REKURSIV VA REKURSIV SANALUCSHI TO‘PLAMLAR.

Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya φ va ψ funksiyalardan (1) munosabat orqali hosil etilsa, u holda f funksiya φ va ψ funksiyalardan ***primitiv*** *(o'ta sodda)* ***rekursiya sxemasi*** *orqali hosil etilgan deyiladi.*

Agar φ va ψ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda f ham intuitiv hisoblanuvchi funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham, $x_1, x_2, ..., x_n$ argumentlarning qiymatlar majmuasi $a_1, a_2, ..., a_n$ bo'lsin. U vaqtda ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$f(0, a_2, a_3, ..., a_n) = \varphi(a_2, a_3, ..., a_n) = b_0,$

$f(1, a_2, a_3, ..., a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3, ..., a_n) = b_1,$

$f_2(2, a_2, a_3, ..., a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3, ..., a_n) = b_2$ va hokazo.

Ravshanki, agar φ va ψ funksiyalar argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda f funksiya ham argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'ladi.

Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyani boshlang'ich (oddiy) funksiyalardan superpozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *ga* ***primitiv rekursiv funksiya*** *deb aytamiz.*

Boshlang'ich $0(x)=0$, $\lambda(x)=x+1$, $I_n^m(x_1,x_2,...,x_n)=x_m$ $(1\le m\le n)$ funksiyalar va $f(x_1,x_2,...,x_n)=a$ $(a\in N)$, $f(x,y)=x+y$, $f(x,y)=x\cdot y$, $f(x,y)=x^y$ $(x^0=1)$ funksiyalar primitiv rekursiv funksiyalar bo'ladi.

Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiyani boshlang'ich funksiyalardan superpozitsiya, primitiv rekursiya sxemasi va minimallash operatori (*μ*-operatori) amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *ga* ***qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya*** *deb aytamiz.*

Bu keyingi ta'rif primitiv rekursiv funksiyaning ta'rifidan faqat boshlang'ich funksiyalarga qo'shimcha ravishda μ-operatorini qo'llashga ruxsat berilgani bilan farq qiladi. Shuning uchun ham **har qanday primitiv rekursiv funksiya o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'ladi**.

Agar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *funksiya qismiy rekursiv va argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*ga* ***umumrekursiv funksiya*** *deb aytiladi.*

Quyidagi funksiyalar:

$$\lambda(x),\ \ 0(x),\ \ I_n^m(x),\ \ f(y,x) = y + x,\ f(y,x) = x \cdot y,\ \ f(y,x) = x + n$$

umumrekursiv funksiyalar bo'ladilar.

A.Chyorch tezisi. Har qanday intuitiv hisoblanuvchi funksiya qismiy rekursiv funksiya bo'ladi.

Bu tezisni isbotlash mumkin emasligini yuqorida aytgan edik, chunki u intuitiv hisoblanuvchi funksiya noqat'iy matematik tushunchasini qat'iy aniqlangan qismiy rekursiv funksiya matematik tushunchasi bilan bog'laydi.

Teorema. $g(y_1, y_2, ..., y_k)$- *primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya va* $x_1, x_2, ..., x_n$ - *har xil o'zgaruvchilar bo'lsin. U vaqtda, agar har bir* i $(1 \leq i \leq k)$ *uchun* z_i *o'zgaruvchi* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilarning biri bo'lsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(z_1, z_2, ..., z_k)$ *funksiya ham primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya bo'ladi.*

Isbot. $z_i = x_{ji}$ $(1 \leq j_i \leq n)$ bo'lsin. U vaqtda $z_i = I_{ji}^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(I_{ji}^n(x_1, x_2, ..., x_n), ..., I_{jk}^n(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Shunday qilib, ψ funksiyani φ, $I_{ji}^n, ..., I_{jk}^n$ funksiyalardan superpozitsiya amali orqali hosil etish mumkin, ya'ni ψ primitiv rekursiv (rekursiv) funksiya bo'ladi.

Bu teorema soxta o'zgaruvchilarni kiritish, o'zgaruvchilarning o'rnini almashtirish va ularni aynan tenglashtirish jarayoni primitiv rekursiv va qismiy rekursiv funksiyalarni o'z sinflaridan chiqarmasligini bildiradi.

misol. (Soxta argumentlarni kiritish.) Agar $\varphi(x_1, x_3)$-primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_3)$ bo'lsa, u holda $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Isbot qilish uchun $z_1 = x_1$ va $z_2 = x_3$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kerak.

misol. (O'zgaruvchilarning o'rnini almashtirish.) Agar $\varphi(x_1, x_2)$ - primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ bo'lsa, u holda ψ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Isbot qilish uchun $z_1 = x_2$ va $z_2 = x_1$ deb belgilab, teoremadan foydalanish kerak.

misol. (O'zgaruvchilarni aynan tenglashtirish.) Agar $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ - primitiv rekursiv funksiya va $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ bo'lsa, u holda $\psi(x_1, x_2)$ ham primitiv rekursiv funksiya bo'ladi. Isbotlash uchun teoremada $n = 2$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1$, deb qabul qilish kerak.