14-MAVZU	PREDIKATLAR ALGEBRASI VA UNING FORMULALARI

Predikat tushunchasi. Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg‘on qiymat qabul qilishi nuqtai nazaridan qaralib, mulohazalarning strukturasiga ham, hattoki, mazmuniga ham e’tibor berilmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi. Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$ – romb; demak, $ABCD$ – parallelogramm».

Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo‘ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo‘linmas, bir butun deb va ularning ichki strukturasini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo‘lishiga qaramasdan, ko‘pgina fikrlarni tahlil qilishga qodir (yetarli) emas. Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya’ni elementar mulohazalarning ichki strukturasini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo‘ldi. Bunday sistema mulohazalar mantiqini o‘zining bir qismi sifatida butunlay o‘z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

Predikatlar mantiqi an’anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **subyekt** va **predikat** qismlarga bo‘ladi.

Subyekt – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; **predikat** – bu subyektni tasdiqlash.

Masalan, «5 – tub son» mulohazada «5» – subyekt, «tub son» – predikat. Bu mulohazada «5» «tub son bo‘lish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi. Agar keltirilgan mulohazada ma’lum 5 sonini natural sonlar to‘plamidagi x o‘zgaruvchi bilan almashtirsak, u holda «x – tub son» ko‘rinishidagi mulohaza formasiga (shakliga) ega bo‘lamiz. x o‘zgaruvchining ba’zi qiymatlari (masalan, x=13, x=3, x=19) uchun bu forma chin mulohazalar va x o‘zgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, x=10, x=20) uchun bu forma yolg‘on mulohazalar beradi.

Ravshanki, bu forma bir (x) argumentli funksiyani aniqlaydi va bu funksiyaning aniqlanish sohasi natural sonlar to'plami ($\boldsymbol{N}$) hamda qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to'plam bo'ladi.

1- ta'rif. *M to'plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to'plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiya **bir joyli** (**bir o'rinli**) **predikat** deb ataladi.*

M to'plamni $P(x)$ predikatning **aniqlanish sohasi** deb aytamiz.

$P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to'plamiga $P(x)$ predikatning **chinlik to'plami** deb ataladi, ya'ni $P(x)$ predikatning chinlik to'plami $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to'plamdir.

1- misol. «x – tub son» ko'rinishdagi $P(x)$ predikat $\boldsymbol{N}$ to'plamda aniqlangan va uning I_P chinlik to'plami barcha tub sonlar to'plamidan iborat. «$\sin x = 0$» shakldagi $Q(x)$ predikat $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uning I_Q chinlik to'plami $I_Q = \{k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$, bu yerda $\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to'plami. «Parallelogramm diagonallari x bir-biriga perpendikulyardir» degan $\Phi(x)$ predikatning aniqlanish sohasi hamma parallelogrammlar to'plami, chinlik to'plami esa hamma romblar to'plami bo'ladi. Bu misolda keltirilgan predikatlar bir joyli predikat xususiyatlarini ifodalaydi. ■

2- ta'rif. *Agar M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$) bo'lsa, u **aynan chin** (**aynan yolg'on**) **predikat** deb ataladi.*

Endi **ko'p joyli predikat** tushunchasini o'rganamiz. Ko'p joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi **binar munosabatni** ifodalaydi[1]. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in \boldsymbol{Z}$) binar munosabat ikki argumentli $P(x, y)$ funksiyani ifodalaydi. Bu funksiya $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ to'plamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to'plam bo'ladi.

3- ta'rif. *$M = M_1 \times M_2$ to'plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to'plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $P(x, y)$ funksiya **ikki joyli predikat** deb ataladi.*

---

[1] Bir joyli predikatni unar predikat deb atash ham mumkin.

n joyli predikat ham shunga o‘xshash aniqlanadi.

2- misol. «$x = y$» shakldagi $Q(x,y)$ **ikki joyli predikat** $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ to‘plamda aniqlangan «$x \perp y$» x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar – $F(x,y)$ **ikki joyli predikat** bir tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan. ■

3- misol. Bir joyli predikatlarning aniqlanish sohasi $\boldsymbol{R}$, ikki joyli predikatlarning aniqlanish sohasi esa $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ bo‘lsin. Quyida berilgan mulohazalarni tahlil qilib, ularning qaysilari predikat bo‘la olishini aniqlaymiz:

1) $x+5=1$; 2) $x^2-2x+1=0$; 3) $x+2<3x-4$;

4) $(x+2)-(3x-4)$;5) $x^2+y^2>0$.

1) Tenglik shaklida berilgan ifoda bir joyli predikatdir. Agar uni $A(x)$ deb belgilasak, u holda $I_A = \{-4\}$ bo‘ladi.

2) $x^2-2x+1=0$ ifoda bilan berilgan mulohaza ham bir joyli predikatdir. Uni $A(x)$ bilan belgilaymiz. $I_A = \{1\}$.

3) Tengsizlik shaklida berilgan ifodani mulohaza deb hisoblasak, bir joyli $A(x)$ predikatga ega bo‘lamiz. Ravshanki, $I_A = (3, +\infty)$.

4) Ikkita ikki hadning ayirmasi shaklidagi ifoda bilan berilgan mulohaza predikat bo‘la olmaydi.

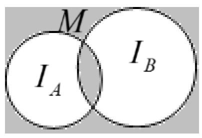
5) Berilgan ifodani ikki joyli $A(x,y)$ predikat deb hisoblash mumkin va $I_A = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\setminus\{(0,0)\}$. ■

4- misol. Quyidagi predikatlarning qaysilari aynan chin bo‘lishini aniqlaymiz:

1) $x^2+y^2\ge 0$;2) $x^2+y^2>0$;3) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

4) $(x+1)^2>x-1$; 5) $x^2+1\ge(x+1)^2$.

Ravshanki, 1), 3) va 4) predikatlar aynan chin predikatlardir. 2) predikatda $x=0,\ y=0$ qiymatlar uchun tengsizlik o‘rinli emas. 5) predikatda esa, x o‘zgaruvchining hamma musbat qiymatlarida tengsizlik o‘rinli emas. Demak, 2) va 5) predikatlar aynan chin predikatlar bo‘la olmaydi. ■



1- shakl

5- misol. $M = M_1\times M_2 \subset \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ to‘plamda $A(x,y)$ va $B(x,y)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. $A(x,y)\leftrightarrow B(x,y)$ predikatning chinlik to‘plamini topamiz.

$A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y)) \wedge (B(x,y) \to A(x,y))$

bo‘lganligi uchun

$I_{A\leftrightarrow B} = (I_{A\to B}) \cap (I_{B\to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = = (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B)$

$I_A \leftrightarrow I_B$ chinlik to‘plami 1- shaklda bo‘yalgan soha sifatida ko‘rsatilgan. ■

Predikatlar ustida mantiqiy amallar Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin yoki yolg‘on (1 yoki 0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko‘raylik.

4 ta’rif. *Berilgan* M *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning kon’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqat* $x \in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$ *lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x) \wedge Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cap I_Q$ to‘plamdan, ya’ni $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo‘ladi.

6- misol. $P(x)$: «x – juft son» va $Q(x)$: «x – toq son» predikatlar uchun «x – juft son va x – toq son»: $P(x) \wedge Q(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi mos keladi va uning chinlik sohasi $\varnothing$ – bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘ladi. ■

5- ta’rif. *Berilgan* M *to‘plamda aniqlangan* $P(x)$ *va* $Q(x)$ ***predikatlarning diz’yunksiyasi*** *deb, faqat va faqatgina* $x \in M$ *qiymatlarda aniqlangan hamda* $P(x)$ *va* $Q(x)$ *predikatlar yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u* $P(x) \vee Q(x)$ *kabi belgilanadi.*

$P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_P \cup I_Q$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

6- ta’rif. *Agar hamma* $x \in M$ *qiymatlarda* $P(x)$ *predikat chin qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat va* $x \in M$ *ning barcha* *qiymatlarida $P(x)$ predikat yolg'on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $P(x)$* ***predikatning inkori*** *deb ataladi va u $\overline{P}(x)$ kabi belgilanadi.*

Bu ta'rifdan $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ kelib chiqadi.

7- ta'rif. *Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda $P(x)$ chin qiymat va $Q(x)$ yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$* ***predikatlarning implikasiyasi*** *deb ataladi.*

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun

$$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

teng kuchlilik to'g'ri bo'lganligidan $I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ o'rinlidir.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari

M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Agar $a \in M$ ni $P(x)$ predikatning x argumenti o'rniga qo'ysak, u holda bu predikat $P(a)$ mulohazaga aylanadi.

Predikatlar mantiqida yuqorida ko'rilganlardan tashqari yana ikkita amal mavjudki, ular bir joyli predikatni mulohazaga aylantiradi.

Umumiylik kvantori. M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Har qanday $x \in M$ uchun $P(x)$ chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\forall x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza endi $x$ga bog'liq bo'lmay qoladi va u quyidagicha o'qiladi: «har qanday x uchun $P(x)$ chin». $\forall$ simvol **umumiylik kvantori** deb ataladi. Aytilgan fikrlarni matematik ifodalar vositasida quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall x P(x) = \begin{cases} 1, \text{barcha } x \in M \text{ uchun } P(x) = 1 \text{ bo'lganda}, \\ 0, \text{aks holda}. \end{cases}$$

$P(x)$ predikatda $x$ni **erkin (ozod) o'zgaruvchi** va $\forall x P(x)$ mulohazada $x$ni umumiylik kvantori $\forall$ bilan **bog'langan o'zgaruvchi** deb ataladi.

Mavjudlik kvantori. $P(x)$ predikat M to'plamda aniqlangan bo'lsin. Hech bo'lmaganda bitta $x \in M$ uchun $P(x)$ predikat chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\exists x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza x ga bog‘liq emas va uni quyidagicha o‘qish mumkin: «shunday x mavjudki, $P(x)=1$», ya’ni

$$\exists xP(x)=\begin{cases}1, \text{ birorta } x\in M \text{ uchun } P(x)=1 \text{ bo'lganda },\\ 0, \text{ aks holda}.\end{cases}$$

$\exists$ simvol **mavjudlik kvantori** deb ataladi. $\exists xP(x)$ mulohazada x o‘zgaruvchi $\exists$ kvantori bilan bog‘langan bo‘ladi.

1- misol. N natural sonlar to‘plamida $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin: «x – tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall xP(x)$ – «Hamma natural sonlar tub sonlar bo‘ladi»; $\exists xP(x)$ – «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo‘ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg‘on va ikkinchi mulohaza chindir. ■

Ma’lumki, $\forall xP(x)$ mulohaza faqat $P(x)$ aynan chin predikat bo‘lgandagina
chin qiymat qabul qiladi. $\exists xP(x)$ mulohaza bo‘lsa, $P(x)$ aynan yolg‘on predikat bo‘lgandagina yolg‘on qiymat qabul qiladi.

Kvantorli amallar ko‘p joyli predikatlarga ham qo‘llaniladi. Masalan, M to‘plamda ikki joyli $P(x,y)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x,y)$ predikatga x o‘zgaruvchi bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llasak, u holda ikki joyli $P(x,y)$ predikatga bir joyli $\forall xP(x,y)$ (yoki bir joyli $\exists xP(x,y)$) predikatni mos qilib qo‘yadi.

Bir joyli $\forall xP(x,y)$ ($\exists xP(x,y)$) predikat faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq, x o‘zgaruvchiga esa bog‘liq emas. Ularga y bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llaganimizda quyidagi mulohazalarga ega bo‘lamiz:
$\forall y\forall xP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$, $\exists y\exists xP(x,y)$.

2- misol. To‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan $P(x,y)$: «$x\perp y$» predikatni ko‘raylik. Agar $P(x,y)$ predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo‘lamiz:

1. $\forall x\forall yP(x,y)$ – «Har qanday x to‘g‘ri chiziq har qanday y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».
2. $\exists y\forall xP(x,y)$ – «Shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday x to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

3. $\forall y \exists x P(x,y)$ – «Har qanday y to‘g‘ri chiziq uchun shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chizig‘i y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

4. $\exists y \exists x P(x,y)$ – «Shunday y to‘g‘ri chiziq va shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

5. $\forall y \forall x P(x,y)$ – «Har qanday y to‘g‘ri chiziq har qanday x to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

6. $\forall x \exists y P(x,y)$ – «Har qanday x to‘g‘ri chiziq uchun shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

7. $\exists x \exists y P(x,y)$ – «Shunday x to‘g‘ri chiziq va shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

8. $\exists x \forall y P(x,y)$ – «Shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday y to‘g‘ri
chiziqqa perpendikulyar». ■

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, umumiy holda kvantorlar tartibi o‘zgarishi bilan mulohazaning mazmuni va, demak, uning mantiqiy qiymati ham o‘zgaradi.

Chekli sondagi elementlari bo‘lgan $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x)$ predikat aynan chin bo‘lsa, u holda $P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n)$ mulohazalar ham chin bo‘ladi. Shu holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham chin bo‘ladi.

Agar hech bo‘lmaganda bitta $a_k \in M$ element uchun $P(a_k)$ yolg‘on bo‘lsa, u holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham yolg‘on bo‘ladi. Demak,

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$$

teng kuchli ifoda to‘g‘ri bo‘ladi.

Yuqoridagidek fikr yuritish yo‘li bilan

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$$

teng kuchli ifodaning mavjudligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerdan kvantorli amallarni cheksiz sohalarda kon'yunksiya va diz'yunksiya amallarining umumlashmasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Predikatlar mantiqining formulasi. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati. Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari

Predikatlar mantiqida quyidagi simvollardan foydalaniladi:

1. $p, q, r...$ simvollar – 1 (chin) va 0 (yolg'on) qiymatlar qabul qiluvchi o'zgaruvchi mulohazalar.

2. $x, y, z,...$ – biror M to'plamdan qiymat oluvchi predmet o'zgaruvchilar; $x_0, y_0, z_0,...$ – predmet konstantalar, ya'ni predmet o'zgaruvchilarning qiymatlari.

3. $P(\cdot),\ F(\cdot)$ – bir joyli o'zgaruvchi predikatlar; $Q(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta})$, $R(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta})$ – n joyli o'zgaruvchi predikatlar.

4. $P^0(\cdot),\ \ Q^0(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ – o'zgarmas predikatlar simvoli.

5. $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ – mantiqiy amallar simvollari.

6. $\forall x,\ \exists x$ – kvantorli amallar simvollari.

7. (,) va , (qavslar va vergul) – qo'shimcha simvollar.

Predikatlar mantiqi formulasining t a ' r i f i .

1. Har qanday o'zgaruvchi yoki o'zgarmas mulohaza (elementar) formula bo'ladi.

2. Agar $F(\underbrace{\cdot,\cdot,...,\cdot}_{nta})$ n joyli o'zgaruvchi predikat yoki o'zgarmas predikat va $x_1, x_2,..., x_n$ – predmet o'zgaruvchilar yoki predmet konstantalar bo'lsa, u holda $F(x_1, x_2,..., x_n)$ formula bo'ladi. Bunday formulani ***elementar formula*** *deb ataymiz. Bu formulada predmet o'zgaruvchilar erkindir, ya'ni kvantorlar bilan bog'langan emas.*

3. Agar A va B shunday formulalarki, birorta predmet o'zgaruvchi birida erkin va ikkinchisida bog'langan o'zgaruvchi bo'lmasa, u holda $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ham formula bo'ladi. Bu formulalarda dastlabki formulalarda erkin bo'lgan o'zgaruvchilar erkin, bog'langan bo'lgan o'zgaruvchilar esa bog'langan o'zgaruvchilar bo'ladi.

4. Agar A formula bo'lsa, u holda $\bar{A}$ ham formula bo'ladi. A formuladan $\bar{A}$ formulaga o'tishda o'zgaruvchilarning xarakteri o'zgarmaydi.

5. Agar $A(x)$ formula bo'lsa va uning ifodasiga x predmet o'zgaruvchi erkin holda kirsa, u holda $\forall x A(x)$ va $\exists x A(x)$ mulohazalar formula bo'ladi va x predmet o'zgaruvchi ularga bog'langan holda kiradi.

6. 1–5- bandlarda formulalar deb atalgan mulohazalardan farq qiluvchi har qanday mulohaza formula bo'lmaydi.

1- misol. Agar $P(x)$ va $Q(x,y)$ – bir joyli va ikki joyli predikatlar, q, r – o'zgaruvchi mulohazalar bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalar formulalar bo'ladi:

q, $P(x)$, $P(x) \wedge Q(x^0, y)$, $\forall x P(x) \to \exists x Q(x,y)$, $(\overline{Q(x,y)} \vee q) \to r$.

$\forall x Q(x,y) \to P(x)$ mulohaza formula bo'la olmaydi, chunki predikatlar mantiqi formulasi ta'rifning 3- bandidagi shart buzilgan: x predmet o'zgaruvchi $\forall x Q(x,y)$ formulaga bog'langan holda, $P(x)$ga esa erkin holda kirgan. ■

Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifidan ko'rinib turibdiki, mulohazalar algebrasining har qanday formulasi predikatlar mantiqining ham formulasi bo'ladi.

2- misol. Quyidagi ifodalarning qaysilari predikatlar mantiqining formulasi bo'lishi va har bir formuladagi bog'langan va erkin o'zgaruvchilarni aniqlash talab etilgan bo'lsin:

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))}$;

2) $(p \to q) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p})$;

3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

4) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x,y))$;

5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall y R(y))$;

6) $\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))$.

Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifiga ko'ra 1), 2), 4) va 6) ifodalar formulalardir.

3) va 5) ifodalar formula emas. Haqiqatdan ham, 3) ifodada $\wedge$ amali $P(x)$ va $\forall x Q(x)$ formulalarga nisbatan qo'llanilgan bo'lib, $P(x)$da x

predmet o‘zgaruvchi erkin va $\forall x Q(x)$da esa umumiylik kvantori bilan bog‘langan. Bu holat formula ta’rifining 3- bandiga ziddir. Shuning uchun 3) ifoda formula bo‘la olmaydi. 5) ifodada esa, $\exists y$ mavjudlik kvantori bilan $\forall y$ umumiylik kvantori orasida ziddiyat bor.

1) formulada y erkin, x va z o‘zgaruvchilar esa bog‘langan o‘zgaruvchilardir. 2) formulada predmet o‘zgaruvchilar yo‘q. 4) formulada x bog‘langan o‘zgaruvchi, y esa erkin o‘zgaruvchidir. ■

Predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasi. Endi predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasini aniqlaylik. Predikatlar mantiqi formulasining ifodasiga kiruvchi predikatlarning aniqlanish sohasi M to‘plam berilgan bo‘lsa, bu formulaning mantiqiy qiymati haqida so‘z yuritish mumkin. Predikatlar mantiqi formulasining mantiqiy qiymati uch xil o‘zgaruvchilar: 1) formulaga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalarning; 2) M to‘plamdagi erkin predmet o‘zgaruvchilarning; 3) predikat o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi.

Uch xil o‘zgaruvchilardan har birining ma’lum qiymatlarida predikatlar mantiqining formulasi chin yoki yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aylanadi.

3- misol. Quyidagi formulani tahlil qilamiz:

$$\exists y \forall z (P(x,y) \to P(y,z)). \tag{1}$$

(1) formulada $P(x,y)$ ikki joyli predikat $M \times M$ to‘plamda aniqlangan, bu yerda $M = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$. (1) formula ifodasiga o‘zgaruvchi predikat $P(x,y)$ va x, y, z predmet o‘zgaruvchilar kirgan. Bu yerda y va z – kvantorlar bilan bog‘langan o‘zgaruvchilar, x – erkin o‘zgaruvchi.

$P(x,y)$ predikatning ma’lum qiymati sifatida tayinlangan $P^0(x,y)$: «$x < y$» predikatni olamiz, erkin o‘zgaruvchi $x$ga $x^0 = 5 \in M$ qiymat beramiz. U holda $y$ning $x^0 = 5$ dan kichik qiymatlari uchun $P^0(x^0, y)$ predikat yolg‘on qiymat qabul qiladi, $P(x,y) \to P(y,z)$ implikasiya esa z ning hamma $z \in M$ qiymatlari uchun chin bo‘ladi, ya’ni $\exists y \forall z (P^0(x,y) \to P^0(y,z))$ mulohaza chin qiymatga ega bo‘ladi. ■

4- misol. Natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{N}$ da $P(x)$, $Q(x)$ va $R(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsa, $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to R(x))$ formulaning qiymati quyidagi hollarda topilsin:

1) $P(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi», $Q(x)$: «x son 4ga qoldiqsiz bo‘linadi», $R(x)$: «x – juft»;

2) $P(x)$: «x son 3ga qoldiqsiz bo‘linadi», $Q(x)$: «x son 4ga qoldiqsiz bo‘linadi”, $R(x)$: «x son 5ga qoldiqsiz bo‘linadi».

Ikkala holda ham $P(x)\wedge Q(x)$ formula «x son 12ga qoldiqsiz bo‘linadi» degan tasdiqni ifodalaydi. O‘z navbatida hamma $x$lar uchun x son 12ga qoldiqsiz bo‘linsa, u holda x son 2ga ham bo‘linadi (juft bo‘ladi). Demak, 1) holda formulaning qiymati chindir.

x sonning 12ga qoldiqsiz bo‘linishidan ba’zi $x$lar uchun $x$ning 5ga qoldiqsiz bo‘linishi, bundan esa 2) holda formulaning yolg‘on ekanligi kelib chiqadi. ■

5- misol. $P(x,y)$ predikat $M=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ to‘plamda aniqlangan va $P^0(x,y)$: «x son y sondan kichik» bo‘lganda $\forall x\exists yP(x,y)\to\exists x\forall yP(x,y)$ formulaning mantiqiy qiymatini topamiz.

$P(x,y)$ predikatning ko‘rsatilgan qiymati uchun $\forall x\exists yP(x,y)$: «har qanday x natural son uchun shunday y natural son topiladiki, u $x$dan katta bo‘ladi” degan chin mulohazani bildiradi. $\exists x\forall yP(x,y)$ esa «shunday x natural son mavjudki, u har qanday y natural sondan kichik bo‘ladi” degan tasdiqni bildiradi. Bu tasdiq yolg‘ondir. Demak, berilgan formulaning mantiqiy qiymati yolg‘on bo‘ladi. ■

Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari. Predikatlar mantiqida ham teng kuchli formulalar tushunchasi mavjud.

1- ta’rif. *Predikatlar mantiqining ikkita A va B formulasi o‘z tarkibiga kiruvchi M sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida bir xil mantiqiy qiymat qabul qilsa, ular M* ***sohada teng kuchli formulalar*** *deb ataladi.*

2- ta’rif. *Agar ixtiyoriy sohada A va B formulalar teng kuchli bo‘lsa, u holda ular* ***teng kuchli formulalar*** *deb ataladi va $A\equiv B$ ko‘rinishda yoziladi.*

Agar mulohazalar algebrasidagi hamma teng kuchli formulalar ifodasi tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalar o‘rniga predikatlar mantiqidagi formulalar qo‘yilsa, u holda ular predikatlar mantiqining teng kuchli formulalariga aylanadi. Ammo, predikatlar mantiqi ham o‘ziga xos asosiy teng kuchli formulalarga ega. Bu teng kuchli formulalarning asosiylarini ko‘rib o‘taylik. $A(x)$ va $B(x)$ – o‘zgaruvchi predikatlar va C – o‘zgaruvchi mulohaza bo‘lsin. U holda predikatlar mantiqida quyidagi asosiy teng kuchli formulalar mavjud.

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$.
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x [C \to B(x)]$.
9. $\forall x [B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$.
10. $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.
12. $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y [A(x) \wedge B(y)]$.
14. $\exists x [C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$.
15. $\exists x [B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.
16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.
17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Bu teng kuchli formulalarning ayrimlarini isbot qilamiz.

Birinchi teng kuchli formula quyidagi oddiy tasdiqni (dalilni) bildiradi: agar hamma x lar uchun $A(x)$ chin bo‘lmasa, u holda shunday x topiladiki, $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi.

2- teng kuchlilik: agar $A(x)$ chin bo‘ladigan x mavjud bo‘lmasa, u holda hamma x lar uchun $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi degan mulohazani bildiradi.

3- va 4- teng kuchliliklar 1- va 2- teng kuchliliklarning ikkala tarafidan mos ravishda inkor olib va ikki marta inkor qonunini foydalanish natijasida hosil bo‘ladi.

5- teng kuchlilikni isbot qilaylik. Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar bir vaqtda aynan chin bo‘lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va, demak,

$\forall xA(x)$, $\forall xB(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda 5- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham chin qiymat qabul qiladi.

Endi hech bo‘lmaganda ikkita predikatdan birortasi, masalan, $A(x)$ aynan chin bo‘lmasin. U holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va, demak, $\forall xA(x)$, $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$ mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladi, ya’ni bu holda ham 5- teng kuchlilikning ikki tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladi. Demak, 5- teng kuchlilikning to‘g‘riligi isbotlandi.

Endi 8- teng kuchlilikning to‘g‘riligini isbot qilamiz. O‘zgaruvchi mulohaza C yolg‘on qiymat qabul qilsin. U holda $C \to B(x)$ predikat aynan chin bo‘ladi va $C \to \forall xB(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$ mulohazalar chin bo‘ladi. Demak, bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi.

Endi o‘zgaruvchi mulohaza C chin qiymat qabul qilsin. Agar bu holda o‘zgaruvchi predikat $B(x)$ aynan chin bo‘lsa, u vaqtda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va, demak,

$\forall xB(x)$, $C \to \forall xB(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladi, ya’ni bu holda 8- teng kuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladi. Agar $B(x)$ predikat aynan chin bo‘lmasa, u holda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va, demak,

$\forall xB(x)$, $C \to \forall xB(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$

mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, bu holda ham 8- teng kuchliliklarning ikkala tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladilar. Demak, 8- teng kuchlilik o‘rinlidir.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, $\forall x[A(x)\vee B(x)]$ formula $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ formulaga va $\exists x[A(x)\wedge B(x)]$ formula $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ formulaga teng kuchli emas.

Ammo, quyidagi teng kuchliliklar o'rinlidir:

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\equiv\forall xA(x)\vee\forall yB(y)\equiv$$

$$\equiv\forall x[A(x)\vee\forall yB(y)]\equiv\forall x\forall y[A(x)\vee B(y)],$$

$$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\equiv\exists xA(x)\wedge\exists yB(y)\equiv$$

$$\equiv\exists x[A(x)\wedge\exists yB(y)]\equiv\exists x\exists y[A(x)\wedge B(y)].$$

$\forall x[A(x)\vee B(x)]$ formula $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ formulaga teng kuchli emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\forall x$ kvantor $\vee$ diz'yunksiya amaliga nisbatan distributiv emasligiga misol keltirish yetarlidir. Faraz qilaylik, $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(x)$:« $(x-1)(x-2)=0$ » va $B(x)$: « $(x-3)(x-4)(x-5)=0$ » bo'lsin. Ravshanki, M sohada $\forall xA(x)$ va $\forall xB(x)$ mulohazalar yolg'on va, demak, $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ mulohaza ham yolg'ondir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv, ya'ni

$$\forall x[A(x)\vee B(x)]=\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

bo'lganda edi, $\forall x[A(x)\vee B(x)]$ chin mulohaza bo'lganligi uchun qarama-qarshilik hosil bo'lar edi. Demak, $\forall x[A(x)\vee B(x)]\neq\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ o'rinlidir.

Endi bu teng kuchliliklarning o'ng tomoni har doim chap tomonidagi mulohaza bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko'rsatamiz. Agar $\forall xA(x)\equiv 1$ yoki $\forall xB(x)\equiv 1$ bo'lsa, u holda bu teng kuchlilik to'g'ri ekanligi aniq, chunki bu holda teng kuchlilikning ikkala tomoni ham bir vaqtda chin qiymat qabul qiladi. Bu holda faqat $\forall xB(x)\equiv\forall yB(y)$ ekanligini ko'rsatish kifoya. Ammo oxirgi teng kuchlilik tabiiydir, chunki x predmet o'zgaruvchi ham, y predmet o'zgaruvchi ham M sohaning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

Endi $\forall xA(x)\equiv 0$ va $\forall xB(x)\equiv 0$ bo'lsin. U holda teng kuchlilikning chap tarafi 0 (yolg'on) qiymat qabul qiladi. O'ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta'sir sohasi $A(x)\vee B(y)$ formula bo'lsada, $B(y)$ predikatda x predmet o'zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ kvantorning ta'siri faqat $A(x)$ga tarqaladi. Xuddi shu kabi, $\forall y$ kvantor faqat $B(y)$ga ta'sir etadi. Demak, $\forall x\forall y[A(x)\vee B(y)]$ formula ham yolg'on qiymatga ega bo'ladi.

Keltirilgan ikkinchi teng kuchlilikni ham xuddi shu kabi isbot qilish mumkin. (Bu ishni o‘quvchiga havola etamiz.)

6- misol. $\exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y \exists x (A(x) \wedge B(y))$ teng kuchlilik o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists x (A(x) \wedge \forall y B(y)) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall y B(y)\,,$$

$$\forall y \exists x (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y (\exists x A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall y B(y)\,.$$

Demak, keltirilgan teng kuchlilik o‘rinlidir. ■