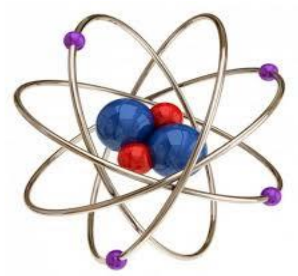
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
1930



Qayd raqami_____

“Tasdiqlayman”
O’quv ishlari bo’yicha prorektor
_____________ R.G'. Jumayev
2022 yil “______” avgust

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

“DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ ” fanidan

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi: 600000 – Axborot kommunikatsiya texnologiyalari

Ta’lim sohasi: 610 000 – Axborot kommunikatsiya texnologiyalari

Ta’lim yo‘nalishi: 60610200 –Axborot tizimlari va texnologiyalari (tarmoqlar va sohalar bo‘yicha)

60610100 –Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari (yo’nalishlar bo‘yicha)

Buxoro-2022

Ushbu majmua BuxDUning ___ yil _______dagi __-sonli buyrug‘ining __-ilovasi bilan tasdiqlangan namunaviy o‘quv dasturi asosida tuzilgan.

Tuzuvchi:

U.U. Umarova – BuxDU, Matematik analiz kafedrasi katta o’qituvchisi

Sh.B. Do’stova – BuxDU, Matematik analiz kafedrasi o’qituvchisi

Taqrizchilar:

Sh.B. Latipov - SamDU, Funksional analiz kafedrasi dotsenti.

Fanning o’quv-uslubiy majmuasi Matematik analiz kafedrasining 2022 yil __ ___________dagi 1-sonli yig’ilishida ko’rib chiqildi va fakultet o’quv-uslubiy Kengashi muhokamasiga tavsiya qilindi.

Kafedra mudiri: E.B.Dilmurodov

Fanning o’quv-uslubiy majmuasi Fizika-matematika fakulteti o’quv-uslubiy Kengashining 2022 yil __ ____________dagi 1-sonli yig’ilishida muhokama qilinib, o’quv jarayoniga tadbiq etish uchun tasdiqlandi.

Fakultet dekani: H.O.Jo`rayev

BuxDU oquv metodik Kengashi raisi ___________________________

BuxDU oquv metodik Kengashi bayonnomasi ____________________

BuxDU ARM rahbari ____

Fanning o‘quv uslubiy majmuasi BuxDU o‘quv uslubiy Kengashining ___ yil _______dagi __-sonli bayoni bilan tasdiqlangan.

MUNDARIJA

I. MA’RUZALAR MATNI.

1-MAVZU	TO‘PLAMLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

REJA:

1.To‘plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari.
2.To‘plamlar ustida amallar.
3.Asosiy tengkuchliliklar.
4.To‘plamlar algebrasi.

To‘plam. –To‘plam elementlari. –Tengkuchli to‘plamlar. –Qism to‘plam. –Xos va xosmas qism to‘plamlar. –Bo‘sh to‘plam. To‘plamlarning birlashmasi. –To‘plamlarning kesishmasi. –To‘plamlarning ayirmasi. –To‘ldiruvchi. –Universal to‘plam.

To‘plamlar nazariyasiga matematik fan sifatida nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) tomonidan asos solingan.

Matematikada doimo turli to‘plamlar bilan uchrashishga to‘g‘ri keladi. Masalan, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, natural sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘plami va hokazo. Umuman to‘plam tushunchasi ayrim-ayrim narsalar, buyumlar, ob’ektlarni birgalikda, ya’ni bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

1-ta’rif. *To‘plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob’ektlar bu to‘plamning elementlari deb aytiladi. To‘plamlar, odatda, lotin yoki grek alfavitining katta harflari bilan belgilanadi.*

A to‘plam $a, b, c, d...$ elementlardan tuzilganligi

$$A = \{a, b, c, d, ...\}$$

ko‘rinishda yoziladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda chekli to‘plamga, ikkinchi holda esa cheksiz to‘plamga ega bo‘lamiz.

Masalan:

1) $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$;
2) $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ - chekli to‘plamlar;
3) $B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$;
4) $C = \{1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...\}$;
5) $D = \{2, 3, 5, 7, ..., P, ...\}$ - cheksiz to‘plamlar.

a narsa A to‘plamning elementi ekanligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi. Birorta b narsa A to‘plamning elementi emasligi $b \overline{\in} A$ yoki $A \overline{\ni} b$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ da $2, 4, 6, ..., 10 \in A$, $12, 14.. \overline{\in} A$.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plamning a elementi B to‘plamning b elementiga teng deb olsak, ya’ni $a = b$, bundan bitta element ikkala to‘plamda ham mavjudligi kelib chiqadi.

Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ va $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to‘plamlarda $2, 4, 6, 8$ elementlar ikkala to‘plamda ham mavjuddir.

2-ta’rif. *A to‘plamning har bir elementi B to‘plamda mavjud, aksincha, B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, A va B to‘plamlarni teng (tengkuchli) deb atab, buni $A=B$ yoki $B=A$ belgi bilan ifodalaymiz.*

Demak, ikkala A va B to‘plamlar aslida bir to‘plamdir.

3-ta’rif. *Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u vaqtda B A ning qism to‘plami deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi.*

$$B \subseteq A \quad \text{yoki} \quad A \supseteq B \qquad (1)$$

Masalan: 1) butun sonlar $\{1, 2, 3, ...\}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi;

2) viloyatlar respublika to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi;

3) toq sonlar butun sonlar to‘plamining qism to‘plamidir va hokazo.

4-ta’rif. *B to‘plamning hamma elementlari A to‘plamda mavjud bo‘lib, shu bilan birga A to‘plamda B ga kirmagan elementlar ham bor bo‘lsa, u vaqtda B - A ning xos qism to‘plami deyiladi va*

$$B \subset A \text{ yoki } A \supset B \qquad (2)$$

kabi belgilanadi.

Demak, $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, u vaqtda

$$A = B. \qquad (3)$$

(3) tenglik A ning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘lishini ko‘rsatadi va bu holatni ifodalash uchun “o‘zining xosmas qismi” degan iboradan foydalanamiz.

Masalan: $A=\{a, b, c, e, d, f, g, h\}$ to‘plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{a, b\}$, $D=\{d, e, f\}$ to‘plamlarning har qaysi xos qismdir.

Odatda, to‘plamlar nazariyasida bitta ham elementi bo‘lmagan to‘plamlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi.

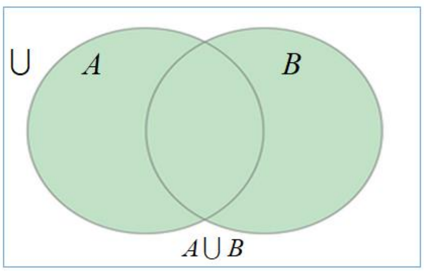
Masalan: $x^2+4=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari bo‘sh to‘plamni tashkil qiladi, chunki $x_{i,2}=\pm 2i$, ya’ni tenglamaning haqiqiy ildizlari mavjud emas.

5-ta’rif. *Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va $\varnothing$* simvol *bilan belgilanadi. $\varnothing$ bo‘sh to‘plam har qanday A to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi va u ham A ning xosmas qismi deyiladi.*

To‘plamlar ustida amallar

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *Berilgan A, B to‘plamlarning yig‘indisi yoki birlashmasi deb, shu to‘plamlarning takrorlanmasdan olinadigan hamma elementlaridan tuzilgan va $A \bigcup B$ kabi belgilanadigan to‘plamga aytiladi.*



1-shakl.

Agar $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, u holda ularning $A \bigcup B$ ig‘indisi quyidagicha yoziladi:

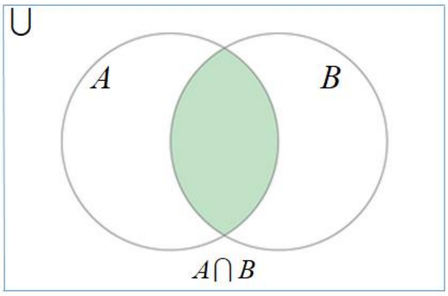
$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n \quad (1)$$

Masalan: $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c,b\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u vaqtda

$A \cup B \cup C = \{a,b,c,d,e,f,k\}$.

2-ta’rif. *Berilgan A, B to‘plamlarning hamma umumiy ele-mentlaridan tuzilgan C to‘plamga A, B to‘plamlarning ko‘paytmasi (kesishmasi yoki umumiy qismi) deyiladi va $C = A \cap B$ ko‘rinishida belgilanadi.*

Agar $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, u holda ularning $C = A \cap B$ ko‘paytmasi quyidagicha yoziladi: $\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n$. (2)

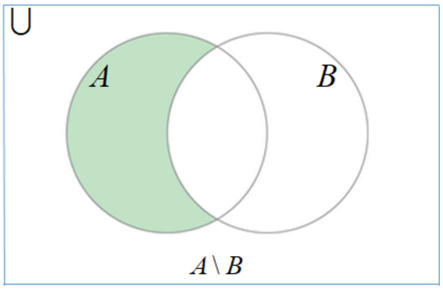


2-shakl.

Masalan: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ bo‘lsa, u vaqtda $C = \{2,4\}$.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan to‘plamlarning kesishmasi ∅ bo‘sh to‘plamga teng bo‘ladi. Masalan, toq sonlar to‘plami bilan juft sonlar to‘plamining kesishmasi bo‘sh to‘plamdir.

3-ta’rif. *A va B to‘plamlarning ayirmasi deb, A ning B da mavjud bo‘lmagan hamma elementlaridan tuziladigan va $C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$ ko‘rinishida yoziladigan C to‘plamga aytiladi.*



3-shakl.

$A = \{1,2,3,4\}$ va $B = \{3,4,5,6\}$ bo‘lsa, u vaqtda $C = \{1,2\}$.

4-ta’rif. *A to‘plamdagi uning B qism to‘plamiga kirmay qolgan hamma elementlaridan tuzilgan qism to‘plamga B ning A to‘plamigacha to‘ldiruvchisi deb aytiladi va $\overline{B}$ (B') ko‘rinishda belgilanadi.*

$A = \{1,2,3,4,5,6...\}$ natural sonlar to‘plami va $B = \{2,4,6,8...\}$ juft sonlar to‘plami bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B} = \{1,3,5,7...\}$ bo‘ladi, ya’ni $B \cup \overline{B} = A$.

$\overline{B}$ to‘plam B ni A gacha to‘ldiradi.

Ushbu tengliklarni keltirib chiqarish mumkin.

$\overline{B} \cap B = \varnothing$, $B \cup \overline{B} = A$. $B - \overline{B} = B$, $\overline{B} - B = \overline{B}$.

5-ta’rif. *Biror to‘plamning xos qismi deb qaralmagan har bir to‘plamni universal to‘plam deb atab, uni $\bigcup$ harfi bilan belgilaymiz.*

Ta’rifga binoan, $\bigcup$ ning hamma qismlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi $\bigcup$ ning o‘zi, ikkinchisi $\varnothing$ bo‘sh to‘plam, qolganlari xos qismlardan iborat.

2-MAVZU	MUNOSABATLAR. BINAR MUNOSABATLAR MAXSUS BINAR MUNOSABATLAR. EKVIVALENTLIK MUNOSABATI. TARTIB MUNOSABATLAR TURLARI

REJA:

1.Munosabatlar. Binar munosabat.
2.Ekvivalentlik munosabati. Refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar.
3.Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozi siyasi.
4.Tartiblash munosabati.

Munosabat. –Tartiblangan juftlik. –Unar va binar munosabat. –n-ar munosabat. –Aniqlanish sohasi. –Qiymatlar sohasi. Refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar. –Ekvivalentlik sinfi. Funksiya. –Tartiblangan juftlik. –Funksiyalar tengligi. –Bir qiymatli funksiya. –Superpozitsiya. –Funksiyalarning funksiyasi. –Teskari funksiya.

Diskret matematikada fundamental tushunchalardan biri bo‘lgan **munosabatlar** tushunchasi predmetlar va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to‘liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo‘la oladi:

............kichik ....dan, ...teng ....ga,
............bo‘linadi ....ga va hokazo.

Bundan keyin munosabatlar tushunchasi to‘plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan turib o‘rganiladi.

Munosabatlar tushunchasini aniqlash uchun **tartiblangan juftlik** tushunchasiga aniqlik kiritaylik. Ma’lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilgan elementga tartiblangan juftlik deyiladi. Matematikada tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega bo‘ladi deb farz qilinadi:

1) Har qanday (istalgan) x va y predmetlar uchun ma’lum ob’ekt mavjud, qaysikim $<x,y>$ kabi belgilanadi, x va y larning tartiblangan juftligi deb o‘qiladi. Har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $<x,y>$ juftlik mos keladi.

2)Ikkita $<x,y>$ va $<u,v>$ tartiblangan juftliklar berilgan bo‘lsin. Agar $x=u$ va $y=v$ bo‘lsa, u vaqtda $<x,y> = <u,v>$ bo‘ladi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ quyidagi to‘plamdir

$$<x,y> = \{\{x\},\{x,y\}\},$$

ya’ni shunday ikki elementli to‘plamdirki, uning bitta elementi $\{x,y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, ikkinchisi esa $\{x\}$ shu tartibsiz juftlikning qaysi a’zosi birinchi hisoblanishi kerakligini ko‘rsatadi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ ning x predmeti birinchi koordinatasi, y predmeti bo‘lsa, ikkinchi koordinatasi deb aytiladi.

Tartiblangan juftliklar terminida tartiblangan n-liklarni aniqlash mumkin. x,y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $<x,y,z>$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi:

$<< x, y >, z >$. Xuddi shunday $x_1, x_2,...$ va x_n predmetlarning tartiblangan n-ligi $< x_1, x_2,..., x_n >$, ta'rifga asosan, $<< x_1, x_2,..., x_{n-1} >, x_n >$ tarzda aniqlanadi.

Elementlari tartiblangan juftliklardan iborat bo'lgan to'plamga tartiblangan juftliklar to'plami deb aytiladi.

Binar munosabatni tartiblangan juftliklar to'plami sifatida aniqlaymiz. Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u vaqtda $< x, y > \in \rho$ va $x \rho y$ ifodalarni o'zaro almashuvchi ifodalar deb hisoblaymiz. $x \rho y$ ifodani "predmet x predmet y ga nisbatan ρ munosabatda" deb o'qiladi.

Quyidagi $x = y$, $x < y$, $x \equiv y$ belgilar xudi $x \rho y$ ifodadan kelib chiqqan.

n-ar munosabati tartiblangan n-liklar to'plami sifatida aniqlanadi. 3-ar munosabatni ko'pincha adabiyotda ternar munosabat deb ham yuritiladi.

Misollar. 1. $\{< 2,4 >, \; < 5,6 >, \; < 7,6 >, \; < 8,8 >\}\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabatga misol bo'la oladi.

2.Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u vaqtda $< x, y > \in \rho$ degani $x \equiv y$ ni bildiradi.

3.Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u vaqtda <Xursheda, Iroda> $\in \rho$ simvol Xursheda Irodaning onasi ekanligini bildiradi.

4.Ternar munosabatiga butun sonlar to'plamidagi qo'shish amali misol bo'la oladi. $5 = 2 + 3$ yozuvini $< 5, 2, 3 > \in +$ shaklida ham yozish mumkin.

Bundan keyin binar munosabat termini o'rniga qisqalik uchun munosabat terminini ishlatamiz.

$\{x / x \in A\}$ cimvolini quyidagicha tushunish kerak: { Shunday x lar to'plamiki, $x \in A$ }.

{ x / ayrim y uchun $< x, y > \in \rho$ } to'plami ρ munosabatning aniqlanish sohasi deyiladi va D_ρ cimvoli bilan belgilanadi. { y / ayrim x uchun $< x, y > \in \rho$ } to'plami ρ munosabatning qiymatlar sohasi deyiladi va R_ρ simvoli bilan belgilanadi. Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga aytiladi, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga esa, qiymatlar sohasi deb aytiladi.

Misol: $\{< 2,4 >, \; < 3,3 >, \; < 6,7 >\}$ ρ munosabat berilgan bo'lsin. U vaqtda $D_\rho = \{2,3,6\}$, $R_\rho = \{4,3,7\}$.

Biror C to'plam $< x, y >$ tartiblangan juftliklar to'plami bo'lsin. Agarda x biror X to'plamning elementi va y boshqa Y to'plamning elementi bo'lsa, u vaqtda C to'plam X va Y to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasidan tuzilgan to'plam deyiladi va

$$C = X \times Y = \{< x, y > / x \in X \text{ i } y \in Y\}$$

shaklida belgilanadi.

Har bir ρ munosabat ayrim olingan $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmaning qism to'plami bo'ladi va $X \supseteq D_\rho$, $Y \supseteq R_\rho$. Agar $\rho \subseteq X \times Y$ bo'lsa, u vaqtda ρ X dan Y ga bo'lgan munosabat deb aytiladi. Agar $\rho \subseteq X \times Y$ va $Z \supseteq X \bigcup Y$ bo'lsa, u vaqtda ρ dan Z ga bo'lgan munosabat deb aytiladi. Z dan Z ga bo'lgan munosabatni Z ichidagi munosabat deb aytiladi.

X qandaydir to'plam bo'lsin. U vaqtda X ichidagi $X \times X$ munosabatni X ichidagi universal munosabat deb aytiladi.

$\{< x, x > / x \in X\}$ munosabat X ichidagi ayniyat munosabati deb aytiladi va i_x yoki i simvoli bilan belgilanadi. Har qanday X to'plamining x va y elementlari uchun $x \; i_x \; y$ ifoda $x = y$ bilan teng kuchlidir.

A to'plam va ρ munosabat berilgan bo'lsin. U vaqtda $\rho[A] = \{y / A$ ning ayrim x lari uchun $x \rho y\}$. Bu to'plamga A to'plam elementlarining ρ - obrazlari to'plami deb aytiladi.

Misollar. $y = 2x+1$ to‘g‘ri chiziqni $\{<x, y> \in R \times R \,/\, y = 2x+1\}$ va $y < x$ munosabatini $\{<x, y> \in R \times R \,/\, y < x\}$ shakllarda yozish mumkin.

Ekvivalentlik munosabati

1-ta’rif. *Agarda X to‘plamning istalgan x elementi uchun $x \rho x$ bo‘lsa, u vaqtda ρ munosabatiga X to‘plamidagi refleksiv munosabat deb aytiladi; agarda $x \rho y$ dan $y \rho x$ kelib chiqsa, u holda ρ - simmetrik munosabat deb aytiladi; agarda $x \rho y$ va $y \rho z$ dan $x \rho z$ kelib chiqsa, u vaqtda ρ - tranzitiv munosabat deb aytiladi.*

Shu ko‘rsatilgan uchala xossaga ega bo‘lgan munosabatlar matematikada ko‘p uchragani uchun, ularga maxsus nom qo‘yilgan.

2-ta’rif. *Agarda biror to‘plamdagi munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega bo‘lsa, u vaqtda bunday munosabatga shu to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati deyiladi.*

Agarda ρ munosabati X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, u vaqtda $D_\rho = X$.

Misollar. Quyidagi har bir munosabat ma’lum to‘plamdagi ekvivaletlik munosabatiga misol bo‘la oladi:

1.Istalgan to‘plamdagi tenglik munosabati.

2.Yevklid tekisligining hamma uchburchaklar to‘plamidagi o‘xshashlik munosabati.

3.Butun sonlar to‘plamidagi n moduli bo‘yicha taqqoslama munosabati.

4.O‘zbekistonda yashovchi odamlar to‘plamidagi “bir uyda yashovchilar” munosabati.

Ekvivalentlik munosabati shunday asosiy xususiyatga egaki, u to‘plamni kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘ladi. Keyingi misolga, masalan, “bir uyda yashovchilar” munosabati O‘zbekistonni bir-biri bilan kesishmaydigan “bir uyda yashovchilar” qism to‘plamlariga bo‘ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

ρ X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. U vaqtda X to‘plamining A qism to‘plami faqat shundagina ekvivalentlik sinfi yoki ekvivalentlik ρ - sinfi deb aytiladi, qachonki A to‘plamining shunday x elementi topilib, $A = \{y \,/\, x \rho y\}$ bo‘lsa.

Shunday qilib, X to‘plamning shunday x elementi mavjud bo‘lsaki, $A = \rho[\{x\}]$ tenglik bajarilsa, u vaqtda A to‘plam ekvivalentlik sinfi bo‘la oladi.

Agarda ρ munosabati to‘g‘risida hech qanday anglashmovchilik tug‘ilmaydigan bo‘lsa, u vaqtda X to‘plami $[x]$ shaklida belgilanadi, ya’ni $\rho[\{x\}] = [x]$ va x yuzaga keltirgan ekvivalentlik sinfi deb aytiladi.

Ekvivalentlik sinfi quyidagi ikki xususiyatga egadir:

1. $x \in [x]$ - bir sinfning hamma elementlari o‘zaro ekvivalentdir.

2. Agar $x \rho y$ bo‘lsa, u vaqtda $[x] = [y]$.

1-xossa ekvivalentlik munosabatining refleksivlik xususiyatidan kelib chiqadi.

2-xossaning isboti: $x \rho y$ bo‘lsin, ya’ni x y ga ekvivalent bo‘lsin, u vaqtda $[y] \subseteq [x]$. Haqiqatan ham, $z \in [y]$ ($y \rho z$ ni bildiradi) dan va $x \rho z$ bo‘lganligi uchun ρ munosabatining tranzitiv xususiyatiga asosan $x \rho z$ kelib chiqadi, ya’ni $z \in [x]$. Ekvivalentlik munosabatining simmetriklik xossasidan foydalanib, $[x] \subseteq [y]$ ni isbot etish mumkin. Demak, $[x] = [y]$.

Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozitsiyasi

Funksiya tushunchasini oldingi paragraflarda o‘rganilgan terminlarda aniqlaymiz. Funksiyaning grafigi tartiblangan juftliklar to‘plamidan iborat. Funksiya bilan uning grafigi o‘rtasida hech qanday farq yo‘q. Funksiya shunday munosabatki, uning ikki xil elementining birinchi koordinatalari hech qachon teng bo‘lmaydi.

Shunday qilib, f munosabati quyidagi talablarni qanoatlantirgandagina funksiya bo‘la oladi:

1. f ning elementlari faqatgina tartiblangan juftliklardan iborat.

2. Agar $<x, y>$ va $<x, z>$ f elementlari bo‘lsa, u vaqtda $y = z$.

Misol: 1. $\{<1,2>$, $<2,2>$, $<3,4>$ funsksiyadir. $D_s = \{1,2,3\}$ $R_s = \{2,4\}$.

2. $\{<3,4>,\ <3,5>,\ <4,6>\}$ munosabati funksiya bo‘la olmaydi, chunki $<3,4>$ va $<3,5>$ elementlarining birinchi koordinatalari teng.

3. $\{<x, x^2+x+1>/x\in R\}$ funksiyadir, chunki agar $x=u$ bo‘lsa, u vaqtda $x^2+x+1=u^2+u+1$.

4. $\{<x^2, x>/x\in R\}$ funksiya bo‘la olmaydi, chunki uning $<1,1>$, $<1,-1>$ elementlari mavjud.

Agar f - funksiya va $<x,y>\in f$ bo‘lsa, ya’ni $x\,f\,y$ bo‘lsa, u vaqtda x funksiyaning argumenti deb aytiladi va y ni f funksiyaning x dagi qiymati yoki x elementining obrazi deyiladi.

y ni belgilash uchun $x\,f$, $f(x)$, $f\,x$ yoki x^f simvollarni ishlatadilar. $f(x)$ cimvolni $f(x)=f[\{x\}]$ deb, ya’ni x elementining f -obrazlari to‘plami deb qarash mumkin.

Ikki f va g funksiyalar bir xil elementlardan tuzilgan bo‘lsa, bunday funksiyalar teng bo‘ladi $(f=g)$, ya’ni boshqacha qilib aytganda, $D_f=D_g$ va $f(x)=g(x)$ bo‘lsagina, $f=g$ bo‘ladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun aniqlanish sohasi va shu sohaning har bir elementi uchun uning qiymati berilishi kerak.

$\{<x, x^2+x+1>/x\in R\}$ dan $f(x)=x^2+x+1$ kelib chiqadi.

Agar f funksiyaning aniqlanish sohasi $R_s\subseteq Y$ bo‘lsa, u vaqtda funksiyaning o‘zgarish sohasi Y to‘plami ichida bo‘ladi deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f:X\to Y \text{ yoki } X\xrightarrow{f}Y.$$

Yuqorida ko‘rsatilgan hamma f to‘plami $(X\times Y)$ to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi va uni Y^x deb belgilaymiz.

Agar $X=\phi$ bo‘lsa, u vaqtda Y^x faqatgina bir elementdan iborat bo‘ladi va u $X\times Y$ to‘plamning bo‘sh qism to‘plamidir.

Agar $Y=\phi$ va $X\neq\phi$ bo‘lsa, u vaqtda $Y^x=\phi$.

Agar $x_1\neq x_2$ dan $f(x_1)\neq f(x_2)$ kelib chiqsa, u vaqtda f bir qiymatli funksiya deyiladi.

Ikkita f va g funksiyalar berilgan bo‘lsin. f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb quyidagi $gof=\{<x,z>$ shunday y mavjudki, $x\,f\,y$ va $y\,g\,z\}$ to‘plamga aytiladi va gof simvoli bilan belgilanadi. Bu to‘plam ham funksiya bo‘ladi.

Shunday qilib, funksiyalarning superpozitsiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$gof=z=g(f(x))$$

Funksiyalarning superpozitsiyasi funksiyalarning funksiyasi deb ham aytiladi.

$y=\sin x$ va $z=\ln y$ bo‘lsin, u vaqtda $z=\ln\sin x$ funksiya $\sin x$ va $\ln y$ funksiyalarning superpozitsiyasidir.

Superpozitsiya amali assotsiativlik qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$go(fon)=gof(oh).$$

Agar $f:x\to y$ va $g:y\to z$ bo‘lsa, u holda $gof:x\to z$ va $(gof)(x)=g(f(x))$ bo‘ladi.

Agar f bir qiymatli funksiya bo‘lsa, u vaqtda f dan koordinatalarini o‘rnini almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan funksiyaga f funksiyasiga teskari bo‘lgan funksiya deb aytiladi va f^{-1} cimvoli bilan belgilanadi.

Faqatgina bir qiymatli funksiyalar uchun bajariladigan bu amalga qaytarish amali deyiladi.

f^{-1} ning aniqlanish sohasi $D_{f^{-1}}=R_f$, $R_{f^{-1}}=D_f$.

Tartiblash munosabati

1-ta'rif. *Agar biror X to'plamdagi x va y elementlari uchun $y \rho x$ munosabat o'rniga $x \rho y$ munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatuvchi munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Tartiblash munosabati yordamida elementlarni qaytartibda qo'yish masalasini hal etish mumkin. Haqiqiy sonlar to'plami uchun $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ munosabatlari tartiblash munosabatlariga misol bo'la oladi. To'plamlar sistemasi uchun xuddi shunday rolni $\subset, \subseteq$ munosabatlar o'ynaydi.

2-ta'rif. *Agar X to'plamining istalgan x va y elementlari uchun bir vaqtda $x \rho y$ va $y \rho x$ bajarilishidan $x = y$ kelib chiqsa, bunday ρ munosabat antisimmetrik munosabat deb aytiladi.*

3-ta'rif. *X to'plam ichida refleksivlik, antisimmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo'lgan ρ munosabatga X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Har qanday refleksiv va tranzitiv munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.

Qisman tartiblash munosabati $\leq$ simvoli bilan belgilanadi. Agar $\leq$ munosabati X to'plamni qisman tartiblasa, u vaqtda X to'plamning istalgan x va y elementlari uchun $x \leq y$ munosabati bajarilishi ham mumkin, bajarilmasligi ham mumkin.

Xuddi shunday, agar $x \leq y$ va $x \neq y$ bo'lsa, u vaqtda $x < y$ deb yoziladi va x y dan kichik deb aytiladi.

4-ta'rif. *X to'plamning har qanday x elementi uchun $x \rho x$ munosabat bajarilmasa, u vaqtda ρ X to'plamdagi irrefleksiv munosabat deb aytiladi.*

Agar $\leq$ munosabati X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati bo'lsa, u vaqtda $<$ munosabati X to'plamidagi irrefleksiv va tranzitiv munosabat bo'ladi.

5-ta'rif. *ρ munosabat qisman tartiblash munosabati bo'lsin. ρ munosabatning aniqlanish sohasiga qarashli har qanday ikki xil x va y elementlari uchun $e\, x \rho y$ yoki $e\, y \rho x$ o'rinli bo'lsa, bunday munosabatga chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Haqiqiy sonlarni qiymatiga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo'la oladi.

6-ta'rif. *Agar biror X to'plamda qisman tartiblash munosabati berilgan bo'lsa, bunday to'plamga qisman tartiblangan to'plam deb aytiladi va u $< x, \leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.*

3-MAVZU	**MULOHAZALAR ALGEBRASI. MULOHAZALAR USTIDA AMALLAR.**

REJA:

1.Mulohaza.

2. Mulohazalar ustida mantiqiy amallar.

Mulohaza. –Absolyut chin (yolg'on) mulohaza. –Qiymatlar satri. –Inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, ekvivalensiya va implikatsiya mantiqiy amallar. –Sheffer amali.

Matematik mantiqning ushbu mulohazalar algebrasi deb atalgan bo'limida asosiy tekshirish ob'ektlari bo'lib gaplar xizmat qiladi. Matematik mantiq har bir gapning ma'nosiga qarab, uning chin, haqqoniy, to'g'ri yoki yolg'on, noto'g'ri bo'lishi bilangina qiziqadi.

Masalan: 1. “Toshkent - O'zbekistonning poytaxti”, “Oy yer atrofida aylanadi” degan gaplar - chindir.

2.“Yer oydan kichik”, “3 > 5” degan gaplarning har biri yolg'ondir.

Shuni ham aytish kerakki, ko‘pgina gaplarning chin yoki yolg‘onligini darhol aniqlash qiyin. Masalan, “Bugungi tun kechagidan qorong‘iroq”, degan gap qaysi vaqtda va qaysi joyda aytilishiga qarab chin ham, yolg‘on ham bo‘lishi mumkin.

1. Oldimga kel. 2. Uyda bo‘ldingmi? 3. Yangi yil bilan. 4. Agar oldin bilsam edim - gaplar chin yoki yolg‘on qiymat qabul qilmaydilar.

Shunday qilib, matematik mantiq: “Har bir gap chin yoki yolg‘on bo‘lish xossasiga ega” deb qabul qiladi.

1-ta’rif. *Faqat chin yoki yolg‘on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga mulohazalar deb aytamiz.*

Demak, har bir mulohaza ma’lum holatda chin yoki yolg‘on qiymatga ega. Bundan keyin, chin qiymatni qisqacha “**ch**” va yolg‘on qiymatni “**yo**” bilan belgilaymiz.

Mulohazalarni belgilash uchun, asosan, lotin alfavitining kichik harflari ishlatiladi:

$$a, b, c, ..., u, v, ..., x, y, z$$

Ma’lum mulohazalar borki, hamma mumkin bo‘lgan holatlarda (vaziyatlarda) chin qiymatni

(yolg‘on) qabul qiladilar. Bunday mulohazalarga absolyut chin (yolg‘on) mulohazalar deb aytiladi.

Mulohazalar algebrasida odatda, konkret mulohazalar bilangina emas, balki har qanday istalgan mulohazalar bilan shug‘ullanadilar. Bu esa o‘zgaruvchi mulohaza tushunchasiga olib keladi. Agar o‘zgaruvchi mulohazani x deb belgilasak, u holda x konkret mulohazalarning istalganini ifodalaydi. Shuning uchun x ikki: “**ch**” va “**yo**” qiymatli o‘zgaruvchini ifodalaydi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ ta o‘zgaruvchi mulohaza berilgan bo‘lsin. Bularning har qaysisi chin va yolg‘on qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun quyidagi qiymatlar satrini tuzish mumkin:

yo, yo, ..., yo,
ch, yo, ..., yo,
yo, ch, ..., yo,
....
ch, ch, ..., ch.

Demak, o‘zgaruvchilar soni n ta bo‘lsa, u vaqtda $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ta qiymatlar satriga ega bo‘lamiz.

$x_1, x_2 : 2^2 = 4$ ta qiymatlar satri.

$x_1, x_2, x_3 : 2^3 = 8$ ta qiymatlar satri.

Matematik mantiqda “emas”, “yoki”, “va”, “agar..., u vaqtda”, “shunda va faqat shundagina...., qachon....” so‘zlar (bog‘lovchilar) mulohazalar orasidagi mantiqiy amallar deyiladi. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan murakkab mulohaza quriladi. Mulohazalar ustidagi bu amallar matematik mantiqning elementar qismi bo‘lgan mulohazalar mantiqi yoki mulohazalar algebrasi deb ataluvchi qismida o‘rganiladi. Har ikkala termin (“mulohazalar mantiqi” va “mulohazalar algebrasi”) sinonim sifatida ishlatiladi, chunki ular mantiqning ma’lum qismini ikki nuqtai nazardan ifodalaydi: bu ham mantiq (o‘z predmetiga ko‘ra), ham algebra (o‘z metodiga ko‘ra).

Mantiqiy amallar asosan 5 ta bo‘lib, ularning ta’riflari quyidagichadir.

1. Inkor amali. Istalgan x o‘zgaruvchili mulohaza bilan birga $\overline{x}$ ko‘rinishida belgilangan ikkinchi o‘zgaruvchili mulohaza berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. *x mulohazaning inkori deb atalgan $\overline{x}$ mulohaza shu bilan xarakterlanadiki, x mulohaza “**ch**” qiymatni qabul qilganda, $\overline{x}$ mulohaza “**yo**” qiymatni qabul qiladi va aksincha.*

Demak, mulohazalar mantiqining eng sodda amali bu inkor amali bo‘lib, oddiy tildagi manfiy sifatdosh “emas” ga to‘g‘ri keladi. Bu amal “—“ simvol bilan belgilanadi. Agar x biror mulohaza, masalan, “bugun havo sovuq” bo‘lsa, u holda $\overline{x}$ - yangi murakkab “bugun havo sovuq emas” mulohazadan iboratdir. $\overline{x}$ mulohaza “x emas” deb o‘qiladi.

Shuning uchun, agar x chin mulohaza bo‘lsa, u vaqtda $\overline{x}$ yolg‘on mulohaza bo‘ladi, va aksincha, x yolg‘on bo‘lsa $\overline{x}$ chindir.

Inkor amalining ta’sirini quyidagi chinlik jadvali ko‘rinishida tasvirlaymiz:

x	$\overline{x}$
ch	yo
yo	ch

Xuddi shu jadvalni inkor amalining ta’rifi sifatida qabul qilamiz va boshqa mantiqiy amallar uchun ham shunga o‘xshash jadvallardan foydalanamiz. Ular **chinlik jadvali** deyiladi. Bu jadvallardan foydalanish qulay bo‘lib, ular matematik mantiqning ko‘p bo‘limlarida ishlatiladi.

2. Kon’yunksiya (mantiqiy ko‘paytma) amali. x va y o‘zgaruvchi mulohazalar ustida bajariladigan kon’yunksiya (lotincha conjunctio - bog‘layman so‘zidan) amalini $\wedge$ ko‘rinishda va bu amal natijasida hosil bo‘lgan yangi murakkab mulohazani $x \wedge y$ ko‘rinishda belgilaymiz.

3-ta’rif. *“Va” bog‘lovchisiga mos keluvchi mantiqiy amalga kon’yunksiya amali deb aytamiz. x va y mulohazalarning kon’yunksiyasi x va y mulohazalar chin bo‘lgandagina chin qiymatni qabul qilib, qolgan hollarda esa, yolg‘on qiymatni qabul qiladi.*

$x \wedge y$ ko‘rinishdagi mulohaza «x va y» deb o‘qiladi. Ko‘rinib turibdiki, bu ta’rif “va” bog‘lovchining ma’nosiga to‘liq to‘g‘ri keladi. Haqiqatan ham “5 soni toq va tub” mulohaza chin, chunki uni tashkil etuvchi “5 soni toq” va “5 soni tub” har ikkala mulohaza ham chin. “10 soni 5 ga bo‘linadi va 7>9” mulohaza yolg‘on, chunki murakkab mulohazani tashkil etuvchilaridan biri, chunonchi “7>9” yolg‘ondir. Kon’yunksiya ta’rifini quyidagi chinlik jadvali ko‘rinishida yozish mumkin:

x	y	$x \wedge y$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	yo
yo	yo	yo

3. Diz’yunksiya (mantiqiy yig‘indi) amali. Mulohaza mantiqida ishlatiladigan uchinchi amal “yoki” bog‘lovchiga to‘g‘ri keladi. Shuni ta’kidlash kerakki, “yoki” bog‘lovchisi o‘zbek tilida ikki xil ma’noda ishlatiladi. Birinchi holda rad etuvchi “yoki”, ikkinchi holda rad etmaydigan “yoki” ma’nosida ishlatiladi. Buning farqi quyidagilardan iborat. Agar x va y mulohazalarning ikkalasi ham yolg‘on bo‘lsa, u holda “x yoki y” mulohaza shubhasiz yolg‘on bo‘ladi. Agar x chin va y yolg‘on (yoki x yolg‘on va y chin) bo‘lsa, u holda “x yoki y” ni chin deb qarash kerak, bu esa o‘zbek tilidagi “yoki” so‘zining ma’nosiga to‘g‘ri keladi. Ammo har ikkala x va y mulohazalar chin bo‘lganda “x yoki y” mulohazalar chin bo‘ladi. Bu vaqtda “x yoki y” mulohazaga qanday qarash kerak?

Masalan, “Bugun yakshanba yoki men kinoga boraman” mulohazani olaylik. Agar bugun yakshanba va men kinoga borsam, u holda bu mulohaza chin yoki yolg‘onmi? O‘zbek tilida “yoki” bog‘lovchisi bir ma’noda, ba’zan esa boshqa ma’noda ishlatiladi. Agar yuqoridagi mulohazani chin deb qarasak, u holda “yoki” ni rad etmaydigan ma’noda, ikkinchi holda “yoki” ni rad etuvchi ma’noda ishlatilayapti deymiz.

4-ta’rif. *Rad etmaydigan ma’noda ishlatiladigan “yoki” mantiqiy amal diz’yunksiya (lotincha disjunctio - farq qilaman so‘zidan) deyiladi. Ikkita x va y mulohazaning diz’yunksiyasi “$x \vee y$” kabi yoziladi va “x yoki y” deb o‘qiladi.*

Ikki x va y mulohazaning diz'yunksiyasi $x \vee y$ murakkab mulohaza bo'lib, u faqat x va y yolg'on bo'lgandagina yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hollarda chin qiymatni qabul qiladi.

Diz'yunksiya amalini quyidagi chinlik jadvali orqali ham ifodalash mumkin:

x	y	$x \vee y$
ch	ch	ch
ch	yo	ch
yo	ch	ch
yo	yo	yo

4. Implikatsiya amali. Quyidagi murakkab mulohazalarni ko'raylik:

1) "Agar 2×5 = 10 bo'lsa, u holda 6×7=42 bo'ladi", 2) "Agar 30 soni 5 ga bo'linsa, u holda 5 juftdir", 3) "Agar 3=5 bo'lsa, u holda 15=17", 4) "Agar 4×3=13 bo'lsa, u holda 9+3=12". Bu mulohazalarning hammasi ham 2 ta elementar mulohazalardan "agar....., u holda......" bog'lovchi yordamida tuzilgan. Bu bog'lovchi mulohazalar mantiqining **implikatsiya** (lotincha implicatio - zich bog'layman so'zidan) amaliga to'g'ri keladi. Implikatsiya amalini $\to$ ko'rinishida belgilaymiz.

5-ta'rif. *Ikki x va y mulohazalarning implikatsiyasi deb shunday mulohazaga aytiladiki, u faqat x chin va y yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan hamma hollarda chindir.*

"$x \to y$" mulohaza "agar x, u holda y" deb o'qiladi. Implikatsiya ta'rifini quyidagi chinlik jadvali ko'rinishida yozish mumkin:

x	y	$x \to y$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	ch
yo	yo	ch

Chinlik jadvalidan ko'rinadiki, yuqoridagi mulohazalarning ikkinchisi yolg'on bo'lib, qolganlari chindir. "$x \to y$" implikatsiya x mulohaza asos (shart, gipoteza, dalil) va u mulohaza esa bu asosning oqibati deb ataladi. Implikatsiya chinlik jadvalining oxirgi ikkita satri shuni ko'rsatadiki, yolg'on asosdan chin xulosa ham, yolg'on xulosa ham kelib chiqar ekan, boshqacha qilib aytganda "yolg'ondan har bir narsani kutish mumkin".

Implikatsiya mulohazalar mantiqining muhim amallaridan biri hisoblanadi. So'zlashuv tilida "agar x, u holda y" ning har xil sinonimlari bor: "x bo'lsa, y bo'ladi", "agar x bo'lsa, u vaqtda y bo'ladi", "x dan y hosil bo'ladi", "x dan y kelib chiqadi", "y, agar x bo'lsa", "x y uchun yetarli shart" va hokazo.

5. Ekvivalentlik (tengkuchlilik) amali. Ko'p murakkab mulohazalar elementar mulohazalardan "zarur va kifoya", "faqat va faqat", "shunda va faqat shundagina, qachonki", ".......bajarilishi yetarli va zarurdir" kabi bog'lovchilari yordamida tuziladi. Bunday bog'lovchilarga mos keladigan mulohazalar mantiqining amali ekvivalentlik deyiladi va "$\leftrightarrow$" kabi belgilanadi. $x \leftrightarrow y$ murakkab mulohaza "**x** ekvivalent **u**" deb o'qiladi.

6-ta'rif. *Murakkab mulohaza $x \leftrightarrow y$ chin bo'ladi, agar x va y lar chin yoki x va y lar yolg'on bo'lsa, boshqa hollarda u yolg'ondir. Boshqacha qilib aytganda faqat va faqat x va y mulohazalar bir xil qiymat qabul qilgandagina $x \leftrightarrow y$ chin bo'ladi.*

Bu ta'rifni quyidagi chinlik jadvali bilan ifodalash mumkin:

x	y	$x \leftrightarrow y$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	yo
yo	yo	ch

$x \leftrightarrow y$ ekvivalentlikka “ x bo‘lsa (bajarilsa), y bo‘ladi (bajariladi) va y bo‘lsa, x bo‘ladi” yoki “ x dan y kelib chiqadi va y dan x kelib chiqadi” degan mulohaza mos keladi, ya’ni $x \leftrightarrow y$ ekvivalentlikka matematikada zaruriy va yetarli shart haqida aytilgan teoremalar mos keladi.

Demak,

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) ga binoan, $x \leftrightarrow y$ ekvivaletlikni ikki tomonli implikatsiya deb atash mumkin.

Mashqlar

1.Quyidagi gaplarning qaysi birlari mulohaza bo‘ladi:

1) Toshkent – O‘zbekiston Respublikasining poytaxti;
2) $\sqrt{5} + 4\sqrt{3 - 30}$;
3) Oy Mars planetasining yo‘ldoshi;
4) $a > 0$.

2.Quyidagi mulohazalarning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlang:

1) $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \quad x \in R\}$;
2) $\{1\} \in N$;

3.Quyidagi implikatsiyalarning qaysi birlari chin bo‘ladi:

1) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 < 3$;
2) agar $2 \times 2 = 4$ bo‘lsa, u holda $2 > 3$;

4-MAVZU	**FORMULALAR. TENG KUCHLI FORMULALAR.**

REJA:

1.Formulalar.
2.Tengkuchli formulalar.
3. Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farq

Formula. –Chinlik jadvali. –Tengkuchli formulalar. –Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farq. –Ayniyat.

Oldingi paragrafda asosan mantiqiy amallarni o‘rganib chiqdik. Endi bu amallar orasida bog‘lanishlar mavjudligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tengkuchli mulohazalar tushunchasini kiritamiz.

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad (1)$$

n ta mulohaza berilgan bo‘lsin.

1-ta'rif. (1) *mulohazalarni inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya mantiqiy amallar vositasi bilan ma'lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohazaga formula deb aytamiz.*

Masalan: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ murakkab mulohazalar formulalar bo'ladilar. Qavslar mulohazalar ustida mantiqiy amallarning qay tartibda bajarilishini ko'rsatadi.

Endi formula tushunchasiga matematik ta'rif beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi.

2-ta'rif. *1) har qanday $x_1, x_2, ..., x_n$ mulohazalarning istalgan biri formuladir;*

2) agar A va B larning har biri formula bo'lsa, u holda ($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \to B$), ($A \leftrightarrow B$) va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) 1 va 2-bandlarda ko'rsatilgan ifodalardan tashqari boshqa hech qanday ifoda formula bo'la olmaydi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Keyinchalik formulani lozim bo'lgandagina $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya shaklida belgilashdan foydalanamiz.

Har qanday formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Buning uchun asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish kerak.

Masalan, $(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$ formulaning chinlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{\overline{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	ch	ch
yo	ch	ch	yo	ch	yo	ch
yo	yo	ch	yo	ch	yo	ch

Shunday qilib, har qanday formulaga {ch, yo} to'plamining bir elementi mos qilib qo'yiladi.

3-ta'rif. *A va B formulalar berilgan bo'lsin.* (1) *elementar mulohazalarning har bir qiymatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo'lsa, A va B formulalarga tengkuchli formulalar deb aytiladi va bu $A = B$ tarzda belgilanadi.* (1) *qatorning kamida bitta qiyatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo'lmasa, u holda A va B formulalarga tengkuchlimas formulalar deb aytiladi va $A \neq B$ ko'rinishda belgilanadi.*

A va B formulalarning tengkuchli bo'lish-bo'lmasligi ular uchun tuzilgan chinlik jadvallari yordamida aniqlanadi.

Misollar. 1. $\overline{x} \vee y = A$ va $B = x \to y$ formulalar berilgan bo'lsin.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \to y$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, to'rtala qiymatlar satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, ta'rifga asosan $A = B$.

2. $x \vee x = x$ tengligi isbot etilsin. $A = x \vee x$, $B = x$.

x	$x \vee x$
ch	ch

yo	yo

Demak, jadvalga asosan $A = B$

3. $A = (x \vee \overline{x}) \wedge y$, $B = y$.

x	y	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$	$(x \vee \overline{x}) \wedge y$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	yo

Demak, $(x \vee \overline{x}) \wedge y = y$.

Xuddi shunday quyidagi tengkuchliliklarni isbotlash mumkin:

4. $x \vee \overline{x} = y \vee \overline{y}$, 5. $x \vee (x \wedge y) = x$,

6. $(x \vee \overline{x}) \to y = (x \wedge \overline{x}) \vee y$, 7. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farqni tushunish uchun ularni algebraik tenglama va ayniyat bilan solishtiramiz. Tenglama (masalan, $2x + y = 10$) deb shunday harflarning ayrim qiymatlari (masalan, $x = 4$, $y = 2$) uchun bajarib, boshqa qiymatlar (masalan, $x = 1$, $y = 2$) uchun bajarilmaydi. Shunga o‘xshash ekvivalentlik $A \leftrightarrow B$ deb, shunday (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) mulohazaga aytiladiki, unga $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning o‘rinlariga bir xil konkret mulohazalar qo‘yganda u chin qiymat qabul qilib, boshqa konkret qiymatlar qo‘yganda yolg‘on qiymatni qabul qiladi. Ayniyat deb, shunday tenglikka (masalan, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$) aytiladiki, unda qatnashadigan barcha harflar uchun bajariladi. Shunga o‘xshash, $A \equiv B$ mulohazada qatnashadigan barcha $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning o‘rniga ixtiyoriy konkret mulohazalarni qo‘yganda u chin qiymat qabul qilsa, bunday mulohaza tengkuchlilik deyiladi.

Algebrada ayniy ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo‘lganidek, mantiq algebrasida tengkuchli mulohazalarni (formulalarni) ham bir-biri bilan almashtirish mumkin. Bu esa murakkab formulalarni (mulohazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.

Biz tenglama va ayniyat bilan ekvivalentlik va tengkuchlilik orasidagi o‘xshashlikni keltirdik. Endi esa ular orasidagi farqni ko‘rsatamiz. Ma’lumki, algebrada hech qanday almashtirish yordamida tenglikni amallar (qo‘shish, ayirish, darajaga ko‘tarish, bo‘lish va hokazo) bilan almashtirib bo‘lmaydi. Mantiq algebrasida esa ekvivalentlikni implikatsiya $(\to)$ yoki kon’yunksiya $(\wedge)$, diz’yunksiya $(\vee)$ va inkor $(-)$ amallari orqali ifodalash mumkinligini biz yuqorida ko‘rsatgan edik (1-§ dagi (1) formulaga qarang). (1) formulaning to‘g‘riligini chinlik jadvali orqali ko‘rsatamiz.

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$
ch	ch	ch	ch	ch	ch
yo	ch	ch	yo	yo	yo
ch	yo	yo	ch	yo	yo
yo	yo	ch	ch	ch	ch

Jadvaldan ko‘rinadiki, oxirgi ikki ustunning chinlik qiymati ustma-ust tushadi. Shu bilan (1) formula isbotlanadi.

Oddiy algebrada tenglik belgisi «=» quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi: 1) ixtiyoriy a son uchun $a = a$ (refleksivlik); 2) agar $a = b$ bo‘lsa, u holda $b = a$ (simmetriklik); 3) agar $a = b$, $b = c$ bo‘lsa, u holda $a = c$ (tranzitivlik) bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, mulohazalar algebrasida, ekvivalentlik ta’rifidan osonlik bilan ko‘rish mumkinki, u refleksiv, simmetrik va tranzitiv, ya’ni

1) ixtiyoriy x mulohaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikki x va y mulohazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo‘lsa, u holda $y \equiv x$;

3) ixtiyoriy x, y, z uchta mulohazalar uchun $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo‘lsa, u holda $x \equiv z$.

5-MAVZU	**ASOSIY TENGKUCHLILIKLAR**

REJA:

1.Aynan chin, aynan yolg‘on formulalar.
2. Bajariluvchi formulalar.
3.Asosiy tengkuchliliklar.
4.Tengkuchli formulalarga doir teoremalar.

Aynan chin. –Aynan yolg‘on. –Tavtalogiya. –Bajariluvchi formula. –Mantiq qonunlari. –Yechilish muammosi. Asosiy tengkuchliliklar. –$\vee$, $\wedge$, - amallar qatnashgan mulohazalar. –Kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik qonunlari.
–Idempotentlik va yutish qonunlari.

1-ta’rif. *Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat chin qiymatni qabul qiluvchi formula aynan chin (doimo chin) formula yoki tavtologiya deb ataladi va J bilan belgilanadi.*

A formulaning tavtologiya ekanligi yoki emasligi qiymatlar jadvalini tuzish orqali bilinadi.

Misollar:

1. $J = x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Haqiqatan:

x	y	$x \to y$	$x \wedge (x \to y)$	$x \wedge (x \to y) \to y$
ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	yo	ch
yo	yo	ch	yo	ch

2. $J = (\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ formula ham tavtalogiyadir:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$
ch	ch	yo	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch	ch

2-ta’rif. *Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat yolg‘on qiymatni qabul qiluvchi formulalar aynan yolg‘on (doimo yolg‘on) yoki bajarilmaydigan formulalar deyiladi va $\bar{J}$ bilan belgilanadi.*

Masalan, $\bar{J} = (\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ aynan yolg‘on formuladir:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$\overline{x \to y}$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo

ch	yo	yo	yo	yo	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch	yo	yo
yo	yo	ch	ch	ch	yo	yo

Ma'lumki, aynan chin formulaning inkori aynan yolg'on formula bo'ladi va aksincha. Aynan chin va aynan yolg'on formulalar unga kiradigan o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lmay, faqat bitta qiymat qabul qiladi.

3-ta'rif. *Agar* $(A \leftrightarrow B)$ *tavtologiya bo'lsa, u holda* A *va* B *lar mantiqiy ekvivalent deb aytiladi. Agar* $(A \to B)$ *tavtologiya bo'lsa, u holda* B A *ning mantiqiy xulosasi deb aytiladi.*

Endi E.Mendelsonning [39] kitobida bayon etilgan tavtologiyalarga tegishli ayrim teoremalarni keltiramiz:

1-teorema. *Agar* A *va* $A \to B$ *aynan chin formulalar (tavtologiyalar) bo'lsa, u holda* B *formula ham tavtologiya bo'ladi.*

Isbot. A va $A \to B$ tavtalogiyalar bo'lsin. A va B formulalarning tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilarning biror qiymatlar satrida B formula yolg'on qiymat qabul qilsin. A formula tavtologiya bo'lganligi uchun o'zgaruvchilarning o'sha qiymatlar satrida A chin qiymat qabul qiladi. U vaqtda ($A \to B$) formula yolg'on qiymat qabul qiladi. Bu natija ($A \to B$) ning tavtologiya degan farazimizga qarama-qarshidir. Demak, B tavtologiyadir.

2-teorema. *Agar* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan* A *formula tavtologiya va* B *formula* A *formuladan* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilar o'rniga mos ravishda* $A_1, A_2, ..., A_n$ *formulalarni qo'yish natijasida hosil etilgan bo'lsa, u holda* B *formula tavtologiya bo'ladi, ya'ni tavtologiyada o'rniga qo'yish yana tavtologiyani keltiradi.*

Isbot. A tavtologiya bo'lsin va B formula tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchi mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlar satri berilgan bo'lsin. U vaqtda $A_1, A_2, ..., A_n$ formulalar $y_1, y_2, ..., y_n$ (har bir x_i **ch** yoki **yo** qiymat qabul qiladi) qiymatlar qabul qiladilar. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ larga mos ravishda $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlarni bersak, u holda A ning natijaviy qiymati B ning chinlik qiymatiga mos keladi. A tavtologiya bo'lganligi uchun B formula tarkibiga kirgan o'zgaruvchilarning berilgan ixtiyoriy qiymatlar satrida **ch** qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, B doimo **ch** qiymat qabul qiladi va u tavtologiya bo'ladi.

3-teorema. *Agar* A_1 *formula tarkibiga bir yoki ko'p marta kirgan* A *formula o'rniga* B *formulani qo'yish natijasida* B_1 *formula hosil etilsa, u holda* $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ *tavtologiya bo'ladi. Demak,* A *va* B *lar mantiqiy ekvivalent bo'lsa, u holda* A_1 *va* B_1 *ham mantiqiy ekvivalent bo'ladi.*

Isbot. Agar A va B formulalar o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida qarama-qarshi chinlik qiymatlariga ega bo'lsa, u holda $(A \leftrightarrow B)$ ning chinlik qiymati **yo** bo'ladi va natijada $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula **ch** qiymat qabul qiladi. Agar A va B lar o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida bir xil chinlik qiymati qabul qilsalar, u holda A_1 va B_1 formulalar ham bir xil chinlik qiymati qabul qiladilar, chunki teoremaning shartiga asosan B_1 formula A_1 formuladan A ning o'rniga B ni qo'yish natijasida hosil etilgan. Demak, bu holda $(A \leftrightarrow B)$ ham, $(A_1 \leftrightarrow B_1)$ ham **ch** qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula ham **ch** qiymat qabul qiladi.

Demak, $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula tavtologiya bo'ladi.

4-ta'rif. *Elementar mulohazalarning kamida bitta qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiluvchi va aynan chin bo'lmagan formulaga bajariluvchi formula deb aytiladi.*

Masalan. 1. $(\overline{x \wedge \overline{y}}) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge y)$; 2. $[(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)] \to \overline{z}$; 3. $x \vee y$; 4. $x \to y \leftrightarrow z$ formulalar bajariluvchi formulalar hisoblanadi.

Aynan chin formulalar katta ahamiyatga ega bo‘lib, ular mantiq qonunlarini ifodalaydi. Shu munosabat bilan quyidagi masala tug‘iladi: shunday metodni topish kerakki, u chekli miqdordagi amal yordamida mantiq algebrasining ixtiyoriy muayan formulasini aynan chin yoki aynan chin emasligini aniqlasin. Bunday metod yechiluvchi metod yoki algoritm, yoki yechiluvchi protsedura deyiladi. Qo‘yilgan masalaning o‘zi esa **“yechilish muammosi”** deyiladi. Bu muammo faqatgina mulohazalar algebrasi uchungina emas, balki boshqa mantiqiy sistemalar uchun ham qo‘yiladi. U mulohazalar algebrasi uchun ijobiy ravishda yechiladi. Bu yerda yechiluvchi protsedura sifatida chinlik jadvalini olishimiz mumkin, chunki bunday jadval har bir muayan formula uchun qo‘yilgan savolga javob beradi. Agar berilgan formulaga mos keladigan jadvalning oxirgi ustunida faqat “chin” bo‘lsa, u holda bu formula aynan “chin”, agar oxirgi ustunda hech bo‘lmaganda bitta “yolg‘on” bo‘lsa, u holda formula aynan chin emas bo‘ladi. Tabiiyki, amalda bu usulni har doim bajarib bo‘lmaydi (chunki formulada n ta o‘zgaruvchi qatnashsa, bunday jadval 2^n ta satrga ega bo‘ladi). Lekin har doim chekli miqdordagi amal bajarib, prinsip jihatdan qo‘yilgan savolga javob berish mumkin. Keyingi paragraflarda boshqa bir yechiluvchi protsedurani keltiramiz, u berilgan formulani normal shaklga keltirishga asoslangan. Normal shakllar matematik mantiqning boshqa masalalarida ham ishlatiladi.

Asosiy tengkuchliliklar

Bu paragrafda keng qo‘llaniladigan tengkuchliliklar qaraladi. Avvalo, oddiy algebrada ma’lum bo‘lgan ayniyatlarga o‘xshashlarini keltiramiz. Ma’lumki, qo‘shish va ko‘paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga bo‘ysunadi:

1) $x+y=y+x$ (qo‘shishning kommutativlik qonuni);
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (qo‘shishning assotsiativlik qonuni);
3) $xy=yx$ (ko‘paytirishning kommutativlik qonuni);
4) $(xy)z=x(yz)$ (ko‘paytirishning assotsiativlik qonuni);
5) $x(y+z)=xy+xz$ (ko‘paytirishning yig‘indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o‘xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar o‘rinlidir:

$$x\wedge y=y\wedge x \qquad (3)$$

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z) \qquad (4)$$

$$x\vee y=y\vee x \qquad (5)$$

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z) \qquad (6)$$

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \qquad (7)$$

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z) \qquad (8)$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo‘ladi. Bu yerda biz (8)ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

x	y	z	$y\wedge z$	$x\vee y$	$x\vee z$	$x\vee(y\wedge z)$	$(x\vee y)\wedge(x\vee z)$	$x\vee(y\wedge z)\equiv$ $\equiv(x\vee y)\wedge(x\vee z)$
yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	ch
yo	yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	ch
yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	ch	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	ch	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch

Diz’yunksiya $(\vee)$ amali kommutativlik va assotsiativlik xossasiga egadir. (7)-(8) tengkuchliliklar esa $\wedge$ va $\vee$ amallarning bir-biriga nisbatan distributiv xossasiga ega ekanligini ko‘rsatadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, (8) tengkuchlilikka o‘xshash oddiy algebrada ayniyat yo‘q (chunki $x + yz = (x + y)\ (x + z)$ ayniyat emas). Yuqoridagi o‘xshashlik asosida $x \vee y$ ni mantiqiy yig‘indi, $x \wedge y$ ni esa mantiqiy ko‘paytma deb olishimiz mumkin. Bu o‘xshashlikni kuchaytirish uchun, algebraik ko‘paytmada nuqta $(\cdot)$ yozilmaganidek (masalan, $x \cdot y = xy$), mantiqiy ko‘paytirish belgisi $(\wedge)$ ni yozmaymiz, ya’ni $x \wedge y$ ning o‘rniga xy ni yozamiz. Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda qavslarni kamaytirish maqsadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo‘lsa, uni qavssiz yozamiz, ya’ni $\overline{(x \vee y)} \wedge z$ ning o‘rniga $\overline{x \vee y} \wedge z$ ni, yoki $\overline{x \vee y}\, z$ ni yozamiz.

2) kon’yunksiya belgisi diz’yunksiya, implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(xy) \vee z$ o‘rniga $xy \vee z$, $x \to (yz)$ o‘rniga $x \to yz$, $(xy) \leftrightarrow (zu)$ o‘rniga $xy \leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz’yunksiya belgisi implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x \vee y) \to z$ o‘rniga $x \vee y \to z$ va $(x \vee y) \leftrightarrow z$ o‘rniga $x \vee y \leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikatsiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x \to y) \leftrightarrow z$ o‘rniga $x \to y \leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi, masalan,

$$(((x \leftrightarrow y) \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (((\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \to z)))\text{ o‘rniga}$$

$$(x \leftrightarrow y) \to \overline{xz} \leftrightarrow x\,\bar{y} \vee \bar{x}y \vee (x \to z) \text{ ni yozamiz.}$$

Yuqoridagi (1)-tengkuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\to$ va $\wedge$ belgilari orqali ifodalashimiz mumkin. Endi $x \to y$ implikatsiyani ko‘raylik. Faqatgina x chin va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x} \vee y$ mulohaza yolg‘on, bundan esa faqatgina x chin (ya’ni $\bar{x}$ yolg‘on) va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x} \vee y$ mulohaza yolg‘on bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, yana bir tengkuchlilikka ega bo‘lamiz:

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilarni o‘z ichiga olgan ixtiyoriy murakkab mulohazani unga tengkuchli bo‘lgan shunday mulohaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashgan mulohazalarga ega bo‘lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiqi uchun katta ahamiyatga ega, chunki u yerda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va $-$ belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni o‘chirish qonuni deb ataluvchi $\bar{\bar{x}} = x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \qquad (12)$$

va shunga o‘xshash

$$x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo‘lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va $-$ yoki $\vee$ va $-$ belgilar qatnashadi. Shunga o‘xshash barcha mantiq amallarni $\to$ va $-$ amallar bilan almashtirish mumkin.

Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x} \equiv x|x, \quad x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y), \quad \overline{x \wedge y} \equiv x|y, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y}, \quad x \to y \equiv x|\bar{y}.$$

Bu tengkuchliliklarni, Sheffer amali ta’rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida osongina ko‘rsatish mumkin.

Endi misol sifatida $(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va $-$ belgilar qatnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \to \bar{y})\cdot(\bar{y} \to \bar{x}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,(\bar{y} \vee x) \to (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(x \vee \bar{y})\,(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y)\cdot(\bar{y} \vee x).$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x}\cdot y \vee \bar{y}\cdot x \vee \bar{x}\cdot\bar{y} \vee x\cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Endi shunday savol tug‘iladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita ($-$, $\wedge$) yoki hatto bitta $\bar{\bar{x}} = x$ ga keltirishning hojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda cho‘zilib ketadi va uni ko‘zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\to$ amaliga tegishlidir. Yana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$x \cdot \bar{x} \equiv$ yo (qarama-qarshilik qonuni) (14)

$x \vee \bar{x} \equiv$ yo (uchinchisi istisno qonuni) (15)

$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ (idempotentlik qonuni) (16)

$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x$ (yutish qonunlari) (17)

$x \vee$ yo $\equiv x$, $x \vee$ ch $\equiv$ ch, $x \cdot$ ch $\equiv x$, $x \cdot$ yo $\equiv$ yo (18)

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko‘rinishga keltirishga imkon beradi.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Mulohaza. Mulohazalar ustida qanday mantiqiy amallar bajariladi?
2.Formulalar. Tengkuchli formulalarni keltiring.
3.Aynan chin, aynan yolg‘on va bajariluvchi formulalarning ta’riflarini keltiring.
4.Asosiy tengkuchliliklarni isbotlang.
5.Tengkuchli formulalarga doir teoremalarni isbotlang.

6-MAVZU	**MULOHAZALAR ALGEBRASI FORMULALARINING NORMAL FORMALARI.**

REJA:

1. Elementar kon’yunksiya
2. Elemenar diz’yunksiya
3. Kon’yunktiv normal shakl
4. Diz’yunktiv normal shakl
5. Mukammal kon’yunktiv normal shakl
6. Mukammal diz’yunktiv normal shakl

Elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya). –KNSh. –DNSh. –Teoremalar. –Formulaning doimo chin bo'lishining yetarli va zaruriy sharti. MKNSh. –MDNSh. –To'liq va to'g'ri elementar kon'yunksiyalar (diz'yunksiyalar). –Formulani MKNSh (MDNSh)ga keltirish algoritmi.

Tengkuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\overline{A} \to$VS formulani $A \vee BC$ yoki $(A \vee B)\,(A \vee C)$ ko'rinishlarda yoza olamiz.

Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & агар \quad \sigma = ч, \\ \overline{x}, & агар \quad \sigma = ё. \end{cases}$$

σ^{σ} = ch ekanligi aniq.

1-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar kon'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.*

2-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar diz'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.*

3-ta'rif. *Elementar diz'yunksiyalarning kon'yunksiyasiga formulaning kon'yunktiv normal shakli (KNSh) va elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.*

KNShga $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$ formula va DNShga $x\,y \vee \overline{x}z \vee x\overline{y}z$ formula misol bo'la oladi.

1-teorema. *Elementar mulohazalarning har bir* P *formulasiga tengkuchli kon'yunktiv normal shakldagi* Q *formula mavjud.*

Bu teoremani isbotlashda ushbu tengkuchliliklardan foydalanamiz:

1. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; 2. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

3. $A \to B = \overline{A} \vee B$; 4. $\overline{A \to B} = A \wedge \overline{B}$; (3)

5. $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$; 6. $\overline{A \leftrightarrow B} = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.

Isbot. P formula normal kon'yunktiv shaklda bo'lmasa, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) P dagi elementar mulohazalar $\wedge$ va $\vee$ amallari bilangina birlashtirilgan bo'lsa ham, lekin $\wedge$ so'nggi amalni ifodalamaydi. Bu holda $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ distributivlik qonunidan foydalanib, so'nggi amali $\wedge$ dan iborat tengkuchli Q formulaga keltiramiz.

b) P formula $-$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ mantiqiy amallar vositasida tuzilgan qandaydir formulani ifodalasin. U holda P ga (3) tengkuchliliklarni tatbiq etib P bilan tengkuchli va $-$, $\vee$, $\wedge$ bilan ifodalangan P^1 formulani hosil qilamiz. Agar P^1 KNSh ko'rinishida bo'lmasa, unga $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ distributivlik qonunini tatbiq etib, chekli qadamlardan keyin P bilan tengkuchli Q kon'yunktiv normal shakldagi formulaga kelamiz.

Izoh. P *formulani kon'yunktiv normal shaklga keltirish jarayonida*

$A \wedge A = A$, $\quad A \vee A = A$, $\quad A \wedge J = A$, $\quad A \wedge J = J$,

$$A \wedge \bar{J} = \bar{J}, \quad A \vee \bar{J} = A, \quad A \vee \bar{A} = J \qquad (4)$$

tengkuchliliklardan foydalanib, uni soddalashtirish mumkin.

Misollar. 1. $P = [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee [x \wedge (\bar{x} \vee y)]$

$$P = \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee x\} \wedge \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee (\bar{x} \vee y)\} =$$

$$= [(x \vee y) \vee x] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x] \wedge [(x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)] =$$

$$= (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) = (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J = x \vee y;$$

$$P = x \vee y.$$

Shunday qilib, P formulaning KNSh bittagina diz'yunktiv $(x \vee y)$ haddan iborat ekan.

P formulasi tavtologiya ekanligini chinlik jadvaliga murojaat qilmay turib aniqlash mumkinmi degan savolga quyidagi **chinlik alomati** deb atalgan teorema ijobiy javob beradi.

2-teorema. *P formula doimo chin bo'lishi uchun uning KNSh dagi har bir elementar diz'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot: a) P formulaning

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \qquad (5)$$

KNSh dagi har bir A_i hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lsin, ya'ni $A_i = x \vee \bar{x} \vee y \vee ...... \vee u$ shaklida bo'lsin, u holda $x \vee \bar{x} = J$ va $J \vee A = J$ larga asosan $A_i = J \vee (y \vee .... \vee u \vee V) = J$ bo'ladi.

Demak, $P = J \wedge J \wedge ... \wedge J = J$ bo'ladi, ya'ni aynan chin formula bo'ladi.

b) Endi P - tavtologiya bo'lsin va A_i uning KNSh dagi shunday elementar diz'yunktiv hadi bo'lsinki, unda birorta elementar mulohaza bilan birga uning inkori qatnashmagan bo'lsin. Masalan, $A_i = x \vee \bar{y} \vee ..... \vee u$ shaklida bo'lsin. Endi, elementar mulohazalarning shunday qiymatlar satrini olaylikki, bu satrda x ning qiymati yo, y ning qiymati ch, z ning qiymati yo,......, u ning qiymati yo bo'lsin. U vaqtda

$$A_i = x \vee \bar{y} \vee ..... \vee u = \text{yo} \vee \text{ch} \vee ..... \vee \text{yo} = \text{yo} \vee .... \vee \text{yo} = \text{yo}.$$

Demak, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ ning qiymati ham yolg'on bo'ladi. Ammo, teoremaning shartiga asosan P ning qiymati aynan chindir. Natijada qarama-qarshilikka keldik. Demak, elementar diz'yunksiyalarning har bir hadida birorta mulohaza o'zi va o'zining inkori bilan qatnashishi shart.

Misol. 1. $P = x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$.

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ - aynan chindir.

2. $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ - aynan chin formuladir.

Diz'yunktiv normal shakl

Eslatib o'tamizki, elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.

1-teorema. *Elementar mulohazalarning istalgan P formulasini DNShga keltirish mumkin.*

Isbot. Buning uchun $\bar{P}$ formulani KNShga keltiramiz:

$$\bar{P} = A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m$$

va so'ngra $\bar{P}$ ning inkorini topganimizda formula DNSh ko'rinishiga keladi:

$$\bar{\bar{P}} = P = \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ...... \wedge A_m} = \bar{A_1} \vee \bar{A_2} \vee ...... \vee \bar{A_m}.$$

Endi **yolg'onlik alomati** deb atalgan teoremani isbotlaymiz.

2-teorema. *P formula aynan yolg'on bo'lishi uchun, uning diz'yunktiv normal shaklidagi har bir elementar kon'yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. a) P-doimo yolg‘on bo‘lsa, u holda $\overline{P}$ - aynan chin bo‘ladi. Demak, $\overline{P}$ ning KNSh dagi har bir elementar diz’yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga uning inkori ham mavjud bo‘ladi. Shuning uchun $\overline{\overline{P}} = P$ ning DNSh dagi har bir kon’yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo‘ladi.

b) Endi har bir elementar kon’yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo‘lsin, ya’ni

$A_i = x_i \wedge \overline{x_i} \wedge y_i \wedge \ldots\ldots \wedge z_i$ bo‘lsin, u vaqtda $A_i = 0$ va

$$P = 0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = 0.$$

Demak, P doimo yolg‘on formuladir.

Misol. $P = \overline{\overline{\overline{(\bar{x} \wedge x)} \to \overline{\bar{y} \wedge y}}} = \overline{(\bar{x} \wedge x)} \vee \overline{\bar{y} \wedge y} = (\bar{\bar{x}} \vee \bar{x}) \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{y} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$

$\overline{P} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y})$ - aynan chin.

$P = (\bar{x} \wedge x) \wedge (\bar{y} \wedge y)$ - aynan yolg‘on.

3-teorema. *Elementar mulohazalarning har bir P formulasi uchun yechilish muammosi yechiladigandir.*

Isbot. 1. P ni KNShga keltirgandan keyin, aynan chin bo‘lish - bo‘lmasligi darhol aniqlanadi.

2. P aynan chin bo‘lmasa, uni DNSh ga keltirib, aynan yolg‘on bo‘lish - bo‘lmasligini aniqlaymiz.

3. P doimo chin va doimo yolg‘on bo‘lish shartlarini qanoatlantirmasa, u holda bu formula bajariluvchi bo‘ladi.

Demak, elementar mulohazalar formulasining aynan chin, aynan yolg‘on yoki bajariluvchi formula bo‘lishini chekli qadamlar protsessida aniqlash mumkin. Shuning uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.

2-teorema. *n ta elementar mulohazalarning aynan yolg‘on formulasidan farqli har bir A formulasini mukammal diz’yunktiv normal shaklga keltirish mumkin.*

Isbot. Berilgan formulani A bilan belgilab, avvalo $\overline{A}$ ni mukammal kon’yunktiv normal shaklga keltiramiz

$$\overline{A} = \wedge\left(x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots \vee x_n^1\right)$$

Bundan $\overline{\overline{A}} = A$ ning MDNSh ni topamiz

$$A = \wedge\left(\overline{x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots\ldots \vee x_n^1}\right) = \vee\left(\bar{x}_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \ldots\ldots \wedge \bar{x}_n\right)$$

Misol. $A = [(\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$

$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}) \wedge$

$\wedge (x \vee \bar{z} \vee u) \vee (y \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \bar{z} \vee u \vee \bar{y})$

7-MAVZU	FORMULALARNING ASOSIY XOSSALARI. FORMULALARNING CHINLIK TO’PLAMI

REJA:

1. Chinlik jadvali bo‘yicha formulani tiklash
2. Formulalarning asosiy xossalari
3. Tengkuchlimas formulalar soni

4. Formulaning chinlik to‘plami

Chinlik jadvali bo‘yicha formulani tiklash. –Formulani o‘zgaruvchilar bo‘yicha qatorga yoyish. –Chinlik jadvali bo‘yicha formulani MKNSh (MDNSh) ko‘rinishda yozish. Chinlik to‘plami. –Mantiqiy amallarning chinlik to‘plamlari

1. Chinlik jadvali bo‘yicha formulani tiklash. Ma’lumki, berilgan formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Formulaning chinlik jadvalini tuzishni bilamiz.

Endi teskari masala bilan shug‘ullanaylik, ya’ni berilgan chinlik jadvali bo‘yicha formulani topishni maqsad qilib qo‘yaylik. Masalan, x va y elementar mulohazalarning quyidagi chinlik jadvallariga ega bo‘lgan A, B, C, D formulalarni topaylik:

1-jadval

x	y	A	B	C	D	AVB	AVC	AVD	BVD	$AVBVC$	AVBVCVD
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Bundan keyin biror mulohazaning “chin” qiymatini “1” va “yolg‘on” qiymatini “0” deb belgilaymiz. Ma’lumki,

$$A = x \wedge y; \quad B = x \wedge \bar{y}; \quad C = \bar{x} \wedge y; \quad D = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad (1)$$

(1) formulalarning har qaysisi uchun jadvalning, mos ravishda, 1,2,3,4, satrida “1” qiymat va qolgan satrlarida “0” qiymat turadi.

(1) formulalar ikki mulohazali kon’yunktiv konstituentlardan iborat.

Endi shunday formulalarni topaylikki, ular uchun jadvalning 2 satrida “1” qiymat va ikki satrida “0” qiymat turgan bo‘lsin. Bu talabga quyidagi formulalar javob beradi

$$A \vee B = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}); \quad A \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y);$$

$$A \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}); \quad B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \text{ va h.k.}$$

Shunday qilib, ushbu qoida o‘rinli: 2 va 4 - satrda “1”, 1 va 3 - satrlarda “0” qiymatga ega bo‘lgan formulani hosil qilish uchun, bittasining “1” qiymati xuddi 2-satrda va ikkinchisining “1” qiymati xuddi 4-satrda turgan ikki kon’yunktiv konstituent diz’yunksiyasini olamiz.

$$B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Xuddi shunday, 1-jadvaldagi uchta kon’yunktiv konstituent diz’yunksiyasi uchta satrda “1” qiymatga va bitta satrda “0” qiymatga ega bo‘lgan formulani tasvirlaydi. Masalan,

$$A \vee B \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Shunday qilib, to‘rtala A, B, C, D kon’yunktiv konstituent diz’yunksiyasi to‘rttala satrda ham “1” qiymatga ega, ya’ni aynan chin

$$E = A \vee B \vee C \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Bu formula - ikki mulohazali to‘liq mukammal diz’yunktiv normal shakldan iborat:

Demak, Ye ning inkori

$$\bar{E} = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)} = \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \bar{y}} \wedge \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \qquad \text{yoki}$$

$$\overline{E} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee y)$$

aynan yolg‘on formulani ifodalaydi. Bu esa ikki mulohazali to‘liq mukammal kon’yunktiv normal shakldir.

Shunday qilib, ikki x va y elementar mulohazalar uchun chinlik jadvallariga qarab mos formulalarni tiklash masalasi hal qilindi.

Endi berilgan chinlik jadvallariga qarab uchta x, y, z elementar mulohazalarning formulalarini topish masalasiga o‘tamiz. Bu uch mulohaza uchun 2^3=8 ta qiymatlar satrlari tuziladi.

2-jadval

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

2-jadvalning satrlaridan biridagina “1” qiymatga, qolganlarida “0” qiymatga ega bo‘lish talabiga javob beruvchi formulalar ushbu uch mulohazali hamma 2^3=8 ta kon’yunktiv konstituentlardan iboratdir:

1. $x \wedge y \wedge z = A_1$ 4. $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = A_4$ 7. $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z = A_7$

2. $x \wedge y \wedge \overline{z} = A_2$ 5. $\overline{x} \wedge y \wedge z = A_5$ 8. $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = A_8$

3. $x \wedge \overline{y} \wedge z = A_3$ 6. $\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} = A_6$ (2)

Bu (2) kon’yunktiv konstituentlardan har ikkitasining diz’yunksiyasini olib, qiymatlari ikki satrda “1”, qolganlarida “0” bo‘lgan formulalarni; har uchtasining diz’yunksiyasini olib, qiymatlari uch satrda “1”, qolgan satrlarda “0” bo‘lgan formulalarni hosil qilamiz va h.k.

Masalan:

$B_1 = A_1 \vee A_2$; $B_2 = A_1 \vee A_3$; $B_3 = A_1 \vee A_4$;

$B_4 = A_1 \vee A_5$; $B_6 = A_1 \vee A_7$; $B_7 = A_1 \vee A_8$;

$C_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 = B_1 \vee A_3$; $C_2 = B_1 \vee A_4$; ....

$D_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = C_1 \vee A_4$; ....

$E = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6 \vee A_7 \vee A_8$ - MDNSh (3)

$\overline{E} = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3} \wedge \overline{A_4} \wedge \overline{A_5} \wedge \overline{A_6} \wedge \overline{A_7} \wedge \overline{A_8}$ -MKNSh (4)

Bunda sakkiztasining diz’yunksiyasi (3) aynan chin formulani va uning inkori (4) aynan yolg‘on formulani ifodalaydi.

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalar uchun ham masala xuddi shu usul bilan yechiladi.

Yuqorida keltirilgan mulohazalardan kelib chiqadiki, har bir aynan yolg‘on bo‘lmagan n argumentli A formulani quyidagi mukammal diz’yunktiv normal shaklda yozish mumkin:

$$A\,(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{A(\sigma_1, ..., \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}, \qquad (5)$$

ya'ni qiymatlar satrida chin qiymatga ega bo'lgan elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasi shaklida yoziladi. (5)- formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$A\ (x_1, x_2,..., x_n) = \vee\ A(\sigma_1,...,\sigma_n)\ x_1^{\sigma_1} ....x_n^{\sigma_n}\ .\ (\sigma_1,...,\sigma_n)$ (6)

Bu yerda $x_1^{\sigma_1} ....x_n^{\sigma_n}$ elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasi hamma 2^n qiymatlar satri bo'yicha olinadi.

Tengkuchlimas formulalar soni n ta elementar $x_1, x_2,..., x_n$ (1)

mulohazalarning nechta o'zaro tengkuchlimas, ya'ni har xil formulalari mavjud degan masalani qo'yamiz.

Ikki x va y elementar mulohazalar uchun nechta tengkuchlimas formulalar borligini ko'raylik.

x va y ning $2^2 = 4$ qiymatlar satri uchun:

4 ta A, B, C, D formulalardan har qaysisining qiymatlaridan bittasi "1" va uchtasi "0" dan iborat ustuni mavjud. Bunday ustunlar soni 4 ta, ya'ni $C_4^1 = 4$.

Undan keyin, oltita $A \vee B$, $A \vee C$, ..., $C \vee D$ formulalardan har qaysisining qiymatlari ikkita "1" va ikkita "0" dan iborat ustunni hosil qiladi. Bunday ustunlar soni $C_4^2 = 6$ ga teng. Yana to'rtta

$$A \vee B \vee C,\quad A \vee C \vee D,\quad A \vee B \vee D,\quad B \vee C \vee D$$

formulalardan har qaysisining qiymatlari uchta "1" va bitaa "0" dan tashkil etilgan ustunni beradi. Bunday ustunlar $C_4^3 = 4$ tadir. Nihoyat, Ye formulaning qiymatlari faqat "1" dan tuzilgan $C_4^4 = 1$ ta ustunni tashkil etadi.

Shunday qilib, 1-jadvalda

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 2^{2^2}$$

ustun mavjud bo'ladi. Bundan esa xuddi shuncha formula borligi kelib chiqadi. Ustunlarning hech qaysi ikkitasi bir xil bo'lmaganligidan, hech qaysi ikkita formula ham o'zaro tengkuchli emasdir.

Demak, ikki x va u mulohazaning shu 16 ta formulasidan tashqari, ularni ifodalaydigan boshqa tengkuchli formula yo'q.

Bundan, x va y ning istalgan $A(x, y)$ formulasi jadvalda keltirilgan formulalarning biri bilan tengkuchli degan xulosaga kelamiz.

Masalan, $(x \leftrightarrow y) \wedge \overline{y}$ formulani olsak, ushbu chinlik jadvalidan

x	$\overline{y}$	y	$x \leftrightarrow y$	$(x \leftrightarrow \overline{y} \wedge y)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

$(x \leftrightarrow y) \wedge \overline{y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ ekanligi ma'lum bo'ladi.

Yuqorida hosil etilgan formulalardan 15 tasi MDNSh va 1 tasi MKNSh ko'rinishiga ega.

Xuddi shunday fikr yurgizish yo'li bilan x, y, z elementar mulohazalarning tengkuchlimas formulalar soni

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 +........+ C_8^8 = 2^8 = 2^{2^3}$$

ga tengligi kelib chiqadi. To'rtta x, y, z, f mulohazalarning har xil formulalar soni 2^{2^4} ga va, umuman, n ta mulohazaning har xil teng kuchlimas formulalar soni

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 +.......+ C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}.$$

ya'ni $N = 2^{2^n}$ ga teng.

Shunday qilib, tengkuchlimas n argumentli formulalardan 2^{2^n}-1 tasi MDNSh va bittasi MKNSh ko‘rinishiga ega.

Formulaning chinlik to‘plami

Ma’lumki, n elementar $x_1, x_2, ..., x_n$ mulohazaning qiymatlari 2^n ta qiymatlar satrini tashkil etadi. Bu mulohazalarning har bir A formulasi ba’zi qiymatlar satrlarida “1” qiymatni va ba’zilarida “0” qiymatni qabul qiladi.

Ta’rif. *A formula “1” qiymat qabul qiluvchi elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlaridan tuzilgan to‘plam A formulaning chinlik to‘plami deyiladi.*

O‘tgan paragraflarda ko‘rganimizdek, elementar mulohazalarning (A) formulalaridan $C^1_{2^n} = 2^n$ tasi bitta qiymatlar satrida “1” qiymatni qabul qiladi. Demak, bunday har bir formula bir elementli chinlik to‘plamiga ega.

Xuddi shuningdek, (A) formulalarning $C^2_{2^n}$ tasidan har qaysisi ikki elementli chinlik to‘plamiga, $C^3_{2^n}$ tasidan har biri uch elementli chinlik to‘plamiga ,........, $C^{2^n}_{2^n}$ formula bo‘lsa, 2^n elementli chinlik to‘plamiga egadir. $\overline{E}$ aynan yolg‘on formulaning chinlik to‘plami esa $\varnothing$ bo‘sh to‘plamdan iborat.

$x_1, ..., x_n$ mulohazalarning aynan chin formulasiga tegishli chinlik to‘plamini U universal to‘plam deb olsak, shu mulohazalarning hamma formulalarga tegishli chinlik to‘plamlari U ning qismlarini tashkil etadi va bu universal to‘plam

$$C^0_{2^n} + C^1_{2^n} + ...+ C^{2^n-1}_{2^n} + C^{2^n}_{2^n} = 2^{2^n} \text{ ta}$$

qismlarga ega bo‘ladi.

Shunday qilib, n ta elementar mulohazalarning hamma A formulalari bilan ularning chinlik to‘plamlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi.

Hamma o‘zaro tengkuchli formulalarga bitta chinlik to‘plami mos keladi.

Misollar. 1.Uch elementar $x,\ y,\ z$ mulohazaning $A = x \wedge \overline{y} \wedge z$ formulasi faqat bitta (1,0,1) qiymatlar satrida “1” qiymatni qabul qiladi. Shu sababli, bu formulaning chinlik to‘plami ushbu bir elementli $P = \{(1, 0, 1)\}$ to‘plamdir.

2. $A = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ formula uch elementli $Q = \{(1, 1, 1)\}$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)\}$ chinlik to‘plamiga egadir.

3. Ushbu $A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$ formula aynan chindir. Shuning uchun uning chinlik to‘plami universal $U = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ to‘plamdan iborat.

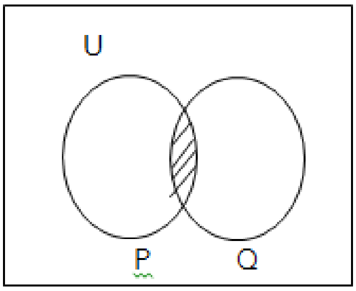
A formula P to‘plamda chin bo‘lsa, u holda P ning to‘ldiruvchisi bo‘lgan $\overline{P}$ to‘plamda yolg‘on bo‘ladi. Lekin A ning $\overline{A}$ inkori $\overline{P}$ da chin va P da yolg‘on bo‘ladi. Xuddi shunday, aynan chin J formula U da chin, lekin $\overline{U} = \Phi$ da yolg‘on. Aynan yolg‘on $\overline{J}$ formula esa, aksincha, Φ da chin va $\overline{\Phi} = U$ da yolg‘ondir.

n ta elementar mulohazalar formulalari bilan chinlik to‘plamlari orasidagi bunday bog‘lanish mulohazalar mantiqidagi masalani to‘plamlar nazariyasidagi masalaga va, aksincha, to‘plamlar nazariyasidagi masalani mulohazalar mantiqidagi masalaga ko‘chirish imkoniyatini beradi.

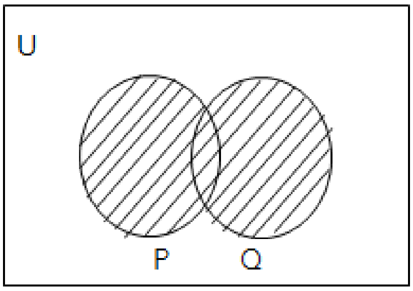
Haqiqatan ham:

1. A formula P to‘plamda chin va B formula Q to‘plamda chin bo‘lsa, $A \wedge B$ formula qanday to‘plamda chin bo‘ladi? Ma’lumki (kon’yunksiya ta’rifiga asosan), bu formula A va B ning ikkalasi ham chin bo‘lgan to‘plamda chindir. Demak, $P \cap Q$ kesishmada chindir.

Masalan, $A = x \wedge \overline{y} \wedge z$ va $B = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ formulalarning $(A \wedge B)$ kon’yunksiyasi $P \cap Q = \{(1, 0, 1)\}$ to‘plamda chindir. Shunday qilib, mulohazalar mantiqidagi $\wedge$ amaliga to‘plamlar nazariyasidagi $\cap$ amali mos keladi. (1-shakl).



1-shakl.



2-shakl.

2. $A\vee B$ formula qanday to‘plamda chin bo‘ladi?

Diz’yunksiya ta’rifiga asosan $A\vee B$ formula A va B formulalarning kamida bittasi chin bo‘lgan to‘plamda chindir. Demak, $P\bigcup Q$ to‘plamda $A\vee B$ formula chindir. Shunday qilib, mulohazalar mantiqidagi $\vee$ amaliga to‘plamlar nazariyasidagi $\bigcup$ amalining mos kelishini ko‘ramiz (2-shakl). Yuqorida keltirilgan A va B formulalar uchun

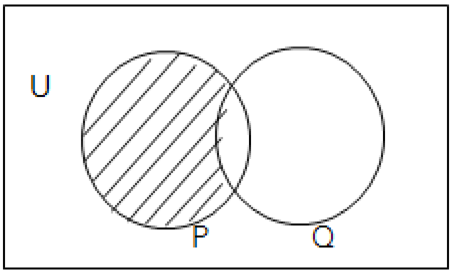
$$P\bigcup Q=\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$$

3. $A\to B$ implikatsiyaning chinlik to‘plamini topaylik.

Implikatsiya ta’rifiga asosan $A\to B$ formula faqat A chin bo‘lib, B yolg‘on bo‘lgan to‘plamda yolg‘ondir.

Demak, $P-Q=\{(1,1,1),(0,1,0)\}$ ayirmada $A\to B$ formula yolg‘ondir.

Shunday qilib, $A\to B$ formula U ning shtrixlangan bo‘lagida yolg‘on bo‘lib, qolgan bo‘lagida chindir (3-shakl). U ning qolgan bo‘lagi esa $\overline{P}\bigcup Q$ ga teng. Demak, $A\to B$ formula $\overline{P}\bigcup Q$ to‘plamda chindir.



3-shakl.

Ikkinchi tomondan, $\overline{A}$ formula $\overline{P}$ da va B formula Q da chin bo‘lgani uchun, $\overline{A}\vee B$ formula $\overline{P}\bigcup Q$ da chindir.

Demak, bizga ma’lum bo‘lgan $A\to B=\overline{A}\vee B$ tengkuchlilikni boshqa yo‘l bilan isbotladik.

4. (1) mulohazalarning istalgan A va B formulalarini olib, $A\vee\overline{A}\vee B=J$ tengkuchlilikni isbotlaylik. $\overline{A}$ formula $\overline{P}$ da chin, A formula P da va B formula Q da chin bo‘lsin. Shunday qilib, $\overline{A}\vee A\vee B$ formula $\overline{P}\bigcup P\bigcup Q=U\bigcup Q=U$ to‘plamda chin. Shu sababli, $\overline{A}\vee A\vee B$ aynan chin formula bo‘lib, $\overline{A}\vee A\vee B=J$ dir.

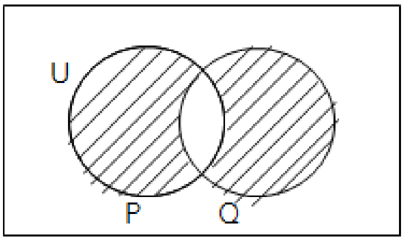
5. Qanday shartda $A\to B=J$ tengkuchlilik bajariladi?

Ma’lumki, $A\to B$ formula U ning $P-Q$ dan boshqa bo‘lagida, demak, $\overline{P-Q}$ da chin. $A\to B=J$ shart bo‘yicha $\overline{P-Q}=U$ bo‘lishi kerak. Bundan $\overline{\overline{P-Q}}=\overline{U}$ yoki $P-Q=\phi$ kelib chiqadi. Bu esa $P\subseteq Q$ ekanini bildiradi.

6. $A\to B$ formulaning chinlik to‘plamini aniqlaylik.

Bu formula A chin va B yolg‘on, shuningdek, B chin va A yolg‘on bo‘lgan to‘plamda, ya’ni $(P-Q)\bigcup(Q-P)$ dagina yolg‘on bo‘lib, U ning qolgan bo‘lagida, ya’ni $\overline{(P-Q)\bigcup(Q-P)}$ da chindir.

Shunday qilib, $A \leftrightarrow B$ ning chinlik to'plami U ning shtrixlangan bo'lagidan boshqa qismi bilan tasvirlanadi (4-shakl):



4-shakl.

Boshqa qismiga mos keluvchi to'plamni topamiz. $P - Q = P \cap \overline{Q}$ va $Q - P = Q \cap \overline{P} = \overline{P} \cap Q$. Bundan $\overline{P - Q} = \overline{P} \cup Q$ va $\overline{Q - P} = P \cup \overline{Q}$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$(P - Q) \cup (Q - P) = \overline{P - Q} \cap \overline{Q - P} = (\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$$

Demak, $A \leftrightarrow B$ formula $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$ to'plamda chindir.

Ikkinchi tomondan, $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$ to'plam $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ formulaning chinlik to'plami bo'lgani uchun, ushbu ma'lum tengkuchlilikka ega bo'lamiz.

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

Quyidagi formulalarga $\overline{A} \vee B = A \to B$, $\overline{B} \vee A = B \to A$ asosan

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$$

7. Formulalar bilan to'plamlar orasidagi bog'lanishga suyanib, quyidagi teoremani isbotlaylik:

Teorema: *A va B formulalar tengkuchli bo'lishi uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. a) $A = B$ bo'lsin. Demak, $P = Q$. $A \leftrightarrow B$ ning chinlik to'plami

$$(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) = (\overline{P} \cup P) \cap (P \cup \overline{P}) = U \cap U = U.$$

Bundan $A \leftrightarrow B = J$ kelib chiqadi, ya'ni $A \leftrightarrow B$ tavtologiyadir.

b) $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) = J$ bo'lsin, u vaqtda $A \leftrightarrow B = J$ bo'ladi.

Demak, $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = J$. Bundan, kon'yunksiya ta'rifiga asosan $A \to B = J$ va $B \to A = J$.

Bu yerdan, 5-punktga binoan $P \subseteq Q$ va $Q \subseteq P$. Demak, $Q = P$ kelib chiqadi. Bu o'z navbatida $A = B$ bo'lishini ko'rsatadi.

Shunday qilib, mulohazalar algebrasidagi $\wedge$, $\vee$ - mantiqiy amallarga mos ravishda to'plamlar algebrasidagi $\cap$, $\cup$-(ko'paytma, birlashma, to'ldiruvchi) amallari mos keladi. Mulohazalar algebrasidagi "1", "0" konstantalarga to'plamlar algebrasidagi U va ϕ (universal va bo'sh) to'plamlar mos keladi. Demak, mulohazalar algebrasidagi biror ifodada $\wedge$ ni $\cap$ ga, $\vee$ ni $\cup$ ga, inkorni (-) to'ldiruvchiga, "1" ni universal U to'plamga "0" ni bo'sh ϕ to'plamga almashtirsa, to'plamlar algebrasidagi ifoda hosil bo'ladi va aksincha.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Formulalarning normal shakllari deb nimaga aytamiz?
2.Formulaning diz'yunktiv va kon'yunktiv normal shakllarini ifodalang.

3.Formulani mukammal kon'yunktiv va diz'yunktiv normal shakllarga keltirish algoritmini yozing.

4.Formulalarning asosiy xossalarini keltiring.
5.Tengkuchlimas formulalar soni nimaga teng?

8-MAVZU	MULOHAZALAR ALGEBRASI FUNKSIYALARI (BUL FUNKSIYASI)

REJA:

1. Mulohazalar algebrasi funksiyalari
2. Funksiyalar tengkuchliligi
3. Funksiyalar superpozitsiyasi
4. *Mantiq algebrasidagi ikki taraflama qonuni*
5. *O‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya.*

Funksiya. –Funksiyalar tengkuchliligi. –0 va 1 saqlovchi funksiyalar. –n-argumentli funksiyalar soni. –Bir rangli superpozitsiya. Ikki taraflama funksiya. –O‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya. –Ikkitaraflama qonun. –Misollar. –Teorema. –Lemma.

Ma’lumki, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasi nuqtai nazaridan chinlik jadvallari bilan to‘liq xarakterlanadi. Agarda funksiyaning jadval shaklida berilishini esga olsak, u vaqtda mulohazalar algebrasida ham funksiya tushunchasi mavjudligini bilamiz.

1-ta’rif. *Mulohazalar algebrasining* $x_1,...,x_n$ *argumentli* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyasi deb, 0 va 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyaga aytiladi va uning* $x_1,...,x_n$ *argumentlari ham 0 va 1 qiymat qabul qiladi. Funksiya* $f(x_1,...,x_n)$ *o‘zining chinlik jadvali bilan beriladi.*

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,...,x_n)$
0	0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
1	0	0	...	0	0	f(1,0,...,0,0)
...	...	...	...	...	...	....
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,1)

Bu jadvalning har bir satrida avval o‘zgaruvchilarning $(\alpha_1,...,\alpha_{n)}$ qiymatlari va shu qiymatlar satrida f funksiyaning $f(\alpha_1,...,\alpha_{n)}$ qiymati beriladi. Oldingi paragraflarda isbot qilgan edikki, n ta o‘zgaruvchi uchun qiymatlar satrlarining soni 2^n va funksiyalarning soni 2^{2^n} ga teng bo‘ladi.

Mulohazalar algebrasida asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \bar{x}, \quad f_3(x,y) = xy, \quad f_4(x,y) = x \vee y,$$
$$f_5(x,y) = x \to y, \quad f_6(x,y) = x \leftrightarrow y,$$
$$f_7(x_1,....., x_n) = 1, \quad f_8(x_1,......, x_n) = 0.$$

Agar f(0,0,.....,0)=0 bo‘lsa, u holda $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ funksiyaga 0 saqlovchi funksiya deb aytiladi. Agar $f(1,1,...,1) = 1$ bo‘lsa, u vaqtda $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaga 1 saqlovchi funksiya deb aytamiz.

n argumentli 0 saqlovchi funksiyalarning soni 2^{2^n-1} ga va 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham 2^{2^n-1} ga teng bo‘ladi (isbot qilishni o‘quvchiga havola etamiz).

Mulohazalar algebrasidagi n argumentli 0 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_0 va 1 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_1 bilan belgilaymiz.

2-ta’rif. *f va g mulohazalar algebrasining funksiyasi va $x_1,...,x_n$ lar hech bo‘lmaganda ularning bittasining argumentlari bo‘lsin. Agar $x_1,...,x_n$ argumentlarning hamma qiymatlari satri uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, u holda f va g funksiyalar tengkuchli funksiyalar deb aytiladi va $f = g$ shaklida yoziladi.*

3-ta’rif. *Agarda quyidagi munosabat*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

bajarilsa, u vaqtda x_i argumentga $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaning soxta argumenti deb aytiladi.

Agarda $f(x_1, x_2,...., x_{i-1}, 1, x_{i+1},...., x_n) \neq f(x_1, x_2,...., x_{i-1}, 0, x_{i+1},...., x_n)$ bo‘lsa, u holda x_i argumentga $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaning soxta emas (muhim) argumenti deb aytiladi.

Misol. $f(x, y) = x \vee (xy)$ funksiya uchun u argumenti soxta argument bo‘ladi, chunki $f(1,0) = f(0,1)$.

Funksiyaning argumentlari qatoriga istalgancha soxta argumentlarni yozish mumkin va u qatordan hamma soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

Endi mulohazalar algebrasi funksiyalarining superpozitsiyasi tushunchasini ko‘raylik.

4-ta’rif. $\Phi = \left\{\varphi_1\left(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}\right), \ldots, \varphi_m\left(x_{m1}, \ldots, x_{mk_m}\right)\right\}$ *mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo‘lsin.*

Quyidagi ikki usulning bittasi bilan hosil etiladigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\varphi_1,...,\varphi_m$ funksiyalarning elementar superpozitsiyasi yoki bir rangli superpozitsiyasi deb aytiladi:

a) qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya’ni

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{ji-1}, y, x_{ji+1}, \ldots, x_{jk_j}),$$

bu yerda u, x_{jk_j} o‘zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin.

b) Qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argu-menti o‘rniga ikkinchi bir $\varphi_e(x_{e1},..., x_{ek}) \in \Phi$ funksiyani qo‘yish usuli, ya’ni

$$\varphi_j(x_{j1}, \ldots, x_{ji-1}),\ \varphi_e(x_{e1}, \ldots, x_{ek}),\ (x_{ji+1}, \ldots, x_{jk_j}).$$

Agar Φ sistema funksiyalarning k rangli superpozitsiyalari sinfi $\Phi^{(k)}$ berilgan bo‘lsa, u vaqtda $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$ bo‘ladi.

1-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan bir xil chinlik jadvaliga ega bo‘lib, lekin o‘zgaruvchilarning belgilanishi bilan farq qiladigan funksiyalar bir-birining superpozitsiyasi bo‘ladi.

2-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o‘zgaruvchini x_{jk} $(i \neq k)$ bilan qayta nomlasak, natijada kam o‘zgaruvchili funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{jk} o‘zgaruvchilar aynan tenglashtirildi deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \wedge \overline{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \overline{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

3-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo‘lsa, u holda $\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$ va umuman $r \leq s$ bo‘lganda $\Phi^{(r)} \subseteq \Phi^{(s)}$.

5-ta’rif. $\overline{x}$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$ *asosiy elementar funksiyalarning superpozitsiyasiga formula deb aytamiz.*

Endi ikkitaraflama (qo‘shma) funksiya tushunchasini kiritamiz. $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyani topish uchun f funksiyaning chinlik jadvalida hamma o‘zgaruvchilarni ularning inkoriga almashtirish kerak, ya’ni hamma joyda 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kerak.

1-ta’rif. *Quyidagicha aniqlangan*

$$f^{*}(x_1, x_2, ...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ...,\overline{x}_n)$$

funksiyaga $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *funksiyaning ikkitaraflama funksiyasi deb aytiladi.*

2-ta’rif. *Agar*

$$f\ (x_1, x_2, ...,x_n) = f^{*}(x_1, x_2, ...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ...,\overline{x}_n)$$

munosabat bajarilsa, u holda $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *ga o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya deb aytiladi.*

Ta’rifga asosan, $f(x_1, x_2,..., x_n)$ ikkitaraflama funksiya $(\alpha_1,..., \alpha_n)$ va $((\overline{\alpha}_1,.......,\overline{\alpha}_n)$ qiymatlar satrida qarama-qarshi qiymatlar qabul qiladi.

Misollar. 1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.

1. $f_1(x) = x$ ga ikkitaraflama funksiya $f_1^{*}(x) = x$ bo‘ladi.
2. $f_2(x) = \overline{x}$ ga ikkitaraflama funksiya $f_2^{*}(x) = \overline{x}$ bo‘ladi.
3. $f_3(x, y) = xy$ ga ikkitaraflama funksiya $f_3^{*} = x \vee y$ bo‘ladi.
4. $f_4(x, y) = x \vee y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_4^{*} = x\,y$ bo‘ladi.
5. $f_5(x, y) = x \to y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_5^{*} = \overline{y \to x}$ bo‘ladi.
6. $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_6^{*} = \overline{x \leftrightarrow y}$ bo‘ladi.
7. f_7=1 ga f_7^{*}=0 va f_8=0 ga f_8^{*}=1 bo‘ladi.

Keltirilgan misolning yechimidan ko‘rinib turibdiki, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar, ta’rifga asosan, o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘ladi.

2. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ funksiyaning o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya ekanligini isbot qiling.

$$f^{*}(x, y, z) = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} \wedge \overline{\overline{y}\,\overline{z}} \wedge \overline{\overline{x}\,\overline{z}} = (x \vee y)\,(y \vee z)\,(x \vee z) =$$
$$= [(x \vee y)\,y \vee (x \vee y)\,z]\,(x \vee z) = [y \vee yz \vee xz]\,(x \vee z) = (y \vee xz)\,(x \vee z) =$$
$$= x\,y \vee yz \vee x\,(x \vee z)\,z = x\,y \vee yz \vee xz\,.$$

Demak, $f(x, y, z) = f^{*}(x, y, z)$ ekanligi uchun f o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyadir.

Teorema. *Agar* $\Phi(x_1, ...,x_n) = f\,(f_1\ (x_{11}, ...,x_{1p_1}), ...,f_m\ (x_{m1}, ...,x_{mp_m}))$ *bo‘lsa, u holda*

$\Phi^{*}(x_1, ...,x_n) = f^{*}(f_1^{*}(x_{11}, ...,x_{1p_1}), ...,f_m^{*}(x_{m1}, ...,x_{mp_m}))$ *bo‘ladi.*

Isbot.

$$\Phi^{*}(x_1, ...,x_n) = \overline{\Phi}\,(\overline{x}_1, ...,\overline{x}_n) = \overline{f}\,(f_1(\overline{x}_{11}, ...,\overline{x}_{1p_1}), ...,f_m\,(\overline{x}_{m1}, ...,\overline{x}_{mp_m})) =$$
$$= \overline{f}\,(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11}, ...,\overline{x}_{1p_1}), ...,\overline{\overline{f}}_m\,(\overline{x}_{m1}, ...,\overline{x}_{mp_m})) = \overline{f}\,(\overline{f}_1^{*}(x_{11}, ...,x_{1p_1}), ...,$$

$\overline{f}_m^{*}(x_{m1}, ...,x_{mp_m})) = f^{*}(f_1^{*}(x_{11}, ...,x_{1p_1}), ...,f_m^{*}(x_{m1}, ...,x_{mp_m}))$. Teoremaning isbotidan ikkitaraflama qonun kelib chiqadi.

Ikkitaraflama qonun. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ *funksiyalarning superpozitsiyasiga ikkitaraflama bo‘lgan funksiya mos ravishda* $\varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ...,\varphi_m^{*}$ *ikkitaraflama funksiyalar superpo-zitsiyasiga tengkuchlidir, ya’ni agar* $A = C[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m]$ *formula* $f(x_1,..., x_n)$ *funksiyani realizatsiya etsa, u vaqtda* $C[\ \varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ...,\varphi_m^{*}\ ]$ *formula* $f^{*}(x_1,..., x_n)$ *funksiyani realizatsiya etadi.*

Bu formula A formulaga ikkitaraflama bo‘lgan formula deb aytiladi va uni A^{*} deb belgilaymiz. Demak,

$$A^{*} = C[\ \varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, ...,\varphi_m^{*}\ ].$$

Ushbu qonundan o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarning superpozitsiyasi yana o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘lishligi kelib chiqadi, ya’ni agar $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘lsa, u holda $\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, ..., \varphi_m^*)$ funksiya ham o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, ..., \varphi_m^*) = \varphi(\varphi_1, ..., \varphi_m) = \Phi .$$

Agar funksiya formula orqali ifodalangan va bu formula o‘z navbatida $\wedge$, $\vee$, $-$ mantiq amallari orqali ifodalangan bo‘lsa, u holda bu funksiyaga (formulaga) ikkitaraflama bo‘lgan funksiyani (formulani) topish uchun $\vee$ ni $\wedge$ ga, $\wedge$ ni $\vee$ ga, 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kifoya. Bu prinsipni tengkuchli formulalarga ishlatganda, yana tengkuchli formulalar hosil qilamiz, ya’ni $A(x_1,..., x_n) = B(x_1,..., x_n)$ bo‘lsa, u holda $A^*(x_1,..., x_n) = B^*(x_1,..., x_n)$.

Ushbu prinsip orqali mantiq algebrasining bir formulasidan ikkinchi formulasiga, bir teoremasidan ikkinchi teoremasiga, bir ta’rifidan ikkinchi ta’rifiga kelamiz.

Masalan, yuqorida keltirilgan (2), (3), (6), (8), (10), (12) tengkuchli formulalarga ushbu prinsipni ishlatsak, (4), (5), (7), (9), (11), (13) - tengkuchli formulalar kelib chiqadi.

Mantiq algebrasida elementlari n argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalardan iborat bo‘lgan to‘plamni S bilan belgilaymiz, uning elementlarining soni 2^{2^n-1} ga tengdir.

Endi o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiyalar haqidagi lemmani ko‘rib chiqaylik.

Lemma. *Agar $\varphi(x_1,..., x_n) \notin S$ bo‘lsa, u holda undan argumentlarining o‘rniga x va $\overline{x}$ funksiyalarni qo‘yish usuli bilan bir argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiya, ya’ni konstantani hosil qilish mumkin.*

Isbot. $\varphi(x_1,..., x_n) \notin S$ bo‘lganligi uchun, shunday $(\alpha_1,..., \alpha_n)$ qiymatlar satri topiladiki, $\varphi(\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n) = \varphi(\alpha_1,..., \alpha_n)$ bo‘ladi.

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1,...n)$ funksiyani kiritamiz va $\varphi_i(x) = \varphi(\varphi_1(x),..., \varphi_n(x))$ deb belgilab olamiz.

U vaqtda quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$\varphi(0) = \varphi(\varphi_1(0),..., \varphi_n(0)) = \varphi(0^{\alpha_1}, ..., 0^{\alpha_n}) = \varphi(\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n) =$$
$$= \varphi(\alpha_1,..., \alpha_n) = \varphi(I^{\alpha_1}, ..., I^{\alpha_n}) = \varphi(\varphi_1(I),..., \varphi_n(I)) = \varphi(I) .$$

Lemma isbot bo‘ldi.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. *Ikkitaraflama funksiya va o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya ta’riflarini keltiring.*
2. *Mantiq algebrasidagi ikkitaraflama qonunni yozing.*

1. *Ikki argumentli o‘z-o‘zimga ikki taraflama funksiyalar sonini aniqlang*
2. *Bir argumentli o‘z-o‘ziga ikki taraflama bo‘lgan funksiyalar soni nechta?*

9-MAVZU	BUL FUNKSIYALARINI O‘ZGARUVCHILAR BO‘YICHA YOYILMASI. MDNSH VA MKNSH

REJA:

1. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar
2. Bul funksiyalarini o‘zgaruvchilar bo‘yicha yoyilmasi.

3. MDNSH va MKNSH

Arifmetik amallar. Bul funksiyalarini o'zgaruvchilar bo'yicha yoyilmasi, arifmetik qonun, kommutativ, assotsiativ va distributivlik.

{0,1} Bul algebrasidagi xy kon'yunksiya amali oddiy arifmetikadagi 0 va 1 sonlar ustidagi ko'paytma amaliga mos keladi. Ammo 0 va 1 sonlarni qo'shish natijasi {0,1} to'plam doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun I.I.Jegalkin (3.VIII 1869-28.III 1947) 2 moduliga asosan qo'shish amalini kiritadi (I.I.Jegalkin 30-yillarning boshida Moskva davlat universitetida birinchi bo'lib matematik mantiq bo'yicha ilmiy seminar tashkil etgan). x va y mulohazalarning 2 moduli bo'yicha qo'shishni $x+y$ sifatida belgilaymiz va u quyidagi chinlik jadvali bilan beriladi:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, $x+y=\overline{x \leftrightarrow y}$. Mantiq algebrasidagi ko'paytma va 2 moduli bo'yicha qo'shish mantiq amallari uchun kommutativ, assotsiativ va distributiv arifmetik qonunlar o'z kuchini saqlaydi.

Bul algebrasidagi asosiy mantiqiy amallarni kiritilgan arifmetik amallar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

1. $\bar{x}=x+1$; 2. $x \wedge y = xy$; 3. $x \vee y = xy+x+y$;
4. $x \to y = xy+x+1$; 5. $x \leftrightarrow y = x+y+1$.

2 moduli bo'yicha qo'shish amalining ta'rifiga asosan $x+x=0$ va $xx=x$ $(x^n=x)$.

Bul funksiyalarining o'zgaruvchilar bo'yicha yoyilmasi

Teorema 1. E_2 *to'plamdagi har bir* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *funksiya quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin:*

1. $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee \bar{x}_1 \cdot f(0,x_2,\ldots,x_n)$,
2. $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot f(1,x_2,\ldots,x_n) \oplus \bar{x}_1 \cdot f(0,x_2,\ldots,x_n)$,
3. $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \vee f(0,x_2,\ldots,x_n))\,\&\,(\bar{x}_1 \vee f(1,x_2,\ldots,x_n))$.

Isbot. Ushbu formulalarni isbotlash uchun

1) Agar $x_1=0$ bo'lsa, unda

$$f(0,x_2,\ldots,x_n) = 0 \vee f(0,x_2,\ldots,x_n) = f(0,x_2,\ldots,x_n).$$

2) Agar $x_1=1$ bo'lsa, unda

$$f(1,x_2,\ldots,x_n) = 1\,\&\,f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee 0\,\&\,f(0,x_2,\ldots,x_n) = f(1,x_2,\ldots,x_n).$$

Xuddi shunday 2-3-tasdiqlarni ham isbotlashimiz mumkin.

Teorema 2. *Har bir* E_2 *dan olingan* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *funksiyani quyidagicha ifodalash mumkin, bunda* $\forall \kappa, 1 \le k \le n$ *:*

1. $f(x_1,\ldots,x_n)=\underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)}{V} x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_k^{\sigma_k}\ \&\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$,

bunda $x^\sigma=\begin{cases}x, \ agar\ \sigma=1;\\ \bar{x},\ agar\ \sigma=0;\end{cases}$ $\quad \overset{n}{\underset{i=1}{V}} x_i=x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n.$

2. $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_k^{\sigma_k}\ \&\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$, bunda

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n.$

3. $f(x_1,\ldots,x_n)=\underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)}{\&}(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_k^{\bar{\sigma}_k}\vee f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n))$,

bunda $\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} x_i=x_1\,\&\,x_2\,\&\ldots\&\,x_n,$ $\quad x^{\bar{\sigma}}=\begin{cases}x, \ agar\ \sigma=0;\\ \bar{x},\ agar\ \sigma=1;\end{cases}$

1-tasdiqning isboti: $k-(\alpha_1,...,\alpha_k)$ bo‘lsa, $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiya quyidagi ko‘rinishga keladi - $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,x_{k+1},\ldots x_n)$.

Ta’rifga asosan,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1^{\sigma_1}=1\ \Leftrightarrow\ \alpha_1=\sigma_1\\ \alpha_2^{\sigma_2}=1\ \Leftrightarrow\ \alpha_2=\sigma_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_k^{\sigma_k}=1\ \Leftrightarrow\ \alpha_k=\sigma_k\end{array}\right\}$$

Bundan esa, $\alpha_1^{\sigma_1}\&\alpha_2^{\sigma_2}\&\ldots\&\alpha_k^{\sigma_k}=1\ \Leftrightarrow\ \alpha_1=\sigma_1,\alpha_2=\sigma_2,\ldots,\alpha_k=\sigma_k$.

$1\&x=x$ dan f funksiya berilgan formulaga faqat va faqat $\alpha_1=\sigma_1,\alpha_2=\sigma_2,\ldots,\alpha_k=\sigma_k$ bo‘lganda o‘rinli.

Bundan, formulaning o‘ng tomoni

$\underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)}{V} x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k}\ \&\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$ ga teng chunki qolgan barcha kon’yunksiyalar = 0. Formulaning chap tomonining ham $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$ ko‘rinishga ega chunki, $\alpha_1=\sigma_1,\alpha_2=\sigma_2,\ldots,\alpha_k=\sigma_k$.

Demak, $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$.

Xuddi shunday 2-3-tasdiqlarni ham isbotlashimiz mumkin.

MDNSH va MKNSH.

Natija 1. *2-teoremaning 1-tasdiqida* $k=n$ *bo‘lsa, unda yoyilma quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\underset{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{V} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}\cdot f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n). \qquad (1)$$

Agar $f\neq 0$, *unda (1) formuladan*

$f(x_1,\ldots,x_n)=\underset{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}}{V} x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_n^{\sigma_n}$ *– Mukammal diz’yunktiv normal shakl (MDNSh).*

Natija 2. *Agar 2-teoremaning 3-tasdiqida* $k = n$ *bo'lsa, unda unda yoyilma quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)). \qquad (2)$$

Agar $f \neq 1$, *unda (2) formuladan*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$ – *Mukammal kon'yunktiv normal shakl (MKNSh).*

Natija 3. *Agar 2-teoremaning 2-tasdiqida* $k = n$ *bo'lsa, unda unda yoyilma quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \qquad (3)$$

Agar $f \neq 0$, *unda (3) formuladan*

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n} .$$

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. *Asosiy mantiqiy amallarni kiritilgan arifmetik amallar orqali ifodalang.*
2. *Bul funksiyalarini o'zgaruvchilar bo'yicha yoyilmasi to'g'risidagi teoremani isbotlang.*
3. *MKNSh va MDNSh.*

10-MAVZU	JEGALKIN KO'PXADI. MONOTON BUL FUNKSIYALARI

REJA:

1. Jegalkin ko'phadi
2. Chiziqli funksiya
3. Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar

Arifmetik amallar. –Jegalkin ko'phadi. –Mantiqiy amallarni arifmetik amallar orqali ifodalash. –Chiziqli funksiya. –Teorema. Monoton funksiya.. –Monoton funksiyalar superpozitsiyasi.

n ta $x_1,\dots,x_n$ o'zgaruvchi yordamida inkor amali qatnashmagan elementar kon'yuksiyalar sonini topish talab qilinsin. Shunday elementar kon'yunksiyalar 2^n ta bo'ladi.

Masalan:

1) $n = 2$ bo'lsa, x_1, x_2: 2) $n = 3$ *bo'lsa,* x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \& x_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ \varnothing \end{array}\right\} 2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \& x_2 \& x_3 \end{array}\right\}$$

$x_1 \& x_2$

$x_1 \& x_3$

kon’yunksiyalar $\quad x_2 \& x_3 \quad 2^3$

x_1

x_2

x_3

$\varnothing$

Shunday qilib, n ta $x_1, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilar yordamida inkor amali qatnashmagan barcha 2^n ta elementar kon’yuksiyalarni $k_1, \ldots, k_{2^n}$ deb belgilash kiritamiz.

Ta’rif-1: $\sum_{i=1}^{2^n} a_i k_i, \; bu \; yerda \quad a_i \in E_2$ ko‘rinishidagi ko‘pxadga Jegalkin ko‘pxadi deyiladi.

Teorema-1. *Ixtiyoriy* $f(x_1, \ldots, x_n) \in E_2$ *bul funksiyasini Jegalkin ko‘pxadi ko‘rinishida ifodalash mumkin va u yagonadir.*

Isbot:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \qquad (1)$$

(1) formuladagi barcha inkor amallaridan $x^{\sigma} = x + \overline{\sigma}$ tenglik yordamida yo‘qotib yuboramiz.

Bu yerda $x^{\sigma} = \begin{cases} x, \; если \; \sigma = 1; \\ \overline{x}, \; если \; \sigma = 0. \end{cases}$

Xaqiqatdan xam:

$\sigma = 1$ bo‘lsa, $x = x \oplus \overline{1} = x$, agar $\sigma = 0$, bo‘lsa, $\overline{x} = x \oplus \overline{0} = x + 1 = \overline{x}$.

(1) formula quyidagi ko‘rinio‘ga keladi:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} (x_1 + \overline{\sigma}_1)(x_2 + \overline{\sigma}_2) \ldots (x_n + \overline{\sigma}_n) f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Xosil bo‘lgan yig‘indidagi o‘zgaruvchilarning birortasida xam inkor amali mavjud emas. Endi qavslarni ochib chiqamiz:

$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2^n} a_i k_i, \;\; a_i \in E_2$, k_i – $x_1, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilar yordamida tuzilgan turli elementar kon’yunksiyalar. Shunday qilib, ixtiyoriy bul funksiyasini Jegalkin ko‘pxadi yordamida ifodalash mumkinligi isbotlandi.

2) Yagonaligini isboti. Buning uchun *n* o‘zgaruvchili bul funksiyalari sonini, *n* o‘zgaruvchili Jegalkin ko‘pxadlar soni bilan taqqoslaylik.

Teng kuchli bo‘lmagan *n* o‘zgaruvchili bul funksiyalari soni 2^{2^n} ta ekanligini bilamiz. Endi biz barcha elementar kon'yunktsiyalarni yozamiz $\{k_1, k_2, \ldots, k_{2^n}\}$, har bir konyunksiya ko‘pxadga yo kiradi yoki kirmaydi, shuning uchun bunday ko‘pxadlar soni 2^{2^n} bo'ladi.

<u>Xulosa:</u>

1) *n* o‘zgaruvchili bul funksiyalari soni bilan Jegalkin ko‘pxadlari soni teng ekanligi aniqlandi.

2) Ixtiyoriy funksiyani Jegalkin ko‘pxadi ko‘rinishiga ifodash mumkinligini isbotladik.

3) Har bir Jegalkin ko‘pxadiga mos keluvchi funksiya mavjud.

Demak, funksiyani ko‘pxad yordamida ifodalash mumkin va u yagonadir.

Funksiyalarni Jegalkin ko‘pxadi ko‘rinishiga keltirishning bir necha usullari mavjud

I. Chinlik jadvali yordamida funksiyani Jegalkin ko‘pxadi ko‘rinishiga keltirish

(1) formulada $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1$ deb, quyidagi formulani xosil qilamiz:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\&\ldots\& x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

$x^{\sigma}=x+\bar{\sigma}$ formuladan foydalanib, (2) yig‘indidagi barcha inkor amallaridan qutulishimiz mumkin va natijada Jegalkin ko‘pxadini xosil qilamiz.

Masalan. $x\vee y$ diz’yunksiyani Jegalkin ko‘pxadi ko‘rinishiga chinlik jadvali yordamida keltirish kerak.

Avvalo, $x\vee y$ chinlik jadvalini tuzamiz:

x	y	$x\vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(2) formuladan, $f(x,y)=x\vee y=\sum_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2)\\ f(\sigma_1,\sigma_2)=1}} x^{\sigma_1}\& y^{\sigma_2}==\bar{x}y\oplus x\bar{y}\oplus xy$

$=(x\oplus 1)y\oplus x(y\oplus 1)\oplus xy=xy\oplus y\oplus xy\oplus x\oplus xy=xy\oplus x\oplus y$.

Demak, $x\vee y=xy+x+y$,

II. Noaniq koeffitsientlar usuli

1-teoremaga asosan,

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{2^n}a_ik_i,\ bu\ yerda\quad a_i\in E_2. \qquad (3)$$

(3) formulada noaniq koeffitsientlar a_i bo‘lib, ular jami 2^n ta·

Misol. Ushbi funksiyani Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishida ifodalang:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)$$

Yechish: Berilgan funksiya uchun noma’lum koeffisientli ko‘phad ko‘rinishidagi ifodasini izlaymiz:

$$(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)=ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+ex_1+fx_2+gx_3+h$$

Funksiyaning qiymatlar jadvalida noma’lum koeffisientlarni aniqlaymiz:

x_1	x_2	x_3	$(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)$	$ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+$ $+ex_1+fx_2+gx_3+h$	
0	0	0	1	*h*	*h=1*
0	0	1	1	*g+h*	*g=0*
0	1	0	1	*f+h*	*f=0*
0	1	1	1	*d+f+g+h*	*d=0*
1	0	0	1	*e+h*	*e=0*

1	0	1	0	*c+e+g+h*	*c=1*
1	1	0	0	*b+e+f+h*	*b=1*
1	1	1	1	*a+b+c+d+e+f+g+h*	*a=0*

Jadvalning 4 va 5- ustunlarini tenglashtirishdan hosil bo‘lgan tenglamalar (noma’lum koeffisientlarga nisbatan) sistemasini yechib, 6- ustunni hosil qilamiz. Demak

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+1$$

III. Superpozitsiyalar metodi.

Asosiy mantiqiy amallarni algebraik amallar (kon’yunksiya, Jegalkin yig‘indi) yordamida ifodalay olishimizni inobatga olib, ixtiyoriy funksiyani kerakli almashtirishlar bajarib Jegalkin yig‘indisi ko‘rinishda ifodalashimiz mumkin.

Masalan. $x\vee y=xy+x+y$ va $\bar{x}=x+1$ formulalardan:

1) $x\vee\bar{y}=x\bar{y}+x+\bar{y}=x(y+1)+x+y+1=xy+x+x+y+1=xy+y+1;$

2) $\bar{x}\vee y=\bar{x}y+\bar{x}+y=(x+1)y+x+1+y=xy+y+x+1+y=xy+x+1;$

3) $\bar{x}\vee\bar{y}=\bar{x}\,\bar{y}+\bar{x}+\bar{y}=$

$$=(x+1)(y+1)+x+1+y+1=xy+y+x+x+y+1=xy+1.$$

Ta’rif-2. $x_{i_1}+x_{i_2}+.....+x_{i_k}+a$ *ko‘rinishidagi funksiya chiziqli funksiya deb aytiladi. Bu yerda* $a\in E_2=\{0,1\}$.

Chiziqli funksiyaning ifodasidan ko‘rinib turibdiki, n argumentli chiziqli funksiyalar soni 2^{n+1} ga teng va bir argumentli funksiyalar doimo chiziqli funksiya bo‘ladi.

Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi har bir funksiyaning argumentlari soxta emas argumentlar bo‘ladi. Haqiqatan ham, x_1 shunday argument bo‘lsin. U vaqtda ixtiyoriy $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1,...,x_n)=x_1\varphi(x_2,...,x_n)+\psi(x_2,...,x_n).$$

Bu yerda φ funksiyasi aynan 0 ga teng emas, aks holda x_1 argument f funksiyaning (ko‘phadning) argumentlari safiga qo‘shilmasdi.

Endi $x_2,...,x_n$ argumentlarning shunday qiymatlarini olamizki, $\varphi=1$ bo‘lsin. U vaqtda f funksiyaning qiymati x_1 argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Demak, x_1 soxta argument emas.

Mantiq algebrasidagi hamma n argumentli chiziqli funksiyalar to‘plamini L harfi bilan belgilaymiz. Uning elementlarining soni 2^{n-1} ga teng bo‘ladi.

Teorema. *Agar* $f(x_1,...,x_n)\notin L$ *bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0 va 1 konstantalarni hamda* x *va* $\bar{x}$ *funksiyalarni, ayrim holda* f *ustiga “–“ inkor amalini qo‘yish usuli bilan* $x_1\,x_2$ *funksiyani hosil etish mumkin.*

Monoton funksiyalar. 0<1 munosabati orqali {0,1} to‘plamini tartiblashtiramiz.

1-ta’rif. $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ *va* $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$ *qiymatlar satri bo‘lsin.* α *qiymatlar satri* β *qiymatlar satridan shunda va faqat shundagina oldin keladi deb aytamiz, qachon* $\alpha\prec\beta$ *yoki* α *va* β *qiymatlar satri ustma-ust tushsa, u holda* $\alpha\prec\beta$ *shaklida yozamiz.*

2-ta’rif. $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ *va* $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$ *ixtiyoriy qiymatlar satri bo‘lsin.* $\alpha\prec\beta$ *dan* $f=(\alpha_1,...,\alpha_n)\le f=(\beta_1,...,\beta_n)$ *bajarilishi kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiya monoton funksiya deb aytiladi.*

3-ta’rif. $\alpha\prec\beta$ *dan* $f=(\alpha_1,...,\alpha_n)>f=(\beta_1,...,\beta_n)$ *munosabat kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ *nomonoton funksiya deb aytiladi.*

Asosiy elementar mantiqiy funksiyalardan 0, 1, x, xy, $x \vee y$ funksiyalar monoton funksiyalar bo‘lib, $\overline{x}$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$ funksiyalar nomonoton funksiyalardir.

1-teorema. *Monoton funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya yana monoton funksiya bo‘ladi.*

Isbot. Φ monoton funksiyalar sistemasi va shu sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil etilgan funksiya monoton ekanligini isbot qilish kerak bo‘lsin. 0 rangli superpozitsiya uchun bu tasdiqning to‘g‘riligi aniq, chunki Φ sistemadagi hamma funksiyalar monoton funksiyalardir. k rangli superpozitsiya uchun teoremadagi tasdiq to‘g‘ri bo‘lsin. Uning $k+1$ rangli superpozitsiya uchun ham to‘g‘riligini isbotlaymiz.

$$\varphi(x_1,..., x_n), \quad \psi(y_1,..., y_l) \in \Phi^{(k)} \text{ bo‘lsin.}$$

$$\varphi(x_1,..., x_{i-1},\ y, x_{i+1},..., x_k);$$

$$F(x_1,..., x_{i-1},\ x_{i+1},..., x_n,\ y_1,..., y_l) = \varphi(x_1,..., x_{i-1},\ \psi(y_1,..., y_l),\ x_{i+1},..., x_n)$$

funksiyalarning monoton ekanligini isbotlash lozim. Bu yerda y va y_i lar x_j o‘zgaruvchilarning birortasi bilan mos kelishi mumkin. φ funksiyaning monotonligidan $\varphi(x_1,..., x_{i-1},\ y, x_{i+1},..., x_k)$ ning monoton funksiya ekanligi kelib chiqadi. F funksiyaning monotonligini isbotlaymiz. Buning uchun F funksiyaning ikkita γ' va γ'' taqqoslanadigan qiymatlar satrini ko‘rib chiqamiz:

$$\gamma' = (\alpha'_1, ..., \alpha'_{i-1}, ..., \alpha'_{i+1}, ..., \alpha'_n, \quad \beta'_1, ..., \beta'_l);$$

$$\gamma'' = (\alpha''_1, ..., \alpha''_{i-1}, ..., \alpha''_{i+1}, ..., \alpha''_n, \quad \beta''_1, ..., \beta''_l).$$

$\gamma' \prec \gamma''$ bo‘lsin. U vaqtda $F(\gamma') \le F(\gamma'')$ ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Quyidagilar ma’lum:

$$F(\gamma') = \varphi(\delta'), \text{ bu yerda } j = i \text{ bo‘lganda } \delta'_j = \alpha'_j, \quad \delta'_i = \psi(\beta');$$

$$F(\gamma'') = \varphi(\delta''), \text{ bu yerda } j = i \text{ bo‘lganda } \delta''_j = \alpha''_j, \quad \delta''_i = \psi(\beta'').$$

ψ monoton funksiya va $\gamma' \prec \gamma''$ dan $\beta' \prec \beta''$ kelib chiqqanligidan $\delta'' \prec \delta''$ bo‘ladi. Ya’ni $\varphi(\delta') = F(\gamma') \le \varphi(\delta'') = F(\gamma'')$, chunki φ monoton funksiyadir.

$$\varphi(x_1,..., x_{i-1},\ y, x_{i+1},..., x_k)\ F(x_1,..., x_{i-1},\ x_{i+1},..., x_n, y_1,..., y_l) \in \Phi^{(k+1)}$$

ekanligidan $(k+1)$ rangli superpozitsiya uchun teorema isbot bo‘ldi.

Demak, monoton funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya yana monoton funksiyadir.

Kon’yunksiya va diz’yunksiyalar monoton funksiya bo‘lganligi uchun, teoremaga asosan, ularning superpozitsiyasidan hosil etilgan funksiya ham monoton bo‘ladi.

2-teorema. *Agar $f(x_1,..., x_n) \in M$ bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0, 1 va x funksiyani qo‘yish usuli bilan $\overline{x}$ funksiyani hosil qilish mumkin.*

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar. Jegalkin ko‘phadi.
2.Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar.
3. Ikki argumentli chiziqli funksiyalar sonini aniqlang.
4. Uch argumentli monoton bul funksiyalar soni nechta?

11-MAVZU	**TO‘LIQ VA YOPIQ FUNKSIYALAR SISTEMALARI. POST TEOREMASI**

REJA:

1. To‘liq funksiyalar sistemasi.

2. Yopiq sinflar
3. Post teoremasi. Post jadvali.

To'liq funksiyalar sistemasi. –Ikkitaraflama funksiyalar sistemasining to'liq bo'lish sharti. –Yopiq sinflar. –Xususiy funksional yopiq sinf. –Maksimal funksional yopiq sinf. –Post teoremasi. –Natija. –To'plam yopig'i. –Post jadvali.

Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini* $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda F ga to'liq funksiyalar sistemasi deb aytiladi.*

Istalgan funksiyani MKNSh yoki MDNSh ko'rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Quyidagi funksiyalar sistemasining to'liqligini isbotlang:

a) $xy, \bar{x}$; b) $x \vee y, \bar{x}$; v) $xy, x + y, 1$;

g) $\overline{x \vee y}$; d) $\bar{x}\bar{y}$; i) $x + y, x \vee y, 1$;

j) $x + y + z, xy, 0, 1$; z) $x \to y, \bar{x}$; ye) $x \to y, 0$.

Isbot. a). $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$, ya'ni diz'yunksiya amalini kon'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'ladi.

b). $xy = \bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ ekanligi ma'lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo'ladi. Shuning uchun $\{x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liqdir.

v). Ixtiyoriy mantiq algebrasining funksiyasini yagona Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkinligidan $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi.

g) va d). Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani $\psi(x, y) = \overline{xy}$ va $\varphi(x, y) = \overline{x \vee y}$ Sheffer funksiyalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $\bar{x} = \varphi(x, x)$

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x,y)} = \varphi(\varphi(x,y),\varphi(x,y))$$

va

$$xy = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\varphi(x,x),\varphi(y,y))$$

asosiy mantiqiy amallarni Sheffer funksiyasi orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{\overline{xy}\}$ va $\{\overline{x \vee y}\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'ladi.

i). $x \vee y = xy + x + y$ bo'lganligi uchun $x \vee y + (x + y) = xy$ bo'ladi. $\{xy, x + y, 1\}$ to'liq sistema ekanligi v) punktida isbot qilingan edi, demak, $\{x + y, x \vee y, 1\}$ cistema to'liqdir.

Xuddi shunday boshqa funksiyalar sistemasining to'liqli-gini isbot qilish mumkin.

1-teorema. *Agar* $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to'liq bo'lsa, u holda unga ikkitaraflama bo'lgan* $\Phi^* = \{\varphi_1^*,...,\varphi_n^*\}$ *funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi.*

Isbot. Φ^* sistemaning to'liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun avval f^* funksiyani $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ cistemasidagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to'liq bo'lganligi uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikkitaraflama qonunga asosan ikkitaraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali f funksiyani hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemasining to'liq emasligini isbotlaylik:

a) $\bar{x}$, 1; b) $xy, x \vee y$; v) $x + y, \bar{x}$;

g) $xy \vee yz \vee xz,\ \bar{x}$; d) $xy \vee yz \vee xz,\ 0, 1$.

a). $\bar{x} = x + 1$ ga teng. Demak, $\{\bar{x}, 1\}$ sistemasidagi funksiyalar bir argumentli funksiyalar bo‘ladi. Bizga ma’lumki, bir argumentli funksiyalarning superpozitsiyasi natijasida hosil qilingan funksiya yana bir argumentli funksiya bo‘ladi. Natijada, bu sistemadagi funksiyalar orqali ko‘p argumentli funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun $\{\bar{x}, 1\}$ to‘liq sistema emas.

b). $\{xy,\ x \vee y\}$ sistemasidagi funksiyalarning ikkalasi ham monotondir. Monoton funksiyalarning superpozitsiyasi orqali hosil qilingan funksiya yana monoton bo‘lishini isbot qilgan edik. Demak, bu ikkala funksiyaning superpozitsiyasi orqali monoton bo‘lmagan funksiyalarni ifodalash mumkin emas va natijada, $\{xy,\ x \vee y\}$ sistema to‘liqmas sistema bo‘ladi.

v). $\{x + y,\ \bar{x}\}$ cistemasidagi funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Shuning uchun bu funksiyalar orqali chiziqlimas funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Demak, $\{x + y,\ \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

g). $\{xy \vee yz \vee xz,\ \bar{x}\}$ sistemasidagi funksiyalar o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalardir. Bu funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan har qanday funksiya ham o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘ladi.

Demak, $\{xy \vee yz \vee xz,\ \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

d). $\{xy \vee yz \vee xz,\ 0, 1\}$ sistemadagi funksiyalarning hammasi monoton funksiyalar bo‘ladi. Monoton emas funksiyalar bu sistemadagi funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Demak, $\{xy \vee yz \vee xz,\ 0, 1\}$ sistema to‘liq emas.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan masala yechimining analizidan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Berilgan Φ funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozitsiyasi natijasida saqlansin.

Haqiqatan ham, u vaqtda bunday xususiyatga ega bo‘lmagan funksiyani Φ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali hosil qilib bo‘lmaydi.

Funksiyalarning bu ma’lum xususiyatlarini tekshirish uchun odatda funksional yopiq sinflar tushunchasidan foydalanadilar.

2-ta’rif. *Agar A sictemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya yana shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistemaga superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema deb aytiladi.*

3-ta’rif. *Superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday mantiq algebrasining funksiyalar sistemasiga funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Ravshanki, ma’lum bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar;
b) hamma mantiq algebrasining funksiyalari;
v) L - chiziqli funksiyalar;
g) S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar;
d) M - monoton funksiyalar;
ye) P_0 - nul qiymatni saqlovchi funksiyalar;
j) P_1 - bir qiymatni saqlovchi funksiyalar.

4-ta’rif. *Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinfga xususiy funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmovchi funksiya topilishi yetarli va zarurdir.

5-ta’rif. *O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi* (P_2) *dan farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmovchi xususiy funksional yopiq sinfga maksimal funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Mantiq algebrasida hammasi bo‘lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud:

P_0 - nol saqlovchi funksiyalar sinfi, P_1 - bir saqlovchi funksiyalar sinfi, S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar sinfi, L - chiziqli funksiyalar sinfi.

Post teoremasi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmovchi kamida bitta funksiya mavjud bo‘lishi yetarli va zarur (ya’ni* $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *shunda va faqat shundagina to‘liq sistema bo‘ladiki, qachonki u* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining ham qism to‘plami bo‘lmasa).*

Isbot. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to‘liq sistema bo‘lsin, ya’ni $[\Phi]=P_2$. Faraz qilamizki, Φ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi. U vaqtda F ning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ ni yozish mumkin, ya’ni $F=P_2$. Ammo bunday bo‘lishi mumkin emas. Demak, $\Phi\subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Teoremaning yetarliligining isbotini o‘quvchilarga havola etamiz.

Natija. *Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘ladi.*

Amalda birorta $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemaning to‘liq yoki to‘liq emasligini aniqlash uchun Post jadvalidan foydalanadilar. Post jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_{n-1}					
φ_n					

Jadvalning xonalariga o‘sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo‘lsa “+” ishora, bo‘lmasa “-” ishorasi qo‘yiladi.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistema to‘liq funksiyalar sistemasi bo‘lishi uchun, teoremaga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta “-” ishorasi bo‘lishi yetarli va zarur.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmasligi uchun P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘lishi, ya’ni Post jadvalining biror ustuni to‘liq “+” ishoralaridan iborat bo‘lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to‘liqligi tushunchasi bilan sinfning (to‘plamning) **yopig‘i** tushunchasi o‘zaro bog‘langan.

6-ta’rif. *A bilan P_2 (n argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o‘z ichiga olgan) to‘plamning biror qism to‘plamini belgilaymiz. A to‘plam funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil etilgan hamma bul funksiyalari to‘plami (A to‘plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma bul funksiyalari to‘plam)ga A to‘plamning* ***yopig‘i*** *deb aytiladi va $[A]$ kabi belgilanadi.*

Misol. 1. $A=P_2$ bo‘lsin, u holda $[A]=P_2$.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ bo‘lsin, u vaqtda A to‘plamning yopig‘i hamma L - chiziqli funksiyalar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

To‘plam yopig‘i quyidagi xossalarga ega:

1. $[A] \supseteq A$;
2. $[[A]] = [A]$;
3. agar $A_1 \subseteq A_2$ bo‘lsa, u holda $[A_1] \subseteq [A_2]$ bo‘ladi;
4. $[A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2]$.

7-ta’rif. *Agar $[A]=A$ bo‘lsa, u holda A to‘plam (sinf)ga funksional yopiq sinf deb aytiladi.*

Misol. 1. $A=P_2$ sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ cinfi yopiq sinf bo‘lmaydi.

3. L - sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

Osongina ko‘rish mumkinki, har qanday $[A]$ sinf yopiq sinf bo‘ladi. Bu hol ko‘pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To‘plam yopig‘i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to‘liqligi haqidagi ta’rif (avvalgi ta’rifga ekvivalent bo‘lgan ta’rif) ni berish mumkin.

8-ta’rif. *Agar $[A]=P_2$ bo‘lsa, u holda A funksiya-lar sistemasi to‘liq deb aytiladi.*

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemalarining to‘liq emasligini Post jadvali orqali isbot qilaylik:

a) $\Phi_1=\{0, xy, x+y+z\}$; b) $\Phi_2=\{1, xy, x=y+z\}$;

v) $\Phi_3=\{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$; g) $\Phi_4=\{0, 1, x+y\}$;

		P_0	P_1	S	L	M
a)	0	+	-	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
b)	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
v)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	-	-	+	-	-
g)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	$x+y$	+	-	-	+	-

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, yuqorida keltirilgan hamma funksiyalar sistemasi to‘liq emas, chunki har bir sistema uchun jadvalda bitta ustun faqatgina “+” ishoralaridan iborat. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, har bir sistema uchun bu ustunlar har xil. Demak, Post teoremasi shartidan P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas. Bu xulosadan o‘z navbatida P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ikkinchisining qism to‘plami bo‘la olmasligi kelib chiqadi.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.To‘liq funksiyalar sistemasi.

2.Funksional yopiq sinflar va xususiy funksional yopiq sinflar.

3.Maksimal funksional yopiq sinf va Post teoremasi.
4.To'plam yopig'i va Post jadvali.

12-MAVZU	MULOHAZALAR HISOBI UCHUN AKSIOMALAR SISTEMASI.

REJA:

1.Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi.
2.Isbotlanuvchi formula ta'rifi.Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi.
3. Keltirib chiqarish qoidalari.
3.Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari.

Mulohazalar hisobi. –Mantiqiy bog'lovchilar. –Simvollar. –Formula. –Qismiy formula. Isbotlanuvchi formula. –Aksioma. –Keltirib chiqarish qoidasi. –O'rniga qo'yish qoidasi. –Xulosa qoidasi. –Aksiomalar tizimi. –Isbotlash.

Mulohazalar hisobi aksiomatik mantiqiy sistema bo'lib, mulohazalar algebrasi esa uning interpretatsiyasidir (talqinidir).

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida (bazasida) qurilgan aksiomatik nazariya deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi.

Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo'linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to'plamiy mazmun bilan to'ldirilgan bo'lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsa, ya'ni:

1)nazariyaning tili berilgan;

2)formula tushunchasi aniqlangan;

3)aksiomalar deb ataladigan formulalar to'plami berilgan;

4)bu nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo'lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Quyida mulohazalar hisobining simvollari, formulasi, aksiomalar sistemasi, keltirib chiqarish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi o'rtasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar bayon etiladi.

Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi. Har qanday hisobning tafsili bu hisobning simvollari tafsilidan, formulalar va keltirib chiqarish formulalari ta'rifidan iborat.

Mulohazalar hisobida uch kategoriyali simvollardan iborat alfavit qabul qilinadi:
Birinchi kategoriya simvollari: $x, y, z, ..., x_1, x_2, ...$. Bu simvollarni o'zgaruvchilar deb ataymiz.

Ikkinchi kategoriya simvollari: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $-$. Bular mantiqiy bog'lovchilardir. Birinchisi – diz'yunksiya yoki mantiqiy qo'shish belgisi, ikkinchisi – kon'yunksiya yoki mantiqiy ko'paytma belgisi, uchinchisi – implikatsiya belgisi va to'rtinchisi – inkor belgisi deb ataladi.

Uchinchi kategoriyaga qavs deb ataladigan (,) simvol kiritiladi.

Mulohazalar hisobida boshqa simvollar yo'q.

Mulohazalar hisobining formulasi deb mulohazalar hisobi alfaviti simvollarining ma'lum bir ketma-ketligiga aytiladi.

Formulalarni belgilash uchun lotin alfavitining katta harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobining simvollari qatoriga kirmaydi. Ular faqatgina formulalarning shartli belgilari bo'lib xizmat qiladi.

Endi formula tushunchasi ta'rifini beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi:

1) har qanday $x, y, z, \ldots$ o'zgaruvchilarning istalgan biri formuladir;

2) agar A va B larning har biri formula bo'lsa, u holda $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) boshqa hech qanday simvollar satri formula bo'la olmaydi.

O'zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Misol. Formula ta'rifining 1-bandiga ko'ra $x, y, z, \ldots$ o'zgaruvchilar formulalar bo'ladi. U vaqtda ta'rifning 2-bandiga muvofiq $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \to y)$, $\overline{x}$ lar ham formulalardir. Xuddi shu tariqada $\overline{(x \vee y)}$, $((x \wedge y) \to z))$, $((x \wedge y) \to (y \to z))$ lar ham formulalar bo'ladi.

Quyidagilar formula bo'laolmasligini tushuntiring:

$x\overline{y}$, $\wedge z$, $(x \vee y$, $x \to y$, $(x \wedge y) \to \overline{x}$.

Qismiy formula tushunchasini kiritamiz:

1.Elementar formula uchun faqat uning o'zi qismiy formuladir.

2.Agar $\overline{A}$ formula bo'lsa, u vaqtda shu formulaning o'zi, A formula va A formulaning hamma qismiy formulalari uning qismiy formulalari bo'ladi.

3.Agar formula $A * B$ ko'rinishda bo'lsa (bu yerda va bundan keyin $*$ o'rniga $\vee$, $\wedge$, $\to$ cimvollarning istalganini tushunamiz), u vaqtda shu formulaning o'zi, A va B formulalar hamda A va B formulalarning barcha qismiy formulalari $A * B$ formulaning qismiy formulalari bo'ladi.

Masalan, $\left(\left(x \vee \overline{y}\right) \to \left(\overline{\overline{z} \to y}\right)\right)$ formula uchun:

$\left(\left(x \vee \overline{y}\right) \to \left(\overline{\overline{z} \to y}\right)\right)$ - nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula,

$\left(x \vee \overline{y}\right)$, $\left(\overline{\overline{z} \to y}\right)$ - birinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

x, $\overline{y}$, $\left(\overline{z} \to y\right)$ - ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

y, $\overline{z}$ - uchinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

z – to'rtinchi chuqurlikdagi qismiy formula deb ataladi.

Formulalarni yozishda ayrim soddalashtirishlarni qabul qilamiz. Xuddi mulohazalar algebrasidagi kabi formulalar yozuvidagi qavslarni tushirib qoldirishga kelishamiz. Bu kelishuvga binoan $((x \vee y) \wedge z)$, $\left(\overline{x \wedge y}\right)$, $((x \wedge y) \to (z \wedge t))$ formulalarni mos ravishda $x \vee y \wedge z$, $\overline{x \wedge y}$, $x \wedge y \to z \wedge t$ ko'rinishda yozamiz.

Endi mulohazalar hisobida **isbotlanuvchi formulalar** sinfini ajratamiz. Isbotlanuvchi formulalar formulalar ta'rifiga o'xshash xarakterda ta'riflanadi.

Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar), undan keyin esa keltirib chiqarish qoidasi aniqlanadi. Keltirib chiqarish qoidasi orqali bor isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilinadi.

Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasini qo'llash yo'li bilan yangi isbotlanuvchi formulalarni hosil etishga shu formulalarni aksiomalardan keltirib chiqarish deb aytiladi.

Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi.

Mulohazalar hisobining aksiomalar tizimi XI aksiomadan iborat bo‘lib, bular to‘rt guruhga bo‘linadi.

Birinchi guruh aksiomalari:

I_1 $x \to (y \to x)$.

I_2 $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Ikkinchi guruh aksiomalari:

II_1 $x \wedge y \to x$.

II_2 $x \wedge y \to y$.

II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

Uchinchi guruh aksiomalari:

III_1 $x \to x \vee y$.

III_2 $y \to x \vee y$.

III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

To‘rtinchi guruh aksiomalari:

IV_1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.

IV_2 $x \to \overline{\overline{x}}$.

IV_3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

Keltirib chiqarish qoidasi

1.O‘rniga qo‘yish qoidasi. Agar A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi, x-o‘zgaruvchi, B mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsa, u vaqtda A formula ifodasidagi hamma x lar o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida hosil etilgan formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A formuladagi x o‘zgaruvchilar o‘rniga B formulani qo‘yish operatsiyasi (jarayoni)ni o‘rniga qo‘yish qoidasi deb aytamiz va uni quyidagi simvol bilan belgilaymiz:

$$\int_x^B (A).$$

Zikr etilgan qoidaga quyidagi aniqliklarni kiritamiz:

a) Agar A faqat x o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish B formulani beradi;

b) Agar A formula x dan farqli y o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish A ni beradi;

v) Agar A o‘rniga qo‘yish aniqlangan formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{A}$ formuladagi x o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida o‘rniga qo‘yishning inkori kelib chiqadi, ya’ni $\int_x^B (\overline{A})$ o‘rniga qo‘yish $\overline{\int_x^B A}$ ni beradi.

g) Agar A_1 va A_2 formulalarda o‘rniga qo‘yish aniqlangan bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A_1 * A_2)$ o‘rniga qo‘yish $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$ ni beradi.

Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, uni $\vdash A$ shaklda yozishga kelishamiz.

U holda o‘rniga qo‘yish qoidasini quyidagicha sxematik ravishda ifodalash mumkin:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x}^{B}(A)}$$

va uni «agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\int_{x}^{B}(A)$ ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi» deb o‘qiladi.

2. Xulosa qoidasi. Agar A va A→V lar mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulalari bo‘lsa, u holda V ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Bu qoida quyidagicha sxematik ravishda yoziladi:

$$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

3. Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi.

a) Har qanday aksioma isbotlanuvchi formuladir;

b) Isbotlanuvchi formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga ixtiyoriy B formulani qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan formula isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

v) A va $A \to B$ isbotlanuvchi formulalardan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida olingan V formula isbotlanuvchi formuladir;

g) Mulohazalar hisobining boshqa hech qanday formulasi isbotlanuvchi deb sanalmaydi.

Ta’rif. *Isbotlanuvchi formulalarni hosil etish protsessi (jarayoni)ga isbot qilish (isbotlash) deb aytiladi.*

1-Misol. $\vdash A \to A$ ekanligi (implikatsiyaning refleksivligi) isbotlansin.

Implikatsiyaning refleksivligini isbotlash uchun ushbu

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \text{ - } I_2$$

aksiomadan foydalanamiz. Bu yerda $\int_{z}^{x}(I_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. $\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ - I_2 aksioma va (1) formulaga xulosa qoidasini qo‘llab

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x) \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz.

(2) formulaga nisbatan quyidagi o‘rniga qo‘yishni

$$\int_{y}^{\overline{\overline{x}}}(2)$$

bajarish natijasida

$$\vdash (x \to \overline{\overline{x}}) \to (x \to x) \qquad (3)$$

isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz.

$x \to \overline{\overline{x}}$ - IV_2 aksioma va (3) formulaga nisbatan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida

$$\vdash x \to x \qquad (4)$$

isbotlanuvchi formulaga kelamiz. Nihoyat (4) formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga A formulani qo‘ysak

$$\vdash A \to A$$

isbotlanishi kerak bo‘lgan formula hosil bo‘ladi.

2-misol. $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}$ ekanligini isbotlang.

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$ - II_3 aksiomaga nis-batan ketma-ket ikki marta o‘rniga qo‘yish usulini qo‘llaymiz: avval x ni $\overline{x}$ ga va keyin y ni $\overline{y}$ ga almashtiramiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz

$$\vdash (z \to \overline{x}) \to ((z \to \overline{y}) \to (z \to \overline{x} \wedge \overline{y})). \quad (5)$$

(5) formulaga nisbatan $\int_{z}^{\overline{x \vee y}}$ (5) o‘rniga qo‘yishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz

$$\vdash ((\overline{x \vee y}) \to \overline{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y})). \quad (5a)$$

Endi

$$\overline{x \vee y} \to \overline{x} \qquad (6)$$
$$\overline{x \vee y} \to \overline{y} \qquad (7)$$

formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ - IV_1 aksiomaga nisbatan

$$\int_{y}^{x \vee y} (IV)_1$$

o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Natijada

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x}) \qquad (8)$$

formulaga ega bo‘lamiz. (8) formula va $x \to x \vee y$ - III_1 aksiomaga nisbatan xulosa qoidasini ishlatib, (6) ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Xuddi shunday (7) ning ham isbotlanuvchi formula ekanligini ko‘rsatish mumkin.

(6) va (5) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llasak,

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}) \qquad (9)$$

isbotlanuvchi formula kelib chiqadi.

(7) va (9) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llab,

$$\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}$$

dastlabki formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari. Xulosa va o‘rniga qo‘yish qoidalari singari keltirib chiqarish qoidasining hosilalari ham yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilishga imkon yaratadi.

1. Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi.

Ta’rif. *Agar $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ – isbotlanuvchi formula va $B_1, B_2, ..., B_n$ mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulalari bo‘lsa, u vaqtda A formulaning $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchi-lari o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida C isbotlanuvchi formulani hosil qilish, bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi deb ataladi.*

$z_1, z_2, ..., z_n$ lar $A, B_1, B_2, ..., B_n$ formulalardagi boshqa o‘zgaruvchilardan farq qiluvchi o‘zgaruvchilar va $z_i \neq z_j \, (i, j = \overline{1, n})$ bo‘lsin. U holda A formulaga n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval x_1 o‘rniga z_1 ni, keyin x_2 o‘rniga z_2 ni va hokazo x_n o‘rniga z_n ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_1$ ni, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_2$ ni, ..., $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_n$ ni beradi.

Bundan keyin A_n formulaga nisbatan yana n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval z_1 o‘rniga B_1 ni, keyin z_2 o‘rniga B_2 ni va hokazo z_n o‘rniga B_n ni qo‘yib chiqamiz. Buning natijasida $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_1$ ni, $\vdash \int_{z_2}^{B_x}(C_1)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_2$ ni,....., $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_n$ ni hosil qilamiz.

Demak, C_n isbotlanuvchi formula A formuladagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida hosil bo‘ladi.

Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish operatsiya (qoida)sini quyidagicha ifodalaymiz

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1, x_2, ... x_n}^{B_1, B_2, ... B_n}(A)} \qquad (1)$$

2. Murakkab xulosa qoidasi. Bu qoidada

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))$$

ko‘rinishdagi formulalarga nisbatan ikkinchi hosilaviy qoida ishlatiladi va uni quyidagi tasdiq orqali izohlash mumkin.

1-teorema. *Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ lar va*

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...))) \qquad (2)$$

isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda L ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Isbot. Teoremani xulosa qoidasini ketma-ket qo‘llash orqali isbotlash mumkin.

Haqiqatan ham, agar A_1 va (2) isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda xulosa qoidasiga asosan

$$A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)) \qquad (3)$$

ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A_2 va (3) isbotlanuvchi formula bo‘lganligi uchun

$$A_3 \to (...(A_n \to L)...) \qquad (4)$$

formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.

Xuddi shunday muhokamani davom ettirib, oxiri L ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Murakkab xulosa qoidasini sxematik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, ..., \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))}{\vdash L} \qquad (5)$$

3. Sillogizm qoidasi.

2-teorema. *Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A \to C$ formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.*

Isbot. Teoremani sxematik ravishda quyidagicha yozamiz

$$\frac{\vdash A\to B,\ \vdash B\to C}{\vdash A\to C}. \qquad (6)$$

$x\to(y\to x)$ - I_1 va $x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$ - I_2 aksiomalarga nisbatan quyidagi bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasini

$$\int_{x_1 y_1 z}^{A_1 B_1 C}(J_2) \quad \text{va} \quad \int_{x_1 y}^{B\to C, A}(l_1)$$

qo‘llash natijasida ushbu isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vdash A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)), \qquad (7)$$

$$\vdash (B\to C)\to(A\to(B\to C)). \qquad (8)$$

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A\to B \qquad (9)$$

$$\vdash B\to C \qquad (10)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

(10) va (8) lardan xulosa qoidasiga asosan

$\vdash A\to(B\to C)$ (11) formulani hosil qilamiz. U vaqtda (11), (9) va (7) lardan murakkab xulosa qoidasiga asosan $\vdash A\to C$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A\to B$ va $B\to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A\to C$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga sillogizm qoidasi deb aytamiz.

4.Kontrpozitsiya qoidasi.

3-teorema. *Agar $A\to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B}\to\overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula, ya’ni*

$$\frac{\vdash A\to B}{\vdash \overline{B}\to\overline{A}}. \qquad (12)$$

bo‘ladi.

Isbot. $(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})$ - IV_1 aksiomaga nisbatan bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi

$$\int_{x,y}^{A,B}(IV_1)$$

ni qo‘llab,

$$\vdash (A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A}) \qquad (13)$$

isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz.

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A\to B \qquad (14)$$

isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun (14) va (13) lardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash(\overline{B}\to\overline{A})$ isbotlanuvchi formula ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A\to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B}\to\overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga kontrpozitsiya qoidasi deb aytamiz.

5. Ikki karralik inkorni tushirish qoidasi.

4-teorema. 1) *Agar $A\to\overline{\overline{B}}$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $A\to B$ ham isbotlanuvchi bo‘ladi.*

2) *Agar $\overline{\overline{A}}\to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $A\to B$ formula ham isbotlanuvchi, ya’ni*

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad \text{va} \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B} \qquad (15)$$

bo‘ladi.

Isbot. $x \to \overline{\overline{x}}$ - IV_2 va $\overline{\overline{x}} \to x$ - IV_3 aksiomalarga nisbatan o‘rniga qo‘yish

$$\int_x^A (IV_2) \quad \text{va} \quad \int_x^B (IV_3)$$

qoidalarini qo‘llab,

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \qquad (16)$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B \qquad (17)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

Teoremaning 1) va 2) shartiga asosan

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}, \qquad (18)$$

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B \qquad (19)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

Agar teoremaning 1)-sharti bajarilsa, u vaqtda (17) va (18) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan $\vdash A \to B$ kelib chiqadi.

Agar 2)-sharti bajarilsa, u vaqtda (16) va (19) formulalardan $\vdash A \to B$ ni keltirib chiqaramiz.

Agar $A \to \overline{\overline{B}}$ $(\overline{\overline{A}} \to B)$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda $A \to B$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga ikki martalik inkorni tushirish qoidasi deb aytamiz.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi.
2. Mantiqiy bog‘lovchilar. Simvollar. Qismiy formula.
2.Isbotlanuvchi formula ta’rifi. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi.
3. Keltirib chiqarish qoidalari.
4.Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari.
5.Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish va murakkab xulosa qoidalari.
6.Sillogizm, kontrpozitsiya va ikki martalik inkorni tushirish qoidalari.

13-MAVZU	L **NAZARIYA UCHUN GYODELNING TO‘LIQLIK HAQIDAGI TEOREMASI.**

REJA:

1.Mulohazalar hisobining yechilish muammosi.
2.Mulohazalar hisobining zidsizlik muammosi.
3.Mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi.
4.Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkin-
lik muammosi.

Yechilish muammosi. –Zidsizlik muammosi. –To‘liqlilik muammosi. –Erkinlik muammosi. –Aksiomatik nazariya. –Tor ma’noda to‘liq. –Keng ma’noda to‘liq. –Erkin aksioma. –Erkin aksiomalar sistemasi. –Tengkuchli formulalar.

Har qanday aksiomatik nazariyani asoslash uchun quyidagi to‘rtta:
1) yechilish;
2) zidsizlik;
3) to‘liqlilik;
4) erkinlik
muammolarini hal qilishga to‘g’ri keladi.

Mulohazalar hisobining yechilish muammosi

Mulohazalar hisobidagi ixtiyoriy berilgan formulani isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini aniqlab beruvchi algoritmning mavjudligini isbotlash muammosi mulohazalar hisobining yechilish muammosi deb ataladi.

1-teorema. *Mulohazalar hisobi uchun yechilish muammosi hal qilinuvchidir (yechiluvchidir).*

Isbot. Oldingi paragrafda aytilganday mulohazalar hisobining istalgan formulasini mulohazalar algebrasining formulasi sifatida qarash mumkin. Demak, bu formulaning mantiqiy qiymatini o‘zgaruvchilarning istalgan qiymatlar satrida aniqlash mumkin.

A-mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi, $x_1, x_2,..., x_n$ lar esa A formulaning ifodasiga kiruvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsin.

$R\alpha_1..\alpha_n\ (A)$ qiymatini hamma 2^n ta $(\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n)$ qiymatlar satrida hisoblab chiqamiz. Agar hamma qiymatlar satrida $R\alpha_1..\alpha_n\ (A) = 1$ bo‘lsa, u holda A formula aynan chin bo‘ladi. Demak, 8-§ dagi 3-teoremaga asosan A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi bo‘ladi.

Agar shunday $(\alpha_1^0, \alpha_2^0,..., \alpha_n^0)$ qiymatlar satri topilib, $R\alpha_1^0...\alpha_n^0(A) = 0$ bo‘lsa, u vaqtda A aynan chin formula bo‘lmaydi. Shunday qilib, mulohazalar hisobining istalgan formulasini isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini ko‘rsatuvchi yuqorida bayon etilgan algoritm mavjud ekan. Demak, mulohazalar hisobi algoritmik yechiluvchi nazariyadir.

Mulohazalar hisobining zidsizlik muammosi

1-ta’rif. *Agar mulohazalar hisobining ixtiyoriy A va $\overline{A}$ formulalari bir paytda isbotlanuvchi formulalar bo‘lolmasa, u holda bunday mulohazalar hisobi ziddiyatsiz aksiomatik nazariya, aks holda esa ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariya deb ataladi.*

Demak, ziddiyatsiz mulohazalar hisobida A va uning inkori bo‘lgan $\overline{A}$ birgalikda isbotlanuvchi formulalar bo‘laolmaydilar.

Mulohazalar hisobida zidsizlik muammosi quyidagicha qo‘yiladi: berilgan mulohazalar hisobi ziddiyatlilik yoki ziddiyatsizmi?

2-teorema. *Agar mulohazalar hisobida isbotlanuvchi A va $\overline{A}$ formulalar mavjudligi aniqlansa, u holda bu mulohazalar hisobida istalgan B formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.*

Isbot. Bundan keyin har qanday isbotlanuvchi formulani R va $\overline{R} = F$ bilan belgilaymiz.

1.Avval har qanday B uchun

$$\vdash B \to R \qquad (1)$$

formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, I_1 - aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash R \to (B \to R) \qquad (2)$$

ni hosil qilamiz.

Ammo shartga ko‘ra R isbotlanuvchi formula, ya’ni

$$\vdash R \qquad (3)$$

U holda (2) va (3) formulalardan xulosa qoidasiga asosan (1) formulaning to‘g’riligi kelib chiqadi.

2.Endi har qanday V uchun

$$\vdash F \to B \qquad (4)$$

formulaning isbotlanuvchi ekanligini tasdiqlaymiz.

Haqiqatan ham, IV_1 - aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash (\overline{B} \to R) \to (\overline{R} \to \overline{\overline{B}}) \qquad (5)$$

formula kelib chiqadi.

Ammo isbotlaganimizga asosan

$$\vdash (\overline{B} \to R). \qquad (6)$$

O‘z navbatida (6) va (5) lardan xulosa qoidasiga binoan

$$\vdash \overline{R} \to \overline{\overline{B}} \qquad (7)$$

formulani hosil qilamiz.

Ikki karralik inkor amalini tushirish qoidasidan foydalanib, va $\overline{R}$ ni F bilan almashtirsa

$$\vdash F \to B$$

formulaga ega bo‘lamiz, ya’ni (4) isbotlanuvchi formuladir.

3.Har qanday A uchun

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to F \qquad (8)$$

formula isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, I_1 va IV_1 aksiomalarga asosan quyidagilar isbotlanuvchi formulalar bo‘ladi:

$$\vdash A \to (R \to A), \qquad (9)$$

$$\vdash (R \to A) \to (\overline{A} \to F) \qquad (10)$$

(9) va (10) lardan sillogizm qoidasiga binoan

$$\vdash A \to (\overline{A} \to F)$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bu formuladan asoslarni birlashtirish qoidasini qo‘llash natijasida $\vdash A \wedge \overline{A} \to F$ formulaga kelamiz, ya’ni (8) ga ega bo‘lamiz.

(4) va (8) lardan sillogizm qoidasiga asosan

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to B \qquad (11)$$

formulani hosil qilamiz.

Ammo teoremaning shartiga ko‘ra $\vdash A$ va $\vdash \overline{A}$, u holda $\vdash A \wedge \overline{A}$. Demak, B isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

3-teorema. *Mulohazalar hisobi ziddiyatsiz nazariyadir.*

Isbot. Mulohazalar hisobida A va $\overline{A}$ lar bir vaqtning o‘zida isbotlanuvchi bo‘ladigan hech qanday A formula mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

A-mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsin. Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda 7-§ dagi 1-teoremaga asosan A aynan chin formuladir va, demak $\overline{A}$ - aynan yolg’on formula bo‘ladi. Shuning uchun ham $\overline{A}$ isbotlanuvchi formula bo‘lmaydi.

Demak, bir vaqtda A va $\overline{A}$ lar isbotlanuvchi formulalar bo‘laolmaydi. Shuning uchun ham mulohazalar hisobi ziddiyatga ega emas.

Mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi

2-ta’rif. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasiga shu hisobning biror ixtiyoriy isbotlanmaydigan formulasini yangi aksioma sifatida qo‘shishdan hosil bo‘ladigan aksiomalar sistemasi ziddiyatga ega bo‘lgan mulohazalar hisobiga olib kelsa, bunday mulohazalar hisobiga tor ma’nodagi to‘liq aksiomatik nazariya deb aytiladi.*

3-ta’rif. *Har qanday aynan chin formulasi isbotlanuvchi formula bo‘ladigan mulohazalar hisobiga keng ma’nodagi to‘liq aksiomatik nazariya deb aytiladi.*

Demak, mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi ikkita masalani hal qilishi kerak:

1) yangi aksioma sifatida qandaydir isbotlanmaydigan formulasini aksiomalar sistemasiga qo‘shish natijasida mulohazalar hisobini kengaytirish mumkinmi yoki yo‘qmi?

2) mulohazalar algebrasining har qanday aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi bo‘ladimi yoki yo‘qmi?

Bu masalalarning yechimi quyidagi teoremalarning mazmunidan iborat.

4-teorema. *Mulohazalar hisobi tor ma’noda to‘liqdir*.

Isbot. A-mulohazalar hisobidagi ixtiyoriy isbotlanmaydigan (isbotlanuvchi emas) formula, $x_1, x_2,..., x_n - A$ formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsin.

A isbotlanmaydigan formula ekanligidan u aynan chin formula emas. Demak, $x_1, x_2,..., x_n$ o‘zgaruvchilarning shunday $\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n$ qiymatlar satri mavjudki,

$$R\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n (A(x_1, x_2,..., x_n)) = 0 \qquad (12)$$

bo‘ladi.

$B_1, B_2,.., B_n$ lar $x_1, x_2,..., x_n$ o‘zgaruvchilarga bog’liq ixtiyoriy aynan chin formulalar bo‘lsin.

$B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}$ majmuani (naborni) qaraymiz. Bu yerda

$$B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, & агар\ \alpha_i = 1\ булса, \\ \overline{B_i}, & агар\ \alpha_i = 0\ булса. \end{cases}$$

A formulada $\int_{x_1, x_2,..., x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}} (A)$ o‘rniga qo‘yishni bajarib, ushbu

$$A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}\right) \qquad (13)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

(12) formulaning aynan yolg’on formula ekanligini ko‘rsatamiz. $x_1, x_2,..., x_n$ o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy $\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n$ qiymatlar satrini olamiz. $B_1, B_2,.., B_n$ formula-lar aynan chin formulalar ekanligidan $R\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n (B_i) = 1$ bo‘ladi. U vaqtda $R\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n \left(B_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_i$ o‘rinli.

Demak,

$$R\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n\ A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}\right) = A(\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n) = 0 .$$

Bu yerdan $\overline{A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}\right)}$ning aynan chin formula ekanligi kelib chiqadi va u 7-paragrafdagi 3-teoremaga asosan isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Ikkinchi tarafdan, agar mulohazalar hisobining aksiomalari qatoriga $A(x_1, x_2,..., x_n)$ formulani yangi aksioma sifatida qo‘shib qo‘ysak, u holda yangi hosil bo‘lgan mulohazalar hisobida bu formula aksioma bo‘lganligi uchun isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Shu vaqtning o‘zida yangi mulohazalar hisobida $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2},..., B_n^{\alpha_n}\right)$ formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi, chunki u isbotlanuvchi formuladan o‘rniga qo‘yish qoidasi orqali hosil qilingan.

Shunday qilib, yangi mulohazalar hisobida ikkita $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}\right)$ va $A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}\right)$ isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz. Demak, yangi mulohazalar hisobi ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariya ekan. Bu yerdan uning tor ma’noda to‘liqligi kelib chiqadi.

5-teorema. *Mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir*.

Isbot. Biz (3-teorema) mulohazalar algebrasining har bir aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formula ekanligini isbot qilgan edik. Demak, mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir.

Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkinlik muammosi

Har qanday aksiomatik hisobda aksiomalarning erkinlik masalasi, ya’ni birorta aksiomani sistemaning qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil etish mumkinmi yoki yo‘qmi degan muammo mavjud bo‘ladi.

Agar birorta aksioma uchun bu masala ijobiy hal etilsa, u holda bu aksioma sistema aksiomalari ro‘yxatidan chiqarib tashlanadi va mantiqiy hisob bu bilan o‘zgarmaydi, ya’ni isbotlanuvchi formulalar sinfi o‘zgarmasdan qoladi.

4-ta’rif. *Agar A aksiomani mulohazalar hisobining qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo‘lmasa, u shu mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan erkin aksioma deb ataladi.*

5-ta’rif. *Agar mulohazalar hisobi aksiomalar sistemasining har bir aksiomasi erkin bo‘lsa, u holda mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkin deb aytiladi.*

6-teorema. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir*.

Isbot. A mulohazalar hisobining ixtiyoriy aksiomasi bo‘lsin.

Bu aksiomaning erkinligini isbotlash uchun mulohazalar hisobiga nisbatan quyidagi usulni qo‘llaymiz: mulohazalar hisobi o‘zgaruvchilarini α yoki β qiymat qabul qiluvchi o‘zgaruvchilar sifatida qaraymiz. Bu yerda α chin rolini va β yolg’on rolini o‘ynaydi.

$\wedge, \vee, \rightarrow, -$ amallarni shunday aniqlaymizki, quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin:

1. A aksiomadan tashqari sistemaning hamma aksiomalari tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin.

2. A aksiomadan boshqa, aksiomalar majmuasidan keltirib chiqarilgan har qanday formula ham tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin.

3. A aksioma tarkibidagi o‘zgaruvchilarning ayrim qiymatlarida β qiymatni qabul qilsin.

Agar A aksiomaga nisbatan yuqorida keltirilgan interpretatsiya (izohlash) o‘rinli bo‘lsa, u holda A aksioma boshqa aksiomalardan erkin ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo‘lganda edi, u shartlarning ikkinchisiga asosan tarkibidagi o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilib, bu esa 3-shartga zid bo‘lardi. Demak, A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin emas va u sistemadagi erkin aksiomadir.

O‘zgaruvchilarining o‘rniga ularning ayrim qiymatlari qo‘yilganda ham formulalar ma’noga ega deb kelishamiz. Masalan, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow A$, $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ va boshqalar.

6-ta’rif. *Tarkibidagi o‘zgaruvchilarni α va β bilan almashtirganda bir xil qiymat qabul qiluvchi A va B formulalar teng kuchli formulalar deb ataladi hamda bu $A = B$ ko‘rinishda yoziladi.*

Tenglik belgisi $\wedge, \vee, \rightarrow$ mantiqiy bog’lovchilarga nisbatan sustroq bog’laydi deb hisoblaymiz.

Endi II_1 - aksiomaning erkinligini isbot qilaylik.

Buning uchun kon’yunksiyadan tashqari qolgan hamma mantiqiy amallarni xuddi mantiq algebrasidagiday va kon’yunksiya amalini $x \wedge y = y$ tenglik orqali aniqlaymiz:

x	$\overline{x}$
α	β

x	y	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \wedge y$
α	α	α	α	α

β	α	α	β	α	β	β
		β	α	α	α	α
		β	β	β	α	β

Ushbu interpretatsiya uchun yuqorida keltirilgan uchta shartlarning bajarilishini ko‘rsatamiz.

II_1 - aksiomadan tashqari mulohazalar hisobining qolgan hamma aksiomalari o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida α qiymat qabul qiladi (bu holni chinlik jadvali orqali ko‘rsatish mumkin).

Haqiqatan ham I, III va IV guruh aksiomalarida kon’yunksiya amali qatnashmaydi. Qolgan mantiqiy amallar xuddi mulohazalar algebrasidagiday aniqlangan.

Mulohazalar algebrasida bu formulalar aynan chin formulalar bo‘lganligidan, ushbu interpretatsiyada o‘zgaruvchilarning barcha qiymatlarida ular α qiymat qabul qiladi.

II_1, II_2 va II_3 - aksiomalarni ko‘raylik.

II_2 va II_3 aksiomalar qabul qilingan interpretatsiyada $y \to y$ formulaga teng bo‘ladi va $x = \beta$, $y = \alpha$ qiymatlarda β qiymat qabul qiladi, ya’ni hech qachon α qiymat qabul qilmaydi.

Endi aynan α ga teng formulalardan keltirib chiqarish qoidasiga asosan hosil etilgan formulalar ham α ga tengligini ko‘rsatish qoldi, ya’ni 2-shartning bajarilishini ko‘rsatish kerak.

Oldingi paragraflarda aynan chin formulalarga o‘rniga qo‘yish va xulosa qoidalarini qo‘llash natijasida chiqarilgan formulalar aynan chin formulalar bo‘lishini ko‘rsatgan edik. Demak, 2-shart ham bajariladi.

Shunday qilib, mulohazalar hisobining II_1-aksiomasi erkin aksioma ekan.

Xuddi shunday sxemadan foydalanib, mulohazalar hisobining I, II, III va IV-guruhlaridagi har bir aksiomaning erkinligini ko‘rsatish mumkin. Demak, mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Mulohazalar hisobining yechilish muammosi.
2.Mulohazalar hisobining zidsizlik muammosi.
3.Mulohazalar hisobining to‘liqlilik muammosi
4.Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkinlik muammosi.
5.Aksiomatik nazariya haqida tushuncha.
6.Tor ma’noda to‘liq. Keng ma’noda to‘liq.
7.Erkin aksiomalar sistemasi. Teng kuchli formulalar.

14-MAVZU	**PREDIKATLAR ALGEBRASI. PREDIKATLAR VA KVANTORLAR. PREDIKATLAR ALGEBRASINING FORMULALARI.**

REJA:

1. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar
2. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari
3. Predikatlar mantiqi formulasining ta'rifi
4. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasi
5. Predikatlar mantiqining teng kuchli formulalari

-Predikat. -Predikatlar mantiqi. -Bir joyli predikat. -Ko'p joyli predikat. Predikatning chinlik to'plami. -Aynan chin predikat. -Aynan yolg'on predikat. -Predikatlar ustida mantiqiy amallar. -Umumiylik kvantori. -Mavjudlik kvantori. -Kvantorli amallar bilan kon'yunktsiya va diz'yunktsiya amallari o'rtasidagi munosabat.

Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg'on qiymat olishi nuqtai nazaridan qaraladi. Mulohazalarning na strukturasi va hatto na mazmuni qaralmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi.

Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; -romb; demak, - parallelogramm». Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo'ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo'linmas, bir butun deb va ularning ichki strukturasini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo'lishiga qaramasdan, ko'pgina fikrlarni analiz qilishga qodir (etarli) emas.

Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya'ni elementar mulohazalarning ichki strukturasini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo'ldi.

Bunday sistema mulohazalar mantiqini o'zining bir qismi sifatida butunlayiga o'z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

Predikatlar mantiqi an'anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **Sub'yekt** va **predikat** qismlarga bo'ladi.

Sub'yekt – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; predikat – bu Sub'yektni tasdiqlash.

Masalan, «5 - tub son» mulohazasida «5» - Sub'yekt, «tub son» - predikat. Bu mulohazada «5» «tub son bo'lish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi.

Agar keltirilgan mulohazada ma'lum 5 sonini natural sonlar to'plamidagi o'zgaruvchi bilan almashtirsak, u holda « - tub son» ko'rinishidagi mulohaza formasiga (shakliga) ega bo'lamiz. o'zgaruvchining bir xil qiymatlari (masalan, =13, =3, =19) uchun bu forma chin mulohazalar va o'zgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, =10, =20) uchun bu forma yolg'on mulohazalar beradi.

Aniqki, bu forma bir argumentli funktsiyani aniqlaydi. Bu funktsiyaning aniqlash sohasi natural sonlar to'plami va qiymatlar sohasi to'plam bo'ladi.

1-ta'rif. *M to'plamda aniqlangan va* $\{1, 0\}$ *to'plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli P(x) funktsiyaga bir joyli (bir o'rinli) predikat deb aytiladi.*

M to'plamga *P(x)* predikatning aniqlanish sohasi deb aytamiz.

P(x) predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to'plamiga *P(x)* predikatning **chinlik to'plami** deb aytiladi, ya'ni *P(x)* predikatning chinlik to'plami - $I_p = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to'plamdir.

Masalan, «x-tub son» - $\mathrm{P}(x)$ predikati N natural sonlar to'plamida aniqlangan va uning I_p **chinlik to'plami** hamma tub sonlar to'plamidan iborat. «$\sin x = 0$» - *Q(x)* predikati *R* haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan va uning I_Q chinlik to'plami $I_Q = \{k\pi, k \in Z\}$. «Parallelogramm diagonallari x bir-biriga perpendikulyardir» - *Ф(x)* predikatning aniqlanish sohasi hamma parallelogrammlar to'plami va chinlik to'plami hamma romblar to'plami bo'ladi.

Bir joyli predikatlarga yuqorida keltirilgan misollar predmetlarning xususiyatlarini ifodalaydi.

2-ta'rif. *Agar* M *to'plamda aniqlangan* $\mathrm{P}(x)$ *predikat uchun* $I_p = M (I_p = \phi)$ *bo'lsa, u aynan chin (aynan yolg'on) deb ataladi.*

Endi **ko'p joyli predikat** tushunchasini aniqlaymiz. Ko'p joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi binar munosabatni ifodalaydi. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in Z$) binar munosabat ikki argumentli $\mathrm{P}(x, y)$ funktsiyani ifodalaydi. Bu funktsiya $Z \times Z$ to'plamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to'plam bo'ladi.

3-ta'rif. $M = M_1 \times M_2$ *to'plamda aniqlangan va* $\{1, 0\}$ *to'plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli* $\mathrm{P}(x, y)$ *funksiyaga **ikki joyli** predikat deb ataladi.*

Masalan, «$x = y$» - $Q(x, y)$ **ikki joyli predikat** $R^2 = R \times R$ to'plamda aniqlangan; «$x \perp y$» - x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar - $F(x, y)$ **ikki joyli predikat** bir tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqlar to'plamida aniqlangan.

n - joyli joyli predikat ham xuddi shunday aniqlanadi.

1-misol. Quyida berilgan mulohazalarning qaysi biri predikat bo'lishini va ularning chinlik to'plamini aniqlang. Bir joyli predikatlarning aniqlanish sohasi *M*=*R* va ikki joyli predikatlar uchun aniqlanish sohasi $M = R \times R$ bo'lsin:

1) $x + 5 = 1$; 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 3) $x + 2 < 3x - 4$;

4) $(x + 2) - (3x - 4)$; 5) $x^2 + y^2 > 0$.

Yechim. 1) Berilgan ifoda bir joyli predikat *A(x)* bo'ladi va $I_A = \{-4\}$;

2) Ifoda bilan berilgan mulohaza bir joyli predikat *A(x)* bo'ladi va $I_A = \{1\}$;

3) Ifoda bilan berilgan mulohaza bir joyli predikat *A(x)* bo'ladi va $I_A = (3, +\infty)$;

4) Ifoda bilan berilgan mulohaza predikat bo'lmaydi;

5) Berilgan ifoda ikki joyli predikat $A(x, y)$ bo'ladi va $I_A = R \times R \setminus \{(0,0)\}$.

2-misol. Quyidagi predikatlarning qaysi birlari aynan chin bo'lishini aniqlang: 1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

4) $(x + 1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$.

Yechim. Ravshanki, 1), 3) va 4) predikatlar aynan chin bo'ladilar. 2) predikatda $x=0,\ y=0$ qiymatlarida tengsizlik buziladi. 5) predikatda bo'lsa, x ning hamma musbat qiymatlarida tengsizlik ishorasi buziladi. Demak, 2) va 5) predikatlar aynan chin predikatlar bo'la olmaydi.

Predikatlar ustida mantiqiy amallar

Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin va yolg'on (1,0) qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko'raylik.

M to'plamda *P(x)* va *Q(x)* predikatlar aniqlangan bo'lsin.

4-ta'rif. *Берилган M то'пламда аниқланган* $\mathrm{P}(x)$ *ва* $Q(x)$ *предикатларнинг конъюнкцияси деб, фақат ва фақат* $x \in M$ *нинг қийматларида* $\mathrm{P}(x)$ *ва* $Q(x)$ *лар бир вақтда чин қиймат қабул қилгандагина чин қиймат қабул қилиб, қолган барча ҳолларда ёлг'он қиймат қабул қилувчи янги предикатга айтилади ва у* $\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ *каби белгиланади.*

$\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ предикатнинг чинлик соҳаси $I_p \cap I_Q$ то'пламдан, яъни $\mathrm{P}(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар чинлик соҳаларининг умумий қисмидан иборат бо'лади.

Масалан, $\mathrm{P}(x)$: «x - жуфт сон» ва $Q(x)$: «x - toq сон» предикатлар учун «x-жуфт сон ва x-toq сон»: $\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ предикатлар конъюнкцияси мос келади ва унинг чинлик соҳаси ϕ - бо'ш то'пламдан иборат бо'лади.

4-ta'rif. Berilgan *M* to'plamda aniqlangan *P(x)* va *Q(x)* predikatlarning kon'yunktsiyasi deb, faqat va faqat $x \in M$ ning qiymatlarida $\mathrm{P}(x)$ *ва* $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg'on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \wedge Q(x)$ kabi belgilanadi.

$P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_p \cap I_Q$ to'plamdan, ya'ni *P(x)* va *Q(x)* predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo'ladi.

Masalan, *P(x)*: « x- juft son» va : « x- toq son» predikatlar uchun «x -juft son va x -toq son»: $P(x) \wedge Q(x)$ predikatlar kon'yunktsiyasi mos keladi va uning chinlik sohasi ϕ - bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.

5-ta'rif. Berilgan *M* to'plamda aniqlangan *P(x)* va *Q(x)* predikatlarning diz'yunktsiyasi deb, faqat va faqatgina $x \in M$ ning qiymatlarida aniqlangan *P(x)* va *Q(x)* predikatlar yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $P(x) \vee Q(x)$ kabi belgilanadi.

$P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi to'plamdan iborat bo'ladi.

6-ta'rif. Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda predikat chin qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida *P(x)* predikat yolg'on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga *P(x)* predikatning inkori deb aytiladi va u $\bar{P}(x)$ kabi belgilanadi.

Bu ta'rifdan $I_{\bar{p}} = M \setminus I_p = CI_p$ kelib chiqadi.

7-ta'rif. *Фақат ва фақатгина* $x \in M$ *лар учун бир вақтда* $\mathrm{P}(x)$ *чин қиймат ва* $Q(x)$ *ёлg'он қиймат қабул қилганда ёлg'он қиймат қабул қилиб, қолган ҳамма ҳолларда чин қиймат қабул қиладиган* $\mathrm{P}(x) \to Q(x)$ *предикатга* $\mathrm{P}(x)$ *ва* $Q(x)$ *предикатларнинг импликацияси деб айтилади.*

Ҳар бир тайинланган $x \in M$ учун

$$\mathrm{P}(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

тенгкучлилик то'g'ри бо'лганлигидан $I_{p \to Q} = I_{\bar{p}} \cup I_Q = CI_p \cup I_Q$ о'ринлидир.

7-ta'rif. Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda *P(x)* chin qiymat va *Q(x)* yolg'on qiymat qabul qilganda yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $P(x) \to Q(x)$ predikatga *P(x)* va *Q(x)* predikatlarning implikatsiyasi deb aytiladi.

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun $P(x) \to Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$ teng kuchlilik to'g'ri bo'lganligidan $I_{p \to Q} = I_{\bar{p}} \cup I_Q = CI_p \cup I_Q$ o'rinlidir.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari

Umumiylik kvantori. *M* to'plamda aniqlangan *P(x)* predikat berilgan bo'lsin. Har qanday $x \in M$ uchun *P(x)* chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\forall x\, \mathrm{P}(x)$ formada yozamiz. Bu mulohaza endi *x* ga bog'liq bo'lmay qoladi va u quyidagicha o'qiladi: «Har qanday *x* uchun *P(x)* chin». ∀ simvol umumiylik kvantori deb aytiladi. Aytilgan fikrlarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall x\, \mathrm{P}(x) = \begin{cases} 1, \; агар\; хамма\; x \in M \;\; учун\; P(x) = 1\; булса, \\ 0, \; акс\; холда. \end{cases}$$

$\mathrm{P}(x)$ предикатда x ни эркин (озод) о'згарувчи ва $\forall x\, \mathrm{P}(x)$ мулоҳазада x ни умумийлик квантори $\forall$ билан боg'ланган о'згарувчи деб айтилади.

Мавжудлик квантори. $\mathrm{P}(x)$ предикат M то'пламда аниқланган бо'лсин. Неч бо'лмаганда бирорта $x \in M$ учун $\mathrm{P}(x)$ предикат чин ва акс ҳолда ёлg'он қиймат қабул қилувчи мулоҳаза ифодасини $\exists x P(x)$ шаклда ёзамиз. Бу мулоҳаза x га боg'лиқ эмас ва уни қуйидагича о'қиш мумкин: «Шундай x мавжудки, $\mathrm{P}(x) = 1$», яъни

P(x) predikatda *x* ni erkin (ozod) o'zgaruvchi va $\forall x\, \mathrm{P}(x)$ mulohazada *x* ni umumiylik kvantori ∀ bilan bog'langan o'zgaruvchi deb aytiladi.

Mavjudlik kvantori. *P(x)* predikat *M* to'plamda aniqlangan bo'lsin. Hech bo'lmaganda birorta $x \in M$ uchun *P(x)* predikat chin va aks holda yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\exists x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza x ga bog'liq emas va uni quyidagicha o'qish mumkin: «Shunday x mavjudki, $\mathrm{P}(x)=1$», ya'ni

$$\exists x\ \mathrm{P}(x)=\begin{cases}1, \text{ агар бирорта } x\in M \text{ учун } P(x)=1 \text{ булса,}\\ 0, \text{ акс холда.}\end{cases}$$

$\exists$ simvol mavjudlik kvantori deb ataladi. $\exists x P(x)$ mulohazada x o'zgaruvchi $\exists$ kvantori bilan bog'langan bo'ladi.

Chekli son elementlari bo'lgan $M=\{a_1, a_2,..., a_n\}$ to'plamda aniqlangan *P(x)* predikat berilgan bo'lsin. Agar *P(x)* predikat aynan chin bo'lsa, u vaqtda $P(a_1), P(a_2),..., P(a_n)$ mulohazalar ham chin bo'ladi. Shu holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge ...\wedge P(a_n)$ kon'yunktsiya ham chin bo'ladilar.

Agar hech bo'lmaganda birorta $a_k \in M$ element uchun $P(a_k)$ yolg'on bo'lsa, u holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge ...\wedge P(a_n)$ kon'yunktsiya ham yolg'on bo'ladi.

Demak, $\forall x P(x) = P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge ...\wedge P(a_n)$ teng kuchli ifoda to'g'ri bo'ladi.

Yuqoridagidek fikr yuritish yo'li bilan $\exists x P(x) = P(a_1)\vee P(a_2)\vee ...\vee P(a_n)$ teng kuchli ifodaning mavjudligini ko'rsatish mumkin.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.
2.Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.
3.Bir joyli va ko'p joyli predikatlar.
4.Predikatning chinlik to'plami.
5.Aynan chin va aynan yolg'on predikatlar.

15-MAVZU	**PREDIKATLAR ALGEBRASI FORMULALARINING NORMAL FORMALARI.**

REJA:

1.Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli.

2.Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar.

Predikatlar mantiqining simvollari. –Formulaning ta'rifi. –Formulaning qiymati tushunchasi. –Tengkuchli formulalar. –Asosiy tengkuchli formulalar. –Tengkuchli formulalarning isbotlari.

Predikatlar mantiqi formulasining normal shakli

1-ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon'yunktsiya, diz'yunktsiya* $(-,\ \wedge,\ \vee)$ *amallari va kvantorli amallar* $(\forall,\ \exists)$ *qatnashib, inkor amali elementar formulalarga (predmet o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarga) tegishli bo'lsa, bunday formula* ***deyarli normal shaklda*** *deyiladi.*

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin. Masalan,

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$$

formulani **deyarli normal shaklga** keltiraylik.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \overline{(\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) =$$

$$= \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Демак,

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv IxP(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)\,.$$

Predikatlar mantiqining **deyarli normal shakldagi** formulalari orasida **normal shakldagi formulalari** muhim rol o'ynaydi.

Bu formulalarda kvantorli amallar yoki butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya'ni normal shakldagi formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\sigma x_1)\,(\sigma x_2)\,.....\,(\sigma x_n)\ A\,(x_1, x_2, ..., x_m)\,, \quad n \le m\,,$$

bunda (σx_i) simvoli o'rniga $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlarning biri tushuniladi va A formula ifodasida kvantorlar bo'lmaydi.

1-teorema. *Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.*

Isbot. Formula **deyarli normal shaklga** keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko'rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo'lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo'lmaydi va, demak, u normal shakl ko'rinishida bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, teorema ko'pi bilan *k* amalni qamragan formula uchun to'g'ri bo'lsin va uni shu faraz asosida *k+1* amalni qamragan formula uchun isbot qilamiz.

A *k+1* amalni o'z ichiga olgan formula va uning ko'rinishi $\sigma x L(x)$ shaklda bo'lsin. Bu yerda σx kvantorlarning birini ifodalaydi.

L(x) formula *k* amalni o'z ichiga olganligi tufayli uni normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz. U vaqtda $\sigma x L(x)$ formula ta'rifga asosan normal shaklda bo'ladi.

A formula $\overline{L}$ ko'rinishda bo'lsin, bunda L formula normal shaklga keltirilgan va k amalni o'z ichiga olgan deb hisoblanadi. U holda

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)} \quad \text{va} \quad \overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$$

teng kuchliliklardan foydalanib, inkor amalini predikatlar ustiga tushiramiz. Natijada A formulani normal shaklga keltirgan bo'lamiz.

Endi A formula $L_1 \vee L_2$ ko'rinishda bo'lsin. Bu yerda L_1 va L_2 lar normal shaklga keltirilgan formulalar deb qaraladi.

L_2 formulada bog'langan predmet o'zgaruvchilarni shunday qayta nomlaymizki, L_1 va L_2 formulalardagi hamma bog'langan predmet o'zgaruvchilar har xil bo'lsin. U vaqtda L_1 va L_2 formulalarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$L_1 \equiv (\sigma x_1)\,(\sigma x_2)\,.....\,(\sigma x_m)\;\alpha_1\;(x_1, x_2, ..., x_n), \quad m \le n,$$

$$L_2 \equiv (\sigma y_1)\,(\sigma y_2)\,.....\,(\sigma y_p)\;\alpha_2\;(y_1, y_2, ..., y_q), \quad p \le q\,.$$

$$C \vee \forall x B(x) = \forall x[C \vee B(x)] \text{ va } \overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$$

teng kuchliliklardan foydalanib, L_2 formulani $(\sigma x_1), (\sigma x_2), ..., (\sigma x_m)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz, ya'ni A formulani ushbu ko'rinishga keltiramiz:

$$A \equiv (\sigma x_1)\,(\sigma x_2)\,.....\,(\sigma x_m)\,(\alpha_1\;(x_1, x_2, ..., x_n) \vee (\sigma y_1)\,(\sigma y_2)\,.....\,(\sigma y_p)\;\alpha_2\;(y_1, y_2, ..., y_q))$$

So'ngra $\alpha_1\;(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani $(\sigma y_1), (\sigma y_2)\;, ..., (\sigma y_p)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz. Natijada A formulaning normal shaklini hosil qilamiz:

$$A \equiv (\sigma x_1)\,(\sigma x_2)\,...\,(\sigma x_m)\,(\sigma y_1)\,(\sigma y_2)\,...\,(\sigma y_p)\,(\alpha_1\;(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \;\alpha_2\;(y_1, y_2, ..., y_q)).$$

$L_1 \wedge L_2$ ko'rinishidagi A formulani normal shaklga keltirishning isboti xuddi yuqorida kabi bo'ladi.

Agar formulani normal shaklga keltirish jarayonida $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ yoki $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ ko'rinishdagi ifodalarni ko'rishga to'g'ri kelsa, u holda

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x\;[A(x) \wedge B(x)] \text{ va } \exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x[A(x) \vee B(x)]$$

teng kuchliliklardan foydalanish kerak bo'ladi.

1-misol. $A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin. A formulada tengkuchli almashtirishlarni o'tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x,y)} \equiv \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y(P(x,y) \wedge \exists z \overline{Q(x,z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z(P(x,y) \wedge \overline{Q(x,y)}).$$

Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar

2-ta'rif. *Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo'lib, bu qiymatlarda A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining A formulasi M sohada **bajariluvchi formula** deb aytiladi.*

3-ta'rif. *Agar shunday soha mavjud bo'lib, unda A formula bajariladigan bo'lsa, u vaqtda A **bajariluvchi formula** deb aytiladi.*

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo'lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

4-ta'rif. *Agar A ning ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid **hamma o'zgaruvchilarning** qiymatlarida A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada **aynan chin** formula deb aytiladi.*

5-ta'rif. *Agar A formula har qanday sohada aynan chin bo'lsa, u holda A ga **umumqiymatli formula** deb aytiladi.*

6-ta'rif. *Agar A ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula yolg'on qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada **aynan yolg'on formula** deb aytiladi.*

Keltirilgan ta'riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi:

1. Agar A umumqiymatli formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo'ladi.

2. Agar A M sohada aynan chin formula bo'lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo'ladi.

3. Agar M sohada A aynan yolg'on formula bo'lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo'ladi.

4. Agar A bajarilmaydigan formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg'on formula bo'ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

7-ta'rif. *Umumqiymatli formulaga **mantiq qonuni** deb aytiladi.*

Endi bir nechta misollar keltiraylik:

1-misol: $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x,y):$ «$x<y$» predikat $M = E \times E$ sohada aniqlangan ($E = \{0,1,2,...,n..\}$) bo'lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ M sohada aynan chin formula bo'ladi, demak, bu sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1 = \{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x<y$» predikat chekli $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada, aniqlangan bo'lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ M_1 sohada aynan yolg'on formula bo'ladi va, demak, M_1 sohada bajariluvchimasdir. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x,y)$ umumqiymatli formula bo'lmaydi.

2-teorema. *A umumqiymatli formula bo'lishi uchun uning inkori bajariluvchi formula bo'lmasligi yetarli va zarurdir.*

3-теорема. *A bajariluvchi formula bo'lishi uchun* $\overline{A}$ *ning umumqiymatli formula bo'lmasligi yetarli va zarurdir.*

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Predikatlar mantiqining simvollari va formulasi.
2. Predikatlar mantiqi formulasining qiymati. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengkuchli formulalar.
3. Formulaning deyarli normal shakli. Formulaning normal shakli.
4. Har qanday formulani normal shaklga keltirish mumkinligi.
5. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar. Aynan chin va aynan yolg'on formulalar.
6. Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar haqidagi teoremalar.

16-MAVZU	**YECHILISH MUAMMOSI. CHEKLI SOHALARDA YECHILISH MUAMMOSI. YOPIQ FORMULA.**

REJA:

1.Predikatlar mantiqida yechilish muammosi.
2.Chekli sohalarda yechilish muammosi.
3.Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatna-shuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

Yechilish muammosi. –Chekli sohalarda yechilish muammosi. –Yopiq formula. –Formulaning umumiy yopilishi. –Formulaning mavjudligini yopish. –Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi.

Yechilish muammosi

Predikatlar mantiqida yechilish muammosi mulohazalar algebrasida qanday qo'yilgan bo'lsa, xuddi shunday qo'yiladi: predikatlar mantiqining istalgan formulasi yoki umumqiymatli, yoki bajariluvchi, yoki aynan yolg'on (bajarilmas) formula ekanligini aniqlab beruvchi algoritm mavjudmi yoki yo'qmi? Bu masala **yechilish muammosi** deb ataladi. Agar bunday algoritm mavjud bo'lsa edi, u (xuddi mulohazalar algebrasidagiday) predikatlar mantiqidagi istalgan formulani aynan chinligini aniqlab beruvchi kriteriyaga keltirilgan bo'lardi.

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo'lsa, predikatlar mantiqi uchun bu muammoni yechish katta qiyinchiliklarga duch keldi. XX asrning 30-yillarida algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berilgandan so'ng mazkur muammo umumiy holda ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya'ni izlangan algoritm mavjud emasligi ma'lum bo'lib qoldi.

1936 yilda amerikalik olim A.Chyorch predikatlar mantiqining **yechilish muammosi** umumiy holda algoritmik yechilmasligini isbotladi, ya'ni predikatlar mantiqining istalgan formulasi qaysi (umumqiymatli, bajariluvchi va bajarilmas) sinfga kirishini aniqlab beradigan algoritm mavjud emasligini ko'rsatdi.

Yechilish muammosi predikatlar mantiqi uchun ijobiy yechilmasada, predikatlar mantiqi formulalarining ba'zi sinflari uchun bu muammo ijobiy hal etilishini ko'rsataylik.

Chekli sohalarda yechilish muammosi

Yechilish muammosi chekli sohalarda yechiluvchidir, ya'ni ijobiy hal bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda kvantorli amallarni kon'yunksiya va diz'yunksiya amallari bilan almashtirish mumkin. Natijada predikatlar mantiqi formulasi mulohazalar algebrasi formulasiga keltiriladi. Ma'lumki, mulohazalar algebrasi uchun yechilish muammosi yechiladigandir.

Masalan, $\forall x\exists y[P(x,y)\vee\overline{P(x,x)}]$ formula $M=\{a,b\}$ ikki elementli chekli sohada aniqlangan bo'lsin. U holda uni ushbu ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\forall x\exists y[P(x,y)\vee\overline{P(x,x)}]\equiv\forall x[P(x,a)\vee\overline{P(x,x)}\vee P(x,b)]\equiv$$

$$\equiv[P(a,a)\vee\overline{P(a,a)}\vee P(a,b)]\wedge[P(b,a)\vee\overline{P(b,b)}\vee P(b,b)].$$

Hosil etilgan kon'yunktiv normal shakldagi formulaning har bir elementar diz'yunksiyasi ifodasida bitta mulohaza o'zining inkori bilan birgalikda qatnashmoqda. Demak, mulohazalar algebrasining bu formulasi doimo chin qiymat qabul qiladi, ya'ni **aynan chin** bo'ladi.

Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatnashuvchi normal shakldagi formulalar uchun yechilish muammosi

1-ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi tarkibida erkin predmet o'zgaruvchilar bo'lmasa, u holda bunday formula* ***yopiq*** *formula deb aytiladi.*

2-ta'rif. *Agar predikatlar mantiqi formulasi* C *tarkibida* $x_1,x_2,...,x_n$ *erkin o'zgaruvchilar mavjud bo'lsa, u holda*

$$A\equiv\forall x_1\forall x_2...\forall x_n C(x_1,x_2,...,x_n)$$

formula C *formulaning* ***umumiy yopilishi*** *va*

$$B=\exists x_1\exists x_2...\exists x_n C(x_1,x_2,...,x_n)$$

formula C *formulaning* ***mavjudligini yopish*** *deb aytiladi.*

1-teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi, tarkibida (ifodasida) faqat n ta mavjudlik kvantori qatnashgan hamda bir elementli istalgan sohada aynan chin bo'lsa, u holda u umumqiymatli formuladir.*

Isbot. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi

$$B\equiv\exists x_1\exists x_2...\exists x_n C(q_1,q_2,...,P_1,P_2,...,Q_1,Q_2,...)\qquad(1)$$

ko'rinishda bo'lsin, bunda C formula ifodasida kvantorlar qatnashmaydi, q_i - mantiqiy o'zgaruvchi, P_i - bir joyli predikatlar, Q_i - ikki joyli predikatlar.

Bu formulaning chinlik qiymati uning tarkibida qatnashayotgan $q_1,q_2,...$ mantiqiy o'zgaruvchilar va $P_1,P_2,...,Q_1,Q_2,...$ predikatlarga bog'liq.

Teoremaning shartiga asosan bir a elementli istalgan $M=\{a\}$ sohada bu formula aynan chin, ya'ni

$$C(q_1,q_2,...,P_1(a),P_2(a),...,Q_1(a,a),Q_2(a,a),...)\qquad(2)$$

fomula aynan chin bo’ladi.

Aniqki, (2) formula mulohazalar algebrasining formulasi bo’ladi.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U vaqtda shunday M_1 soha va o’zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmuasi $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ mavjudki, unda (1) formula yolg’on qiymat qabul qiladi, ya’ni

$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C\ (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) = 0$. (3)

(3) formulaning inkorini olamiz:

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n\ \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} = 1.$$

Bu yerdan

$\overline{C}(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)$ (4)

formulaning M_1 sohaga oid predmet o’zgaruvchilarning qanday olinishidan qat’iy nazar aynan chinligi kelib chiqadi.

M_1 sohadan ixtiyoriy x_0 elementni olib, uni (4) formuladagi predmet o’zgaruvchilar o’rniga qo’yib chiqamiz. U holda

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...)} = 1.$$

Demak,

$$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), ..., Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), ...) = 0.$$

Bu natija (2) formulaning aynan chin ekanligiga ziddir va (1) formula umumqiymatli emas degan farazimizning noto’g’riligini ko’rsatadi.

Shunday qilib, (1) formula umumqiymatlidir.

2-teorema. *Agar predikatlar mantiqining normal shakldagi yopiq formulasi ifodasida n ta umumiylik kvantori qatnashsa va bu formula ko’pi bilan n ta elementli har qanday to’plamda (sohada)* ***aynan chin*** *bo’lsa, u holda u umumqiymatli bo’ladi.*

Isbot. Predikatlar mantiqining normal shakldagi formulasi quyidagi ko’rinishda bo’lsin:

$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...)$, (5)

bunda $q_1, q_2, ...$ - mantiqiy o’zgaruvchilar, $P_1, P_2, ...,$ - bir joyli predikatlar, $Q_1, Q_2, ...,$ - ikki joyli predikatlar.

(1) formula umumqiymatli emas deb faraz qilamiz. U vaqtda n tadan ortiq elementga ega bo’lgan M_1 soha mavjudki, bunda (1) formula aynan chin bo’lmaydi.

Boshqacha qilib aytganda, shunday o’zgaruvchilarning

$q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$

qiymatlar majmuasi mavjudki,

$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0$. (6)

Bu yerdan

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1.$$

Shunday qilib, shunday predmet o’zaruvchilarning $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \in M_1$ qiymatlari mavjudki,

$\overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv 1$

va

$C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) \equiv 0$

bo'ladilar.

Demak, M_1 sohadan ko'pi bilan n ta elementi bo'lgan shunday M sohani ajratish mumkinki, qaerda bu formula aynan chin bo'lmaydi. Bu natija teoremaning shartiga ziddir va u (1) formula umumqiymatli emas degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi.

Demak, (1) formula umumqiymatli formuladir.

Tarkibida faqat bir joyli (bitta predmet o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko'rinadi.

3-teorema. *Predikatlar mantiqining tarkibiga n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi biror M to'plamda bajariluvchi bo'lsa, u holda bu formula elementlari soni 2^n dan katta bo'lmagan M_1 to'plamda ham bajariluvchi bo'ladi.*

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Predikatlar mantiqining tarkibiga faqat n ta bir joyli predikat kirgan A formulasi elementlari soni 2^n dan ko'p bo'lmagan ixtiyoriy to'plamda aynan chin bo'lsa, u holda bu formula ixtiyoriy to'plamda ham aynan chin bo'ladi.

Quyidagi teorema ham predikat mantiqining katta sinfini tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosini hal qiladi.

4-teorema. *Agar predikatlar mantiqining A formulasi biror cheksiz sohada bajariluvchi bo'lsa, u holda u chekli sohada ham bajariluvchi bo'ladi.*

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Predikatlar mantiqida yechilish muammosi.

2.Chekli sohalarda yechilish muammosi.

3.Yopiq formula. Formulaning umumiy yopilishi.
Formulaning mavjudligini yopish.

4.Tarkibida bir turdagi kvantor amali qatna-
shuvchi normal shakldagi formulalar uchun
yechilish muammosi.

17-MAVZU	**KOMBINATORIKA ASOSLARI. O'RIN ALMASHTIRISHLAR VA KOMBINATSIYALAR. REKURRENT MUNOSABATLAR**

REJA:

- Kombinatorika va uning asosiy qoidalari.

- O‘rin almashtirishlar.
- Kombinatsiyalar.
- Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar.
- O‘rinlashtirishlar.

Tayanch iboralar: *kombinatorik masala, kombinatorika, qo‘shish qoidasi, ko‘paytirish qoidasi, o‘rin almashtirish, kombinatsiya, nyuton binomi, binomial koeffitsiyent, o‘rinlashtirish.*

1. Kombinatorika va uning asosiy qoidalari. Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to‘plamdan uning qandaydir xossaga ega bo‘lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to‘g‘ri keladi.

1.1–ta’rif: Biror chekli to‘plam elementlari ichidan ma’lum bir xossaga ega bo‘lgan elementlardan iborat qism to‘plamlarni tanlab olish yoki to‘plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog‘liq masalalar ***kombinatorik masalalar*** deyiladi.

Masalan, o‘nta ishchidan to‘rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligi (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo‘yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo‘nalishlarida qo‘llanilishini ko‘rsatadi.

1.2–ta’rif: Kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan matematik fan ***kombinatorika*** deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo‘lib olmon matematigi G.Leybnits o‘rgangan va 1666 yilda «Kombinatorika san’ati haqida» asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi dab ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Qo‘shish qoidasi *:* Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ ёки } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

1.1-masala: Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. Unda, shartga ko‘ra, $m(\alpha)=10$, $m(\beta)=8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni

$$m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10+8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

Ko‘paytirish qoidasi: Agarda biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ va } \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masalan, qurilishda 10 suvoqchi va 8 buyoqchi ishlasa, ulardan bir suvoqchi va bir buyoqchidan iborat juftlikni $m(\alpha \text{ va } \beta)=10\cdot 8=80$ usulda tanlash mumkin.

1.2-masala: 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo‘llanma berildi. Bu yo‘llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin?

Yechish: α I yo‘llanmani, β esa II yo‘llanmani tarqatishni ifodalasin. Unda $m(\alpha)=10$ va $m(\beta)=9$, chunki bitta talabaga I yo‘llanma berilganda II yo‘llanmaga 9 talaba da’vogar bo‘ladi. Demak, ikkita yo‘llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha \text{ va } \beta) = =10\cdot 9=90$ bo‘ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tanlovlarni mos ravishda $m(\alpha_1), m(\alpha_2), \ldots, m(\alpha_n)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo‘lsa,

$m(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki} \ldots \text{yoki } \alpha_n) = m(\alpha_1)+ m(\alpha_2)+\ldots+m(\alpha_n),$ (1.1)

$m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va} \ldots \text{ va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot\ldots\cdot m(\alpha_n)$ (1.2)

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

2. O‘rin almashtirishlar. Kombinatorik masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan tushunchalar bilan tanishishni boshlaymiz.

2.1–ta’rif: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o‘zgartirib qism to‘plam hosil qilish ***n elementli o‘rin almashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o‘rin almashtirishlar soni P_n kabi belgilanadi.

2.1-teorema: n ta elementdan o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n= n! \qquad (2.1)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ - “en faktorial” deb o‘qiladi va $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\ldots\cdot n$ kabi aniqlanadi. Bunda $0! = 1$ deb olinadi. Masalan, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, $4!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$. Faktoriallarni hisoblashda $(n+1)!=n!\cdot (n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay. Masalan, $5!=4!\cdot 5=120$ bo‘ladi.

Isbot: Bu formulani isbotlash uchun quyidagi tanlovlarni kiritamiz:

α_k={o‘rin almashtirishning k-elementini tanlash}, $k=1,2,3,\ldots\ldots, n$.

O‘rin almashtirishning 1-elementi sifatida to‘plamdagi n ta elementdan ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin va shu sababli $m(\alpha_1)=n$ bo‘ladi. 2-element sifatida to‘plamdagi qolgan $n–1$ ta element orasidan ixtiyoriy bittasini tanlab olishimiz mumkin bo‘lgani uchun $m(\alpha_2)=n–1$. Xuddi shunday tarzda birin-ketin $m(\alpha_3)=n–2$, $m(\alpha_4)=n–3,\ldots$, $m(\alpha_{n–1})=n–(n–2)=2$, $m(\alpha_n)=n–(n–1)=1$ ekanligini topamiz. Unda, ko‘paytirish qoidasini ifodalovchi (1.2) formulaga asosan,

$P_n= m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va}\ldots \text{ va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot\ldots\cdot m(\alpha_n)=n\cdot(n–1) \cdot \ldots \cdot 2\cdot 1=n!$.

Masalan, $n = 3$ elementli $\{a,b,c\}$ to‘plamdan hosil bo‘ladigan o‘rin almashtirishlar $\{a,b,c\}$, $\{b,a,c\}$, $\{a,c,b\}$ $\{b,c,a\}$, $\{c,b,a\}$, $\{c,a,b\}$ bo‘lib, ularning soni $P_3=6=3!$. ■

2.1-masala**:** Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta mahsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o‘rin almashtirishlardan iboratdir va shu sababli ularning soni $P_5= 5!=120$ bo‘ladi.

3. Kombinatsiyalar. Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya bo‘lib hisoblanadi.

3.1-ta'rif: Chekli n ta elementli to'plamning k ($k \le n$) ta elementli va kamida bitta elementi bilan farqlanadigan qism to'plamini hosil qilish ***n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya*** deyiladi.

Masalan, $\{a, b,c\}$ ko'rinishdagi n=3 elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$ bo'lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b;a\}=\{a;b\}$, $\{c;a\}=\{a;c\}$, $\{b;c\}=\{c;b\}$ deb hisoblanadi.

Umumiy holda n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula orqali hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3.1)$$

Misol uchun beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

usulda tuzish mumkin. ■

3.1-masala**:** Xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini n=7 elementli $\{1,2,3, \dots ,7\}$ to'plam singari qarasak, dam olish kunlari $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,4\}$,… kabi juftliklardan iborat bo'ladi. Bunda $\{i,j\}$ va $\{j,i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash n=7 elementdan k=2 tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va shu sababli ularning soni

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21`$$

bo'ladi. ■

4. Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar. Yuqorida (3.1) formula orqali kiritilgan C_n^k sonlari yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad (4.1)$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo'lib, u maktabda o'rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko'paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada ***Nyuton binomi*** **(**binom ikkihad degan ma'noni bildiradi**),** unga kiruvchi C_n^k sonlari esa ***binomial koeffitsiyentlar*** deb ataladi. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, keyinchalik (4.1) formula Nyuton tomonidan ixtiyoriy ratsional daraja uchun umumlashtirildi.

1. Agar (4.1) Nyuton binomida $a = b = 1$ yoki a=1, b=–1deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o'rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar (3.1) formulada k o'rniga n–k qo'yilsa yoki k=0 yoki k=n deb olinsa, unda

$C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

5. O‘rinlashtirishlar. Bir qator kombinatorik masalalar o‘rinlashtirish yordamida yechiladi.

5.1–ta’rif: Chekli va n ta elementdan iborat to‘plamdan bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to‘plamlarni hosil qilish ***n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o‘rinlashtirish soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati quyidagi formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{5.1}$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ to‘plamdan n=3 ta elementdan k=2 tadan o‘rinlashtirishlar $\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\},\{b;a\},\{c;a\},\{c;b\}$ bo‘lib, ularning soni

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 . \blacksquare$$

5.1-masala: Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlariini k=4 ta elementli $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat $H=\{1,2,3, \dots ,7\}$ to‘plam singari qaraymiz. Bu holda $X\subset H$ bo‘lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, {2,4,6,7} taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba(7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda {4,2,6,7}, {6,4,2,7} kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840`$$

usulda taqsimlashi mumkin.

Masalalardan namunalar:

1. Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo‘lsin. U holda, shartga ko‘ra, $m(\alpha) = 10,\ \ m(\beta) = 8$ bo‘lgani uchun bitta xodimni $m(\alpha\ yoki\ \beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10 + 8 = 18$ usulda tanlash mumkin.

2. 10 ta talabadan iborat guruhga ikkita yo‘llanma ajratildi. Bu yo‘llanmalarni necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

Yechish: α birinchi yo‘llanmani, β esa ikkinchi yo‘llanmani tarqatishni ifodalasin. U holda $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 9$, chunki bitta talabaga birinchi yo‘llanma berilganda, ikkinchi yo‘llanmaga to‘qqizta talaba davogar bo‘ladi. Demak, ikkinchi yo‘llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha\ va\ \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta) == 10 \cdot 9 = 90$ ga teng bo‘ladi.

3. Qurilishda 10 ta suvoqchi va 8 ta bo‘yoqchi ishlaydi. Ulardan bir suvoqchi va bir bo‘yoqchidan iborat juftlikni necha usulda tanlash mumkin?

Yechish: $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 8$ bo‘lgani uchun $m(\alpha\ va\ \beta) == m(\alpha) \cdot m(\beta) = 10 \cdot 8 = 80$.

4. Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o‘rinlashtirishlardan iborat. Ya’ni, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo‘ladi.

5. Ishlab chiqarish korxonasini tekshirish uchun besh kishidan iborat guruh ajratildi. Shu besh kishidan tarkibida uch kishi bo‘lgan guruhni necha xil usulda tuzish mumkin.

Yechish: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formuladan foydalanamiz. Bizda $n = 5,\ k = 3$ bo‘lgani uchun $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot2!} = \frac{4\cdot5}{1\cdot2} = \frac{20}{2} = 10$.

6. Tikuvchilik fabrikasida ishlayotgan xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini $n = 7$ elementli $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ to‘plam sifatida qarasak, dam olish kunlari $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}, \dots$ kabi juftliklardan iborat bo‘ladi. Bunda $\{i, j\}$ va $\{j, i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash $n = 7$ elementdan $k = 2$ tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va ularning soni $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6\cdot7}{1\cdot2} = \frac{42}{2} = 21$ bo‘ladi.

7. Talaba 4 ta fan bo‘yicha qo‘shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo‘ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlari uchun haftaning tanlagan kunlarini $k = 4$ ta elementli $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam, hafta kunlarini esa $n = 7$ elementlidan iborat $H = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ to‘plam sifatida qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo‘lib, uni hosil etish $n = 7$ elementlidan $k = 4$ tadan o‘rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bu holda elementlarning joylashishi tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\{2,4,6,7\}$ taqsimotda birinchi fanga dushanba (2), ikkinchi fanga chorshanba (4), uchinchi fanga juma (6) va to‘rtinchi fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo‘ladi. Unda $\{4,2,6,7\}$, $\{6,4,2,7\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ usulda tanlashi mumkin.

8. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo‘nalishining birinchi kursida 10 ta fan o‘qitiladi va har kuni 4 xil dars o‘tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo‘yilishi mumkin?

Yechish: Darslarning barcha mumkin bo‘lgan kunlik taqsimoti o‘n elementdan to‘rttadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlardan iborat. Uni $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ formuladan foydalanib topamiz. Bizda $n = 10$, $k = 4$ bo‘lgani uchun

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

9. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo‘lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: Izlangan son 9 ta qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlardan iborat. Ya’ni,

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Buni $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]$ formuladan ham topish mumkin. Unga asosan $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN SAVOLLAR:

1. Qanday masalalar kombinatorik deyiladi?
2. Kombinatorikaning qo‘shish qoidasi qanday ifodalaydi?
3. Qo‘shish qoidasiga misol keltiring.
4. Kombinatorikada ko‘paytirish qoidasi mazmuni nimadan iborat?
5. Ko‘paytirish qoidasiga misol keltiring.
6. O‘rinlashtirish deb nimaga aytiladi?
7. O‘rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
8. Kombinatsiya ta’rifi qanday ifodalanadi ?
9. Kombinatsiyalar soni qanday formula bilan hisoblanadi?
10. Nyuton binomi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
11. Kombinatorik ayniyatlarga misollar keltiring.
12. O‘rin almashtirish qanday ta’riflanadi?
13. O‘rin almashtirishlar soni qanday topiladi?

18-MAVZU	**GRAFLAR, IZOMOFIZM, TIPLAR, BOG’LIQLIK, EYLAR VA GAMILTON GRAFLARI.**

REJA:

1. Graflar nazariyasi haqida tushuncha
2. Grafning geometrik ifodalanishi va maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi
3. Qo‘shnilik va insidentlik matritsalari.
4. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma’lumotlar
5. Eyler va Gamilton graflari.

Graf. –Qirralar. –Uchlar. –Yo’naltirilgan, yo’naltirilmagan qirra. –Insident. –Oddiy graflar. –Grafning to’ldiruvchisi. –qism graf. –Sugraf.

1. Graflar nazariyasi haqida tushuncha

1736 yilda L.Eyler tomonidan o‘sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning qo‘yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo‘lishiga asos bo‘ldi.

1.1- shakl

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi 1.1-shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o‘sha davrda to‘rtta A, B, C va D qismlarga bo‘lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko‘priklardan faqat bir martadan o‘tib, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut mavjudligi shartlari ham topildi. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko‘p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo‘yicha yagona ilmiy ish bo‘lib keldi. XIX asrning o‘rtalarida graflar nazariyasi bilan bog‘liq tadqiqotlar G.Kirxgof va A.Keli ishlarida paydo bo‘ldi.

Graflar nazariyasi bo‘yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llaniladi. Ulardan ba’zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o‘yinlar, yo‘llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp’yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta’rifini va boshqa ba’zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo‘shmas to‘plam bo‘lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko‘rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to‘plamini (V to‘plamning o‘z-o‘ziga Dekart ko‘paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va $U - < v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko‘rinishdagi juftliklar korteji bo‘lib, $V \times V$ to‘plamning elementlaridan tuzilgandir. Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o‘rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko‘rsatish muhim bo‘lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz. $G = (V, U)$ graf berilgan bo‘lsin. V to‘plamning elementlariga G grafning uchlari, V to‘plamning o‘ziga esa, graf uchlari to‘plami deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o‘rniga, ba’zan, tugun yoki nuqta iborasi ham qo‘llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. $G = (V, U)$ grafning ta’rifiga ko‘ra, U bo‘sh kortej bo‘lishi ham mumkin. Agar U bo‘sh bo‘lmasa, u holda bu kortej (a, b) ($a \in V$, $b \in V$) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topadi, bunda $a = b$ bo‘lishi hamda ixtiyoriy (a, b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin. $(a, b) \in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog‘liq holda, ya’ni yo‘nalishning borligi yoki yo‘qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a, b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya’ni $(a, b) = (b, a)$ bo‘lsa, (a, b) juftlikka yo‘naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra (yoki, qisqacha, qirra) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya’ni $(a,b) \neq (b,a)$ bo‘lsa, u holda (a,b) juftlikka yoy yoki yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirra deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo grafning qirralari korteji, yo yoylari korteji, yoki qirralari va yoylari korteji deb ataymiz.

1.1-Misol. O‘zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to‘plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo‘nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo‘lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko‘ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo‘nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi.

1.2-Misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘ling. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko‘ra a, b va c o‘zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 5$ va $0 \leq c \leq 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

$<8,0,0>$, $<7,1,0>$, $<7,0,1>$, $<6,2,0>$, $<6,1,1>$, $<6,0,2>$, $<5,3,0>$, $<5,2,1>$, $<5,1,2>$, $<5,0,3>$, $<4,4,0>$, $<4,3,1>$, $<4,2,2>$, $<4,1,3>$, $<3,5,0>$, $<3,4,1>$, $<3,3,2>$, $<3,2,3>$, $<2,5,1>$, $<2,4,2>$, $<2,3,3>$, $<1,5,2>$, $<1,4,3>$, $<0,5,3>$.

Holatlar to‘plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o‘tishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o‘tish imkoniyati mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o‘tishlari to‘plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo‘lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o‘tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $<8,0,0>$, oxirgi hadi esa $<4,4,0>$ bo‘lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$<8,0,0>$, $<5,0,3>$, $<5,3,0>$, $<2,3,3>$, $<2,5,1>$,

$<7,0,1>$, $<7,1,0>$, $<4,1,3>$, $<4,4,0>$.

2 Grafning geometrik ifodalanishi va maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi

Grafning geometrik ifodalanishi: Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta’rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta’rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o‘rganish va bu xossalarni amalda qo‘llash jarayonida ba’zi qiyinchiliklar tug‘dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya’ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – grafning ko‘rgazmali tasviriga ega bo‘lamiz. Agar uchlar to‘plami va bu uchlarning tutashishlarini ko‘rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo‘lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog‘ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.Shuni ta’kidlaymizki, ba’zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo‘lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi. Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma grafning geometrik ifodalanishi deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

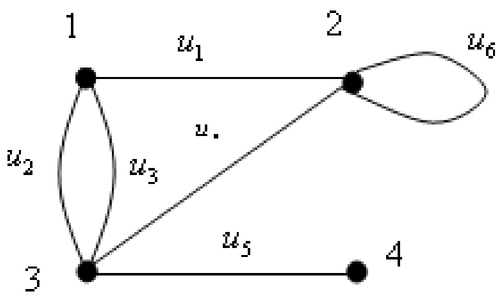
2.1- teorema. Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Yevklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta’rifiga binoan uning hech bo‘lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo‘lsa, u holda uni 3 o‘lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda ularni uch o‘lchovli Yevklid fazosidagi biror to‘g‘ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to‘g‘ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o‘tkazamiz (graf chekli bo‘lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo‘lgan hamda bu to‘g‘ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo‘lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko‘ra bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, 1.2.1-teoremadagi 3ni 2ga almashtirib bo‘lmaydi, chunki tekislikda qirralarini (yoylarini) ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog‘i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo‘lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba’zi graflargagina xos, ya’ni har qanday grafning 2 o‘lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo‘lavermaydi.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

2.1- Misol.

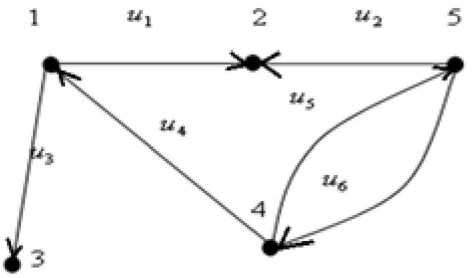


2.1- shakl

2.1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo‘lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,2)$, $u_2=u_3=(1,3)$, $u_4=(2,3)$, $u_5=(3,4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan bo‘lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog‘i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo‘shni, 1 va 4 uchlar esa qo‘shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4

qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo‘shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo‘shni emas.

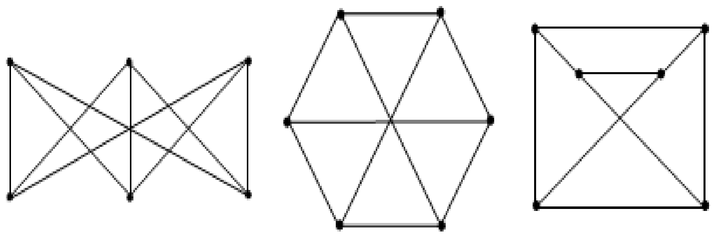
2.2- M i s o l . Geometrik ifodalanishi 2.2-shakldagi ko‘rinishda bo‘lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz.



2.2-shakl.

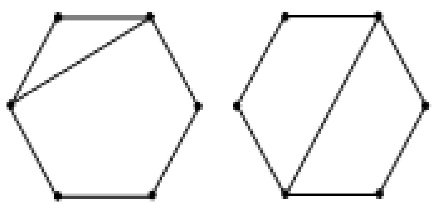
Bu grafda o‘n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya’ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo‘q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang‘ich, 3 uch esa oxirgi uchdir.

2.3- M i s o l . 2.3- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir.



2.3- shakl

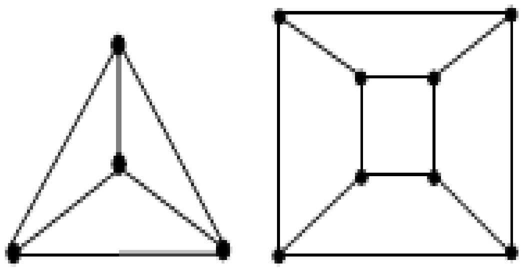
2.4- M i s o l . 1.2.4-shaklda tasvirlangan graflarning har biri oltita uch va yettita qirralarga ega bo‘lib, ular izomorf emas.

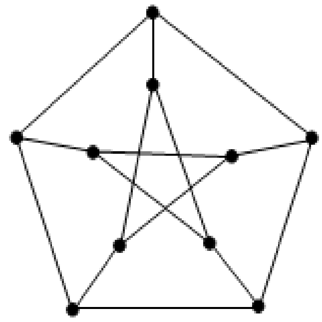


2.4-shakl

Hammasi bo‘lib beshta qavariq muntazam ko‘pyoqli mavjudligi qadimdan ma’lum (Evklid isbotlagan): tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr va ikosaedr.

Bu ko‘pyoqlilarning umumiy nomi ham bor Platon jismlari. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 1.2.5-shaklda tasvirlangan.





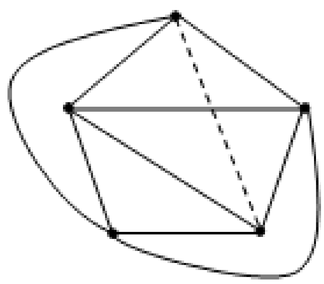
2.5-shakl 2.6- shakl

Petersin grafi deb ataluvchi 2.6- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.

Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo‘lsa, u holda bunday graf tekis (yassi) graf deb ataladi. Bunday graf tekislikda yotuvchi graf deb ham atalishi mumkin.

Boshqacha so‘zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o‘sha tekislikda yotuvchi o‘zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo‘lib, ular faqat o‘zlari insident bo‘lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega. Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir. Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi.

Tekis bo‘lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo‘lgan to‘la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o‘nta qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi.



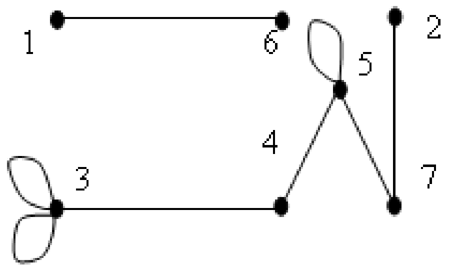
2.7-shaklda

2.7-shaklda K_5 grafning to‘qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o‘ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda «joy yo‘q»!

Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi: Grafni maxsus turdagi ko‘phad yordamida ham berish mumkinligini ta’kidlaymiz. Uchlari to‘plami $V=\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ bo‘lgan G graf berilgan bo‘lsin. G grafning yakkalangan uchlari yo‘q deb faraz qilamiz. Bu grafni m ta $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq

$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_m^{\sigma_m}\prod\limits_{i<j}(x_j-x_i)^{\alpha_{ij}}$ ko‘rinishdagi ko‘phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko‘paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i, j) juftlar bo‘yicha amalga oshiriladi, x_i o‘zgaruvchi $v_i \in V$ uchga mos keladi, α_{ij} – v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i – v_i uchdagi sirtmoqlar soni. $f(G)$ ko‘phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

2.5-M i s o l . 2.8-shaklda tasvirlangan G grafga mos ko‘phadni aniqlaymiz. Berilgan oriyentirlanmagan grafda yettita uch va sakkizta qirra bor. Uning har bir uchiga bitta x_i ($i = 1,2,...,7$) o‘zgaruvchini mos qilib qo‘yamiz. G grafda karrali qirralari yo‘q, uning uchta qirrasi sirtmoqlardan iborat bo‘lib, ulardan ikkitasi 3 uchga, biri esa 5 uchga insidentdir. Shuning uchun $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = \sigma_7 = 0$, $\sigma_3 = 2$, $\sigma_5 = 1$; $\alpha_{16} = \alpha_{27} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = \alpha_{57} = 1$, qolgan barcha $\alpha_{ij} = 0$ bo‘ladi. Berilgan G grafga mos ko‘phad



2.8-shakl

$$f(G) = x_3^2 x_5 (x_6 - x_1)(x_7 - x_2)(x_4 - x_3)(x_5 - x_4)(x_7 - x_5)$$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

3. Qo‘shnilik va insidentlik matritsalari.

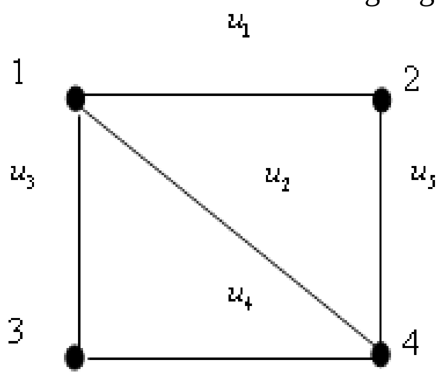
Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi graf uchlari qo‘shniligi matritsasi tushunchasini qarab chiqamiz.

$G = (V, U)$ – uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo‘lsin.

Elementlari $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \text{ va } j \text{ uchlar qo'shni bo'lsa,} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$ ko‘rinishda aniqlangan $A = (a_{ij})$ ($i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,m$) matritsani grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi deb ataymiz.

Bu ta’rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchlari qo‘shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo‘lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

3.1-M i s o l . 3.1-shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo‘shniligi matritsasi



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ko’rinishda bo’ladi.

3.1- shakl.

Uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan oriyentirlangan $G = (V, U)$ grafning uchlari qo‘shniligi $m \times m$ -matritsasi deb elementlari $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } (i, j) \in U \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$ ko‘rinishda aniqlangan $A = (a_{ij})$ ($i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,m$) matritsaga aytiladi.

3.2-M i s o l. 2.2-shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi G uchlari $1,2,...,m$ bo‘lgan belgilangan oriyentirlanmagan multigraf bo‘lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlarini tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo‘lgan $A=(a_{ij})$ ($i,j=1,2,...,m$) matritsa oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo‘shniligi matritsasi deb ataladi.

3.3-M i s o l. 2.1- shaklda tasvirlangan oriyentirlanmagan multigraf uchlari qo‘shniligi matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karrali yoylari bo‘lgan sirtmoqsiz orgraf uchlari qo‘shniligi matritsasi tushunchasini ham yuqoridagiga o‘xshash ta’riflash mumkin.

3.1-T e o r e m a. Graflar faqat va faqat uchlari qo‘shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o‘rinlarini va ustunlarining o‘rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo‘lsagina izomorf bo‘lishadi.

I s b o t i. Abstrakt grafga, uning uchlarini belgilashga (raqamlashga) bog‘liq ravishda, turlicha qo‘shnilik matritsalari mos kelishi tabiiydir. Bu matritsalarni solishtirish maqsadida har birining m ta uchlari bo‘lgan ixtiyoriy ikkita belgilangan, o‘zaro izomorf G va H graflarni qaraymiz. G va H graflar uchlariga mos qo‘yilgan belgilar turlicha va ulardan biri boshqasidan uchlarning qo‘shniligini saqlovchi qandaydir f qoidani qo‘llab hosil qilingan bo‘lsin, ya’ni H grafdagi $f(u_i)$ va $f(u_j)$ uchlar faqat va faqat G grafning u_i va u_j uchlari qo‘shni bo‘lsagina qo‘shni bo‘lsin. G grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini $A=(a_{ij})$ ($i,j=1,2,...,m$) bilan H grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini esa $B=(b_{ij})$ ($i,j=1,2,...,m$) bilan belgilasak, $b_{f(i)f(j)}=a_{ij}$ o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo‘shniligi matritsasi bo‘lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va, bundan, graflar nazariyasi bo‘yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi mat-ritsalarni tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.

$u_1,u_2,...,u_n$ ($n\geq 1$) qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij}=\begin{cases} 1, \text{agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiy uchga ega bo'lsa}, \\ 0, \text{agar } u_i=u_j \text{ bo'lsa yoki ularning umumiy uchi bo'lmasa}, \end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan $C=(c_{ij})$ ($i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$) $n\times n$ -matritsa grafning qirralari qo‘shniligi matritsasi deb ataladi.

4. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar. Uchlari to'plami $V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ va qirralar korteji $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega $(...,v_{i_1},u_{j_1},v_{i_2},u_{j_2},v_{i_3},...)$ ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(...,v_{i_1},v_{i_2},...)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(...,u_{j_1},u_{j_2},...)$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang'ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang'ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo'lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo'nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo'lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo'lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o'zida, uning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi bo'lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo'lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang'ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlangich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlangich uchga ega bo'lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo'lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo'lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1,v_2,...,v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1=v_s$ bo'lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo'lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo'nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash **yo'l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

4.1- t e o r e m a . *Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.*

I s b o t i . Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo'lsa, teoremaning tasdig'i to'g'riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig'ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v\in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan $G=(V,U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan v uchga qo'shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo'shni v_2 uchni, v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa qo'shni v_3 uchni, va hakoza, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo'shni v_{i+1} uchni, va hakoza, tanlab, $((v,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{i-1},v_i),(v_i,v_{i+1}),...)$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko‘ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta’kidlaymiz.

Grafning uchlari to‘plami V chekli to‘plam bo‘lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so‘ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo‘lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo‘lsa, ketma-ketlikka qirralar qo‘shish jarayonini to‘xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

Grafning bog‘lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog‘langan** deb, marshrutning o‘zi esa a va b **uchlarni bog‘lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog‘lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o‘tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o‘rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o‘sha uchlarni bog‘lovchi oddiy zanjir ko‘rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog‘langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo‘glangan bo‘ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog‘langan graf **bog‘lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent** (**bog‘langan**) deyiladi. Bunday uchlar to‘plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to‘plami bo‘yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog‘lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog‘lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o‘zining bog‘lamlilik komponentalarining diz’yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog‘lamlilik komponentalariga bo‘laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

5. Eyler va Gamilton graflari.

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir *Eyler zanjiri,* deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ya’ni *Eyler sikliga)* ega graf *Eyler graft,* deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf *yarim Eyler graft,* deb ataladi.

5.1-teorema. *Bog‘lamli graf Eyler graft bo‘lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo 'lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti.Zarurligi.*G* Eyler grafida C—Eyler sikli bo‘lsin. U holda Csikl bo‘ylab harakatlanganda grafning har bir uchidan o‘tish uchun bir juft qirradan foydalaniladi — bu qirralardan bin uchga kirish uchun, ikkinchisi esa uchdan chiqish uchun zarur bo‘ladi. Bu yerda har bir uch darajasining juftligi *C*sikldagi har bir qirraning bir marta uchrashi mumkinligidan kelib chiqadi.

Yetarliligi.Endi *G* grafning har bir uchi darajasi juft bo‘lsin, deb faraz qilamiz.*G* graf bog‘lamli bo‘lgani uchun undagi har bir uchning darajasi ikkidan kichik emas.Ma’lumki, agar grafda har bir uchning darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bunday graf tarkibida sikl mavjud.

Demak, *G* grafning qirralaridan tashkil etilgan qandaydir C_2 sikl bor. Bu siklni uning ixtiyoriy v, uchidan boshlab quramiz. Dastlab v, uchga insident bo‘lgan ixtiyoriy bir qirrani tanlab, bu qirra bo‘ylab harakatlanamiz va uning boshqa uchiga o‘tamiz. Har safar, imkoniyati boricha, yangi qirra tanlab va bu qirradan o‘tib, uning boshqa uchiga boramiz. Shuni ta’kidlash zarurki, bunday o‘tishlar jarayonida faqat qirraning yangisini tanlashga harakat qilinadi, uchlar esa istalgancha takrorlanishi mumkin.

Har bir uchga insident qirralar soni juft bo‘lgani uchun C_x siklni qurish jarayoni faqat $v_x$uchga borgandagina tugaydi. Bu yerda ikki hoi bo‘lishi mumkin:

1) C_x sikl *G* grafning barcha qirralaridan o‘tadi yoki

2) C_x sikl G grafnir.p barcha qirralaridan o‘tmaydi.

Birinchi holda teorema isbotlandi deyish mumkin. Ikkinchi holda G grafdan C_x siklga tegishli barcha qirralarni olib tashlaymiz vanatijada hosil bo‘lgan grafni C_x deb belgilaymiz. Bu yerda yakkalanib qolgan uchlarni olib tashlash yoki olib tashlamaslik muhim emas.Agar yakkalanib qolgan uchlar olib tashlanmasa, natijada bog‘lamli bo‘lmagan $G_x$grafni hosil qilishimiz ham mumkin.Grafdan qirralarni bunday olib tashlash amali, tabiiyki, grafning qirralari sonini kamaytiradi, lekin grafdagi uchlarning darajalari juftligi xossasini o‘zgartirmaydi.

G grafning bog‘lamliligiga ko‘ra, $C_x$sikl va $G_x$graf hech bo‘lmasa, bitta umumiy uchga ega bo‘lishlari kerak. Shu sababli, C, siklda $G_x$grafning qirralariga ham insident bo‘lgan qandaydir v_2 uch bor. Bu v uchdan boshlab faqat $G_x$grafning qirralaridan tashkil topgan yangi Csiklni qurish mumkin.Csiklni qurish jarayoni faqat v_2 uchga kelib tugashi mumkin.

Oldin qurilgan $C_x$siklni ikki qismga ajratamiz:

1) Cj siklning Vj uchidan boshlanib v_2 uchida tugovchi qismi (bu oddiy zanjirni C,(Vj,v_2) bilan belgilaymiz) va

2) Cj siklning v_2 uchidan boshlanib, $v_}$ uchida tugovchi qolgan qismi *(CfavJ)*.

Agar C_2 sikl Eyler sikli bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i isbotlandi desa bo‘ladi.Aks holda yuqorida bayon etilgan jarayonni takrorlaymiz.

Berilgan G grafdagi qirralar soni chekli bo‘lganligidan, bu jarayon chekli jarayondir.Bu jarayonni yetarlicha takrorlagandan so‘ng, albatta, u Eyler siklini qurish bilan yakunlanadi.■

5.1-natija. *Bog‘lamli graf yarim Eyler graft bo‘lishi uchun undagi ikkitadan кo‘p bo 'Imagan uchning darajalari toq bo lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti 5.1-teoremaning isbotidan ba’zi o‘zgartirishlar natijasida hosil qilinishi mumkin.■

5.1-teorema asosida Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning (ushbu bobning 1-paragrafiga qarang) yechimi mayjud emas, degan xulosaga kelamiz, ya’ni Kyonigsberg shahrining ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib, Pregel daryosi ustiga qurilgan yetti ko‘prikdan faqat bir martadan o‘tgan holda yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkin emas.

Oriyentirlangan graflarda oriyentirlangan Eyler yo‘lini izlash bilan shug‘ullanish mumkin. Har bir yoydan faqat bir marta o‘tadigan yo‘l **oriyentirlangan Eyler yo‘li,** deb ataladi. Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo‘li bor bo‘lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi,** deb ataladi.

Endi qirralari soni n ga teng bo‘lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini** keltiramiz. Bu algoritmga кo‘ra, grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo‘yicha 1 dan n gacha raqamlab chiqiladi.

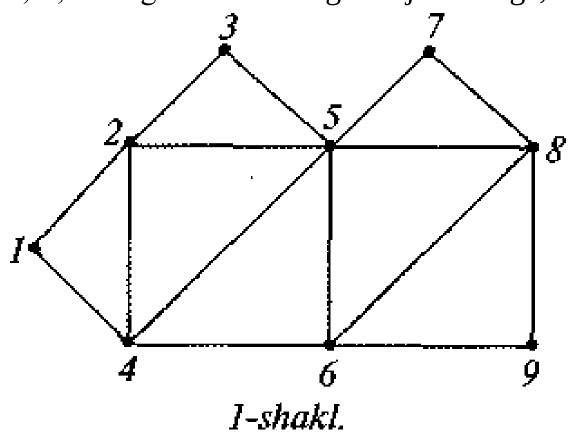
Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga binoan quyidagi ikkita qoida asosida ishlar ketma-ket bajariladi:

1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab, bu uchga insident bo‘lgan istalgan qirraga (masalan,^ qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan V uchga (ya’ni olib tashlangan qirraga insident uchga) o‘tiladi.

2. Oxirgi o‘tishdan oldingi o‘tish natijasida hosil bo‘lgan uch w bo‘lsin va oxirgi o‘tishda biror qirraga κraqami berilgan deylik. $w$uchga insident istalgan qirra imkoniyati boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog‘lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi *(k+l)* raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi. ■

5.1-misol.1-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz.Awalo, bu grafning Eyler grafi bo‘lishi shartini, ya’ni 5.1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to‘qqizta uch bo‘lib, 1, 3, 7, 9 belgili uch-larning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to‘rtga,



1-shakl.

5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng.Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalarijuftdir. Shu-ning uchun, 1-teoremaga koʻra, 1-shaklda tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.

Berilgan grafga flyori algoritmini qoʻllab, mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz.

Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan boʻlsin. Bu uchdan ikki yoʻnalishda: (1;2) qirra boʻylab yoki (1;4) qirra boʻylab harakatlanish mumkin. Masalan, (1;2) qirra boʻylab harakatlanib 2 belgili uchga oʻtamiz. Endi harakatni 3 yoʻnalishda: yo (2;3) qirra boʻylab, yo (2;4) qirra boʻylab, yoki (2;5) qirra boʻylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, (2;3) qirra boʻylab harakatlanib belgili uchga oʻtgan boʻlaylik. Shu usulda davom etish mumkin boʻlgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosilqilamiz:

((1,2), (2,3),(3,5), (5,4), (4,6), (6,9), (9,8), (8,6), (6,5),(5,8), (8,7), (7,5), (5,2), (2,4),(4,1)). ■

Gamilton graflari.

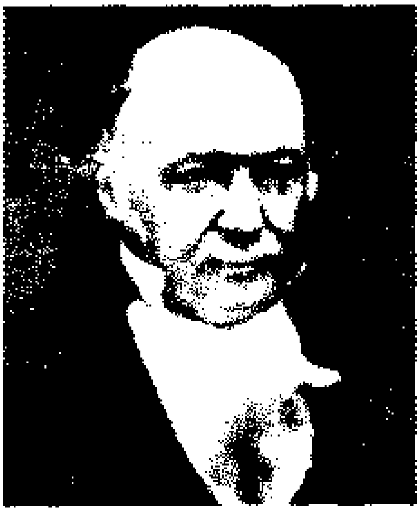
Graflar nazariyasining natijalari muayyan shartlarni qanoatlantiravchi marshratlarni topish masalasiga kelti-riluvchi bir qator muammolarni hal etishda qoʻllanilishi mumkin. Shunday muammolardan biri sifatida Uilyam Gamilton nomi bilan bogʻUq masalani keltiramiz. U. Gamilton dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta oʻtadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859-yilda «Olam boʻylab sayohat» nomli oʻyirmi topgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta oʻtadigan zanjir *Gamilton zanjiri,* deb ataladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ya’ni *Gamilton sikliga)* ega graf *Gamilton graft,* deb ataladi.

Agar grafda yopiq boʻlmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf *yarim Gamilton graft*, deb ataladi.

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta oʻtuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin.

Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga oʻxshash ta’riflansada, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat (mezon) topish masalasi ancha murakkab hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlovchi shartlarni oʻrganish boʻyicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yoʻqotmasdan kelmoqda.



Uilyam Gamilton

Qandaydir shartlarga boʻysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstraktiv boʻlganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan.1952-yilda G. E. Dirak[1] quyidagi teoremani isbotladi.

5.2-teorema (Dirak). *Uchlari soni uchtadan kam boʻlmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo 'lmasa, bu graf Gamilton grafi bo 'ladi.*

?	**MUSTAQIL ISHLASH UCHUN SAVOLLAR:**

1. Qanday masalaning qoʻyilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo boʻlishiga asos boldi?

2. “Graf” iborasi birinchi bo‘lib kim tomonidan va qachon kiritilgan?
3. Grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta’rifini bilasizmi?
4. Grafning abstrakt ta’rifidagi juftlikni tashkil etuvchilar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
5. Grafning uchi deganda nimani tushunasiz? Grafning qirrasi nima?
6. Grafning elementlari deganda nimani tushunasiz? Grafdagi yoy bilan qirra bir-biridan nima bilan farq qiladi?
7. Qanday holda uchlar tutashtirilgan deyiladi?
8. Qo‘shni uchlarning qo‘shni bo‘lmagan uchlardan qanday farqi bor?
9. Insidentlik tushunchasini bilasizmi? Yo‘naltirilmagan graf va orgraf bir-biridan nima bilan farq qiladi?
10. Karrali yoki parallel qirralar (yoylar) deganda nimani tushunasiz?

19-MAVZU	**DARAXTLAR, ULARNI TADBIQLARI. DARAXTLARDA YURISH. TAYANCH DARAXTLAR.**

REJA:
1. Daraxtlar.
2. Eyler graflari.
3. Xromatik son va xromatik sinf.
4. To‘rlar va to‘rdagi oqimlar.

Tayanch tushunchalar: *siklik va asiklik qirra, siklomatik son, daraxt, pog‘ona uchlari, grafning asosi, vatar, chekli daraxtda qirralar soni uchlar sonidan bitta kamligi haqida. xarakteristik vektor, juft graf, Eyler sikli, Eyler grafi, siklomatik son. to‘r, to‘rning qutblari, qutbli qirra, ichki qirra, π-to‘rlar, to‘rdagi oqim, to‘rning kesimi, kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati, Ford-Falkerson teoremasi.*

1. Daraxtlar

1.1-ta’rif. *Agar G grafning u qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo‘lsa, u siklik, aks holda asiklik qirra deyiladi.*

G graf uchun

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

(bu yerda $m(G) - G$ ning qirralari soni, $n(G)$ - uchlari soni va $k(G)$ komponentalari soni) ifoda uning siklomatik soni deyiladi.

Osongina ko‘rsatish mumkinki:

$$K(G \setminus u) = \begin{cases} K(G), \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ K(G)+1, \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G|u) = \begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ агар } u \text{ циклик кирра булса;} \\ \lambda(G), \text{ агар } u \text{ ациклик кирра булса.} \end{cases}$$

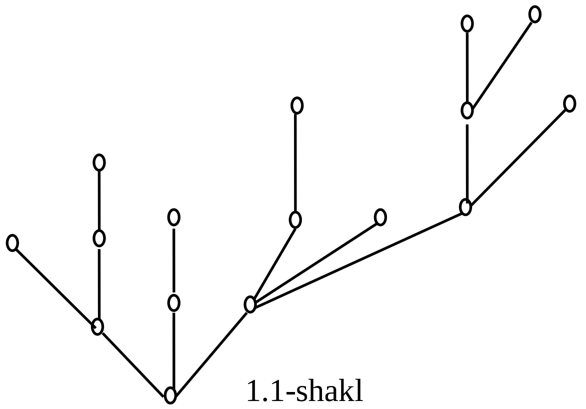
O‘z-o‘zidan ravshanki,

$$n(G \setminus u) = n(G), \quad m(G \setminus u) = m(G) - 1,$$

$\lambda(G) \geq 0$ va faqat sikllari bo‘lmagan graf uchun $\lambda(G) = 0$.

1.2-ta'rif. *Barcha qirralari asiklik bo'lgan bog'liqli graf daraxt deyiladi.*

Daraxtning istalgan ikkita uchlari yagona zanjir bilan bog'langandir. Daraxtning istalgan x_0 uchini tanlab olib uning ildizi yoki nolinchi pog'onali uch deb ataymiz. x_0 ga qo'shni bo'lgan barcha uchlarni birinchi pog'ona uchlari deymiz va hokazo - $i-1$ pog'onadagi uchlarga qo'shni (boshqa pog'onalarga tegishli bo'lmagan) uchlarni i pog'ona uchlari deb ataymiz (1.1-shakl).



1.1-shakl

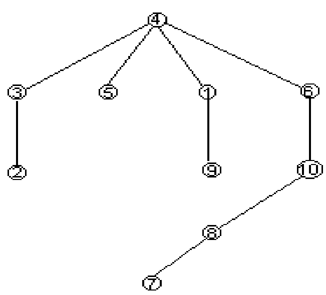
Daraxtning bunday tasvirlanishidan kelib chiqadiki, u chetki (faqat bitta qirraga insident bo'lgan) uchlarga ega. Masalan, oxirgi pog'onaning uchlari.

Bog'likli G grafdan ketma-ket barcha siklik qirralarni olib tashlaymiz. Natijada, hamma qirralari asiklik bo'lgan bog'likli H grafni-daraxtni hosil qilamiz. Bu daraxt G grafning asosi deyiladi. Grafning asosi yagona tanlanmaydi, lekin barcha asiklik qirralar istalgan asosga kiradi. H asosga nisbatan $G \setminus H$ bo'lakning barcha qirralari - vatarlar deb ataladi.

H daraxtdan chetki uchni (avtomatik tarzda bitta qirrani) olib tashlasak, yana daraxtni hosil qilamiz. Agar H chekli bo'lsa, $n(H)-2$ qadamlardan keyin bitta qirra va ikkita uchga ega daraxtni hosil qilamiz. Daraxtdan olib tashlangan uchlar va qirralar soni bir xil bo'lganligi sababli quyidagi xulosaga kelamiz: har qanday chekli daraxtda qirralar soni uchlar sonidan bitta kam. Aksinchasi ham o'rinlidir, ya'ni

1.1-teorema. *Chekli bog'likli G graf daraxt bo'lishi uchun, uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo'lishi zarur va yetarli.*

Uchlari $1,2,3,...,n$ raqamlar bilan tartiblangan n uchli daraxt berilgan bo'lsin. Daraxtning chetki uchlari orasidagi eng kichik nomerlisi i_1 va u bilan qo'shni bo'lgan yagona uch j_1 bo'lsin. Daraxtdan i_1 uchni, demak $i_1\, j_1$ qirrani olib tashlaymiz. Hosil bo'lgan daraxtda eng kichik nomerli chetki i_2 uchni va $i_2 j_2$ qirrani olib tashlaymiz va hokazo. Bu protsessni $n-2$ marta takrorlab ikki uch va bitta qirrali daraxtni hosil qilamiz. Olib tashlangan uchlarni $I=\{i_1, i_2, ..., i_{n-2}\}$ va $J=(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$ lar bilan belgilaymiz. Bu ikkala I va J majmualar berilgan daraxt bo'yicha yagona ravishda aniqlanadi, shu bilan birga I ning barcha sonlari har xil, J niki esa har xil bo'lishi shart emas (1.2-shakl).



1.2-shakl.

Bu daraxt uchun $I = \{2,3,5,7,8,9,1,4\}$ va $J = (3,4,4,8,10,1,4,6)$.

$\mathrm{I} = \{i_1, i_2, ..., i_{n-2}\}$ va $J = \{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ uchlar majmualari berilgan daraxt bo‘yicha yagona aniqlanadi, shu bilan birga birinchi majmuaning barcha uchlari har xil, ikkinchisiniki esa har xil bo‘lishi shart emas. Shu bilan birga har qanday $J = \{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ $(1 \le j_k \le n)$ majmua bitta daraxtga mos keladi. Uni quyidagicha qurish mumkin.

$N = \{1,\ 2, ..., n\}$ to‘plamning J da qatnashmagan sonlarining eng kichigini i_1 bilan belgilaymiz (bunday son hamma vaqt mavjud, chunki J da $n-2$ sonlar bor). Qirra bilan i_1 va j_1 uchlarni tutashtiramiz, j_1 ni J dan, i_1 ni esa N dan o‘chiramiz va protsessni takrorlaymiz: $J_1 = \{j_2, j_3, ..., j_{n-2}\}$ majmuada qatnashmagan $N_1 = N \setminus \{i_1\}$ ning eng kichik sonini i_2 bilan belgilaymiz; i_2, j_2 uchlarni qirra bilan tutashtiramiz va ularni mos ravishda N_1 va J_1 lardan o‘chiramiz va hokazo. Oxirida N_{n-2} da qolgan ikkita uchlarni qirra bilan tutashtiramiz.

Bundan ko‘rinadiki, har qanday $k = 1,\ 2, ..., n-2$ uchun k qadamdan keyin yasalgan qirralar ichida i_k ga insident bo‘lganlari yo‘q, lekin j_k ga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Buni nazarda tutgan holda, protsessni teskari tartibda bajarib, k bo‘yicha induksiyani qo‘llab haqiqatan ham daraxt hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz (chunki har gal bitta qirra yangi, chetki uch bilan qo‘shiladi).

Shunga o‘xshash induksiya bo‘yicha, lekin to‘g‘ri tartibda qurib isbotlash mumkinki ushbu daraxtga aynan J majmua mos keladi.

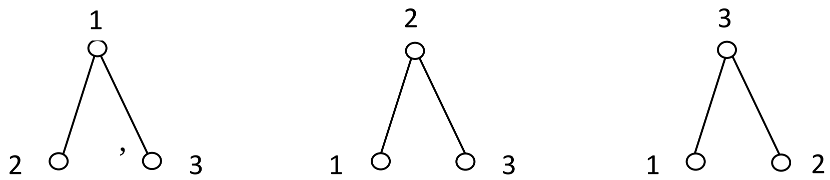
Yuqoridagi protsessdan ko‘rinadiki har xil daraxtlarga turli xil (I, J) juftliklar mos keladi. Agar $\mathrm{I}' \ne \mathrm{I}''$ bo‘lsa, u holda $J' \ne J''$. Haqiqatan ham, $i'_k \ne i''_k$ va $i'_k < i''_k$ bo‘lsa, u holda $i'_k\,(j'_k, ..., j'_{n-2})$ ga kirmaydi, lekin u $(j''_k, ..., j''_{n-2})$ ga kiradi. Shuning uchun har xil daraxtlarga har xil J ko‘rinishdagi majmualar mos keladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi.

1.2-teorema (Keli). *Uchlar soni tartiblangan n ta bo‘lgan daraxtlar soni n^{n-2} ga teng. (n ta elementlardan $n-2$ tadan tuzilgan barcha takroriy o‘rinlashtirishlar soni).*

Albatta bular ichida ko‘plari o‘zaro izomorfdir.

Masalan, $n = 3$ bo‘lganda, uchala daraxtlar ham o‘zaro izomorfdir



1.3-shakl.

2. Eyler graflari

G grafning barcha uchlarini o‘z ichida saqlovchi qism graflarini qaraymiz. G ning barcha qirralari $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi tartiblangan bo‘lsin. G grafning har qanday $\mathrm{H} \subseteq G$ qismiga 0 va 1 lardan iborat $(a_1, a_2, ..., a_m)$ m o‘lchovli vektorni mos qo‘yamiz:

$$a_i = \begin{cases} 1,\ агар\ u_i \in H, \\ 0,\ агар\ u_i \notin H. \end{cases}$$

(N ning xarakteristik vektori). Bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir, shu bilan birga qism graflarning 2 modul bo‘yicha yig‘indisiga ularning xarakteristik vektorlarining yig‘indisi mos keladi. Barcha qism graflar to‘plami yig‘indi amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil etadi. Bu gruppa $\{0,1\}$

koeffiitsentlar maydoni ustida chiziqli fazoni tashkil etadi (istalgan N qism grafning 1 ga ko‘paytmasi N ni beradi, 0 ga ko‘paytmasi esa bo‘sh grafdir).

Ko‘rinib turibdiki G graf qismlarining fazosi ularning xarakteristik vektorlarining fazosiga izomorf va m o‘lchovli.

Agar grafning barcha uchlarining darajalari (ya’ni ularga insident bo‘lgan qirralar soni) juft bo‘lsa, graf ham juft deyiladi.

Juft grafda istalgan sodda zanjirni (sikldan farqli) unga kirmagan qirra bilan davom ettirish mumkin. Haqiqatan ham, zanjirda oxirgi uchning darajasi 1 ga teng, lekin graf juft bo‘lganligi sababli bu uchga insident bo‘lgan kamida bitta qirra mavjud. Agar graf chekli bo‘lsa, zanjirni ketma-ket davom ettirib, avval bosib o‘tgan uchlarning biriga kelamiz, ya’ni sodda siklni hosil qilamiz. Bu siklning barcha qirralarini grafdan olib tashlaymiz. Uning qolgan qismi yana juft grafdir, chunki uchlarning darajalari 2 ga kamayadi (agar undan zanjir o‘tsa) yoki o‘zgarmaydi (agar zanjir o‘tmasa).

Bu grafda yana siklni ajratamiz va hokazo. Yuqoridagi protsessni yana davom etamiz, toki unda birorta ham sikl qolmasin (ya’ni bo‘sh graf hosil bo‘lguncha). Shunday qilib, chekli juft graf o‘zaro qirralar bo‘yicha kesishmaydigan sodda sikllar yig‘indisiga yoyiladi. Bundan uning barcha qirralari siklik ekanligi kelib chiqadi.

Agar chekli juft graf bog‘liqli bo‘lsa, u holda osongina ko‘rsatish (sodda sikllar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab) mumkinki unda barcha qirralarini o‘z ichiga olgan sodda sikl mavjud. Bunday sikl **Eyler sikli**, grafning o‘zi esa **Eyler grafi** deyiladi.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

2.1-teorema. *Chekli bog‘liqli graf Eyler grafi bo‘lishi uchun u juft bo‘lishi zarur va yetarli.*

Istalgan chekli juft grafning har bir bog‘liqli komponentasi Eyler grafidir.

Ixtiyoriy grafning har qanday ikkita N_1 va N_2 juft qism graflarining yig‘indisi yana juft qism grafdir. Haqiqatan ham, α uchning darajasi $S(\alpha)$ N_1+N_2 qism grafda $s_1+s_2-2s_{12}$ ga teng. Bu yerda s_1 va s_2 α uchning mos ravishda N_1 va N_2 lardagi darajalari, s_{12} esa α ning ularning $N_1\cap N_2$ kesishmasidagi darajasi. Shunday qilib, juft qism graflar to‘plami barcha qism graflar fazosining qism fazosidir. Bu qism fazoning o‘lchovi ν ni aniqlaymiz.

G bog‘liqli, m qirrali, n uchli graf D uning xtiyoriy asosi bo‘lsin. Vatarlar soni $m-n+1$ ga teng. Har bir $\alpha\beta$ vatar yagona sodda $[\alpha,\beta]\subseteq D$ zanjir bilan sodda siklni hosil qiladi. Barcha sikllarning vektorlari bog‘liqmas Σ sistemani hosil qiladi. Chunki har bir sikl sistemaning boshqa sikllariga tegishli bo‘lmagan qirraga (o‘zining vatariga) ega. Demak $\nu\geq m-n+1$.

Ikkinchi tomondan har qanday juft qism graf, xususiy holda istalgan sodda sikl Σ sistemaning sikllari orqali ifodalanadi. Haqiqatan ham juft N qism grafga vatarlari unga tegishli Σ sistemaning sikllarini qo‘shamiz. Hosil bo‘lgan yig‘indi birorta ham vatarga ega emas. Demak, bu yig‘indi D daraxtning qism grafi, ya’ni u bo‘sh grafdir. Aks holda sodda sikllarga ega juft qism graf (N va sikllarning yig‘indisi) daraxtning qism grafi bo‘lar edi. Bundan $\nu\leq m-n+1$ kelib chiqadi va yuqoridagi tengsizlikni inobatga olgan holda $\nu=m-n+1$.

Bog‘liqli bo‘lmagan k komponentali grafning juft qism graflari fazosining bazisi uning barcha bog‘liqli komponentalari bazislarining yig‘indisidan iborat. Qirralar va uchlar soni ham komponentalar bo‘yicha qo‘shiladi. Agar i komponenta m_i qirralarga va n_i uchlarga ega bo‘lsa, u holda

$$\nu=m-n+k\,,\quad m=\sum_{i=1}^{k}m_i\,,\quad n=\sum_{i=1}^{k}n_i\,.$$

Demak, juft qism graflar qism fazosining o‘lchovi ν grafning siklomatik soni $\lambda(G)$ ga teng.

Istalgan graf uchun $\nu\geq 0$ bo‘lganligi sababli $k\geq n-m$.

Siklomatik soni nolga teng bo‘lgan bog‘liqli graflar – daraxtlardir.

3. Xromatik son va xromatik sinf

Sirtmoqsiz G grafning har bir uchiga (qirrasiga) berilgan ranglardan bittasini mos qo‘yamiz. Agar qo‘shni uchlarga (qo‘shni qirralarga) turli xil ranglar mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda G graf to‘g‘ri bo‘yalgan deyiladi.

G grafning uchlarini (qirralarini) to‘g‘ri bo‘yash uchun kerak bo‘lgan eng kam miqdordagi turli xil ranglar soni $\chi(G)$ mos ravishda $\chi^{\copyright}(G)$ uning xromatik soni (xromatik sinfi) deyiladi.

Har qanday oddiy G graf uchun $\chi(G) \le n$ $(\chi(En) = 1)$. Tenglik faqat Fn uchun bajariladi.

Agar grafda kamida bitta qirra bo‘lsa, $\chi(G) \ge 2$. Demak, $2 \le \chi(G) \le n(G)$ tengsizlik o‘rinli.

3.1-ta’rif. *Agar G graf uchun $\chi(G) = 2$ bo‘lsa, u holda G bixromatik deyiladi.*

3.1-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarli.*

Agar G graf to‘liq χ uchli F_χ qismlarga ega bo‘lsa, uning xromatik soni $\chi(G) \ge \chi$. Lekin teskarisi to‘g‘ri emas.

Shunday graflar mavjudki, ularda hattoki F_3 (uchburchak) bo‘lmasada istalgancha katta xromatik songa ega.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari (uchga insident bo‘lgan qirralar soni) orasidagi bog‘lanishni o‘rganamiz. G graf uchlarining maksimal darajasi $S(G)$ bo‘lsin. Γ_s bilan $S(G) \le S$ bo‘lgan oddiy graflarning sinfini belgilaymiz.

Har qanday $G \in \Gamma_s$ graf uchun $\chi(G) \le S+1$ ekanligini uchlar soni bo‘yicha induksiya usuli bilan isbotlash mumkin. Yagona F_s graf uchun $\chi(F_s) = S+1$.

3.2-teorema. *Kamida bitta qirraga ega bo‘lgan graf bixromatik bo‘lishi uchun unda uzunliklari toq sonlarga teng sodda sikllarning bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Zaruriyligi. Grafni to‘g‘ri bo‘yalganda sikl uchlarining ranglari almashib keladi, demak uzunligi toq bo‘lgan sodda siklni to‘g‘ri bo‘yash uchun ikki rang yetarli emas. Bunday siklni o‘zida saqlagan graf ham bixromatik bo‘la olmaydi.

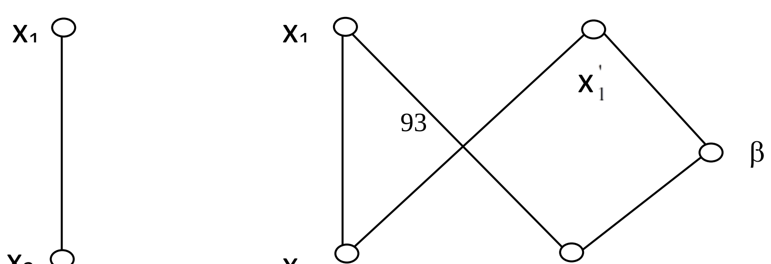
Yetarliligi. Avvalo shuni ta’kidlaymizki, har qanday daraxt bixromatik grafdir. Haqiqatan ham, daraxtning juft pog‘onalaridagi barcha uchlarini bitta rangga bo‘yaymiz, toq pog‘onalardagi uchlarni esa ikkinchi rangga bo‘yaymiz. Natijada u to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi, chunki daraxtning qirralari faqat qo‘shni pog‘onalardagi uchlarni tutashtiradi.

Daraxtda i va j pog‘onalar uchlarini tutashtiruvchi sodda zanjirning uzunligining juft-toqligi $i-j$ sonning juft toqligi bilan bir xil. Xususiy holda, bir xil juftlikdagi pog‘onalarning uchlari uzunligi juft sodda zanjir bilan bog‘langandir.

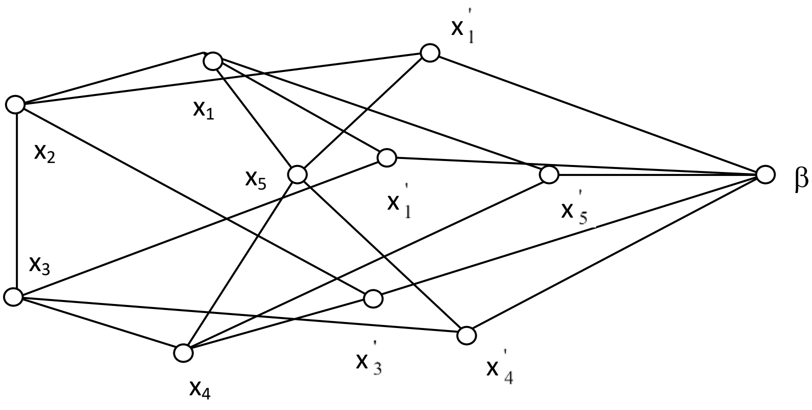
Uzunligi toq songa teng sodda zanjirga ega bo‘lmagan G grafda istalgan asosni tanlab olamiz. Bu asosga nisbatan barcha vatarlar turli xil juftliklarga ega bo‘lgan pog‘onalarning uchlarini tutashtiradi, aks holda unda uzunligi toq sodda zanjirlar bo‘lar edi. Demak, asosning ikki rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgani butun grafning ham to‘g‘ri bo‘yalganidir.

Agar G grafda χ uchli to‘liq F_χ qism graf mavjud bo‘lsa, u holda $\chi(G) \ge \chi$. Teskarisi esa to‘g‘ri emas, shunday graflar mavjudki, ularda hatto uch uchli to‘liq qism graflari (uchburchaklar) yo‘q, lekin xromatik soni istalgancha katta.

Bunda G_χ graf induktiv ravishda yasaladi. G_2 bitta qirradan iborat.



G_2 **G_3**



G_4

3.1-shakl

Faraz qilaylik uchlar to‘plamida $G_{\chi-1}$ graf qurilgan bo‘lsin. $G_{\chi-1}$ grafga uchlar to‘plamini va uchni qo‘shamiz. Har bir uchni hamda $G_{\chi-1}$ grafda bilan qo‘shni bo‘lgan uchlari bilan tutashtiramiz.

Hosil bo‘lgan G_{χ} grafda uchburchaklar yo‘qligini ko‘rsatamiz. Induksiya faraziga $G_{\chi-1}$ grafda uchburchaklar yo‘q. Agar uchburchak mavjud bo‘lsa, u holda to‘plamdagi uchlar bir-biri bilan tutashtirilmaganligi sababli, unga bu uchlarning ko‘pi bilan bittasi tegishli; ham birorta uchburchakga tegishli emas, chunki u faqat dagi uchlar bilan tutashtirilgan.

Agar uchburchak bo‘lsa, u holda uchburchak ham mavjud bo‘lar edi (chunki va uchlar da bir xil qo‘shni uchlarga ega). Bu esa induksiya farazimizga zid.

Endi ekanligini ko‘rsatamiz.

Ravshanki . Faraz qilaylik . U holda G_χ grafni χ ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin: masalan, $G_{\chi-1}$ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaganimizdan keyin har bir uchni ning rangiga bo‘yaymiz va uchga qolgan χ rangni beramiz.

G_χ grafni χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yash mumkin emasligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni G_χ graf χ-1 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi va uchga rang to‘g‘ri keladi. Bunda to‘plamning uchlari dan farqli ranglarga bo‘yalgan. rangga bo‘yalgan uchlar qism to‘plami bo‘lsin. Har bir uchni uchning rangiga qaytadan bo‘yaymiz. Bu holda grafning barcha uchlari χ-2 rang bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi. Haqiqatan ham $G_{\chi-1}$ grafning istalgan qirrasi bo‘lsin. G_χ grafda va turli ranglarga bo‘yalganligi sababli ularning ikkalasi birdaniga A ga tegishli emas. Agar bo‘lsa grafni qayta bo‘yaganimizda ularning ranglari o‘zgarmaydi va turli xil bo‘lganligicha qoladi. Shunday qilib $G_{\chi-1}$ graf induksiya farazimizga zid ravishda χ-2 ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaladi.

Xromatik son va graf uchlarining darajalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. bilan G graf uchlari darajalarining eng kattasini belgilaymiz, G_s esa parallel qirralarga ega bo‘lmagan va graflar sinfi.

Uchlar soni bo‘yicha induksiyani qo‘llab osongina ko‘rsatish mumkinki, har qanday uchun . Haqiqatan ham, agar grafda uchlar soni dan oshmasa . Faraz qilaylik bu tengsizlik G dan kam uchlarga ega G_s ning barcha graflari uchun o‘rinli bo‘lsin.

G grafdan istalgan uchni olib tashlaymiz (unga insident bo‘lgan barcha qirralar bilan birgalikda). Induktiv farazimizga asosan grafni ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yaymiz. G grafda uchga ko‘pi bilan ta qo‘shni uchlar mavjud, shuning uchsun kamida bitta rang topiladiki unga ga qo‘shni bo‘lgan uchlarning hech biri bo‘yalmagan. Shu rangga uchni bo‘yaymiz va graf G ranglar bilan to‘g‘ri bo‘yalgan bo‘ladi.

Quyidagi teoremadan kelib chiqadiki G_s sinf graflari ichida xromatik soni teng bo‘lgan yagona to‘liq uchli F_{s+1} grafdir.

Teorema (Bruks). *Agar va bo‘lsa, u holda .*

4. To‘rlar va to‘rdagi oqimlar

Ba’zi bir uchlari tanlab olingan graf to‘r deb ataladi. Tanlab olingan uchlar to‘rning qutblari deyiladi. Masalan, daraxtni bir qutbli to‘r deb qarash mumkin (uning ildizi qutbdir).

To‘rning qutblaridan farqli uchlari uning ichki uchlari deyiladi. Kamida bitta qutbga insident bo‘lgan qirra qutbli, boshqalari esa ichki qirralar deyiladi.

Ikkita sinflarga ajratilgan: ta kirish va ta chiqish qutblarga bo‘lingan to‘r -qutblilik deyiladi.(1,1) - qutblilik to‘r ikki qutbli to‘r deyiladi.

Umumiy elementlarga ega bo‘lmagan va to‘rlarning qutblari mos ravishda va bo‘lsin. va to‘rlarning ketma-ket ulanishidan hosil qilingan qutblarga ega bo‘lgan to‘rni kabi belgilaymiz. va to‘rlarning parallel ulanishidan hosil bo‘lgan , qutblarga ega to‘rni esa kabi belgilaymiz (4.1-shakl).

4.1-shakl.

Yuqoridagiga o‘xshash va to‘rlarni aniqlash mumkin.

Bir qirrali to‘rlardan parallel va ketma-ket ulash natijasida hosil bo‘lgan to‘r parallel-ketma-ket deyiladi. Bunday to‘rlarni -to‘rlar deb ataymiz. -to‘rlar induktiv ravishda aniqlanadi:

1. Bir qirrali to‘r -to‘rdir;
2. Agar va -to‘rlar bo‘lsa, u holda, va lar ham -to‘rlardir.

-qisman orientirlashtirilgan to‘rning har bir qirrasiga o‘tkazuvchanlik qobiliyati deb ataluvchi manfiy bo‘lmagan son mos qo‘yilgan bo‘lsin.

4.1-ta’rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan juftlik to‘rdagi oqim deyiladi:*

1.-to‘rning barcha zvenolarini biror orientirlashti-rilishi;

2.-qirralar to‘plamida aniqlangan qiymat-lari manfiy emas va ning o‘tkazuvchanlik qobiliyatidan katta bo‘lmagan funksiya. Shu bilan birga barcha ichki uchlarda Kirxgof qonuni bajariladi, ya’ni uchga kiruvchi barcha qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisi, undan chiquvchi qirralar bo‘yicha oqimlarning yig‘indisiga teng.

Boshqacha qilib aytganda:

1) - to‘rning barcha qirralari uchun;

2) - barcha ichki uchlar uchun, bu erda

,

- orientirlashtirilishda uchdan chiquvchi (mos ravishda ga kiruvchi) qirralar to‘plami.

Ravshanki, to‘rning barcha uchlari bo‘yicha (qutblarni ham inobatga olgan taqdirda) larning yig‘indisi nolga teng (chunki har bir qirra biror uchdan chiqib boshqasiga kiradi). Shuning uchun

ning qiymati to‘rdagi oqimning miqdori deyiladi.

Qirralarning berilgan o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarida to‘rdan o‘tuvchi maksimal oqimning miqdorini aniqlash masalasini ko‘ramiz. Bu masalaning yechimi to‘rdagi kesimlar bilan bog‘liqdir.

4.2-ta’rif. *Agar to‘rning ba’zi bir qirralarini olib tashlaganimizda, u bog‘likli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tushib qolsa, bu qirralar to‘plami to‘rning kesimi deyiladi.*

4.2-shakl.

Yuqoridagi rasmda berilgan to‘r uchun qirralar to‘plamlari kesimlardir.

Agar kesimdan istalgan qirrasini olib tashlaganda kesim bo‘lmay qolsa, u sodda deyiladi. Masalan, kesimlar sodda, esa sodda emas.

Bog‘likli to‘rning sodda kesimi uni ikkita: qutbni o‘zida saqlovchi chap va qutbni o‘zida saqlovchi o‘ng qismlarga ajratadi. Kesimning har bir qirrasi turli qismlarga tegishli bo‘lgan uchlarni tutashtiradi. Agar kesimning qirrasi zveno bo‘lsa, yoki chapdan o‘ngga qarab yo‘naltirilgan bo‘lsa, u to‘g‘ri, aks holda teskari deyiladi.

4.3-ta’rif. *Sodda kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati deb uning barcha to‘g‘ri qirralarining o‘tkazuvchanlik qobiliyatlarining yig‘indisiga aytiladi.*

Masalan, kesimning o‘tkazuvchanlik qobiliyati 5+1=6 teng, - kesimniki esa 3+2+3+2=10. Agar to‘r bog‘liqli bo‘lmay qutblari turli komponentlariga tegishli bo‘lsa, u holda yagona sodda kesim bo‘sh to‘plam, uning o‘tkazuvchanlik qobiliyati esa nolga teng.

4.1-teorema (Ford-Falkerson). *to‘rdan o‘tuvchi oqimning maksimal qiymati uning sodda kesimlarining minimal o‘tkazuvchanlik qobiliyati ga teng.*

	MUSTAQIL ISHLASH UCHUN SAVOLLAR:

1.Oddiy graflar. Qirralar, uchlar.
2. Yo‘naltirilgan va yo‘naltirilmagan qirralar. Insident.
3. Grafning to‘ldiruvchisi.
4. Qism graf. Sugraf.
5. Graflar izomorfizmi.
6. Izomorf graflar.
7. Daraxtlar.

20-MAVZU	**ALGORITM TUSHUNCHASI. HISOBLANUVCHANLIK. PRIMITIV REKURSIV FUNKSIYALAR. QISMAN REKURSIV VA REKURSIV FUNKSIYALAR**

REJA:

1. Algoritm tushunchasi..
2. Hisoblanuvlanchilik.
3. Primitiv rekursiv funksiyalar.
4. Qisman rekursiv va rekursiv funksiyalar

-Arifmetik funksiya. -Hisoblanuvchi funksiya. -Boshlang’ich funksiyalar.   -Funksiyalar superpozitsiyasi. -Primitiv rekursiya sxemasi. -Minimallash operatsiyasi (-operator). -Primitiv rekursiv funksiya. -Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya. -Umumrekursiv funksiya. -A.Chyorch tezisi.

1-ta'rif. *Agar birorta funksiyaning aniqlanish sohasi ham, qiymatlar sohasi ham natural sonlar to’plamining qism to’plamlari bo’lsa, u holda bunday funksiya* ***arifmetik (sonli) funksiya*** *deb aytiladi. Natural sonlar to’plamida berilgan har qanday munosabatlarga* ***arifmetik munosabat*** *deyiladi.*

Masalan, natural sonlar to’plamida $f(x, y) = x \cdot y$ (ko’paytma) – ikki argumentli arifmetik funksiyadir; $x + y < z$ - uch argumentli arifmetik munosabat. Arifmetik funksiya va arifmetik munosabat tushunchalari intuitiv tushunchalardir va hech qanday formal sistema bilan bog’langan emaslar.

Arifmetik (sonli) funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjudligini aniqlash algoritmik muammolardan biridir.

2-ta'rif. Agar $g = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjud bo'lsa, u **effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiya** deb aytiladi.

Bu ta'rifda algoritm tushunchasi intuitiv ma'noda tushunilganligi sababli, effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi ham intuitiv tushuncha bo'ladi.

Ammo algoritm tushunchasidan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasiga o'tishning o'ziga xos ijobiy tomoni bor. Masalan, algoritm tushunchasiga qo'yilgan hamma talablar (xarakterli xususiyatlari sifatida) rekursiv (qaytarish) funksiyalar majmuasi deb ataladigan hamma hisoblanuvchi funksiyalar majmuasi uchun bajariladi.

Gyodel birinchi bo'lib biror formal sistemada aniqlangan hamma sonli funksiyalar sinfini rekursiv funksiyalar sinfi sifatida ifodaladi. 1936 yilda Chyorch ham boshqa asoslarga suyanib rekursiv funksiyalar sinfini tasvirlagan edi. Bu yerda **hisoblanuvchi funksiyalar sinfi** quyidagi ravishda tuziladi.

3-ta'rif. Quyidagi sonli funksiyalar boshlang'ich (oddiy, bazis) funksiyalar deyiladi:

1.Nol funksiya (bekor qilish operatori): $0(x) = 0$ har bir uchun.

2.Birni qo'shish (siljish operatori): $\lambda(x) = x + 1$ har bir x uchun.

3.Proyektsiyalash funksiyasi (proyektsiyalash operatori): $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ hamma $x_1, x_2, ..., x_n$ lar uchun $(n = 1, 2, ...; \quad m = 1, 2, ..., n)$

Ravshanki, uchala boshlang'ich funksiyalar hamma joyda aniqlangan va intuitiv hisoblanuvchi funksiyalardir.

Izoh. Argumentlarining barcha qiymatlarida aniqlangan funksiyaga hamma joyda aniqlangan funksiya deb aytamiz.

Quyidagi uchta qoida vositasi bilan mavjud funksiyalardan yangi funksiyalar hosil etiladi.

1.Funksiyalar superpozitsiyasi $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ... , $f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalarni va $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyani ko'rib o'taylik.

4-ta'rif. $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ tenglik bilan aniqlanadigan $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ **funksiyalarning superpozitsiyasi** deb aytiladi.

Agar biz qandaydir usul bilan φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalarning qiymatini hisoblash imkoniyatiga ega bo'lsak, u holda ψ funksiyani quyidagicha hisoblash mumkin: $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga mos ravishda $a_1, a_2, ..., a_n$ qiymatlarni beramiz. Hamma $f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ larni hisoblab, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ ni topamiz. Keyin $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ ni hisoblab, $c = \psi(a_1, a_2, ..., a_n)$ ni topamiz.

Aniqki, agar φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ lar hamma joyda aniqlangan bo'lsa, ψ funksiya ham hamma joyda aniqlangan bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar $f_1, f_2,..., f_m$ larning hech bo'lmaganda birortasi hamma joyda aniqlangan bo'lmasa, u holda ψ funksiya hamma joyda aniqlangan bo'lmaydi. Shu bilan birga ikkinchi tomondan, argumentlarning shunday $a_1, a_2,..., a_n$ qiymatlari topilishi mumkinki, $b_i = f_i(a_1, a_2,..., a_n)$ $(i = \overline{1,m})$ bo'lsa, $\varphi(b_1, b_2,..., b_m)$ni hisoblab bo'lmaydi. Bu holda ham ψ funksiya hamma joyda aniqlanmagan bo'ladi.

Shunday qilib, agar φ, $f_1, f_2,..., f_m$ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi bo'lsalar, u holda ψ funksiya ham intuitiv hisoblanuvchi bo'ladi.

Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, $f_1, f_2,..., f_m$ funksiyalarning barchasi ham $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning hammasidan bog'liq bo'lmasligi mumkin. Bu hollarda ψ funksiyani hosil qilish uchun soxta argumentlardan va $I_n^m(x_1,..., x_n)$ funksiyalardan foydalanamiz.

Masalan, $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ funksiya $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_n)$ va $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)$ funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil etilgan.

2.Primitiv (o'ta sodda) rekursiya sxemasi

$\varphi(x_2, x_3,..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ funktsiyalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi yangi f funktsiyani ko'ramiz:

$$f(0, x_2, x_3,..., x_n) = \varphi(x_2, x_3,..., x_n),$$

$$f(y+1, x_2, x_3,..., x_n) = \psi(y, f(y, x_2,..., x_n), x_2,..., x_n) \qquad (1)$$

Bu yerda φ $n-1$ argumentga, ψ - $n+1$ argumentga va f - n argumentga bog'liq funksiyalar.

5-ta'rif. Agar $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funktsiya φ *va* ψ funktsiyalardan (1) munosabat orqali hosil etilsa, u holda funktsiya va funktsiyalardan **primitiv** (o'ta sodda) **rekursiya sxemasi** orqali hosil etilgan deyiladi.

Agar φ va ψ funktsiyalar intuitiv hisoblanuvchi funktsiyalar bo'lsa, u holda f ham intuitiv hisoblanuvchi funktsiya bo'ladi.

Haqiqatan ham, $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning qiymatlar majmuasi $a_1, a_2,..., a_n$ bo'lsin. U vaqtda ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$f(0, a_2, a_3,..., a_n) = \varphi(a_2, a_3,..., a_n) = b_0,$$

$$f(1, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3,..., a_n) = b_1,$$

$$f_2(2, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3,..., a_n) = b_2 \text{ va hokazo.}$$

Ravshanki, agar φ va ψ funktsiyalar argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda f funktsiya ham argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'ladi.

Endi misollarda primitiv rekursiya sxemasi orqali yangi funktsiyalarni hosil etishni ko'raylik.

1-misol. $\varphi(x)=x$ va $\psi(x,y,z)=y+1$ bo'lsin hamda $f(y,x)$ funktsiya quyidagi tengliklar orqali aniqlansin:

$$\left.\begin{aligned} &f(0,x)=x,\\ &f(y+1,x)=f(y,x)+1.\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

$f(y,x)$ funktsiyaning qiymatini argumentlarning $y=5$, $x=2$ qiymatlarida hisoblab chiqaylik. $f(0,2)=\varphi(2)=2$ bo'lganligi uchun (2) formulalarning ikkinchisidan ketma-ket ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &f(1,2)=\psi(0,2,2)=2+1=3,\\ &f(2,2)=\psi(1,3,2)=3+1=4,\\ &f(3,2)=\psi(2,4,2)=4+1=5,\\ &f(4,2)=\psi(3,5,2)=5+1=6,\\ &f(5,2)=\psi(4,6,2)=6+1=7.\end{aligned}\right\}$$

$f(y,x)=y+x$ ekanligini osongina ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x)=f(y,x)+z$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z$ yoki $f(z,x)=x+z$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $f(y,x)$ funktsiya quyidagi tengliklar bilan berilgan deylik:

$$\left.\begin{aligned} &f(0,x)=0,\\ &f(y+1,x)=f(y,x)+x.\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

Bu yerda $\varphi(x)=0$, $\psi(x,y,z)=y+z$ bo'ladi.

$f(y,x)$ funktsiyaning qiymatini argumentlarning $y=2$, $x=2$ qiymatlari uchun hisoblaymiz.

$f(0,x)=\varphi(x)=0$ bo'lganligi uchun $f(0,2)=\varphi(2)=b_0=0$ bo'ladi. Funktsiyaning $f(1,2)$ va $f(2,2)$ qiymatlarini ketma-ket topamiz:

$$\left.\begin{aligned} &f(1,2)=\psi(0,0,2)=b_1=0+2=2,\\ &f(2,2)=\psi(1,2,2)=2+2=4.\end{aligned}\right\}$$

Bu misolda $f(y,x)=x\cdot y$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham,
$f(y+z,x)=f(y,x)+z\cdot x$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z\cdot x$ yoki $f(z,x)=z\cdot x$ ni hosil qilamiz.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Arifmetik funksiya.
2. Hisoblanuvchi funksiya.
3. Boshlang'ich funksiyalar.

4. Funksiyalar superpozitsiyasi.
5. Primitiv rekursiya sxemasi.
6. Minimallash operatsiyasi (μ-operatori).
7. Primitiv rekursiv funksiya.
8. Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya.
9. Umumrekursiv funksiya.
10. A.Chyorch tezisi.

21-MAVZU	**TYURING MASHINASI. NOREKURSIV SANALUVCHI TO'PLAMLAR. TO'XTASH MUAMMOSI. ALGORITMIK YECHILMAS MUAMMOLAR.**

REJA:

1. Tyuring mashinalari.
2. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish
3. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi

Tayanch tushunchalar: *Primitiv rekursiya sxemasi, minimallash operatsiyasi (-operator), primitiv rekursiv funksiya, qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya, umumrekursiv funksiya, a.chyorch tezisi.*

Tyuring mashinalari.

Agar qandaydir ommaviy muammoni yechish algoritmi ma'lum bo‘lsa, u holda uni realizatsiya etish uchun shu algoritmda aniq yoritilgan ko‘rsatmalarni ijro etish zarur. Algoritmni realizatsiya etish jarayonini avtomatlashtirish g‘oyasi, tabiiyki, inson bajaradigan ishni mashinaga uzatishni taqozo qiladi. Bunday mashinani XX asrning 30-yillarida amerika matematigi E.Post va angliya matematigi A.Tyuringlar tavsiya etdilar.

Tyuring mashinasining tushunchasi bizga intuitiv ma'lum bo‘lgan hisoblash protsedurasini elementar operatsiyalarga ajratish natijasida hosil bo‘ladi. Tyuring ta'kidlaydiki, istalgan mumkin bo‘lgan hisoblashni o‘tkazish uchun uning elementar operatsiyalarini qaytarish yetarli.

Tyuring ayrim turdagi nazariy hisoblash mashinasini izohlab berdi. Bu mashina muayyan mexanik qurilma emas, balki «xayoliy» matematik mashinadir. Berilgan ko‘rsatmani bajaruvchi hisoblovchi odamdan yoki mavjud raqamli hisoblash mashinasidan Tyuring mashinasi ikki jihati bilan farq qiladi.

Birinchidan, «Tyuring mashinasi» xato qila olmaydi, ya'ni u og‘ishmay (chetga chiqmasdan) ko‘rsatilgan qoidani bajaradi.

Ikkinchidan, «Tyuring mashinasi» potensial cheksiz xotira bilan ta'minlangan.

Endi Tyuring mashinasi tushunchasi bilan batafsil tanishamiz.

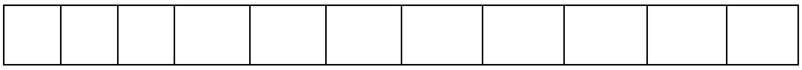
Tyuring mashinasini quyidagilar to‘liq aniqlaydi:

1.Tashqi alfavit, ya’ni chekli simvollar to‘plami. to‘plam elementlarining chekli ketma-ketligi to‘plamdagi so‘z deyiladi. So‘zni tashkil etuvchi simvollar soni shu **so‘zning uzunligi** deyiladi.

Masalan, alfavitning har bir elementi uzunligi 1 ga teng bo‘lgan so‘zdir. Bu alfavitda so‘z ko‘rinishida mashinaga beriladigan axborot (informatsiya) kodlashtiriladi. Mashina so‘z ko‘rinishida berilgan informatsiyani qayta ishlab, yangi so‘z hosil qiladi.

2.Ichki alfavit, ya’ni simvollar. - mashinaning chekli son holatlarini ifodalaydi. Istalgan mashinaning holatlari soni tayinlangan bo‘ladi. Ikki holatda maxsus vazifa bajariladi: - mashinaning boshlang‘ich (dastlabki) holati, - natijaviy (oxirgi) holati (to‘xtash holati). - surilish simvollaridir (o‘ngga, chapga va joyida).

3.Ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin bo‘lgan lenta (mashinaning tashqi xotirasi). U katakchalarga (yacheykalarga) bo‘lingan bo‘ladi. Har bir katakchaga faqat bitta harf yozilishi mumkin. Bo‘sh katakchani simvoli bilan belgilaymiz (3.1-shaklga qarang).



3.1-shakl.

4.Boshqaruvchi kallak (golovka). U lenta bo‘ylab harakat qiladi va qandaydir katakcha (yacheyka) qarshisida to‘xtashi mumkin (3.2-shakl).

3.2-shakl.

Bu holatda «kallak katakchani, ya’ni simvolni «ko‘rib turibdi»» deb aytamiz. Mashinaning bir takt davomidagi ishida kallak faqat bitta katakchaga surilishi (o‘ngga, chapga) yoki joyida turishi mumkin.

Lentada saqlanayotgan har bir informatsiya tashqi alfavitning dan farqli chekli simvollar majmuasi bilan tasvirlanadi.

Mashina ish boshlashidan oldin lentaga **boshlang‘ich axborot** (boshlang‘ich ma’lumot) beriladi. Bu holda boshqaruvchi kallak, qoidaga asosan, boshlang‘ich holatni ko‘rsatuvchi oxirgi chap belgi qarshisida turadi (3.3-shakl).

3.3-shakl.

Mashinaning ishi taktlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ish davomida boshlang‘ich informatsiya oraliq informatsiyaga aylanadi.

Boshlang‘ich informatsiya sifatida lentaga tashqi alfavitning katakchalarga ixtiyoriy ravishda qo‘yilgan chekli simvollar sistemasini (alfavitdagi ixtiyoriy so‘zni) berish mumkin.

Berilgan boshlang‘ich informatsiyaga bog‘liq bo‘lgan ikki xil hol bo‘lishi mumkin:

1.Mashina chekli son taktdan keyin to‘xtaydi (to‘xtash holatiga o‘tadi). Bu vaqtda lentada informatsiya tasvirlangan bo‘ladi. Bu holda mashina boshlang‘ich informatsiyaga nisbatan tatbiq etiladigan (qo‘llanib bo‘ladigan) va uni qayta ishlab natijaviy informatsiyaga keltirgan deb aytiladi.

2.Mashina hech vaqt to‘xtamaydi, ya’ni to‘xtash holatiga o‘tmaydi. Bu holda mashina boshlang‘ich informatsiyaga nisbatan tatbiq etilmaydi deb aytiladi.

Mashina ishining har bir taktida quyidagi funksional sxema bo‘yicha harakat qiladi:

.

Bu yerda , - tashqi alfavitning harflari; , - mashinaning holatlari; - surilish simvollari.

Boshqaruvchi kallak lentada qanday harfni ko‘rib turganligi (bizning yozuvda) va mashina qaysi holatda (bizning yozuvda) turganligiga qarab, bu taktda uch elementdan iborat komanda ishlab chiqiladi:

1) ko‘rib turilgan harf almashtirilgan **tashqi alfavit harfi** ;

2) kelgusi takt uchun tashqi xotira adresi ;

3) mashinaning kelgusi holati .

Hamma komandalar majmuasi **Tyuring mashinasining dasturini** tashkil qiladi. Dastur ikki o‘lchovli jadval shaklida bo‘lib, uni **Tyuring funksional sxemasi** deb ataydilar.

Bunday sxema 3.1-jadvalda misol sifatida berilgan.

3.1-jadval

Aniqki, Tyuring mashinasining ishi butunlayiga uning dasturi bilan aniqlanadi. Agar ikkita Tyuring mashinalarining funksional sxemalari bir xil bo‘lsa, u holda ular bir-biridan farq qilmaydi. Har xil Tyuring mashinalari har xil dasturga ega bo‘ladi.

Bundan keyin Tyuring mashinasining har xil konfiguratsiyalarini (tarxiy ko‘rinishlarini) soddaroq ifodalash uchun lenta va uning katakchalarini ifodalamasdan axborotni faqat so‘z shaklida yozamiz. Boshqaruvchi kallak va mashina holatini ifodalash sifatida mashina holatini yozamiz.

3.1-jadvalda berilgan funksional sxemaga mos keluvchi Tyuring mashinasining ishini ko‘rib o‘taylik.

3.1-misol. Dastlabki konfiguratsiya quyidagicha berilgan bo‘lsin:

.

Boshqaruvchi kallak harfini ko‘rib turganligi va mashina holatda bo‘lganligi uchun mashina komandani ishlab chiqadi va natijada ikkinchi konfiguratsiyani hosil qilamiz

.

Ravshanki, navbatdagi konfiguratsiyalar quyidagi ko‘rinishlarda bo‘ladi:

- uchinchi konfiguratsiya,

- to‘rtinchi konfiguratsiya,

- beshinchi konfiguratsiya.

Beshinchi konfiguratsiyada mashina holatda (to‘xtash holatida) turganligi uchun so‘z hisoblashning natijasi bo‘ladi. ■

Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish

Bir qator misollarda ayrim oddiy arifmetik algoritmlarni realizatsiya etadigan Tyuring mashinasini qanday yasashni ko‘rsatamiz.

1-misol. Tyuring mashinasida o‘nlik sistemada dan ga o‘tish algoritmini realizatsiya etish.

Yechim. O‘nlik sistemada sonining yozuvi berilgan bo‘lsin va sonini o‘nlik sistemasidagi yozuvini ko‘rsatish talab etilsin, ya’ni funksiyani hisoblash talab etilsin.

Ravshanki, mashinaning tashqi alfaviti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlardan va bo‘sh katakcha dan iborat bo‘lishi kerak. Lentaga o‘nlik sistemada sonini yozamiz. Bu yerda qatorasiga bo‘sh joysiz har bir katakchaga bitta raqam yoziladi.

Qo‘yilgan masalani yechish uchun ishning birinchi taktida mashina sonining oxirgi raqamini o‘chirib, uni bir birlik katta songa almashtirib va agar oxirgi raqam 9 sonidan kichik bo‘lsa, u holda to‘xtash holatiga o‘tishi kerak.

Agar sonining oxirgi raqami 9 bo‘lsa, u vaqtda mashina 9 raqamini o‘chirib, bo‘sh qolgan katakchaga 0 raqamini yozib, o‘sha holatda qolgan holda chapga yuqoriroq razryadli qo‘shnisiga surilishi kerak. Bu yerda ishning ikkinchi taktida mashina yuqoriroq razryadli raqamga 1 sonini qo‘shishi kerak.

Tabiiyki, chapga surilish paytida yuqoriroq razryadli raqam bo‘lmasa, u holda mashinaning boshqaruvchi kallagi bo‘sh katakchaga chiqishi mumkin. Bu holatda bo‘sh katakchaga mashina 1 raqamini yozadi.

Aytilganlardan shu narsa kelib chiqadiki, funksiyani hisoblash algoritmini realizatsiya etish paytida mashina bor yo‘g‘i va holatlarda bo‘ladi.

Shunday qilib, o‘nlik sistemada dan ga o‘tish algoritmini realizatsiya etadigan Tyuring mashinasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

4.1-jadval

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	1лq$_0$	1лq$_0$	2chq$_0$	3лq$_0$	4лq$_0$	5лq$_0$	6лq$_0$	7лq$_0$	8лq$_0$	9лq$_0$	0лq$_1$

1 va 2 – shakllarda va sonlar uchun mos ravishda konfiguratsiyalari keltirilgan.

4.1-shakl. 4.2-shakl.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Ommaviy muammo. Yechish algoritmi.
2. Tyuring mashinalari. Tashqi va ichki alfavit.
3. Mashinaning tashqi xotirasi. Boshqaruvchi kallak.
4. Boshlang‘ich axborot. Tyuring funksionalnal sxemasi.
5. Tyuring mashinasida algoritmni realizatsiya qilish.

22-MAVZU	**REKURSIV VA REKURSIV SANALUCSHI TO’PLAMLAR.**

REJA:

1.Hisoblanuvchi funksiyalar.

2.Qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar.

Arifmetik funksiya. –Hisoblanuvchi funksiya. –Boshlang’ich funksiyalar. –Funksiyalar superpozitsiyasi. –Primitiv rekursiya sxemasi. –Minimallash operatsiyasi (μ -operator). –Primitiv rekursiv funksiya. –Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya. –Umumrekursiv funksiya. –A.Chyorch tezisi.

1-ta’rif. *Agar birorta funksiyaning aniqlanish sohasi ham, qiymatlar sohasi ham natural sonlar to’plamining qism to’plamlari bo’lsa, u holda bunday funksiya arifmetik (sonli) funksiya deb aytiladi. Natural sonlar to’plamida berilgan har qanday munosabatlarga arifmetik munosabat deyiladi.*

Masalan, natural sonlar to’plamida $f(x, y) = x \cdot y$ (ko’paytma) – ikki argumentli arifmetik funksiyadir; $x + y < z$ - uch argumentli arifmetik munosabat. Arifmetik funksiya va arifmetik munosabat tushunchalari intuitiv tushunchalardir va hech qanday formal sistema bilan bog’langan emaslar.

Arifmetik (sonli) funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjudligini aniqlash algoritmik muammolardan biridir.

2-ta’rif. *Agar* $g = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaning qiymatini hisoblovchi algoritm mavjud bo’lsa, u effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiya deb aytiladi.*

Bu ta'rifda algoritm tushunchasi intuitiv ma'noda tushunilganligi sababli, effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi ham intuitiv tushuncha bo'ladi.

Ammo algoritm tushunchasidan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasiga o'tishning o'ziga xos ijobiy tomoni bor. Masalan, algoritm tushunchasiga qo'yilgan hamma talablar (xarakterli xususiyatlari sifatida) rekursiv (qaytarish) funksiyalar majmuasi deb ataladigan hamma hisoblanuvchi funksiyalar majmuasi uchun bajariladi.

Gyodel birinchi bo'lib biror formal sistemada aniqlangan hamma sonli funksiyalar sinfini rekursiv funksiyalar sinfi sifatida ifodaladi. 1936 yilda Chyorch ham boshqa asoslarga suyanib rekursiv funksiyalar sinfini tasvirlagan edi. Bu yerda **hisoblanuvchi funksiyalar sinfi** quyidagi ravishda tuziladi.

3-ta'rif. Quyidagi sonli funksiyalar boshlang'ich (oddiy, bazis) funksiyalar deyiladi:

1.Nol funksiya (bekor qilish operatori): $0(x) = 0$ har bir x uchun.

2.Birni qo'shish (siljish operatori): $\lambda(x) = x + 1$ har bir x uchun.

3.Proeksiyalash funksiyasi (proeksiyalash operatori): $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ hamma $x_1, x_2, ..., x_n$ lar uchun, $(n = 1, 2, ...; \quad m = 1, 2, ..., n)$.

Ravshanki, uchala boshlang'ich funksiyalar hamma joyda aniqlangan va intuitiv hisoblanuvchi funksiyalardir.

Izoh. Argumentlarining barcha qiymatlarida aniqlangan funksiyaga hamma joyda aniqlangan funksiya deb aytamiz.

Quyidagi uchta qoida vositasi bilan mavjud funksiyalardan yangi funksiyalar hosil etiladi.

1.Funksiyalar superpozitsiyasi $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ... , $f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalarni va $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyani ko'rib o'taylik.

4-ta'rif. $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ *tenglik bilan aniqlanadigan* $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaga* φ *va* $f_1, f_2, ..., f_m$ *funksiyalarning superpozitsiyasi deb aytiladi.*

Agar biz qandaydir usul bilan φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalarning qiymatini hisoblash imkoniyatiga ega bo'lsak, u holda ψ funksiyani quyidagicha hisoblash mumkin: $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga mos ravishda $a_1, a_2, ..., a_n$ qiymatlarni beramiz. Hamma $f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ larni hisoblab, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ni topamiz. Keyin $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ni hisoblab, $c = \psi(a_1, a_2, ..., a_n)$ ni topamiz.

Aniqki, agar φ va $f_1, f_2, ..., f_m$ lar hamma joyda aniqlangan bo'lsa, ψ funksiya ham hamma joyda aniqlangan bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar $f_1, f_2, ..., f_m$ larning hech bo'lmaganda birortasi hamma joyda aniqlangan bo'lmasa, u holda ψ funksiya hamma joyda aniqlangan bo'lmaydi. Shu bilan birga ikkinchi tomondan, argumentlarning shunday $a_1, a_2, ..., a_n$ qiymatlari topilishi mumkinki, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n) \quad (i = \overline{1, m})$ bo'lsa, $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ni hisoblab bo'lmaydi. Bu holda ham ψ funksiya hamma joyda aniqlanmagan bo'ladi.

Shunday qilib, agar φ, $f_1, f_2, ..., f_m$ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi bo'lsalar, u holda ψ funksiya ham intuitiv hisoblanuvchi bo'ladi.

Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, $f_1, f_2,..., f_m$ funksiyalarning barchasi ham $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning hammasidan bog'liq bo'lmasligi mumkin. Bu hollarda ψ funksiyani hosil qilish uchun soxta argumentlardan va $I_n^m\ (x_1,..., x_n)$ funksiyalardan foydalanamiz.

Masalan, $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ funksiya $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_n)$ va $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)$ funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil etilgan.

2.Primitiv (o'ta sodda) rekursiya sxemasi $\varphi(x_2, x_3,..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiruvchi yangi f funksiyani ko'ramiz:

$$f(0, x_2, x_3,..., x_n) = \varphi(x_2, x_3,..., x_n),$$

$$f(y+1, x_2, x_3,..., x_n) = \psi(y, f(y, x_2,..., x_n), x_2,..., x_n) \qquad (1)$$

Bu yerda φ $n-1$ argumentga, ψ - $n+1$ argumentga va f - n argumentga bog'liq funksiyalar.

5-ta'rif. *Agar $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiya φ va ψ funksiyalardan (1) munosabat orqali hosil etilsa, u holda f funksiya φ va ψ funksiyalardan* ***primitiv*** *(o'ta sodda)* ***rekursiya sxemasi*** *orqali hosil etilgan deyiladi.*

Agar φ va ψ funksiyalar intuitiv hisoblanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda f ham intuitiv hisoblanuvchi funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham, $x_1, x_2,..., x_n$ argumentlarning qiymatlar majmuasi $a_1, a_2,..., a_n$ bo'lsin. U vaqtda ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$f(0, a_2, a_3,..., a_n) = \varphi(a_2, a_3,..., a_n) = b_0,$$

$$f(1, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3,..., a_n) = b_1,$$

$$f_2(2, a_2, a_3,..., a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3,..., a_n) = b_2$$ va hokazo.

Ravshanki, agar φ va ψ funksiyalar argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda f funksiya ham argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'ladi.

Endi misollarda primitiv rekursiya sxemasi orqali yangi funksiyalarni hosil etishni ko'raylik.

1-misol. $\varphi(x) = x$ va $\psi(x, y, z) = y+1$ bo'lsin hamda $f(y, x)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali aniqlansin:

$$\left.\begin{array}{l} f(0, x) = x, \\ f(y+1, x) = f(y, x) + 1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$f(y, x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y = 5$, $x = 2$ qiymatlarida hisoblab chiqaylik. $f(0,2) = \varphi(2) = 2$ bo'lganligi uchun (2) formulalarning ikkinchisidan ketma-ket ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2)=\psi(0,2,2)=2+1=3, \\ f(2,2)=\psi(1,3,2)=3+1=4, \\ f(3,2)=\psi(2,4,2)=4+1=5, \\ f(4,2)=\psi(3,5,2)=5+1=6, \\ f(5,2)=\psi(4,6,2)=6+1=7. \end{array}\right\}$$

$f(y,x)=y+x$ ekanligini osongina ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x)=f(y,x)+z$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z$ yoki $f(z,x)=x+z$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $f(y,x)$ funksiya quyidagi tengliklar bilan berilgan deylik:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,x)=0, \\ f(y+1,x)=f(y,x)+x. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Bu yerda $\varphi(x)=0$, $\psi(x,y,z)=y+z$ bo'ladi.

$f(y,x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y=2$, $x=2$ qiymatlari uchun hisoblaymiz.

$f(0,x)=\varphi(x)=0$ bo'lganligi uchun $f(0,2)=\varphi(2)=b_0=0$ bo'ladi. Funksiyaning $f(1,2)$ va $f(2,2)$ qiymatlarini ketma-ket topamiz:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2)=\psi(0,0,2)=b_1=0+2=2, \\ f(2,2)=\psi(1,2,2)=2+2=4. \end{array}\right\}$$

Bu misolda $f(y,x)=x\cdot y$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y+z,x)=f(y,x)+z\cdot x$. Bu tenglikda $y=0$ deb qabul qilib, $f(z,x)=f(0,x)+z\cdot x$ yoki $f(z,x)=z\cdot x$ ni hosil qilamiz.

3.Minimallash operatsiyasi (μ-operator). Ixtiyoriy $f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi masalani ko'rib chiqamiz: har qanday x argumentning qiymatlari uchun hech bo'lmaganda shunday bitta y argumentning qiymatini topish kerakki, $f(x,y)=0$ bo'lsin. Yana ham murakkabroq holda masalani qo'yamiz: berilgan $f(x,y)$ funksiya va uning muayyan qiymatli x argumenti uchun $f(x,y)=0$ qila oladigan y argumentlarning eng kichik qiymatlisini topish kerak bo'lsin. Masalaning yechimi x ga bog'liq bo'lganligi uchun $f(x,y)=0$ qila oladigan y ning eng kichik qiymati ham x ning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\varphi(x)=\mu\, y[f(x,y)=0]=0. \qquad (4)$$

(4) ifoda quyidagicha o'qiladi: «Shunday eng kichik y ki, $f(x,y)=0$».

Xuddi shu tarzda ko'p argumentli $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya aniqlanadi:

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\mu\, y\,[f(x_1,x_2,...,x_n,y)=0]. \qquad (5)$$

6-ta'rif. *$f(x_1,x_2,...,x_n,y)$ funksiyadan $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaga o'tishni **μ-operatorning tatbig'i** deb aytiladi.*

$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyani hisoblash uchun quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

1. $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ ni hisoblaymiz. Agar f ning bu qiymati nolga teng bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ deb qabul qilamiz. Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz.

2. $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ ni hisoblaymiz. Agar $f(x_1, ..., x_n, 1) = 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ bo'ladi.

Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) \neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi qadamga o'tamiz va hokazo.

Agar y ning hamma qiymatlari uchun $f(x_1, ..., x_n, y) \neq 0$ bo'lsa, u vaqtda $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni aniqlanmagan funksiya deb aytamiz.

Ammo y argumentning shunday y_0 qiymati mavjud bo'lishi mumkinki, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y_0) = 0$ va, demak, eng kichik y mavjudki, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ bo'ladi; shu vaqtning o'zida, birorta z uchun $(0 < z < y_0)$ $f(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ qiymat aniqlanmasligi mumkin. Aniqki, bu holda y ning $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ bo'ladigan eng kichik qiymatini topish jarayoni, y_0 gacha yetib bormaydi. Bu yerda ham $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni aniqlanmagan funksiya deb hisoblaydilar.

3-misol. $f(x, y) = x - y$ funksiya berilgan bo'lsin. Ushbu funksiya minimizatsiya operatori orqali hosil etilishi mumkin:

$$f(x, y) = \mu z(y + z = x) = \mu z\left[I_3^2(x, y, z) + I_3^3(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)\right].$$

Masalan, $f(x, y)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y = 2$, $x = 7$ qiymatlarida $(f(7,2))$ hisoblab chiqamiz. Buning uchun $y = 2$ deb, x ga ketma-ket qiymatlar berib boramiz:

$z = 0, \quad 2 + 0 = 2 \neq 7,$

$z = 1, \quad 2 + 1 = 3 \neq 7,$

$z = 2, \quad 2 + 2 = 4 \neq 7,$

$z = 3, \quad 2 + 3 = 5 \neq 7,$

$z = 4, \quad 2 + 4 = 6 \neq 7,$

$z = 5, \quad 2 + 5 = 7 = 7.$

Shunday qilib, $f(7,2) = 5$.

7-ta'rif. *Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani boshlang'ich (oddiy) funksiyalardan superpozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ga **primitiv rekursiv funksiya** deb aytamiz.*

Boshlang'ich $0(x) = 0$, $\lambda(x) = x + 1$, $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ $(1 \leq m \leq n)$ funksiyalar va $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a$ $(a \in N)$, $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x \cdot y$, $f(x, y) = x^y$ $(x^0 = 1)$ funksiyalar primitiv rekursiv funksiyalar bo'ladi.

8-ta'rif. *Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani boshlang'ich funksiyalardan superpozitsiya, primitiv rekursiya sxemasi va minimallash operatori (μ-operatori) amallarini chekli sonda qo'llash natijasida hosil etish mumkin bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ga **qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya** deb aytamiz.*

Bu keyingi ta'rif primitiv rekursiv funksiyaning ta'rifidan faqat boshlang'ich funksiyalarga qo'shimcha ravishda μ-operatorini qo'llashga ruxsat berilgani bilan farq qiladi. Shuning uchun ham **har qanday primitiv rekursiv funksiya o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'ladi**.

9-ta'rif. *Agar* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya qismiy rekursiv va argumentlarning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *ga* ***umumrekursiv funksiya*** *deb aytiladi.*

Quyidagi funksiyalar:

$$\lambda(x),\ 0(x),\ I_n^m(x),\ f(y,x) = y + x,\ f(y,x) = x \cdot y,\ f(y,x) = x + n$$

umumrekursiv funksiyalar bo'ladilar.

A.Chyorch tezisi. Har qanday intuitiv hisoblanuvchi funksiya qismiy rekursiv funksiya bo'ladi.

Bu tezisni isbotlash mumkin emasligini yuqorida aytgan edik, chunki u intuitiv hisoblanuvchi funksiya noqat'iy matematik tushunchasini qat'iy aniqlangan qismiy rekursiv funksiya matematik tushunchasi bilan bog'laydi.

Ammo, agar shunday intuitiv hisoblanuvchi funsiya tuzish mumkin bo'lsaki, u o'z navbatida qismiy rekursiv funksiya bo'lmasa, u holda bu tezisni rad etish mumkin. Ammo bunday holning mavjudligini hozirgacha hech kim ko'rsata olmagan.

Teorema. $g(y_1, y_2, ..., y_k)$ *- primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya va* $x_1, x_2, ..., x_n$ *- har xil o'zgaruvchilar bo'lsin. U vaqtda, agar har bir* i $(1 \le i \le k)$ *uchun* z_i *o'zgaruvchi* $x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilarning biri bo'lsa, u holda* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(z_1, z_2, ..., z_k)$ *funksiya ham primitiv rekursiv (qismiy rekursiv) funksiya bo'ladi.*

Isbot. $z_i = x_{ji}$ $(1 \le j_i \le n)$ bo'lsin. U vaqtda $z_i = I_{ji}^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi$ $(I_{ji}^n(x_1, x_2, ..., x_n), ..., I_{jk}^n(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Shunday qilib, ψ funksiyani φ, $I_{ji}^n, ..., I_{jk}^n$ funksiyalardan superpozitsiya amali orqali hosil etish mumkin, ya'ni ψ primitiv rekursiv (rekursiv) funksiya bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Arifmetik funksiya. Hisoblanuvchi funksiya. Boshlang'ich funksiyalar.

2.Funksiyalar superpozitsiyasi. Primitiv rekursiya sxemasi. Minimallash operatsiyasi (μ-operatori).

3.Primitiv rekursiv funksiya. Qismiy rekursiv (rekursiv) funksiya.

4.Umumrekursiv funksiya. A.Chyorch tezisi.

II. AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

AMALIY MASHG'ULOT -1. TO'PLAMLAR NAZARIYASI.

Ishdan maqsad: To'plamlar ustida bajariladigan asosiy amallarga doir misollarni yechishni o'rganish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan ikkita to'plamning tengligini isbotlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. a) $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B\cup B=\overline{A}\cup B,$

b) $(A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap X)=C$

ekanligi isbot etilsin.

2. Ushbu to'plamlarning har ikkitasi va hamda uchtasining kesishmalari va birlashmalarini toping:
$A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e,f,g\}$, $C=\{a,f,g,k,c\}$.

3. $A=\{1,2,...,n\}$ to'plam uchun $B=\{3,6,9,12,...,3n,...\}$ qismdir. $\overline{B}$ ni toping.

4. $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, A=\{1,2,3\}, B=\{0,1,2,5,8\}, C=\{0,2,5,8\},$
$D=\{3,6,8,9\}$ bo'lsa, quyidagi to'plamlarni toping:

1) $\overline{A\cup B}\cap(C\setminus D)$;	5) $(A\otimes B)\cup\overline{C\cap D}$;
2) $\overline{A/B}\cap(C\cup D)$;	6) $(A\cup B\cup C)\cap D$;
3) $\overline{A\cap B}\cap(C\setminus\overline{D})$;	7) $(B\cap C)\cup(A\cap D)$;
4) $(A\cup\overline{B\cup C})\cap D$;	8) $\overline{(\overline{A\cup B}\cup C)}\cap D.$

5. $U=\{-1,-2,-3,-4,-5,5,4,3,2,1\},\ A=\{1,2,3\},\ B=\{-1,-2,-5,3\},$
$C=\{-3,-4,1,2,3\},\ D=\{-2,1,4,5\}$ bo'lsa, quyidagi to'plamlarni toping:

1) $\overline{A\cup B}\cap(C\setminus D)$;	5) $(A\otimes B)\cup\overline{C\cap D}$;
2) $\overline{A/B}\cap(C\cup D)$;	6) $(A\cup B\cup C)\cap D$;
3) $\overline{A\cap B}\cap(C\setminus\overline{D})$;	7) $(B\cap C)\cup(A\cap D)$;
4) $(A\cup\overline{B\cup C})\cap D$;	8) $\overline{(\overline{A\cup B}\cup C)}\cap D.$

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari nimadan iborat?
2.To'plamlar ustida qanday amallar bajariladi?
3.Asosiy tengkuchliliklarni yozing.
4.Qanday to'plamga to'plamlar algebrasi deb aytiladi?
5.Mulohazalarning juft-juft ekvivalentligining shartlari.

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012

2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

3. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT-2. MUNOSABATLAR. BINAR MUNOSABATLAR MAXSUS BINAR MUNOSABATLAR. EKVIVALENTLIK MUNOSABATI. TARTIB MUNOSABAT LAR TURLARI

Ishdan maqsad: Binar munosabatlar ustida bajariladigan asosiy amallarga doir misollarni yechishni o‘rganish.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan binar munosabatlar turlarini aniqlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. {0,1, ... ,9} to‘plamda berilgan quyidagi munosabatlardan qaysi ekvivalentlik munosabati bo‘lishini aniqlang;

$$1)\ R_1 : aR_1b \leftrightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}3);$$

$$2)\ R_2 : aR_2b \leftrightarrow a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}10);$$

$$3)\ R_3 : aR_3b \leftrightarrow ab \equiv 0(\mathrm{mod}2);$$

$$4)\ R_4 : aR_4b \leftrightarrow \left|2^a - 2^b\right| \prec 16;$$

$$5)\ R_5 : aR_5b \leftrightarrow \left|2^a - 2^b\right| \leq 16;$$

$$6)\ R_6 : aR_6b \leftrightarrow EKUB(a,b) = 1.$$

2. Z - butun sonlar to‘plamida R: $xRy \leftrightarrow x = y^2$ munosabat aniqlangan. $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ munosabatlardan birortasi ekvivalentlik munosabati bo‘ladimi?

3. Quyidagi munobatlardan qaysilari Z^2 da ekvivalentlik munosabati bo‘ladi?

$R_1 : (x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$;

$R_2 : (x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$ yoki $y_1 = y_2$;

$R_3 : (x_1, y_1)R_3(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$;

$R_4 : (x_1, y_1)R_4(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$;

$R_5 : (x_1, y_1)R_5(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$ yoki $x_1 = x_2$, $y_1 \leq y_2$?

4. n (n =1, 2, 3, 4) ta elementli to‘plamda nechta turli ekvivalentlik munosabatlarini aniqlash mumkin?

5. U universal to‘plaam berilgan. 2^U da quyidagi munosabatlardan qaysilari ekvivalentlik yoki tartib munosabati bo‘ladi:

1) $AR_1B \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;

2) $AR_2B \leftrightarrow A - B = \varnothing$;

Asosiy adabiyotlar

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
2. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
3. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

4. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT- 3. MULOHAZALAR ALGEBRASI. MULOHAZALAR USTIDA AMALLAR.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to‘ldirish orqali ularning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to‘ldira olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1.Quyidagi gaplarning qaysi birlari mulohaza bo‘ladi:

1) Toshkent – O‘zbekiston Respublikasining poytaxti;

2) $\sqrt{5}+4\sqrt{3-30}$;

3) Oy Mars planetasining yo‘ldoshi;

4) $a>0$.

2.Quyidagi mulohazalarning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlang:

1) $2\in\{x \mid 2x^3-3x^2+1=0, \quad x\in R\}$;

2) $\{1\}\in N$;

3.Quyidagi implikatsiyalarning qaysi birlari chin bo‘ladi:

1) agar $2\times 2=4$ bo‘lsa, u holda $2<3$;

2) agar $2\times 2=4$ bo‘lsa, u holda $2>3$;

4.Quyidagi formulalarning chinlik jadvallari tuzilsin:

1) $(\bar{x}\vee z)\wedge(y\to(u\to x))$;

2) $x_1\to(x_2\to(\ldots\to x_n)\ldots)$;

3) $x_1\vee x_2\vee\ldots x_n\to y_1\wedge y_2\wedge\ldots\wedge y_n$.

2.Tengkuchliliklar isbot etilsin:

1) $x\leftrightarrow y\equiv\bar{x}\leftrightarrow\bar{y}$;

2) $xy\vee\bar{x}y\vee\bar{x}\bar{y}\equiv x\to y$;

3) $x\to\bar{y}\equiv y\to\bar{x}$;

4) $x\to(y\to z)\equiv x\wedge y\to z$;

5) $x\equiv(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$;

3.Quyidagi formulalar soddalashtirilsin:

1) $(x\to x)\to x$;

2) $x\to(x\to y)$;

3) $\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}\vee(x\to y)\cdot x$;

4) $(x\leftrightarrow y)\wedge(x\vee y)$;

Asosiy adabiyotlar

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
2. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
3. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

4. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT-4: FORMULALAR. TENG KUCHLI FORMULALAR

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to‘ldirish orqali ularning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash. Teng kuchli formulalarni isbotlashni bilish.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to‘ldirish orqali teng kuchli formulalarni isbotlash.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagilarning qaysi birlari aynan chin va aynan yolg‘on formula ekanligini aniqlang:

1) $\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}$;

2) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

3) $\overline{p_1 \to (p_2 \to p_1)}$;

4) $\bar{p} \to (p_1 \to p_2)$;

5) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$;

6) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

2. Aynan chin yoki aynan yolg‘on formula ekanligini isbotlang:

1) $(x \to y) \wedge (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$;

2) $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \bar{y})$;

3) $x \vee \bar{x} \to y \wedge \bar{y}$;

4) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

5) $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y)$;

6) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

7) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;

8) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;

1.Tengkuchlilikni isbotlang: $\overline{x \to y} \equiv x \wedge \bar{y}$.

2.Formulani soddalashtiring:

$$A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y .$$

3.Berilgan formulaning aynan chinligini isbotlang:

$$A \equiv x \to (y \to x)$$

Asosiy adabiyotlar

1. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

3. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 5. ASOSIY TENG KUCHLILIKLAR.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to‘ldirish orqali ularning teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. $(A \wedge B) \to C$ implikasiyaning qiymatini aniqlash uchun berilganlardan qaysi ortiqcha?

1) *A=1, B=1, C=0;* 3) *A=1, B=0, C=1;*

2) *A=0, B=0, C=0;* 4) *A=0, B=0, C=1.*

2. Agar quyidagilar berilgan bo‘lsa, $(A \to B) \vee C$ mulohazalar algebrasi formulasining qiymatini aniqlab bo‘ladimi?

1) *A=0* 4) *A=1, C=0*

2) *C=0* 5) *A=0, B=1*

3) *A=0, B=0* 6) *B=0*

3. *A*, *B*,*C* ning qiymatini toping:

1) $\overline{A \wedge B} = 0$;

2) $\overline{A \to \overline{B}} = 1$;

3) $\overline{A \vee (A \leftrightarrow B)} \to C = 0$;

4) $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \vee C) = 1$;

5) $A \vee (A \wedge B) = 0$;

6) $\begin{cases} A \to C = 0 \\ A \vee B = 1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \overline{A \wedge B} \leftrightarrow C = 1 \\ C \vee \overline{A} = 0 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} (A \wedge B) \vee C \to A = 1 \\ A \vee \overline{C} = 0 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} A \to \overline{B} = 0 \\ A \wedge B \leftrightarrow C = 1 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} A \leftrightarrow B = 0 \\ A \vee C = 0 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} (A \wedge B) \vee C \leftrightarrow A = 1 \\ C \vee \overline{B} = 0 \end{cases}$

4. Soddalashtiring:

1) $((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \vee B)$;

2) $((A \to B) \wedge (B \to \overline{A})) \to (C \to A)$;

3) $((A \leftrightarrow B) \wedge (\overline{A} \leftrightarrow \overline{B})) \to ((A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$;

4) $((A \leftrightarrow \overline{B}) \to C) \to (A \to \overline{C})$;

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 6. MULOHAZALAR ALGEBRASI FORMULALARINING NORMAL SHAKLLARI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni mukammal diz‘yunktiv va kon‘yunktiv normal formalarga keltirish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal formalarga keltira olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi formulalarni KNSh ko'rinishiga keltiring:

1) $x \wedge (x \to y)$;

2) $(\overline{xy} \to \bar{x}) \wedge (\overline{xy \to \bar{y}})$;

3) $(x \to y) \to (y \to x)$;

4) $(x \vee \bar{z}) \to y \wedge z$;

5) $(x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \bar{x}}) \vee y \wedge \bar{z}$;

6) $(ab \to bc) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

7) $(\bar{a} \to c) \to ((\overline{\bar{b} \to \bar{a}})$;

8) $(\bar{a} \to \bar{b}) \to ((bc \to ac)$.

2. Yuqorida keltirilgan formulalarni DNSh ko'rinishiga keltiring.

3. Quyidagi formulalarni DNSh ko'rinishiga keltiring va aynan yolg'on yoki aynan yolg'on emasligini aniqlang:

1) $\overline{x\bar{y}} \leftrightarrow \bar{x} \vee xy$;

2) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;

3) $xy \to (x \to \bar{y})$;

4) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;

5) $x \vee y \to z$;

6) $(x \to z)(y \to z) \to (x \to y)$.

4. 1 va 3 bandlarda keltirilgan formulalarni MKNSh va MDNSh ko'rinishiga keltiring.

5. $f(x, y, z)$ funksiya shunda va faqat shunda chin qiymat oladiki, qachon o'zgaruvchilarning faqat bittasi chin qiymat olsa. $f(x, y, z)$ funksiyaning chinlik jadvalini tuzing va uni formula orqali ifodalang.

Misol. 1. $A = (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ formula quyidagi MKNSh ga ega bo'ladi.

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u})$$

2. $A = (\overline{x \vee z}) \wedge (x \to y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$

$$A = [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}] \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z}))] = [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$
$$(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})]$$
$$A = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

3. $A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t)$

$$A = [z \vee y \vee (z \wedge \bar{z}) \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee y \vee z \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge$$
$$\wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z \vee t) = [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge$$
$$(\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})] \wedge$$

$\wedge[(x \vee y \vee z \vee t) \wedge x \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge \ \wedge(\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)]$

Misol. $A = [(\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}) \wedge$$

$$\wedge (x \vee \bar{z} \vee u) \vee (y \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \bar{z} \vee u \vee \bar{y})$$

Asosiy adabiyotlar

1. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
3. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
4. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
5. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 7. FORMULALARNING ASOSIY XOSSALARI. FORMULALARNING CHINLIK TO’PLAMI

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni chinlik to’plamini topa olish, chinlik jadvali berilgan formulalarni topa olishi.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulalarni chinlik to’plamini topishi, berilgan formulani rostlik jadvali yordamida mukammal diz‘yunktiv va kon‘yunktiv normal formalarga keltira olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi qiymatlar satrida F funksiya 1 qiymatni qabul qilsa, MKNSh dan foydalanib, F ni toping.

1) $F(0,0)= F(1,0)=1$; 2) $F(1,0)=1$;

3) $F(0,1,0)= F(1,0,1)= F(1,1,1)=1$; 4) $F(0,1,1)=$) $F(1,1,0)=1$;

5) $F(1,0,0)= F(0,1,0)= F(0,0,1)=1$;

2. Quyidagi mulohazalar algebrasi formulalarining har biri uchun chinlik jadvalini tuzib, MDN shaklini toping:

$$1)\ X \to Y; \quad 2)\ (X \wedge Y) \wedge Z; \quad 3)\ (X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \neg Y);$$

$$4)\ X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y))); \quad 5)\ ((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge T;$$

$$6)\ (X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow T); \quad 7)\ ((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X;$$

$$8)\ (\neg Z \to \neg Y) \to ((X \wedge \neg Z) \wedge Y); \ 9)\ (X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \to (T \wedge \neg X));$$

$$10)\ ((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X) \wedge Z); \ 11)\ \neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Z).$$

Yechim: 7) Berilgan formula uchun chinlik jadvalini tuzamiz:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \to Z$	$\neg X$	$((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X;$
0	**0**	**0**	0	1	1	**1**
0	**0**	**1**	0	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	0
0	**1**	**1**	1	1	1	**1**
1	**0**	**0**	1	0	0	**1**

1	0	1	1	1	0	0
1	**1**	**0**	1	0	0	**1**
1	1	1	1	1	0	0

Endi, formulaning qiymati 1 ga teng bo‘ladigan satrdagi o‘zgaruvchilarning qiymatini tanlab olamiz: $F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,1,0)=1$. Har biri uchun elementar kon’yunksiya tuzamiz: $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$, $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$, $\neg X \wedge Y \wedge Z$, $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ va $X \wedge Y \wedge \neg Z$. Nihoyat, elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasini tuzib, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$F(X,Y,Z)=(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee$$
$$\vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z).$$

2.4.10. Quyidagi mulohazalar algebrasi formulalarining har biri uchun chinlik jadvalini tuzib, MKN shaklini toping:

$$1)\ X \to Y;\quad 2)\ (X \wedge Y) \wedge Z;\quad 3)\ (X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \neg Y);$$
$$4)\ X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)));\quad 5)\ ((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge T;$$
$$6)\ (X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow T);\quad 7)\ ((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X;$$
$$8)\ (\neg Z \to \neg Y) \to ((X \wedge \neg Z) \wedge Y);\quad 9)\ (X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \to (T \wedge \neg X));$$
$$10)\ ((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X) \wedge Z);\quad 11)\ \neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Z).$$

Yechim: 7) Berilgan formula uchun chinlik jadvalini tuzamiz:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \to Z$	$\neg X$	$((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X;$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	**1**	**0**	1	0	1	**0**
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	**0**	**1**	1	1	0	**0**
1	1	0	1	0	0	1
1	**1**	**1**	1	1	0	**0**

Endi, formulaning qiymati 0 ga teng bo‘ladigan satrdagi o‘zgaruvchilarning qiymatini tanlab olamiz: $F(0,1\ ,0)=F(1,0,1)=F(1,1,1)=0$. Har biri uchun elementar diz’yunksiya tuzib olamiz: $X \vee \neg Y \vee Z$, $\neg X \vee Y \vee \neg Z$ va $X \vee Y \vee Z$. Nihoyat, elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyasini tuzib, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$F(X,Y,Z)=(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee Z).$$

Asosiy adabiyotlar

1. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
2. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.
3. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012

AMALIY MASHG’ULOT – 8. MULOHAZALAR ALGEBRASI FUNKSIYALARI (BUL FUNKSIYASI)

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to‘ldirish orqali ularning tavtologiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to‘ldira olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. $f_1 = \overline{x\,y \vee \bar{z}}$ va $f_2 = x\,(x\,y \vee \overline{yz} \vee \overline{(y \vee \bar{t}\,z})\,)$ funksiyalarga tengkuchli bo‘lgan funksiyalarni toping.

2. Yolg‘on qiymat saqlovchi ($f(0,0,...,0)=0$) n argumentli har xil funksiyalarning soni nechta?

3. Chin qiymat saqlovchi ($f(1,1,...,1)=1$) n argumentli har xil funksiyalarning soni nechta?

4. Quyidagi $f_1(x,y,z,t)=(x\vee y)(z\vee t)$ va $f_2(x,y,z,t)==xz\vee yz\vee xt\vee yt$ hamda $f_3(x,y,z,t)=xy\vee zt$ va $f_4(x,y,z,t)=(x\vee z)(y\vee z)(x\vee t)(y\vee t)$ funksiyalarning tengkuchliligini isbotlang.

5. Quyidagi bul funksiyalari uchun qiymatlar jadvalini tuzing:

1) $f\,(x,y,z)=((x\to z)y')\to x'$;
2) $f\,(x,y,z)=((x\vee y')\to z)((x|y)\leftrightarrow z')$;
3) $f\,(x,y,z)=x'\to(x\leftrightarrow(y+(xz)))$;

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: На~~ука, 1984~~
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

AMALIY MASHG’ULOT – 9. BUL FUNKSIYALARINI O‘ZGARUVCHILAR BO‘YICHA YOYILMASI. MDNSH VA MKNSH.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni mukammal diz‘yunktiv va kon‘yunktiv normal formalarga keltirish.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida mukammal diz‘yunktiv va kon‘yunktiv normal formalarga keltira olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.

2. Hamma ikki argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraf-lama bo‘lgan funksiyalarni toping.

3. n argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarning sonini toping.

4. $f=(\bar{x}\vee y\,\bar{z})\,(x\,y\vee x\bar{z})$ va $\varphi=(x\vee\bar{y})\,z\,\bar{t}\vee\bar{x}\,t$ funksiyalarga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.

5. a) $x\to y\leftrightarrow z$; b) $x\vee y\vee z\vee t$; v) $x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$ formulalarni Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltiring.

6. Funksiyaning Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi ifodasi yagona ekanligini isbotlang.

7. Chiziqli funksiyalarning qaysi birlari o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘ladi?

8. $xy\vee xz\vee yz=xy+xz+yz$ ekanligini isbot eting.

9. Quyidagi formulalarni Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishiga keltiring:

$x\vee y\vee z$; $xy\vee yz\vee xz$; $xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

10. Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi funksiyaning hamma argumentlari soxta argumentlar emasligini isbotlang.

Asosiy adabiyotlar

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
2. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
3. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
4. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 10. JEGALKIN KO‘PHADI. MONOTON BUL FUNKSIYALARI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to‘ldirish orqali ularning teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Ikki argumentli hamma monoton funksiyalarni toping.

2. Quyida keltirilgan funksiyalarning qaysi birlari monoton funksiya ekanligini aniqlang:

a) $xy \vee xz \vee x\,\bar{z}$; b) $x \to (x \to y)$; v) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;

g) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x}\,\bar{y}$; d) $xy \vee x \vee \bar{x}z$; ye) $xy \vee yz \vee xz$.

3. Aynan konstantadan (0 yoki 1) farq qiluvchi funksiya monoton bo‘lishi uchun uni kon’yunksiya va diz’yunksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash yetarli va zarurligini isbotlang.

4. Monoton funksiyaga ikkitaraflama bo‘lgan funksiya monoton ekanligini isbot qiling.

5. Faqat va faqat yoki konstantalar, yoki o‘zgaruvchilar ustida inkor amali bo‘lmagan KNSh va DNSh ko‘rinishida ifoda etilgan funksiyalar monoton bo‘lishligini ko‘rsating.

6. Quyidagi bul funksiyalari bir-biriga ikki taraflama funksiya ekanligini isbotlang:

1) xyz + yz + y + 1, xyz + xy + xz + x + y+ 1;
2) xy + xz + x + y + z, xy + xz + x;
3) xyz + xy + z, xyz + xz + yz;
4) xy + yz + x + y + z+l, xy + yz + y+l;

Asosiy adabiyotlar

1. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
3. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 11. TO‘LIQLIK VA YOPIQLIK. MUHIM YOPIQ SINFLAR. POST TEOREMASI VA UNING NATIJALARI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni Jegalkin polinomi ko’rinishiga keltirish.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani rostlik jadvali yordamida nolni yoki birni saqlashini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg’ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagifunksiyalarni Jegalkin polinomi ko’rinishida ifodalang:

1. $f(x, y, z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$
2. $f(x, y, z) = xz \vee xy \vee yz$
3. $f(x, y, z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$
4. $f(x, y, z) = x \to y \vee y \to z$
5. $f(x, y, z) = (x \to z) \vee (x \to y) + x + 1$
6. $f(x, y, z) = x \to zy \vee xy \to z$
7. $f(x, y, z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$
8. $f(x, y, z) = (x \to z) \vee (x \to y)$
9. $f(x, y, z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$

Ushbu funksiyalar nolni saqlaydimi?

1. $f(x, y, z) = x\overline{z \vee (x \to y)}$
2. $f(x, y, z) = \overline{(x + z) \vee (x \to y)}$
6. $f(x, y, z) = z + xy + y + z + 1$
7. $f(x, y, z) = \overline{xyzz + y} + 1$

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)
2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986
3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

AMALIY MASHG’ULOT – 12. MULOHAZALAR HISOBI UCHUN AKSIOMALAR SISTEMASI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulaning teorema ekanini isbotlash maqsadida formulalar ketma-ketligini tuzish masalasi.

Masalaning qo’yilishi: Keltirib chiqarish qoidalari yordamida berilgan formulaning teorema ekanini isbotlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi ifodalarning qaysi birlari mulohazalar hisobining formulalari bo‘ladi:

1) $(\overline{p}_1 \wedge \overline{p}_2) \to (p_1 \vee p_2)$;

2) $((p_1 \vee p_2) \vee (p_1 p_2)) \to \overline{p}_3$;

3) $(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \to p_3$;

4) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to \overline{p}_2) \to p_1)$;

5) $(p_1 \wedge (\to p_2) \to (p_2 \to \overline{p}_1)$;

6) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3))$;

7) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_1 \to p_3)) \to (p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$;

8) $((p_1 \wedge \overline{p}_2) \to (\overline{\overline{p}}_1 \vee \vee p_2)) \leftrightarrow (\vee p_1 \vee p_2)$.

2. Quyidagi formulalarning hamma qism formulalarini yozib chiqing:

$A = \overline{x \to y} \wedge (\overline{x} \vee y)$, $B = (x \leftrightarrow y) \vee (\overline{x}y)$,

$C = (x \leftrightarrow y) \to (\overline{y} \to t)$, $D = xy \vee xz \vee yz$.

1) $x \to (y \to x)$; 2) $\overline{a \vee b} \to c$;

3) $a \wedge \overline{c \vee b}$; 4) $x \to y \wedge z$;

5) $x \vee yz \to x$; 6) $\overline{x \to y} \vee x \wedge y$;

7) $((x \to x) \wedge (y \to z)) \to (\overline{x} \vee z)$;

8) $(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$.

Yechim: 8) $(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$.

$(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$ - nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula;

$x \to y, (x \to \overline{y}) \to \overline{y} -$ birinchi chuqurlikdagi qismiy formula;

$x, y,\ x \to \overline{y}, \overline{y} -$ ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formula.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-72 betlar)
2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

AMALIY MASHG’ULOT – 13. L NAZARIYA UCHUN GYODELNING TO‘LIQLIK HAQIDAGI TEOREMASI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulaning teorema ekanini isbotlash maqsadida formulalar ketma-ketligini tuzish masalasi.

Masalaning qo’yilishi: Keltirib chiqarish qoidalari yordamida berilgan formulaning teorema ekanini isbotlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. *formulalar uchun quyidagi o‘rniga qo‘yishlarning natijalarini yozing:*

1) $\int_{A,B}^{B,C}(L_1)$; 2) $\int_{A}^{A\to B}(L_2)$; 3) $\int_{A,C}^{B\to A\wedge B,B}(L_3)$;

4) $\int_{A,B}^{A\wedge B,A\vee B}(L_1)$; 5) $\int_{A,B}^{B,A}(L_2)$; 6) $\int_{A,B,C}^{A\wedge\overline{A},C,\overline{A}}(L_3)$.

2. *O‘rniga qo‘yish qoidasini qo‘llab, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini isbotlang:*

1) $(A \to B)\wedge B \to B$;
2) $A\wedge B \to A\wedge B\vee C$;
3) $(\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A}\vee C \to B))$;
4) $\overline{\overline{C\vee D}} \to C\vee D$;
5) $(A\wedge B \to (C \to B\wedge C)) \to ((A\wedge B \to C) \to (A\wedge B \to B\wedge C))$.

3. *O‘rniga qo‘yish va xulosa qodalarini qo‘llab, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini aniqlang:*

1) $A\vee A \to A$; 2) $A \to A\wedge A$;
3) $A\wedge B \to B\wedge A$; 4) $A\vee B \to B\vee A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$; 6) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

4. *Keltirib chiqarishning hosilaviy qoidalaridan foydalanib, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini isbotlang:*

1) $\overline{A}\vee\overline{B} \to \overline{A\wedge B}$; 2) $A \to R$;
3) $(A \to B) \to (A \to A\vee B)$; 4) $F \to A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$; 6) $A\wedge\overline{A} \to F$;
7) $(A \to B)\wedge\overline{B} \to \overline{A}$; 8) $\overline{A}\wedge\overline{B} \to \overline{A\vee B}$.

5. *Keltirib chiqarishning hosilaviy qoidalarini isbotlang:*

1) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash A\wedge B}$; 2) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A\vee B}$; 3) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash A\to B}$;

4) $\dfrac{\vdash B}{A \to B}$; 5) $\dfrac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}$; 6) $\dfrac{\vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$;

7) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$; 8) $\dfrac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B}$; 9) $\dfrac{\vdash \overline{A}, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \vee B}}$;

10) $\dfrac{\vdash A, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$; 11) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$; 12) $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$; 14) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash A \to \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-75 betlar)
2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.
3. U.U.Umarova. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Buxoro: Durdona nashriyoti, 2021, 160 bet.

AMALIY MASHG’ULOT – 14-15.
PREDIKATLAR ALGEBRASI. PREDIKATLAR VA KVANTORLAR. PREDIKATLAR ALGEBRASINIG FORMULALARI. PREDIKATLAR ALGEBRASI FORMULALARINING NORMAL FORMALARI.

Ishdan maqsad: Predikatlar algebrasining berilgan formulalarni almashtirishlar yordamida ularning teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo‘yicha berilgan formulani almashtirishlar yordamida teng kuchli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to’plamda ikkita $A(x)$: «x - tub son» va $B(x)$: «x - toq son» predikatlar berilgan. Bu predikatlarning chinlik jadvalini tuzing.

2. $M = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ to’plamda quyidagi predikatlar berilgan: $A(x)$: «x 5 ga bo’linmaydi»; $B(x)$: «x - juft son»; $C(x)$: «x - tub son»; $D(x)$: «x 3 ga karrali».

Quyidagi predikatlarning chinlik to’plamini toping:

1) $A(x) \wedge B(x)$; 2) $C(x) \wedge B(x)$; 3) $C(x) \wedge D(x)$;

4) $B(x) \wedge D(x)$; 5) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$; 6) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;

7) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$; 8) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;

9) $A(x) \vee B(x)$; 10) $B(x) \vee C(x)$; 11) $C(x) \vee D(x)$;

12) $B(x) \vee D(x)$; 13) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; 14) $B(x) \wedge \overline{D(x)}$;

15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$; 16) $C(x) \to A(x)$;

17) $D(x) \to \overline{C}(x)$; 18) $A(x) \to B(x)$;

19) $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D}(x)$; 20) $(A(x) \wedge D(x)) \to \overline{C}(x)$.

3. R to'plamda $P(x)$: $x^2+x+1>0$ va $Q(x)$: $x^2-4x+3=0$ predikatlar berilgan bo'lsin. Quyidagi mulohazalarning qaysi birlari chin va qaysi birlari yolђon ekanligini aniqlang:
1) $\forall xP(x)$; 2) $\exists xP(x)$; 3) $\forall xQ(x)$; 4) $\exists xQ(x)$.

4. Quyidagi predikatlarning qaysi birlari aynan chin qiymatga ega bo'ladi:
1) $x^2+y^2\geq 0$, 2) $x^2+y^2>0$, 3) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,
4) $(x+1)^2>x-1$, 5) $x^2+1\geq(x+1)^2$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)
2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

AMALIY MASHG'ULOT – 16. YECHILISH MUAMMOSI. CHEKLI SOHALARDA YECHILISH MUAMMOSI. YOPIQ FORMULA.

Ishdan maqsad: Predikatlar algebrasining berilgan formulalarni almashtirishlar yordamida ularning teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani almashtirishlar yordamida teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. *Quyidagi formulaning umumqiymatli ekanligini isbotlang:*

$$A\equiv\left(P(x)\to\overline{Q(x)}\right)\to\overline{\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)}$$

2. *Agar M to'plamda aniqlangan A(x) va B(x) predikatlar chin qiymatli bo'lsa, u holda ularning chinlik to'plamlari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak:*

1) $\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)\wedge\exists x\left(\overline{A(x)}\wedge B(x)\right)$

2) $\overline{\exists x\left(A(x)\wedge B(x)\right)}\wedge\left(\forall\left(A(x)\to B(x)\right)\right)$

3) $\exists x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\to\left(\forall x\left(A(x)\to B(x)\right)\right)$*?*

3. *M={1,2,3,...,20} to'plamda quyidagi predikatlar berilgan:*
A(x): «x 5 ga bo'linmaydi»
B(x): «x juft son»
C(x): «x tub son»
D(x): «x 3 ga karrali»
Quyidagi predikatlarning chinlik to'plamini toping:

1) $A(x)\wedge B(x)$	*2)* $C(x)\wedge B(x)$
3) $C(x)\wedge D(x)$	*4)* $B(x)\wedge D(x)$
5) $\overline{B}(x)\wedge D(x)$	*6)* $A(x)\wedge\overline{D}(x)$
7) $\overline{B}(x)\wedge\overline{D}(x)$	*8)* $A(x)\wedge B(x)\wedge D(x)$
9) $A(x)\vee B(x)$	*10)* $B(x)\vee C(x)$
11) $C(x)\vee D(x)$	*12)* $B(x)\vee D(x)$
13) $\overline{B}(x)\vee D(x)$	*14)* $B(x)\vee\overline{D}(x)$
15) $A(x)\vee B(x)\vee D(x)$	*16)* $C(x)\to A(x)$
17) $D(x)\to\overline{C}(x)$	*18)* $A(x)\to B(x)$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. To'rayev H.T., Matematik mantiq va diskret matematika.- T., O'qituvchi, 2003. 230-236 bb.

2. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.

AMALIY MASHG'ULOT – 17. KOMBINATORIKA ASOSLARI. O'RIN ALMASHTIRISHLAR VA KOMBINATSIYALAR. REKURENT MUNOSABATLAR.

Ishdan maqsad: Kombinatorika asoslari. O'rin almashtirishlar va kombinatsiyalar formulalaridan foydalana olish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan masalalar shartiga ko'ra formulani to'g'ri tanlash va qo'llay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi ifodalarning qiymati topilsin:
1) $\frac{14!}{12!}$; 2) $\frac{16!}{18!}$; 3) $\frac{9!}{5!\cdot 4!}$; 4) 8!+9!.
2. Quyidagilarni isbotlang:
1) $\frac{(m+3)!}{m!} = (m+1)(m+2)(m+3)$;
2) $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+2)(n-m+1)$, bunda $n > m$.
3. Amallarni bajaring:
1) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 2) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.
4. To'qqizta har xil qiymatli raqam bilan nechta to'qqiz xonali son yozish mumkin?
Javob: 362880.
5. 12 kishilik ovqat hozirlangan stolga 12 kishini necha turli o'tqazish mumkin?
Javob: 479001600.

6. Musobaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O'rinlarni ular o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?
7. Talaba 6 ta kitobdan 4 tasini necha usul bilan ajratishi mumkin?
8. Ma'lum bo'limda ishlash uchun 20 nafar ishchidan 6 nafar ishchini ajratish kerak. Buni necha usul bilan amalga oshirish mumkin?
9. Tenglik to'g'riligini isbotlang:
1) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; 2) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.
10. Ifodani soddalashtiring:
$\frac{3}{2(2n-1)} C_n^{2n-3}$.
11. Musobaqada 12 ta jamoa ishtirok etadi. Uchta turli medalni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?
Javob: $A_{12}^3 = 1320$.
12. Gruppada 30 ta o'quvchi bor. Ularning ichidan 3 kishini kompyuterda ishlash uchun ajratish kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin?
Javob: $C_{30}^3 = 4060$.

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

AMALIY MASHG'ULOT – 18-19. GRAFLAR, IZOMOFIZM, TIPLAR, BOG'LANISHLIK. EYLER VAGAMILTON GRAFLARI. DARAXTLAR, ULARNI TADBIQLARI. TAYANCH DARAXTLAR.

Ishdan maqsad: Graflar, izomofizm, tiplar, bog'lanishlik. Eyler va gamilton graflari. Daraxtlar, ularni tadbiqlarida foydalana olish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan masalalar shartiga ko'ra formulani to'g'ri tanlash va qo'llay olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. T daraxtning ikkita T_1 va T_2 qism daraxtlarining $T_1 \cap T_2$ kesishmasi daraxt bœlishini isbotlang.

2. Agar i komponenta m_i qirralarga va n_i uchlarga ega bo'lsa, u holda

$$\nu = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^{k} m_i, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

bo'lishini isbotlang.

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, A^4 = A^5 = \ldots = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Agar x_i dan x_j gacha l dan ko'p bo'lmagan qadamlar bilan o'tish masalasini kœrsak, u holda $A + E(E = E_n^n$ birlik matritsa) matritsaning darajalarini qaraymiz. Yuqoridagi misolda

$$A + E = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad (A+E)^2 = (A+E)^3 = \ldots = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

AMALIY MASHG'ULOT – 20. ALGORITM TUSHUNCHASI. HISOBLANUVLANCHILIK. PRIMITIV REKURSIV FUNKSIYALAR. QISMAN REKURSIV VA REKURSIV FUNKSIYALAR.

Ishdan maqsad: Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo'lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Primitiv rekursiya, superpozisiya va minimizasiya operatorlari yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi funksiyalarning primitiv rekursiv va umumrekursiv funksiyalar ekanligini isbotlang:

1) $x + y$; 2) x^y; 3) $x \cdot y$;

4) $\sigma(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ \ x>0\ \ bo'lsa, \\ 0, & agar\ \ x=1\ \ bo'lsa. \end{cases}$

5) $x \dot{-} y=\begin{cases} x-y, & agar\ \ x\geq y\ \ bo'lsaa, \\ 0, & agar\, x<y\ \ bo'lsa. \end{cases}$

6) $|x-y|=\begin{cases} x-y, & agar\ \ x\geq y\ \ bo'lsa, \\ y-x, & agar\ \ x<y\, bo'lsa \end{cases}$

7) $sg(x)=\begin{cases} 0, & agar\, x=0\, bo'lsa \\ 1, & agar\, x\neq 0\ \ bo'lsa \end{cases}$

8) $\overline{sg}(x)=\begin{cases} 1, & agar\, x=0\ \ bo'lsa \\ 0, & agar\ \ x\neq 0\ \ bo'lsa \end{cases}$ 9) $x!$.

10) $\min(x,y)=x$ va y sonlarning eng kichigi.

11) $\min(x_1,x_2,...,x_n)$.

12) $\max(x,y)=x$ va y sonlarning eng kattasi.

13) $\max(x_1,x_2,...,x_n)$.

Izoh. Agar isbot qilishda qiynalsangiz, u holda E.Mendelsonning «Vvedenie v matematicheskuyu logiku» kitobidan foydalaning, 137-138 betlar.

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984 137-138
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

AMALIY MASHG'ULOT – 21. TYURING MASHINASI. NOREKURSIV SANALUVCHAN TO'PLAMLAR. TO'XTASH MUAMMOSI. ALGORITMIK YECHILMAS MUAMMOLAR.

Ishdan maqsad: Tyuring mashinasi. Norekursiv sanaluvchan to'plamlar. To'xtash muammosi. Algoritmik yechilmas muammolar. Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo'lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Algoritmik yechilmas muammolar, To'xtash muammosi yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. $\varphi(n)=n+2$, $\varphi(n)=n+4$, $\varphi(n)=0$ funksiyalarni hisoblovchi algoritmlarni Tyuring mashinasining dasturlari sifatida ifodalang.

2. $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 0, & agar\, x=0\, bo'lsa \\ 1, & agar\, x\neq 0\ \ bo'lsa \end{cases}$

funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing.

3. $\overline{\mathrm{sgn}}\, x=\begin{cases} 1, & agar\, x=0\ \ bo'lsa \\ 0, & agar\ \ x\neq 0\ \ bo'lsa \end{cases}$

funksiyani hisoblovchi Tyuring funksional sxemasini tuzing.

4. $\varphi(n)=2n$ funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasini tuzing.

5. $f_p(n)=\begin{cases}1, & агар\ n\ сони\ P\ сонига\ булинса,\\ 0, & акс\ холда\end{cases}$

funksiyani hisoblovchi Tyuring mashinasining dasturlarini $\{a_0,1\}$ alfavitda yozing.

6. Funksional sxemalari quyidagi

1-jadval

	a_0	$\vert$
q_1	$a_0 n q_{p+1}$	$\vert\ л q_2$
q_2	$a_0 n q_{p+3}$	$\vert\ л q_3$
....	....	....
q_{p-1}	$a_0 n q_{p+3}$	$\vert\ л q_p$
q_p	$a_0 n q_{p+1}$	$\vert\ л q_1$
q_{p+1}	$\vert\ н q_0$	$a_0 н q_{p+2}$
q_{p+2}	$a_0 n q_{p+1}$	
q_{p+3}	$a_0 н q_0$	$a_0 н q_{p+4}$
q_{p+4}	$a_0 n q_{p+3}$	

2-jadval

	a_0	$\vert$
q_1	$\vert\ n q_4$	$\vert\ л q_2$
q_2	$a_0 n q_6$	$\vert\ л q_3$
q_3	$a_0 n q_6$	$\vert\ л q_1$
q_4	$\vert\ н q_0$	$a_0 н q_5$
q_5	$a_0 n q_4$	
q_6	$a_0 н q_0$	$\vert\ н q_7$
q_7	$a_0 n q_6$	$a_0 n q_6$

jadvallarda berilgan Tyuring mashinasi qanday funksiyalarni hisoblaydi.

Asosiy adabiyotlar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
2. Менделсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
3. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
4. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

AMALIY MASHG’ULOT – 22-23. REKURSIV VA REKURSIV SANALUVCHI TO‘PLAMLAR. REKURSIV SANALUVCHI TO‘PLAMLAR HAQIDA ASOSIY TEOREMA.

Ishdan maqsad: Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo‘lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo’yilishi: Primitiv rekursiya, superpozisiya va minimizasiya operatorlari yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. Quyidagi funksiyalarning primitiv rekursiv va umumrekursiv funksiyalar ekanligini isbotlang:

1) $x+y$; 2) x^y; 3) $x\cdot y$; 4) $x!$.

5) $\min(x,y)=x$ va y sonlarning eng kichigi.

6) $\min(x_1,x_2,...,x_n)$.

7) $\max(x,y)=x$ va y sonlarning eng kattasi.

8) $\max(x_1,x_2,...,x_n)$.

Izoh. Agar isbot qilishda qiynalsangiz, u holda E.Mendelsonning «Vvedenie v matematicheskuyu logiku» kitobidan foydalaning, 137-138 betlar.

2. $0(x)$ va $I_n^m\,(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalardan super-pozitsiya va primitiv rekursiya sxemasi amallari orqali $x+1$ va $2x$ funksiyalarni hosil qilish mumkin emasligini isbotlang.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)
2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

III. MUSTAQIL TA’LIM MAVZULARINI O’ZLASHTIRISH BO’YICHA ZARUR USLUBIY KO’RSATMALAR.

1. MUSTAQIL ISHNI TASHKIL ETISHNING SHAKLI VA MAZMUNI

Talaba mustaqil ishi (TMI) - muayyan fandan o‘quv dasturida belgilangan bilim, ko‘nikma va malakaning ma’lum bir qismini talaba toionidan fan o‘qituvchisi maslahati va tavsiyalari asosida auditoriya va auditoriyadan tashqari o‘zlashtirilishiga yo‘naltirilgan tizimli faoliyatidir.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan talabalar tomonidan ishni bajarishi talabalar bilimini nazorat qilish va baholashning reyting tizimi Nizomi talablari asosida nazorat qilinadi. Shuning uchun har bir professor – o‘qituvchi dastlab talabada o‘z qobiliyati va aqliy imkoniyatlariga ishonch uyg’otish, ularni sabr – toqat bilan, bosqichma – bosqich mustaqil bilim olishini to‘g’ri tashkil qilishga o‘rgatib borishi lozim bo‘ladi. Talabalar tomonidan mustaqil ravishda o‘zlashtiradigan bilim va ko‘nikmalarning kursdan – kursga murakkablashib, kengayib borishini hisobga olgan holda ularning tashabbuskorligini oshirib borish zarur. Shunda mustaqil ta’limga ko‘nika boshlagan talaba faqat o‘qituvchi tomonidan belgilab berilgan ishlarni bajaribgina qolmay, o‘zining extiyoji, qiziqishi va qobiliyatiga qarab, o‘zi zurur deb hisoblagan qo‘shimcha bilimlarni ham mustaqil ravishda tanlab o‘zlashtirishga o‘rganib boradi.

Talabalar «Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan mustaqil ishlarining shakli va hajmini belgilashda quyidagi jihatlar e’tiborga olinishi lozim:

-o‘qish bosqichi;

-muayyan fanning o‘ziga xos xususiyati va o‘zlashtirishdagi qiyinchilik darajasi;

-talabaning qobiliyati hamda nazariy va amaliy tayyorgarlik darajasi (tayanch bilimi);

-fanning axborot manbalari bilan ta’minlanganlik darajasi;

-talabaning axborot manbalari bilan ishlay olish darajasi.

TMI ni tashkil etishda talabaning akademik o‘zlashtirish darajasi va qobiliyatini xisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanish mumkin:

-fanning ayrim mavzularini o‘quv adabiyotlari yordamida mustaqil o‘zlashtirish, o‘quv manbalari bilan ishlash;

-amaliy, seminar va laboratoriya mashg’ulotlariga tayyorgarlik ko‘rib kelish;

-ma’lum mavzu bo‘yicha referat tayyorlash;

-kurs ishi (loyihalari) ni bajarish;

-bitiruv malakaviy ish va magistrlik dissertatsiyasi uchun materiallar to‘plash; -maket, model va badiiy asar ustida ishlash;

-amaliyotdagi mavjud muammoning yechimini topish, test, munozarali savollar va topshiriqlar tayyorlash;

-ilmiy maqola, tezislar va ma’ruza tayyorlash;

-uy vazifalarini bajarish va boshqalar;

Mavzuni mustaqil o‘zlashtirish. Faning hususiyati, talabalarning bilim darajasi va qobiliyatiga qarab ishchi o‘quv dasturiga kiritilgan alohida mavzulari talabalarga mustaqil ravishda o‘zlashtirish uchun topshiriladi. Bunda mavzuning asosiy mazmunini ifodalash va ochib berishga xizmat qiladigan tayanch iboralar, mavzuni tizimli bayon qilishga xizmat qiladigan savollarga e’tibor qaratish, asosiy adabiyotlar va axbarot manbalarini ko‘rsatish lozim.

Topshiriqni bajarish jarayonida talabalar mustaqil ravishda o‘quv adabiyotlaridan foydalanib mavzuni konspektlashtiradilar, tayanch iboralarni anglagan holada mavzuga taalluqli savollarga javob tayyorlaydilar.

Referat tayyorlash. Talabaga qiyinchilik darajasi uning shaxsiy imkoniyatlari, qobiliyati va bilim darajasiga muvofiq bo‘lgan biror mavzu bo‘yicha referat tayyorlash topshiriladi. Bunda talaba asosiy adabiyotlardan tashqari qo‘shimcha adabiyotlardan (monografiyalar, ilmiy uslubiy maqolalar, internetdan olingan ma’lumotlar, elektron kutubxona materiallari va h.k.) foydalanib materiallar yig’adi, tahlil qiladi, tizimga soladi va mavzu bo‘yicha imkon darajasida to‘liq, keng ma’lumot yerishga harakat qiladi. Zarur hollarda o‘qituvchidan maslahat va ko‘rsatmalar oladi.Yakunlangan referat kafedrada ekspertlar ishtirokida himoya qilinadi.

Ko‘rgazmali vositalar tayyorlash. Talabaga muayyan mavzuni bayon qilish va yaxshiroq o‘zlashtirish uchun yordam beradigan ko‘rgazmali materiallar (jadvallar, chizmalar, rasmlar, harakatlar, maketlar, modellar, grafiklar, namunalar va h.k.) tayyorlash topshiriladi. Mavzu o‘qituvchi tomonidan aniqlanib, talabaga ma’lum ko‘rsatmalar, yo‘l-yo‘riqlar beriladi. Ko‘rgazmali vositalarning miqdori, shakli va mazmuni talaba tomonidan mustaqil tanlanadi. Bunday vazifani bir mavzu bo‘yicha bir nechta talabaga topshirish ham mumkin.

Mavzu bo‘yicha testlar, munozarali savollar va topshiriqlar tayyorlash. Talabag muayyan mavzu bo‘yicha testlar, qiyinchilik darajasi har xil bo‘lgan masalalar va topshiriqlar, munozaraga asos bo‘ladigan savollar tuzish topshiriladi.

Ilmiy maqola, tezislar va ma’ruzalar tayyorlash.

Talabaga biron bir mavzu bo‘yicha (mavzuni talabaning o‘zi tanlashi ham mumkin) ilmiy (referativ) xarakterda maqola, tezis yoki ma’ruza tayyorlash topshirilishi mumkin. Bunda talaba o‘quv adabiyotlari, ilmiy – tadqiqot ishlari, dissertatsiyalar, maqola va monografiyalar hamda boshqa axborot manbalaridan mavzuga tegishli materiallar to‘playdi, tahlil qiladi, zarurlarini ajratib olib, tartibga soladi, shaxsiy tajribasi va bilimi, ilmiy natijalariga asoslangan holda qo‘shimchalar, izohlar kiritadi, o‘z nuqtai- nazarini bayon etadi va asoslaydi. Bunda talaba o‘qituvchi bilan hamkorlikda ishlaydi.

Tayyorlangan maqola, tezis yoki ma’ruza kafedrada himoya qilinadi. Talaba mustaqil ishini samarali tashkil etishda:

- tizimli yondoshish;
- barcha bosqichlarini muvofiqlashtirish va uzviylashtirish;
- bajarilishi ustidan qat’iy nazorat o‘rnatish;
- tashkil etish va nazorat qilish mexanizmini takomillashtirib borish zarur.

2. MUSTAQIL ISHNI BAJARISH BO‘YICHA TAVSIYALAR

«Diskret matematika va matematik mantiq» fanining xususiyatidan kelib chiqib talabalar mustaqil ish shakllarini erkin tanlashi mumkin. Topshirqlar puxta o‘ylab, ishlab chiqlgan va ma’lum maqsadga yo‘naltirilgan bo‘lishi, talabalarning auditoriya mashg’ulotlarida olgan bilimlarini mustahkamlashi, chuqurlashtirish, kengaytirish va to‘ldirishda xizmat qiladi.

Darslik yoki o‘quv qo‘llanmalar, tarqatma materiallar bo‘yicha fanlar boblar va mavzularni o‘rganish, konspekt qilish.Bunda mavzuning asosiy mazmunini ifodalash va ochib berishga xizmat qiladigan tayanch iboralar, mavzuni tizimli bayon qilishga xizmat qiladigan savollarga e’tibor qaratish, asosiy adabiyotlar va axborot manbalarini ko‘rsatish lozim.

Topshiriqni bajarish jarayonida talabalar mustaqil ravishda «Diskret matematika va matematik mantiq» faniga oid o‘quv adabiyotlaridan foydalanib ushbu mavzuni konspektlashtiradilar, tayanch iboralarning mohiyatini anglagan holda mavzuga taalluqli savollarga javob tayyorlaydilar.

Mavzuni bayon etish uchun dars jarayonidagi reja asosida va uning qo‘shimcha qilgan holda konspektlashtirishlari lozim. Shuningdek, mavzuga doir, tayanch iboralar va ularga izoh beruvchi Glossariylardan tuzilishi lozim. Tayanch iboralar soni mavzuning ko‘lamidan kelib chiqqan holda 10 tadan kam bo‘lmasligi lozim. Topshiriq oxirida foydalaniladigan adabiyotlar ro‘yxati va internet saytlari tartibi bo‘yicha aks ettirish lozim. Zarur hollarda (o‘zlashtirish qiyin bo‘lsa, savollar paydo bo‘lsa, adabiyotlar yetishmasa, mavzuni tizimli bayon eta olmasa va h.k.) o‘qituvchidan maslahat oladilar.

3.ISHNING REJASINI TUZISH VA BAJARILADIGAN ISHLARNI NAZORAT QILISH

3.1. Kafedraning asosiy vazifalari

Kafedra tomonidan mustaqil ishni amalga oshirishda quyidagi ishlar amalga oshirish kerak:

-mustaqil ish mavzularini tasdiqlash va qayta ko‘rib chiqish;

-talaba mavzuni o‘rganishda unga kerakli ko‘rsatmalar va amaliy yordam berish;

-talabaga ilmiy rahbarlarni tayinlash va biriktirish;

-talabaning ishni tayyorlash uchun rejani tasdiqlab berish va uning vazifasini bajarishni nazorat qilish;

-talaba tomonidan bajarilgan ishning sifatiga taqriz berishdan iborat bo‘lladi.

3.2. Ilmiy rahbarning vazifalari.

Talabaning ilmiy rahbari ishga rahbarlik qilishda quyidagi vazifalarni bajarishi kerak:

-talaba ishni bajarishi uchun vazifani tasdiqlab berish;

-ishning rejasini tuzishda talabaga yordam berish va adabiyotlarni tavsiya etish;

-talabaning rejasini tasdiqlashi, reja bo‘yicha muntazam ravishda ishni tekshirishi, maslahatlar va ko‘rsatmalar berishi;

- talaba ishini bajarishda tashkiliy va uslubiy yo‘nalishlar berib borishi.

3.3. Talabaning vazifalari.

Talaba mustaqil ishni bajarish jarayonida quyidagilarni bajarishi lozim:

-ishning mavzusini kafedraning talablaridan kelib chiqqan holda tanlash;

-ilmiy rahbarning tuzib bergan reja asosida berilgan topshiriqlarni o‘z vaqtida bajarish;

-o‘rnatilgan tartib bo‘yicha mustaqil ishning hisobini o‘z vaqtida kafedraga taqdim etish kerak.

Talaba mustaqil ishni nazorat qilish kafedrada ishlab chiqilgan jadval va fanning texnologik xaritasi asosida olib boruvchi professor – o‘qituvchi tomonidan amalga oshiriladi. Talabaning reyting ko‘rsatkichlari, shu jumladan mustaqil ishi bo‘yicha fakultetning an‟anviy guruh reyting oynasida yoki maxsus elektron tarmog’ida yoritib boriladi. Talaba mustaqil ishning nazorat qilish turlari va uni baholash mezonlari ishlab chiqiladi va fakultet ilmiy kengashida tasdiqlanadi.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fani bo‘yicha mustaqil ishlarni baholash mezonlari talabalarga o‘quv yili boshlanishi oldidan uslubiy materiallar bilan birgalikda tarqatiladi. Talaba mustaqil natijalari amaldagi “Oliy ta’lim muassasalarida talabalar bilimini nazorat qilish va baholashning reyting tizimi to‘g’risidagi Nizom” asosida amalga oshiriladi.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fani bo‘yicha mustaqil ish mavzulari va baholash me’zoni kafedraning yig’ilishi qaroriga binoan amalga oshiriladi. “«Diskret matematika va matematik mantiq» fani yuzasidan mustaqil ishlari bo‘yicha o‘zlashtirish muntazam ravishda talabalar guruhlarida, kafedra yig’ilishlari va fakultet ilmiy Kengashlarida muhokama etib boriladi. Talabaning mustaqil ish materiallari kafedra arxivida ro‘yxatga olinadi va o‘quv yili mobaynida saqlanadi.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fani bo‘yicha talabaning mustaqil ta’limi shu fanni o‘rganish jarayonining tarkibiy qismi bo‘lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to‘la ta’minlangan. Talabalar auditoriya mashg’ulotlarida professor-o‘qituvchilarning ma’ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni echadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o‘rganish maqsadida qo‘shimcha adabiyotlarni o‘qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo‘yicha testlar yechadi.

Mustaqil ta’lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo‘shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o‘rganish, kerakli ma’lumotlarni izlash va ularni topish yo‘llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma’lumotlar to‘plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to‘garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta'limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas. Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan mustaqil ish **150** soatni o'z ichiga oladi.

4. «DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ» FANIDAN TALABALAR MUSTAQIL ISHINI NAZORAT QILISH TARTIBI VA ULARNI BAHOLASH MEZONLARI.

Talabalarning mustaqil ishiga rahbarlik va nazorat qilish oʻqituvchilar tomonidan kafedrada tuziladigan va fakultet dekani tomonidan tasdiqlanadigan maslahatlar jadvali asosida amalga oshiriladi. Talabaning mustaqil ishini nazorat qilish ma'ruza va amaliy mashgʻulotlarni bevosita olib boruvchi oʻqituvchilar tomonidan bajariladi.

Talabalarning mustaqil ishi bakalavriat yoʻnalishining ishchi oʻquv rejasida va «Diskret matematika va matematik mantiq» fanining ishchi dasturida ajratilgan soatlar hajmida amalga oshiriladi. Talabalarning mustaqil ishning har bir topshiriqlarini bajarishi, ON oraliq nazoratlarga qoʻshib baholanib boriladi. Talabaning mustaqil ish topshirigʻini bajarish boʻyicha oʻzlashtirish koʻrsatgichi foizlarda quyidagi mezon asosida baholanadi. Bunda topshiriqga ajratilgan maksimal ball m va talaba bu topshiriq boʻyicha n % oʻzlashtirish koʻrsatgichiga erishgan boʻlsa, uning bali $mn/100$ formula bilan aniqlanadi.

Oʻzlashtirish koʻrsatgichi 90−100% (5 ball): Mustaqil ish topshirigʻidagi masala−misol toʻliq yechilgan, yechim daftarga talab darajasida yozilgan. Yechimdagi har bir qadam tegishli teorema va formulalar bilan asoslangan. Hisoblashlar toʻliq va toʻgʻri bajarilgan. Talaba mustaqil ish topshirigʻi mavzusi boʻyicha ijodiy fikrlay olish, mustaqil mushohada yuritish qobiliyatlarini namoyon qila oldi.

Oʻzlashtirish koʻrsatgichi 71−85% (4 ball): Mustaqil ish topshirigʻidagi masala−misollar, ayrim kichik xatoliklarni hisobga olmaganda, toʻgʻri yechilgan, yechim daftarga yaxshi darajada yozilgan. Yechimdagi asosiy qadamlar tegishli teorema va formulalar bilan asoslangan. Hisoblashlar asosan toʻgʻri bajarilgan. Talaba mustaqil ish topshirigʻi mavzusi boʻyicha uni amalda qoʻllay olish, mohiyatini tushunish qobiliyatlarini namoyon qila oldi.

Oʻzlashtirish koʻrsatgichi 60−70% (3 ball): Mustaqil ish topshirigʻidagi masala−misollar ayrim xatoliklar bilan yechilgan, yechim daftarga qoniqarli darajada yozilgan. Yechimdagi qadamlar tegishli teorema va formulalar bilan asoslanmagan. Hisoblashlar ayrim xatoliklar bilan bajarilgan. Yoʻl qoʻygan xatoliklarni oʻquv adabiyotlari va oʻqituvchi yordamida tuzata oladi. Talaba mustaqil ish topshirigʻi mavzusi boʻyicha tasavvurga ega ekanligini namoyon qila oldi.

Oʻzlashtirish koʻrsatgichi 0−60% (2 ball): Mustaqil ish topshiriqidagi masala−misollar qoʻpol xatoliklar bilan yechilgan yoki umuman yechilmagan. Yechim daftarga qoniqarsiz darajada yozilgan. Hisoblashlarda tuzatib boʻlmaydigan koʻrinishdagi xatoliklarga yoʻl qoʻyilgan. Yoʻl qoʻygan xatoliklarini tushunmaydi va ularni tuzatishga qodir emas. Talaba mustaqil ish topshirigʻi mavzusi boʻyicha aniq tasavvurga , nazariy va amaliy bilimlarga ega emas.

IV.GOLLASARIY

Tushunchaning o`zbek tilidagi izohi	**Tushunchaning rus tilidagi izohi**	**Tushunchaning ingiliz tilidagi izohi**
To‘plam	множество	set
qism to‘plam	подмножество	subset
birlashma	объединения	union
kesishma	пересечения	intersection
Ayirma	разность	difference
To‘ldiruvchi to‘plam	Дополнение множества	Complement of the set
Bo‘sh to‘plam	Пустое множества	Empty set
Mulohaza	Высказывание	Comment
Kon’yunksiya	Конъюнкция	Conjunction
Diz’yunksiya	Дизъюнкция	Disjunction
Inkor	отрицание	negation
Ekvivalentlik	Эквивалентность	Equivalence
Implikatsiya	Импликация	Implication
Murakkab mulohaza	Сложное высказывание	A complex statement
Elementar mulohaza	Элементтарное высказывание	An elementary statement
formula	формула	formula
Tavtologiya	Тавтология	Tautology
Aynan chin	Истинно	Truly
Bajariluvchi	разрешимая	solvable
Mulohaza- Faqat chin yoki yolg‘on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga mulohazalar deb aytamiz.	Высказывание- Наше обсуждение начинается со введения в основные строительные блоки логики — пропозиции. Пропозиция - это декларативное предложение (то есть предложение, объявляющее факт), которое является либо истинным , либо ложным, но не тем и другим одновременно.	Propositions-Our discussion begins with an introduction to the basic building blocks of logic—propositions.A proposition is a declarative sentence (that is, a sentence that declares a fact) that is either trueor false, but not both.
Ehtimollikning aksiomatik ta`rifi-hodisaga imkon tug`diruvchi qism to`lamning umumiy to`plamga nisbati.	Аксиоматическое определение вероятности — отношение подмножества, благоприятствующего событию к общему множеству.	The axiomatic definition of probability is the ratio of the subset favorable to the event to the general set.
Asimmetriya-uchinchi tartibli markaziy momentning o`rtacha kvadratik chetlanish kubiga nisbati.	Асимметрия — отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения.	Asymmetry - the ratio of the central moment of the third order to the cube of the standard deviation.

Takrorlanmaydigan tanlanma- tanlab olingan ob`ekt tekshirishlardan keyin bosh to`plamga qaytarilmaydigan tanlanma.	Бесповторная выборка — выборка, при которой отобранный объект после проведения обследований не возвращается в генеральную совокупность.	Repeatless sampling - a sampling in which the selected object after conducting surveys does not return to the general population.
Ehtimollik-imkon tug`diruvchi hollarning umumiy hollarga nisbati.	Вероятность — отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов.	Probability is the ratio of the number of favorable outcomes to the total number of outcomes.
Tanlanma- o`rganilayotgan ob`ektlar to`plamidan tasodifiy ravishda tanlab olingan ob`ektlar to`plami.	Выборка — совокупность случайно отобранных из изучаемой совокупности объектов.	A sample is a collection of objects randomly selected from the studied set of objects.
Diskret tasodifiy miqdor- alohida ajratilgan qiymatlarni ma`lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.	Дискретная случайная величина — величина, принимающая отдельные значения с определенными вероятностями.	Discrete random variable - a value that takes individual values with certain probabilities.
Dispersiya- tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi ayirmasi kvadratining matematik kutilmasi.	Дисперсия — математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.	Dispersion - the mathematical expectation of the square deviation of a random variable from its mathematical expectation.
Ishonchlilik oralig`i- noma`lum parameter θ ning qiymatlarini γ ehtimollik bilan qoplovchi oraliq.	Доверительный интервал — интервал, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.	Confidence interval is the interval that covers an unknown parameter θ with a given reliability γ.
Muqarrar hodisa - ma’lum shartlar to’plami hozirlanganda albatta ro’y beradigan hodisai.	Достоверное событие — событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.	A reliable event is an event that will necessarily happen if a certain set of conditions is implemented.
Intervali(oraliqli) baholar- ikkita son-oraliqning boshi va oxiri bilan aniqlanuvchi baholar.	Интервальная оценка — оценка, которая определяется концами интервала.	Interval assessment - an assessment that is determined by the ends of the interval.
Konkurent(Raqobatlashuvchi yoki alternative) gipoteza-asosiy gipotezaga qarama-qarshi bo‘lgan ixtiyoriy gipoteza.	Конкурирующая гипотеза — гипотеза противоречащая основной.	A competing hypothesis is a hypothesis that contradicts the main one.

Korrelyatsion bog`lanish- bir miqdorning o`zgarishi ikkinchi miqdorning o`rta qiymatining o`zgarishiga olib keluvchi bog`lanish.	Корреляционная зависимость — зависимость, при которой при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.	Correlation dependence - dependence in which, when one of the quantities changes, the average value of the other changes.
Korrelyatsion moment-ikki tasodifiy miqdor orasida bog`liqlik xarakteristikasi.	Корреляционный момент — характеристика связи между двумя случайными величинами.	The correlation moment is a characteristic of the relationship between two random variables.
Moda- eng katta chastataga ega bo`lgan barianta.	Мода — варианта ряда, которая имеет наибольшую частоту.	Fashion is a variant of the series that has the highest frequency.
Tasodifiy miqdorlar momentlari- tasodifiy miqdor chetlanish k-darajasi matematik kutilmasini aniqlovchi tasodifiy miqdorning xarakteristikasi.	Моменты случайных величин — характеристики случайных величин, определяющие математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины.	Moments of random variables are characteristics of random variables that determine the mathematical expectation of the kth degree of deviation of a
Uzluksiz tasodifiy miqdor- bir-biridan yetarlicha kichik farqlanuvchi (ma`lum oraliqdagi barcha)qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.	Непрерывная случайная величина — величина, принимающая значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.	A continuous random variable is a quantity that takes on values that differ arbitrarily little from each other.
Siljimagan baho- matematik kutilmasi baholanayotgan θ parametrga teng bo`lgan θ* baho.	Несмещенная оценка — оценка θ*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ.	An unbiased estimate is the estimate θ *, the mathematical expectation of which is
Asosiy (nolinch) gipoteza - tekshirilishi kerak bo‘lgan(ilgari surilgan) gipoteza.	Нулевая гипотеза — основная выдвинутая гипотеза	The null hypothesis is the main hypothesis put forward.
Ehtimollik taqsimotining zichligi- uzluksiz tasodifiy miqdorning ma`lum oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi.	Плотность распределения вероятностей — вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение на указанном интервале.	The probability distribution density is the probability that a continuous random variable takes on a value in the specified interval.
Takrorlanadigan tanlanma- tanlab olingan ob`ekt tekshirishlardan keyin bosh to`plamga qaytariladigan tanlanma.	Повторная выборка — выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.	Re-sampling - a sample in which the selected object is returned after the survey back to the population.
Chastotalar poligoni-(x_i,n_i) nuqtalarni kesmalar bilan birlashtirishdan hosil bo`lgan	Полигон частот — ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1).	A frequency polygon is a broken line whose

siniq chiziq.		segments connect the points (x1, n1).
Regressiya-bir tasodifiy miqdorni boshqasining funksiyasi kabi ifodalash.	Регрессия — представление одной случайной величины как функции другой.	Regression is the representation of one random variable as a function of another.
Tasdifiy miqdor-tajriba natijasida oldindan ma`lum bo`lmagan bitta va faqat bitta qiymat qabul qiluvchi miqdor.	Случайная величина — величина, которая в результате испытания примет одно и только одно значение до опыта не известно какое.	Random value - a value that as a result of the test will take one and only one value until the experiment does not know which.
Asosli baho- n→∞ da baholanayotgan parameterga intiluvchi baho.	Состоятельная оценка — оценка, которая при n→∞ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.	A valid estimate is an estimate that, as n → ∞, tends in probability to the parameter being estimated.
Statistik gipoteza- noma`lum taqsimotning ko`rinish yoki noma`lum parametrlari haqidagi gipoteza.	Статистическая гипотеза — гипотеза о виде неизвестного распределения, или параметрах неизвестного распределения.	The statistical hypothesis is a hypothesis about the form of an unknown distribution, or the parameters of an unknown distribution.
Statistik kriteriya(alomat)-nolinchi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvci tasodifiy miqdor.	Статистический критерий — случайная величина, служащая для проверки нулевой гипотезы.	Statistical criterion - a random variable that serves to verify zero hypothesis.
Stoxastik bog`lanish-bir mirdorning o`zgarishi ikkinchi miqdorning o`zgarishga olib keluvchi bof`lanish.	Стохастическая зависимость — зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение другой.	Stochastic dependence is a dependence in which a change in one of the quantities entails a change in the other.
Laplas teoremasi- katta n va k lar uchun n ta tajribalarda k marta ro`y berish ehtimolligini aniqlaydi.	Теорема Лапласа — определение вероятности наступления события в k измерениях из n (при больших k и n).	Laplace's theorem is the determination of the probability of occurrence of an event in k dimensions from n (for large k and n).
Ehtimollar nazariyasi- ommaviy tasodifiy hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o`rganuvchi fan.	Теория вероятностей — наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.	Probability Theory is a science that studies the general laws of random phenomena of a mass nature.
Nuqtaviy baho- bitta son bilan aniqlanuvchi baho.	Точечная оценка — оценка, которая определяется одним числом.	A point estimate is an estimate that is determined by a single number.

Shartli ehtimollik- qaralayotgan hodisaning qoshimcha shartlardagi ehtimolligi.	Условная вероятность — вероятность наступления интересующего нас события, связанная с дополнительными условиями.	Conditional probability - the probability of the occurrence of an event of interest to us, associated with additional conditions.
Bayes formulasi-tajibadan keying ehtimollikni tajribagacha bo`lgani asosida aniqlash.	Формула Байеса - определение апостериорной (послеопытной) вероятности на основе априорной (доопытной) на основе проведения эксперимента.	Bayes formula - determination of a posteriori (post-experimental) probability on the basis of a priori (experimental) based on the experiment.

V. ILOVALAR

(fan dasturi, ishchi dasturi, tarqatma materiallar, testlar, baholash mezonlari)

TARQATMA MATERIALLARI.

Topshiriq 1.

Mavzu: To‘plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammalari. To‘plamning quvvatini topishga doir masalalar yechish

Variant raqami	**Topshiriqni berilishi**
1-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $\bar{\bar{A}}$
	2) Qoplarga solingan qum, shag‘al, tsementni tashish uchun 120 ta mashina ajratilgan. Qum uchun 55 ta, shag‘al uchun 50 ta, tsement uchun 45 ta, qum va shag‘al uchun 15 ta, qum va tsement uchun 20 ta, shag‘al va tsement uchun 10 ta, ixtiyoriy ikki xil material tashish uchun 35 ta mashina ajratilgan bo‘lsa, nechta mashina ushbu yuklarni tashishda qatnashmagan?
2-variant	1) U={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A={1,3,5,7}, B={2,3,4,5}, C={1,3,4,8} to'plamlar berilgan bo'lsa quyidagi to'plamlarni toping: a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $\bar{A} \setminus B$
	2) Qoplarga solingan qum, shag‘al, tsementni tashish uchun 120 ta mashina ajratilgan. Qum uchun 55 ta, shag‘al uchun 50 ta, tsement uchun 45 ta, qum va shag‘al uchun 15 ta, qum va tsement uchun 20 ta, shag‘al va tsement uchun 10 ta, ixtiyoriy ikki xil material tashish uchun 35 ta mashina ajratilgan bo‘lsa, nechta mashina ushbu yuklarni tashishda qatnashmagan?
3-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $A \cap B \cup C$ b) $C\Delta(B \setminus A)$
	2) 100 ta talaba sessiya topshirishdi. Tarixni 48 kishi, falsafani 42 kishi, matematikani 37 kishi topshirdi. Tarix va falsafani 76 kishi, tarix va matematikani ham 76 kishi, falsafa va matematikani 66 kishi topshirdi. Hamma imtihonlarni 5 kishi topshirdi. Necha kishi bittadan, ikkitadan imtixon topshirgan, necha kishi birorta ham imtixon topshira olmagan?
4-variant	1) U={a,b,c,d,e,f,g,h}, A={a,b,c,d,e}, B={e,f}, C={g,h} to'plamlar berilgan bo'lsa quyidagi to'plamlarni toping: a) $A \cap B$ b) $\bar{A} \setminus \bar{C}$
	2) 100 ta talaba sessiya topshirishdi. Tarixni 48 kishi, falsafani 42 kishi, matematikani 37 kishi topshirdi. Tarix va falsafani 76 kishi, tarix va matematikani ham 76 kishi, falsafa va matematikani 66 kishi topshirdi. Hamma imtihonlarni 5 kishi topshirdi. Necha kishi bittadan, ikkitadan imtixon topshirgan, necha kishi birorta ham imtixon topshira olmagan?
5-variant	1) U={a,b,c,d,e,f,g,h}, A={a,b,c,d,e}, B={e,f}, C={g,h} to'plamlar berilgan bo'lsa quyidagi to'plamlarni toping: a) $(A \setminus B) \cup C$ b) A, B, C to'plamlari ustida amallar bajarib, {f,g,h} to'plamini tasvirlab bering.
	2) Bir firmada C++, Java va C# ni biladigan dasturchilar ishlashadi. C++ni 25 tasi, Java ni 19 tasi, C#ni 24 tasi biladi, C++ va C# ni 10 tasi, C++ va Java ni 6 tasi, Java va C# ni 3 tasi biladi, 3 ta tilni ham 1 tasi bilsa, a) Firmada qancha dasturchilar ishlashadi? b) faqat C++ va C# nechtasi biladi?
6-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ b) $C\Delta(A \setminus B)$
	2) Bir firmada C++, Java va C# ni biladigan dasturchilar ishlashadi. C++ni 25 tasi, Java ni 19 tasi, C#ni 24 tasi biladi, C++ va C# ni 10 tasi, C++ va Java ni 6 tasi, Java va C# ni 3 tasi biladi, 3 ta tilni ham 1 tasi bilsa, a) Firmada qancha dasturchilar ishlashadi? b) faqat C++ va C# nechtasi biladi?
7-variant	1) U={1,2,3,4,5,a,b,c,d,e}, A={1,a,b}, B={c,d,e}, C={5,a,b} D={1,e} to'plamlar berilgan bo'lsa quyidagi to'plamlarni toping: a) $A \cap D \cap B$ b) A, B, C, D

	to'plamlari ustida amallar bajarib, {1,5,e} to'plamini tasvirlab bering.
	2) Abituriyentlar o'rtasida o'tkazilgan matematika olimpiadasida 40 nafar o'quvchi qatnashib, ularga algebradan, geometriyadan va trigonometriyadan bittadan masala yechish topshirildi. Algebra fanidan 20 o'quvchi, geometriyadan 18 o'quvchi, trigonometriyadan 18 o'quvchi masalani yechdi. 7 o'quvchi algebra va geometriyadan, 9 o'quvchi algebra va trigonometriyadan yechdi. 3 o'quvchi hech qaysi masalani yecha olmagan bo'lsa, a) Hamma masalalarni nechta talaba bajardi? b) Qancha o'quvchi faqat ikkita masalani yechdi? v) Qancha o'quvchi faqat bitta masalani yechdi?
8-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $(B\setminus C)\Delta(A \cap C)$ b) $A \cup (C\setminus B)$
	2) Abituriyentlar o'rtasida o'tkazilgan matematika olimpiadasida 40 nafar o'quvchi qatnashib, ularga algebradan, geometriyadan va trigonometriyadan bittadan masala yechish topshirildi. Algebra fanidan 20 o'quvchi, geometriyadan 18 o'quvchi, trigonometriyadan 18 o'quvchi masalani yechdi. 7 o'quvchi algebra va geometriyadan, 9 o'quvchi algebra va trigonometriyadan yechdi. 3 o'quvchi hech qaysi masalani yecha olmagan bo'lsa, a) Hamma masalalarni nechta talaba bajardi? b) Qancha o'quvchi faqat ikkita masalani yechdi? v) Qancha o'quvchi faqat bitta masalani yechdi?
9-variant	1) U={1,2,3,4,5,a,b,c,d,e}, A={1,a,b}, B={c,d,e}, C={5,a,b} D={1,e} to'plamlar berilgan bo'lsa quyidagi to'plamlarni toping: a) $(\bar{A} \cap (C\setminus B)$ b) $(A\setminus C) \cap B$
	2) Guruhdagi talabalardan 17 tasi volleybol, 16 tasi futbol, 18 tasi tennis bo'yicha to'garaklarga qatnashadi. Ulardan 5 tasi futbol va voleybol, 7 tasi voleybol va tennis, 6 tasi futbol va tennis, 2 tasi esa 3 ta to'garakka ham qatnaydi. a) Guruhda nechta talaba bor? b) faqat futbolga qatnaydiganlari nechta?
10-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $\overline{A \cup B \cup C}$ b) $C\setminus B$
	2) Guruhdagi talabalardan 17 tasi volleybol, 16 tasi futbol, 18 tasi tennis bo'yicha to'garaklarga qatnashadi. Ulardan 5 tasi futbol va voleybol, 7 tasi voleybol va tennis, 6 tasi futbol va tennis, 2 tasi esa 3 ta to'garakka ham qatnaydi. a) Guruhda nechta talaba bor? b) faqat futbolga qatnaydiganlari nechta?
11-variant	1) A={a,b,c,k}, B={b,d,e,h}, C={e,f,h,k}, U={a,b,c,d,e,f,h,k} bo'lsa, A, B, C, to'plamlari ustida amallar bajarib, {b,d,k} to'plamini tasvirlab bering.
	2) Guruhda 35 nafar talaba bor. Ularning har biri jamoat transportining kamida bitta turidan foydalanadi: metro, avtobus va trolleybus. Har uchala transport turidan 6 nafar talaba, metro va avtobusdan – 15 nafar, metro va trolleybusdan – 13 nafar, trolleybus va avtobusdan – 9 nafar talaba foydalansa, a) Qancha talaba faqat bitta transport turidan foydalanadi? b) nechta talaba faqat metro va avtobusdan foydalanadi.
12-variant	1) A={a,b,c,k}, B={b,d,e,h}, C={e,f,h,k}, U={a,b,c,d,e,f,h,k} bo'lsa, a) $\overline{A \cap B \cap C}$ b) $(A \cup B) \cup (A \cap B)$ ni toping?
	2) Guruhda 35 nafar talaba bor. Ularning har biri jamoat transportining kamida bitta turidan foydalanadi: metro, avtobus va trolleybus. Har uchala transport turidan 6 nafar talaba, metro va avtobusdan – 15 nafar, metro va trolleybusdan – 13 nafar, trolleybus va avtobusdan – 9 nafar talaba foydalansa, a) Qancha talaba faqat bitta transport turidan foydalanadi? b) nechta talaba faqat metro va avtobusdan foydalanadi.
13-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $(A\setminus B) \cup C$ b) $\overline{A \cap B \cap C}$
	2) 1-sonli maktabdan matematika bo'yicha shahar olimpiadasiga 15 ta o'quvchi, fizika bo'yicha 8 ta o'quvchi, informmatika bo'yicha esa 12 o'quvchi ishtirok etdi. 4 ta o'quvchi matematikadan ham fizikadan ham ishtirok etdi, 5 tasi matematika va informatikadan, 3 tasi fizika va informatikadan ishtirok etdi, 2 tasi 3 ta fandan ham

	ishtirok etgan bo'lsa, a) faqat matematikadan nechtasi, b) faqat fizikadan nechtasi, v) faqat informatikadan nechtasi ishtirok etdi?
14-variant	1) A={a,b,c,k}, B={b,d,e,h}, C={e,f,h,k}, U={a,b,c,d,e,f,h,k} bo'lsa, a) $C \cap (A \cup B)$ b) $(A \cap B) \cup C$ ni toping?
	2) 1-sonli maktabdan matematika bo'yicha shahar olimpiadasiga 15 ta o'quvchi, fizika bo'yicha 8 ta o'quvchi, informmatika bo'yicha esa 12 o'quvchi ishtirok etdi. 4 ta o'quvchi matematikadan ham fizikadan ham ishtirok etdi, 5 tasi matematika va informatikadan, 3 tasi fizika va informatikadan ishtirok etdi, 2 tasi 3 ta fandan ham ishtirok etgan bo'lsa, a) faqat matematikadan nechtasi, b) faqat fizikadan nechtasi, v) faqat informatikadan nechtasi ishtirok etdi?
15-variant	1) Quyidagi to'plamlar sohalarini Eyler-Venn diagrammalari orqali tasvirlang (U, A,B,C to'plamlar mavjud): a) $(A \cup \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C}$ b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$
	2) Shahardagi 110 ta qandalotchilik sexlaridan 40 tasi A mahsulotni, 30 tasi B mahsulotni, 48 tasi C mahsulotni, 10 tasi A va B, 13 tasi B va C, 12 tasi A va C, 14 tasi faqat 2 xil mahsulot ishlab chiqarsa, ushbu mahsulotlarni ishlab chiqarmayatgan sexlar nechta?

Topshiriq 2.

Mavzu: Munosabatlar. Binar munosabatlar va ularning matritsalarini topish.

Variant raqami	**Topshiriqlar**
1-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – "7 ga bo'lganda bir xil qoldiq qolish munosabati"
2-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<a;3>, <b;1>, <b;3>, <c;2>, <c;4>, <d;3>, <e;1>, <e;2>, <e;3>, <e;4>\},$ $R_2 = \{<1;4>, <2;1>, <2;2>, <2;3>, <3;2>, <3;3, <4;1>, <4;3>\}.$
3-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – {(a,b) | (a+b) – juft}
4-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<a;1>, <a;3>, <a;4>, <d;3>, <c;1>, <c;3>, <c;4>, <d;1>, <d;3>, <e;4>\},$ $R_2 = \{<1;1>, <1;4>, <2;1>, <2;3>, <3;2>, <4;1, <4;3>, <4;4>\}.$
5-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – {(a,b) | (b/a) bo'luvchisi bo'lsin (a+b)ni}
6-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<a;1>, <a;3>, <b;1>, <b;3>, <c;1>, <c;3>, <d;3>, <d;4>, <e;2>, <e;4>\},$ $R_2 = \{<1;1>, <1;2>, <1;4>, <2;3>, <3;2>, <3;4, <4;1>, <4;4>\}.$
7-variant	M={1,2,3,4,5,6,7,8,9} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – "yig'indisi juft bo'lish munosabati"
8-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin.

	$R_1 = \{<a;3>,<b;3>,<c;2>,<c;3>,<c;4>,<d;2>,<d;3>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\}$, $R_2 = \{<1;2>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;2>,<3;4,<4;1>,<4;3>\}$.
9-variant	M={a,b,v,g,d,e,i,k,l} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – {(x,y) | x- undosh, y- unli bo'lish munosabati}
10-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<a;3>,<a;4>,<b;2>,<b;3>,<c;2>,<c;3>,<c;4>,<d;3>,<d;2>,<d;4>\}$, $R_2 = \{<1;3>,<1;4>,<2;3>,<2;4>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}$.
11-variant	M={a,b,v,g,d,e,i,k,l} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – {(x,y) | x- undosh, y- undosh bo'lish munosabati}
12-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<a;4>,<b;2>,<b;3>,<b;4>,<c;2>,<c;4>,<d;2>,<d;3>,<d;4>,<e;2>\}$, $R_2 = \{<1;2>,<1;4>,<2;2>,<2;3>,<3;1>,<3;2,0<4;1>,<4;2>\}$.
13-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – "teng bo'lish munosabati"
14-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<b;1>,<b;2>,<b;3>,<c;2>,<c;4>,<d;1>,<d;2>,<d;3>,<e;2>,<e;4>\}$, $R_2 = \{<1;1>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;1>,<3;2,<4;1>,<4;2>\}$.
15-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – {(a,b) | (a+b) bo'luvchisi bo'lsin (a*b)ni}
16-variant	A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to'plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan: $R_1 \subseteq A\times B$ и $R_2 \subseteq B\times B = B^2$ R_1, R_2 - munosabatlar matritsasi topilsin. $R_1 = \{<b;1>,<b;2>,<b;4>,<c;1>,<c;2>,<c;4>,<d;2>,<d;3>,<e;2>,<e;3>\}$, $R_2 = \{<1;4>,<2;3>,<2;4>,<3;2>,<3;4>,<4;1,<4;3>,<4;4>\}$.
17-variant	M={1,2,3,4,5,6,7} berilgan bo'lsa R munosabatlar matritsasini tuzing. Bunda R⊂MxM, R – "kichik bo'lmaslik munosabati"

Mavzu: Kombinatorika. Takrorlanuvchi va takrorsiz Guruhlash, O'rin almashtirish, Joylashtirish.

Variant raqami	**Topshiriqlar**
1-variant	Tokchada 5 ta kitobni necha xil usulda joylashtirish mumkin?
2-variant	"Kombinatorika" so'zidagi harflardan nechta so'z yasash mumkin?
3-variant	Futbol chempionatida 16 ta jamoa qatnashadi. Jamoalarning oltin, kumush, bronza medallar olishi variantlari nechta bo'ladi?
4-variant	Familiyangizdagi harflardan nechta so'z yasash mumkin?
5-variant	36 ta karta aralashtirilganda 4 ta "Tuz" bir joyda keladigan variantlar soni nechta?
6-variant	1, 2, 3 raqamlari qatnashgan nechta uch xonali son mavjud?
7-variant	BISSEKTRISSA so'zidagi harflardan nechta so'z yasash mumkin?
8-variant	Stipendiya uchun 5 ta talaba kassaga necha xil usulda navbatga turishlari mumkin?

9-variant	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan nechta to‘rt xonali son tuzish mumkin? raqamlar takrorlanishi mumkin;
10-variant	5 ta talabani 10 ta joyga necha xil usulda joylashtirib chiqish mumkin?
11-variant	Chapdan o‘ngga va o‘ngdan chapga qarab o‘qilganda ham bir xil bo‘lgan nechta besh xonali son mavjud? (Masalan 67876, 17071)
12-variant	Ikkinchi kurs talabalari 3-semestrda 10 xil fan o‘tishadi. Dushanba kuni 4 ta har xil fandan darsni necha xil usulda dars jadvaliga qo‘yish mumkin?
13-variant	Oliy o‘quv yurtining ma’lum bir yo‘nalishiga 10 kishi qabul qilinishi aniq bo‘lib, ushbu yo‘nalishga 14 ta abituriyent hujjat topshirgan bo‘lsa, o‘qishga kirgan abituriyentlar ro‘yxati necha xil bo‘lishi mumkin?
14-variant	Futbol jamoasida 11 ta futbolchi ichidan jamoa sardori va sardor o‘rin bosarini necha xil usulda tanlash mumkin?
15-variant	PARALELOPIPED so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
16-variant	Matbuot do‘konida 5xil ko‘rinishdagi konvert, 4 xil ko‘rinishdagi marka sotilayapti. Necha xil usulda marka va convert sotib olish mumkin?
17-variant	Necha xil usulda 5 ta kitobdan 3 tadan qilib tanlab olish mumkin?
18-variant	Mevalar korzinkasida 2 ta olma, 3ta nok, 4 ta apelsin bor. Har kuni bitta meva yeyish mumkin bo‘lsa, buni necha xil usulda amalga oshirish mukin?
19-variant	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan nechta to‘rt xonali son tuzish mumkin? son raqamlari har xil bo’lsin.
20-variant	Necha xil usulda 7 odamdan 3 kishidan qilib komissiya tuzish mumkin?
21-variant	PARALELOGRAM so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
22-variant	36 ta karta aralashtirilganda 4 ta “Tuz” va 4 ta “Valet” bir joyda keladigan variantlar soni nechta?
23-variant	GIPERBOLA so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
24-variant	36 ta karta aralashtirilganda necha xil variant mavjud?
25-variant	Talabalar turar joyida 1 kishilik, 2, kishilik va 4 kishilik xonalar mavjud. 7 ta talabani necha xil usulda joylashtirish mumkin?
26-variant	Disketalar saqlaydigan quti 12 ta nomerlangan joydan iborat. Talaba 10 ta turli xil disketalarini qutiga necha xil usulda joylashtirishi mumkin? 8 tanichi?
27-variant	REFLEKSIV so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
28-variant	PARABOLA so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
29-variant	SIMMETRIK so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?
30-variant	ELLIPS so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?

TEST

Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo‘ladi?
$((A \leftrightarrow B) \wedge \neg A)$
$(A \to B) \neg \vee B$
$\neg(A \vee B) \to \neg B\ \ )$
$(\neg B \to \vee A)$

Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo‘ladi?
$((B \to (A \wedge C)) \wedge \neg(A \vee C))$
$(A \to \vee(B \wedge C))$
$\neg(\to B \vee C) \wedge A, D)$
$(\neg(A \to B) \vee \neg C))$

Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo‘lmaydi?
$\neg(\rightarrow B \vee C) \wedge A, D)$
$((\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \wedge \neg \mathrm{A})$
$((\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}) \wedge \neg(\mathrm{A} \vee \tilde{N}))$
$((\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \vee \mathrm{A})$

Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo‘lmaydi?
$(B \vee C) \wedge AD)$
$(\neg(B \vee C) \wedge (A \vee D))$
$(\neg(B \vee C) \wedge A)$
$((B \vee C) \wedge (A \vee \neg D))$

$\mathrm{F} \equiv (\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow (\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A})$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.
A,B,$\neg$A,$\neg$B,$(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})$, $(\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A})$,F
A,B,$(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})$,$(\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A})$
$(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})$,$(\neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathrm{A})$

$\mathrm{F} \equiv (((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg C) \rightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}))$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.
A,B,C,$\neg C$,$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$, $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$,$((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg C)$,F
A,B,$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$, $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$,F
A,B,C,$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$, $((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg C)$
A,B,C,$\neg C$, $((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \neg C)$,F

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi? $(\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{B} \rightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})))$
4
3
2
1

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi? ($(((\mathrm{A} \vee \neg B) \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}))$
2
1
3
4

$(\neg((\mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}) \wedge \mathrm{B})$ uch o‘zgaruvchili qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi?
1

3
6
8

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi? $(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$
0
2
4
1

$(((P \vee \neg Q) \wedge R) \to (P \wedge Q))$ uch o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi?
2
3
8
1

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?
$(A \vee B)$
$(A \to B)$
$\neg(A \vee B)$
$\neg(A \wedge B)$

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?
$(A \vee \neg B) \wedge \neg C$
$(A \to \neg B)$
$\neg(A \wedge B) \to C$
$\neg(A \wedge \neg B)$

Quyidagi uch o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?
$((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$
$(\neg(A \wedge B) \vee C)$
$((A \to B) \vee C)$
$(\neg(A \vee B) \vee C)$

Quyidagi uch o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?
$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$
$((\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$
$((\neg A \wedge B) \to (\neg C \wedge \neg B))$
$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$

Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo‘ladi?
$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$
$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$
$((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$
$(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$

Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo‘ladi?

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
$(B \to \neg A)$
$(A \leftrightarrow B)$
$((A \vee B) \wedge C)$

Quyidagi formulalarning qaysi biri KNF bo‘ladi?
$(\neg A \vee B \vee C)$
$((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$
$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$
$(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C)$

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri KNF bo‘ladi?
$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)$
$(B \to \neg A)$
$\neg(A \wedge B)$
$((A \vee B) \wedge \neg(C \vee A))$

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulaning MDNFida nechta xad bor? $(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})))$
4
2
1
3

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulaning MKNFida nechta xad bor? $(((\mathrm{P} \vee \neg Q) \to Q) \wedge (\neg P \vee Q))$
2
4
5
3

Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo‘ladi.
$((A \wedge B) \vee C)$
$A \vee B(C \wedge D)$
$(A \neg B) \to C$
$(A \wedge \to B) \vee C$

Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo‘ladi.
$((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$
$(\vee B \wedge C) \to A$
$A \to (B \vee C)$
$A \wedge B) \to C$

$(((A \to \neg B) \to B) \wedge (\neg A \vee B))$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.
2
0
1
3

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.
4
2
1
3

$(((A \vee \neg B) \wedge C) \to (A \wedge C))$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.
7
5
3
8

Birni saqlovchi ikki o‘zgaruvchili funksiyalar soni qancha?
8
16
32
4

Quyidagi funksiyalarni qaysi biri $x \to y$ ga funksiyaga qo‘shma bo’ladi?
$\bar{x} \cdot y$
$x \cdot \bar{y}$
$x \vee \overline{y}$
$\bar{x} \vee y$

Quyidagi funksiyalarni Qaysi $\bar{x} \vee \bar{y}$ ga funksiyaga qo‘shma bo’ladi?.
$\bar{x} \cdot \bar{y}$
$x \cdot y$
$x \vee y$
$x \vee \bar{y}$

Uch o‘zgaruvchili chiziqli funksiyalar soni qancha?.
16
64
18
4

BAHOLASH MEZONLARI.
Oraliq nazoratda talaba bilimini baholash talablari

Baholash bali	Talaba bilimi va malakasiga qo‘yiladigan talablar
A’lo 5	Mavzularga tegishli savollarning barchasi asoslangan, ilmiy xatoliklarga yo‘l qo‘yilmagan holda javoblar berilsa, mavzu materiali mohiyatini to‘la tushunib yetgan bo‘lsa, ijodiy fikr yuritsa, mavzu materiali bo‘yicha mustaqil mushohada qilib bilsa, nazariy bilimlarni amalda qo‘llashga misollar keltirib bilsa, mavzu bo‘yicha xulosalar va qarorlar qabul qilishda faol bo‘lsa, material bo‘yicha to‘la tasavvurga ega bo‘lsa.
Yaxshi 4	Savollarning barchasiga to‘liq javob bersa, ju’ziy xatoliklarga yo‘lqo‘ymasa, mavzu materiali mohiyatini to‘la tushunib etgan bo‘lsa, ijodiy fikr yurita olsa, nazariy bilimlarni amaliy ahamiyatini anglab etgan bo‘lsa, material bo‘yicha tasavvurga ega bo‘lsa.
Qoniqarli 3	Savollarga javoblar yozgan bo‘lsa, yo‘l qo‘ygan xatolari juziy bo‘lsa, material mohiyatini sayoz tushungan bo‘lsa, nazariy bilimlarni amaliy ahamiyatini sayoz anglagan bo‘lsa, mavzular bo‘yicha to‘liq tushunchaga ega bo‘lmasa.
Qoniqarsiz 2	Savollarga javoblar yozmagan bo‘lsa, yo‘l qo‘ygan xatolari fizika qoidalariga zid bo‘lsa, material mohiyatini tushunmasa, nazariy bilimlarni amaliy ahamiyatini qollay olmasa, mavzular bo‘yicha to‘liq tushunchaga ega bo‘lmasa.

Yakuniy nazoratda talaba bilimini baholash talablari

Baholash bali	Talaba bilimi va malakasiga qo‘yiladigan talablar
A’lo 5	Mavzularga tegishli savollarning barchasi asoslangan, ilmiy xatoliklarga yo‘l qo‘yilmagan holda javoblar berilsa, mavzu materiali mohiyatini to‘la tushunib yetgan bo‘lsa, ijodiy fikr yuritsa, mavzu materiali bo‘yicha mustaqil mushohada qilib bilsa, nazariy bilimlarni amalda qo‘llashga misollar keltirib bilsa, mavzu bo‘yicha xulosalar va qarorlar qabul qilishda faol bo‘lsa, material bo‘yicha to‘la tasavvurga ega bo‘lsa, masalalarni mustaqil fikr chiqarib to‘g‘ri yechsa, javoblarni izohlab ularning amaljy ahamiyati anglay olsa, masalani yechishga ijodiy yondashsa, o‘z fikrini to‘la ifodalay olsa.
Yaxshi 4	Savollarning barchasiga to‘liq javob bersa, ju’ziy xatoliklarga yo‘lqo‘ymasa, mavzu materiali mohiyatini to‘la tushunib yetgan bo‘lsa, ijodiy fikr yurita olsa, nazariy bilimlarni amaliy ahamiyatini anglab yetgan bo‘lsa, material bo‘yicha tasavvurga ega bo‘lsa, yozma ishlarni bajarishda masalalarni yechib ayrim nojuziy xatoliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa.
Qoniqarli 3	Savollarga javoblar yozgan bo‘lsa, yo‘l qo‘ygan xatolari juziy bo‘lsa, material mohiyatini sayoz tushungan bo‘lsa, nazariy bilimlarni amaliy ahamiyatini sayoz anglagan bo‘lsa, mavzular bo‘yicha to‘liq tushunchaga ega bo‘lmasa, masalani yechish jarayonini tushuntira olsa, yozma ishda berilgan masalalarning yarmidan ko‘pini to‘g‘ri yechsa.
Qoniqarsiz 2	Savollarga javob berishda qiynalsa, material mohiyatini tushunmasa, tasavvuri sayoz bo‘lsa, nazariy bilimlarni amaldagi ahamiyatini anglab yetmasa, savollarning ko‘pchiligiga javob bera olmasa, masalalarni shartini to‘g‘ri tushunib ularni yecha olmasa, masalalarni yechimi to‘g‘risida aniq tasavvurga ega bo‘lmasa.

Baholashni 5 baholik shkaladan 100 ballik shkalaga o‘tkazish

JADVALI

5 baholik shkala	**100 ballik shkala**		**5 baholik shkala**	**100 ballik shkala**		**5 baholik shkala**	**100 ballik shkala**
5,00 — 4,96	100		4,30 — 4,26	86		3,60 — 3,56	72
4,95 — 4,91	99		4,25 — 4,21	85		3,55 — 3,51	71
4,90 — 4,86	98		4,20 — 4,16	84		3,50 — 3,46	70
4,85 — 4,81	97		4,15 — 4,11	83		3,45 — 3,41	69
4,80 — 4,76	96		4,10 — 4,06	82		3,40 — 3,36	68
4,75 — 4,71	95		4,05 — 4,01	81		3,35 — 3,31	67
4,70 — 4,66	94		4,00 — 3,96	80		3,30 — 3,26	66
4,65 — 4,61	93		3,95 — 3,91	79		3,25 — 3,21	65
4,60 — 4,56	92		3,90 — 3,86	78		3,20 — 3,16	64
4,55 — 4,51	91		3,85 — 3,81	77		3,15 — 3,11	63
4,50 — 4,46	90		3,80 — 3,76	76		3,10 — 3,06	62
4,45 — 4,41	89		3,75 — 3,71	75		3,05 — 3,01	61
4,40 — 4,36	88		3,70 — 3,66	74		3,00	60
4,35 — 4,31	87		3,65 — 3,61	73		**3,0 dan kam**	**60 dan kam**