## Задания

## 9 февраля 2021 г.

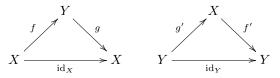
Если M — моноид, то мы будем обозначать  $\mathbf{C}_M$  категорию с одним объектом \* и множеством морфизмов  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_M}(*,*)=M$ , операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M.

Предпорядок  $(X, \leq)$  — это множество X с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением  $\leq$ . Задать структуру предпорядка на множестве — это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если  $(X, \leq)$  — предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как  $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$ . Множество объектов этой ктаегории равно X, а множество морфизмов  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{(X,\leq)}}(x,y)$  состоит из одного элемента, если  $x\leq y$ , и пусто в противном случае.

- 1. Изоморфны ли следующие объекты категории  $\Lambda_{\rm ID}$ ? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.
  - (a) Bool и Maybe Bool.
  - (b) Either Bool Bool и Bool  $\times$  Bool.
  - (c) Nat и Maybe Nat.
  - (d) Nat и List Nat.
- 2. Пусть M некоторый моноид. Определим тогда категорию  $\mathbf{C}_M$  как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным M. Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?
  - (a)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},+)}$ .
  - (b)  $C_{(N,*)}$ .
  - (c)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},+)}$ .
  - (d)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},*)}$ .
  - (e)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},+)}$ .
  - (f)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},*)}$ .

- 3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что  $x \leq y$  и  $y \leq x$ , следует, что x = y. Чему в категориальных терминах соотвествует это свойство? (Другими словами, утверждается, что предпорядок  $(X, \leq)$  является порядком тогда и только тогда, когда категория  $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$  обладает некоторым свойством, которое обсуждалось на лекции. Что это за свойство?)
- 4. Опишите следующие моноиды и группы:
  - (a)  $Aut_{Set}(A)$ , где A множество букв русского алфавита.
  - (b)  $Aut_{\mathbf{FinSet}}(A)$ , где A множество букв русского алфавита.
  - (c)  $\operatorname{Endo}_{\mathbf{C}_M}(*)$ , где M некоторый моноид.
  - (d)  $\operatorname{Endo}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$ .
  - (e)  $\operatorname{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$ .
  - (f) Endo $_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$ , где  $\mathbf{Ring}$  категория колец с единицей.
  - (g)  $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ , где  $\mathbf{C}$  скелетная категория, и X произвольный объект  $\mathbf{C}$ .
  - (h) Endo $_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$ .
  - (i)  $\operatorname{Aut}_{\mathbf{Num}}(n)$ .
  - (j)  $\operatorname{Endo}_{\mathbf{C}_{(X,\leq)}}(x)$ , где x произвольный элемент X.
- Какие из следующих категорий являются скелетными: Set, FinSet, Grp, Vec, Λ, Mat, Num?
- Какие из следующих категорий являются группоидами: Set, FinSet, Grp, Vec, Λ, Mat, Num?
- 7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?
  - (а) Дискретные категории.
  - (b) Категории вида  $\mathbf{C}_M$ .
  - (с) Категории предпорядка.
  - (d) Группоиды.
- 8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?
  - (а) Дискретные категории.
  - (b) Категории вида  $\mathbf{C}_M$ .
  - (с) Категории предпорядка.
  - (d) Скелетные категории.

9. Пусть  $f, f': X \to Y$  и  $g, g': Y \to X$  – морфизмы в некоторой категории С. Докажите, что если диаграммы



коммутируют и f = f', то X и Y изоморфны.

- 10. Приведите пример, показывающий, что условие f=f' в предыдущем задании является необходимым.
- 11. Какие из следующих категорий являются малыми: Set, FinSet, Grp, Vec,  $\Lambda$ , Mat, Num,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$ ?
- 12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: Set, FinSet, Grp, Vec,  $\Lambda$ , Mat, Num,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$ ?