

# Logique 2 (HLIN602)

Licence 3  
Département Informatique  
Faculté des Sciences de Montpellier



---

## TD N°2

### Exercice 1

Soient le prédicat  $P$  et la relation  $Q$  définis comme suit :

- $P(x) \equiv x$  a réussi son examen ;
- $Q(x, y) \equiv x$  a posé des questions à  $y$ .

1. Traduire en formules les énoncés suivants :

- Quelqu'un a raté l'examen et n'a été questionné par personne ;
- Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont posé des questions à quelqu'un ;
- Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été questionnés par quelqu'un ;
- Personne n'a posé de question à tous ceux qui ont réussi à l'examen ;
- Tous ceux qui ont posé des questions à quelqu'un, ont posé des questions à quelqu'un qui a réussi l'examen.

2. Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{Anatole, Boris, Catarina, Diana\}$ . Dans cette interprétation, seuls *Boris* et *Catarina* ont réussi l'examen. Les garçons (*Anatole* et *Boris*) ont posé des questions aux filles (*Catarina* et *Diana*), *Diana* a posé des questions à *Boris*, *Catarina* à *Diana* et ce sont les seuls cas d'entraide.

- Donner les définitions de  $I(P)$  et  $I(Q)$  ;
- Donner la sémantique des formules précédentes dans cette interprétation.

### Exercice 2

Soient  $a$  une constante et  $P$  un prédicat (unaire).

1. Trouver différentes interprétations (si c'est possible) telles que :

- La formule  $P(a)$  soit vraie et la formule  $\exists x.P(x)$  soit vraie ;
- La formule  $P(a)$  soit fausse et la formule  $\exists x.P(x)$  soit vraie ;
- La formule  $P(a)$  soit vraie et la formule  $\exists x.P(x)$  soit fausse ;
- Les deux formules  $P(a)$  et  $\exists x.P(x)$  soient fausses.

2. Pour chacune des interprétations trouvées précédemment, quelle est la sémantique des formules suivantes (faire le calcul) ?

- $(\exists x.P(x)) \Rightarrow P(a)$  ;
- $\forall x.P(x)$ .

Que dire de ces formules ?

3. Que dire des formules suivantes (le démontrer) ?

- $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  ;
- $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$ .

### Exercice 3

Démontrer la validité des formules suivantes :

1.  $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
2.  $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
3.  $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
4.  $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
5.  $(\forall x.\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
6.  $\neg(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists x.\neg P(x)$

### Exercice 4

Soit l'énoncé suivant :

« Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout.  
Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème. »

Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ?  
Quelle que soit la réponse, le démontrer.

### Exercice 5

Démontrer que le raisonnement suivant est incorrect (autrement dit que la conclusion n'est pas conséquence logique des hypothèses) :

*Hypothèses*

*Conclusion*

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. <math>\exists x.P(x)</math> ;</li><li>2. <math>\exists x.Q(x)</math> ;</li><li>3. <math>\forall x.P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow R(x)</math>.</li></ol> | <p>— <math>\exists x.R(x)</math>.</p> |
|--|---------------------------------------|