Федеральное Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Московский Государственный Технический Университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
Факультет ИУ «Информатика и системы управления»
Кафедра ИУ-3 «Информационные системы и телекоммуникации»

Домашнее задание
по дисциплине «Теория информационнных процессов и систем »

Выполнил: студент гр. ИУ3-51Б
Магомедов В.О.
Проверил: Бабкин П.С.

Москва, 2020

Цель работы:

Получить аналитически выражения для ROC – кривых и построить их для различных значений отношения сигнал-шум, предполагая, что X имеет данные распределения.

Задание:

Рассмотрим радарную систему. Она посылает импульсы, которые отражаются от объектов. Данный отражённый сигнал воспринимается приёмной антенной радара. Если в поле зрения радара есть какой-либо объект, находящийся в области интереса радара, то отраженный сигнал будет выше порога детектирования, и это будет означать наличие объекта. Если отражённый сигнал ниже порога детектирования, то это означает отсутствие объекта.

Наличие объекта обозначим как событие H1, а его отсутствие - как событие H0. Сигнал X — это случайная переменная. Предположим, что мы имеем условные распределения, которые известны.

$$f_{X|H_0}(x|H_0) \text{ and } f_{X|H_1}(x|H_1)$$

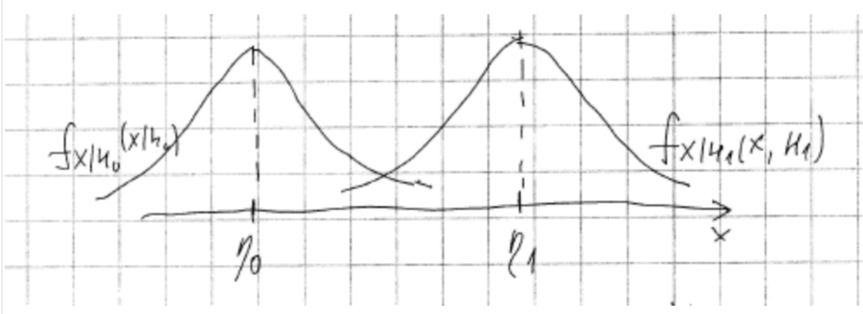
(1)

Очевидно, что мы можем говорить о том, что X имеет одинаковое распределение для обоих гипотез и только мат ожидание будет различным. Так же реалистично предположить, что

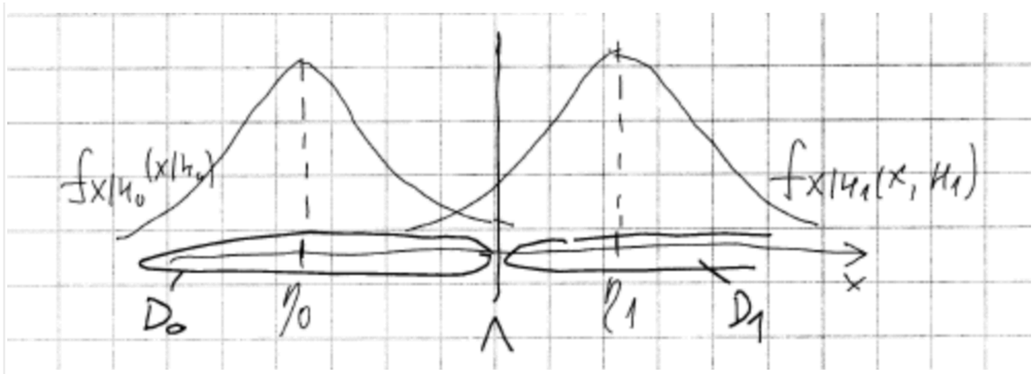
$$E[X|H_0] < E[X|H_1]$$

(2)

Уровень шумов радара как системы при этом мы можем учесть отклонения переменной X. Распределение плотностей:



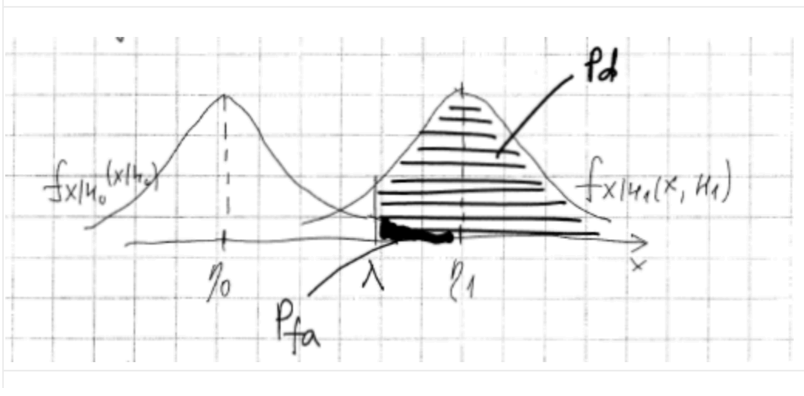
Как мы уже сказали, сигнал X сравнивается с неким порогом, который мы обозначим как λ. Решение о том, есть ли объект в поле зрения радара или нет обозначим как D1 и D0. Соотношение D1 D0 в зависимости от λ.



Получаем следующие вероятности:

$P_d = P(D_1|H_1)$ – probability of detection

$P_{fa} = P(D_1|H_0)$ – probability of false alarm



(3)

С уменьшением λ Pd увеличивается, но и Pfa увеличивается тоже.
Кривая, показывающая зависимость Pd как функцию от Pfa для различных λ, называется **ROC- кривая** (англ. receiver operating characteristic, рабочая характеристика приёмника).
Отношение сигнал - шум (SNR) мы можем записать следующим образом:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_n} \quad (dB)$$

(4)

Где Ps - это мощность сигнала, а Pn - это мощность шума. Если принять Ps за 1, а Pn=σ*σ (дисперсия:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{1}{\sigma^2}$$

(5)

X имеет данные распределения

$$f_{X|H_0}(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

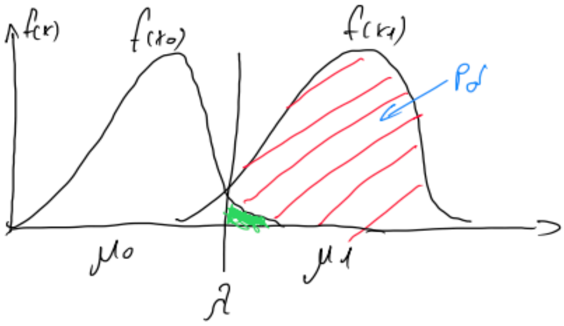
$$f_{X|H_1}(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$$

Рис. 1; (6)

Диапазон для SNR в пределах [-1,5].

Диапазон для λ в пределах [0,1], но не менее 10 точек.

Теоретическая часть:



(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, где μ - мат. ожидание
σ - дисперсия

тк $\lambda \downarrow \Rightarrow Pd \uparrow$ и $Pfa \uparrow$

$\lambda \in [0;1]$

$Pd = P(D_1|H_1)$ - detection

$Pfa = P(D_1|H_0)$ - false alarm

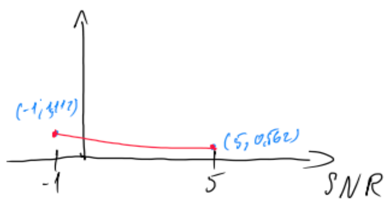
(2) $SNR = 10 \log_{10} \frac{Ps}{Pn} = 10 \lg \frac{1}{\sigma^2}$, тк $Ps = 1$, $Pn = \sigma^2$

(3) $f_{x0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ при $\mu = 0$

(4) $f_{x1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$ $\mu = 1$

$SNR = 10 \lg \frac{1}{\sigma^2}$; $SNR \in [-1;5]$

(5) $\sigma = \sqrt{10^{-\frac{SNR}{10}}} \Rightarrow$ [при подстановке] $\Rightarrow \sigma \in [0,562; 1,112]$



(6) $Pd = \int_{\lambda}^{\infty} f_{x1} dx - Pfa$

(7) $Pfa = \int_{\lambda}^{\infty} f_{x0} dx$

Подставим (3) и (4) в (6) и (7):

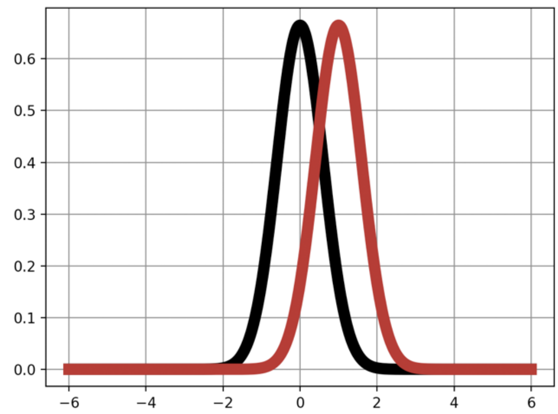
(8) $Pd = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} dx - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

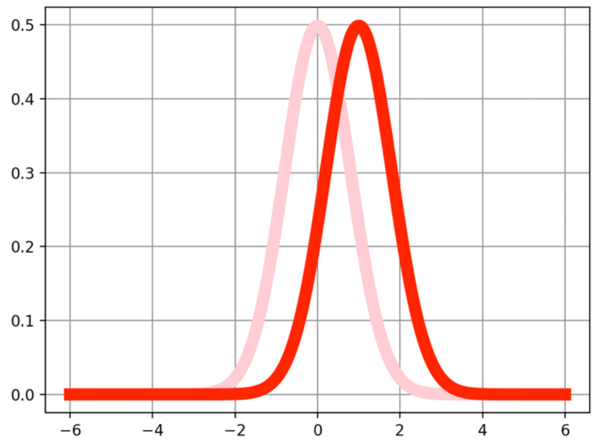
(9) $\int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

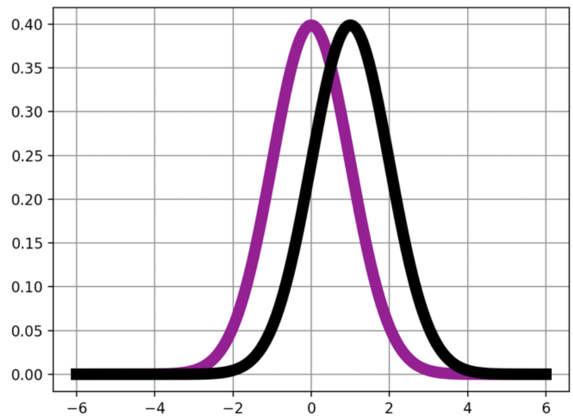
Практическая часть:

```
from scipy.stats import norm
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np


S = [0.6, 0.8, 1]

if __name__ == '__main__':
    x = np.linspace(-6, 6, 1000)
    P1 = norm.pdf(x, 0, S[0])
    P2 = norm.pdf(x, 1, S[0])

    P3 = norm.pdf(x, 0, S[1])
    P4 = norm.pdf(x, 1, S[1])

    P5 = norm.pdf(x, 0, S[2])
    P6 = norm.pdf(x, 1, S[2])

    plt.plot(x, P1, color='black', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.plot(x, P2, color='brown', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.show()
    plt.plot(x, P3, color='pink', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.plot(x, P4, color='red', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.show()
    plt.plot(x, P5, color='purple', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.plot(x, P6, color='black', linewidth=8)
    plt.grid(color='grey')
    plt.show()

from array import array
Pfa = array('f')
Pd = array('f')
L = [i/12 for i in range(0, 12)]


for l in L:
    Pfa.append( 1 - norm.cdf((l - 0) / S[0]))
    Pd.append( 1 - norm.cdf((l - 1) / S[0]))

    Pfa1 = array('f')
    Pd1 = array('f')

for l in L:
    Pfa1.append( 1 - norm.cdf((l - 0) / S[1]))
    Pd1.append( 1 - norm.cdf((l - 1) / S[1]))

    Pfa2 = array('f')
    Pd2 = array('f')

for l in L:
    Pfa2.append( 1 - norm.cdf((l - 0) / S[2]))
    Pd2.append( 1 - norm.cdf((l - 1) / S[2]))

plt.plot(Pfa, Pd)
plt.grid(color='grey')
plt.show()
plt.plot(Pfa1, Pd1)
plt.grid(color='grey')
plt.show()
plt.plot(Pfa2, Pd2)
plt.grid(color='grey')
plt.show()

plt.plot(L, Pfa)
plt.grid(color='grey')
plt.plot(L, Pfa1)
plt.grid(color='grey')
plt.plot(L, Pfa2)
plt.show()
plt.grid(color='grey')
plt.plot(L, Pd)
plt.grid(color='grey')
plt.plot(L, Pd1)
plt.grid(color='grey')
plt.plot(L, Pd2)
plt.show()
```

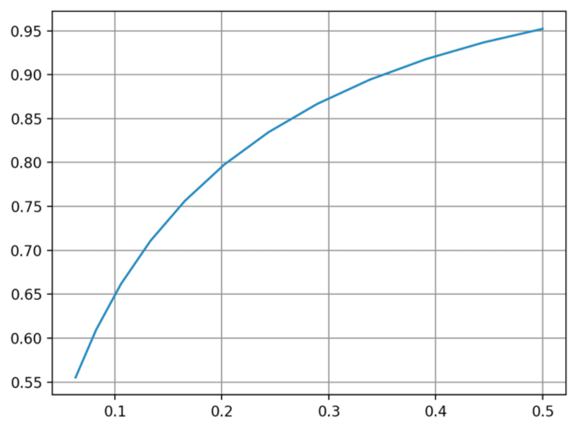
Скриншоты:

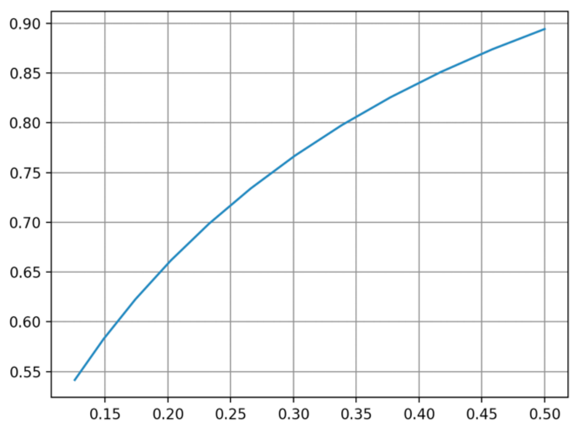


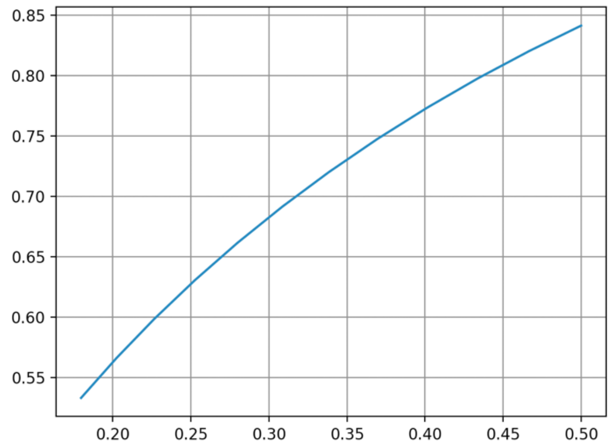




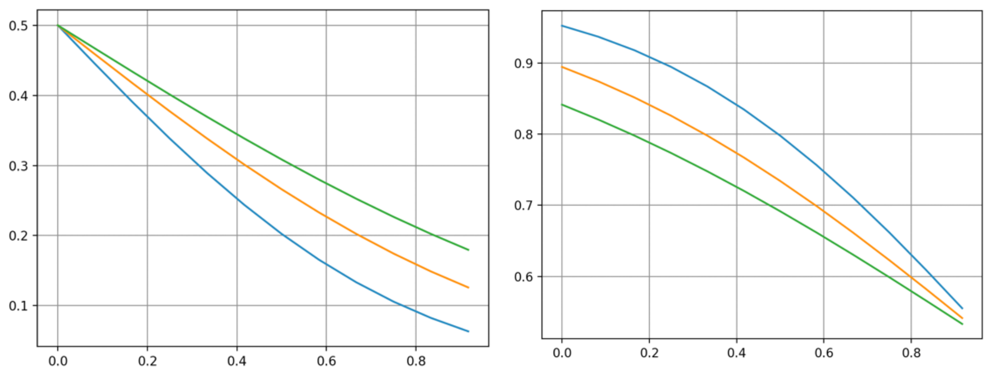
Данные графики показывают плотности распределений при разных σ (чем больше значение σ, тем шире плотность распределения, и плотности пересекаются больше)







Данные графики показывают ROC-кривые при разных σ, чем больше σ, тем ниже и более пологий график ROC-кривой.



Данные графики показывают Зависимость Pd и Pfa от λ

Вывод:

Получены аналитические значения ROC-кривой и построены графики ROC-кривых и плотностей для разных значений σ.