DARAXTLAR,
ULARNI
TADBIQLARI.
TAYANCH
DARAXTLAR

1. Daraxtlar

1.1-ta'rif. Agar G grafning u qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo'lsa, u siklik, aks holda asiklik qirra deyiladi.

g graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

(bu yerda m(G)-G ning qirralari soni, n(G) - uchlari coni va k(G) komponentalari soni) ifoda uning siklomatik soni deyiladi.

Osongina koʻrsatish mumkinki:

$$K(G \setminus u) =$$
 $K(G)$, агар u циклик кирра булса; $K(G) + 1$, агар u ациклик кирра булса;

$$\lambda(G|u) = \begin{cases} \lambda(G) - 1, \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ \lambda(G), \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса.} \end{cases}$$

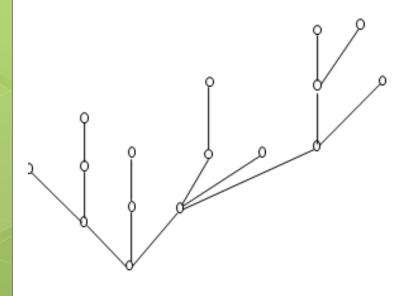
O'z-o'zidan ravshanki,

$$n(G \setminus u) = n(G), \quad m(G \setminus u) = m(G) - 1,$$

 $\lambda(G) \ge 0$ va faqat sikllari boʻlmagan graf uchun $\lambda(G) = 0$.

1.2-ta'rif. Barcha qirralari asiklik bo'lgan bog'liqli graf daraxt deyiladi.

Daraxtning istalgan ikkita uchlari yagona zanjir bilan bogʻlangandir. Daraxtning istalgan x_0 uchini tanlab olib uning ildizi yoki nolinchi pogʻonali uch deb ataymiz. x_0 ga qoʻshni boʻlgan barcha uchlarni birinchi pogʻona uchlari deymiz va hokazo - i-1 pogʻonadagi uchlarga qoʻshni (boshqa pogʻonalarga tegishli boʻlmagan) uchlarni i pogʻona uchlari deb ataymiz (1.1-shakl).



4-pog'ona,

3-pog'ona,

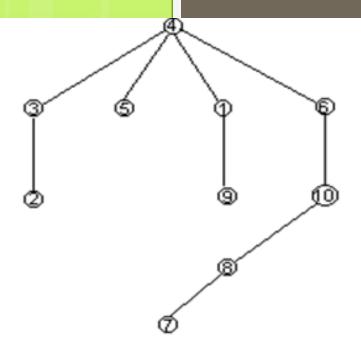
2-pog'ona,

1-pog'ona,

0-pogʻona.

1.1-teorema. Chekli bogʻlikli G graf daraxt boʻlishi uchun, uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam boʻlishi zarur va yetarli.

Uchlari 1,2,3,...,n raqamlar bilan tartiblangan n uchli daraxt berilgan bo'lsin. Daraxtning chetki uchlari orasidagi eng kichik nomerlisi i, va u bilan qo'shni bo'lgan yagona uch j_1 bo'lsin. Daraxtdan i_1 uchni, demak $i_1 j_1$ qirrani olib tashlaymiz. Hosil boʻlgan daraxtda eng kichik nomerli chetki i, uchni va i, j, qirrani olib tashlaymiz va hokazo. Bu protsessni n-2 marta takrorlab ikki uch va bitta qirrali daraxtni hosil qilamiz. Olib tashlangan uchlarni $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}\}$ va $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-2})$ lar bilan belgilaymiz. Bu ikkala 1 va 1 majmualar berilgan daraxt bo'yicha yagona ravishda aniqlanadi, shu bilan birga I ning barcha sonlari har xil, J niki esa har xil boʻlishi shart emas (1.2-shakl).



1.2-shakl.

Bu daraxt uchun $I = \{2,3,5,7,8,9,1,4\}$ va J = (3,4,4,8,10,1,4,6).

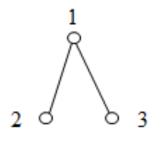
 $I = \{i_1, i_2, ..., i_{n-2}\}$ va $J = \{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ uchlar majmualari berilgan daraxt boʻyicha yagona aniqlanadi, shu bilan birga birinchi majmuaning barcha uchlari har xil, ikkinchisiniki esa har xil boʻlishi shart emas. Shu bilan birga har qanday $J = \{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ $(1 \le j_k \le n)$ majmua bitta daraxtga mos keladi. Uni quyidagicha qurish mumkin.

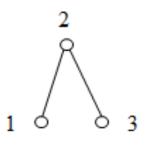
1.2-teorema (Keli). Uchlar soni tartiblangan n ta boʻlgar daraxtlar soni n^{n-2} ga teng.

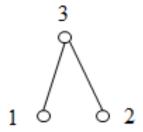
(n ta elementlardan n-2 tadan tuzilgan barcha takroriy oʻrinlashtirishlar soni).

Albatta bular ichida koʻplari oʻzaro izomorfdir.

Masalan, n = 3 bo'lganda, uchala daraxtlar ham o'zaro izomorfdir







,

1.3-shakl.

2. Eyler graflari

G grafning barcha uchlarini oʻz ichida saqlovchi qism graflarini qaraymiz. G ning barcha qirralari $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi tartiblangan boʻlsin. G grafning har qanday $H \subseteq G$ qismiga 0 va 1 lardan iborat $(a_1, a_2, ..., a_m)$ m oʻlchovli vektorni mos qoʻyamiz:

$$a_i = \begin{cases} 1, \ a \in H, \\ 0, \ a \in H, \end{cases}$$

(N ning xarakteristik vektori). Bu moslik oʻzaro bir qiymatlidir, shu bilan birga qism graflarning 2 modul boʻyicha yigʻindisiga ularning xarakteristik vektorlarining yigʻindisi mos keladi. Barcha qism graflar toʻplami yigʻindi amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil etadi. Bu gruppa {0,1} koeffiitsentlar maydoni ustida chiziqli fazoni tashkil etadi (istalgan N qism grafning 1 ga koʻpaytmasi N ni beradi, 0 ga koʻpaytmasi esa boʻsh grafdir).

teorema. Chekli bogʻliqli graf Eyler grafi boʻlishi uchun u juft boʻlishi zarur va yetarli.

Istalgan chekli juft grafning har bir bogʻliqli komponentasi Eyler grafidir.

Ixtiyoriy grafning har qanday ikkita N_1 va N_2 juft qism graflarining yigʻindisi yana juft qism grafdir. Haqiqatan ham, α uchning darajasi $s(\alpha)$ N_1+N_2 qism grafda $s_1+s_2-2s_{12}$ ga teng. Bu yerda s_1 va s_2 α uchning mos ravishda N_1 va N_2 lardagi darajalari, s_{12} esa α ning ularning $N_1 \cap N_2$ kesishmasidagi darajasi. Shunday qilib, juft qism graflar toʻplami barcha qism graflar fazosining qism fazosidir. Bu qism fazoning oʻlchovi ν ni aniqlaymiz.

G bogʻliqli, m qirrali, n uchli graf D uning xtiyoriy asosi boʻlsin. Vatarlar soni m-n+1 ga teng. Har bir $\alpha\beta$ vatar yagona sodda $[\alpha,\beta]\subseteq D$ zanjir bilan sodda siklni hosil qiladi. Barcha sikllarning vektorlari bogʻliqmas Σ sistemani hosil qiladi. Chunki har bir sikl sistemaning boshqa sikllariga tegishli boʻlmagan qirraga (oʻzining vatariga) ega. Demak $V \ge m-n+1$.