Université de Montpellier
Licence L3 d'Informatique

4 mai 2017
Durée: 2 heures

HLIN612 : Calculabilité et Complexité
Examen 16 Mai 2017

Seul les documents de cours et travaux dirigés sont autorisés. La note prendra en compte la clarté des explications.

1 Partie calculabilité

Exercice 1

1. Soit $F = \{f_1, f_2, .., f_i \dots\}$ une suite de fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Donner une fonction totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui n'appartient pas à cette suite.
2. Soient deux suites quelconques d'ensembles D et E. Construire un ensemble qui n'appartient à aucune des deux suites.

□

Exercice 2

Soit P le prédicat suivant : Soit q une procédure, $P(q)$ est VRAI si et seulement si il existe x tel que $q(x)$ est impair.

1. Montrer de deux façons différentes que P est indécidable.
2. Soit $E = \{q|P(q) \text{ est } VRAI\}$. Montrer que E n'est pas calculable mais qu'il est récursivement énumérable en donnant sa fonction semi-caractéristique.
3. Donner un algorithme qui affiche tous les éléments de E.
4. Soit R le prédicat suivant $R(q)$ est VRAI si et seulement si quelque soit x $q(x)$ n'est pas impair. Soit $F = \{q|R(q) \text{ est } VRAI\}$. Pourquoi F n'est ni calculable, ni récursivement énumérable.

□

2 Complexité

Exercice 3 Vrai ou faux : justifier par une phrase vos réponses

1. tout problème polynomial est un problème de $\mathcal{NP}$.
2. tout problème polynomial est un problème $\mathcal{NP}$-complet.
3. tout problème de $\mathcal{NP}$ est un problème polynomial.
4. tout problème $\mathcal{NP}$-complet est un problème polynomial.

5. tout problème de $\mathcal{NP}$ est un problème $\mathcal{NP}$-complet.
6. tout problème $\mathcal{NP}$-complet est un problème de $\mathcal{NP}$.

□

Exercice 4

A votre avis, quelle est la complexité du problème suivant, en justifiant votre réponse.

Nombre de feuilles (MF)
Données : $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $k \geq 0$.
Question : Existe-t'il un arbre couvrant qui admet au plus k feuilles ?

□

Exercice 5

On dit qu'un sous-ensemble D des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est dominant si tout sommet de G est soit dans D soit relié à un sommet de D par une arête. *Dom* est l'ensemble des couples (G, k) où G est un graphe possédant un sous-ensemble dominant de taille au plus k.

On dit que $S \subseteq E$ est une couverture G si, pour toute arête (u, v) de E, au moins une de ses extrémités (u et v) appartient à S. Le problème $Vertex - Cover$ est l'ensemble des couples (G, k) tels que G est un graphe ayant une couverture de sommets de taille inférieure ou égale à k.

1. Si $G = (V, E)$ est un graphe et S un Vertex-Cover de G, que pouvez-vous dire de l'ensemble de sommets $V \backslash S$ dans G ?
2. Montrer que l'appartenance de Dom est $\mathcal{NP}$-complet.
   Aide : Soit $G = (V, E)$ un graphe. On construit un graphe $G' = (V', E')$ de la façon suivante : V' est l'ensemble V , moins les sommets isolés (n'appartenant à aucune arête), et auquel on ajoute des nouveaux sommets u_e pour chaque arête $e \in E$; $E' = E \cup \{(x, u_e) | x$ est une extrémité de $e\}$.
   Montrer que G a une couverture de sommets de taille au plus k ssi G' a un ensemble dominant de taille au plus k.

□