TD Algorithmique du texte

1 Notations et définitions de base

Exercice 1 ***Facteurs, préfixes, suffixes***

1. *Donner tous les facteurs du mot abbbaaa.*
2. *Donner la liste des préfixes de abbaa.*
3. *Donner la liste des suffixes de abcd.*
4. *Combien de préfixes a un mot de longueur n ?*
5. *Combien de facteurs a un mot de longueur n ?*
6. *Combien de facteurs (distincts) possède le mot a^n ?*
7. *Combien de facteurs (distincts) possède le mot $a^m b^n$?*

Exercice 2

1. *Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.*
2. *Donner l'ensemble des couples (u, v) tels que $uv = abaac$.*
3. *Calculer LM pour les ensembles suivants :*
   (a) $L = \{a, ab, bb\}$ *et* $M = \{\varepsilon, b, a^2\}$.
   (b) $L = \emptyset$ *et* $M = \{a, ba, bb\}$.
   (c) $L = \{\varepsilon\}$ *et* $M = \{a, ba, bb\}$.
   (d) $L = \{aa, ab, ba\}$ *et* $M = \{a, b\}^*$.

Exercice 3 *Soit $L = \{ab, ba\}$. Parmi les mots suivants, lesquels sont dans L^* : $abba$, $ababa$, aab, $ababab$, ε, $baab$, $bbaabb$?*

2 Palindromes

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des langages ne contenant que des palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

Exercice 4

1. *Donner un exemple de langage qui est dans $\mathcal{P}$.*
2. *Est-ce que les langages suivants sont dans $\mathcal{P}$?*
   (a) $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   (b) $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
   (d) $L_4 = \{c a^n b a^n c \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 5 *Est-ce que $\mathcal{P}$ est stable par union, intersection, concaténation et le passage au carré $(L.L)$?*

Indication

On dit qu'un ensemble est stable par une opération binaire si pour tout couple d'éléments dans cet ensemble, le résultat de l'opération sur ce couple est également dans l'ensemble. Donc pour montrer une stabilité, il faut le montrer en toute généralité pour tout couple d'éléments, et pour montrer qu'il n'y a pas stabilité, il suffit de donner un contre-exemple, c'est-à-dire un couple d'éléments de l'ensemble tel que le résultat de l'opération sur ces éléments n'est pas dans l'ensemble.

3 Conjugaison

Deux mots u et v sont dits *conjugués* s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1 w_2$ et $v = w_2 w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

Exercice 6 *Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence.*

Indication

On rappelle les propriétés qui définissent une relation d'équivalence : il s'agit d'une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Réflexivité Une relation binaire est réflexive si tout élément est en relation avec lui-même.

Symétrie Une relation binaire est symétrique si pour tout couple (x, y) d'éléments qui sont en relation, alors le couple (y, x) est également en relation.

Transitivité Une relation binaire est transitive si, à chaque fois que l'on a un couple (x, y) et un couple (y, z) dans la relation, alors le couple (x, z) est aussi dans la relation. Pour ce dernier point, vous pouvez écrire le mot y de deux façons différentes et les comparer.

Exercice 7 *Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.*

Indication

Il s'agit de montrer une équivalence, on va donc démontrer le sens direct et le sens réciproque.

$\Rightarrow$: Le sens direct est assez simple en utilisant la définition de la conjugaison.

$\Leftarrow$: Soient deux mots u et v tels qu'il existe un mot w avec $uw = wv$. Pour se simplifier la tâche, on va avancer un argument de minimalité : on suppose que w est le mot le plus petit tel que $uw = wv$. Examinons maintenant ce mot uw : il y a deux cas possibles : soit w est plus grand que u, soit w est de taille strictement inférieure à u. Examiner dans les deux cas les deux écritures possibles du mot uw, pour montrer que le premier cas n'est pas possible, et conclure dans le deuxième cas.

4 Mots de Fibonacci

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On définit les mots de Fibonacci par :

$$\begin{cases} Fib_0 & = & \varepsilon \\ Fib_1 & = & b \\ Fib_2 & = & a \\ Fib_n & = & Fib_{n-1}Fib_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 8 *Donner les mots de Fibonacci jusqu'à $n = 8$. Démontrez par récurrence sur $n \geq 0$ que la longueur de Fib_n est F_n, le nombre de Fibonacci d'ordre n.*

Exercice 9

1. *Montrer que pour $n \geq 3$, Fib_n est un préfixe de tous ses successeurs.*
2. *Montrer que pour $n \geq 4$, le carré de Fib_n est un préfixe de tous ses successeurs à partir de Fib_{n+2}.*

5 Bords et périodes

Exercice 10

1. *Soit x un mot non vide. Soit u le plus petit mot tel que x est préfixe de ux. Montrer que $|u| = period(x)$.*
   Indication
   Utiliser le fait que si p est une période, alors x peut s'écrire sous la forme $w = yw = wz$ avec $|y| = p$.
2. *Soit x un mot non vide. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) $period(x^2) = |x|$,
   (b) *x est primitif, c'est-à-dire ne peut être écrit sous la forme u^k pour $k > 1$,*
   (c) *x^2 contient seulement 2 occurrences de x.*

Indication
Pour montrer toutes ces équivalences, il suffit de montrer que $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (a)$, toutes les autres implications pouvant se déduire de ces trois là. Chacune de ces implications se montre assez rapidement par contraposée (c'est-à-dire que l'on contredit la conclusion, et on en déduit que l'hypothèse ne peut pas être vraie).