6-MAVZU	**MULOHAZALAR ALGEBRASI FORMULALARINING NORMAL SHAKLLARI**

Tengkuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko‘rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\overline{A} \to$BC formulani $A \vee BC$ yoki $(A \vee B)\,(A \vee C)$ ko‘rinishlarda yoza olamiz.

Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & agar \quad \sigma = ch, \\ \overline{x}, & agar \quad \sigma = yo. \end{cases}$$

σ^{σ} = ch ekanligi aniq.

1-ta’rif.

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi formulaga elementar kon’yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi mumkin.*

2-ta’rif.

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi formulaga elementar diz’yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi mumkin.*

3-ta’rif. *Elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyasiga formulaning kon’yunktiv normal shakli (KNSh) va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasiga formulaning diz’yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.*

KNShga $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$ formula va DNShga $x\,y \vee \overline{x}z \vee x\,\overline{y}z$ formula misol bo‘la oladi.

1-teorema. *Elementar mulohazalarning har bir* P *formulasiga tengkuchli kon’yunktiv normal shakldagi* Q *formula mavjud.*

Bu teoremani isbotlashda ushbu tengkuchliliklardan foydalanamiz:

1. $\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}$; 2. $\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$;

3. $A\to B=\overline{A}\vee B$; 4. $\overline{A\to B}=A\wedge\overline{B}$; (3)

5. $A\leftrightarrow B=(\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee\overline{B})$; 6. $\overline{A\leftrightarrow B}=(A\wedge\overline{B})\vee(\overline{A}\wedge B)$.

Isbot. P formula normal kon’yunktiv shaklda bo‘lmasa, quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

a) P dagi elementar mulohazalar $\wedge$ va $\vee$ amallari bilangina birlashtirilgan bo‘lsa ham, lekin $\wedge$ so‘nggi amalni ifodalamaydi. Bu holda $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee B)$ distributivlik qonunidan foydalanib, so‘nggi amali $\wedge$ dan iborat tengkuchli Q formulaga keltiramiz.

b) P formula $-$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ mantiqiy amallar vositasida tuzilgan qandaydir formulani ifodalasin. U holda P ga (3) tengkuchliliklarni tatbiq etib P bilan tengkuchli va $-$, $\vee$, $\wedge$ bilan ifodalangan P^1 formulani hosil qilamiz. Agar P^1 KNSh ko‘rinishida bo‘lmasa, unga $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee B)$ distributivlik qonunini tatbiq etib, chekli qadamlardan keyin P bilan tengkuchli Q kon’yunktiv normal shakldagi formulaga kelamiz.

Izoh. *P formulani kon’yunktiv normal shaklga keltirish jarayonida*

$$A\wedge A=A,\quad A\vee A=A,\quad A\wedge J=A,\quad A\wedge J=J,$$
$$A\wedge\overline{J}=\overline{J},\quad A\vee\overline{J}=A,\quad A\vee\overline{A}=J \qquad (4)$$

tengkuchliliklardan foydalanib, uni soddalashtirish mumkin.

Misollar. 1. $P=[(x\vee y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})]\vee[x\wedge(\overline{x}\vee y)]$

$$P=\{[(x\vee y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})]\vee x\}\wedge\{[(x\vee y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})]\vee(\overline{x}\vee y)\}=$$
$$=[(x\vee y)\vee x]\wedge[(\overline{x}\vee\overline{y})\vee x]\wedge[(x\vee y)\vee(\overline{x}\vee y)]\wedge[(\overline{x}\vee\overline{y})\vee(\overline{x}\vee y)]=$$
$$=(x\vee y)\wedge[J\vee\overline{y}]\wedge(J\vee y)\wedge(\overline{x}\vee J)=(x\vee y)\wedge J\wedge J\wedge J=x\vee y;$$
$$P=x\vee y.$$

Shunday qilib, P formulaning KNSh bittagina diz’yunktiv $(x\vee y)$ haddan iborat ekan.

2. $P=\overline{x\vee y}\leftrightarrow x\wedge y$

$$P=\overline{x}\wedge\overline{y}\leftrightarrow x\wedge y=\overline{x\vee y}\leftrightarrow(x\wedge y)=$$
$$=[\overline{\overline{x\vee y}}\vee(x\wedge y)]\wedge[(\overline{x\vee y})\vee(\overline{x\wedge y})]=$$
$$=[(x\vee y)\vee(x\wedge y)]\wedge[(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\vee\overline{y})]=$$

$$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] =$$

$$= [(x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{y})] =$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}):$$

$$P = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

P formulasi tavtologiya ekanligini chinlik jadvaliga murojaat qilmay turib aniqlash mumkinmi degan savolga quyidagi **chinlik alomati** deb atalgan teorema ijobiy javob beradi.

2-teorema. P *formula doimo chin bo'lishi uchun uning KNSh dagi har bir elementar diz'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot: a) P formulaning

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad (5)$$

KNSh dagi har bir A_i hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lsin, ya'ni $A_i = x \vee \bar{x} \vee y \vee \ldots\ldots \vee u$ shaklida bo'lsin, u holda $x \vee \bar{x} = J$ va $J \vee A = J$ larga asosan $A_i = J \vee (y \vee \ldots. \vee u \vee V) = J$ bo'ladi.

Demak, $P = J \wedge J \wedge \ldots \wedge J = J$ bo'ladi, ya'ni aynan chin formula bo'ladi.

b) Endi P - tavtologiya bo'lsin va A_i uning KNSh dagi shunday elementar diz'yunktiv hadi bo'lsinki, unda birorta elementar mulohaza bilan birga uning inkori qatnashmagan bo'lsin. Masalan, $A_i = x \vee \bar{y} \vee \ldots. \vee u$ shaklida bo'lsin. Endi, elementar mulohazalarning shunday qiymatlar satrini olaylikki, bu satrda x ning qiymati 0, y ning qiymati 1, z ning qiymati 0,......, u ning qiymati yo bo'lsin. U vaqtda

$$A_i = x \vee \bar{y} \vee \ldots. \vee u = 0 \vee 1 \vee \ldots. \vee 0 = 0 \vee \ldots. \vee 0 = 0.$$

Demak, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ ning qiymati ham yolg'on bo'ladi. Ammo, teoremaning shartiga asosan P ning qiymati aynan chindir. Natijada qarama-qarshilikka keldik. Demak, elementar diz'yunksiyalarning har bir hadida birorta mulohaza o'zi va o'zining inkori bilan qatnashishi shart.

Misol. 1. $P = x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$.

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ - aynan chindir.

2. $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ - aynan chin formuladir.

Diz'yunktiv normal shakl.

Eslatib o'tamizki, elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.

1-teorema. *Elementar mulohazalarning istalgan P formulasini DNShga keltirish mumkin.*

Isbot. Buning uchun $\bar{P}$ formulani KNShga keltiramiz:

$$\bar{P} = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$$

va so'ngra $\bar{P}$ ning inkorini topganimizda formula DNSh ko'rinishiga keladi:

$$\bar{\bar{P}} = P = \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_m} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots\ldots \vee \overline{A_m}.$$

Endi **yolg'onlik alomati** deb atalgan teoremani isbotlaymiz.

2-teorema. *P formula aynan yolg'on bo'lishi uchun, uning diz'yunktiv normal shaklidagi har bir elementar kon'yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. a) P-doimo yolg'on bo'lsa, u holda $\bar{P}$ - aynan chin bo'ladi. Demak, $\bar{P}$ ning KNSh dagi har bir elementar diz'yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga uning inkori ham mavjud bo'ladi. Shuning uchun $\bar{\bar{P}} = P$ ning DNSh dagi har bir kon'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo'ladi.

b) Endi har bir elementar kon'yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo'lsin, ya'ni

$A_i = x_i \wedge \bar{x}_i \wedge y_i \wedge \ldots\ldots \wedge z_i$ bo'lsin, u vaqtda $A_i = 0$ va

$$P = 0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = 0.$$

Demak, P doimo yolg'on formuladir.

Misol.

$$P = \overline{\overline{(\bar{x} \wedge x)} \to \overline{\bar{y} \wedge y}} = \overline{(\bar{x} \wedge x)} \vee \overline{\bar{y} \wedge y} = (\bar{\bar{x}} \vee \bar{x}) \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{y} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$$

$\bar{P} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$ - aynan chin.

$$P = (\bar{x} \wedge x) \wedge (\bar{y} \wedge y)$$ - aynan yolg‘on.

3-teorema. *Elementar mulohazalarning har bir P formulasi uchun yechilish muammosi yechiladigandir.*

Isbot. 1. P ni KNShga keltirgandan keyin, aynan chin bo‘lish - bo‘lmasligi darhol aniqlanadi.

2. P aynan chin bo‘lmasa, uni DNSh ga keltirib, aynan yolg‘on bo‘lish - bo‘lmasligini aniqlaymiz.

3. P doimo chin va doimo yolg‘on bo‘lish shartlarini qanoatlantirmasa, u holda bu formula bajariluvchi bo‘ladi.

Demak, elementar mulohazalar formulasining aynan chin, aynan yolg‘on yoki bajariluvchi formula bo‘lishini chekli qadamlar protsessida aniqlash mumkin. Shuning uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.

Mukammal kon’yunktiv va diz’yunktiv normal shakllar. Mantiq algebrasining bitta formulasi uchun bir nechta DNSh (KNSh) mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, $(x \vee y)$ $(x \vee z)$ formulani quyidagi $x \vee yz$, $x \vee xy \vee xz$ DNShlarga keltirish mumkin. Bular distributivlik va idempotentlik qonunlarini qo‘llash natijasida hosil qilingan.

Formulalarni bir qiymatli ravishda normal shaklda tasvirlash uchun mukammal diz’yunktiv normal shakl va mukammal kon’yunktiv normal shakl (MDNSh va MKNSh) deb ataluvchi ko‘rinishlari ishlatiladi.

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalarning

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

elementar diz’yunksiyalari va

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

elementar kon’yunksiyalari berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *(1) elementar diz’yunksiya ((2) elementar kon’yunksiya) to‘g‘ri elementar diz’yunksiya (elementar kon’yunksiya) deb aytiladi, shunda va faqat shundagina, qachonki (1)ning ((2)ning) ifodasida har bir elementar mulohaza x_i bir marta qatnashgan bo‘lsa.*

Masalan, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ va $\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_6$ elementar diz’yunksiyalar va $x_1\, x_2\, x_3$ va $x_1\, \bar{x}_3\, x_6$ elementar kon’yunksiyalar mos ravishda to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar va elementar kon’yunksiyalar deb aytiladi.

2-ta’rif. *(1) elementar diz’yunksiya ((2) elementar kon’yunksiya)* $x_1, x_2, ..., x_n$ *mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiya (elementar kon’yunksiya) deb aytiladi, qachonki ularning ifodasida* $x_1, x_2, ..., x_n$ *mulohazalarning har bittasi bir matragina qatnashgan bo‘lsa.*

Masalan, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ elementar diz’yunksiyalar va $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $x_1 x_2 \overline{x_3}$ elementar kn’yunksiyalar x_1, x_2, x_3 mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiyalar va elementar kon’yunksiyalar bo‘ladi.

3-ta’rif. *Diz’yunktiv normal shakl (kon’yunktiv normal shakl) MDNSh (MKNSh) deb aytiladi, agar DNSh (KNSh) ifodasida bir xil elementar kon’yunksiyalar (elementar diz’yunksiyalar) bo‘lmasa va hamma elementar kon’yunksiyalar (elementar diz’yunksiyalar) to‘g‘ri va to‘liq bo‘lsa.*

Masalan, $xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z$ DNSh x, y, z mulohazalarga nisbatan MDNSh bo‘ladi. $(x \vee y)\,(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)$ KNSh x, y mulohazalarga nisbatan MKNSh bo‘ladi.

Asosiy mantiqiy amallarning MDNSh va MKNSh ko‘rinishlari quyidagicha bo‘ladi: a) MDNSh: $\overline{x} = \overline{x}$; $xy = xy$; $x \vee y = xy \vee \overline{x}\,y \vee x\,\overline{y}$; $x \to y = xy \vee \overline{x}\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}$; $x \to y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

b) MKNSh: $\overline{x} = \overline{x}$; $xy = (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})\,(x \vee y)$;

$$x \vee y = x \vee y;\quad x \to y = \overline{x} \vee y;\quad x \to y = (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y}).$$

1-teorema. n *ta elementar mulohazaning aynan chin formulasidan farqli har bir* A *formulani mukammal kon’yunktiv normal shaklga (MKNSh) keltirish mumkin.*

Isbot. Quyidagi isbot tavtologiyadan farq qiluvchi har qanday A formulani MKNSh ga keltirish algoritmi bo‘ladi.

1.Avvalo A **formulani kon’yunktiv normal shaklga keltiramiz.** Buning uchun A formulani kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallar orqali ifodalaymiz (inkor amaldi faqatgina o‘zgaruvchilar ustida bo‘lishi kerak). So‘ngra distributivlik qonunlaridan foydalanib, A formulani KNShga keltiramiz va hamma lozim bo‘lgan soddalashtirishlarni bajaramiz.

2.Agar KNSh ifodasida bir nechta bir xil elementar diz’yunksiyalar mavjud bo‘lsa, u holda $x \wedge x = x$ tengkuchlilik formulasidan foydalanib ulardan bittasini A ifodasida qoldiramiz.

3.Quyidagi ikki usul orqali hamma elementar diz’yunksiyalarni to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylantiramiz:

a) agar biror elementar diz’yunksiya ifodasida birorta o‘zgaruvchi o‘zining inkori bilan qatnashgan bo‘lsa, u holda $x \vee \bar{x}$=ch, ch$\vee x$=ch, $x \wedge x = x$ tengkuchlilik formulalarga asosan biz bu elementar kon’yunksiyani KNSh ifodasidan olib tashlaymiz;

b) agar birorta o‘zgaruvchi elementar diz’yunksiya ifodasida bir necha marta qatnashgan bo‘lsa (yoki hamma holda inkor ishorasi ostida emas, yoki hamma holda inkor ishorasi ostida), u vaqtda $x \vee x$ formulasiga asosan biz ulardan faqatgina bittasini KNSh ifodasida qoldiramiz.

Natijada, hamma elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylanadi.

4. Agar ba’zi elementar diz’yunksiyalar to‘liq elementar diz’yunksiyalar bo‘lmasa, ya’ni diz’yunktiv hadlarda elementar mulohazalarning ba’zilari (yoki ularning inkorlari) mavjud bo‘lmasa, u holda bunday elementar diz’yunksiyalarni to‘liq elementar diz’yunksiyalar holatiga keltirish kerak.

Masalan, biror elementar diz’yunksiya ifodasida

$$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n$$

x_i yoki $\overline{x_i}$ yo‘q deb faraz qilaylik. U holda uni $x_i \wedge \overline{x_i} = 0$ va $D \vee 0 = D$ formulalardan foydalanib quyidagi

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee \overline{x}_{i+1} \vee \ldots \vee x_n) \vee (x_i \wedge \overline{x_i}) =$$
$$= (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_i \vee \overline{x}_{i+1} \vee \ldots \vee x_n) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee \overline{x_i} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n)$$

ikki to‘liq elementar diz’yunksiyalar kon’yunksiyasiga keltira olamiz.

Agarda elementar diz’yunksiya ifodasida bir nechta $y_1, y_2, \ldots, y_m$ o‘zgaruvchilar qatnashmayotgan bo‘lsa, u holda uning ifodasiga $(y_i \wedge \overline{y_i})$ $(i = \overline{1,m})$ kon’yunksiyalarni mantiqiy qo‘shib, distributivlik qonunini qo‘llaymiz. Natijada, bitta to‘liq emas elementar diz’yunksiya o‘rniga $2m$ ta to‘liq elementar diz’yunksiyalarga ega bo‘lamiz.

5)To‘rtinchi qadam bajarilishi natijasida KNSh ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar paydo bo‘ladi. Shuning uchun yana 2) qadamni ishlatamiz.

Demak, 1) - 5) qadamlar natijasida KNSh ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar mavjud bo‘lmaydi va hamma elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri va to‘liq bo‘ladi. Ta’rifga asosan, bunday KNSh mukammal kon’yunktiv normal shakl bo‘ladi.

Misol. 1. $A=(\bar{x}\to x)\wedge(y\to\bar{y})\vee(z\leftrightarrow u)$ formula quyidagi MKNSh ga ega bo‘ladi.

$$A=(x\vee\bar{z}\vee u)\wedge(x\vee z\vee\bar{u})\wedge(\bar{y}\vee\bar{z}\vee u)\wedge(\bar{y}\vee z\vee\bar{u})$$

2. $A=(\overline{x\vee z})\wedge(x\to y)=(\bar{x}\wedge\bar{y})\wedge(\bar{x}\vee y)$

$$A=[\bar{x}\vee(y\wedge\bar{y})\vee(z\wedge\bar{z})]\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee(y\wedge\bar{y})\vee\bar{z}]\wedge$$
$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee(z\wedge\bar{z}))]=[(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)\wedge$$
$$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})]\wedge[(x\vee y\vee\bar{z})\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\wedge$$
$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})]\wedge[(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})]$$
$$A=(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)\wedge(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})\wedge$$
$$\wedge(x\vee y\vee\bar{z})\wedge(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})$$

3. $A=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee t)$

$$A=[z\vee y\vee(z\wedge\bar{z})\vee(t\wedge\bar{t})]\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee y\vee z\vee(t\wedge\bar{t})]\wedge$$
$$\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee(y\wedge\bar{y})\vee z\vee t)=[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee t)\wedge$$
$$\wedge(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\wedge(x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t})]\wedge[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge$$
$$(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)\wedge(x\vee y\vee z\vee\bar{t})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee\bar{t})]\wedge$$
$$\wedge[(x\vee y\vee z\vee t)\wedge x\vee\bar{y}\vee z\vee t)\wedge$$

$$\wedge(\bar{x}\vee y\vee z\vee t)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\vee t)]$$

n mulohazali mukammal kon’yunktiv normal shakl

$$\wedge\left(x_1^1\vee x_2^1\vee\ldots\vee x_n^1\right)$$

ifodasida $\wedge$ o‘rniga $\vee$ ni va aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ ni qo‘yganimizda

$$\vee\left(x_1^1\wedge x_2^1\wedge\ldots\wedge x_n^1\right)$$

biz n mulohazali mukammal diz’yunktiv normal shaklga ega bo‘lamiz.

Mukammal diz’yunktiv normal shaklning har bir $x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge ... \wedge x_n^1$ hadi **kon’yunktiv konstituent** deb ataladi.

2-teorema. *n ta elementar mulohazalarning aynan yolg‘on formulasidan farqli har bir A formulasini mukammal diz’yunktiv normal shaklga keltirish mumkin.*

Isbot. Berilgan formulani A bilan belgilab, avvalo $\overline{A}$ ni mukammal kon’yunktiv normal shaklga keltiramiz

$$\overline{A} = \wedge\left(x_1^1 \vee x_2^1 \vee ... \vee x_n^1\right)$$

Bundan $\overline{\overline{A}} = A$ ning MDNSh ni topamiz

$$A = \wedge\left(\overline{x_1^1 \vee x_2^1 \vee ...... \vee x_n^1}\right) = \vee\left(\overline{x}_1^{1} \wedge x_2^1 \wedge ..... \wedge \overline{x}_n\right)$$

Misollardan namunalar:

a) Asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, shunday almashtirishlar kiritingki, quyidagi formulalarda inkor amali faqat propozisional o‘zgaruvchilarga tegishli bo‘lsin: $(X \to Y) \to \neg(X \leftrightarrow \neg Z)$.

Yechim: Shartga ko‘ra formuladagi inkor amalini amali faqat propozisional o‘zgaruvchilarga tegishli bo‘lishi uchun de-Morgan qonunidan va asosiy tengkuchliliklardan foydalanamiz: $(X \to Y) \to \neg(X \leftrightarrow \neg Z) =$

$$= (X \to Y) \to \neg((X \to \neg Z) \wedge (\neg Z \to X)) = (X \to Y) \to$$
$$\to \neg((\neg X \vee \neg Z) \wedge (\neg(\neg Z) \vee X)) = (X \to Y) \to$$
$$\to \neg((\neg X \vee \neg Z) \wedge (Z \vee X)) = (X \to Y) \to (X \wedge Z) \vee (\neg Z \wedge \neg X).$$

b) Asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, shunday almashtirishlar kiritingki, quyidagi formulalarda faqat $(\wedge)$ konyunksiya va $(\neg)$ inkor amallari ishtirok etsin $(\neg X \leftrightarrow Y) \to Z$.

Yechim: Quyidagi almashtirishlar bajaramiz: $(\neg X \leftrightarrow Y) \to Z =$

$$= \neg((\neg X \to Y)(Y \to \neg X)) \vee Z = \neg((\neg(\neg X) \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Z =$$
$$= \neg((X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Z = \neg(\neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(Y \wedge X)) \vee Z =$$
$$= \neg((\neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(Y \wedge X)) \wedge \neg Z).$$

v) Asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, shunday almashtirishlar kiritingki, faqat $(\vee)$ dizyunksiya va $(\neg)$ inkor amallari ishtirok etsin. $(\neg X \leftrightarrow Y) \to Z =$

Yechim: Quyidagi almashtirishlar bajaramiz: $(\neg X \leftrightarrow Y) \to Z =$

$$= \neg((\neg X \to Y)(Y \to \neg X)) \vee Z = \neg((\neg(\neg X) \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Z =$$
$$= \neg((X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)) \vee Z = \neg(X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee \neg X)) \vee Z\,.$$

g) Asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, $(P \to Q) \vee (Q \to P) =$ formula tavtologiya ekanligini isbotlang.

Yechim: Quyidagi almashtirishlar bajaramiz: $(P \to Q) \vee (Q \to P) =$

$$= (\overline{P} \vee Q) \vee (\overline{Q} \vee P) = (\overline{P} \vee P) \vee (Q \vee \overline{Q}) = J \vee J = J\,.$$

d) $((P \to \neg Q) \to ((\neg R \to \neg S) \to (P \wedge Q))) \wedge \neg(R \to P).$

Quyidagi almashtirishlar bajaramiz:

$$((P \to \neg Q) \to ((\neg R \to \neg S) \to (P \wedge Q))) \wedge \neg(R \to P) =$$
$$= (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg(\neg\neg R \vee \neg S) \vee (P \wedge Q))) \wedge \neg(\neg R \vee P) =$$
$$= ((P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge S) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg\neg R \wedge \neg P) =$$
$$= ((P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (R \wedge \neg P) = (P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P) \vee$$
$$\vee (\neg R \wedge S \wedge R \wedge \neg P) = 0 \vee 0 = 0.$$