1-MAVZU	TO‘PLAMLAR NAZARIYASI.

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar. To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich va muhim tushunchalardan biridir.

To‘plamlar nazariyasiga matematik fan sifatida nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) tomonidan asos solingan.

Masalan: Natural sonlar to‘plami, auditoriyadagi talabalar to‘plami, bibleotekadagi kitoblar to‘plami, bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to‘plami va boshqalar.

1.1-ta'rif. *To‘plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob'ektlar bu to‘plamning elementlari deb aytiladi.*
To‘plamlar, odatda, lotin yoki grek alfavitining katta harflari bilan belgilanadi.

A to‘plam $a, b, c, d...$ elementlardan tuzilganligi

$$A = \{a, b, c, d, ...\}$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, unga ***chekli to‘plam*** deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo‘ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to‘plam ***cheksiz to‘plam*** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to‘plami, bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami va boshqalar.

x element X to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo‘lgan $x \in X$ lar to‘plamini bildiradi. Bo‘sh to‘plamni

$\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

1.1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan to‘plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \; |x| \leq 2\}$

Yechish. 1) To‘plam 5 dan kichik va teng bo‘lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya'ni $A = \{1,2,3,4,5\}$.

2) manfiy natural son yo‘q shuning uchun $B=\varnothing$;

3) bu holda $|x|\le 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2;\ 2]$ kesmada bo‘ladi. Shunday qilib, $C=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Qavariq to‘plam.

1.2-ta’rif. Istalgan ikki nuqta shu to‘plamga tegishli bo‘lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, bunday to‘plamga ***qavariq to‘plam*** deyiladi.

Nuqtaning atrofi.

1.3-ta’rif. r biror musbat son bo‘lsin. $M_0\in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $p(M,\ M_0)<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M\in R^n$ nuqtalar to‘plamiga M_0 **nuqtaning** r**-atrofi** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$S_r(M_0)=\{M\in R^n \mid \rho(M,\ M_0)<r\}.$$

Masalan, $M_1(2;\ 3;\ -1;\ 3)\in S_2(M_0), M_0(1;\ 2;\ -1;\ 2)$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M,M_0)=\sqrt{(1-2)^2+(2-3)^2+(-1+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{3}$$ bo‘lib, $\sqrt{3}<2$ bo‘ladi. $M_2(3;\ 3;\ -1;\ 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas, chunki $\rho(M_2,\ M_0)=\sqrt{(1-3)^2+(2-3)^2+(-1+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6}>2$ bo‘ladi.

R^1(sonlar o‘qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi $(a-r,\ a+r)$ intervaldan iborat.

R^2(tekislik) fazoda $M_0(a,b)$nuqtaning r atrofi, radiusi r, markazi $M_0(a,b)$ nuqtada bo‘lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat bo‘ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a,b,c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r, markazi. $M_0(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan sharning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

To‘plamning chegaralanganligi.

1.4-ta’rif. R^n fazoning V to‘plamning istalgan $M(x_1,x_2,....,x_n)\in V$ nuqtasi uchun shunday $A>0$ son mavjud bo‘lib,

$$|x_1|\le A,\quad |x_2|\le A,......,|x_n|\le A$$

munosabatlar bajarilsa, V to‘plamga ***chegaralangan to‘plam*** deyiladi. Masalan, n o‘lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to‘plamdir.

To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari.

1.5-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta V to‘plamga o‘zining biror r atrofi bilan kirsa, unga V ***to‘plamning ichki nuqtasi*** deyiladi .

1.6-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta o‘zining har bir atrofida V to‘plamga tegishli bo‘lgan hamda tegishli bo‘lmagan nuqtalar bilan kirsa, M_0 nuqtaga V to‘plamning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi .

To‘plamning quyuqlanish nuqtasi.

1.7-ta’rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to‘plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko‘p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o‘z ichiga olsa, M_0 nuqta V to‘plamning ***quyuqlanish nuqtasi*** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to‘plamning o‘ziga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a,b]$ yoki $V = (a,b]$ bo‘lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo‘ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to‘plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to‘plamda yotmaydi.

Уopiq va ochiq to‘plamlar.

1.8-ta’rif. V to‘plam o‘zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o‘zida saqlasa, unga ***yopiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, $[a,b]$ *кесма* R^1 sonlar o‘qida, $\{M(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to‘plamlardir.

1.9-ta’rif. V to‘plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo‘lsa, bunday to‘plamga ***ochiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, (a,b) R^1da, $\{M(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ R^2da ochiq to‘plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to‘plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to‘plamga ***kompakt*** deb ataladi.

2. To‘plamlar ustida amallar.

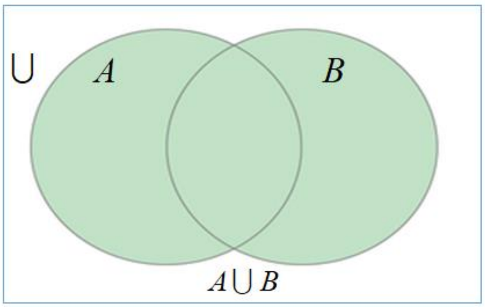
2.1-ta’rif. *Biror to‘plamning xos qismi deb qaralmagan har bir to‘plamni universal to‘plam deb atab, uni* $\cup$ *harfi bilan belgilaymiz.*

Ta'rifga binoan, $\cup$ ning hamma qismlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi $\cup$ ning o'zi, ikkinchisi $\varnothing$ bo'sh to'plam, qolganlari xos qismlardan iborat.

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

2.2.-ta'rif. *Berilgan* A, B *to'plamlarning yig'indisi yoki birlashmasi deb, shu to'plamlarning takrorlanmasdan olinadigan hamma elementlaridan tuzilgan va* $A \bigcup B$ *kabi belgilanadigan to'plamga aytiladi.* $A \bigcup B = \{x \colon x \in A \text{ yoki } x \in B\}$.

To'plamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari yordamida ifoda qilinishi amallarning xossalarini isbot qilishni ancha yengillashtiradi. Bunda universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar, ovallar orqali ifoda qilinadi.



2.1-shakl.

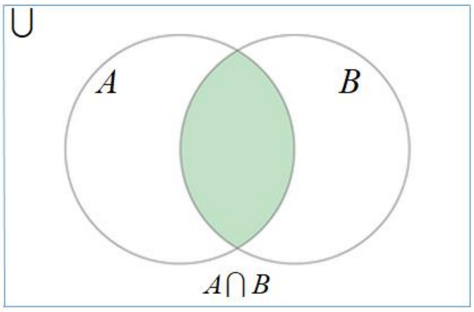
Agar $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, u holda ularningyig'indisi quyidagicha yoziladi: $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n}$

$A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$

Masalan: $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, b\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u vaqtda

$$A \bigcup B \bigcup C = \{a, b, c, d, e, f, k\}.$$

2.3-ta'rif. *Berilgan* A, B *to'plamlarning hamma umumiy elementlaridan tuzilgan* C *to'plamga* A, B *to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi yoki umumiy qismi) deyiladi va* $C = A \bigcap B$ *ko'rinishida belgilanadi.* $A \bigcap B = \{x \colon x \in A \text{ va } x \in B\}$.



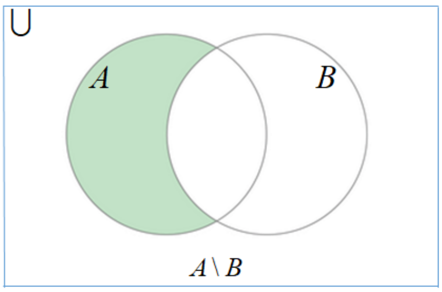
2.2-shakl.

Agar $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, u holda ularning ko‘paytmasi quyidagicha yoziladi: $\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n$

Masalan: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ bo‘lsa, u vaqtda $C = \{2, 4\}$.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan to‘plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo‘sh to‘plamga teng bo‘ladi. Masalan, toq sonlar to‘plami bilan juft sonlar to‘plamining kesishmasi bo‘sh to‘plamdir.

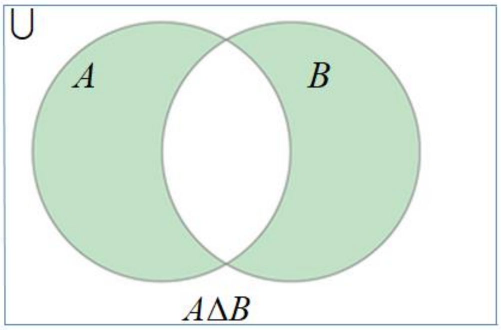
2.4-ta’rif. *A va B to‘plamlarning ayirmasi deb, A ning B da mavjud bo‘lmagan hamma elementlaridan tuziladigan va $C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$ ko‘rinishida yoziladigan C to‘plamga aytiladi.* $A \setminus B = \{x \vdots\, x \in A \ va \ x \notin B\}$.



2.3-shakl.

Masalan: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ va $B = \{3, 4, 5, 6\}$ bo‘lsa, u vaqtda $C = A \setminus B = \{1, 2, 7\}$.

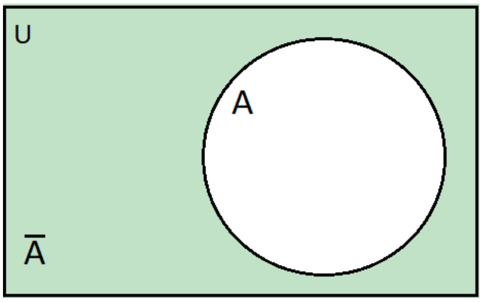
2.5-ta’rif. *A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deb, A to‘plamning B to‘plamga, B to‘plamning A to‘plamga tegishli* *bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va* $A\Delta B$ *kabi belgilanadi.* $A\Delta B=\{x \vdots x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\}$.



2.4-shakl.

2.1-misol. A={1;3;5} va B={4;5;6} to`plamlar berilgan bo'lsin. Ularning ayirmalari A\B={1;3} va B\A={4;6} ga teng bo`lsa, simmetrik ayirmasi AΔB= {1;3;4;6} bo'ladi.

2.6-ta'rif. *U to'plamdagi uning A qism to'plamiga kirmay qolgan hamma elementlaridan tuzilgan qism to'plamga A ning U to'plamigacha to'ldiruvchisi deb aytiladi va $\overline{A}$ (A') ko'rinishda belgilanadi.*



2.5-shakl.

Masalan: $A=\{1,2,3,4,5,6...\}$ natural sonlar to'plami va $B=\{2,4,6,8,...\}$ juft sonlar to'plami bo'lsa, u vaqtda $\overline{B}=\{1,3,5,7...\}$ bo'ladi, ya'ni $B\bigcup\overline{B}=A$.

$\overline{B}$ to'plam B ni A gacha to'ldiradi.

Ushbu tengliklarni keltirib chiqarish mumkin.

$$\overline{B}\bigcap B=\varnothing,\quad B\bigcup\overline{B}=A.\quad B-\overline{B}=B,\quad \overline{B}-B=\overline{B}.$$

2.7-ta'rif. *A* va *B* to'plamlarning **dekart ko'paytmasi** deb, barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi va

$$A\times B=\{<a_i, b_j>,\ a_i\in A, b_j\in B\}$$ kabi belgilanadi.

2.2-misol. $A=\{a_1,a_2\}$ va $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ to`plamlarning dekart ko`paytmalarini toping.

Yechilishi: $A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$

$B\times A=\{(b_1, a_1),(b_1, a_2),(b_2, a_1),(b_2, a_2),(b_3, a_1),(b_3, a_2)\}$.

2.8-ta'rif. $A_1, A_2,\dots, A_n$, n ta to`plamning **dekart (to`g`ri) ko'paytmasi** deb, $A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(a_1;a_2;\dots;a_n)\mid a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\dots,\ a_n\in A_n\}$ ko`rinishidagi to`plamga aytiladi.

$A^n=A\times A\times\dots\times A$ to`plamga $A$ to`plamning **dekart** n **- darajasi** deyiladi.

$A^2=A\times A$ ko`rinishidagi to`plamga **dekart kvadrat** deyiladi.

2.1-teorema. *A, B, C* - ixtiyoriy to`plamlar bo`lsin. U holda quyidagi tengliklar o`rinli:

a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

c) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

Isboti: a) $(x,\ y)\in A\times(B\cup C)$ bundan $x\in A$ va $y\in B\cup C$ bo`ladi. Agar $x\in A$ va $y\in B$ yoki $y\in C$ bo`lsa, ($x\in A$ va $y\in B$) yoki ($x\in A$ va $y\in B$) hosil bo`ladi. $(x,\ y)\in A\times B$ yoki $(x,\ y)\in A\times C$. Bundan $(x,\ y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ kelib chiqadi.

Demak, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, qolgan tengliklar ham isbotlanadi.

2.2-teorema. Agar A to`plam $m$ ta, $B$ to`plam esa n ta elementdan tashkil topgan bo`lsa, u holda ularning $A\times B$ dekart ko`paytmasi $m\times n$ ta elementdan iborat bo`ladi.

2.3-misol. $B=\{0,\ 1\}$ to'plam uchun B^n to'plamni yozing.

Yechilishi: B^n uzunligi n ga teng 0 va 1 lardan iborat to'plam bo'ladi. Ularni dasturlash tilida n uzunlikdagi **"bit qatori"** deyiladi.

Chekli to'plamlarda amallarni modellashtirish uchun "bit qatori" qanday qo''llaniladi?

Aytaylik, $S=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ bo‘lsin. Agar $A\subset S$ bo‘lsa, u holda A to‘plamga n-bit qatoriga $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ni mos qo‘yamiz, bunda b_i =1 bo‘ladi. Aksincha, agar $s_i \in A$ bo‘lsa, b_i=0 bo‘ladi. Bunday bit qatoriga A **qism to‘plamning xarakteristik vektori** deyiladi.

2.4-misol. Universal to‘plam U={1;2;3;4;5} va A={1;3;5}, B={3;4} bo‘lsin.

1) A va B to‘plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

2) $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}$ to‘plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

Yechilishi: A to‘plamning xarakteristik vektori a = (1;0;1;0;1),

B to‘plamning xarakteristik vektori b = (0;0;1;1;0) bo‘ladi.

$A\cup B$ esa $a\cup b$=(1;0;1;0;1)$\cup$(0;0;1;1;0) = (1;0;1;1;1)

$A\cap B$ to‘plam uchun $a\cap b$ = (1;0;1;0;1)$\cap$(0;0;1;1;0) = (0;0;1;0;0)

$\overline{A}$ ning xarakteristik vektori $\overline{a}$ =(0;1;0;1;0

Demak, $A\cup B$={1;3;4;5}, $A\cap B$={3}, $\overline{A}$={2;4}qism to‘plamlar hosil bo‘ladi.

3. Asosiy tengliklar. To‘plamlar nazariyasida tengliklarni isbotlashning umumiy metodi tenglikning bir tomonidagi to‘plamga tegishli har bir element ikkinchi tomonidagi to‘plamda ham mavjud va, aksincha, ekanligini ko‘rsatishdan iboratdir. U universal to‘plamning qismlari orasidagi munosabatlarni ifodalovchi asosiy tengliklar quyidagilardan iborat:

1. $\overline{\overline{A}} = A$

Isbot. $\overline{\overline{A}}$ to‘plam $\overline{A}$ ning to‘ldiruvchisi. Shuning uchun $\overline{\overline{A}}$ ning har bir elementi $x \overline{\in} \overline{A}$, demak, $x \in A$. Aksincha, A ning har bir elementi $x \overline{\in} \overline{A}$ bo‘lgani uchun $x \in \overline{\overline{A}}$. Demak, $\overline{\overline{A}} = A$.

2. $A\cap B = B\cap A$ - ko‘paytmaga nisbatan kommutativlik qonuni.

Isbot. $A\cap B$ ning har bir elementi A va B da mavjud, chunki $A\cap B$ to‘plam A va B larning umumiy elemertlaridan tuzilgan. Demak, $A\cap B$ ning elementlari $B\cap A$ da ham mavjud. Xuddi shunday $B\cap A$ ning har bir elementi B va A da mavjud, chunki $B\cap A$ to‘plam B va A larning umumiy elementlaridan tuzilgan. Shuning uchun $B\cap A$ to‘plamning har

bir elementi $A \cap B$ to‘plamning ham elementi bo‘ladi. Demak, $A \cap B = B \cap A$
.

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ko‘paytmaga nisbatan assotsiativlik qonuni.

Isbot. $x \in (A \cap B) \cap C$ bo‘lsin. Demak, $x \in (A \cap B)$ va $x \in C$. Bu yerdan $x \in A,\ x \in B$ va $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in A$ va $x \in B \cap C$ dir. Bu yerdan o‘z navbatida $x \in A \cap (B \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Isbotning ikkinchi qismini o‘quvchiga havola etamiz.

4. $A \cup B = B \cup A$ - yig‘indiga nisbatan kommutativlik qonuni.

5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$-yig‘indiga nisbatan assotsiativlik qonuni.

4 va 5 -tengliklarning isbotlari xuddi 2 va 3 - tengliklarni isbotlashga o‘xshash amalga oshiriladi.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - ko‘paytmaga nisbatan distributivlik qonuni.

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - yig‘indiga nisbatan distributivlik qonuni.

6-tenglikning isboti: $x \in A \cap (B \cup C)$ bo‘lsin, u vaqtda $x \in A$ va $x \in B \cup C$ bo‘ladi. Bu yerdan $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$ kelib chiqadi. Demak, $x \in A \cap B$ yoki $x \in (A \cap C)$. Shuning uchun $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Endi $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo‘lsin, u holda $x \in (A \cap B)$ yoki $x \in (A \cap C)$ bo‘ladi. Bu yerdan $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$ kelib chiqadi. Demak, $x \in A \cap (B \cup C)$.

8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$ 9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$ 10. $A \cap A = A.$

11. $A \cap U = A.$ 12. $\overline{A \cup A} = \overline{A}.$ 13. $A \cup \varnothing = A.$

4. To‘plamlar algebrasi. To‘plamlar algebrasida $\cap$, $\cup$, $-$, $\subseteq$ belgilar o‘rtasidagi o‘zaro munosabatlar ko‘rib chiqiladi. To‘plamlar algebrasida umuman oddiy algebradagiday ayniyatlar - tengliklar ko‘riladi. Bu ayniyatlar universal to‘plamning va uning xos qism to‘plamlarining qanday bo‘lishidan qat’iy nazar o‘z kuchini saqlaydilar.

4.1-teorema. *U universal to‘plamning istalgan A, B, C qismlari orasidagi munosabatlarni ifodalovchi quyidagi tengliklar ayniyatdir:*

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $1'$. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2. $A\cup B = B\cup A$ 2$'$. $A\cap B = B\cap A$

3. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ 3$'$. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

4. $A\cup\varnothing = A$ 4$'$. $A\cap U = A$

5. $A\cup\overline{A} = U$ 5$'$ $A\cap\overline{A} = \varnothing$

Agar $A\subseteq B$ va $B\subseteq A$ bo‘lsa, u vaqtda $A=B$. Ana shu xossadan foydalanib yuqorida keltirilgan ayniyatlar isbot etiladi, ya’ni tenglikning chap tomonidagi har bir element uning o‘ng tomonida ham mavjud va aksincha ekanligini ko‘rsatish kerak. Biz yuqoridagi ayniyatlarning ayrimlarini isbot etgan edik.

1 va 1$'$ - ayniyatlarni mos ravishda yig‘indi va ko‘paytma amallari uchun assotsiativlik qonunlari deyiladi. 2 va 2$'$ - ayniyatlari esa - kommutativlik qonuni va 3, 3$'$ -ayniyatlari bo‘lsa, shu amallar uchun distributivlik qonuni deyiladi.

Assotsiativlik qonuniga asosan A,B,C qism to‘plamlardan ma’lum tartibda yig‘indi amali bilan hosil etilgan ikki to‘plam tengdir.

Bu to‘plamni $A\cup B\cup C$ shaklda belgilaymiz.

Assotsiativ qonuniga ko‘ra qavs belgisi qaerda turishi hech qanday rol o‘ynamaydi. Matematik induksiya metodiga asosan

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n = A_{1'}\cup A_{2'}\cup....\cup A_{n'},$$

bu yerda $1',2,...,n'$, belgilashlar $1,2,...,n$ sonlarning istalgan tartibda olinganidan hosil etilgan sonlarni bildiradi.

Shu tariqa quyidagi tengliklarni ham keltirib chiqarish mumkin:

$$A_1\cap A_2\cap....\cap A_n = A_{1'}\cap A_{2'}\cap....\cap A_{n'},$$

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap....\cap B_n) = (A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap....\cap(A\cup B_n),$$

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup....\cup B_n) = (A\cap B_1)\cup(A\cup B_2)\cup....\cup(A\cap B_n).$$

Ko‘rsatilgan 1-5 va 1$'$-5$'$ tengliklardan quyidagi xulosani hosil qilamiz:

4.1-teoremadagi ayniyatlar juft-juft tarzda shunday joylashtirilganki, biri-ikkinchisidan $\cup$ va $\cap$ hamda $\varnothing$ va $\cup$ belgilarni bir vaqtda o‘zaro joylarini almashtirish natijasida kelib chiqadi.

4.2-teorema. *U universal to‘plamning istalgan A va B to‘plamlari uchun quyidagilar haqlidir*:

6. *Agar hamma A lar uchun $A\cup B = A$ bo‘lsa, u vaqtda $B\subseteq A$.*

$6'$. *Agar istalgan* A *uchun* $A\cap B = A$ *bo‘lsa, u vaqtda* $A \subseteq B$.

7.$7'$. *Agar* $A\cup B = U$ *va* $A\cap B = \varnothing$ *bo‘lsa, u vaqtda* $B = \overline{A}$.

8.$8'$. $\overline{\overline{A}} = A$.

9. $\overline{\varnothing} = U$ $9'$. $\overline{U} = \varnothing$

10. $A\cup A = A$ $10'$. $A\cap A = A$

11. $A\cup U = U$ $11'$. $A\cap\varnothing = \varnothing$

12. $A\cup (A\cap B) = A$ $12'$. $A\cap (A\cup B) = A$

13. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ $13'$. $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

4.1-misol. Berilgan A, B, C to‘plamlar uchun $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ assotsiativlik munosabati o‘rinli ekanligi ko‘rsatisin.

Yechilishi: $D = A\Delta B$ belgilashni kiritaylik.

U holda $(A\Delta B)\Delta C = D\Delta C = (D\cup C)\cap(\bar{D}\cup\bar{C})$ bo‘ladi. Endi $D\cup C$ va $\bar{D}\cup\bar{C}$ larni hisoblaymiz:

$$((A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}))\cup C = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)$$

$$\bar{D}\cup\bar{C} = \overline{((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B))}\cup\bar{C} = (\overline{(A\cap\bar{B})}\cap\overline{(\bar{A}\notin\cap B)})\cup\bar{C} =$$

$$= (C\,\bar{A}\cup B)\cap(A\cup\bar{B}))\cup\bar{C} = ((\bar{A}\cup B)\cap(A\cup\bar{B}))\cup\bar{C} = (\bar{A}\cup B\cup\bar{C})\cap(A\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

Shunday qilib, $(A\Delta B)\Delta C = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)\cap(\bar{A}\cup B\cup\bar{C})\cap(A\cup\bar{B}\cup\bar{C})$ ekan.

Xuddi shunga o‘xshash $B\Delta C$ ni D_1 orqali belgilab,

$$A\Delta D_1 = A\Delta(B\Delta C) = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)\cap(\bar{A}\cup B\cup\bar{C})\cap(A\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, $A\Delta(B\Delta C) = A\Delta(B\Delta C)$ o‘rinli bo‘lar ekan.

Ravshanki, $A = B$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C to‘plam uchun $(A\Delta C) = (B\Delta C)$ bo‘ladi.

Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli bo‘larmikan?

4.2-misol. Biror C to‘plam uchun $A\Delta C = B\Delta C$ bo‘lsa, $A = B$ ekanligi ko‘rsatilsin. $A\Delta C = B\Delta C$ dan $(A\Delta C)\Delta C = (A\Delta C)\Delta C$ ga ega bo‘lamiz.

10-misol yechimiga binoan esa, $(A\Delta C)\Delta C = A\Delta(C\Delta C) = A\Delta\varnothing = A$ bo‘ladi.

Xudi shunga o‘xshash, $(B\Delta C)\Delta C = B\Delta(C\Delta C) = B\Delta\varnothing = B$

Demak, $A = B$ bo‘lar ekan.

4.3-misol. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ o‘rinli ekanligini ko‘rsatilsin.

Yechilishi.

$$A\setminus(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})=(A\cap A)\cap(\bar{B}\cap\bar{C})=$$

$$(A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C})=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

<u>Eslatma.</u> Biz $A=A\cap A$ ekanligidan unumli foydalandik.

Yechilishi. Yuqorida uqtirilganiga ko‘ra, $A\Delta C=B\Delta C$ dan $(A\Delta C)\Delta C=(B\Delta C)\Delta C$ ga ega bo‘lamiz.

4.1-misol yechimiga binoan esa, $(A\Delta C)\Delta C=A\Delta(C\Delta C)=A\Delta\emptyset=A$ bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, $(B\Delta C)\Delta C=B\Delta(C\Delta C)=B\Delta\emptyset=B$

Demak, $A=B$ bo‘lar ekan.

To‘plamlar algebrasida biror tenglikdan shu tenglikka kirgan $\cup$ ni $\cap$ ga, $\cap$ ni $\cup$ ga, $\varnothing$ ni $\cup$ ga, $\cup$ ni $\varnothing$ ga birdaniga almashtirish natijasida hosil etilgan ikkinchi tenglikni birinchi tenglikka va, aksincha, birinchi tenglik ikkinchi tenglikka nisbatan ikkitaraflama tenglik deb aytiladi.

4.3-teorema. *Istalgan A va B to‘plamlar uchun quyidagi mulohazalar juft-juft ekvivalentdir*:

(I) $A\subseteq B$; (II) $A\cap B=A$; (III) $A\cup B=B$. (1)

$R_1,R_2,...,R_n$ mulohazalar juft-juft ekvivalentdir degan tasdiq quyidagini bildiradi: istalgan i va j uchun R_i R_j ga ekvivalentdir. Bu mulohaza o‘z navbatida faqatgina R_1 R_2 ning, R_2 R_3 ning, ..., R_{n-1} R_n ning to‘g‘riligini keltirib chiqargandagina to‘g‘ridir.

Isbot: (I) (II) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

$A\subseteq B$ bo‘lsin. Istalgan A va B uchun $A\cap B=A$ ekanligini ko‘rsatish kerak.

a) $\overline{x\in A\cap B}$ bo‘lsa, u vaqtda $x\in A$ va $x\in B$ dir. Demak, $A\cap B\subseteq A$.

b) $x\in A$ bo‘lsin. U vaqtda (I.I) ga asosan $x\in B$ hamdir. Shuning uchun $A\subseteq A\cap B$, ya’ni (I) (II) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

Endi $A\cap B=A$ bo‘lsin, u vaqtda $A\cup B=B$ ekanligini isbot qilamiz.

$$A\cup B=(A\cap B)\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup B)=(A\cup B)\cap B=B.$$

Demak, $A\cup B=B$.

(III) (I) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

Rostdan ham $A \cup B = B$ va $A \subseteq A \cup B$ bo‘lishidan $A \subseteq B$. Bu bilan isbot yakunlanadi.

5.Tartiblangan to‘plamlar

Agar biror E to‘plamning elementlari uchun quyidagi tasdiqlar:

1) $n = m,\ \ n > m,\ \ n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli;

2) $n < m,\ m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlik

o‘rinli bo‘lsa, E to‘plam tartiblangan to‘plam deyiladi.

Tartiblangan to‘plamlarga dastlabki misol, $N = \{1,\ 2,\ 3,...,\ n,...\}$ natural sonlar to‘plami bo‘ladi. Bundan tashqari butun, ratsional, haqiqiy sonlar to‘plamlari ham tartiblangan to‘plamlarga misol bo‘laoladi.

6. To‘plamlarning ekvivalentligi

Ixtiyoriy ikkita E va F to‘plamlar berilgan holda, tabiiyki, ularning qaysi birining elementi «ko‘p» degan savol tug‘iladi. Natijada to‘plamlarni solishtirish (elementlar soni jihatidan solishtirish) masalasi yuzaga keladi. Odatda bu masala ikki usul bilan hal qilinadi:

1) to‘plamlarning elementlarini bevosita sanash bilan ularning elementlari soni solishtiriladi ;

2) biror qoidaga ko‘ra bir to‘plamning elementlariga ikkinchi to‘plamning elementlarini mos qo‘yish yo‘li bilan ularning elementlari solishtiriladi.

Masalan, $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$ to‘plamlarning elementlari sonini solishtirib, F to‘plamning elementlari soni E to‘plamning elementlari sonidan ko‘p ekanligini aniqlaymiz. Yoki, E to‘plamning har bir elementiga F to‘plamning bitta elementini

$$1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9$$

tarzda mos qo‘yib, F to‘plamda E to‘plam elementiga mos qo‘yilmay qolgan element borligini (u 16) hisobga olib, yana F ning elementlari soni E ning elementlari sonidan ko‘p degan xulosaga kelamiz. Agar to‘plamlar cheksiz bo‘lsa, ravshanki, ularni 1- usul bilan solishtirib bo‘lmaydi. Bunday vaziyatda faqat 2 - usul bilangina ish ko‘riladi. Masalan, $N = \{1,\ 2,...,\ \ n,...\}$ natural sonlar to‘plamining har bir n elementiga $(n = 1,\ 2,...)$ juft sonlar to‘plami $N_1 = \{2,\ \ 4,...,\ 2n,...\}$

ning $2n$ elementini $(n=1,\ \ 2,...)$ mos qo‘yish bilan $(n \to 2n)$ solishtirib, ularning elementlari soni «teng» degan xulosaga kelamiz.

6.1-ta’rif. Agar E to‘plamning har bir a elementiga F to‘plamning bitta b elementi mos qo‘yilgan bo‘lib, bunda F to‘plamning har bir elementi uchun E to‘plamda unga mos keladigan bittagina element bor bo‘lsa, u holda E va F to‘plamlar elementlari orasida **o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan** deyiladi.

6.2-ta’rif. Agar E va F to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular bir-biriga **ekvivalent to‘plamlar** deb ataladi va

$$E \sim F$$

kabi belgilanadi.

6.1-misol. Ushbu

$$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\right\}$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Uni quyidagicha

$$1 \leftrightarrow 1, \qquad 2 \leftrightarrow \frac{1}{2},\ \ 3 \leftrightarrow \frac{1}{3},\ \ 4 \leftrightarrow \frac{1}{4},\ \ 5 \leftrightarrow \frac{1}{5},$$

o‘rnatish mumkin. Demak, $E \sim F$.

6.2-misol. Ushbu

$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}, \qquad F=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘lmaydi. Chunki bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lmaydi.

6.3-misol. Ushbu

$$E=N=\{1,\ 2,\ 3,.....,\ n....\}, \qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ .....\ \frac{1}{n}....\right\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik har bir n ga $(n \in N)\frac{1}{n}$ ni $(\frac{1}{n} \in F)$ mos qo‘yish bilan o‘rnatiladi. Demak, $E \sim F$.

6.4-misol. Ushbu

$$E=N=\{1,2,3,....n,,,,\}, \qquad N_1=\{2,4,6,....,2n,.....\}$$

to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatili moslikni quyidagicha o‘rnatish mumkin: har bir natural n $(n \in N)$ songa $2n$ son $(2n \in N_1)$ mos qo‘yiladi $(n \leftrightarrow 2n)$.

Demak, $E = N \sim N_1$. Ravshanki, $N_1 \subset N$. Bu esa to‘plamning qismi o‘ziga ekvivalent bo‘lishi mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Bunday holat faqat cheksiz to‘plamlargina xosdir.

Уuqorida keltirilgan ta’rif va misollardan ikki chekli to‘plamning o‘zaro ekvivalent bo‘lishi uchun ularning elementlari soni bir-biriga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini ko‘ramiz.

Ekvivalentlik munosabati quyidagi xossalariga ega:

1) $E \sim E$ (refleksivlik xossasi) ;

2) $E \sim F$ bo‘lsa, $F \sim E$ bo‘ladi(simmetrik xossasi) ;

3) $E \sim F$, $F \sim G$ bo‘ladi (tranzitivlik xossasi).

To‘plamlarning ekvivalentlik tushunchasi to‘plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi.

Masalan,

$N_1 = \{2,4,6,....,2n,...\}$,

$N_2 = \{1,3,5,...2n-1,...\}$,

$$N_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlardir, chunki

$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...)$,

$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...)$,

$N_3 \sim N \ (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,....)$.

7. To‘plamning quvvati. To‘plamning quvvati, to‘plam “elementlarining soni” tushunchasining ixtiyoriy (chekli va cheksiz) to‘plamlar uchun umumlashtirilganidir. To‘plamning quvvati berilgan to‘plamga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlarga, ya’ni elementlari berilgan to‘plamning elementlari bilan o‘zaro bir qiymatli moslikda bo‘la oladigan barcha to‘plamlarga umumiy bo‘lgan narsa sifatida aniqlanadi. G.Kantor cheksiz to‘plamlar uchun ***har xil quvvatlar*** mavjudligini isbotlagan.

$0 \le x \le 1$ kesmadagi sonlarning L to‘plamining quvvati nomi ***kontinuum*** deyiladi. L ni natural sonlar to‘plamiga o‘zaro bir qiymatli akslantirish mumkin emas. **“Kontinuum matematikasi”** termini uzluksizlik tushunchasi bilan bog‘liq bo‘lgan nazariyalarda qo‘llanilib, u diskret matematikaga qarama-qarshi qo‘yiladi. Kontinuum quvvat sanoqli to‘plam quvvatidan katta. Bir necha o‘n yil muqaddam sanoqli to‘plam quvvatidan katta va kontinuum quvvatdan kichik bo‘lgan to‘plam mavjudmi? degan muammo qo‘yilgan.