11-MAVZU	**TO‘LIQ VA YOPIQ FUNKSIYALAR SISTEMALARI. POST TEOREMASI**

Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda F ga to‘liq funksiyalar sistemasi deb aytiladi.*

Istalgan funksiyani MKNSh yoki MDNSh ko‘rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x \vee y, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasining to‘liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltirish mumkin.

Quyidagi funksiyalar sistemasining to‘liqligini isbotlang:

a) $xy, \overline{x}$; b) $x \vee y, \overline{x}$; v) $xy, x + y, 1$;

g) $\overline{x \vee y}$; d) $\overline{x}\,\overline{y}$; i) $x + y, x \vee y, 1$;

j) $x + y + z, xy, 0, 1$; z) $x \to y, \overline{x}$; ye) $x \to y, 0$.

Isbot.

a). $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$, ya’ni diz’yunksiya amalini kon’yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘ladi.

b). $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ ekanligi ma’lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz’yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo‘ladi. Shuning uchun $\{x \vee y, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liqdir.

v). Ixtiyoriy mantiq algebrasining funksiyasini yagona Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltirish mumkinligidan $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasining to‘liqligi kelib chiqadi.

g) va d). Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani $\psi(x, y) = \overline{x\,y}$ va $\varphi(x, y) = \overline{x \vee y}$ Sheffer funksiyalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $\overline{x} = \varphi(x, x)$

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

va

$$xy = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\varphi(x,x), \varphi(y,y))$$

asosiy mantiqiy amallarni Sheffer funksiyasi orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{\overline{xy}\}$ va $\{\overline{x \vee y}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘ladi.

i). $x \vee y = xy + x + y$ bo‘lganligi uchun $x \vee y + (x+y) = xy$ bo‘ladi. $\{xy, x+y, 1\}$ to‘liq sistema ekanligi v) punktida isbot qilingan edi, demak, $\{x+y, x \vee y, 1\}$ sistema to‘liqdir.

Xuddi shunday boshqa funksiyalar sistemasining to‘liqligini isbot qilish mumkin.

1-teorema. *Agar* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lsa, u holda unga ikkitaraflama bo‘lgan* $\Phi^* = \{\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*\}$ *funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi.*

Isbot. Φ^* sistemaning to‘liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko‘rsatishimiz kerak. Buning uchun avval f^* funksiyani $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ cistemasidagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to‘liq bo‘lganligi uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikkitaraflama qonunga asosan ikkitaraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali f funksiyani hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlaylik:

a) $\bar{x}, 1$; b) $xy, x \vee y$; v) $x+y, \bar{x}$;

g) $xy \vee yz \vee xz, \bar{x}$; d) $xy \vee yz \vee xz, 0, 1$.

a). $\bar{x} = x+1$ ga teng. Demak, $\{\bar{x}, 1\}$ sistemasidagi funksiyalar bir argumentli funksiyalar bo‘ladi. Bizga ma’lumki, bir argumentli funksiyalarning superpozitsiyasi natijasida hosil qilingan funksiya yana bir argumentli funksiya bo‘ladi. Natijada, bu sistemadagi funksiyalar orqali ko‘p argumentli funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun $\{\bar{x}, 1\}$ to‘liq sistema emas.

b). $\{xy, x \vee y\}$ sistemasidagi funksiyalarning ikkalasi ham monotondir. Monoton funksiyalarning superpozitsiyasi orqali hosil qilingan funksiya yana monoton bo‘lishini isbot qilgan edik. Demak, bu ikkala funksiyaning superpozitsiyasi orqali monoton bo‘lmagan funksiyalarni ifodalash mumkin emas va natijada, $\{xy, x \vee y\}$ sistema to‘liqmas sistema bo‘ladi.

v). $\{x+y, \bar{x}\}$ sistemasidagi funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Shuning uchun bu funksiyalar orqali chiziqlimas funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Demak, $\{x+y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

g). $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ sistemasidagi funksiyalar o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalardir. Bu funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan har qanday funksiya ham o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘ladi.

Demak, $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

d). $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ sistemadagi funksiyalarning hammasi monoton funksiyalar bo‘ladi. Monoton emas funksiyalar bu sistemadagi funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Demak, $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ sistema to‘liq emas.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan masala yechimining analizidan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Berilgan Φ funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozitsiyasi natijasida saqlansin.

Haqiqatan ham, u vaqtda bunday xususiyatga ega bo‘lmagan funksiyani Φ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali hosil qilib bo‘lmaydi.

Funksiyalarning bu ma’lum xususiyatlarini tekshirish uchun odatda funksional yopiq sinflar tushunchasidan foydalanadilar.

2-ta’rif. *Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya yana shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistemaga superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb aytiladi.*

3-ta’rif. *Superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday mantiq algebrasining funksiyalar sistemasiga funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Ravshanki, ma’lum bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar;

b) hamma mantiq algebrasining funksiyalari;

v) L - chiziqli funksiyalar;

g) S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar;

d) M - monoton funksiyalar;

ye) P_0 - nol qiymatni saqlovchi funksiyalar;

j) P_1 - bir qiymatni saqlovchi funksiyalar.

4-ta’rif. *Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinfga xususiy funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmovchi funksiya topilishi yetarli va zarurdir.

5-ta’rif. *O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi* (P_2) *dan farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmovchi xususiy funksional yopiq sinfga maksimal funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Mantiq algebrasida hammasi bo‘lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud:

P_0 - nol saqlovchi funksiyalar sinfi, P_1 - bir saqlovchi funksiyalar sinfi, S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar sinfi, L - chiziqli funksiyalar sinfi.

Post teoremasi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmovchi kamida bitta funksiya mavjud bo‘lishi yetarli va zarur (ya’ni* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *shunda va faqat shundagina to‘liq sistema bo‘ladiki, qachonki u* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining ham qism to‘plami bo‘lmasa).*

Isbot. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to‘liq sistema bo‘lsin, ya’ni $[\Phi]=P_2$. Faraz qilamizki, Φ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi. U vaqtda F ning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ ni yozish mumkin, ya’ni

$F=P_2$. Ammo bunday bo‘lishi mumkin emas. Demak, $\Phi\subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Teoremaning yetarliligining isbotini o‘quvchilarga havola etamiz.

Natija. *Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘ladi.*

Amalda birorta $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemaning to‘liq yoki to‘liq emasligini aniqlash uchun Post jadvalidan foydalanadilar. Post jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_{n-1}					
φ_n					

Jadvalning xonalariga o‘sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo‘lsa “+” ishora, bo‘lmasa “-” ishorasi qo‘yiladi.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistema to‘liq funksiyalar sistemasi bo‘lishi uchun, teoremaga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta “-” ishorasi bo‘lishi yetarli va zarur.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmasligi uchun P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘lishi, ya’ni Post jadvalining biror ustuni to‘liq “+” ishoralaridan iborat bo‘lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to‘liqligi tushunchasi bilan sinfning (to‘plamning) **yopig‘i** tushunchasi o‘zaro bog‘langan.

6-ta’rif. A *bilan* P_2 *(n argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o‘z ichiga olgan) to‘plamning biror qism to‘plamini belgilaymiz.* A *to‘plam funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil etilgan hamma bul funksiyalari to‘plami (*A *to‘plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma bul funksiyalari to‘plam)ga* A *to‘plamning* ***yopig‘i*** *deb aytiladi va* [A] *kabi belgilanadi.*

Misol. 1. $A = P_2$ bo‘lsin, u holda $[A] = P_2$.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ bo‘lsin, u vaqtda A to‘plamning yopig‘i hamma L - chiziqli funksiyalar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

To‘plam yopig‘i quyidagi xossalarga ega:

1. $[A] \supseteq A$;
2. $[[A]] = [A]$;
3. agar $A_1 \subseteq A_2$ bo‘lsa, u holda $[A_1] \subseteq [A_2]$ bo‘ladi;
4. $[A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2]$.

7-ta’rif. *Agar $[A] = A$ bo‘lsa, u holda A to‘plam (sinf)ga funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Misol. 1. $A = P_2$ sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ cinfi yopiq sinf bo‘lmaydi.

3. L - sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

Osongina ko‘rish mumkinki, har qanday $[A]$ sinf yopiq sinf bo‘ladi. Bu hol ko‘pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To‘plam yopig‘i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to‘liqligi haqidagi ta’rif (avvalgi ta’rifga ekvivalent bo‘lgan ta’rif) ni berish mumkin.

8-ta’rif. *Agar $[A] = P_2$ bo‘lsa, u holda A funksiya-lar sistemasi to‘liq deb aytiladi.*

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemalarining to‘liq emasligini Post jadvali orqali isbot qilaylik:

a) $\Phi_1 = \{0, xy, x + y + z\}$;

b) $\Phi_2 = \{1, xy, x = y + z\}$;

v) $\Phi_3 = \{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$;

g) $\Phi_4 = \{0, 1, x + y\}$;

		P_0	P_1	S	L	M
a)	0	+	-	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x + y + z$	+	+	+	+	-

b)	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
v)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	-	-	+	-	-
g)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	$x+y$	+	-	-	+	-

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, yuqorida keltirilgan hamma funksiyalar sistemasi to‘liq emas, chunki har bir sistema uchun jadvalda bitta ustun faqatgina “+” ishoralaridan iborat. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, har bir sistema uchun bu ustunlar har xil. Demak, Post teoremasi shartidan P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas. Bu xulosadan o‘z navbatida P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ikkinchisining qism to‘plami bo‘la olmasligi kelib chiqadi.