2-MAVZU	MUNOSABATLAR. BINAR MUNOSABAT. EKVIVALENTLIK MUNOSABATI. TARTIBLASH MUNOSABATI

1. Munosabatlar. Binar munosabat. Diskret matematikada fundamental tushunchalardan biri bo‘lgan **munosabatlar** tushunchasi predmetlar va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to‘liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo‘la oladi:

............kichik ....dan, ...teng ....ga,
............bo‘linadi ....ga va hokazo.

Bundan keyin munosabatlar tushunchasi to‘plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan turib o‘rganiladi.

Munosabatlar tushunchasini aniqlash uchun **tartiblangan juftlik** tushunchasiga aniqlik kiritaylik. Ma’lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilgan elementga tartiblangan juftlik deyiladi. Matematikada tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega bo‘ladi deb farz qilinadi:

1) Har qanday (istalgan) x va y predmetlar uchun ma’lum ob’ekt mavjud, qaysikim $<x,y>$ kabi belgilanadi, x va y larning tartiblangan juftligi deb o‘qiladi. Har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $<x,y>$ juftlik mos keladi.

2)Ikkita $<x,y>$ va $<u,v>$ tartiblangan juftliklar berilgan bo‘lsin. Agar $x=u$ va $y=v$ bo‘lsa, u vaqtda $<x,y>=<u,v>$ bo‘ladi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ quyidagi to‘plamdir

$$<x,y>=\{\{x\},\{x,y\}\},$$

ya’ni shunday ikki elementli to‘plamdirki, uning bitta elementi $\{x,y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, ikkinchisi esa $\{x\}$ shu tartibsiz juftlikning qaysi a’zosi birinchi hisoblanishi kerakligini ko‘rsatadi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ ning x predmeti birinchi koordinatasi, y predmeti bo‘lsa, ikkinchi koordinatasi deb aytiladi.

Tartiblangan juftliklar terminida tartiblangan n-liklarni aniqlash mumkin. x, y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $< x, y, z >$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $<< x, y >, z >$. Xuddi shunday $x_1, x_2, ...$ va x_n predmetlarning tartiblangan n-ligi $< x_1, x_2, ..., x_n >$, ta'rifga asosan, $<< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >, x_n >$ tarzda aniqlanadi.

Elementlari tartiblangan juftliklardan iborat bo‘lgan to‘plamga tartiblangan juftliklar to‘plami deb aytiladi.

Binar munosabatni tartiblangan juftliklar to‘plami sifatida aniqlaymiz. Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u vaqtda $< x, y > \in \rho$ va $x \rho y$ ifodalarni o‘zaro almashuvchi ifodalar deb hisoblaymiz. $x \rho y$ ifodani “predmet x predmet y ga nisbatan ρ munosabatda” deb o‘qiladi.

Quyidagi $x = y$, $x < y$, $x \equiv y$ belgilar xudi $x \rho y$ ifodadan kelib chiqqan.

n-ar munosabati tartiblangan n-liklar to‘plami sifatida aniqlanadi. 3-ar munosabatni ko‘pincha adabiyotda ternar munosabat deb ham yuritiladi.

Misollar. 1. $\{< 2,4 >, \ < 5,6 >, \ < 7,6 >, \ < 8,8 >\}$ tartiblangan juftliklar to‘plami binar munosabatga misol bo‘la oladi.

2.Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u vaqtda $< x, y > \in \rho$ degani $x \equiv y$ ni bildiradi.

3.Ternar munosabatiga butun sonlar to‘plamidagi qo‘shish amali misol bo‘la oladi. $5 = 2 + 3$ yozuvini $< 5, 2, 3 > \in +$ shaklida ham yozish mumkin.

Bundan keyin binar munosabat termini o‘rniga qisqalik uchun munosabat terminini ishlatamiz.

$\{x / x \in A\}$ cimvolini quyidagicha tushunish kerak: $\{$Shunday x lar to‘plamiki, $x \in A\}$.

$\{x /$ ayrim y uchun $< x, y > \in \rho\}$ to‘plami ρ munosabatning aniqlanish sohasi deyiladi va D_ρ cimvoli bilan belgilanadi. $\{y /$ ayrim x uchun $< x, y > \in \rho\}$ to‘plami ρ munosabatning qiymatlar sohasi deyiladi va R_ρ simvoli bilan belgilanadi. Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tuzilgan to‘plamga aytiladi, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to‘plamga esa, qiymatlar sohasi deb aytiladi.

Misol: $\{<2,4>,\ <3,3>,\ <6,7>\}$ ρ munosabat berilgan bo‘lsin. U vaqtda $D_\rho=\{2,3,6\}$, $R_\rho=\{4,3,7\}$.

Biror C to‘plam $<x,y>$ tartiblangan juftliklar to‘plami bo‘lsin. Agarda x biror X to‘plamning elementi va y boshqa Y to‘plamning elementi bo‘lsa, u vaqtda C to‘plam X va Y to‘plamlarning to‘g‘ri (dekart) ko‘paytmasidan tuzilgan to‘plam deyiladi va

$$C = X\times Y = \{<x,y>/\, x\in X \text{ i } y\in Y\}$$

shaklida belgilanadi.

Har bir ρ munosabat ayrim olingan $X\times Y$ to‘g‘ri ko‘paytmaning qism to‘plami bo‘ladi va $X\supseteq D_\rho$, $Y\supseteq R_\rho$. Agar $\rho\subseteq X\times Y$ bo‘lsa, u vaqtda ρ X dan Y ga bo‘lgan munosabat deb aytiladi. Agar $\rho\subseteq X\times Y$ va $Z\supseteq X\cup Y$ bo‘lsa, u vaqtda ρ dan Z ga bo‘lgan munosabat deb aytiladi. Z dan Z ga bo‘lgan munosabatni Z ichidagi munosabat deb aytiladi.

X qandaydir to‘plam bo‘lsin. U vaqtda X ichidagi $X\times X$ munosabatni X ichidagi universal munosabat deb aytiladi.

$\{<x,x>/\, x\in X\}$ munosabat X ichidagi ayniyat munosabati deb aytiladi va i_x yoki i simvoli bilan belgilanadi. Har qanday X to‘plamining x va y elementlari uchun $x\ i_x\ y$ ifoda $x=y$ bilan teng kuchlidir.

A to‘plam va ρ munosabat berilgan bo‘lsin. U vaqtda $\rho[A]=\{y/A$ ning ayrim x lari uchun $x\rho y\}$. Bu to‘plamga A to‘plam elementlarining ρ - obrazlari to‘plami deb aytiladi.

Misollar. $y=2x+1$ to‘g‘ri chiziqni $\{<x,y>\in R\times R/\ y=2x+1\}$ va $y<x$ munosabatini $\{<x,y>\in R\times R/\ y<x\}$ shakllarda yozish mumkin.

2. Ekvivalentlik munosabati

2.1-ta’rif. *Agarda X to‘plamning istalgan x elementi uchun $x\rho x$ bo‘lsa, u vaqtda ρ munosabatiga X to‘plamidagi refleksiv munosabat deb aytiladi; agarda $x\rho y$ dan $y\rho x$ kelib chiqsa, u holda ρ - simmetrik munosabat deb aytiladi; agarda $x\rho y$ va $y\rho z$ dan $x\rho z$ kelib chiqsa, u vaqtda ρ - tranzitiv munosabat deb aytiladi.*

Shu ko‘rsatilgan uchala xossaga ega bo‘lgan munosabatlar matematikada ko‘p uchragani uchun, ularga maxsus nom qo‘yilgan.

2.2-ta’rif. *Agarda biror to‘plamdagi munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega bo‘lsa, u vaqtda bunday munosabatga shu to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati deyiladi.*

Agarda ρ munosabati X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, u vaqtda $D_\rho = X$.

Misollar. Quyidagi har bir munosabat ma’lum to‘plamdagi ekvivaletlik munosabatiga misol bo‘la oladi:

1.Istalgan to‘plamdagi tenglik munosabati.

2.Уevklid tekisligining hamma uchburchaklar to‘plamidagi o‘xshashlik munosabati.

3.Butun sonlar to‘plamidagi n moduli bo‘yicha taqqoslama munosabati.

Ekvivalentlik munosabati shunday asosiy xususiyatga egaki, u to‘plamni kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘ladi. Keyingi misolga, masalan, “bir uyda yashovchilar” munosabati O‘zbekistonni bir-biri bilan kesishmaydigan “bir uyda yashovchilar” qism to‘plamlariga bo‘ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

ρ X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. U vaqtda X to‘plamining A qism to‘plami faqat shundagina ekvivalentlik sinfi yoki ekvivalentlik ρ - sinfi deb aytiladi, qachonki A to‘plamining shunday x elementi topilib, $A = \{y / x \rho y\}$ bo‘lsa.

Shunday qilib, X to‘plamning shunday x elementi mavjud bo‘lsaki, $A = \rho[\{x\}]$ tenglik bajarilsa, u vaqtda A to‘plam ekvivalentlik sinfi bo‘la oladi.

Agarda ρ munosabati to‘g‘risida hech qanday anglashmovchilik tug‘ilmaydigan bo‘lsa, u vaqtda X to‘plami $[x]$ shaklida belgilanadi, ya’ni $\rho[\{x\}] = [x]$ va x yuzaga keltirgan ekvivalentlik sinfi deb aytiladi.

Ekvivalentlik sinfi quyidagi ikki xususiyatga egadir:

1. $x \in [x]$ - bir sinfning hamma elementlari o‘zaro ekvivalentdir.

2. Agar $x \rho y$ bo‘lsa, u vaqtda $[x] = [y]$.

1-xossa ekvivalentlik munosabatining refleksivlik xususiyatidan kelib chiqadi.

2-xossaning isboti: $x\rho y$ bo‘lsin, ya’ni x y ga ekvivalent bo‘lsin, u vaqtda $[y]\subseteq[x]$. Haqiqatan ham, $z\in[y]$ ($y\rho z$ ni bildiradi) dan va $x\rho z$ bo‘lganligi uchun ρ munosabatining tranzitiv xususiyatiga asosan $x\rho z$ kelib chiqadi, ya’ni $z\in[x]$. Ekvivalentlik munosabatining simmetriklik xossasidan foydalanib, $[x]\subseteq[y]$ ni isbot etish mumkin. Demak, $[x]=[y]$.

3. Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozitsiyasi.

Funksiya tushunchasini oldingi paragraflarda o‘rganilgan terminlarda aniqlaymiz. Funksiyaning grafigi tartiblangan juftliklar to‘plamidan iborat. Funksiya bilan uning grafigi o‘rtasida hech qanday farq yo‘q. Funksiya shunday munosabatki, uning ikki xil elementining birinchi koordinatalari hech qachon teng bo‘lmaydi.

Shunday qilib, f munosabati quyidagi talablarni qanoatlantirgandagina funksiya bo‘la oladi:

1. f ning elementlari faqatgina tartiblangan juftliklardan iborat.

2. Agar $<x,y>$ va $<x,z>f$ elementlari bo‘lsa, u vaqtda $y=z$.

Misol: 1. $\{<1,2>,\ <2,2>,\ <3,4>$ funsksiyadir. $D_s=\{1,2,3\}$ $R_s=\{2,4\}$.

2. $\{<3,4>,\ \ <3,5>,\ \ <4,6>\}$ munosabati funksiya bo‘la olmaydi, chunki $<3,4>$ va $<3,5>$ elementlarining birinchi koordinatalari teng.

3. $\{<x,x^2+x+1>/x\in R\}$ funksiyadir, chunki agar $x=u$ bo‘lsa, u vaqtda $x^2+x+1=u^2+u+1$.

4. $\{<x^2,x>/x\in R\}$ funksiya bo‘la olmaydi, chunki uning $<1,1>,\ <1,-1>$ elementlari mavjud.

Agar f - funksiya va $<x,y>\in f$ bo‘lsa, ya’ni $x f y$ bo‘lsa, u vaqtda x funksiyaning argumenti deb aytiladi va y ni f funksiyaning x dagi qiymati yoki x elementining obrazi deyiladi.

y ni belgilash uchun xf, $f(x)$, fx yoki x^f simvollarni ishlatadilar. $f(x)$ cimvolni $f(x)=f[\{x\}]$ deb, ya’ni x elementining f-obrazlari to‘plami deb qarash mumkin.

Ikki f va g funksiyalar bir xil elementlardan tuzilgan bo‘lsa, bunday funksiyalar teng bo‘ladi $(f = g)$, ya’ni boshqacha qilib aytganda, $D_f = D_g$ va $f(x) = g(x)$ bo‘lsagina, $f = g$ bo‘ladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun aniqlanish sohasi va shu sohaning har bir elementi uchun uning qiymati berilishi kerak.

$\{< x, x^2 + x + 1 > / x \in R\}$ dan $f(x) = x^2 + x + 1$ kelib chiqadi.

Agar f funksiyaning aniqlanish sohasi $R_s \subseteq Y$ bo‘lsa, u vaqtda funksiyaning o‘zgarish sohasi Y to‘plami ichida bo‘ladi deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f : X \to Y \text{ yoki } X \xrightarrow{f} Y.$$

Уuqorida ko‘rsatilgan hamma f to‘plami $(X \times Y)$ to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi va uni Y^x deb belgilaymiz.

Agar $X = \phi$ bo‘lsa, u vaqtda Y^x faqatgina bir elementdan iborat bo‘ladi va u $X \times Y$ to‘plamning bo‘sh qism to‘plamidir.

Agar $Y = \phi$ va $X \neq \phi$ bo‘lsa, u vaqtda $Y^x = \phi$.

Agar $x_1 \neq x_2$ dan $f(x_1) \neq f(x_2)$ kelib chiqsa, u vaqtda f bir qiymatli funksiya deyiladi.

Ikkita f va g funksiyalar berilgan bo‘lsin. f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb quyidagi $gof = \{< x, z >$ shunday y mavjudki, $x f y$ va $y g z\}$ to‘plamga aytiladi va gof simvoli bilan belgilanadi. Bu to‘plam ham funksiya bo‘ladi.

Shunday qilib, funksiyalarning superpozitsiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$gof = z = g(f(x))$$

Funksiyalarning superpozitsiyasi funksiyalarning funksiyasi deb ham aytiladi.

$y = \sin x$ va $z = \ln y$ bo‘lsin, u vaqtda $z = \ln \sin x$ funksiya $\sin x$ va $\ln y$ funksiyalarning superpozitsiyasidir.

Superpozitsiya amali assotsiativlik qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$go(fon) = gof(oh).$$

Agar $f : x \to y$ va $g : y \to z$ bo‘lsa, u holda $gof : x \to z$ va $(gof)(x) = g(f(x))$ bo‘ladi.

Agar f bir qiymatli funksiya bo‘lsa, u vaqtda f dan koordinatalarini o‘rnini almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan funksiyaga f funksiyasiga teskari bo‘lgan funksiya deb aytiladi va f^{-1} cimvoli bilan belgilanadi.

Faqatgina bir qiymatli funksiyalar uchun bajariladigan bu amalga qaytarish amali deyiladi.

f^{-1} ning aniqlanish sohasi $D_{f^{-1}} = R_f, \; R_{f^{-1}} = D_f.$

4. Tartiblash munosabati

4.1-ta’rif. *Agar biror X to‘plamdagi x va y elementlari uchun $y \rho x$ munosabat o‘rniga $x \rho y$ munosabat o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatuvchi munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Tartiblash munosabati yordamida elementlarni qaytartibda qo‘yish masalasini hal etish mumkin. Haqiqiy sonlar to‘plami uchun $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ munosabatlari tartiblash munosabatlariga misol bo‘la oladi. To‘plamlar sistemasi uchun xuddi shunday rolni $\subset, \subseteq$ munosabatlar o‘ynaydi.

4.2-ta’rif. *Agar X to‘plamining istalgan x va y elementlari uchun bir vaqtda $x \rho y$ va $y \rho x$ bajarilishidan $x = y$ kelib chiqsa, bunday ρ munosabat antisimmetrik munosabat deb aytiladi.*

4.3-ta’rif. *X to‘plam ichida refleksivlik, antisimmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo‘lgan ρ munosabatga X to‘plamdagi qisman tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Har qanday refleksiv va tranzitiv munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.

Qisman tartiblash munosabati $\leq$ simvoli bilan belgilanadi. Agar $\leq$ munosabati X to‘plamni qisman tartiblasa, u vaqtda X to‘plamning istalgan x va y elementlari uchun $x \leq y$ munosabati bajarilishi ham mumkin, bajarilmasligi ham mumkin.

Xuddi shunday, agar $x \leq y$ va $x \neq y$ bo‘lsa, u vaqtda $x < y$ deb yoziladi va x y dan kichik deb aytiladi.

4.4-ta’rif. *X to‘plamning har qanday x elementi uchun $x \rho x$ munosabat bajarilmasa, u vaqtda ρ X to‘plamdagi irrefleksiv munosabat deb aytiladi.*

Agar ≤ munosabati X to‘plamdagi qisman tartiblash munosabati bo‘lsa, u vaqtda < munosabati X to‘plamidagi irrefleksiv va tranzitiv munosabat bo‘ladi.

4.5-ta’rif. *ρ munosabat qisman tartiblash munosabati bo‘lsin. ρ munosabatning aniqlanish sohasiga qarashli har qanday ikki xil x va y elementlari uchun $e\,x\rho y$ yoki $e\,y\rho x$ o‘rinli bo‘lsa, bunday munosabatga chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Haqiqiy sonlarni qiymatiga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo‘la oladi.

4.6-ta’rif. *Agar biror X to‘plamda qisman tartiblash munosabati berilgan bo‘lsa, bunday to‘plamga qisman tartiblangan to‘plam deb aytiladi va u $< x,\leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo‘ladi.*

Agar X to‘plamda oddiy tartiblash munosabati berilgan bo‘lsa, u vaqtda X oddiy tartiblangan to‘plam deb aytiladi va u ham $< x,\leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo‘ladi. Bu yerda ≤ X to‘plamini oddiy (chiziqli) tartiblaydi.

Masalan, agar f to‘plamlar sistemasi bo‘lsa, u vaqtda $< f,\subseteq >$ qisman tartiblangan to‘plam bo‘ladi.

$f : x \to x^1$ funksiyasi X to‘plamining ≤ tartiblash munosabatiga va X^1 to‘plamining $\leq^1$ tartiblash munosabatiga nisbatan shundagina tartibini saqlaydigan funksiya bo‘ladi, qachonki $x \leq y$ dan $f(x) \leq^1 f(y)$ kelib chiqsa, X va X_1 to‘plamlar o‘rtasidagi o‘zaro bir qiymatli bog‘lanish $< x,\leq >$ va $< x^1, \leq^1 >$ ga qisman tartiblangan to‘plamlar o‘rtasidagi izomorfizm deb aytiladi. Agar shunday bog‘lanish mavjud bo‘lsa, u vaqtda ko‘rsatilgan qisman tartiblangan to‘plamlar izomorfdir.

X to‘plamning hamma x lari uchun $y \leq x$ bo‘lsa, u vaqtda X to‘plamning y elementi X to‘plamning qisman tartiblash munosabati ≤ ga nisbatan eng kichik elementi deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

X to‘plamning hech bir x elementi uchun $x < y$ munosabati bajarilmasa, u vaqtda X to‘plamning u elementi shu to‘plamning qisman tartiblash ≤ munosabatiga nisbatan minimal (eng kichik) elementi deb aytiladi. Minimal element berilgan to‘plamda bir nechta bo‘lishi mumkin.

Agar har qanday $x \in y$ uchun $x \le y$ bo‘lsa, u vaqtda X to‘plamning y elementi shu to‘plamning ≤ munosabatiga nisbatan eng katta elementi deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo‘lsa, u ham yagonadir.

X to‘plamning hech bir x elementi uchun $x > y$ munosabati bajarilmasa, u vaqtda X to‘plamning u elementi shu to‘plamning ≤ munosabatiga nisbatan **maksimal** elementi deb aytiladi.

Agar X to‘plamning har bir bo‘sh emas qism to‘plami eng kichik elementga ega bo‘lsa, u vaqtda $< x, \le >$ qisman tartiblangan to‘plamga to‘liq tartiblangan to‘plam deb aytamiz. Masalan, {0,1,2,...}.

Agar $< x, \le >$ qisman tartiblangan va $A \subseteq X$ bo‘lsin. U vaqtda istalgan $a \in A$ uchun $a \le x$ bajarilsa, X to‘plamning x elementi A to‘plamning yuqori chegarasi deb aytiladi.

Xuddi shunday, agar istalgan $a \in A$ uchun $x \le a$ bajarilsa, x elementi A to‘plamning quyi chegarasi deb aytiladi.

Agar M tartiblangan to‘plam bo‘lsa, u holda uning M^1 qism to‘plami ham tartiblangan bo‘ladi. Agar bu tartiblangan to‘plam chiziqli bo‘lsa, u vaqtda M^1 qism to‘plam M to‘plamning **zanjiri** deyiladi.

$l = |M^1| - 1$ ga zanjirning uzunligi deb aytiladi. Bu yerda $|M^1|$- chiziqli tartiblangan M^1 qism to‘plamning **quvvati**. l uzunlikdagi har bir zanjir $1, 2, ..., l+1$ butun sonli zanjirga izomorfdir.

M to‘plamning eng katta elementini m_i bilan va eng kichik elementini m_0 bilan belgilaymiz.

M tartiblangan to‘plam m_i elementining **balandligi** $d(m_i)$ deb $m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_i$ (M to‘plamning) zanjirlar uzunligining maksimumiga $(l_{\max})$ aytiladi. M tartiblangan to‘plam uzunligi $d(M)$ deb M to‘plamdagi zanjirlar uzunligining maksimumiga aytiladi, ya’ni tartiblangan M to‘plamning uzunligi $d(M)$ uning elementlari balandligi $d(m_i)$ ning maksimumiga teng bo‘ladi.

$$d(M) = \max\ d_i(m_i), \qquad m_i \in M .$$

5. Panjara haqida tushunchalar

Qisman tartiblangan to‘plam tushunchasidan foydalanib, panjara tushunchasini aniqlaymiz.

5.1-ta’rif. *Tartiblangan to‘plam* $<M, \leq>$ *ning istalgan ikkita* m_i, m_j *elementlari orasida* $m_i \cap m_j$ *(eng katta quyi yoq) va* $m_i \cup m_j$ *(eng kichik yuqori yoq) munosabatlar mavjud bo‘lsa, bunday to‘plam panjara deb ataladi.*

Ravshanki, M panjara ikki taraflama bo‘lgan $\overline{M}$ tartiblangan to‘plam ham panjara bo‘ladi. $\overline{M}$ panjaradan kesishma amalini birlashmaga va birlashma amalini kesishma amaliga o‘zgartirish kerak. Tartiblangan to‘plamning hamma qism to‘plamlari eng katta quyi va eng kichik yuqori chegaraga ega bo‘lsa, u holda bunday to‘plamga to‘liq panjara deb aytiladi.

Panjarani signaturalari quyidagi xususiyatlarga ega bo‘lgan $A = <M, \cup, \cap>$ algebra sifatida ham aniqlash mumkin:

1. $m \cup m = m$, $m \cap m$ - idempotentlik;
2. $m_i \cup m_j = m_j \cup m_i$, $m_i \cap m_j = m_j \cap m_i$ - kommutativlik;
3. $(m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k)$,
   $(m_i \cup m_j) \cup m_k = m_i \cup (m_j \cup m_k)$ - assotsiativlik;
4. $m_i \cup (m_i \cap m_j = m_i$, $m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i$ - yutish.

Panjaraga berilgan ikkala ta’rif ham ekvivalentdir.

Bundan keyin 0 va 1 larni panjaraning strukturali nuli va biri deb bilamiz.

Agar A^1 har bir $m_1, m_j \in A$ juft elementlar bilan birgalikda ularning yig‘indisi $m_i \cup m_j$ va ko‘paytmasi $m_i \cap m_j$ larni ham o‘z ichiga olsa, u holda A^1 ga A panjaraning qism panjarasi deb aytiladi. Eng katta m_β elementi va eng kichik m_α elementlardan iborat A^1 qism panjaraga I interval deb aytiladi:

$$\mathrm{I} = [m_\alpha, m_\beta] = \{m_i \in A^1 / m_\alpha \quad m_i \leq m_\beta\}.$$

Agar

$$m_\alpha \cap m_\beta = 0, \qquad m_\alpha \cup m_\beta = 1$$

bo‘lsa, u holda nol va bir strukturali A panjarada ikkita m_α va m_β elementlar qo‘shimcha (to‘ldiruvchi) elementlar bo‘ladi. m ga qo‘shimcha bo‘lgan $\overline{m}$ elementga A panjaradagi m elementning to‘ldiruvchisi deb ham aytiladi.

A panjarada umumiy to‘ldiruvchiga ega bo‘lgan ikki elementga A da bog‘langan elementlar deb aytiladi.

Panjaralar sinfining eng muhimi distributiv panjaralardir. Quyidagi ayniyatlarni (hamma $m_i, m_j, m_k \in A$ lar uchun) qanoatlantiruvchi A panjaraga

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j \cap m_k \ ,$$

$$m_k \cap (m_i \cup m_j) = m_k \cap m_i \cup m_k \cap m_j$$

distributiv panjara deb aytiladi.

Panjaraning distributivlik kriteriyasi: panjara shunda va faqat shundagina distributiv panjara bo‘ladi, qachonki A panjaraning har bir I intervalida istalgan ikkita bog‘langan (I da) elementi teng bo‘lsa.

Dedekind (modulyar) panjara degan tushuncha kiritamiz. A panjara shunda va faqat shundagina dedekind panjarasi bo‘ladi, qachonki hamma $m_i, m_j, m_k \in A$ va $m_j \le m_k$ lar uchun

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_i$$

munosabat bajarilsa.

Panjaraning dedekindlik kriteriyasi: A panjara dedekind panjara bo‘lishi uchun, A_m panjaraga izomorf bo‘lgan qism panjara mavjud bo‘lmasligi yetarli va zarur.

A_m panjara bitta nol balandlikdagi element, ikkita bir balandlikdagi element, bitta ikki balandlikdagi va bitta uch balandlikdagi elementni o‘z ichiga oladi.

Panjaraning modulyarlik kriteriyasidan foydalanib, **distributivlik kriteriyasini** qulay hisoblash shaklini hol uchun keltiramiz:

panjara shunda va faqat shundagina distributiv bo‘ladi, qachonki u A_m ga izomorf bo‘lgan qism panjarani o‘z ichiga olmasa, ya’ni dedekind bo‘lsa va A_g qism panjaraga izomorf bo‘lgan qism panjarani o‘z ichiga olmasa (1,b-shakl).

A_g panjara bitta nol balandlikdagi elementdan, bir balandlikdagi uchta elementdan va ikki balandlikdagi bitta elementdan iborat ikki uzunlikdagi uchta zanjirdan tuzilgan.

0 va 1 strukturali A panjaraning har bir $\overline{m}$ elementining to‘ldiruvchisi mavjud bo‘lsin. U vaqtda bu panjarada $f_1(m) = \overline{m}$ unar operatsiya berilgan desa bo‘ladi. Agar yuqorida aks ettirilgan xususiyatlarga ega bo‘lgan A panjarada

$$\overline{\overline{m}} = m \,, \qquad \text{(a)}$$

$$\overline{m_i \cup m_j} = \overline{m_i} \cap \overline{m_j} \,, \qquad \text{(b)}$$

$$m \cap \overline{m} = 0 \qquad \text{(v)}$$

munosabatlar bajarilsa, u holda A panjaraga to‘ldiruvchili (to‘ldiruvchisi bor) panjara deb aytiladi.

(a) va (b) larga asosan $\cup$ operatsiya $\cap$ bilan va $\cap$ operatsiya $\cup$ bilan ifodalanishi mumkin. Demak, to‘ldiruvchili panjarani signaturasi $\cup$, - bo‘lgan algebra sifatida aniqlash mumkin.

(a)-(b) munosabatlardan quyidagilar kelib chiqadi ($1 = \overline{0}$ desak):

$$0 \cap m = 0 \,, \qquad 0 \cup m = m \,,$$

$$1 \cap m = m \,, \qquad 1 \cup m = 1 \,,$$

$$m \cup \overline{m} = 1 \,.$$

Demak, 1-panjaraning eng katta elementi, ya’ni strukturasi bir bo‘ladi.

To‘ldiruvchili distributiv panjara Bul algebrasi bo‘ladi.

5.1-teorema. *Bul algebrasi Kantor algebrasiga izomorfdir.*

Bul va Kantor algebralari o‘rtasida quyidagi izomorfizm mavjud:

$$a \cup b \quad M_a \cup M_b, \quad a \cap b \quad M_a \cap M_b, \quad \overline{a} \quad \overline{M_a},$$

Bu yerda ifodalarning chap tomonida - nazariy - panjaraviy va o‘ng tomonida - nazariy - to‘plam operatsiyalari.