Preuves en logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2020-2021

Logique du premier ordre (syntaxe)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{N}$:
  - Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $m(f) = 2$;
  - Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (syntaxe)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Sémantique

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Affectation

- Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I ;
- Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

Sémantique

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $c \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![c]\!]^I_\rho = I(c)$;
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_\mathcal{B}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Systèmes de preuves (formelles)

Plusieurs systèmes

- Systèmes à la Frege-Hilbert ;
- Systèmes à la Gentzen :
  - Déduction naturelle ;
  - Calcul des séquents.

Adéquation vis-à-vis de la sémantique

- Correction et complétude par rapport à la sémantique ;
- Correction : si je trouve une preuve de P alors P est vraie ;
- Complétude : si P est vraie alors il existe une preuve de P ;
- Preuve $\equiv$ moyen syntaxique de vérifier la validité d'une formule.

Calcul des séquents de Gentzen

Notion de séquent

- $\Gamma \vdash \Delta$, où $\Gamma, \Delta \equiv$ ensembles de formules ;
- « $\vdash$ » se prononce « thèse » ;
- Sémantique du séquent classique :
  - Si $\Gamma = \phi_1, \ldots, \phi_n$ et $\Delta = \psi_1, \ldots, \psi_m$;
  - $\Gamma \vdash \Delta \equiv \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \Rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$.

Système de Gentzen

- Peu d'axiomes et beaucoup de règles de déduction (par rapport aux systèmes à la Frege-Hilbert) ;
- Système symétrique (règles gauches/droites pour chaque connecteur) ;
- Règle de coupure $\equiv$ règle identifiée (pas une combinaison de règles) ;
- Système adapté à la recherche de preuves (méthode des tableaux) ;
- Pour différentes logiques (classique, intuitionniste, linéaire, etc.).

Calcul des séquents de Gentzen

Règle de déduction (règle d'inférence ou de dérivation)

- Règle de la forme :

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_n}{C}\ nom$$

  où :
  - $P_1, P_2, \ldots, P_n, C$ sont des séquents ;
  - $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les prémisses de la règle ;
  - C est la conclusion de la règle ;
  - *nom* est le nom de la règle.
- Sémantique :
  - La règle se lit du haut vers le bas ;
  - Si on a P_1, P_2, ..., et P_n, alors on peut en déduire C.
- Si la règle n'a pas de prémisses, elle est appelée règle axiomatique ou plus simplement axiome.

Calcul des séquents de Gentzen

Arbre de preuve (arbre de dérivation)

- On part d'un séquent initial à démontrer ;
- On applique les règles en raisonnement abductif (raisonnement arrière), c'est-à-dire que l'on part de ce qu'on veut montrer pour aller vers les hypothèses/axiomes) ;
- On construit ainsi un arbre dont le séquent est la racine et les branches sont créées par les différentes prémisses des règles de déduction ;
- Dans une branche, on s'arrête lorsqu'on atteint une règle axiomatique, qui devient ainsi une feuille de l'arbre ;
- Un arbre de preuve est un arbre dont toutes les branches se terminent par une règle axiomatique (on parle alors de branche close).

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\,\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,\text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,\text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left2}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left2}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \land_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \land B}\ \land_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \lor_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \lor B}\ \lor_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top} \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\,\forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\,\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\,\exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\,\exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\ \forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\ \exists_{\text{left}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\,\forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\,\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\,\exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\,\exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$
$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$
$$\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot$$
$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)$$
$$\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\,\neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\,\forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\,\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\neg_{\text{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\ \neg_{\text{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\ \neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x)}\text{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}\exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\neg_{\text{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$$

$$\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x) \qquad\qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \qquad\qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}{\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))}\lor_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)} \quad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\vee_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \exists_{\text{right}}
      \qquad
      \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}
    }{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \vee_{\text{left}}
  }{
    \dfrac{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \vee_{\text{right}}
  }\ \exists_{\text{left}}
}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\,\text{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\vee_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\,\mathrm{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\mathrm{right}} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\mathrm{right}}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\vee_{\mathrm{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\mathrm{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\vee_{\mathrm{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_{\mathrm{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\;\mathrm{ax}
        }{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\;\exists_{\text{right}}
        \qquad
        \dfrac{
          \dfrac{}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}\;\mathrm{ax}
        }{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\;\exists_{\text{right}}
      }{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\;\vee_{\text{left}}
    }{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\;\exists_{\text{left}}
  }{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\;\vee_{\text{right}}
}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\;\Rightarrow_{\text{right}}
$$

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$
$$\vdash P(x), \neg P(x)$$
$$\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)$$
$$\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)$$
$$\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)} \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} P(x) \vdash P(x) \\ \vdash P(x), \neg P(x) \\ \vdash P(x), \forall x.\neg P(x) \\ \vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x) \end{array}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\forall_{\text{right}}, \quad x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\forall_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}\ \neg_{\text{right}}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P(x) \vdash P(x)}\text{ax}}{\vdash P(x), \neg P(x)}\neg_{\text{right}}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\forall_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Quelle stratégie de preuve ?

Le nerf de la guerre : les quantificateurs

- Aucune stratégie pour les connecteurs, si ce n'est d'utiliser en priorité les règles qui ne branchent pas ;
- Pour les quantificateurs, utiliser les règles de Skolémisation en priorité ($\forall_{\text{right}}$, $\exists_{\text{left}}$), puis les règles d'instanciation ($\exists_{\text{right}}$, $\forall_{\text{left}}$) ;
- Les règles de Skolémisation donnent des variables qui peuvent être ensuite utilisées par les règles instanciation ;
- Les variables de Skolémisation peuvent être utilisées telles quelles ou dans des termes plus complexes (dans des applications de fonctions) ;
- Dans des cas rares, une instanciation factice peut être requise en priorité pour « dégager » une Skolémisation, mais c'est rare (voir la preuve du paradoxe des buveurs).

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$
$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$
$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$
$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$
$$\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$
$$\dfrac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)} \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)} \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)} \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b)}\text{ax} \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b)}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}\text{ax}}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\dfrac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\cfrac{\cfrac{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$

$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$

$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y) \\ P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)\end{array}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\exists_{\text{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}\ \mathrm{ax}}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\mathrm{right}}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\mathrm{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \forall_{\mathrm{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\mathrm{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\mathrm{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}
$$

Propriétés

Prouvabilité

- $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK, noté $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$, ssi il existe une dérivation dans LK se terminant sur $\Gamma \vdash \Delta$.

Correction

- Notation : $\Gamma \models \Delta \equiv \Gamma \models \bigvee_{\Phi \in \Delta} \Phi$;
- Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.

Complétude

- Si $\Gamma \models \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$.

Élimination des coupures

- Il existe un algorithme qui prend une preuve dans LK et la transforme en une preuve sans coupure du même séquent.

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\mathrm{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\mathrm{right}}$$

  - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
    $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
    Si $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
  - Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\mathrm{LK}}$) (1) ;
  - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\text{right}}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$,
      Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ $(\mathcal{H}_2)$;
    - Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$ alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
    - En utilisant $(\mathcal{H}_2)$ et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{right}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{right}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{LK} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
      Si $\Gamma, A \vdash_{LK} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
    - Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{LK} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{LK}$) (1) ;
    - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
  $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
  Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
- En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\mathrm{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathrm{right}}$$

  - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
    $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
    Si $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
  - Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\mathrm{LK}}$) (1) ;
  - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
      Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
    - Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
    - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

- ★ On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
  $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$,
  Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ $(\mathcal{H}_2)$;
- ★ Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$ alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
- ★ En utilisant $(\mathcal{H}_2)$ et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.