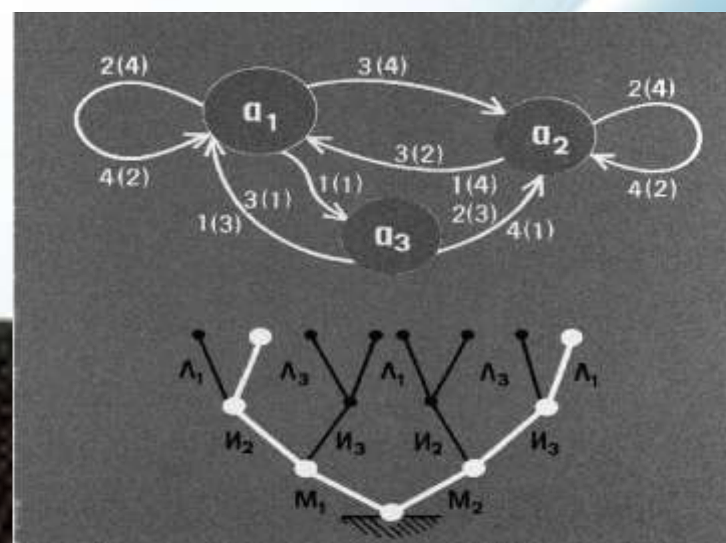
Фан: Дискрет математика ва математик мантиқ

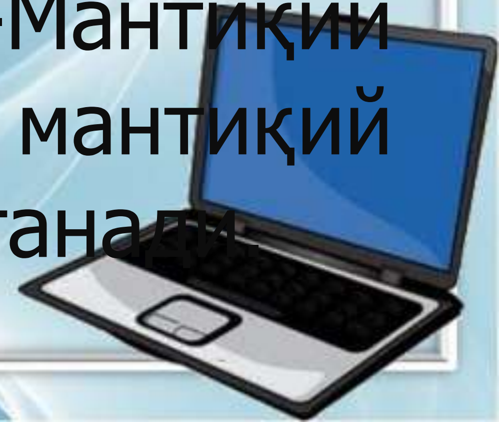


Асосий адабиётлар

- Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
- Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984
- Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
- Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2008.
- Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физ.-мат. литература, 1995.

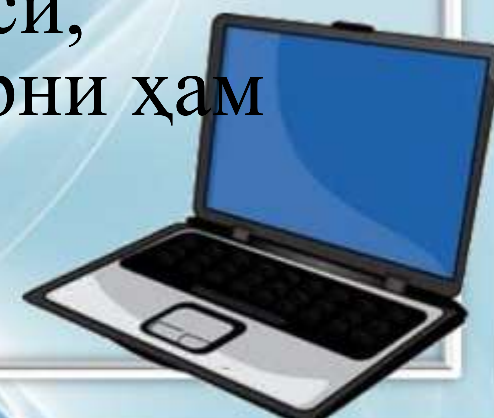
LOGOS (ГРЕК.)- Сўз, тушунча, фикрлаш, акл

Мантиқ - муҳокама юритишнинг қонун-қоидалари, усуллари ва формалари (шакллари) ҳақидаги фан бўлиб, унинг асосчиси қадимги юнон мутафаккири **АРИСТОТЕЛЬ** (милод. авв. 384-322) ҳисобланади. <u>Математик мантиқ</u>-Мантиқий хулосаларга асосланган мантиқий алоқалар ва муносабатларни ўрганади.



Аристотель асос солган мантиқ кўп асрлар давомида турли мутаффакирлар, файласуфлар ва фалсафий мактаблар томонидан тўлдирилди, ўзгартирилди ва такомиллаштирилди. Шу жумладан, **Абу Наср Форобий, Абу Али Ибн Сино, Абу Райҳон Беруний, Муҳаммад ал-Хоразмий, Умар Ҳайём, Алишер Навои, Мирзо Бедил.**

Дискрет математика-математиканинг бир қисми бўлиб, милод.авв. IV асрда яратила бошланган. Дискрет математика математиканинг такомиллашган сонлар назарияси, алгебра, математик мантиқ қисмларидан ташқари, XX аср ўрталарида фан-техника тараққиёти туфайли жадал ривожланаётган функционал системалар назарияси, граф ва тўрлар назарияси, кодлаштириш назарияси, комбинатор анализ каби бўлимларни ҳам ўз ичига олади.



Мантиқий аппаратлар ва ғоялар-дастурлашда, маълумотлар базасида ва эксперт тизимларида қўлланилади.

PROLOG – мантиқий дастурлаш тили

Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари. *асосчи*

Тўплам тушунчаси айрим-айрим нарсалар, буюмлар, объектлар биргаликда, яъни бир бутун деб қараш натижасида вужудга келади. Масалан, кутубхонадаги китоблар *тўплами*, гурухдаги талабалар *тўплами*, N -натурал сонлар *тўплами* ва ҳоказо. элемент

$$a \in M \qquad a \notin M$$

Тўпламларнинг тасвирланиши

Тўпламларни Эйлер айланалари ёрдамида тасвирлаш қулай.

расм1.1 да кўрсатилган K тўплам M тўпламнинг қисм тўплами деб атаймиз ва у қуйидагича белгиланади. $K \subset M$

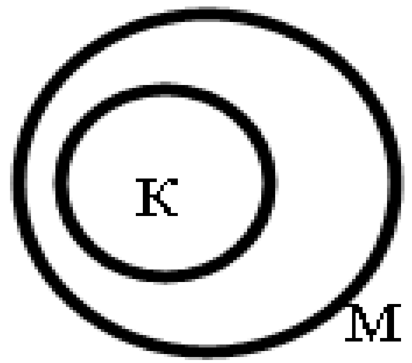


Рис. 1.1.

Ихтиёрий $\chi \in K$ учун $x \in M$ шарт бажарилса K тўплам M тўпламнинг қисм тўплами M ($K \subset M$) дейилади. Хос қисм т-м

Таъриф: А тўпламнинг ҳар бир элементи В тўпламда мавжуд ва, аксинча, В тўпламнинг ҳар бир элементи А тўпламда ҳам мавжуд бўлса, А ва В тўпламлар **тенг** деб аталади. $A = B$

Таъриф: Бирта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам **бўш тўплам** деб аталади. $\varnothing$

Бўш тўплам ҳар қандай А тўпламнинг қисм тўплами бўлади ва у А тўпламнинг хосмас қисми дейилади.

Таъриф: Бирор тўпламнинг хос қисми деб қаралмаган ҳар бир тўплам универсал тўплам деб аталади. U

А тўпламнинг элементлар сони тўпламнинг қуввати дейилади. $|A|$, $n(A)$

Таъриф: **Берилган А тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган тўплам А тўпламнинг булеани деб аталади.** $B(A)$.

А тўпламнинг булеани қуйидаги формула ёрдамида топилади. $|B(A)| = 2^n$ ***Бу ерда***

n-А тўпламнинг қуввати

Мисол:

$$M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$$

$$B(M) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Тўпламларнинг берилиш усуллари

2 сонининг манфий бўлмаган бутун даражасидан ташкил топган туплам:

а) элементларини кўрсатиш: $M_{2^n} = \{1,2,4,8,16,32,...\}$

б) характеристик хоссаларини келтирган холда:

$$M_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\}$$

в) индукция қоидасини келтириш :

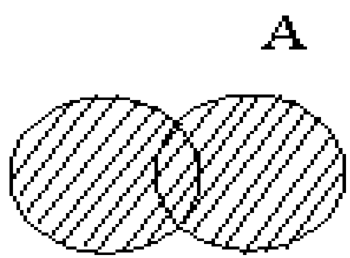
$$1 \in M_{2^n};$$

агар $k \in M_{2^n}$, унда $(2k) \in M_{2^n}$.

To'plamlar ustida amallar

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Berilgan A, B to'plamlarning yig'indisi yoki birlashmasi deb, shu to'plamlarning takrorlanmasdan olinadigan hamma elementlaridan tuzilgan va $A \cup B$ kabi belgilanadigan to'plamga aytiladi.



1-shakl.

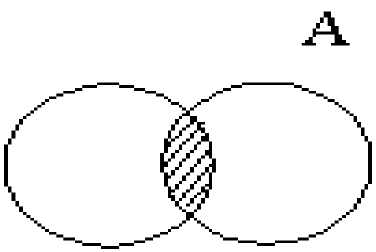
Agar $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, u holda ularning $A \cup B$ yig'indisi quyidagicha yoziladi:

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \quad (1)$$

Masalan: $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, b\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u vaqtda

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, k\}.$$

2-ta'rif. Berilgan A, B to'plamlarning hamma umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plamga A, B to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi yoki umumiy qismi) deyiladi va $C = A \cap B$ ko'rinishida belgilanadi.



2-shakl.

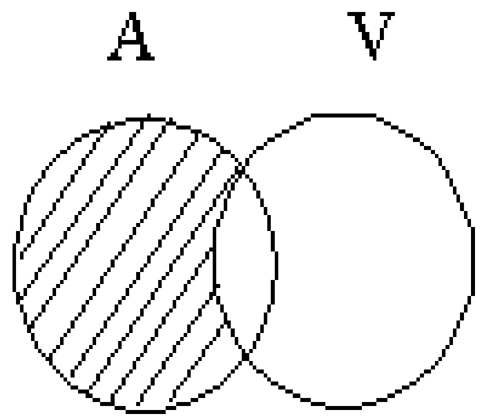
Agar $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, u holda ularning $C = A \cap B$ ko'paytmasi quyidagicha yoziladi:

$$\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n . \quad (2)$$

Masalan: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ bo'lsa, u vaqtda $C = \{2, 4\}$.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo'sh to'plamga teng bo'ladi. Masalan, toq sonlar to'plami bilan juft sonlar to'plamining kesishmasi bo'sh to'plamdir.

3-ta'rif. A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A ning B da mavjud bo'lmagan hamma elementlaridan tuziladigan va $C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$ ko'rinishida yoziladigan C to'plamga aytiladi.



$C = A \setminus B$

3-shakl.

$A = \{1,2,3,4\}$ va $B = \{3,4,5,6\}$ bo'lsa, u vaqtda $C = \{1,2\}$.

4-ta'rif. A to'plamdagi uning B qism to'plamiga kirmay qolgan hamma elementlaridan tuzilgan qism to'plamga B ning A to'plamigacha to'ldiruvchisi deb aytiladi va $\bar{B}$ (B') ko'rinishda belgilanadi.

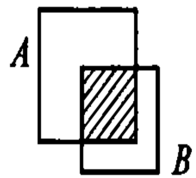
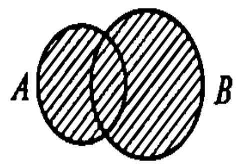
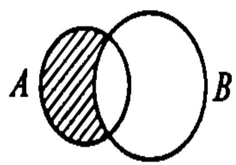
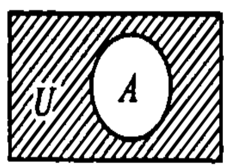
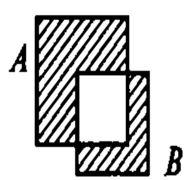
$A=\{1,2,3,4,5,6...\}$ natural sonlar to'plami va $B=\{2,4,6,8...\}$ juft sonlar to'plami bo'lsa, u vaqtda $\bar{B}=\{1,3,5,7...\}$ bo'ladi, ya'ni $B\bigcup\bar{B}=A$.

$\bar{B}$ to'plam B ni A gacha to'ldiradi.

Ushbu tengliklarni keltirib chiqarish mumkin.

$\bar{B}\bigcap B=\emptyset$, $B\bigcup\bar{B}=A$. $B-\bar{B}=B$, $\bar{B}-B=\bar{B}$.

Основные операции над множествами

Название операции	Обозначение	Изображение кругами Эйлера	Определение	Символическая запись
Пересечение множеств	$A \cap B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *одновременно* A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
Разность множеств	$A \backslash B$		Те и только те элементы множества A, которые *не* принадлежат B	$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\overline{A} = A' = U \backslash A$		Те и только те элементы, которые *не* принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \backslash A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: A *либо* B, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Asosiy tengliklar (tengkuchliliklar)

U universal to'plamning qismlari orasidagi munosabatlarni ifodalovchi asosiy tengliklar quyidagilardan iborat:

1. $\overline{\overline{A}} = A$

To'plamlar nazariyasida tengliklarni isbotlashning umumiy metodi tenglikning bir tomonidagi to'plamga tegishli har bir element ikkinchi tomonidagi to'plamda ham mavjud va, aksincha, ekanligini ko'rsatishdan iboratdir.

Isbot. $\overline{\overline{A}}$ to'plam $\overline{A}$ ning to'ldiruvchisi. Shuning uchun $\overline{\overline{A}}$ ning har bir elementi $x \overline{\in} \overline{A}$, demak, $x \in A$. Aksincha, A ning har bir elementi $x \overline{\in} \overline{A}$ bo'lgani uchun $x \in \overline{\overline{A}}$. Demak, $\overline{\overline{A}} = A$.

2. $A \cap B = B \cap A$ - ko'paytmaga nisbatan kommutativlik qonuni.

Isbot. $A \cap B$ ning har bir elementi A va B da mavjud, chunki $A \cap B$ to'plam A va B larning umumiy elemertlaridan tuzilgan. Demak, $A \cap B$ ning elementlari $B \cap A$ da ham mavjud. Xuddi shunday $B \cap A$ ning har bir elementi B va A da mavjud, chunki $B \cap A$ to'plam B va A larning umumiy elementlaridan tuzilgan. Shuning uchun $B \cap A$ to'plamning har bir elementi $A \cap B$ to'plamning ham elementi bo'ladi. Demak, $A \cap B = B \cap A$.

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ko'paytmaga nisbatan assostiativlik qonuni.

Isbot. $x \in (A \cap B) \cap C$ bo'lsin. Demak, $x \in (A \cap B)$ va $x \in C$. Bu erdan $x \in A$, $x \in B$ va $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in A$ va $x \in B \cap C$ dir. Bu erdan o'z navbatida $x \in A \cap (B \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Isbotning ikkinchi qismini o'quvchiga havola etamiz.

4. $A\cup B=B\cup A$ - yig'indiga nisbatan kommutativlik qonuni.

5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ -yig'indiga nisbatan assostiativlik qonuni.

4 va 5 -tengliklarning isbotlari xuddi 2 va 3 - tengliklarni isbotlashga o'xshash amalga oshiriladi.

6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ - ko'paytmaga nisbatan distributivlik qonuni.

7. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ - yig'indiga nisbatan distributivlik qonuni.

6-tenglikning isboti: $x\in A\cap(B\cup C)$ bo'lsin, u vaqtda $x\in A$ va $x\in B\cup C$ bo'ladi. Bu erdan $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ kelib chiqadi. Demak, $x\in A\cap B$ yoki $x\in(A\cap C)$. Shuning uchun $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Endi $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo'lsin, u holda $x\in(A\cap B)$ yoki $x\in(A\cap C)$ bo'ladi. Bu erdan $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ kelib chiqadi. Demak, $x\in A\cap(B\cup C)$.

8. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$ 9. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$ 10. $A\cap A=A$

11. $A\cap U=A$ 12. $\overline{A\cup A}=\overline{A}.$ 13. $A\cup\varnothing=A$