15-MAVZU | PREDIKATLAR HISOBI AKSIOMALARI.

Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.

1- ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya* ($\neg, \wedge, \vee$) *amallari va kvantorli amallar* ($\forall, \exists$)*qatnashib, inkor amali elementar formulalarga* (*predmet o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarga*) *tegishli bo'lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi.*

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin.

1- misol. $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$ formulani deyarli normal shaklga keltiramiz.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \vee \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Demak,

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z). \ \blacksquare$$

Predikatlar mantiqining deyarli normal shakldagi formulalari orasida **normal shakldagi formulalar** muhim rol o'ynaydi. Bu formulalarda kvantorli amallar yo butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya'ni normal shakldagi formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2).....(\sigma x_n)\ A\,(x_1, x_2, ..., x_m),\ n \le m,$$

bunda (σx_i) simvoli o'rnida $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlardan biri yoziladi deb tushuniladi va A formula ifodasida kvantorlar bo'lmaydi.

1- teorema. *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

Isboti. Formula deyarli normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo'lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo'lmaydi va, demak, u normal shakl ko'rinishida bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, teorema ko‘pi bilan k amalni qamragan formula uchun to‘g‘ri bo‘lsin va uni shu faraz asosida $k+1$ amalni qamragan formula uchun isbot qilamiz.

A formula $k+1$ amalni o‘z ichiga olgan formula va uning ko‘rinishi $\sigma xL(x)$ shaklda bo‘lsin, bu yerda σx kvantorlarning birini ifodalaydi.

$L(x)$ formula k amalni o‘z ichiga olganligi tufayli uni normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz. U holda $\sigma xL(x)$ formula ta’rifiga asosan normal shaklda bo‘ladi.

A formula $\overline{L}$ ko‘rinishda bo‘lsin, bunda L formula normal shaklga keltirilgan va k amalni o‘z ichiga olgan deb hisoblanadi. U holda

$\overline{\forall xA(x)} \equiv \exists x\overline{A(x)}$ va $\overline{\exists xA(x)} = \forall x\overline{A(x)}$

teng kuchliliklardan foydalanib, inkor amalini predikatlar ustiga tushiramiz. Natijada A formulani normal shaklga keltirgan bo‘lamiz.

Endi A formula $L_1 \vee L_2$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda L_1 va L_2 normal shaklga keltirilgan formulalar deb qaraladi.

L_2 formulada bog‘langan predmet o‘zgaruvchilarni shunday qayta nomlaymizki, L_1 va L_2 formulalardagi hamma bog‘langan predmet o‘zgaruvchilar har xil bo‘lsin. U holda L_1 va L_2 formulalarni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$L_1 \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_m)\ \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ m \le n,$$

$$L_2 \equiv (\sigma y_1)(\sigma y_2)\dots(\sigma y_p)\ \alpha_2\ (y_1, y_2, \dots, y_q),\ p \le q\ .$$

$C \vee \forall xB(x) = \forall x[C \vee B(x)]$ va $\overline{\forall xA(x)} = \exists x\overline{A(x)}$ teng kuchliliklardan foydalanib, L_2 formulani $(\sigma x_1), (\sigma x_2), \dots, (\sigma x_m)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz, ya’ni A formulani ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_m)(\alpha_1(x_1, x_2, .., x_n) \vee \vee (\sigma y_1)(\sigma y_2)\dots(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, \dots, y_q))\ .$$

So‘ngra $\alpha_1\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$ formulani

$(\sigma y_1), (\sigma y_2), \dots, (\sigma y_p)$

kvantor amallari ostiga kiritamiz. Natijada A formulaning normal shaklini hosil qilamiz:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\dots(\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2)\dots(\sigma y_p)\ (\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \alpha_2\ (y_1, y_2, \dots, y_q))\ .$$

$L_1 \wedge L_2$ ko‘rinishdagi A formulani normal shaklga keltirishning isboti xuddi yuqorida kabi bajariladi. ■

Agar formulani normal shaklga keltirish jarayonida $\exists xA(x) \vee \exists xB(x)$ yoki $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ ko‘rinishdagi ifodalarni ko‘rishga to‘g‘ri kelsa, u holda

$$\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) = \forall x[A(x) \wedge B(x)],$$

$$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) = \exists x[A(x) \vee B(x)]$$

teng kuchliliklardan foydalanish kerak bo‘ladi.

2- misol. $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x, y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin. A formulada teng kuchli almashtirishlarni o‘tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \forall x(\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \overline{Q(x, z)}).$$ ■

Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

2- ta’rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo‘lib, bu qiymatlarda A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining A formulasi M* ***sohada bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

3- ta’rif. *Agar shunday soha mavjud bo‘lib, unda A formula bajariladigan bo‘lsa, u holda A* ***bajariluvchi formula*** *deb ataladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo‘lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

4- ta’rif. *Agar Aning ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan chin formula*** *deb ataladi.*

5- ta’rif. *Agar A formula har qanday sohada aynan chin bo‘lsa, u holda A* ***umumqiymatli formula*** *deb ataladi.*

6- ta’rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida A formula yolg‘on qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada* ***aynan yolg‘on formula*** *deb ataladi.*

Keltirilgan ta’riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi.

1. Agar A umumqiymatli formula bo‘lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo‘ladi.

2. Agar A formula M sohada aynan chin formula bo‘lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo‘ladi.

3. Agar M sohada A aynan yolg‘on formula bo‘lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo‘ladi.

4. Agar A bajarilmaydigan formula bo‘lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg‘on formula bo‘ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

7- ta’rif. *Umumqiymatli formula* ***mantiq qonuni*** *deb ataladi.*

3- misol. $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x,y)$: «$x<y$» predikat $M=E\times E$ sohada aniqlangan (bu yerda $E=\{0,1,2,...,n,...\}$) bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ formula M sohada aynan chin formula bo‘ladi, demak, bu sohada u bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1=\{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x<y$» predikat chekli $M_1=E_1\times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ formula M_1 sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va, demak, M_1 sohada $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchi emas. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x,y)$ umumqiymatli formula bo‘lmaydi. ■

4- misol. $\exists x \exists y[P(x)\wedge \overline{P(y)}]$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x)$: «x – juft son» predikat $E=\{0,1,2,...,n,...\}$ uchun $M=E\times E$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda bu formula M sohada aynan chin bo‘ladi, demak, u M sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $P(x)$: «x – juft son» predikat $E_1=\{2,4,6,8,\ ...\}$ uchun $M_1=E_1\times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\exists x \exists y[P(x)\wedge \overline{P(y)}]$ formula M_1 sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi, demak, bu sohada u bajarilmas formuladir. ■

5- misol. $\forall x[P(x)\vee \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy M sohada aynan chin bo‘ladi. Demak, u umumqiymatli formula, ya’ni bu formula mantiqiy qonundir. ■

6- misol. $\forall x[P(x)\wedge \overline{P(x)}]$ formula ixtiyoriy M sohada aynan yolg‘on va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir. ■

Endi predikatlar mantiqidagi formulalarning umumqiymatliligi va bajariluvchanligi orasidagi munosabatni ko‘rib o‘taylik.

2- teorema. *A umumqiymatli formula bo‘lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. A umumqiymatli formula bo‘lsin. U holda, ravshanki, $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir.

Yetarliligi. $\overline{A}$ istalgan sohada bajariluvchi formula bo‘lmasin. U holda bajarilmas formulaning ta’rifiga asosan $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formuladir. Demak, A istalgan sohada aynan chin formula bo‘ladi va u umumqiymatlidir. ■

3- teorema. *A bajariluvchi formula bo‘lishi uchun $\overline{A}$ning umumqiymatli formula bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. A bajariluvchi formula bo‘lsin. U holda shunday M

soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmui (satri) mavjudki, A formula bu qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiladi. Ravshanki, o‘zgaruvchilarning bu qiymatlar satrida $\overline{A}$ formula yolg‘on qiymat qabul qiladi va, demak, $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘la olmaydi.

Yetarliligi. $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘lmasin. U holda shunday M soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar satri mavjudki, $\overline{A}$ formula bu qiymatlar satrida yolg‘on qiymat qabul qiladi. Bu qiymatlar satrida A formula chin qiymat qabul qilganligi uchun u bajariluvchi formula bo‘ladi. ■

7-misol. $A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatliligini isbotlaymiz. A formula istalgan M sohada aniqlangan deb hisoblab, quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajaramiz:

$$\equiv \overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$
$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$
$$\equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

ya'ni A formula istalgan sohada har qanday $P(x)$ va $Q(x)$ bir joyli predikatlar uchun aynan chin, demak, u umumqiymatli formuladir. ■

8- misol. $A \equiv \exists x[(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x))]$ formulaning aynan yolg'on formula ekanligini ko'rsatamiz. $(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ o'rinli va $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ formula aynan yolg'on formula bo'lgani uchun $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ham aynan yolg'on formuladir. ■

Yechilish muammosi.

Predikatlar mantiqida yechilish muammosi mulohazalar algebrasida qanday qo'yilgan bo'lsa, xuddi shunday qo'yiladi: predikatlar mantiqining istalgan formulasi yo umumqiymatli, yo bajariluvchi, yoki aynan yolg'on (bajarilmas) formula ekanligini aniqlab beruvchi algoritm mavjudmi yoki yo'qmi? Bu masala **yechilish muammosi** deb ataladi. Agar bunday algoritm mavjud bo'lsa edi, u (xuddi mulohazalar algebrasidagidek) predikatlar mantiqidagi istalgan formulani aynan chinligini aniqlab beruvchi kriteriyga keltirilgan bo'lar edi.

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo'lsa, predikatlar mantiqi uchun bu muammoni yechish jarayonida katta qiyinchiliklar borligi aniqlandi. XX asrning 30-yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berilgandan so'ng mazkur muammo umumiy holda ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya'ni izlangan algoritm mavjud emasligi aniqlandi. 1936 yilda A. Chyorch[1] predikatlar mantiqining **yechilish muammosi** umumiy holda algoritmik yechilmasligini isbotladi, ya'ni predikatlar mantiqining istalgan formulasi qaysi formulalar (umumqiymatli, bajariluvchi yoki bajarilmas) sinfiga kirishini aniqlab beradigan algoritm mavjud emasligini isbotladi.

[1] Chyorch (Alonzo Church, 1903-1995) – AQShlik matematik, mantiqchi.

Yechilish muammosi predikatlar mantiqi uchun ijobiy hal etilmasada,

predikatlar mantiqi formulalarining ba’zi sohalari uchun bu muammo ijobiy hal bo‘lishi mumkin. Quyida shunday sohalardan ba’zilarini o‘rganamiz.

Chekli sohalarda yechilish muammosi. Yechilish muammosi chekli sohalarda ijobiy hal bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu holda kvantorli amallarni kon’yunksiya va diz’yunksiya amallari bilan almashtirish mumkin. Natijada predikatlar mantiqi formulasi mulohazalar algebrasi formulasiga keltiriladi. Ma’lumki, mulohazalar algebrasi uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo‘ladi.

Masalan, $\forall x \exists y[P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ formula $M=\{a,b\}$ ikki elementli chekli sohada aniqlangan bo‘lsin. U holda uni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\forall x \exists y[P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x[P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee \overline{P(x,b)}] \equiv$$

$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \wedge [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)] .$$

Hosil qilingan kon’yunktiv normal shakldagi formulaning har bir elementar diz’yunksiyasi ifodasida bitta mulohaza o‘zining inkori bilan birgalikda qatnashmoqda. Demak, mulohazalar algebrasining bu formulasi doimo chin qiymat qabul qiladi, ya’ni u aynan chindir.

Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

1- ta’rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o‘zgaruvchilar bo‘lmasa, u holda bunday formula* ***yopiq*** *formula deb ataladi.*

2- ta’rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi* C *tarkibida* $x_1, x_2, ..., x_n$ *erkin o‘zgaruvchilar mavjud bo‘lsa, u holda* $A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$ *formula* C *formulaning* ***umumiy yopilishi*** *va* $B = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$ *formula* C *formulaning* ***mavjudligini yopish*** *deb ataladi.*

1- teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat* n *ta mavjudlik kvantori* *qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isboti. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi

$$B \equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda C formula ifodasida kvantorlar qatnashmaydi, q_i – mantiqiy o'zgaruvchi, P_i – bir joyli predikatlar, Q_i – ikki joyli predikatlar. Bu formulaning chinlik qiymati uning tarkibida qatnashayotgan $q_1, q_2, ...$ mantiqiy o'zgaruvchilar hamda $P_1, P_2, ...$ va $Q_1, Q_2, ...$ predikatlarga bog'liq.

Teoremaning shartiga asosan bitta a elementli istalgan $M = \{a\}$ sohada bu formula aynan chin, ya'ni

$$C(q_1, q_2, ..., P_1(a), P_2(a), ..., Q_1(a,a), Q_2(a,a), ...) \quad (2)$$

formula aynan chin bo'ladi. Ravshanki, (2) formula mulohazalar algebrasining formulasi bo'ladi.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda shunday M_1 soha va o'zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmuasi $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ mavjudki, unda (1) formula yolg'on qiymat qabul qiladi, ya'ni

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) = 0. \quad (3)$$

(3) formulaning inkorini aniqlaymiz:

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} = 1.$$

Bu yerdan $C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)$ formulaning M_1 sohaga oid predmet o'zgaruvchilarning qanday olinishidan qat'iy nazar aynan chinligi kelib chiqadi. M_1 sohadan ixtiyoriy x_0 elementni olib, uni yuqorida ifodalangan formuladagi predmet o'zgaruvchilar o'rniga qo'yib chiqamiz. U holda

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...)} = 1.$$

Demak,

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...) = 0.$$

Bu natija (2) formulaning aynan chin ekanligiga ziddir va (1) formula umumqiymatli emas degan farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi. Shunday qilib, (1) formula umumqiymatlidir. ■

2- teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi ifodasida $n$ta umumiylik kvantori qatnashsa va bu formula ko‘pi bilan $n$ta elementli har qanday to‘plamda (sohada)* ***aynan chin*** *bo‘lsa, u holda u umumqiymatli bo‘ladi.*

Isboti. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...), \quad (5)$$

bu yerda $q_1, q_2, ...$ – mantiqiy o‘zgaruvchilar, $P_1, P_2, ...$ – bir joyli predikatlar, $Q_1, Q_2, ...$ – ikki joyli predikatlar. (1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U holda $n$tadan ortiq elementga ega bo‘lgan M_1 soha mavjudki, bunda (1) formula aynan chin bo‘lmaydi. Boshqacha qilib aytganda, o‘zgaruvchilarning shunday $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$

qiymatlar majmuasi mavjudki,

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0. \quad (6)$$

Bu yerdan

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$
$$\equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1.$$

Shunday qilib, predmet o‘zaruvchilarning shunday $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \in M_1$ qiymatlari mavjudki,

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1,$$

ya’ni $C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0$ bo‘ladi.

Demak, M_1 sohadan ko‘pi bilan $n$ta elementi bo‘lgan shunday M sohani ajratish mumkinki, u yerda bu formula aynan chin bo‘lmaydi. Bu natija teoremaning shartiga ziddir va u (1) formula umumqiymatli emas degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, (1) formula umumqiymatli formuladir. ■

Tarkibida faqat bir joyli (bitta predmet o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko‘rinadi.

3- teorema. *Predikatlar mantiqining tarkibiga n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi biror M to‘plamda bajariluvchi bo‘lsa, u holda bu formula elementlari soni 2^n dan katta bo‘lmagan M_1 to‘plamda ham bajariluvchi bo‘ladi.*

3- teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *Predikatlar mantiqining tarkibiga faqat* n *ta bir joyli predikat kirgan* A *formulasi elementlari soni* 2^n *dan ko'p bo'lmagan ixtiyoriy to'plamda aynan chin bo'lsa, u holda bu formula ixtiyoriy to'plamda ham aynan chin bo'ladi.*

Quyidagi teorema ham predikatlar mantiqining katta sinfini tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosi ijobiy hal bo'lishini tasdiqlaydi.

4- teorema. *Agar predikatlar mantiqining* A *formulasi biror cheksiz sohada bajariluvchi bo'lsa, u holda u chekli sohada ham bajariluvchi bo'ladi.*

Matematik mulohazalarni predikatlar mantiqi formulasi ko'rinishida yozish.

Quyida asosiy matematik tushunchalar – ta'rif va teoremalarni predikatlar mantiqi tili vositasi bilan ifodalashni o'rganamiz.

Matematikaga oid har qanday fan sohasi shu fanda qaralayotgan obyektlar haqidagi mulohazalar bilan ish ko'radi. Mulohazalar mantiq va to'plamlar nazariyasining simvollari hamda berilgan fanning maxsus simvollari yordamida predikatlar mantiqining formulasi ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Predikatlar mantiqining tili matematik tushunchalar o'rtasidagi munosabatni ifodalashga, ta'rif, teorema va isbotlarni yozishga imkoniyat yaratadi. Bu yozishlarni misollarda ko'raylik.

Sonlar ketma-ketligi limitining ta'rifi. *Sonlar ketma-ketligi limitining ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:*

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n\in \boldsymbol{N}(n\geq n_0\to |a_n-a|<\varepsilon),$$

bu yerda $A(\varepsilon,\ n, n_0)$: $(n\geq n_0\to |a_n-a|<\varepsilon)$ – *uch joyli predikat.*

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifi. *Bu ta'rifni ushbu shaklda yozish mumkin:*

$$b=\lim_{x\to x_0} f(x)\leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in E(0<|x-x_0|<\delta\to |f(x)-b|<\varepsilon),$$

bu yerda $B(\varepsilon,\delta,x)$: $(0<|x-x_0|<\delta\to |f(x)-b|<\varepsilon)$ – *uch joyli predikat.*

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta’rifi. E *to‘plamda aniqlangan* $f(x)$ *funksiya uchun* $x_0 \in E$ *da*

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathrm{E}(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

bo‘lsa $f(x)$ *funksiya* $x_0 \in E$ *nuqtada* ***uzluksiz*** *deb ataladi, bu yerda* $P(\varepsilon, \delta, x)$ *– uch joyli predikat.*

O‘suvchi funksiyaning ta’rifi. E *to‘plamda aniqlangan* $f(x)$ *funksiya uchun*

$\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$

bo‘lsa $f(x)$ *funksiya* E *to‘plamda* ***o‘suvchi*** *funksiya bo‘ladi, bu yerda* $Q(x_1, x_2)$*:* $(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$ *– ikki joyli predikat.*

Chegaralangan funksiyaning ta’rifi. *Aniqlanish sohasi* E *bo‘lgan* $f(x)$ *funksiya uchun*

$\exists M \in R_+ \forall x \in E(|f(x)| \le M)$

bo‘lsa, u holda $f(x)$ *funksiya* E *sohada* ***chegaralangan*** *deb ataladi, bu yerda* $F(x, M)$*:* $(|f(x)| \le M)$ *– ikki joyli predikat.*

Ma’lumki, matematikada ko‘p teoremalar shartli mulohazalar shaklida yoziladi, ya’ni «Agar x bo‘lsa, u holda y bo‘ladi» tarzida ifodalanadi. Masalan, «Agar nuqta burchak bissektrisasida yotgan bo‘lsa, u holda u burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan (masofada) bo‘ladi». Bu teoremaning sharti «Nuqta burchak bissektrisasida yotgan» va xulosasi «Nuqta burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan (masofada)» jumlalardan iborat. Ko‘rinib turibdiki, teoremaning sharti ham, xulosasi ham $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ to‘plamda aniqlangan predikatni ifodalaydi. Bu predikatlarni $x \in \boldsymbol{R}^2$ uchun mos ravishda $A(x)$ va $B(x)$ bilan belgilab, teoremani quyidagicha yozish mumkin:

$\forall x \in \boldsymbol{R}^2 (A(x) \to B(x))$.

Shu sababli, teoremaning tuzilishi (strukturasi) haqida gapirganda, unda uchta qismni ajratish kerak:

1) teorema sharti: $\boldsymbol{R}^2$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat;

2) teorema xulosasi: $\boldsymbol{R}^2$ to‘plamda aniqlangan $Q(x)$ predikat;

3) tushuntirish qismi: bu yerda teoremada gap yuritilayotgan obyektlar to‘plamini ifodalash kerak.

Qarama-qarshi tasdiqlarni tuzish.

Agar biror A matematik tasdiq berilgan bo‘lsa, u holda $\overline{A}$ unga qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqni ifodalaydi. Predikatlar mantiqi teng kuchli almashtirishlar vositasida $\overline{A}$ formulaga muayyan nuqtai nazardan yaxshi shakl (ko‘rinish) bera oladi.

1- misol. Chegaralangan funksiyaning ta’rifi

$\exists M \in R_{+} \forall x \in E(|f(x)| \leq M)$

formula orqali berilishini ko‘rgan edik. Bu formulaning inkorini uchun teng kuchli almashtirishlar bajarib, chegaralanmagan funksiyaning ta’rifini hosil qilamiz:

$$\overline{\exists M \in R_{+} \forall x \in E(|f(x)| \leq M)} \equiv$$

$$\equiv \forall M \in R_{+} \overline{\forall x \in E(|f(x)| \leq M)} \equiv$$

$$\equiv \forall M \in R_{+} \exists x \in E(\overline{|f(x)| \leq M}) \equiv$$

$$\equiv \forall M \in R_{+} \exists x \in E(|f(x)| > M).$$

Oxirgi $\forall M \in R_{+} \exists x \in E(|f(x)| > M)$ formula chegaralanmagan funksiyaning ta’rifini ifodalaydi. ■

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, *hamma kvantorlari oldinda turgan predikatlar mantiqi formulasi orqali ifodalangan tasdiqqa qarama-qarshi tasdiqni yasash uchun hamma kvantorlarni qarama-qarshisiga* (*ya’ni* $\forall$ *ni* $\exists$ *ga va* $\exists$ *ni* $\forall$ *ga*) *almashtirish va kvantorlar ostida turgan predikatning inkorini olish kifoya.*

2- misol. $b \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tasdiqni quyidagi formula ifodalaydi:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(\overline{0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon}) \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon). \ ■$$

3- misol. Berilgan teoremaning to‘g‘riligini rad etadigan tasdiq yasashni ko‘ramiz. $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ teorema berilgan bo‘lsin. Bu teoremani rad etadigan tasdiq quyidagicha bo‘ladi:

$$\overline{\forall x \in E(P(x) \to Q(x))} \equiv \exists x \in E(\overline{P(x) \to Q(x)}) \equiv$$

$$\equiv \exists x \in E(P(x) \wedge \overline{Q(x)}).$$

Oxirgi formula faqat $P(x) \equiv 1$ va $Q(x) \equiv 0$ bo‘lgandagina chin qiymatga egadir. Demak, $\forall x (P(x) \to Q(x))$ teoremaning noto‘g‘riligini isbotlan uchun shunday $x \in E$ elementni ko‘rsatish kerakki, bu element uchun $P(x)$ chin, $Q(x)$ esa yolg‘on qiymat qabul qilsin, ya’ni kontrmisol keltirish kerak. ■

To‘g‘ri, teskari va qarama-qarshi teoremalar.

Quyidagi to‘rtta teoremani ko‘rib o‘taylik:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)), \qquad (1)$$

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)), \qquad (2)$$

$$\forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}), \qquad (3)$$

$$\forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}). \qquad (4)$$

1- ta’rif. *Birining sharti ikkinchisining xulosasi va ikkinchisining sharti birinchisining xulosasi bo‘lgan juft teoremalar **o‘zaro teskari teoremalar** deb ataladi.*

Masalan, (1) va (2) teoremalar hamda (3) va (4) teoremalar o‘zaro teskari teoremalardir. Bu juft teoremalaraning birini (ixtiyoriysini) **to‘g‘ri teorema** deb hisoblasak, u holda ikkinchisini **teskari teorema** deyish joizdir.

2- ta’rif. *Birining sharti va xulosasi ikkinchisining sharti va xulosasi uchun mos ravishda inkorlari bo‘lgan juft teoremalar **o‘zaro qarama-qarshi teoremalar** deb ataladi.*

Masalan, (1) va (3) teoremalar hamda (2) va (4) teoremalar o‘zaro qarama-qarshi teoremalardir.

4- misol. «Agar to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi» degan (1) teoremaga «Agar to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, u holda uning diagonallari teng bo‘ladi» degan (2) teorema teskari teorema bo‘ladi. (1) teoremaga qarama-qarshi teorema «Agar to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lmasa, u holda u to‘g‘ri burchakli bo‘lmaydi» degan (3) teorema va (2) teoremaga qarama-qarshi teorema «Agar to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lmasa, u holda uning diagonallari teng bo‘lmaydi» (4) teorema bo‘ladi. ■

4- misoldagi (1) va (4) teoremalar bir vaqtda chin bo‘ladi. (1) teorema uchun kontrmisol sifatida teng yonli trapesiyani keltirish mumkin.

Ravshanki, to‘g‘ri va teskari teoremalar, umuman olganda, teng kuchli bo‘lmaydilar, ya’ni biri chin, ikkinchisi yolg‘on bo‘lishi mumkin.

Ammo, (1) va (4) teoremalar hamda (2) va (3) teoremalarning teng kuchli formulalar ekanligini osongina isbotlash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv$$

$$\equiv \forall x \in E(\overline{\overline{B(x)}} \vee \overline{A(x)}) \equiv \forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}).$$

Xuddi shunday

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}).$$

Bu teng kuchliliklardan quyidagi xulosaga kelamiz: agar (1) teorema isbot qilingan bo‘lsa, u holda (4) teorema ham isbot qilingan bo‘ladi va agar (2) teorema isbot qilingan bo‘lsa, u holda (3) teorema ham isbotlangan hisoblanadi.

Yetarli va zaruriy shartlar.

Quyidagi teoremani ko‘raylik

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)). \qquad (5)$$

$A(x) \to B(x)$ predikatning chinlik to‘plami $CI_A \cup I_B$ to‘plamdan iborat bo‘ladi. Demak, bu predikatning yolg‘onlik to‘plami $C(CI_A \cup I_B) = (I_A \cap CI_B)$ to‘plamdan iborat. Oxirgi $I_A \cap CI_B$ to‘plam faqat $I_A \subset I_B$ bo‘lgandagina bo‘sh to‘plam bo‘ladi.

Shunday qilib, $A(x) \to B(x)$ predikat $x \in E$ ning hamma qiymatlarida $A(x)$

predikatning chinlik to‘plami $B(x)$ predikat chinlik to‘plamining qism to‘plami, ya’ni $I_A \subset I_B$ bo‘lganda va faqat shundagina chin bo‘ladi. Bu holda $B(x)$ **predikat** $A(x)$ **predikatdan mantiqiy kelib chiqadi** deb aytiladi. $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun **zaruriy shart** va $A(x)$ esa $B(x)$ uchun **yetarli shart** deb ataladi. Masalan, ushbu «Agar x natural son bo‘lsa, u holda y butun son bo‘ladi» teoremada $B(x)$: «x – butun son» predikati $A(x)$: «x – natural son» predikatidan mantiqiy kelib chiqadi va «x – natural son» predikati «x – butun son» predikati uchun yetarli shart bo‘ladi.

Shunday hollar mavjudki, bularda

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \qquad (6)$$

va

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \qquad (7)$$

o‘zaro teskari teoremalar chin bo‘ladi. Bu hol faqat $I_A = I_B$, ya’ni $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar teng kuchli predikatlar bo‘lgandagina o‘rinlidir.

Qaralayotgan holda (1) teoremaga asosan $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun yetarli shart va (2) teoremadan $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun zaruriy shart ekanligi kelib chiqadi. Demak, agar (1) va (2) teoremalar chin bo‘lsa, u holda $A(x)$ shart $B(x)$ uchun ham yetarli, ham zaruriy shart bo‘ladi. Xuddi shu kabi bu holatda $B(x)$ shart $A(x)$ uchun yetarli va zaruriy shart bo‘ladi. Biz ayrim vaqtlarda «zarur va yetarli» mantiqiy bog‘lovchilar o‘rnida «shunda va faqat shunda» mantiqiy bog‘lovchilarini ishlatamiz. Bu yerda (1) va (2) mulohazalar chin bo‘lganligi uchun quyidagi mulohaza ham chin bo‘ladi:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \wedge \forall x \in E(B(x) \to A(x)) = = \forall x \in E(A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

5- misol. Ushbu teorema: «Agar x son 6ga qoldiqsiz bo‘linsa, u holda x son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi» chindir. $A(x)$: «x son 6ga qoldiqsiz bo‘linadi» predikati va $B(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi» predikati bo l‘sin. $B(x)$ predikat $A(x)$ predikatdan mantiqiy kelib chiqadi, ya’ni $A(x) \to B(x)$. $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun yetarli, $B(x)$ predikat esa $A(x)$ predikat uchun zaruriy shartdir.

Endi quyidagi teskari teoremani tahlil qilamiz. «Agar x son 3ga qoldiqsiz bo‘linsa, u holda x son 6ga qoldiqsiz bo‘linadi» noto‘g‘ridir (yolg‘ondir). Shuning uchun bu yerda $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun yetarli shart, $A(x)$ predikat esa $B(x)$ predikatga zaruriy shart bo‘la olmaydi. ■

Teskarisini (aksini) faraz qilish usuli bilan isbotlash.

Teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlash quyidagi sxema orqali olib boriladi:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \qquad (8)$$

teorema noto‘g‘ri, ya’ni shunday x o‘zgaruvchi mavjudki, $A(x)$ shart chin va $B(x)$ xulosa yolg‘on deb faraz qilinadi. Agar bu farazdan mantiqiy fikrlash natijasida qarama-qarshi tasdiq kelib chiqsa, u holda qilingan faraz noto‘g‘ri ekanligi va teoremaning to‘g‘riligi hosil bo‘ladi.

6- misol. Yuqoridagi sxemadan foydalanib (1) teoremaning chinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, (1) teoremaning noto‘g‘riligi (yolg‘onligi) (farazga ko‘ra) $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}$ formulaning chinligini ko‘rsatadi.

(1) teoremani noto‘g‘ri deb qabul qilgan farazimizdan kelib chiqadigan qarama-qarshi tasdiq $D \wedge \overline{D}$ kon’yunksiyadan iborat bo‘ladi, bu yerda D – biror mulohaza. Shunday qilib, teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlash sxemasi $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D}$ formulaning chinligini isbotlashga keltirildi. Oxirgi formula (8) fomulaga teng kuchlidir. Haqiqatan ham,

$$\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D} \equiv$$
$$\overline{\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}} \vee D \wedge \overline{D} \equiv \forall x \in E(A(x) \to B(x)). \blacksquare$$

Aksiomatik predikatlar hisobi haqida.

Aksiomatik predikatlar nazariyasini ham xuddi aksiomatik mulohazalar nazariyasi kabi yaratish mumkin. Bu yerda quyidagilarni ko‘rsatish zarur:

1. Predikatlar hisobi formulasining ta’rifi predikatlar mantiqi formulasining ta’rifi bilan bir xil.

2. Predikatlar hisobi aksiomalar sistemasini tanlashni (xuddi mulohazalar hisobidagidek) har xil amalga oshirish mumkin. Shunday aksiomalar sistemasidan bittasi quyidagi: mulohazalar hisobining o‘n bir aksiomasi (4ta guruh aksiomalar) va ikkita qo‘shimcha aksioma

$\forall x(F(x) \to F(x))$, $F(t) \to \exists x F(x)$,

aksiomalardan iborat sistema bo‘lishi mumkin, bu yerda t o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchini o‘z ichiga olmaydi.

3. Mulohazalar hisobidagi keltirib chiqarish qoidasiga yana ikkita qoida qo‘shiladi:

a) umumiylik kvantorini kiritish qoidasi $-\dfrac{F \to G(x)}{F \to \forall x G(x)}$;

b) mavjudlik kvantorini kiritish qoidasi $-\dfrac{G(x) \to F}{\exists x G(x) \to F}$, agar F x ga bog‘liq bo‘lmasa.

4. Xulosa va isbotlanuvchi formula tushunchalari xuddi mulohazalar hisobidagi kabi aniqlanadi.

5. Xuddi hamma aksiomatik nazariyalardagidek ushbu muammolar ko‘riladi:

a) yechilish,   b) zidsizlik,   d) to‘liqlik,   e) erkinlik.