De Galilée à Einstein,

de Newton à Schrödinger…

M. Filoche
marcel.filoche@minesparis.psl.eu

MINES ParisTech

PARISIENNE
DE PHOTO
GRAPHIE

L'équipe enseignante

Pierre Brun
(CEA)

Davide Boschetto
(ENSTA)

Antoine Tilloy
(Mines-ParisTech)

Irénée Frérot
(Sorbonne Université)

Le matériel pédagogique

Livre de cours

Boîtiers interactifs

Site web moodle (documents de cours)

https://moodle.psl.eu

Mines Paris – PSL / Cycle IC 24-25 / Semestre 1 / UE13

MINES ParisTech

Pourquoi fait-on de la physique ?

If it disagrees with experiment, it's wrong.
In that simple statement is the key to science.
It doesn't make a difference how beautiful your guess is.
It doesn't matter how smart you are who made the guess, or what his name is;
If it disagrees with experiment, it's wrong.
- Richard Feynman

La fin de la physique ?

"Our future discoveries must be looked for in the sixth decimal place."

A. A. Michelson, 1894

Albert Abraham Michelson
(1854 – 1912)

[A l'occasion de l'inauguration d'un laboratoire de physique de Chicago, remarquant que toutes les plus importantes lois physiques ont été découvertes.]

La physique à la fin du XIXème siècle

- La géométrie du monde : **Euclide et Galilée**

Galilée
(1564 - 1642)

- La mécanique : **Newton**

Isaac Newton
(1643 - 1727)

- Les phénomènes électriques et magnétiques : **Maxwell**

James Clerk Maxwell
(1831 - 1879)

L'expérience de Michelson-Morley

Michelson and Morley—Relative Motion of the 337

The first named difficulties were entirely overcome by mounting the apparatus on a massive stone floating on mercury; and the second by increasing, by repeated reflection, the path of the light to about ten times its former value.

The apparatus is represented in perspective in fig. 3, in plan in fig. 4, and in vertical section in fig. 5. The stone *a* (fig. 5) is about 1·5 meter square and 0·3 meter thick. It rests on an annular wooden float *bb*, 1·5 meter outside diameter, 0·7 meter inside diameter, and 0·25 meter thick. The float rests on mercury contained in the cast-iron trough *cc*, 1·5 centimeter thick, and of such dimensions as to leave a clearance of about one centimeter around the float. A pin *d*, guided by arms *gggg*, fits into a socket *e* attached to the float. The pin may be pushed into the socket or be withdrawn, by a lever pivoted at *f*. This pin keeps the float concentric with the trough, but does not bear any part of the weight of the stone. The annular iron trough rests on a bed of cement on a low brick pier built in the form of a hollow octagon.

3.

At each corner of the stone were placed four mirrors *dd ee* fig. 4. Near the center of the stone was a plane-parallel glass *b*. These were so disposed that light from an argand burner *a*, passing through a lens, fell on *b* so as to be in part reflected to *d*; the two pencils followed the paths indicated in the figure, *bdedbf* and *bd,e,d,bf* respectively, and were observed by the telescope *f*. Both *f* and *a* revolved with the stone. The mirrors were of speculum metal carefully worked to optically plane surfaces five centimeters in diameter, and the glasses *b* and *c* were plane-parallel and of the same thickness, 1·25 centimeter;

Les cinq limites

- Faibles vitesses (devant la vitesse de la lumière)
- Faible intensité des interactions
- Grandes distances (devant les distances inter- ou intra-atomiques)
- Grands temps (devant les temps typiques d'interaction)
- Grand nombre de composants élémentaires (particules)

La mécanique classique

- Le référentiel galiléen

  $\longrightarrow$ absence de force : mouvement continu, uniforme

  $\longrightarrow$ le temps est absolu, identique dans tous les référentiels

Un événement est défini comme un point $(\vec{r}, t)$

$$\begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \vec{w}t \\ t' = t \end{cases}$$

L'évolution d'un système classique

Mécanique newtonienne :

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \left(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_N\right)$$

L'évolution est entièrement déterminée par la donnée des positions et des vitesses à un instant *t* :

$$(\vec{r}_1(t), \cdots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1(t), \cdots, \vec{v}_N(t))$$

Mais on peut tout aussi bien donner les positions en deux instants différents :

$$(\vec{r}_1(t_1), \cdots, \vec{r}_N(t_1), \vec{r}_1(t_2), \cdots, \vec{r}_N(t_2))$$

Le déterminisme classique de la mécanique

Espace des degrés de liberté (x,v) du système

L'évolution du système se traduit par une trajectoire dans l'espace (x,v)

Les données de (x_i,v_i) à un instant t donné déterminent l'évolution du système pour tous les instants futurs $t_1 > t$.

Une formulation variationnelle : l'action

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698 - 1759)

Leonhard Euler (1707 - 1783)

<u>Principe</u> : L'action totale est la somme des actions élémentaires qui ne dépendent que de l'état instantané du système. Elle est **minimale** pour la trajectoire réelle.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \vec{dl} \qquad\qquad S = \int_{t_1}^{t_2} M\, \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

Le principe de Fermat

Pierre de Fermat
(160? - 1665)

« Si nous supposons que la chose est déjà faite, et que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées, la résistance par CB, jointe à la résistance par BA, contiendra la somme des deux résistances , et cette somme, pour satisfaire au principe, doit être la moindre de toutes celles qui peuvent se rencontrer en quelque autre point que ce soit de la ligne DB […]. »

La controverse Descartes / Fermat

René Descartes
(1596 - 1650)

Pierre de Fermat
(160? - 1665)

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad ?$$

Le formalisme lagrangien

Joseph Louis Lagrange
(1736 - 1813)

- Formalisme synthétique et scalaire
- Mise en valeur des symétries du problème
- Permet de s'affranchir des forces internes

Le mouvement complet d'un système va s'obtenir par un principe de moindre action. Les symétries du problème vont permettre d'en déduire des invariants (constantes du mouvements).

Action :

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\vec{r}_1(t), \cdots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1(t), \cdots, \vec{v}_N(t)\right] \, dt}$$

Les équations de Lagrange

On perturbe légèrement la trajectoire optimale :

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\Big[\vec{r}_1(t) + \delta\vec{r}_1(t), \cdots, \vec{r}_N(t) + \delta\vec{r}_N(t), \vec{v}_1(t) + \delta\vec{v}_1(t), \cdots, \vec{v}_N(t) + \delta\vec{v}_N(t)\Big]\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L)(t)\, dt \qquad \delta L = \boxed{\delta\vec{r}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1}} + \cdots + \delta\vec{r}_N \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_N} + \boxed{\delta\vec{v}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}} + \cdots + \delta\vec{v}_N \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_N}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right)$$

On intègre cette perturbation de l'action sur toute la trajectoire : $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left(\partial\vec{r}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} + \delta\vec{v}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}\right) dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta\vec{r}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1}\right) dt + \cancel{\left[\delta\vec{r}_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}\right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta\vec{r}_1 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}\right)\right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\vec{r}_1 \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}\right)\right) dt = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1}\right)}$$

Equations de Lagrange

La mécanique newtonienne d'une particule dérive-t-elle d'un principe de moindre action ?

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

pour une force dérivant d'un potentiel

OK si $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} \end{cases}$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})}$$

Dans un champ électromagnétique : $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r})}$$

La particule dans un champ magnétique

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = q\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = qv_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + qv_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + qv_z\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + qA_x$$

$$qv_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + qv_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + qv_z\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) = ma_x + q\frac{dA_x}{dt}$$

$$\frac{dA_x}{dt} = v_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + v_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$ma_x = qv_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + qv_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - qv_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - qv_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = \boxed{qB_zv_y - qB_yv_z = q\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right)_x}$$

Le moment conjugué de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}}$$

Pour une particule isolée : $\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \boxed{m\vec{v}}$

Pour une particule dans un potentiel : $\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})\right) = \boxed{m\vec{v}}$

Pour une particule dans un champ magnétique : $\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right) = \boxed{m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r})}$

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par translation dans le temps du Lagrangien

$$\frac{dL}{dt} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) + \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\cdot\vec{p}_i\right)}$$

Eq. de Lagrange

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\cdot\vec{v}_i\right) - L$ est conservée au cours du temps

Invariance dans le temps $\longrightarrow$ conservation de l'énergie

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par translation dans l'espace

On imagine une translation de vecteur $\vec{\varepsilon}$

$$\delta L = L\left(\{\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}, \vec{v}_i\}\right) - L\left(\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\varepsilon} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \, dt\right) = \vec{\varepsilon} \cdot \boxed{\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t_2) - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t_1)\right)}$$

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par translation $\longrightarrow$ conservation de l'impulsion

Invariance $\Rightarrow$ conservation

Invariance par rotation dans l'espace

On imagine une rotation infinitésimale dans le plan (x,y)

$$\delta L = L\left(\{(x_i - \varepsilon y_i, \varepsilon x_i + y_i), (\dot{x}_i - \varepsilon \dot{y}_i, \varepsilon \dot{x}_i + \dot{y}_i)\}\right) - L\left(\{(x_i, y_i), (\dot{x}_i, \dot{y}_i)\}\right)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{N} \left(x_i \, p_{y,i} - y_i \, p_{x,i}\right)(t_2) - \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \, p_{y,i} - y_i \, p_{x,i}\right)(t_1) \right]$$

La quantité $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \right)$ est conservée au cours du temps

Invariance par rotation → conservation du moment cinétique

Licence d’usage dans un contexte public, sans modification

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après et à l’exclusion expresse de toute utilisation commerciale.

Le droit d’usage défini par la licence autorise un usage à destination de tout public qui comprend :

- Le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- Le droit de diffuser tout ou partie du document au public sur support papier ou informatique, y compris par la mise à la disposition du public sur un réseau numérique.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n’est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d’usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l’auteur.