Asosiy tengkuchliliklar

Bu paragrafda keng qo'llaniladigan tengkuchliliklar qaraladi. Avvalo, oddiy algebrada ma'lum bo'lgan ayniyatlarga o'xshashlarini keltiramiz. Ma'lumki, qo'shish va ko'paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga bo'ysunadi:

1) $x+y=y+x$ (qo'shishning kommutativlik qonuni);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (qo'shishning assostiativlik qonuni);

3) $xy=yx$ (ko'paytirishning kommutativlik qonuni);

4) $(xy)z=x(yz)$ (ko'paytirishning assostiativlik qonuni);

5) $x(y+z)=xy+xz$ (ko'paytirishning yig'indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o'xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar o'rinlidir:

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad (3)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \qquad (4)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad (5)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (6)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (7)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (8)$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo'ladi. Bu erda biz (8)ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda qavslarni kamaytirish maqsadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo'lsa, uni qavssiz yozamiz, ya'ni $(\overline{x\vee y})\wedge z$ ning o'rniga $\overline{x\vee y}\wedge z$ ni, yoki $\overline{x\vee y}\,z$ ni yozamiz.

2) kon'yunkstiya belgisi diz'yunkstiya, implikastiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(xy)\vee z$ o'rniga $xy\vee z$, $x\rightarrow(yz)$ o'rniga $x\rightarrow yz$, $(xy)\leftrightarrow(zu)$ o'rniga $xy\leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz'yunkstiya belgisi implikastiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(x\vee y)\rightarrow z$ o'rniga $x\vee y\rightarrow z$ va $(x\vee y)\leftrightarrow z$ o'rniga $x\vee y\leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikastiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(x\rightarrow y)\leftrightarrow z$ o'rniga $x\rightarrow y\leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilarni o'z ichiga olgan ixtiyoriy murakkab mulohazani unga tengkuchli bo'lgan shunday mulohaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashgan mulohazalarga ega bo'lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiqi uchun katta ahamiyatga ega, chunki u erda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va $-$ belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni o'chirish qonuni deb ataluvchi $\bar{\bar{x}} = x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$x\vee y\equiv\overline{\overline{x\vee y}}\equiv\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}} \qquad (12)$$

va shunga o’xshash

$$x\wedge y\equiv\overline{\bar{x}\vee\bar{y}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo’lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va $-$ yoki $\vee$ va $-$ belgilar qatnashadi. Shunga o’xshash barcha mantiq amallarni $\rightarrow$ va $-$ amallar bilan almashtirish mumkin.

Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x}\equiv x|x,\quad x\wedge y\equiv(x|y)|(x|y),\quad \overline{x\wedge y}\equiv x|y,\quad x\vee y\equiv\bar{x}|\bar{y},\quad x\rightarrow y\equiv x|\bar{y}.$$

Endi misol sifatida $(x\to y)(y\to x)\to(\bar{x}\leftrightarrow\bar{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va $-$ belgilar qatnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x\to y)(y\to x)\to(\bar{x}\leftrightarrow\bar{y})\equiv(x\to y)\cdot(y\to x)\to(\bar{x}\to\bar{y})\cdot(\bar{y}\to\bar{x})\equiv$$

$$\equiv(\bar{x}\vee y)(\bar{y}\vee x)\to(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})(\bar{\bar{y}}\vee\bar{x})\equiv\overline{(x\vee\bar{y})(y\vee\bar{x})}\vee(\bar{x}\vee y)\cdot(\bar{y}\vee x).$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x\to y)\cdot(y\to x)\to(\bar{x}\leftrightarrow\bar{y})\equiv(\bar{x}\cdot y\vee\bar{y}\cdot x\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\vee x\cdot y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}y.$$

Endi shunday savol tug'iladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita ($-$, $\wedge$) yoki hatto bitta $\bar{x} = x$ ga keltirishning hojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda cho'zilib ketadi va uni ko'zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\rightarrow$ amaliga tegishlidir. Yana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$x \cdot \bar{x} \equiv$ yo (qarama-qarshilik qonuni) (14)

$x \vee \bar{x} \equiv$ yo (uchinchisi istisno qonuni) (15)

$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ (idempotentlik qonuni) (16)

$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x$ (yutish qonunlari) (17)

$x \vee \text{yo} \equiv x, \quad x \vee \text{ch} \equiv \text{ch}, \quad x \cdot \text{ch} \equiv x, \quad x \cdot \text{yo} \equiv \text{yo}$ (18)

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko'rinishga keltirishga imkon beradi.

Tengkuchli formulalarga doir teoremalar

5.1-teorema. A va B formulalar tengkuchli bo'lishi uchun $\overline{A}$ va $\overline{B}$ formulalar tengkuchli bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. $A = B$ bo'lsin. U vaqtda hamma holatlarda formulalar bir xil qiymatga ega bo'ladilar. U holda $\overline{A}$ va $\overline{B}$ formulalar ham chinlik jadvalining har bir satridagi qiymatlari bir xil bo'ladi. Demak, $\overline{A} = \overline{B}$.

Xuddi shunga o'xshash, $\overline{A} = \overline{B}$ dan $A = B$ kelib chiqadi.

5.2-teorema. A va B formulalar tengkuchli bo'lishi uchun $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin (tavtologiya) bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. 1. $A = B$ bo'lsin. Bu holda, ekvivalentlik ta'rifiga asosan, $A \leftrightarrow B$ ning hamma satrlaridagi qiymatlari "**ch**" dan iborat, demak, $A \leftrightarrow B$ tavtologiyani ifodalaydi.

2. $A \leftrightarrow B$ tavtologiya bo'lsin. U holda $A \leftrightarrow B$ har bir satrda "**ch**" qiymatga ega bo'ladi. Bundan esa A va B ning har bir satrdagi qiymatlari bir xil, ya'ni $A = B$ kelib chiqadi.

Misollar. 1. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ - aynan chin.

2. $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$ - aynan chin.

5.3-teorema. $A \leftrightarrow B$ aynan chin bo'lishi uchun $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ aynan chin bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. a) $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo'lsin. U vaqtda 2-teoremaga asosan $\overline{A} = \overline{B}$. Demak, 2-teoremaga asosan $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ formulaning aynan chinligi kelib chiqadi.

b) $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ aynan chin bo'lsin. Bundan $\overline{A} = \overline{B}$ kelib chiqadi va o'z navbatida $A = B$. Demak, $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo'ladi.

5.4-teorema. P formulaning istalgan A qismi o'rniga shu A bilan tengkuchli B formulani qo'yishdan hosil bo'lgan yangi Q formula P bilan tengkuchlidir.

Misol. $P = \overline{x \vee y} \to z$ $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge y$ bo'lgani uchun

$$P = Q = \bar{x} \wedge \bar{y} \to z = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee z = x \vee y \vee z .$$