38}$$

Tikhonov : on considère (pour $\epsilon = 0$)

$$\begin{aligned} g_0(w,x_3,0) =& -\,\delta_2 x_3 + \delta_2(w-x_3)(p_T - x_3) \\ =&\delta_2\left(-x_3 + (wp_T - x_3(w+p_T) + x_3^2)\right) \\ =&\delta_2\left(x_3^2 - (w+p_T+1)\, x_3 + p_T w\right) = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Le discriminant de cette équation (sans δ_2) est

$$\begin{aligned} \Delta =& (w+p_T+1)^2 - 4p_T w \\ =&(w+p_T)^2 + 2(w+p_T) + 1 - 4p_T w \\ =&(w-p_T)^2 + 2(w+p_T) + 1 > 0 \end{aligned} \tag{40}$$

Il existe donc deux solutions $x_i = \frac{1}{2}(w+p_T+1\pm\sqrt{\Delta})$ strictement positives à cette équation et l'on a

$$\frac{\partial g_0}{\partial x_3}(x_i) =\delta_2(-(1+w+p_T) + 2x_i) = \pm\delta_2\sqrt{\Delta} \tag{41}$$

En conséquence, $\rho(w,p_T) = \frac{w+p_T+1-\sqrt{\Delta}}{2}$.

8. Montrer à l'aide de (38) que l'on peut obtenir les formulations suivantes

$$\rho(w,p_T) =\frac{p_T x_2}{x_2+1} \tag{42}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial w} =\frac{\rho(w,p_T) - p_T}{\rho(w,p_T) - (p_T + x_2 + 1)} \tag{43}$$

En déduire que

$$1 - \frac{\partial\rho}{\partial w} =\frac{(x_2+1)^2}{p_T + (x_2+1)^2} \tag{44}$$

On remplace x_2 par $x_2 + \rho(w,p_T)$ dans (38) pour obtenir

$$\rho(w,p_T) =\rho_0(x_2,p_T) = \frac{p_T x_2}{x_2+1} \tag{45}$$

On dérive (38) par rapport à w et l'on trouve

$$\frac{\partial\rho}{\partial w} =\frac{\rho(w,p_T) - p_T}{\rho(w,p_T) - (p_T + x_2 + 1)} \tag{46}$$

En remplaçant, on a ainsi

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\partial\rho}{\partial w} =&1 - \frac{\frac{p_T x_2}{x_2+1} - p_T}{\frac{p_T x_2}{x_2+1} - (p_T + x_2 + 1)} \\ =&1 + \frac{p_T x_2 - p_T(x_2+1)}{p_T + (x_2+1)^2} = \frac{(x_2+1)^2}{p_T + (x_2+1)^2} \end{aligned} \tag{47}$$

9. Montrer que l'on peut ainsi reformuler (37) par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\nu\delta_1 x_1 + \nu g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = R(x_2, p_T)\left(-\delta_2(x_2) + g_2(x_1)\right) \end{cases} \tag{48}$$

où

$$R(x_2, p_T) = \frac{(x_2+1)^2}{p_T + (x_2+1)^2} > 0 \tag{49}$$

On a $w = x_2 + \rho(w, p_T)$ d'où $\dot{x}_2 = (1 - \frac{\partial \rho}{\partial x})\dot{w} = R(x_2, p_T)\dot{w}$

10. Montrer que ce système présente les mêmes points d'équilibre que (22). Formuler des conditions suffisantes d'instabilité portant sur son jacobien similaire à celles obtenues en (30)–(30).
On a $R(x_2, p_T) > 0$. Les points d'équilibre du système sont donc inchangés. En notant J_R son jacobien, on obtient comme condition d'instabilité

$$Tr(J(x^*)) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) + R(x_2^*, p_T)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) > 0 \tag{50}$$

$$Det(J(x^*)) = R(x_2^*, p_T)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*)\right) > 0 \tag{51}$$

11. Montrer que l'une de ces conditions reste inchangée par rapport à la partie précédente. En déduire qu'elle est satisfaite pour $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta_2$. Montrer que la seconde est satisfaite pour p_T suffisamment grand.
La condition sur le déterminant reste inchangée puisque $R(x_2, p_T) > 0$. On a montré en 4)c) qu'elle est satisfaite pour $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta_2$. En revanche, comme $R(x_2, p_T)$ est strictement décroissante en fonction de p_T avec $R(x_2, 0) = 1$ et $R(x_2, \infty) = 0$, on en déduit que, si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) > 0$, $Tr(J(x^*)) > 0$ pour p_T suffisamment grand. Or $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) > 0$ si $\delta_1 \in \Delta_1$ et $\delta_2 \in \Delta_2$.

12. En déduire comment on peut rendre ce système oscillant à l'aide de l'ajout de sites de liaison.

1. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \alpha_2 x_1 + \beta_2 u \\ \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 u \end{cases} \tag{52}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$.

(a) Quels sont les points d'équilibre du système en boucle ouverte ($u = 0$) ? Etudier leur stabilité.
Equilibres : $(y, 0)$. Valeurs propres : $-\alpha_2$ et 0. Stable mais pas asymptotiquement.

(b) Le système est-il commandable ?
Kalman : $\begin{pmatrix} \beta_2 & \alpha_2\beta_2 \\ \beta_1 & -\alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}$ de rang 2.

(c) On définit un changement de variable $(x_2, x_1) \mapsto (z_2, z_1) = (x_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_1, x_1)$. Montrer que la nouvelle dynamique est

$$\dot{z}_2 = \beta_2 u \tag{53}$$

$$\dot{z}_1 = -\alpha_1 z_1 + \beta_1 u \tag{54}$$

(d) Montrer à l'aide de la fonction de Lyapunov $V_2(z, x) = \frac{1}{2}(z_2^2 + z_1^2)$ que la loi de contrôle

$$u = -\beta_2 z_2 - \beta_1 z_1$$

stabilise asymptotiquement (z_2, z_1) et donc (x_2, x_1) à l'origine.

$$\dot{V}_2 = (\beta_2 z_2 + \beta_1 z_1)u - \alpha_1 z_1^2 = -\alpha_1 z_1^2 - (\beta_2 z_2 + \beta_1 z_1)^2 \leq 0 \tag{55}$$

On applique alors Lasalle pour conclure.

2. On considère maintenant le système

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \alpha_{32}x_2 + \alpha_{31}x_1 + \beta_3 u \\ \dot{x}_2 = \qquad\qquad \alpha_2 x_1 + \beta_2 u \\ \dot{x}_1 = \qquad\qquad -\alpha_1 x_1 + \beta_1 u \end{cases} \tag{56}$$

(a) Montrer que, en utilisant à nouveau le changement de variable $(x_2, x_1) \mapsto (z_2, z_1)$ de la question 1)(c) et en définissant une nouvelle variable de commande $u_3 = u + \beta_2 z_2 + \beta_1 z_1$, le système (56) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} u_3(t) \tag{57}$$

où L_3 est un vecteur ligne et A_3 une matrice carrée de dimension 2 Hurwitz (c.à.d. dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative).
La dynamique en (z_2, z_1) est asymptotiquement stable sous l'action de $u_2 = -\beta_2 z_2 - \beta_1 z_1$, selon la partie précédente, ce qui donne A_3. u_2 est une fonction de z_1, z_2 et la dynamique de x_3 ne dépend que de x_1, x_2, cad que de z_1, z_2 ce qui donne L_3.

(b) Soit $\underline{z} = (z_2, z_1)$. On cherche un changement de variable $(x_3, \underline{z}) \mapsto (z_3, \underline{z}) = (x_3 - \mathcal{M}(\underline{z}), \underline{z})$ tel que

$$\dot{z}_3 = \beta_3 u_3 \tag{58}$$

Justifier que $\mathcal{M}$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \underline{z}} = L_3 A_3^{-1}, \quad \mathcal{M}(0) = 0 \tag{59}$$

On obtient $\dot{z}_3 - \beta_3 u_3 = L_3 \underline{z} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \underline{z}} \dot{\underline{z}} = \left(L_3 - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \underline{z}} A_3\right) \underline{z} = 0$. Ceci devant être vrai pour tout $\underline{z}$, on en déduit l'équation voulue puisque A_3 est Hurwitz donc inversible.

On admet que (59) admet une unique solution qui définit bien un changement de variable.

(c) On considère la fonction de Lyapunov $V_3(z_3, z_2, z_1) = \frac{1}{2} z_3^2 + V_2(z_2, z_1)$ avec V_2 la fonction de Lyapunov utilisée précédemment en question 1)(d). Montrer que

$$\dot{V}_3 = (\beta_3 u_3 + \beta_2 z_2 + \beta_1 z_1) u_3 - \alpha_1 z_1^2 - (\beta_2 z_2 + \beta_1 z_1)^2$$

En déduire une loi u_3 assurant la stabilisation asymptotique de (z_3, z, x) et donc (x_3, y, x) vers l'origine.
Calcul direct et on choisit

$$u_3 = -(\beta_3 z_3 + \beta_2 z_2 + \beta_1 z_1)$$

3. Déterminer à l'aide de cette méthodologie, de façon itérative, une loi de contrôle stabilisant un système d'ordre n de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_n = \alpha_{n,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n,n-2}x_{n-2} + \ldots + \alpha_{n,1}x_1 + \beta_n u \\ \dot{x}_{n-1} = \qquad\qquad \alpha_{n,n-2}x_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1,1}x_1 + \beta_{n-1} u \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_2 = \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{21}x_1 + \beta_2 u \\ \dot{x}_1 = \qquad\qquad\qquad\qquad -x_1 + \beta_1 u \end{cases}$$

$u = u_2 + \ldots + u_n$ avec $u_k = -\beta_1 z_1 - \ldots - \beta_k z_k$ et $z_k = x_k - L_k A_k^{-1} \underline{z}_{k-1}$ avec $\underline{z}_k = (z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_2, z_1)$ et $z_1 = x_1$

4. On s'intéresse maintenant à la dynamique non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{y} = x^2 + 2x + u \\ \dot{x} = -x + u \end{cases}$$

à laquelle on va étendre la méthodologie développée précédemment.

(a) On considère tout d'abord la dynamique de x seule. Associer à x une fonction de Lyapunov stricte V.
On choisit $V = x^2/2$.

(b) Déterminer un changement de variable $z = y - \mathcal{M}(x)$ tel que la dérivée de z soit sous la forme $\dot{z} = h(x, z)u$.
On a $\dot{z} = x^2 + u - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}(-x + u_2)$ d'où l'équation $x + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = 0$ ou encore $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = -x$ avec $\mathcal{M}(0) = 0$. Ceci donne $\mathcal{M}(x) = -\frac{1}{2}x^2$

(c) Déterminer, à l'aide de la fonction de Lyapunov $W = V(x) + \frac{z^2}{2}$, une loi de contrôle u stabilisant (x, z).
On a $\dot{W} = -x^2 + xu + z(1 - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x})u = -x^2 + (x + z\,(1 + x))\,u$. Ceci amène au choix $u_2 = -\,(x + z\,(1 + x))$

5. Généraliser cette méthodologie dans le cas de la dynamique plus générale

$$\begin{cases} \dot{y} = g(x) + g_u(x)u \\ \dot{x} = f(x) + f_u(x)u \end{cases}$$

où f, f_u, g, g_u sont des fonctions nulles à l'origine et $\dot{x} = -f(x)$ est une dynamique asymptotiquement stable. Quelles difficultés supplémentaires se posent par rapport au cas précédent ?
L'équation régissant $\mathcal{M}$ est alors

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} f(x) = g(x) \tag{60}$$

$$\mathcal{M}(0) = 0 \tag{61}$$

L'existence d'une solution, qui plus est définissant un changement de variable, n'est pas acquise. Qui plus est, il faudrait être en mesure de déterminer explicitement une fonction de Lyapunov associée à la dynamique en x pour obtenir une expression explicite de la loi de contrôle finale.

Exercice 3 Stabilisation des oscillations de tangage [12 Points]

Un avion (ou un autre objet aérodynamique) est souvent l'objet d'oscillations venant perturber son orientation. Ainsi, on a représenté sur la figure 2 deux types d'oscillations de l'angle de tangage, l'oscillation court-terme et l'oscillation phugoïde. Cette dernière est caractérisée par un alignement du corps de l'avion avec la trajectoire (on parle d'angle d'incidence nul).

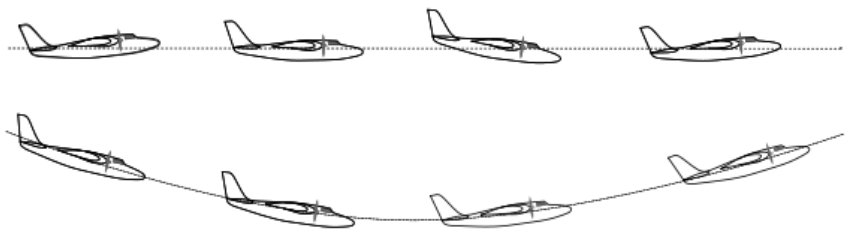


FIGURE 2 – Schéma de deux type d'oscillations de tangage. En bas oscillation de trajectoire phugoïde.

Ces oscillations sont dûes à la nature des forces aérodynamiques et à l'emplacement de leur point d'application.

Un document fondateur dans le domaine du contrôle dans le domaine aérospatial est le document donné en annexe.

On demande de proposer un système (capteur, actionneur, algorithme de contrôle) permettant de réduire les oscillations de tangage représentées sur la figure 2. On pourra s'inspirer du document donné en annexe. On pourra aussi librement utiliser toute autre source d'inspiration. On cherchera à décrire un système permettant de laisser au pilote la possibilité de manoeuvrer l'avion. On pourra proposer différents développements permettant au système de fonctionner à différentes altitudes, et imaginer différentes perturbations pouvant être maîtrisées. Le format de la réponse est libre. Il n'est pas impératif de proposer des équations.

Stabilisation des oscillations de tangage

Le document donné en annexe est un des brevets déposés par R. H. Goddard (1882 - 1945), célèbre scientifique américain ayant grandement contribué au développement des fusées à propulsion liquide. Il décrit un système de stabilisation utilisant un gyroscope permettant de détecter la rotation du corps aérodynamique, dont les mesures servent ensuite à engendrer des couples par déflection des flux de combustion grâce à des surfaces contrôlées. Ce principe reste très largement utilisé aujourd'hui sous des formes modernisées.

Dans le cas considéré, on peut utiliser un gyroscope (dans une version plus miniaturisée), y compris en utilisant des technologies telles que déployées dans l'électronique grand public pour détecter la vitesse de rotation de l'avion. Les angles peuvent être estimés par des mesures de direction, notamment en regardant le ciel (soleil, maximum de luminosité, réflection du sol dans les cas diurnes), les étoiles dans les cas nocturnes. En l'absence de visibilité, d'autres systèmes de balises ou de mesures directionnelles peuvent être envisagées, y compris pour des applications bas-coût. Pour les applications où la sécurité est primordiale, on utilisera des centrales inertielles (gyromètres, accéléromètres) de précision.

L'actionneur le plus simple dans le cas de l'avion est l'empennage, qui bénéficie d'un important effet de levier. On peut d'ailleurs utiliser la dérive pour l'axe de lacet.

La dynamique d'oscillation étant (principalement) du deuxième ordre, on devra prévoir un régulateur sous forme de bouclage d'état (angle, vitesse de rotation). Les réglages vont principalement dépendre du gain de l'actionneur, directement dépendant de la densité de l'air (et donc de l'altitude). La masse de l'avion va jouer, au travers de l'inertie, déplacant la position relative du centre de gravité par rapport au centre des forces aérodynamique causant les oscillations. Enfin, il faudra connaitre la vitesse (par rapport à l'air) pour établir le modèle aérodynamique. La présence de vent va rajouter une importante source de perturbations, qu'on pourra rejeter de manière structurée (vent constant, avec l'ajout d'états observables) ou non structurée (rafales).

Le système exposé précédemment permet en théorie de maintenir un vol horizontal à vitesse constante.

Pour laisser le pilote décider des manoeuvres, il faut introduire une notion d'angle de référence. Celui-ci sera librement choisi par le pilote, puis servira de consigne pour le régulateur du système. Si cette consigne est lentement variable, une simple translation des variables angulaire suffira à obtenir l'effet désiré. Si la consigne est un signal régulier, significativement variable, il faudra tenir compte dans la loi de commande des dérivées du signal, comme on l'a souvent fait dans les exercices du cours.

Examen de Physique II

Physique Statistique

20 juin 2019

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Cours de physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Constantes :
Constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s , vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}
Charge de l'électron : $q = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} = $8,62 \times 10^{-5}$ eV.K^{-1}
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$

Les 2 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; Rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs, et ***en particulier de justifier vos raisonnements dans les questions du type « Montrer que »*** *; les poids respectifs de chaque exercice pourraient être 30/10 pour une note sur 40.*

1 Un modèle d'alliage magnétique

On considère un double réseau bidimensionnel carré formé de deux types de sites, A et B, organisés en deux sous-réseaux comme indiqué dans la figure ci-dessous. Les sites A (resp. B) sont situés aux intersections du sous-réseau A (resp. B). On suppose que chacun de ces sites porte un spin $S_i = \pm 1$ qui interagit avec ses voisins de la manière suivante :

- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^A S_j^A$, avec J_1 une constante strictement positive,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites B (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^B S_j^B$, avec J_1 la même constante strictement positive que pour le réseau A,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A et B (qui sont donc premiers voisins sur le réseau complet) est $+J_2 S_i^A S_j^B$, avec J_2 une constante strictement positive.

On suppose par ailleurs que $J_2 < J_1$. En outre, lorsqu'un champ magnétique externe B_e est appliqué au système, l'énergie ajoutée au système par le site S_i^A (resp. S_j^B) est :

$$E = -M_i^A B_e = -\mu\ S_i^A B_e \quad (\text{resp.} \quad E = -\mu\ S_j^b B_e)$$

μ étant le moment magnétique associé à chaque site.

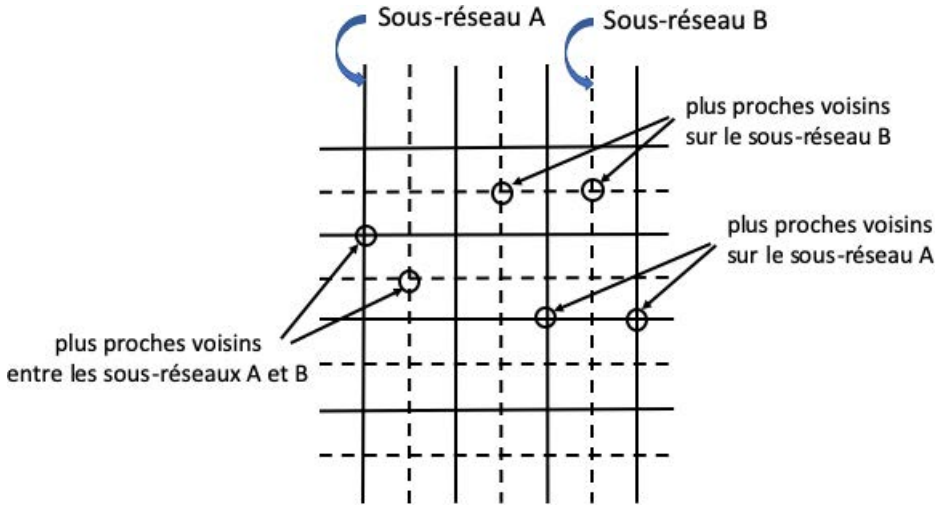


FIGURE 1 – Deux sous-réseaux A et B. Chaque intersection à l'intérieur d'un sous-réseau est un site de ce sous-réseau et porte un spin.

1. Justifier très clairement que le hamiltonien complet du système en présence d'un champ magnétique externe B_e s'écrit en fonction des variables S_i^A et S_j^B et des paramètres μ, J_1 et J_2 de la façon suivante :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{<i,j> \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{<i,j> \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{<i \in A, j \in B>} S_i^A S_j^B$$

où la notation $< i, j > \in A$ désigne des sites voisins appartenant au sous-réseau A (et de même pour les autres types de voisins).

2. Dans l'approximation de champ moyen, on considère que l'influence de tous les autres spins sur l'un seul d'entre eux est équivalent à l'effet d'un champ magnétique interne qui vient s'ajouter au vrai champ magnétique externe. Justifier que, dans cette approximation, le champ interne vu par les spins du sous-réseau A (resp. celui vu par les spins du sous-réseau B) s'écrit :

$$B_{\text{int}}^A(i) = \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in A, <i,j>} S_j^A - J_2 \sum_{k \in B, <i,k>} S_k^B \right)$$

$$B_{\text{int}}^B(i) = \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in B, <i,j>} S_j^B - J_2 \sum_{k \in A, <i,k>} S_k^A \right)$$

où les sommes s'effectuent respectivement sur les voisins de i dans le sous-réseau A et les voisins de i dans le sous-réseau B. En supposant que les deux champs internes induits par les sites A et B ne dépendent pas du site i, en déduire que l'on peut réécrire le hamiltonien en ne conservant que des champs effectifs B_{eff}^A et B_{eff}^B ainsi que la somme des spins sur les sites A et la somme des spins sur les sites B, les champs effectifs étant définis par :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^A \qquad \text{et} \qquad B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^B$$

(On justifiera en particulier avec soin le facteur 1/2.)

3. En déduire les expressions des champs effectifs en fonction des valeurs moyennes $\sigma_A = \langle S^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S^B \rangle$ (qui sont indépendantes des sites de sous-réseaux sur lesquels les spins vivent).
4. Donner l'expression générale de la fonction de partition $Z_N(\beta, B_e)$ du système, puis factoriser la en montrant qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$Z_N(\beta, B_e) = z_A(\beta, B_e)^N z_B(\beta, B_e)^N$$

où z_A et z_B sont des fonctions que l'on explicitera. En déduire l'énergie libre **par spin** du système dans la limite thermodynamique (on pourra introduire les paramètres réduits $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$).
5. Justifier que les valeurs moyennes des spins peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma_A = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \qquad \text{et} \qquad \sigma_B = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

et exprimer les membres de droite de ces égalités en fonction de b, K_1, K_2, σ_A et σ_B (on obtient donc ainsi des équations en σ_A et σ_B).
6. Pour $B_e = 0$ (soit $b = 0$), quelle solution est toujours possible ? Déterminer la température T_f sous laquelle un état ferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = \langle S^B \rangle \neq 0$) est possible, et la température T_a sous laquelle un état antiferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = -\langle S^B \rangle \neq 0$) est possible.
7. Dans les gammes de températures où plusieurs états sont possibles, l'un de ces états est-il thermodynamiquement stable et si oui, lequel ? (on utilisera des considérations fondées sur l'énergie libre du système dans les divers états possibles).
8. Montrer que la susceptibilité magnétique à champ nul

$$\chi = \lim_{B\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T\right]$$

(où M est l'aimantation totale du système) suit la loi de Curie-Weiss, $\chi \sim (T - T_f)^{-1}$, à haute température, mais qu'elle suit une loi différente pour $T < T_a$. On montrera en particulier que cette susceptibilité atteint une valeur finie pour $T = T_f$ et reste continue au voisinage de $T = T_a$. Donner la valeur de la susceptibilité magnétique en $T = T_f$.

2 Le potentiel chimique d'un système fermionique à trois états

On considère un système quantique composé de N fermions sans interactions pouvant occuper chacun trois états quantiques possibles, un d'énergie ε_0 et deux d'énergie identique ε_1 (il y a donc $3N$ états disponibles dans le système).

1. Dans quel ensemble se place-t-on pour étudier le système ? Quels sont les paramètres utilisés pour décrire l'état du système ? Écrire l'expression formelle de la fonction de partition correspondante, puis calculer la pour le système décrit plus haut.

2. En déduire la valeur du potentiel thermodynamique associé (entropie, énergie libre, grand potentiel, ... selon l'ensemble retenu pour décrire le système). Quel est la valeur du potentiel chimique en fonction de la température (on pourra introduire la variable $X = e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}$ et le paramètre $\alpha = e^{\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$). Donner les limites (ou des équivalents) de ce potentiel chimique pour $T \to 0+$ et $T \to +\infty$.

Corrigé de l'examen de Physique II

Physique Statistique

20 juin 2019

Durée : 2h30.
Documents autorisés : Cours de physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice**.

Constantes :
Constante de Planck : $\hbar = 1,06.10^{-34}$ J.s , vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}
Charge de l'électron : $q = 1,6.10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9.08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c^2
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} = $8,62 \times 10^{-5}$ eV.K^{-1}
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$

Les 2 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; Rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs, et ***en particulier de justifier vos raisonnements dans les questions du type « Montrer que »*** *; les poids respectifs de chaque exercice pourraient être 30/10 pour une note sur 40.*

1 Un modèle d'alliage magnétique

On considère un double réseau bidimensionnel carré formé de deux types de sites, A et B, organisés en deux sous-réseaux comme indiqué dans la figure ci-dessous. Les sites A (resp. B) sont situés aux intersections du sous-réseau A (resp. B). On suppose que chacun de ces sites porte un spin $S_i = \pm 1$ qui interagit avec ses voisins de la manière suivante :

- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^A S_j^A$, avec J_1 une constante strictement positive,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites B (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^B S_j^B$, avec J_1 la même constante strictement positive que pour le réseau A,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A et B (qui sont donc premiers voisins sur le réseau complet) est $+J_2 S_i^A S_j^B$, avec J_2 une constante strictement positive.

On suppose par ailleurs que $J_2 < J_1$. En outre, lorsqu'un champ magnétique externe B_e est appliqué au système, l'énergie ajoutée au système par le site S_i^A (resp. S_j^B) est :

$$E = -M_i^A B_e = -\mu\ S_i^A B_e \quad \text{(resp.} \quad E = -\mu\ S_j^b B_e)$$

μ étant le moment magnétique associé à chaque site.

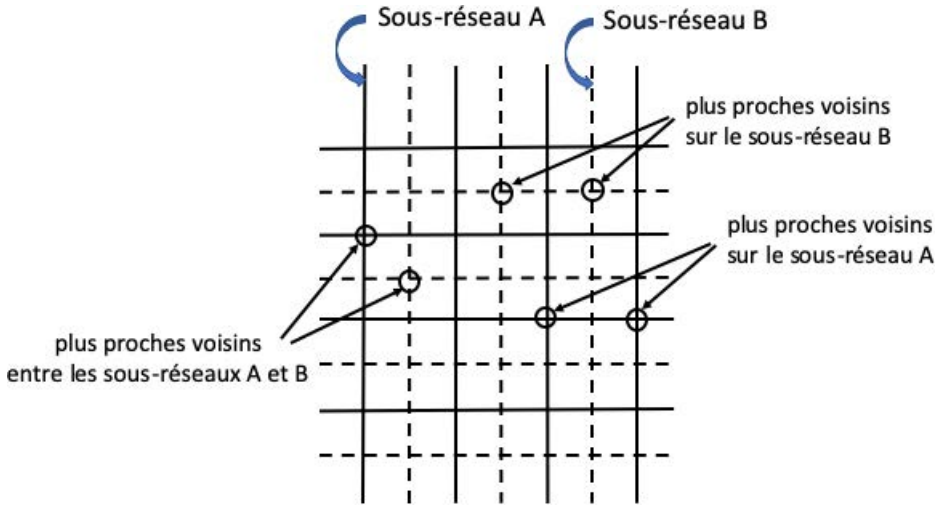


FIGURE 1 – Deux sous-réseaux A et B. Chaque intersection à l'intérieur d'un sous-réseau est un site de ce sous-réseau et porte un spin.

1. Justifier très clairement que le hamiltonien complet du système en présence d'un champ magnétique externe B_e s'écrit en fonction des variables S_i^A et S_j^B et des paramètres μ, J_1 et J_2 de la façon suivante :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{<i,j> \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{<i,j> \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{<i \in A, j \in B>} S_i^A S_j^B$$

où la notation $< i, j > \in A$ désigne des sites voisins appartenant au sous-réseau A (et de même pour les autres types de voisins).

Réponse :

Le hamiltonien complet du système s'écrit :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{<i,j> \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{<i,j> \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{<i \in A, j \in B>} S_i^A S_j^B$$

Les deux premiers termes correspondent à l'interaction entre les spins des sous-réseaux A et B et le champ magnétique externe, les deux suivant donnent l'interaction (ferromagnétique) entre deux sites plus proches voisins sur chacun des deux sous-réseaux, tandis que le dernier terme correspond à l'interaction (antiferromagnétique) entre plus proches voisins de sous-réseaux différents. On remarque que les plus proches voisins du sous-réseau A appartiennent au sous-réseau B et vice versa.

2. Dans l'approximation de champ moyen, on considère que l'influence de tous les autres spins sur l'un seul d'entre eux est équivalent à l'effet d'un champ magnétique interne qui vient s'ajouter au vrai champ magnétique externe. Justifier que, dans cette approximation, le champ interne

vu par les spins du sous-réseau A (resp. celui vu par les spins du sous-réseau B) s'écrit :

$$B_{\text{int}}^A(i) = \frac{1}{\mu}\left(J_1 \sum_{j\in A,<i,j>} S_j^A - J_2 \sum_{k\in B,<i,k>} S_k^B\right)$$
$$B_{\text{int}}^B(i) = \frac{1}{\mu}\left(J_1 \sum_{j\in B,<i,j>} S_j^B - J_2 \sum_{k\in A,<i,k>} S_k^A\right)$$

où les sommes s'effectuent respectivement sur les voisins de i dans le sous-réseau A et les voisins de i dans le sous-réseau B. En supposant que les deux champs internes induits par les sites A et B ne dépendent pas du site i, en déduire que l'on peut réécrire le hamiltonien en ne conservant que des champs effectifs B_{eff}^A et B_{eff}^B ainsi que la somme des spins sur les sites A et la somme des spins sur les sites B, les champs effectifs étant définis par :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2}B_{\text{int}}^A \qquad \text{et} \qquad B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2}B_{\text{int}}^B$$

(On justifiera en particulier avec soin le facteur 1/2.)

Réponse :

Par définition, dans une approximation de champ moyen, l'énergie d'interaction du spin S_i^A avec ses voisins s'écrit :

$$E_i^A = -\left(J_1 \sum_{j\in A,<i,j>} S_j^A - J_2 \sum_{k\in B,<i,k>} S_k^B\right) S_i^A$$

où la somme sur j parcourt tous les sites plus proches voisins de i sur le sous-réseau A tandis que la somme sur k parcourt tous les sites plus proches voisins de i sur le sous-réseau B. En assimilant cette énergie à une énergie magnétique du spin S_i^A dans un champ extérieur $B_{\text{eff}}^A(i)$, on a donc :

$$-\mu B_{\text{int}}^A(i) S_i^A = -\left(J_1 \sum_{j\in A} S_j^A - J_2 \sum_{k\in B} S_k^B\right) S_i^A$$

d'où l'expression demandée (et la même chose pour B). On peut donc alors réécrire le hamiltonien en utilisant des champs internes moyens :

$$H_{CM} = -\mu\left(B_{\text{eff}}^A \sum_{i\in A} S_i^A + B_{\text{eff}}^B \sum_{j\in B} S_j^B\right)$$
$$\text{avec} \qquad B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2}B_{\text{int}}^A \qquad \text{et} \qquad B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2}B_{\text{int}}^B$$

Les facteurs 1/2 dans les champs magnétiques internes apparaissent pour éviter de compter deux fois les paires d'indices de spins dans les interactions magnétiques.

3. En déduire les expressions des champs effectifs en fonction des valeurs moyennes $\sigma_A = \langle S^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S^B \rangle$ (qui sont indépendantes des sites de sous-réseaux sur lesquels les spins vivent).

Réponse :

En écrivant $\sigma_A = \langle S_i^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S_j^B \rangle$, les champs effectifs deviennent :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{J_1}{2\mu} z_{AA}\sigma_A - \frac{J_2}{2\mu} z_{AB}\sigma_B$$
$$B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{J_1}{2\mu} z_{BB}\sigma_B - \frac{J_2}{2\mu} z_{BA}\sigma_A$$

où les z_{ab} sont les nombres de coordination (à savoir le nombre de voisins d'un sous-réseau vers lui-même ou d'un sous-réseau vers l'autre). Ils sont tous égaux à 4 dans le cas qui nous intéresse ici.

4. Donner l'expression générale de la fonction de partition $Z_N(\beta, B_e)$ du système, puis factoriser la en montrant qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$Z_N(\beta, B_e) = z_A(\beta, B_e)^N z_B(\beta, B_e)^N$$

où z_A et z_B sont des fonctions que l'on explicitera. En déduire l'énergie libre **par spin** du système dans la limite thermodynamique (on pourra introduire les paramètres réduits $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$).

Réponse :

Avec cette approximation, on peut facilement calculer la fonction de partition puisque H_{CM} est une somme de termes, chaque terme étant linéaire en fonction de chacun des spins. Les spins deviennent donc indépendants en supposant un champ effectif indépendant du site. Supposons qu'il y a N sites de chaque type (et l'on considèrera la limite $N \to +\infty$ dans laquelle l'invariance de translation est vérifiée). La fonction de partition s'obtient alors en sommant sur toutes les configurations possibles de spins :

$$Z_N(\beta, B_e) = \sum_{\{S_i=\pm 1\}} e^{-\beta H_{CM}} = \left[2\cosh\left(\beta\mu B_{\text{eff}}^A\right)\right]^N \left[2\cosh\left(\beta\mu B_{\text{eff}}^B\right)\right]^N$$

car

$$z_A(\beta, B_e) = \sum_{\{S\}} e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A S} = e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A} + e^{-\beta\mu B_{\text{eff}}^A} = 2\cosh\left(\beta\mu B_{\text{eff}}^A\right) = 2\cosh\left(b + K_1\sigma_A - K_2\sigma_B\right)$$
$$z_B(\beta, B_e) = \sum_{\{S\}} e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B S} = e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B} + e^{-\beta\mu B_{\text{eff}}^B} = 2\cosh\left(\beta\mu B_{\text{eff}}^B\right) = 2\cosh\left(b + K_1\sigma_B - K_2\sigma_A\right)$$

avec $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$. L'énergie libre par spin dans la limite thermodynamique est alors :

$$\begin{aligned} F(T, B_e) &= \lim_{N\to+\infty} -\frac{k_B T \ln Z_N}{2N} \\ &= -\frac{k_B T}{2}\Big[\ln\cosh(b + K_1\sigma_A - K_2\sigma_B) + \ln\cosh(b + K_1\sigma_B - K2\sigma_A) + 2\ln 2\Big] \end{aligned}$$

5. Justifier que les valeurs moyennes des spins peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma_A = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \qquad \text{et} \qquad \sigma_B = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

et exprimer les membres de droite de ces égalités en fonction de b, K_1, K_2, σ_A et σ_B (on obtient donc ainsi des équations en σ_A et σ_B).

Réponse :

Les valeurs moyennes des spins s'obtiennent en utilisant les probabilités déduites des poids de Boltzmann-Gibbs et de la fonction de partition :

$$\sigma_A = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \qquad \text{et} \qquad \sigma_B = \frac{1}{Z}\sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

On peut considérer ces équations de deux manières : (i) soit Z est la fonction de partition du système complet, et alors la somme s'effectue sur toutes les configurations possibles, configurations que l'on va pouvoir regrouper en configurations où $S_i^A = +1$ et en configurations où $S_i^A = -1$; (ii) soit Z est la fonction de partition z_A et la partie dans l'exponentielle ne concerne alors que l'énergie du site A numéro i. Dans les deux cas, le résultat est finalement :

$$\sigma_A = \text{prob}(S^A = 1) - \text{prob}(S^A = -1) = \frac{e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A}}{z_A} - \frac{e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A}}{z_A} = \tanh(b + K_1\sigma_A - K_2\sigma_B)$$

$$\sigma_B = \text{prob}(S^B = 1) - \text{prob}(S^B = -1) = \frac{e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B}}{z_B} - \frac{e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B}}{z_B} = \tanh(b + K_1\sigma_B - K_2\sigma_A)$$

Il s'agit d'un jeu de deux équations couplées en σ_A et σ_B qui permet d'obtenir les valeurs de ces deux moyennes.

6. Pour $B_e = 0$ (soit $b = 0$), quelle solution est toujours possible ? Déterminer la température T_f sous laquelle un état ferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A\rangle = \langle S^B\rangle \neq 0$) est possible, et la température T_a sous laquelle un état antiferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A\rangle = -\langle S^B\rangle \neq 0$) est possible.

Réponse :

Lorsque $B_e = 0$, le système possède deux symétries : l'énergie du système est inchangée par un retournement de tous les spins, ou bien si l'on intervertit les sous-réseaux A et B. Ces symétries impliquent de façon assez immédiate que les équations pour σ_A et σ_B doivent avoir trois types de solutions : (i) un état paramagnétique (p) caractérisé par $\sigma_A = \sigma_B = 0$; (ii) un état ferromagnétique (f) caractérisé par $\sigma_A = \sigma_B \neq 0$; (iii) un état antiferromagnétique (a) caractérisé par $\sigma_A = -\sigma_B \neq 0$.

— Si l'on applique $b = 0$ dans les équations précédentes, alors il est évident que $\sigma_A = \sigma_B = 0$ est une solution.
— Si l'on suppose $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_f$, alors les deux équations sont satisfaites si :

$$\sigma_f = \tanh\left[(K_1 - K_2)\sigma_f\right]$$

ce qui est possible si $T < T_f = 2(J_1 - J_2)/k_B$.

— Enfin, si l'on suppose $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma_a$, on trouve que les deux équation sont à nouveau satisfaites si :

$$\sigma_a = \tanh\left[(K_1 + K_2)\sigma_a\right]$$

ce qui est possible si $T < T_a = 2(J_1 + J_2)/k_B$. Puisque $J_2 > 0$, on a $T_f < T_a$.

On arrive donc à un tableau avec trois gammes de température :
— Au dessus de T_a, seul l'état paramagnétique est autorisé et le système possède une aimantation nulle en champ nul,
— Si $T_f < T < T_a$, les états paramagnétique et antiferromagnétique sont possibles.
— Si $T < T_f$, les trois états para-, antiferro- et ferromagnétique sont possibles.

7. Dans les gammes de températures où plusieurs états sont possibles, l'un de ces états est-il thermodynamiquement stable et si oui, lequel ? (on utilisera des considérations fondées sur l'énergie libre du système dans les divers états possibles).

Réponse :

Il est intuitivement clair que l'état antiferromagnétique a l'énergie la plus faible. On peut donc s'attendre à ce que ce soit l'état le plus stable lorsqu'il peut exister. En termes thermodynamique, l'état stable est celui qui possède la plus petite énergie libre. On calcule donc F(T,B=0) pour ces trois états :

$$\begin{aligned} F_p &= -k_B T \ln 2 \\ F_f &= -k_B T \Big\{ \ln\cosh[(K_1 - K_2)\sigma_f] + \ln 2 \Big\} \\ F_a &= -k_B T \Big\{ \ln\cosh[(K_1 - K_2)\sigma_a] + \ln 2 \Big\} \end{aligned}$$

Les équations ne permettent pas d'obtenir des solutions exactes pour σ_f et σ_a, mais ces équations sont de la forme $\sigma = \tanh(K\sigma)$. On peut voir sur un graphique que σ est alors une fonction croissante de K. Pour σ_f, $K = K_1 - K_2$ tandis que pour σ_a, $K = K_1 + K_2$ ce qui implique que $\sigma_a > \sigma_f$. Par conséquent, quand il existe, l'état antiferromagnétique est le plus stable. On observera donc l'état paramagnétique pour toutes les températures $T > T_a$ et l'état antiferromagnétique pour toutes les températures $T < T_a$, même pour celles inférieures à T_f. L'état ferromagnétique n'est jamais stable.

8. Montrer que la susceptibilité magnétique à champ nul

$$\chi = \lim_{B\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T\right]$$

(où M est l'aimantation totale du système) suit la loi de Curie-Weiss, $\chi \sim (T - T_f)^{-1}$, à haute température, mais qu'elle suit une loi différente pour $T < T_a$. On montrera en particulier que cette susceptibilité atteint une valeur finie pour $T = T_f$ et reste continue au voisinage de $T = T_a$. Donner la valeur de la susceptibilité magnétique en $T = T_f$.

Réponse :

L'aimantation par spin de notre système est :

$$M = \frac{1}{2}\mu\left[\langle S_i^A\rangle + \langle S_j^B\rangle\right] = \frac{\mu}{2}\left(\sigma_A + \sigma_B\right)$$

La susceptibilité magnétique à champ nul s'exprime donc :

$$\chi = \lim_{B\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T\right] = \frac{1}{2}\beta\mu^2\left(\chi_A + \chi_B\right)$$

avec

$$\chi_A = \lim_{b\to 0}\left[\left(\frac{\partial \sigma_A}{\partial b}\right)_T\right] \qquad \text{et} \qquad \chi_B = \lim_{b\to 0}\left[\left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial b}\right)_T\right]$$

À des températures supérieures à T_a, on a vu que $\sigma_A = \sigma_B = 0$ lorsque $b = B = 0$. On peut donc supposer qu'en champ faible, $\sigma_A \simeq \chi_A b$ et $\sigma_B \simeq \chi_B b$. Si l'on remplace ces valeurs dans les équations pour σ_A et σ_B et en utilisant le développement en série $\tanh = x + O(x^3)$, on aboutit aux deux équations suivantes :

$$\chi_A = 1 + K_1\chi_A - K_2\chi_B \qquad \text{et}\chi_B = 1 + K_1\chi_B - K_2\chi_A$$

qui se résout en :

$$\chi_A = \chi_B = \frac{1}{1 - K_1 + K_2} = \frac{T}{T - T_f}$$

La susceptibilité totale est donc :

$$\chi = \frac{1}{2}\beta\mu^2(\chi_A + \chi_B) = \frac{\mu^2}{k_B(T - T_f)}$$

C'est la loi de Curie-Weiss qui s'applique à un ferromagnétique simple avec une température de Curie T_f. À première vue, ceci peut sembler étonnant puisque nous avons trouvé plus haut que l'état ferromagnétique est instable, même sous T_f. La divergence de χ en $T = T_f$ ne doit cependant pas exister dans la réalité car il n'y a pas de transition vers un état ferromagnétique à T_f. Pour comprendre ceci dans le détail, on doit d'abord remarquer que notre résultat pour χ est valable seulement pour $T > T_a > T_f$. Évaluons donc la susceptibilité de l'état antiferromagnétique, qui est stable pour $T < T_a$. En champ nul, on a $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma_a$. Dans un champ faible, on aura donc :

$$\sigma_A = \sigma_a + \chi_A b + O(b^2) \qquad \text{et} \qquad \sigma_B = -\sigma_a + \chi_B b + O(b^2)$$

Si l'on revient à nos équations initiales en σ_A et σ_B, on s'aperçoit alors que l'on doit développer tanh autour de $(K_1 + K_2)\sigma_a$, ce qui donne en définitive :

$$\sigma_a + \chi_A b = \tanh\left[(K_1 + K_2)\sigma_a\right] + \frac{1}{\cosh^2\left[(K_1 + K_2)\sigma_a\right]}\left(1 + K_1\chi_A - K_2\chi_B\right)b$$

On sait par ailleurs que $\tanh\left[(K_1+K_2)\sigma_a\right]=\sigma_a$, d'où :

$$\frac{1}{\cosh^2\left[(K_1+K_2)\sigma_a\right]}=1-\tanh^2\left[(K_1+K_2)\sigma_a\right]=1-\sigma_a^2$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\chi_A&=(1-\sigma_a^2)\left(1+K_1\chi_A-K_2\chi_B\right)\\ \chi_B&=(1-\sigma_a^2)\left(1+K_1\chi_B-K_2\chi_A\right)\end{aligned}$$

Ces deux équations se résolvent en :

$$\chi_A=\chi_B=\frac{1-\sigma^2}{1-(1-\sigma_a^2)(K_1-K_2)}=\frac{T(1-\sigma^2)}{T-(1-\sigma_a^2)T_f}$$

Finalement, la susceptibilité magnétique totale du système s'écrit :

$$\chi(T)=\begin{cases}\dfrac{\mu^2(1-\sigma_a^2)}{k_B\left[T-(1-\sigma_a^2)T_f\right]} & \text{pour} \quad T<T_a\\[2ex] \dfrac{\mu^2}{k_B(T-T_f)} & \text{pour} \quad T>T_a\end{cases}$$

À la température $T=T_a$, les deux expressions ci-dessus prennent la même valeur :

$$\chi(T_a)=\frac{\mu^2}{k_B(T_a-T_f)}$$

A la température $T=T_f<T_a$ en revanche, seule la première expression s'applique et elle prend une valeur finie :

$$\chi(T_f)=\frac{\mu^2}{k_BT_f}\frac{1-\sigma_a^2}{\sigma_a^2}$$

Dans cette approximation de champ moyen, la susceptibilité est finie et continue à la transition antiferromagnétique. Cette situation est très différente d'un ferromagnétique pour lequel la susceptibilité magnétique diverge à la transition (selon la loi de Curie-Weiss). La différence tient au fait que le champ magnétique tend à aligner tous les spins, renforçant les interactions ferromagnétiques. En revanche, les interactions antiferromagnétiques favorisent les états dans lesquels des spins voisins sont alignés dans des directions opposées, en s'opposant au champ magnétique.

2 Le potentiel chimique d'un système fermionique à trois états

On considère un système quantique composé de N fermions sans interactions pouvant occuper chacun trois états quantiques possibles, un d'énergie ε_0 et deux d'énergie identique ε_1 (il y a donc $3N$ états disponibles dans le système).

1. Dans quel ensemble se place-t-on pour étudier le système ? Quels sont les paramètres utilisés pour décrire l'état du système ? Écrire l'expression formelle de la fonction de partition correspondante, puis calculer la pour le système décrit plus haut.

   Réponse :

   Même si le nombre de particules est a priori donné, il s'agit d'un système quantique et on se place donc de façon privilégiée dans l'ensemble grand canonique. Non seulement la comptabilité exacte est quasi impossible en canonique (l'approximation de Maxwell-Boltzmann ne fonctionnant qu'à haute température), mais encore le nombre d'états disponibles ($3 \times N$) n'est pas très grand devant le nombre de particules. On ne peut donc jamais se placer dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann.
   Les paramètres retenus pour décrire le système sont donc la température (β ou T) et le potentiel chimique μ (et le volume V, non considéré ici). La grande fonction de partition $\Xi(\beta, \mu)$ pour des fermions s'écrit alors formellement :

$$\ln \Xi(\beta, \mu) = \int_E \ln\left(1 + e^{-\beta(E-\mu)}\right)\ g(E)\ dE$$

   où $g(E)$ est la densité d'états individuels de particules du système considéré. Dans notre cas, la densité d'états est la somme de deux Diracs en deux énergies différentes, chaque particule ayant trois états disponibles à occuper. On a donc

$$g(E) = N\Big\{\delta(\varepsilon_0) + 2\delta(\varepsilon_1)\Big\}$$

   d'où

$$\ln \Xi(\beta, \mu) = N\left[\ \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_0-\mu)}\right) + 2\ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)}\right)\ \right]$$

2. En déduire la valeur du potentiel thermodynamique associé (entropie, énergie libre, grand potentiel, ... selon l'ensemble retenu pour décrire le système). Quel est la valeur du potentiel chimique en fonction de la température (on pourra introduire la variable $X = e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}$ et le paramètre $\alpha = e^{\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}$). Donner les limites (ou des équivalents) de ce potentiel chimique pour $T \to 0+$ et $T \to +\infty$.

   Réponse :

   Le grand potentiel vaut donc :

$$J(\beta, \mu) = -k_B T \ln \Xi(\beta, \mu) = -N k_B T\left(\ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_0-\mu)}\right) + 2\ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)}\right)\right)$$

   Évaluons le potentiel chimique μ à température T. Pour cela, on écrit la valeur du nombre de particules :

$$N = \int_E \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}}\ g(E)\ dE = N\left(\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}} + \frac{2}{1 + e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)}}\right)$$

La quantité $X = e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}$ vérifie donc :

$$1 = \frac{1}{1+X} + \frac{2}{1+\alpha X} \qquad \text{avec} \quad \alpha = e^{\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$$

On en déduit l'équation satisfaite par X :

$$(1+X)(1+\alpha X) = (1+\alpha X) + 2(1+X) \qquad \text{soit} \qquad \alpha X^2 - X - 2 = 0$$

dont la solution positive est : $X = \dfrac{1+\sqrt{1+8\alpha}}{2\alpha}$

— Pour $T \to 0+$, $\beta \to +\infty$, $\alpha \to +\infty$ (car $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$), et donc $X \approx \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}$, ce qui correspond à :

$$\beta(\varepsilon_0 - \mu) \approx \beta\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2} \qquad \text{et donc} \qquad \mu \approx \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}$$

— Pour $T \to +\infty$, $\beta \to 0+$, $\alpha \to 1$, et donc $X \approx 2$, ce qui correspond à :

$$\beta(\varepsilon_0 - \mu) \approx \ln 2 \qquad \text{et donc} \qquad \mu \approx \varepsilon_0 - k_B T \ln 2$$

ENSMP

MATHÉMATIQUES 2 (1132)
Mercredi 24 avril 2019

EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES

2 heures 35

Résumé du cours autorisé.
Calculatrices et portables interdits.

Indiquez vos NOM, PRÉNOM et NUMÉRO DE GROUPE sur votre copie.

(groupe 1 : B. FIGLIUZZI ; groupe 2 : T. ROMARY ; groupe 3 : S. PIETRASZ ;
groupe 4 : P. MARTIN ; groupe 5 : S. NICULESCU)

L'exercice et les deux problèmes sont indépendants. On pourra admettre les résultats des questions non traitées.

EXERCICE (Mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$)

On note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $B_n(0,r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon r, où $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que pour tout $r > 0$, $\lambda_n(B_n(0,r)) = r^n v_n$, où $v_n := \lambda_n(B_n(0,1))$. (Indication : on pourra faire un changement de variables.)
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a

$$v_n = \frac{2\pi}{n}\, v_{n-2}.$$

(Indication : on pourra appliquer le théorème de Fubini-Tonelli en notant que

$$B_n(0,1) = \left\{x = (x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1,\ x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 < 1 - (x_{n-1}^2 + x_n^2)\right\} \quad .)$$

3. Calculer v_n pour $1 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (Indication : distinguer les cas n pair et n impair). Que vaut $\lim_{n\to+\infty} v_n$?
4. On note $\sigma_n(r)$ la mesure naturelle (surfacique) de $\partial B_n(0,r)$, qui est une fonction continue de r. On admet le résultat suivant, obtenu par intégration par tranche :

$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n;\ r_1 < \|x\| < r_2\}) = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_n(r)dr, \qquad \text{pour } 0 < r_1 < r_2.$$

Montrer que $\sigma_n(r) = nr^{n-1}v_n$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(1)$?

PROBLÈME 1 (Théorème d'Ingham)

On note $l^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, i.e.

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}};\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty\}.$$

Soit $(\omega_k)_{k\in Z}$ une suite de nombres réels vérifiant la condition de séparation spectrale uniforme :

$$\gamma := \inf_{k\neq n} |\omega_k - \omega_n| > 0. \tag{1}$$

On veut montrer que pour tout $T > 2\pi/\gamma$, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{C}} \in l^2(\mathbb{Z})$, on ait

$$C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2. \tag{2}$$

I. Dans cette partie on suppose que

$$\gamma = \pi. \tag{3}$$

1. Soit

$$h(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, +\infty[. \end{cases}$$

1.1 Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et que $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
1.2 Montrer que $\widehat{h} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et que $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.
1.3 Montrer que $\widehat{h}(-\xi) = \widehat{h}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et que $\widehat{h}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in [-1, 1]$.
1.4 Soit $g := h * h$. Montrer que la fonction g est bien définie, continue, paire, et que $g(x) = 0$ pour $|x| \geq \pi$. Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\beta \leq \widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \tag{4}$$

2. Soit $K \subset \mathbb{Z}$ une partie **finie** et soit $(a_k)_{k\in K}$ une suite de nombres complexes. On pose $f(t) = \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2.1 Montrer en justifiant bien que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t)|f(t)|^2 dt &= \sum_{k,n\in K} a_k \overline{a_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_k)t} dt && (5) \\ &= 2\pi \sum_{k,n\in K} a_k \overline{a_n} g(\omega_k - \omega_n) && (6) \\ &= 2\pi g(0) \sum_{k\in K} |a_k|^2 && (7) \end{aligned}$$

2.2 Montrer que $g(0) = \pi/2$ et que

$$\int_{-1}^{1} \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k\in K} |a_k|^2 \tag{8}$$

En déduire pour tout nombre $T > 2$ l'existence d'une constante $C_2 = C_2(T) > 0$ telle que

$$\int_0^T \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k\in K} |a_k|^2 \tag{9}$$

3. On veut montrer la seconde inégalité dans (2) pour la fonction $f(t) = \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t}$.
3.1 Montrer que $h \in H^1(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée généralisée $h'(x)$. Montrer que $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
3.2 Soit $R > 1$ arbitraire et soit

$$k := R^2 h * h + h' * h'.$$

Montrer que k est une fonction continue, paire et nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Exprimer $\widehat{k}(\xi)$ en fonction de $\widehat{h}(\xi)$, R et ξ. Montrer que $\widehat{k}(\xi) \leq 0$ pour $|\xi| \geq R$, et montrer l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\widehat{k}(\xi) \leq \alpha, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

3.3 Après avoir établi que $\widehat{h}(\xi) = 2\cos(\xi\pi/2)/(1-\xi^2)$ pour $\xi \neq \pm 1$, montrer que $\hat{k} \in L^1(\mathbb{R})$.
Justifier rapidement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(t)|f(t)|^2 dt = 2\pi k(0) \sum_{k\in K} |a_k|^2. \tag{11}$$

Montrer que $k(0) > 0$ et que

$$\sum_{k\in K} |a_k|^2 \leq \frac{\alpha}{2\pi k(0)} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt.$$

En déduire que si $T > 2$, il existe une constante $C_1 = C_1(T) > 0$ telle que

$$C_1 \sum_{k\in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt. \tag{12}$$

II. (Cas général) On suppose dans cette partie que $\gamma = \inf_{k\neq n} |\omega_k - \omega_n| > 0$.
1. En utilisant la partie I et un changement de variables linéaire, montrer que pour tout $T > 2\pi/\gamma$, il existe des constantes $C_1 = C_1(T,\gamma) > 0$, $C_2 = C_2(T,\gamma) > 0$ telles que pour toute partie finie $K \subset Z$ et toute suite $(a_k)_{k\in K}$ de nombres complexes, on ait

$$C_1 \sum_{k\in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k\in K} |a_k|^2. \tag{13}$$

2. Montrer que pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{Z})$, les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{i\omega_{-k} t}$ sont convergentes dans $L^2(0,T)$. (Indication : appliquer le critère de Cauchy et (13)). Montrer que (2) est valide avec les mêmes constantes C_1 et C_2 qu'à la question II. 1.
N.B. Le théorème d'Ingham est un résultat classique d'analyse *non harmonique* qui est d'usage courant dans l'étude du contrôle des EDP.

PROBLÈME 2 (Équation de Schrödinger sur le tore)
On s'intéresse aux solutions du système

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} &= 0, \quad x \in]0, 2\pi[,\ t \in \mathbb{R}, && (14)\\ u(t,0) &= u(t,2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, && (15)\\ u_x(t,0) &= u_x(t,2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, && (16)\\ u(0,x) &= \varphi(x), \quad x \in]0,2\pi[. && (17) \end{aligned}$$

Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p = L^p([0, 2\pi[, \mathcal{B}_{[0,2\pi[}, \frac{dx}{2\pi})$. On note $c_n(\varphi) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx$ pour $\varphi \in L^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer, par un calcul formel, que si $u(t,x) = \sum_{n \in Z} a_n(t) e^{inx}$ est solution de (14), (15), (16) et (17), alors $a_n(t) = c_n(\varphi) e^{-in^2 t}$.

2. On suppose dans cette question que φ est une fonction 2π-périodique de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
2.1 Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)| < +\infty$.
2.2 Montrer que la fonction $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$ est bien définie pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, que les dérivées partielles $u_t(t,x)$ et $u_{xx}(t,x)$ sont bien définies pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ et que la fonction u satisfait (14), (15), (16) et (17).

3. On suppose dans cette question que $\varphi \in L^2$. On note encore $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$.
3.1 Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t,.) \in L^2$. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t,.) \in L^2$ est continue.
3.2 Soit $D = \{(n,n);\ n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'application $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus D \mapsto (n-m, -n^2+m^2) \in \mathbb{Z}^2$ est injective.
3.3 Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et toute suite $(a_{n,m})_{-N \le n,m \le N}$, on a

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N \le n,m \le N} a_{n,m} e^{inx} e^{imt} \right|^2 dxdt = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-N}^{N} |a_{n,m}|^2.$$

3.4* Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N \le n,m \le N} c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)} e^{i(n-m)x} e^{i(-n^2+m^2)t} \right|^2 dxdt \le C^4 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \right)^2$$

pour une constante $C > 0$.
3.5 En déduire le résultat suivant (inégalité de Strichartz due à A. Zygmund, 1974):

$$\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t,x)|^4 dxdt \right)^{\frac{1}{4}} \le C \|\varphi\|_{L^2}.$$

A-t-on $u(t,.) \in L^4$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$? pour tout $t \in \mathbb{R}$?

CORRIGÉ DE L'EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE (Mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$)

1. Posant $y = rx$, d'où $dy = r^n dx$, on obtient

$$\lambda_n(B_n(0,r)) = \int_{B_n(0,r)} 1dy = \int_{B_n(0,1)} r^n dx = r^n v_n.$$

2. Par le théorème de Fubini-Tonelli appliqué sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ à la fonction borélienne positive $1_{B_n(0,1)}$, on obtient que

$$\begin{aligned} v_n &= \lambda_n(B_n(0,1)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B_n(0,1)} dx \\ &= \int_{B_2(0,1)} dx_{n-1} dx_n \int_{\{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2<1-x_{n-1}^2-x_n^2\}} dx_1 \cdots dx_{n-2} \\ &= \int_{B_2(0,1)} (1-x_{n-1}^2-x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} v_{n-2} dx_{n-1} dx_n \end{aligned}$$

où on a utilisé la question 1. dans la dernière égalité (avec $r = \sqrt{1-x_{n-1}^2-x_n^2}$). Passant en coordonnées polaires, on obtient que

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{\{(r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[\}} (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} v_{n-2} r dr d\theta \\ &= v_{n-2} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= 2\pi v_{n-2} \Big[-\frac{1}{n}(1-r^2)^{\frac{n}{2}} \Big]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{n} v_{n-2}. \end{aligned}$$

3. On a immédiatement que $v_1 = \int_{-1}^1 1dx_1 = 2$, $v_2 = \int_{\{x_1^2+x_2^2<1\}} 1dx_1dx_2 = \int_{\{(r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[\}} rdrd\theta = 2\pi\big[\frac{r^2}{2}\big]_0^1 = \pi$, puis par application de la question 2.

$$v_3 = \frac{2\pi}{3}v_1 = \frac{4\pi}{3},\ v_4 = \frac{2\pi}{4}v_2 = \frac{\pi^2}{2},\ v_5 = \frac{2\pi}{5}v_3 = \frac{8\pi^2}{15},\ \text{ et } v_6 = \frac{2\pi}{6}v_4 = \frac{\pi^3}{6}.$$

Calculons v_n, en commançant par n pair. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que

$$v_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

C'est vrai pour $p = 1$ puisque $v_2 = \pi$, et si c'est vrai à l'ordre p, alors

$$v_{2p+2} = \frac{2\pi}{2p+2}\frac{\pi^p}{p!} = \frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$v_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

C'est vrai pour $p = 0$ puisque $v_1 = 2$. Si c'est vrai au rang p, alors

$$v_{2p+3} = \frac{2\pi}{2p+3}v_{2p+1} = \frac{2^2\pi(p+1)}{(2p+3)(2p+2)}\frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+3}\pi^{p+1}(p+1)!}{(2p+3)!}.$$

On a que $v_{2p+2}/v_{2p} = \pi/(p+1) \to 0$, donc $v_{2p} \to 0$ lorsque $p \to +\infty$ (la série des v_{2p} étant convergente). De même $v_{2p+3}/v_{2p+1} = \frac{2\pi}{2p+3} \to 0$ d'où $v_{2p+1} \to 0$. Finalement $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. Notons que $\lambda_n(\partial B_n(0,r)) = 0$ pour tout $r > 0$. De

$$\frac{1}{h}\int_r^{r+h} \sigma_n(t)\,dt = \frac{1}{h}\big(\lambda_n(B_n(0,r+h)) - \lambda_n(B_n(0,r)\big) = \frac{v_n}{h}((r+h)^n - r^n),$$

on tire en faisant $h \to 0^+$

$$\sigma_n(r) = nr^{n-1}v_n.$$

Ainsi $\sigma_n(1) = nv_n$. Les calculs de la question 3. montrent que $\sigma_{n+2}(1)/\sigma_n(1) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, de sorte que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(1) = 0$.

PROBLÈME 1 (Théorème d'Ingham)

Partie I.
1.1 La fonction h est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, sur $]-\infty, -\pi/2[$, sur $]\pi/2, +\infty[$ avec $\lim_{x\to\pm\pi/2} h(x) = 0 = h(\pm\pi/2)$. Donc h est continue sur $\mathbb{R}$, et borélienne. Étant de plus nulle pour $|x| > \pi/2$, on en déduit que $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
1.2 Puisque $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{h} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $h \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.
1.3 On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos(x\xi)dx \in \mathbb{R},$$

vu que la fonction $x \mapsto \cos x \sin(x\xi)$ est impaire. La parité de la fonction cos entraîne celle de la fonction $\widehat{h}$. Pour $\xi \in [-1, 1]$, on a $\cos x \cos(x\xi) > 0$ si $|x| < \pi/2$, d'où $\widehat{h}(\xi) > 0$.
1.4 Puisque $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on sait que $g = h * h$ est bien définie et dans $L^1 \cap L^\infty$ (convolution $L^1 * L^1$ et

$L^1 * L^\infty$). De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$ avec $g(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x-y)h(y)dy$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}$. Utilisant la parité de h, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x-y)h(y)\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x+z)h(-z)\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(-x-z)h(z)dz = g(-x),$$

ce qui montre que g est paire. Si $|x| \geq \pi$, alors pour $|y| < \pi/2$ on a $|x-y| > \pi/2$ et $h(x-y) = 0$. Ainsi $g(x) = 0$ si $|x| \geq \pi$. Enfin $g \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{g}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{g}(\xi) = \widehat{h}(\xi)^2 > 0$ pour $\xi \in [-1,1]$. Par compacité de $[-1,1]$, on déduit l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que $\beta \leq \widehat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in [-1,1]$.
2.1 Notons que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, puisque $\widehat{g} = \widehat{h} \cdot \widehat{h}$ et $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t)|f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) \sum_{k,n\in K} a_k\overline{a_n} e^{i(\omega_k-\omega_n)t} dt = \sum_{k,n\in K} a_k\overline{a_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) e^{-i(\omega_n-\omega_k)t} dt = \sum_{k,n\in K} a_k\overline{a_n}\, \widehat{\widehat{g}}(\omega_n-\omega_k)$$

Mais, par le théorème d'inversion dans L^1 (vu que $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$), on a $\widehat{\widehat{g}} = 2\pi\check{g}$, d'où $\widehat{\widehat{g}}(\omega_n - \omega_k) = 2\pi g(\omega_k - \omega_n)$. Par ailleurs, on sait que $|\omega_k - \omega_n| \geq \gamma = \pi$ si $k \neq n$, et donc $g(\omega_k - \omega_n) = 0$. On arrive à la conclusion que

$$\sum_{k,n\in K} a_k\overline{a_n} 2\pi g(\omega_k - \omega_n) = 2\pi g(0) \sum_{n\in K} |a_n|^2.$$

2.2. On a $g(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2y)+1}{2} = \pi/2$. Par la question 1.4 et le fait que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{h}(\xi)^2 \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\int_{-1}^{1} \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq \beta^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t)|f(t)|^2 dt \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k\in K} |a_k|^2.$$

Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a (posant $t = s + 2p$)

$$\int_{-1+2p}^{1+2p} \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k\in K} (a_k e^{i\omega_k 2p}) e^{i\omega_k s} \right|^2 ds \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k\in K} |a_k|^2.$$

Soit $T > 2$. Écrivant $[0,T] \subset [-1,1] \cup [1,3] \cup \cdots \cup [2p-1, 2p+1]$ où $p = [(T+1)/2]$, on obtient que

$$\int_{0}^{T} \left| \sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq ([(T+1)/2] + 1)\frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k\in K} |a_k|^2.$$

3.1 Soit $v(x) = -1_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)\sin x$. Il est clair que $v \in L^2(\mathbb{R})$. Montrons que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx$. On a par intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi'(x)\cos x dx = [\varphi(x)\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(x)(-\sin x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Donc $h \in H^1(\mathbb{R})$ et $h' = v$. Puisque $h' = v$ est bornée et nulle pour $|x| > \pi/2$, on voit que $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
3.2 On sait que $g = h * h$ (et donc aussi $R^2 g$) est continue, paire et nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Il reste à vérifier que c'est aussi vrai pour $h' * h'$. Comme $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est nulle en dehors de $]-\pi/2, \pi/2[$ on a que $h' * h'$ est continue et nulle en dehors de $]-\pi,\pi[$. De plus $h' * h'$ est paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h' * h'(-x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(-x-y)\sin(y)dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x+y)\sin(-y)dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x-z)\sin(z)dz = h' * h'(x).$$

On a que $\widehat{k}(\xi) = R^2\widehat{h}(\xi)^2 + \widehat{h}'(\xi)^2 = (r^2 + (i\xi)^2)\widehat{h}(\xi)^2 = (R^2 - \xi^2)\widehat{h}(\xi)^2$. Comme $\widehat{h}(\xi) \in \mathbb{R}$, on a que $\widehat{k}(\xi) \leq 0$ pour $R^2 - \xi^2 \leq 0$, soit pour $|\xi| \geq R$. Enfin la fonction continue $\widehat{k}$ atteint sa valeur maximale α sur le compact $[-R, R]$, qui est strictement positive puisque $\widehat{k}(0) = R^2\widehat{h}(0)^2 > 0$ par la question 1.3. On a bien montré l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que $\widehat{k}(x) \leq \alpha$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
3.3. On reprend le calcul de $\widehat{h}(\xi)$. On a pour $\xi \neq \pm 1$

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+\xi)x}{1+\xi} + \frac{\sin(1-\xi)x}{1-\xi}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\frac{\cos(\xi\pi/2)}{1-\xi^2}.$$

On en déduit que $|\widehat{k}(\xi)| = |(R^2-\xi^2)\widehat{h}(\xi)^2| \leq 4(\xi^2-R^2)/(\xi^2-1)^2$ pour $|\xi| > R > 1$. Comme par ailleurs $\widehat{k} \in L^\infty(\mathbb{R})$ (vu que $k \in L^1(\mathbb{R})$), on en déduit que $\widehat{k} \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour prouver (11), on procède comme à la question 2.1 en utilisant le fait que $k, \widehat{k} \in L^1(\mathbb{R})$ et que $k(\omega_k - \omega_n) = 0$ si $k \neq n$ (vu que k est nulle en dehors de $]-\pi, \pi[$). On trouve par un calcul direct que

$$k(0) = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y\, dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(-y)\sin y dy = (R^2-1)\int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2y)dy > 0,$$

vu que $R > 1$, que la première intégrale est strictement positive et que la seconde est nulle. On en déduit que

$$\sum_{k\in K} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi k(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(t)|f(t)|^2 dt \leq \frac{\alpha}{2\pi k(0)} \int_{-R}^{R} \left|\sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t}\right|^2 dt.$$

Si $T > 2$ est donné, on choisit $R = T/2 > 1$ et on obtient (12) en appliquant l'inégalité précédente avec les coefficients $e^{i\omega_k T/2}a_k$ substitués aux a_k et on prenant $C_1 = 2\pi k(0)/\alpha$. Notons que $k(0)$ et α dépendent de R donc de T.

Partie II.
1. On pose $\omega'_k = (\pi/\gamma)\omega_k$ et $T' = (\gamma/\pi)T > 2$. Alors $\inf_{k\neq n} |\omega_k - \omega_n| = \pi$. Par la partie I, il existe des constantes $C'_1(T') > 0$, $C'_2(T') > 0$ telles que pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ et toute suite $(a_k)_{k\in K}$ de nombres complexes, on ait

$$C'_1 \sum_{k\in K} |a_k|^2 \leq \int_0^{T'} \left|\sum_{k\in K} a_k e^{i\omega'_k s}\right|^2 ds \leq C'_2 \sum_{k\in K} |a_k|^2.$$

Faisant le changement de variables $t = (\pi/\gamma)s$, on arrive à

$$\frac{\pi C'_1}{\gamma} \sum_{k\in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left|\sum_{k\in K} a_k e^{i\omega_k t}\right|^2 dt \leq \frac{\pi C'_2}{\gamma} \sum_{k\in K} |a_k|^2.$$

2. Par (13), on a

$$\int_0^T \left|\sum_{k=p}^{q} a_k e^{i\omega_k t}\right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k=p}^{q} |a_k|^2 \to 0$$

lorsque $q \geq p \to +\infty$. La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{p} a_k e^{i\omega_k t})_{p\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(0,T)$, espace complet, donc elle converge dans $L^2(0,T)$ vers une fonction notée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$. On montre de même la convergence dans $L^2(0,T)$ de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{i\omega_{-k} t}$. Faisant $N \to +\infty$ dans

$$C_1 \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left|\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{i\omega_k t}\right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2,$$

on arrive à (2), avec les mêmes constantes positives C_1, C_2.

PROBLÈME 2 (Équation de Schrödinger sur le tore)

1. Supposons que $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)e^{inx}$ soit solution de (14)-(17). Alors, si l'on peut dériver terme à terme,

$$u_t(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n'(t)e^{inx}, \quad u_x(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)ine^{inx}, \quad u_{xx}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)(in)^2e^{inx}$$

et donc $0 = \big(iu_t + u_{xx}\big)(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(ia_n' - n^2a_n)e^{inx}$. Cela donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_n' = -in^2a_n$, puis après intégration, $a_n(t) = e^{-in^2t}a_n(0) = c_n(\varphi)e^{-in^2t}$, vu que $u(0,x) = \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{inx}$.
2.1 Puisque φ, φ' et φ'' sont 2π-périodiques de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on a $c_n(\varphi''') = (in)^3c_n(\varphi)$. On a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2|c_n(\varphi)| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^6|c_n(\varphi)|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|n|^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|c_n(\varphi''')|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|n|^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|\varphi'''\|_{L^2} < +\infty$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'identité de Parseval. On en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\varphi)| < +\infty.$$

2.2 Introduisons l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \text{mesure de comptage})$ et la fonction dominante $h(n) = n^2|c_n(\varphi)|$ qui est *intégrable* pour cette mesure de comptage, par la question 2.1. Rappelons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}$ est l'intégrale sur $\mathbb{Z}$ pour la mesure μ de la fonction $n \mapsto c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}$. Alors le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre que u est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, puisque

$$\frac{\partial}{\partial t}[c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}] = -in^2c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}[c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}] = -n^2c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx},$$

utilisant h comme fonction dominante, on déduit du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre que u_t, u_x et u_{xx} existent et que

$$u_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -in^2c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}, \quad u_x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}, \quad u_{xx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}.$$

Il est clair que (14) est satisfait. Les conditions au bord (15) et (16) sont satisfaites par chaque fonction dans la somme, donc par u (les convergences étant uniformes sur $\mathbb{R}^2$). Enfin (17) résulte du fait que $u(0,.) = \varphi$ et du théorème de Dirichlet.
3.1 On rappelle que l'application $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{inx} \in L^2$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)e^{-in^2t}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 < +\infty$, on obtient que $u(t,.) \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $t, s \in \mathbb{R}$ on a

$$\|u(t,.) - u(s,.)\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2|e^{-in^2t} - e^{-in^2s}|^2$$

qui tend vers 0 lorsque $s \to t$, par convergence dominée (vu que $|c_n(\varphi)|^2|e^{-in^2t} - e^{-in^2s}|^2 \leq 4|c_n(\varphi)|^2$). On a bien montré que $u \in C(\mathbb{R}, L^2)$.
3.2 Notons $f(n,m) = (n-m, -n^2+m^2)$ pour $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus D$. Supposons que $f(n,m) = f(n',m') = (p,q)$. Alors

$q = -n^2 + m^2 = -(n-m)(n+m) = -p(n+m)$ et de même $q = -p(n'+m')$. Puisque $p = n - m \neq 0$, on en déduit que $n + m = n' + m'$, ce qui donne, avec $n - m = n' - m'$, $(n, m) = (n', m')$. On a bien prouvé que f était injective.

3.3 Par une double application du théorème de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{-N\leq n,m\leq N} a_{n,m}e^{inx}e^{imt}\right|^2 dxdt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left|\sum_{m=-N}^{N} a_{n,m}e^{imt}\right|^2 dt \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=-N}^{N} a_{n,m}e^{imt}\right|^2 dt \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}|a_{n,m}|^2.
\end{aligned}$$

3.4 Soit pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(t,x) = \sum_{-N\leq n\leq N} c_n(\varphi)e^{-in^2t}e^{inx}$. Alors

$$0 \leq |S(t,x)|^2 = S(t,x)\overline{S(t,x)} = \sum_{-N\leq n,m\leq N} c_n(\varphi)\overline{c_m(\varphi)}e^{i(n-m)x}e^{i(-n^2+m^2)t}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|S_N(t,x)|^4 dxdt &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{-N\leq n,m\leq N} c_n(\varphi)\overline{c_m(\varphi)}e^{i(n-m)x}e^{i(-n^2+m^2)t}\right)^2 dxdt \\
&\leq 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{N}|c_n(\varphi)|^2\right)^2 dxdt \\
&\quad +2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{-N\leq n,m\leq N, n\neq m} c_n(\varphi)\overline{c_m(\varphi)}e^{i(n-m)x}e^{i(-n^2+m^2)t}\right)^2 dxdt = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

D'une part $I_1 \leq 8\pi^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2\right)^2$. D'autre part, appliquant les questions 3.2 et 3.3 avec $N' = \sup(2N, N^2)$, on a que

$$I_2 \leq 8\pi^2\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}|c_n(\varphi)\overline{c_m(\varphi)}|^2 = 8\pi^2\left(\sum_{n=-N}^{N}|c_n(\varphi)|^2\right)^2 \leq 8\pi^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2\right)^2.$$

Soit $C = (16\pi^2)^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\pi}$. On a $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|S_N(t,x)|^4 dxdt \leq C^4(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2)^2$.

3.5 On remarque que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|S_n - u|^2 dxdt = \int_0^{2\pi} 2\pi[\sum_{|n|>N}|c_n(\varphi)|^2]dt = (2\pi)^2\sum_{|n|>N}|c_n(\varphi)|^2 \to 0$$

lorsque $N \to +\infty$. Il existe donc une suite d'indices $N_k \nearrow \infty$ telle que $S_{N_k}(t,x) \to u(t,x)$ pour presque tout $(t,x) \in [0, 2\pi[^2$. On déduit du lemme de Fatou que $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(t,x)|^4 dxdt \leq C^4\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(\varphi)|^2\right)^2 = C^4\|\varphi\|_{L^2}^4$. Ainsi, pour presque tout $t \in [0, 2\pi[$, on a que $\int_0^{2\pi}|u(t,x)|^4 dx < +\infty$, et $u(t,.) \in L^4$. Puisque la solution u est 2π-périodique en temps, c'est aussi vrai pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas vrai à $t = 0$ si $\varphi \in L^2 \setminus L^4$.

Examen du 6 juin 2019

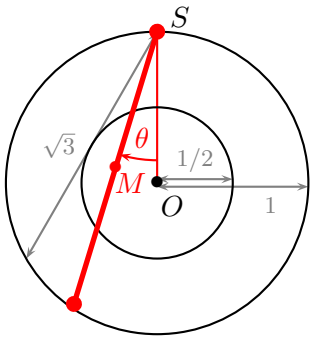
Document autorisés : le poly de cours ainsi que les résumés.

Exercice 1 : autour du paradoxe de Bertrand

Le *paradoxe de Bertrand* concerne la question suivante :

> Quelle est la probabilité qu'une corde du cercle unité *tirée au hasard* ait une longueur supérieure à $\sqrt{3}$?

Bien sûr, la réponse dépend de ce que l'on entend par *au hasard* ici. La figure ci-dessous montre qu'une corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si son milieu, noté M, est contenu dans le cercle de rayon $1/2$. Le centre des deux cercles est noté O.



1. Dans cette question, on suppose par symétrie que la corde (tracée en rouge) est issue du point S, situé au sommet du cercle. On note $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'angle formé par cette corde avec l'axe vertical (SO), et on suppose que θ est une variable aléatoire, uniformément distribuée sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
   (a) Quelle est la probabilité que la corde ait une longueur supérieure à $\sqrt{3}$?
   (b) Justifier que le triangle SMO est rectangle, et en déduire la valeur de OM en fonction de θ.
   (c) Calculer la densité de la variable aléatoire $OM \in [0, 1]$.
2. On propose une seconde modélisation dans laquelle le point M est tiré au hasard, uniformément dans le disque de rayon 1. Autrement dit, ses coordonnées $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ sont vues comme un couple aléatoire de densité

$$p(x, y) = \frac{1}{C} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}},$$

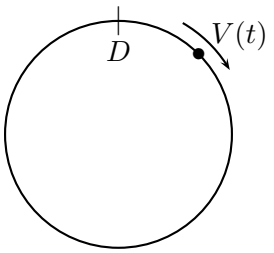
   où $C > 0$ est une constante.
   (a) Quelle doit être la valeur de la constante C pour que p soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$?
   (b) Quelle est la probabilité que la corde de centre M soit de longueur supérieure à $\sqrt{3}$?
   (c) Calculer la densité de la variable aléatoire $OM \in [0, 1]$.
3. À la lumière de ces calculs, que pensez-vous de l'affirmation selon laquelle " la probabilité que la corde soit de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ est la probabilité que la variable OM soit dans l'intervalle $[0, 1/2]$, donc $1/2$ " ?

Exercice 2 : particule dans un accélérateur

Une particule tourne dans un accélérateur, que l'on modélise par un cercle de *périmètre* 1 en un point D duquel se trouve un dispositif qui fonctionne de la manière suivante :

— au temps $t = 0$, la particule est en D, reçoit une vitesse $V_0 > 0$ et effectue un tour du cercle à vitesse constante ;

— au n-ème passage au point D, la particule reçoit une nouvelle vitesse V_n et effectue un nouveau tour de cercle avec cette vitesse.



On note T_n l'instant du n-ème passage au point D (avec $T_0 = 0$), et l'on suppose que les variables aléatoires $V_0, V_1, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de probabilité de densité $p(v)$ sur $]0, \infty[$ qui vérifie l'hypothèse suivante :

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v p(v) \mathrm{d}v < \infty, \qquad \langle \tau \rangle = \int_0^\infty \frac{p(v)}{v} \mathrm{d}v < \infty. \tag{$*$}$$

1. Pour tout $n \geq 0$, exprimer T_n en fonction de $V_0, \ldots, V_{n-1}$.
2. Pour tout $t \geq 0$, on note $V(t)$ la vitesse de la particule au temps $t \geq 0$. Exprimer $V(t)$ en fonction des suites $(V_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$.
3. On se demande quelle est la " vitesse moyenne " de la particule. Un premier observateur propose de se poster au point D et de relever la vitesse de la particule à chaque passage. Après le n-ème passage, la vitesse moyenne qu'il a estimée s'écrit donc $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n V_i$. Quelle est la limite (presque sûre) de cette quantité, lorsque $n \to \infty$?
4. Un second observateur propose de relever la vitesse de la particule en temps continu, et donc de calculer la limite, lorsque $t \to +\infty$, de la quantité

$$I_t = \frac{1}{t}\int_0^t V(u)\mathrm{d}u.$$

Pour tout $t \geq 0$, on note N_t l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \leq t < T_{n+1}$.

(a) Exprimer I_t en fonction de t, N_t, T_{N_t} et $V_0, \ldots, V_{N_t}$.

(b) Justifier que $N_t \to \infty$ presque sûrement lorsque $t \to \infty$.

(c) Montrer que I_t converge presque sûrement, lorsque $t \to \infty$, vers une limite qui s'exprime en fonction de la quantité $\langle \tau \rangle$ introduite dans l'hypothèse $(*)$.

(d) En utilisant une inégalité vue en petite classe, comparer les vitesses moyennes calculées par chacun des deux observateurs. Comment expliquez-vous ce résultat ?

Correction

Exercice 1 : autour du paradoxe de Bertrand

1. (a) D'après le dessin, la corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$. Puisque θ est uniformément distribué sur $[-\pi/2, \pi/2]$, cet événement est donc de probabilité

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}u}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

   (b) En notant S' la seconde extrémité de la corde, on constante que le triangle SOS' est isocèle en O. Ainsi, $[OM]$ est une hauteur de ce triangle, donc SMO est un triangle rectangle. On en déduit que $|\sin\theta| = OM/OS = OM$, puisque le cercle est de rayon 1.

   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(OM)\right] &= \mathbb{E}\left[f(|\sin\theta|)\right] \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(|\sin u|)\frac{\mathrm{d}u}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(\sin u)\mathrm{d}u && \text{(parité de } u \mapsto |\sin u|) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} && \text{(on a posé } z = \sin u).
\end{aligned}$$

   Ainsi, la variable aléatoire OM possède la densité $\frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}$ sur $[0,1]$.
   On peut également raisonner par changement de variable. Cependant, $z = |\sin\theta|$ n'est pas une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $]0,1[$. Il faut se restreindre à $\theta \in]0, \pi/2[$.

2. (a) Pour que p soit une densité de probabilité, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1,$$

   c'est-à-dire

$$C = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   Le membre de droite est l'aire du disque de rayon 1, soit π.

   (b) La corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si M est dans le disque de rayon $1/2$, c'est-à-dire $X^2 + Y^2 \leq (1/2)^2 = 1/4$. La probabilité de cet événement vaut

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1/4) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1/4\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   Cette intégrale est égale à la surface du disque de rayon $1/2$, c'est-à-dire $\pi/4$. La probabilité cherchée vaut donc $1/4$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbb{E}\left[f(OM)\right] = \mathbb{E}\left[f(\sqrt{X^2+Y^2})\right] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Effectuons un changement de variables permettant de passer en coordonnées polaires, et posons

$$x = z\cos\theta, \quad y = z\sin\theta, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = z\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta.$$

Alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{z=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(z)z\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \int_0^1 f(z)2z\mathrm{d}z,$$

de sorte que la variable aléatoire OM possède la densité $p(z) = 2z$ sur $[0,1]$.

Ici encore, on peut raisonner directement par un changement de variables en coordonnées polaires, obtenir la densité $p(z,\theta)$, puis intégrer par rapport à θ pour obtenir la densité marginale $p(z)$.

3. Cette hypothèse repose sur l'hypothèse implicite que la variable aléatoire OM est uniformément distribuée sur $[0,1]$, ce qui n'est le cas dans aucun des deux modèles étudiés. Il n'est donc pas étonnant que les probabilités trouvées pour l'événement $\{OM \leq 1/2\}$ ne soient pas égales à $1/2$.

Exercice 2 : particule dans un accélérateur

1. On a $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1/V_i$.
2. Sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$, la particule voyage à vitesse V_n donc $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}$.
3. Après le n-ème passage, l'observateur a relevé les vitesses $V_0, \ldots, V_n$ dont la moyenne empirique vaut $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} V_i$ et converge, d'après l'hypothèse $(*)$ et la loi forte des grands nombres, vers $\langle v\rangle$.
4. (a) Écrivons d'abord

$$I_t = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{N_t-1}\int_{T_i}^{T_{i+1}} V(t)\mathrm{d}t + \int_{T_{N_t}}^{T} V(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N_t-1}(T_{i+1}-T_i) + (T-T_{N_t})}.$$

Sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, $V(t)$ vaut V_i ; de plus, $T_{i+1} - T_i = 1/V_i$. Ainsi,

$$I_t = \frac{N_t + (T-T_{N_t})V_{N_t}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N_t-1}\frac{1}{V_i} + (T-T_{N_t})}.$$

(b) Commençons par écrire que, pour tout $M \geq 0$, $N_t \geq M$ dès que $T \geq T_M$. Or, par construction, l'événement $\{\forall M \in \mathbb{N}, T_M < \infty\}$ est presque sûr. Sur cet événement, on a donc : pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe $T_M < \infty$ tel que pour tout $T \geq T_M$, $N_t \geq M$; ce qui signifie précisément que $N_t \to \infty$.

(c) En utilisant l'inégalité

$$0 \leq T - T_{N_t} \leq T_{N_t+1} - T_{N_t} = \frac{1}{V_{N_t}},$$

dans le résultat de la question 4.(a), on obtient l'encadrement

$$\frac{N_t}{\sum_{i=0}^{N_t} \frac{1}{V_i}} \leq I_t \leq \frac{N_t + 1}{\sum_{i=0}^{N_t-1} \frac{1}{V_i}}.$$

Puisque $N_t \to +\infty$, la loi forte des grands nombres associée à l'hypothèse $(*)$ montrent que les deux bornes de cet encadrement convergent vers

$$\frac{1}{\mathbb{E}[1/V_0]} = \frac{1}{\langle \tau \rangle}.$$

(d) L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $v \mapsto 1/v$ sur $]0, \infty[$ donne

$$\frac{1}{\mathbb{E}[V_0]} \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{V_0}\right],$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{\langle \tau \rangle} \leq \langle v \rangle.$$

Ainsi, le second observateur observe, en moyenne, des vitesses plus faibles que le premier. Cela s'explique par le fait que, dans la moyenne faite par le premier observateur, chaque vitesse a le même poids ; tandis que le second observateur donne un poids beaucoup plus grand aux vitesses faibles, puisqu'il les observe pendant plus longtemps.

Mines Paris Tech - Energie et changement climatique.
Elèves de Première Année, juin 2018
Durée de l'épreuve : 2h30
Documents non autorisés.

NB : il sera accordé une grande importance à la capacité à dire l'essentiel sans se perdre dans les détails. Les affirmations grossièrement farfelues donneront lieu à minoration de la note. Un excès de fautes d'orthographe aussi.

Chaque question est notée sur 2 points

1 – Pourquoi est-il normal que, dans le monde, la production économique, mesurée par le PIB, soit au premier ordre une fonction linéaire de la quantité d'énergie consommée ?

2 – Pourquoi est-il normal que, pour les combustibles fossiles, il y ait un jour – ou déjà eu – un maximum à l'approvisionnement mondial, appelé pic ?

3 – Comment évolue un surplus de CO2 atmosphérique créé aujourd'hui en cas d'arrêt des émissions ? Tirez-en deux conclusions essentielles.

4 – Citez deux processus d'amplification du réchauffement en cours liés à la dynamique interne du système terre, en précisant le mécanisme à l'œuvre

5 – Pourquoi est-il normal que l'inventaire des risques liés au changement climatique soit à jamais impossible à établir précisément ?

6 - Quelles sont les diverses manières d'économiser de l'énergie ?

7 – Pourquoi est-il normal, au regard de la physique, que l'énergie nucléaire soit une énergie à faible teneur en CO2 ?

8 – Pourquoi est-il utile de rajouter une comptabilité carbone, c'est-à-dire une comptabilité physique, en plus de la comptabilité monétaire ?

9 - Selon vous, quels sont les postes significatifs de l'usage d'Internet et des télécommunications en général ? A quelles conditions peut-on considérer que cela « dématérialise » de passer du papier à l'informatique ?

10 – Pourquoi sommes nous historiquement passés des ENR aux combustibles fossiles ?