Correction exercice 33 :

Réduction du problème du cycle hamiltonien à TSP.

Soit un graphe G=(V,E) et n=|V|.

Construisons une instance de TSP à partir de G: prenons k=n, X =V et v(i,j)=1 si {i,j} $\in$ E et sinon v(i,j)=2 (c'est-à-dire si {i,j} $\notin$ E).

Il est facile de voir que G est Hamiltonien si et seulement si l'instance construite à un cycle passant par toutes les villes de cout k (i.e. n).

Preuve => A un cycle hamiltonien correspond un cycle passant par toutes les villes de taille n.

<= Si on a un cycle de taille n passant par toutes les villes alors forcément la distance entre deux villes consécutives est 1 et donc les sommets correspondant de G étaient reliés. Donc en prenant les sommets dans l'ordre du cycle on obtient un cycle hamiltonien de G.

Dans l'instance construite, l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Correction exercice 34 :

Le problème est celui du recouvrement de sommets

Données : G=(v,E) et k

Question : Existe-t-il un sous-ensemble de sommets de taille k qui couvre toutes les arêtes ?

On fait la réduction du problème 3SAT au problème de recouvrement de sommets. Chaque variable x est transformée en 2 sommets x et $\overline{x}$ reliés entre eux. Chaque littéral est donc associé à un sommet et on a un couplage entre les sommets représentants des littéraux opposés. Chaque clause est transformée en 3 sommets (appelés dans la suite sommets « clauses » reliés par un triangle. Chacun de ces 3 sommets est aussi relié au littéral correspondant. On prend comme valeur de k=n+2m (où n représente le nombre de variables et m le nombre de clauses)

Remarque : le graphe ainsi construit a donc 2n+3m sommets et n+6m arêtes.

Montrons que L'instance de 3SAT a une affectation qui satisfait chaque clause si et seulement si G possède un recouvrement de taille k.

=> Supposons que 3SAT a une affectation valide. Si x (resp. $\overline{x}$) est vrai, on met le sommet correspond à x (resp. à $\overline{x}$) dans le recouvrement. Pour chaque triangle (associé donc à une clause) on a donc au moins une arête sortante du triangle couverte. On met donc dans le recouvrement les 2 autres sommets non adjacents à cette arête. Cet ensemble de taille n+2m couvre bien toutes les arêtes (celles des triangles, du couplage et entre les sommets « litteraux » et les sommets « clauses »)

<= Supposons que l'on ait un recouvrement de taille n+2m. Comme il faut au moins n sommets pour couvrir les arêtes du couplage et au moins 2 sommets pour couvrir les arêtes de chaque triangle (donc au moins 2m sommets pour couvrir les arêtes de tous les triangles), on en déduit qu'il faut exactement n sommets « littéraux » et 2m sommets « clauses ». Si on met à VRAI (resp. à

FAUX) tous les littéraux correspondant à des sommets « littéraux » du recouvrement (resp. n'appartenant pas au recouvrement) on obtient une affectation valide de 3SAT (pour chaque triangle, le sommet non sélectionné dans le recouvrement a son arête sortante couverte et donc correspond à un littéral à VRAI).

Le problème de recouvrement est donc NP-Complet :

- il est facile de vérifier que la cardinalité d'un ensemble est k et que cet ensemble de sommets couvrent toutes les arêtes du graphe.

- 3SAT qui est un problème NP-complet se réduit à lui.

Correction exercice 35 :

Il faut se ramener à partir d'un graphe G quelconque à un graphe G' dont tous les sommets sont de degrés pairs. Pour cela on ajoute un sommet x que on relie à tous les sommets de degré impair (comme il y a un nombre pair de sommets de degré impair ce sommet a un degré pair).

Petite explication : la somme des degré des sommets d'un graphe est paire (la preuve peut se faire par récurrence sur le nombre d'arêtes, en ajoutant une arête on ajoute 2 à la somme des degré qui reste donc paire).

Puis on ajoute deux autres sommets y et z que l'on relie entre eux et avec x (y et z sont donc de degré 2 et x reste de degré pair).

Il est facile de voir que ce graphe G' a un recouvrement de taille k+2 si et seulement si le graphe G initial à un recouvrement de taille k.

<= si G a un recouvrement de taille k dans le graphe initial en ajoutant x et y on on obtient un recouvrement du graphe G' car on couvre toutes les nouvelles arêtes.

=> si on a un recouvrement de taille k+2 dans le graphe G' alors au moins 2 sommets sont dans l'ensemble {x, y, z} et sans perte de généralités on peut supposer que l'un de ces sommets est x (si c'était y et z, on peut remplacer z par x et couvrir au moins autant d'arêtes). Les arêtes de G sont donc couvertes par les autres sommets (au plus k sommets donc).

Ce problème est donc NP-complet (il est dans NP et le problème de l'exercice 34 se réduit à lui).

Correction exercice 37 :

Si vous ne comprenez pas la correction se n'est pas grave. L'exercice est assez difficile. Le problème est clairement dans NP. Si on plie le mètre, on vérifie facilement s'il entre dans l'étui.

Petite remarque : pour décrire le pliage, il suffit pour chaque segment de dire s'il va vers la droite ou vers la gauche. Ainsi si les segments sont de longueur 5, 7, 6 et 4. Le pliage DDGG veut dire que les 2 premiers segments vont vers la droite et les 2 suivants vers la gauche, il faut donc un étui de taille au moins 12. DGDG il faut un étui de taille au moins 7. Si les segments sont 7, 3, 5, le meilleur pliage est DGG (ou GDD) et il faut un étui de taille 8 au plus.

Il faut faire une réduction à partir du problème de la partition. A chaque objet, on associe un segment dont la longueur est égal au poids de l'objet. On ajoute 2 segments au début du mètre l'un de taille B et l'autre de taille B/2 (B est choisi assez grand supérieur par exemple à la somme des poids de tous les objets). De même on ajoute à la fin du mètre des segments de taille B/2 et B.

Montrons que si le problème de la partition a une solution on peut plier le mètre dans un étui de taille B.

=> Soit X_1 et X_2 la partition. Tous les segments de longueur correspondant au poids d'un objet de X_1 sont dirigés vers la droite et ceux correspondant à un objet de X_2 vers la gauche. Le premier et le dernier des segments sont mis vers la droite et le deuxième et l'avant dernier vers la gauche.

Donc lorsque l'on a plié les 2 premiers segments on se retrouve donc au milieu de l'étui. A la fin du pliage correspondant aux objets de la partition on se retrouve aussi au milieu de l'étui (on va autant de la gauche vers la droite que de la droite vers la gauche). La fin du pliage ne pose pas de problème si on plie les deux derniers segments GD ou DG.

<= Si on arrive à plier le mètre, alors forcément les deux premiers segments sont dans une direction opposée ainsi que les 2 derniers. Donc on commence le pliage des n autres segments au milieu de l'étui et on finit au milieu. Donc on va sur la même longueur de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche. On retrouve donc une solution du problème de la partition.

Correction cxercice 38.

Rappel du problème du Sac à Dos. On a n objets chaque objet i a un volume v_i et un poids p_i Le sac à dos a un volume de V.

Il s'agit de remplir le plus possible le sac à dos sans dépasser le volume du sac à dos. C'est-à-dire maximiser la somme des poids des objets mis dans le sac à dos sous la contrainte que la somme des volumes de ces objets soit inférieure à V.

Version n°1 On calcule f(i,j)= poids le plus lourd atteignable pour un volume i en utilisant seulement les j premiers objets.

Ainsi f(i, 1) est égal à 0 si $i < v_1$ et $f(i,1)=p_1$ si i est supérieur ou égal v_1.

Récurrence $f(i, j) = \max (f(i, j-1), p_j + f(i-v_j, j-1))$

La solution est donc f(V,n) et l'algorithme a une complexité de 0(Vn) (i varie de 0 à V, j de 1 à net le calcul de f(i,j) se fait en temps constant).

Version n°2 On calcule g(i,j)= volume le plus petit pour le poids i avec les j premiers objets.

Ainsi g(0, 1) est égal à 0 , $g(p_1, 1)=v_1$ sinon g(i, 1) = V+1 (correspond en fait à l'infini)

Récurrence $g(i, j) = \min (g(i, j-1), v_j + g(i-p_j, j-1))$

La solution est donc le plus grand i tel que $g(i,n) \leq V$. L'algorithme est en $0(n^2Pmax)$. En effet i varie de 0 à la somme des poids qui est inférieur à n P_{max}.

Résumé de la correction de l'exercice 39.

Dans cette correction on ne donne que la réduction du problème de la partition vers la variante du problème de la partition. A vous de montrer que ça marche.

1. On prend une instance de 2-partition et on multiplie tous les poids par 2.

2. On prend une instance de 2-partition. Si le nombre d'objets est pair pas de problème. Sinon le nombre d'objets est impair on ajoute 3 objets de poids respectivement 4P, 2P et 2P.

3. On prend une instance de 2-partition et on crée une instance de 2-partition équilibré avec 2 fois plus d'objets : n objets de poids 1 et les n autres de poids $p(a_i)+1$.

4. On prend une instance de 2-partition équilibré et on la transforme en une instance de 2-partition (partition impair/pair) en doublant le nombre d'objets un objet sur 2 à un poids de P et l'autre un poids égal à $p(a_i)$.

5. A une instance de 2-partition on ajoute un objet de poids P.