TO‘LIQ VA YOPIQ FUNKSIYALAR SISTEMALARI. POST TEOREMASI

Mantiq algebrasining $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda F ga to'liq funksiyalar sistemasi deb aytiladi.*

Istalgan funksiyani MKNSh yoki MDNSh ko'rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x\vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x+y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Quyidagi funksiyalar sistemasining to'liqligini isbotlang:

a) $xy, \bar{x}$; b) $x\vee y, \bar{x}$; v) $xy, x+y, 1$;

g) $\overline{x\vee y}$; d) $\bar{x}\bar{y}$; i) $x+y, x\vee y, 1$;

j) $x+y+z, xy, 0, 1$; z) $x\to y, \bar{x}$; ye) $x\to y, 0$.

Isbot.

a). $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$, ya'ni diz'yunksiya amalini kon'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘ladi.

b). $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ ekanligi ma'lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo‘ladi. Shuning uchun $\{x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liqdir.

v). Ixtiyoriy mantiq algebrasining funksiyasini yagona Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltirish mumkinligidan $\{xy, x+y, 1\}$ funksiyalar sistemasining to‘liqligi kelib chiqadi.

1-teorema. *Agar* $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to'liq bo'lsa, u holda unga ikkitaraflama bo'lgan* $\Phi^* = \{\varphi_1^*,\ldots,\varphi_n^*\}$ *funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi.*

Isbot. Φ^* sistemaning to'liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun avval f^* funksiyani $\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ cistemasidagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to'liq bo'lganligi uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikkitaraflama qonunga asosan ikkitaraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali f funksiyani hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemasining to'liq emasligini isbotlaylik:

a) $\bar{x}$, 1; b) $xy, x \vee y$; v) $x + y, \bar{x}$;

g) $xy \vee yz \vee xz, \bar{x}$; d) $xy \vee yz \vee xz, 0, 1$.

2-ta’rif. *Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya yana shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistemaga superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb aytiladi.*

3-ta’rif. *Superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday mantiq algebrasining funksiyalar sistemasiga funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Ravshanki, ma’lum bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar;

b) hamma mantiq algebrasining funksiyalari;

v) L - chiziqli funksiyalar;

g) S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar;

d) M - monoton funksiyalar;

ye) P_0 - nol qiymatni saqlovchi funksiyalar;

j) P_1 - bir qiymatni saqlovchi funksiyalar.

4-ta’rif. *Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinfga xususiy funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Post teoremasi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasining to'liqligi uchun bu sistemada* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmovchi kamida bitta funksiya mavjud bo'lishi yetarli va zarur (ya'ni* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *shunda va faqat shundagina to'liq sistema bo'ladiki, qachonki u* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining ham qism to'plami bo'lmasa).*

Isbot. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to'liq sistema bo'lsin, ya'ni $[\Phi]=P_2$. Faraz qilamizki, Φ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi. U vaqtda F ning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ ni yozish mumkin, ya'ni $F=P_2$. Ammo bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $\Phi\subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Teoremaning yetarliligining isbotini o'quvchilarga havola etamiz.

Natija. *Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to'plami bo'ladi.*