

TD Algorithmique du texte

1 Notations et définitions de base

Exercice 1 *Facteurs, préfixes, suffixes*

1. Donner tous les facteurs du mot *abbbaaa*.
2. Donner la liste des préfixes de *abbaa*.
3. Donner la liste des suffixes de *abcd*.
4. Combien de préfixes a un mot de longueur n ?
5. Combien de facteurs a un mot de longueur n ?
6. Combien de facteurs (distincts) possède le mot a^n ?
7. Combien de facteurs (distincts) possède le mot $a^m b^n$?

Exercice 2

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : $a^3 c b b c a$, *aabgjdd*, *titi*, *babc*.
2. Donner l'ensemble des couples (u, v) tels que $uv = abaac$.
3. Calculer LM pour les ensembles suivants :
 - (a) $L = \{a, ab, bb\}$ et $M = \{\varepsilon, b, a^2\}$.
 - (b) $L = \emptyset$ et $M = \{a, ba, bb\}$.
 - (c) $L = \{\varepsilon\}$ et $M = \{a, ba, bb\}$.
 - (d) $L = \{aa, ab, ba\}$ et $M = \{a, b\}^*$.

Exercice 3 Soit $L = \{ab, ba\}$. Parmi les mots suivants, lesquels sont dans L^* : *abba*, *ababa*, *aab*, *ababab*, ε , *baab*, *bbaabb* ?

2 Palindromes

Soit \mathcal{P} l'ensemble des langages ne contenant que des palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

Exercice 4

1. Donner un exemple de langage qui est dans \mathcal{P} .
2. Est-ce que les langages suivants sont dans \mathcal{P} ?
 - (a) $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - (b) $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - (c) $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
 - (d) $L_4 = \{c a^n b a^n c \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 5 Est-ce que \mathcal{P} est stable par union, intersection, concaténation et le passage au carré ($L.L$) ?

3 Conjugaison

Deux mots u et v sont dits *conjugués* s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1w_2$ et $v = w_2w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

Exercice 6 Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence.

Exercice 7 Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.

4 Mots de Fibonacci

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On définit les mots de Fibonacci par :

$$\begin{cases} Fib_0 &= \epsilon \\ Fib_1 &= b \\ Fib_2 &= a \\ Fib_n &= Fib_{n-1}Fib_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 8 Donner les mots de Fibonacci jusqu'à $n = 8$. Démontrez par récurrence sur $n \geq 0$ que la longueur de Fib_n est F_n , le nombre de Fibonacci d'ordre n .

Exercice 9

1. Montrer que pour $n \geq 3$, Fib_n est un préfixe de tous ses successeurs.
2. Montrer que pour $n \geq 4$, le carré de Fib_n est un préfixe de tous ses successeurs à partir de Fib_{n+2} .

5 Bords et périodes

Exercice 10

1. Soit x un mot non vide. Soit u le plus petit mot tel que x est préfixe de ux . Montrer que $|u| = \text{period}(x)$.
2. Soit x un mot non vide. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\text{period}(x^2) = |x|$,
 - (b) x est primitif, c'est-à-dire ne peut être écrit sous la forme u^k pour $k > 1$,
 - (c) x^2 contient seulement 2 occurrences de x .