TD 2

Exercice 7

- Soit E_0, E_1, E_2, E_3, ..., une suite d'ensembles quelconque. Trouver un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui n'appartient pas à cette liste ?
- Construire F qui est différent de tous les E_i ?
- Comment être sur que $F \neq E_0$ en choisissant de mettre 0 ou pas dans F ?

  Mettre 0 dans F si et seulement si $0 \notin E_0$

Exercice 7

- Soit E_0, E_1, E_2, E_3, ..., une suite d'ensembles quelconque. Trouver un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui n'appartient pas à cette liste ?
- Construire F qui est différent de tous les E_i ?
- On est sur que $F \neq E_0$ car

  $0 \in F$ si et seulement si $0 \notin E_0$

- Finir la construction de F

Exercice 7

- $F = \{ i \mid i \not\in E_i \}$
- $\forall j$ $F \neq Ej$ car j n'appartient par construction qu'à un seul ensemble entre F et E_j.
- Formaliser en faisant une preuve par l'absurde.

Exercice 7

- Supposons $\exists j$ tel que $F=E_j$
- Si $j\in F$ alors $j \in E_j$ (car $F=E_j$)

  alors $j\notin F$ (par construction)
- Si $j\notin F$ alors $j \notin E_j$ (car $F=E_j$)

  alors $j\in F$ (par construction)
- Dans tous les cas on obtient une contradiction.

Exercice 7

- On en déduit qu'il n'y a pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
- Cet ensemble n'est donc pas dénombrable.

Exercice 8

- On ne fait pas. En fait à chaque suite u à valeur dans {0,1}, on peut associer un ensemble $U=\{n \mid u_n =1\}$ et utiliser la réponse précédente.

Exercice 9

- Trouver les solutions possibles pour que l’arrêté munipale puisse être respecté.

Exercice 10

- Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$.

Exercice 10

- Une bijection entre $\mathbb{N}$ et un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$:
- f : n → n

  c' est une bijection de n dans les entiers pairs.

Exercice 11

- Par l'absurde soit f une bijection de E dans P(E).
- Soit $A=\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$
- Supposons qu'il existe a tel que $A=f(a)$
- D'après vous $a \in A$ ou $a \notin A$

Exercice 11

- Par l'absurde soit f une bijection de E dans P(E).
- Soit $A=\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$
- Supposons qu'il existe a tel que $A=f(a)$
- $a \in A \Rightarrow a \in f(a)$ (car $f(a)=A$)

  $\Rightarrow a \notin A$ (par définition de A)

Exercice 11

- Par l'absurde soit f une bijection de E dans P(E).
- Soit $A=\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$
- Supposons qu'il existe a tel que $A=f(a)$
- $a \in A \Rightarrow a \in f(a) \Rightarrow a \notin A$
- De même $a \notin A \Rightarrow a \notin f(a) \Rightarrow a \in A$

Dans tous les cas une contradiction.

Exercice 13

- f totale : $\forall x$, f(x) est definie
- f non calculable : il n'existe pas de programme qui calcule f.
- Une idée pour g croissante, totale et non calculable ?

Exercice 13

- f totale : $\forall x$, f(x) est définie
- f non calculable : il n'existe pas de programme qui calcule f.
- Soit g : $i \rightarrow f(0)+f(1)+ \ldots +f(i)+i$
- g répond-elle à la question ?

  - Pourquoi est-elle totale ?

  - Montrer qu'elle est strictement croissante

  - Montrer qu'elle n'est pas calculable

Exercice 13

- Soit $g : i \to f(0)+f(1)+ \ldots+f(i)+i$
- $g(i)-g(i-1)= f(i)+1 > 0$. Elle est bien strictement croissante.
- $f(i)=g(i)-g(i-1)-1$. Donc si g est calculable alors f aussi.

```
int f (int n) { return g(n)-g(n-1)-1 ;}
```

Exercice 14

Montrer que l'inverse d'une fonction f calculable et bijective est calculable

- int f (int x) { …..}
- g est l'inverse de f si :

$\forall$ x si f(x)=y alors g(y)=x (i.e. g(f(x))=x)

- Il faut faire un programme qui calcule g.

Exercice 14

Montrer que l'inverse d'une fonction f calculable et bijective est calculable

- int f (int x) { .....}
- int g (int y)

```
{
for (int x=0 ;;x++)
        if (f(x)==y) return x ;
}
```