Diskret Matematika va Matematik Mantiq

Keltirib chiqarish va isbot tushunchasi

Birinchi tartibli til. Term va formulalar.

1-ta'rif. *Har qanday simvollarning bo'sh bo'lmagan chekli to'plami **alfavit** deb, alfavitning simvollari esa **harflar** deb ataladi.*

2-ta'rif. *Qaralayotgan A alfavit harflarining chekli ketma-ketligi A **alfavitdagi so'z** deb ataladi. Harflarning bo'sh ketma-ketligi **bo'sh so'z** deb ataladi va $\wedge$ bilan belgilanadi.*

3-ta'rif. *Agar A alfavitdagi $a_1a_2...a_n$ va $b_1b_2...b_k$ so'zlar uchun $n=k$ va $a_1=b_1$, $a_2=b_2$,..., $a_n=b_k$ bo'lsa, bu so'zlar **teng** deb ataladi va $a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_k$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda n son **so'zning uzunligi** deb ataladi.*

4-ta'rif. *Agar biror T nazariyaning alfaviti $A(T)$ bo'lsa, u holda $A(T)$ alfavitdagi $E(T)$ so'zlar to'plami T **nazariyaning ifodalar to'plami** deb ataladi.*

Birinchi tartibli til. Term va formulalar.

5-ta'rif. $< A(T), E(T) >$ *juftlik* T ***nazariyaning tili*** *deb ataladi.*

Birinchi tartibli tillar birinchi tartibli nazariyalarda qo'llaniladi.

Birinchi tartibli nazariyaning simvollari quyidagilardan iborat:

$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ – mantiqiy amallar;

$\forall, \exists$ – kvantor amallari;

$(,)$ – qo'shimcha simvollar;

A_j^n $(n, j \geq 1)$ – n joyli predikat harflarning sanoqli to'plami, bu yerda yuqori indeks joyning sonini va quyi indeks predikat harfining raqamini bildiradi;

f_j^n $(n, j \geq 1)$ – chekli (bo'sh bo'lishi ham mumkin) yoki sanoqli funksional harflarning to'plami, bu yerda yuqori indeks funksiya tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilar soni va quyi indeks funksional harfning raqamini bildiradi;

a_i $(i \geq 1)$ – chekli (bo'sh bo'lishi ham mumkin) yoki sanoqli predmet konstantalar to'plami.

Mantiqiy amallar zanjiri ham funksional harflar sifatida qaralishi mumkin.

Birinchi tartibli til.

6- ta'rif. *Predikat harflar to'plami, funksional harflar va konstantalar to'plami bilan birgalikda berilgan nazariya tilining* ***signaturasi*** *deb ataladi.*

Shunday qilib, birinchi tartibli T nazariyada ayrim yoki hamma funksional harflar va predmet konstantalar va ayrim (ammo hammasi emas) predikat harflar mavjud bo'lmasligi mumkin.

Birinchi tartibli har xil nazariyalar bir-biridan alfavitdagi harflar tarkibi bilan farq qilishi mumkin.

T nazariyani to'liq tavsiflash uchun **term** va **formula** tushunchalarini aniqlashimiz kerak. Term va formula – bu $E(T)$ so'zlar to'plamining ikki sinfidir.

7- ta'rif. 1) *Predmet o'zgaruvchilar va predmet konstantalar termdir;*

2) *agar* $r_1, r_2, ..., r_n$ *lar term,* A *esa n joyli amalning simvoli bo'lsa, u holda* $A_i^n(r_1, r_2, ..., r_n)$ *termdir;*

3) T *nazariyada 1- va 2- bandlarda aniqlanganlardan tashqari hech qanday term mavjud emas.*

Tabiiy interpretatsiyaga (talqinga) asosan term bu ayrim olingan predmetning ismidir. O'zgaruvchilar va predmet konstantalardan tashqari amallarning simvollari vositasida o'zgaruvchilar va predmet konstantalardan hosil qilingan zanjirlar ham term bo'ladi, chunki interpretatsiyaga ko'ra term biror funksiyaning qiymati sifatida aniqlanayapti.

Birinchi tartibli til.
Term va formulalar.

8- ta'rif. 1) *Agar* A *– n joyli munosabat simvoli (predikat yoki funksiya) va* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *termlar bo'lsa, u holda* $A(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *formula, xususan, agar* A *– predikat harfi* A_i^n *bo'lsa, u holda* $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ ***elementar formula*** *deb ataladi;*

2) *agar* A *va* B *formulalar bo'lsa, u holda* $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ *ham formuladir;*

3) *agar* A *formula va* y *harf* A *formulaga erkin kiruvchi yoki* A *tarkibiga kirmagan predmet o'zgaruvchisi bo'lsa, u holda* $\forall yA$, $\exists yA$ *ifodalar formula bo'ladi. Bu holda* A ***kvantorning ta'sir etuvchi sohasi*** *deyiladi;*

4) *1–3- bandlarda aniqlanganlardan tashqari boshqa hech qanday formula mavjud emas.*

Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar

Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar. Birinchi tartibli nazariya aksiomalari ikki sinfga: mantiqiy va xos aksiomalarga bo'linadi.

Mantiqiy aksiomalar: A, B va C lar T nazariyaning qanday formulalari bo'lishidan qat'i nazar quyidagi formulalar T ning **mantiqiy aksiomalari** bo'ladi:

1) $A \to (B \to A)$; (1)

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$; (2)

3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$; (3)

4) $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$, bu yerda $A(x_i)$ – berilgan T nazariyaning formulasi, t esa $A(x_i)$ formulada erkin bo'lgan T nazariyaning termi. Ta'kidlash kerakki, t term x_i bilan mos kelishi ham mumkin, u holda $\forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$ aksiomaga ega bo'lamiz;

5) agar x_i predmet o'zgaruvchi A formulada erkin bo'lmasa, u holda $\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$.

Oldingi bobda XI aksiomali klassik mulohazalar hisobi o'rganilgan edi. Ammo kam aksiomali mulohazalar hisobini ham yaratish mumkin (masalan, 1–3- mantiqiy aksiomalar asosida).

Mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalar

Xos aksiomalar. Xos aksiomalarni umumiy holda tavsiflash mumkin emas, chunki ular bir nazariyadan ikkinchi nazariyaga o'tishda o'zgaradi, ya'ni har bir nazariyaning o'zigagina xos aksiomalari bo'ladi.

Birinchi tartibli nazariya xos aksiomalarga ega emas. Bu nazariya sof mantiqiy nazariyadir. Bu nazariya **birinchi tartibli predikatlar hisobi** deb yuritiladi. Ko'pchilik aksiomatik nazariyalarda tenglik tushunchasidan foydalaniladi. U ikki joyli predikat $<< x = y >>$ sifatida kiritiladi. Shu sababli aksiomalar qatoriga ikkita xos aksioma kiritiladi:

1) $\forall x(x = x)$;

2) agar x, y, z har xil predmet o'zgaruvchilar va $F(z)$ formula bo'lsa, u holda $\forall x \forall y(x = y \rightarrow F(x) = F(y))$.

Keltirib chiqarish

Keltirib chiqarash qoidasi

- Xuddi mulohazalar hisobidagidek, *H* formulalar majmuasida keltirib chiqarish tushunchasidan foydalanamiz. *H* formulalar majmuasiga kiruvchi mulohazalami (formulalarni) shartlar deb ataymiz.

- Agar *H* majmuadan keltirib chiqarilgan ifodaning oxirida *A* mulohaza (formula) joylashgan boʻlsa, u holda *A* mulohaza *H* dan keltirib chiqarilgan deb aytamiz va $H \mid\!\!— A$ koʻrinishda yozamiz.

- Xususan, $H = \varnothing$ boʻlsa, u holda $\mid\!\!— A$ koʻrinishda yoziladi.

Keltirib chiqarish

1. Xulosa qoidasi (yoki **modus ponens):**

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2. Umumiylik kvantori bilan bog‘lash qoidasi (yoki **umumlashtirish qoidasi):**

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$

Diskret Matematika va Matematik Mantiq

Nazariyada isbotlash tushunchasi.

Alohida fikming chinligini (to‘g‘riligini) asoslash usuli **isbotlash** deb yuritiladi.

1-ta’rif.

Ko’rilayotgan nazariya mulohazalarining $s_1,s_2,\ldots,s_k$ chekli ketma-keetligi uchun bu mulohazalarning har biri yo aksioma , yo shu ketma-ketlikning birorta mulohazadan mantiqning keltirib chiqarish qoidasi *orqali hosil etilgan bo ‘lsa, bu ketma-ketlikka isbot* (***isbotlash***) *deb ataladi.*

2- ta’rif. Isbotlashning oxirgisi bo‘lgan mulohaza teorema yoki isbotlanuvchi mulohaza deb ataladi.

Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi.

Ravshanki, har qanday aksioma teorema bo‘ladi. Bu teoremaning isboti bir qadamdan iborat bo‘ladi.

Teorema. Agar birinchi tartibli T nazariyaning A formulasi tavtologiyaning xususiy holi bo‘lsa

u holda A formula T nazariyaning teoremasi bo'ladi va uni ushbu bobning 2- paragrafidagi (1), (2) va (3) mantiqiy aksiomalar va xulosa qoidasini qo’llash yo‘li bilan keltirib chiqarish mumkin.

Tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi.

Isboti. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – B formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilar majmui va A formula B tavtologiyadan o‘rniga qo‘yish qoidasi orqali hosil qilingan bo‘lsin. Ma’lumki, bu holda B formulani $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ majmuadan keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun quyidagi qoida bo‘yicha o‘rniga qo‘yish amalini bajaramiz:

1) agar biror x_i o‘zgaruvchi B formula tarkibida bo‘lsa, u holda har bir keltirib chiqarish formulasi tarkibidagi x_i o‘rniga T nazariyaning A formulasini hosil qilish uchun B dagi o‘sha x_i o‘zgaruvchi o‘rnini oladigan formula qo‘yiladi;

2) agar biror x_i o‘zgaruvchi B tarkibida bo‘lmasa, u holda keltirib chiqarish formulalari tarkibidagi shu o‘zgaruvchining har bir joyiga T nazariyaning ixtiyoriy bitta formulasi qo‘yiladi.

Shunday qilib keltirib chiqarilgan formulalar ketma-ketligi nazariyadagi A formulaning T nazariyada keltirilib chiqarilishi bo‘ladi.

Teoremaning isbotida faqatgina ushbu bobning 2- paragrafidagi (1), (2), (3) aksiomalar va xulosa qoidasidan foydalanildi. ■

E`tiboringiz uchun rahmat