22-MAVZU	**REKURSIV VA REKURSIV SANALUCSHI TO‘PLAMLAR.**

1-ta’rif. Agar birorta funksiyaning aniqlanish sohasi ham, qiymatlar sohasi ham natural sonlar to‘plamining qism to‘plamlari bo‘lsa, u holda bunday funksiya arifmetik (sonli) funksiya deb aytiladi. Natural sonlar to‘plamida berilgan har qanday munosabatlarga arifmetik munosabat deyiladi.

Masalan, natural sonlar to‘plamida $f(x, y) = x \cdot y$ (ko‘paytma) – ikki argumentli arifmetik funksiyadir; $x + y < z$ - uch argumentli arifmetik munosabat. Arifmetik funksiya va arifmetik munosabat tushunchalari intuitiv tushunchalardir va hech qanday formal sistema bilan bog’langan emaslar.

Arifmetik (sonli) funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjudligini aniqlash algoritmik muammolardan biridir.

2-ta’rif. Agar $g = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjud bo‘lsa, u *effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiya deb aytiladi.*

Bu ta’rifda algoritm tushunchasi intuitiv ma’noda tushunilganligi sababli, effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi ham intuitiv tushuncha bo‘ladi.

Ammo algoritm tushunchasidan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasiga o‘tishning o‘ziga xos ijobiy tomoni bor. Masalan, algoritm tushunchasiga qo‘yilgan hamma talablar (xarakterli xususiyatlari sifatida) rekursiv (qaytarish) funksiyalar majmuasi deb ataladigan hamma hisoblanuvchi funksiyalar majmuasi uchun bajariladi.

Gyodel birinchi bo‘lib biror formal sistemada aniqlangan hamma sonli funksiyalar sinfini rekursiv funksiyalar sinfi sifatida ifodaladi. 1936 yilda Chyorch ham boshqa asoslarga suyanib rekursiv funksiyalar sinfini tasvirlagan edi. Bu yerda **hisoblanuvchi funksiyalar sinfi** quyidagi ravishda tuziladi.

3-ta’rif. Quyidagi sonli funksiyalar boshlang’ich (oddiy, bazis) funksiyalar deyiladi:

1.Nol funksiya (bekor qilish operatori): $0(x)=0$ har bir x uchun.

2.Birni qo‘shish (siljish operatori): $\lambda(x)=x+1$ har bir x uchun.

3.Proeksiyalash funksiyasi (proeksiyalash operatori): $I_n^m\,(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$ hamma $x_1,x_2,...,x_n$ lar uchun, $(n=1,2,...;\quad m=1,2,...,n)$.

Ravshanki, uchala boshlang’ich funksiyalar hamma joyda aniqlangan va intuitiv hisoblanuvchi funksiyalardir.

Izoh. Argumentlarining barcha qiymatlarida aniqlangan funksiyaga hamma joyda aniqlangan funksiya deb aytamiz.

Quyidagi uchta qoida vositasi bilan mavjud funksiyalardan yangi funksiyalar hosil etiladi.

1.Funksiyalar superpozitsiyasi $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$, $f_2(x_1,x_2,...,x_n)$, ... , $f_m(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalarni va $\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyani ko‘rib o‘taylik.

4-ta’rif. $\psi(x_1,x_2,...,x_n)=\varphi(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$ *tenglik bilan aniqlanadigan* $\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyaga* φ *va* $f_1,f_2,...,f_m$ *funksiyalarning superpozitsiyasi deb aytiladi.*

Agar biz qandaydir usul bilan φ va $f_1,f_2,...,f_m$ funksiyalarning qiymatini hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lsak, u holda ψ funksiyani quyidagicha hisoblash mumkin: $x_1,x_2,...,x_n$ o‘zgaruvchilarga mos ravishda $a_1,a_2,...,a_n$ qiymatlarni beramiz. Hamma $f_i(a_1,a_2,...,a_n)$ larni hisoblab, $b_i=f_i(a_1,a_2,...,a_n)$ni topamiz. Keyin $\varphi(b_1,b_2,...,b_m)$ni hisoblab, $c=\psi(a_1,a_2,...,a_n)$ni topamiz.

Aniqki, agar φ va $f_1,f_2,...,f_m$ lar hamma joyda aniqlangan bo‘lsa, ψ funksiya ham hamma joyda aniqlangan bo‘ladi.

Haqiqatan ham, agar $f_1,f_2,...,f_m$ larning hech bo‘lmaganda birortasi hamma joyda aniqlangan bo‘lmasa, u holda ψ funksiya hamma joyda aniqlangan bo‘lmaydi. Shu bilan birga ikkinchi tomondan, argumentlarning shunday $a_1,a_2,...,a_n$ qiymatlari topilishi mumkinki, $b_i=f_i(a_1,a_2,...,a_n)\quad (i=\overline{1,m})$ bo‘lsa, $\varphi(b_1,b_2,...,b_m)$ni hisoblab bo‘lmaydi. Bu holda ham ψ funksiya hamma joyda aniqlanmagan bo‘ladi.

Shunday qilib, agar $\varphi, f_1,f_2,...,f_m$ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi bo‘lsalar, u holda ψ funksiya ham intuitiv hisoblanuvchi bo‘ladi.

Shuni ham ta’kidlab o‘tamizki, $f_1, f_2,..., f_m$ funksiyalarning barchasi ham $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning hammasidan bog’liq bo‘lmasligi mumkin. Bu hollarda ψ funksiyani hosil qilish uchun soxta argumentlardan va I_n^m $(x_1,..., x_n)$ funksiyalardan foydalanamiz.

Masalan, $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ funksiya $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_n)$ va $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)$ funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil etilgan.

2.Primitiv (o‘ta sodda) rekursiya sxemasi $\varphi(x_2, x_3,..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin.

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi yangi f funksiyani ko‘ramiz:

$$f(0, x_2, x_3,..., x_n) = \varphi(x_2, x_3,..., x_n),$$
$$f(y+1, x_2, x_3,..., x_n) = \psi(y, f(y, x_2,..., x_n), x_2,..., x_n) \qquad (1)$$

Bu yerda φ $n-1$ argumentga, ψ - $n+1$ argumentga va f - n argumentga bog’liq funksiyalar.

5-ta’rif. *Agar $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiya φ va ψ funksiyalardan (1) munosabat orqali hosil etilsa, u holda f funksiya φ va ψ funksiyalardan* ***primitiv*** *(o‘ta sodda)* ***rekursiya sxemasi*** *orqali hosil etilgan deyiladi.*

Agar φ va ψ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda f ham intuitiv hisoblanuvchi funksiya bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning qiymatlar majmuasi $a_1, a_2,..., a_n$ bo‘lsin. U vaqtda ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$f(0, a_2, a_3,..., a_n) = \varphi(a_2, a_3,..., a_n) = b_0,$$
$$f(1, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3,..., a_n) = b_1,$$
$$f_2(2, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3,..., a_n) = b_2$$ va hokazo.

Ravshanki, agar φ va ψ funksiyalar argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo‘lsa, u holda f funksiya ham argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo‘ladi.

Endi misollarda primitiv rekursiya sxemasi orqali yangi funksiyalarni hosil etishni ko‘raylik.

1-misol. $\varphi(x) = x$ va $\psi(x, y, z) = y+1$ bo‘lsin hamda $f(y, x)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali aniqlansin:

$$\left.\begin{aligned} &f(0,x)=x, \\ &f(y+1,x)=f(y,x)+1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$f(y,x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y=5$, $x=2$ qiymatlarida hisoblab chiqaylik. $f(0,2)=\varphi(2)=2$ bo‘lganligi uchun (2) formulalarning ikkinchisidan ketma-ket ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &f(1,2)=\psi(0,2,2)=2+1=3, \\ &f(2,2)=\psi(1,3,2)=3+1=4, \\ &f(3,2)=\psi(2,4,2)=4+1=5, \\ &f(4,2)=\psi(3,5,2)=5+1=6, \\ &f(5,2)=\psi(4,6,2)=6+1=7. \end{aligned}\right\}$$

$f(y,x)=y+x$ ekanligini osongina ko‘rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x)=f(y,x)+z$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z$ yoki $f(z,x)=x+z$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $f(y,x)$ funksiya quyidagi tengliklar bilan berilgan deylik:

$$\left.\begin{aligned} &f(0,x)=0, \\ &f(y+1,x)=f(y,x)+x. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Bu yerda $\varphi(x)=0$, $\psi(x,y,z)=y+z$ bo‘ladi.

$f(y,x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y=2$, $x=2$ qiymatlari uchun hisoblaymiz.

$f(0,x)=\varphi(x)=0$ bo‘lganligi uchun $f(0,2)=\varphi(2)=b_0=0$ bo‘ladi. Funksiyaning $f(1,2)$ va $f(2,2)$ qiymatlarini ketma-ket topamiz:

$$\left.\begin{aligned} &f(1,2)=\psi(0,0,2)=b_1=0+2=2, \\ &f(2,2)=\psi(1,2,2)=2+2=4. \end{aligned}\right\}$$

Bu misolda $f(y,x)=x\cdot y$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x)=f(y,x)+z\cdot x$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z\cdot x$ yoki $f(z,x)=z\cdot x$ ni hosil qilamiz.

3.Minimallash operatsiyasi (μ-operator). Ixtiyoriy $f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz: har qanday x argumentning qiymatlari uchun hech bo‘lmaganda shunday bitta y argumentning qiymatini topish kerakki, $f(x,y)=0$ bo‘lsin. Yana ham murakkabroq holda masalani qo‘yamiz: berilgan $f(x,y)$ funksiya va uning muayyan qiymatli x argumenti uchun $f(x,y)=0$ qila oladigan y argumentlarning eng kichik qiymatlisini topish kerak bo‘lsin. Masalaning yechimi x ga bog'liq bo'lganligi uchun $f(x,y)=0$ qila oladigan y ning eng kichik qiymati ham x ning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\varphi(x)=\mu\, y[f(x,y)=0]=0\,. \qquad (4)$$

(4) ifoda quyidagicha o'qiladi: «Shunday eng kichik y ki, $f(x,y)=0$».

Xuddi shu tarzda ko'p argumentli $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya aniqlanadi:

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\mu\, y\,[f(x_1,x_2,...,x_n,y)=0]. \qquad (5)$$

6-ta'rif. $f(x_1,x_2,...,x_n,y)$ *funksiyadan* $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyaga o'tishni* μ*-**operatorning tatbig'i** deb aytiladi.*

$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani hisoblash uchun quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

1. $f(x_1,x_2,...,x_n,0)$ ni hisoblaymiz. Agar f ning bu qiymati nolga teng bo'lsa, u holda $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=0$ deb qabul qilamiz. Agar $f(x_1,x_2,...,x_n,0)\neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz.

2. $f(x_1,x_2,...,x_n,1)$ni hisoblaymiz. Agar $f(x_1,...,x_n,1)=0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=1$ bo'ladi.

Agar $f(x_1,x_2,...,x_n,1)\neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz va hokazo.

Agar y ning hamma qiymatlari uchun $f(x_1,...,x_n,y)\neq 0$ bo'lsa, u vaqtda $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ ni aniqlanmagan funksiya deb aytamiz.

Ammo y argumentning shunday y_0 qiymati mavjud bo'lishi mumkinki, $f(x_1,x_2,...,x_n,y_0)=0$ va, demak, eng kichik y mavjudki, $f(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$ bo'ladi; shu vaqtning o'zida, birorta z uchun $(0<z<y_0)$ $f(x_1,x_2,...,x_n,z)$ qiymat aniqlanmasligi mumkin. Aniqki, bu holda y ning $f(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$ bo'ladigan eng kichik qiymatini topish jarayoni, y_0 gacha yetib bormaydi. Bu yerda ham $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ ni aniqlanmagan funksiya deb hisoblaydilar.

3-misol. $f(x,y)=x-y$ funksiya berilgan bo'lsin. Ushbu funksiya minimizatsiya operatori orqali hosil etilishi mumkin:

$$f(x,y)=\mu\, z(y+z=x)=\mu\, z\left[I_3^2(x,y,z)+I_3^3(x,y,z)=I_3^1(x,y,z)\right].$$

Masalan, $f(x,y)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y=2$, $x=7$ qiymatlarida ($f(7,2)$) hisoblab chiqamiz. Buning uchun $y=2$ deb, x ga ketma-ket qiymatlar berib boramiz:

$z=0, \quad 2+0=2\neq 7,$

$z=1, \quad 2+1=3\neq 7,$

$z=2, \quad 2+2=4\neq 7,$

$z=3, \quad 2+3=5\neq 7,$

$z=4, \quad 2+4=6\neq 7,$

$z=5, \quad 2+5=7=7.$

Shunday qilib, $f(7,2)=5$.

7-ta'rif. *Agar* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyani boshlang'ich (oddiy) funksiyalardan superpozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *ga* ***primitiv rekursiv funksiya*** *deb aytamiz.*

Boshlang'ich $0(x)=0$, $\lambda(x)=x+1$, $I_n^m(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$ $(1\leq m\leq n)$ funksiyalar va $f(x_1,x_2,...,x_n)=a$ $(a\in N)$, $f(x,y)=x+y$, $f(x,y)=x\cdot y$, $f(x,y)=x^y$ $(x^0=1)$ funksiyalar primitiv rekursiv funksiyalar bo'ladi.

8-ta'rif. *Agar* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyani boshlang'ich funksiyalardan superpozitsiya, primitiv rekursiya sxemasi va minimallash operatori (*μ*-operatori) amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *ga* ***qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya*** *deb aytamiz.*

Bu keyingi ta'rif primitiv rekursiv funksiyaning ta'rifidan faqat boshlang'ich funksiyalarga qo'shimcha ravishda μ-operatorini qo'llashga ruxsat berilgani bilan farq qiladi. Shuning uchun ham **har qanday primitiv rekursiv funksiya o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'ladi**.

9-ta'rif. *Agar* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiya qismiy rekursiv va argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *ga* ***umumrekursiv funksiya*** *deb aytiladi.*

Quyidagi funksiyalar:

$$\lambda(x),\ 0(x),\ I_n^m(x),\ f(y,x)=y+x,\ f(y,x)=x\cdot y,\ f(y,x)=x+n$$

umumrekursiv funksiyalar bo'ladilar.

A.Chyorch tezisi. Har qanday intuitiv hisoblanuvchi funksiya qismiy rekursiv funksiya bo‘ladi.

Bu tezisni isbotlash mumkin emasligini yuqorida aytgan edik, chunki u intuitiv hisoblanuvchi funksiya noqat’iy matematik tushunchasini qat’iy aniqlangan qismiy rekursiv funksiya matematik tushunchasi bilan bog’laydi.

Ammo, agar shunday intuitiv hisoblanuvchi funsiya tuzish mumkin bo‘lsaki, u o‘z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo‘lmasa, u holda bu tezisni rad etish mumkin. Ammo bunday holning mavjudligini hozirgacha hech kim ko‘rsata olmagan.

Teorema. $g(y_1, y_2, ..., y_k)$- *primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya va* $x_1, x_2, ..., x_n$ *- har xil o‘zgaruvchilar bo‘lsin. U vaqtda, agar har bir* i $(1 \le i \le k)$ *uchun* z_i *o‘zgaruvchi* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o‘zgaruvchilarning biri bo‘lsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(z_1, z_2, ..., z_k)$ *funksiya ham primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya bo‘ladi.*

Isbot. $z_i = x_{ji}$ $(1 \le j_i \le n)$ bo‘lsin. U vaqtda $z_i = I^n_{ji}(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi\ (I^n_{ji}\ (x_1, x_2, ..., x_n), ...,\ I^n_{jk}\ (x_1, x_2, ..., x_n))$.

Shunday qilib, ψ funksiyani φ, $I^n_{ji}, ..., I^n_{jk}$ funksiyalardan superpozitsiya amali orqali hosil etish mumkin, ya’ni ψ primitiv rekursiv (rekursiv) funksiya bo‘ladi.

Bu teorema soxta o‘zgaruvchilarni kiritish, o‘zgaruvchilarning o‘rnini almashtirish va ularni aynan tenglashtirish jarayoni primitiv rekursiv va qismiy rekursiv funksiyalarni o‘z sinflaridan chiqarmasligini bildiradi.

4-misol. (Soxta argumentlarni kiritish.) Agar $\varphi(x_1, x_3)$-primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_3)$ bo‘lsa, u holda $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo‘ladi. Isbot qilish uchun $z_1 = x_1$ va $z_2 = x_3$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kerak.

5-misol. (O‘zgaruvchilarning o‘rnini almashtirish.) Agar $\varphi(x_1, x_2)$ - primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ bo‘lsa, u holda ψ ham primitiv rekursiv funksiya bo‘ladi. Isbot qilish uchun $z_1 = x_2$ va $z_2 = x_1$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kerak.

6-misol. (O‘zgaruvchilarni aynan tenglashtirish.) Agar $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ - primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ bo‘lsa, u holda $\psi(x_1,x_2)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo‘ladi. Isbotlash uchun teoremada $n=2$, $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_1$, deb qabul qilish kerak.

Natijalar. 1. Nol funksiya $0(x)$ - primitiv rekursiv funksiya. 2. Agar qaerda k-qandaydir butun musbat son bo‘lsa, o‘zgarmas C_k^n $(x_1,x_2,...,x_n)=k$ funksiya primitiv rekursiv funksiyadir. 3. Superpozitsiya amalini har bir f_i funksiya $x_1,x_2,...,x_n$ o‘zgaruvchilarning faqat ayrimlaridangina bog’liq bo‘lganda ham ishlatish mumkin. Xuddi shunday primitiv rekursiya sxemasida ham φ funksiya $x_1,x_2,...,x_n$ o‘zgaruvchilarning ayrimlariga bog’liq bo‘lmasligi mumkin va ψ funksiya $f(y,x_2,x_3,...,x_n)$ funksiyaga, hamda shuningdek $x_1,x_2,...,x_n,y$ o‘zgaruvchilarning ayrimlariga bog’liq bo‘lmasligi mumkin.

Shunday qilib, har bir primitiv rekursiv funksiya qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya bo‘lganligi uchun, qismiy rekursiv funksiyalar sinfi primitiv rekursiv funksiyalar sinfidan kengdir.

Qismiy rekursiv funksiya tushunchasi algoritmlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Shuni ham ta’kidlab o‘tamizki, har qanday qismiy rekursiv funksiyaning qiymati mexanik xarakterga ega bo‘lgan ma’lum bir protsedura yordamida hisoblanadi va bu protsedura bizning algoritm haqidagi intuitiv tasavvurimizga to‘g’ri keladi.

Ikkinchidan, hozirgacha qanday muayyan algoritmlar yaratilgan bo‘lmasin, ular yordamida qiymatlari hisoblanuvchi sonli (arifmetik) funksiyalar albatta qismiy rekursiv funksiyalar bo‘lib chiqdilar.

Shuning uchun ham hozirgi paytda qismiy rekursiv funksiya tushunchasi algoritm tushunchasining ilmiy ekvivalenti sifatida qabul qilingan.

Buni birinchi bo‘lib, yuqorida ta’kidlab o‘tganimizdek, ilmiy tezis sifatida A.Chyorch va S.Klinilar o‘rtaga tashladilar.

Xuddi shunday har qanday algoritmni mos Tyuring mashinasi yordamida realizatsiya qilish mumkin. Algoritmning ilmiy ekvivalenti qismiy rekursiv funksiya bo‘lganligi uchun hamma qismiy rekursiv funksiyalar sinfi A bilan Tyuring mashinalari yordamida hisoblanuvchi funksiyalar (Tyuring bo‘yicha hisoblanuvchi funksiyalar) sinfi B bilan bir xildir, ya’ni $A = B$.