Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

29 апреля 2021 г.

План лекции

- Интерпретация
  - Подстановка
  - Корректность интерпретации
- Регулярные теории
- Когерентные теории
- Импликация и $\forall$

Подстановка

- Пусть U и V – $\mathcal{S}$-индексированные множества переменных. Тогда подстановка из U в V (обозначается $\rho : U \to V$) – это просто V-индексированное множество термов $\{\rho(x) \in \mathrm{Term}(V)_s\}_{(x:s)\in V}$.
- Подстановка $(x := a)$ – это просто такая ρ, что $\rho(x) = a$ и $\rho(y) = y$ для любого $y \neq x$.
- Если $\rho : U \to V$ и $t \in \mathrm{Term}(U)_s$, то $t[\rho]$ – это терм в $t \in \mathrm{Term}(U)_s$, который определяется рекурсивно:
  - Если $t = x$, то $t[\rho] = \rho(x)$.
  - Если $t = f(t_1, \ldots t_k)$, то $t[\rho] = f(t_1[\rho], \ldots t_k[\rho])$.
- Подстановка $\varphi[\rho]$ в формулы определяется рекурсией по построению φ.

Интерпретация подстановки в термах

Если $\rho : U \to V$, то мы определяем $[\![\rho]\!] : [\![U]\!] \to [\![V]\!]$ как $\langle [\![\rho(x)]\!] \rangle_{x \in V}$.

Lemma

Если $t \in \mathrm{Term}(V)_s$ и $\rho : U \to V$, то $[\![t[\rho]]\!] = [\![t]\!] \circ [\![\rho]\!]$.

Доказательство.

Индукцией по построению t. $\square$

Интерпретация подстановки в формулах

Lemma

Если $\varphi \in \mathrm{Form} \to d_\varphi$ *такой, что следующий квадрат является пулбэком:*

$$\begin{tikzcd} d_{\varphi[\rho]} \arrow[r] \arrow[d, "{[\![\varphi[\rho]]\!]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_\varphi \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]}"] \\ [\![U]\!] \arrow[r, "{[\![\rho]\!]}"'] & [\![V]\!] \end{tikzcd}$$

Эквивалентно эту лемму можно сформулировать следующим образом: $[\![\varphi[\rho]]\!]$ и $[\![\rho]\!]^*([\![\varphi]\!])$ равны как подобъекты $[\![U]\!]$.

Интерпретация подстановки в формулах

- Лемма о подстановке доказывается индукцией по построению φ.
- Сейчас мы проверим это утверждение только для атомарных формул, так как мы вводили только их пока.
- Для других связок будем проверять по мере их введения.

Интерпретация подстановки

Если $\varphi = R(t_1, \ldots t_k)$, то мы получаем следующую диаграму:

$$\begin{tikzcd}
d_{\varphi[\rho]} \arrow[r] \arrow[d, "{[\![\varphi[\rho]]\!]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_\varphi \arrow[rr] \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]}"] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & d_R \arrow[d, "{[\![R]\!]}"] \\
{[\![U]\!]} \arrow[r, "{[\![\rho]\!]}"'] & {[\![V]\!]} \arrow[rr, "{\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_k]\!] \rangle}"'] & & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]}
\end{tikzcd}$$

Правый квадрат – это определение интерпретации $R(t_1, \ldots t_k)$. Композиция нижних стрелок – это $\langle [\![t_1[\rho]]\!], \ldots [\![t_k[\rho]]\!] \rangle$. По определению интерпретации $R(t_1[\rho], \ldots t_k[\rho])$ у на есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \to d_R$ такая, что внешний прямоугольник является пулбэком. По свойствам пулбэков у нас есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \to d_\varphi$ такая, что левый квадрат является пулбэком.

Интерпретация подстановки

Если $\varphi = (t_1 = t_2)$, то в следующей диаграмме $\llbracket \varphi \rrbracket$ по определению является уравнителем $\llbracket t_1 \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket : \llbracket V \rrbracket \to \llbracket s \rrbracket$, а $\llbracket \varphi[\rho] \rrbracket$ является уравнителем $\llbracket t_1 \rrbracket \circ \llbracket \rho \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket \circ \llbracket \rho \rrbracket : \llbracket U \rrbracket \to \llbracket s \rrbracket$.

$$
\begin{tikzcd}
d_{\varphi[\rho]} \arrow[r] \arrow[d, "\llbracket \varphi[\rho] \rrbracket"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_{\varphi} \arrow[d, "\llbracket \varphi \rrbracket"] & \\
\llbracket U \rrbracket \arrow[r, "\llbracket \rho \rrbracket"'] & \llbracket V \rrbracket \arrow[r, shift left, "\llbracket t_1 \rrbracket"] \arrow[r, shift right, "\llbracket t_2 \rrbracket"'] & \llbracket s \rrbracket
\end{tikzcd}
$$

По универсальному свойству уравнителей у нас есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \to d_{\varphi}$ и квадрат является пулбэком.

Правила вывода

Во всех наших логиках будут следующие правила вывода:

$$\frac{}{\varphi \vdash^{V} \varphi} \qquad \frac{\varphi \vdash^{V} \psi \qquad \psi \vdash^{V} \chi}{\varphi \vdash^{V} \chi}$$

$$\frac{\varphi \vdash^{U} \psi}{\varphi[\rho] \vdash^{V} \psi[\rho]}$$

С добавлением логических связок будут добавляться и правила вывода.

Корректность интерпретации

- Разумеется мы хотим, чтобы интерпретация уважала правила вывода.
- Первые два правила очевидны: $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом самого себя и, если $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом $[\![\psi]\!]$ и $[\![\psi]\!]$ является подобъектом $[\![\chi]\!]$, то $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом $[\![\chi]\!]$.
- Третье правило следует из леммы об интерпретации подстановки.

Корректность $\top$

- $\top$ интерпретируется как наибольший подобъект, то есть $\mathrm{id} : [\![V]\!] \to [\![V]\!]$.
- Правило вывода для $\top$:

$$\varphi \vdash\!\!\longrightarrow \top$$

- Чтобы доказать, что эта аксиома всегда корректна, нужно проверить, что для любой подобъект $d_\varphi \hookrightarrow [\![V]\!]$ является подобъектом $[\![\top]\!] = \mathrm{id} : [\![V]\!] \hookrightarrow [\![V]\!]$, что очевидно.
- Лемма о подстановке для $\top$ очевидна:

$$\begin{tikzcd} {[\![U]\!]} \arrow[r, "{[\![\rho]\!]}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\![V]\!]} \arrow[d, "\mathrm{id}_{[\![V]\!]}"] \\ {[\![U]\!]} \arrow[r, "{[\![\rho]\!]}"'] & {[\![V]\!]} \end{tikzcd}$$

Корректность $\wedge$

- $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.
- Правила вывода для $\wedge$:

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}$$

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} \qquad \frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi}$$

- Эти правила уважаются, так как по определению пулбэков стрелка $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] \cap [\![\chi]\!]$ существует тогда и только тогда, когда существуют стрелки $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$ и $[\![\varphi]\!] \to [\![\chi]\!]$.
- Лемма о подстановке для $\wedge$ следует из того факта, что $f^*(X \cap Y) = f^*(X) \cap f^*(Y)$, что проверяется напрямую.

План лекции

Интерпретация

Подстановка

Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Интерпретация $\exists$

- Теории, в которых формулы состоят только из равенств, конъюнкций, $\top$ и $\exists$ называются *регулярными*.
- Мы не можем проинтерпретировать $\exists$ в произвольной конечно полной категории.
- Категории, где можно это сделать, называются *регулярными*.
- Формальное определение будет дано ниже.

Интерпретация $\exists$ в **Set**

- Пусть $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Как проинтерпретировать $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1 \ldots x_n))$?
- Если рассмотреть $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!] : d_\varphi \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то это почти дает нам интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$, так как прообраз некоторого элемента $(a_1, \ldots a_n)$ населен тогда и только тогда, когда существует $a \in [\![s]\!]$, такой что $(a, a_1, \ldots a_n) \in [\![\varphi]\!]$.
- Единственная проблема заключается в том, что $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!]$ не является мономорфизмом.
- Мы можем решить эту проблему, определив интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$ как образ $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Образ морфизма

- Мы можем обобщить понятие образа функции на произвольную категорию.
- *Образ* морфизма $f : A \to B$ – это наименьший мономорфизм $\mathrm{Im}\, f \hookrightarrow B$, через который f факторизуется.
- Другими словами, существует стрелка $A \to \mathrm{Im}\, f$, такая что для любых стрелок $g : A \to C$ и $h : C \hookrightarrow B$ если $h \circ g = f$, то $\mathrm{Im}\, f$ является подобъектом C:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Im}\, f \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Интерпретация существования

- В произвольной категории образ может не существовать, но он уникален, если существует.
- Если предположить, что в категории существуют образы, то можно попробовать проинтерпретировать существование так же как и в **Set**.
- Если $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то мы определяем $[\![\exists(x : s)\varphi]\!]$ как образ $\pi_{1,\ldots,n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Лемма о подстановке для $\exists$

- Даже если в категории существуют образы всех морфизмов, они могут не коммутировать с пулбэками.
- Категория называется *регулярной*, если у всех морфизмов существуют образы, и они стабильны относительно пулбэков.
- Таким образом, в любой регулярной категории подстановка действительно интерпретируется как пулбэк.

Корректность интерпретации $\exists$

- Правила вывода для $\exists$:

$$\frac{\exists(x:s)\varphi \vdash^{V} \psi}{\varphi \vdash^{V,x} \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash^{V,x} \psi}{\exists(x:s)\varphi \vdash^{V} \psi}$$

- Обратите внимание, что ψ определен в контексте V, но используется также и в контексте V, x. По лемме об интерпретации подстановки ψ во втором контексте интерпретируется как пулбэк.
- Корректность этих правил остается в качестве упражнения.

План лекции

Интерпретация

- Подстановка
- Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Определение

- Категория называется *когерентной*, если она регулярна, для любого объекта A в порядке подобъектов $\mathrm{Sub}(A)$ существуют все конечные копроизведения, и для любого морфизма $f : A \to B$ функтор $f^* : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ сохраняет их.
- Эта дополнительная структура – это в точности то, что необходимо для интерпретации ложного утверждения и дизъюнкций.
- $\bot$ интерпретируется как наименьший подобъект, а $\varphi \vee \psi$ интерпретируется как объединение подобъектов $[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$.
- Лемма о подстановке верна по предположению.

Корректность интерпретации

Правила вывода для $\perp$ и $\vee$:

$$\frac{}{\varphi \longmapsto \varphi \vee \psi} \qquad \frac{}{\psi \longmapsto \varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\psi \longmapsto \varphi \qquad \chi \longmapsto \varphi}{\psi \vee \chi \longmapsto \varphi} \qquad \frac{}{\perp \longmapsto \varphi}$$

Их корректность следует из универсальных свойств наименьшего подобъекта и объединения.

Начальный объект

Proposition

В когерентной категории существует строгий начальный объект.

Remark

Это утверждение верно для любой конечно полной категории, в которой интерпретируется $\bot$. В доказательстве нигде не используется $\exists$ и $\vee$.

Доказательство.

Определим 0 как наименьший подобъект 1. Заметим, что $\pi_1 : X \times 0 \hookrightarrow X$ является наименьшим подобъектом X. Если у нас есть стрелка $X \to 0$, то π_1 является изоморфизмом. Другими словами, он является и наибольшим подобъектом X. Следовательно, у любого такого X ровно один подобъект – он сам. □

Начальный объект

Доказательство.

Докажем, что если есть морфизм $A \to 0$, то A является подобъектом 1. Дествительно, если у нас есть пара стрелок $f, g : B \to A$, то так как у нас есть стрелка $B \to 0$, то уравнитель f и g является изоморфизмом, то есть f и g равны. Следовательно $X \times 0$ изоморфен 0, то есть 0 – строгий. Докажем, что 0 – начальный. Так как у нас есть стрелка из $X \times 0$ в 0, то $X \times 0 \simeq 0$, а значит у нас есть стрелка из 0 в X. Если у нас есть стрелки $f, g : 0 \to X$, то их уравнитель является подобъектом 0, а значит изоморфизмом, то есть f и g равны. $\square$

План лекции

Интерпретация

- Подстановка
- Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и $\forall$

Квантор всеобщности

- Правила вывода для $\forall$ дуальны правилам для $\exists$:
$$\frac{\varphi \vdash^{V} \forall(x : s)\psi}{\varphi \vdash^{V,x} \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash^{V,x} \psi}{\varphi \vdash^{V} \forall(x : s)\psi}$$
- То есть у нас есть биекция между стрелками $\pi_1^*([\![\varphi]\!]) \to [\![\psi]\!]$ в $\mathrm{Sub}([\![V]\!] \times [\![s]\!])$ и $[\![\varphi]\!] \to [\![\forall(x : s)\psi]\!]$ в $\mathrm{Sub}([\![V]\!])$, где $\pi_1 : [\![V]\!] \times [\![s]\!] \to [\![V]\!]$.
- Таким образом, $[\![\forall(x : s)\psi]\!]$ можно определить как $\forall_{\pi_1}([\![\psi]\!])$, где $\forall_{\pi_1} : \mathrm{Sub}([\![V]\!] \times [\![s]\!]) \to \mathrm{Sub}([\![V]\!])$ – правый сопряженный к $\pi_1^* : \mathrm{Sub}([\![V]\!]) \to \mathrm{Sub}([\![V]\!] \times [\![s]\!])$.

Гейтинговы категории

- Категория называется *гейтинговой*, если она регулярна, у любого объекта существует минимальный подобъект и объединения подобъектов, и для любого морфизма $f : X \to Y$ существует правый сопряженный функтор $\forall_f : \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(Y)$ к функтору $f^* : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$.
- Так как гейтингова категория регулярна, то у функтора f^* есть и левый сопряженный. Таким образом, мы получаем цепочку сопряженных функторов:

$$\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$$

- Мы не требуем, чтобы f^* сохранял наименьший подобъект и объединения, так как это следует из того, что он левый сопряженный.

Beck-Chevalley condition

Чтобы доказать лемму о подстановке, докажем вспомогательное утверждение:

Proposition (Beck-Chevalley condition)

Для любого пулбэка слева квадрат функторов справа коммутирует.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\forall_f"'] & \mathrm{Sub}(P) \arrow[d, "\forall_k"] \\ \mathrm{Sub}(C) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Sub}(B) \end{tikzcd}$$

Beck-Chevalley condition

- Функторы в правом квадрате являются правыми сопряженными к следующим функторам:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) & \mathrm{Sub}(P) \arrow[l, "\exists_h"'] \\ \mathrm{Sub}(C) \arrow[u, "f^*"] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[l, "\exists_g"] \arrow[u, "k^*"'] \end{tikzcd}$$

- Так как этот квадрат коммутирует по регулярности, то квадрат на предыдущем слайде коммутирует по уникальности правых сопряженных функторов.

Лемма о подстановке

Применим это утверждение к следующему пулбэку:

$$\begin{tikzcd} [\![U]\!] \times [\![s]\!] \arrow[r, "{[\![\rho]\!] \times \mathrm{id}_{[\![s]\!]}}"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & [\![V]\!] \times [\![s]\!] \arrow[d, "\pi_1"] \\ [\![U]\!] \arrow[r, "{[\![\rho]\!]}"'] & [\![V]\!] \end{tikzcd}$$

Тогда коммутативность правого квадрата означает, что $[\![\rho]\!]^*(\forall_{\pi_1}(X)) = \forall_{\pi_1}(([\![\rho]\!] \times \mathrm{id}_{[\![s]\!]})^*(X))$ для любого подобъекта $X \hookrightarrow [\![V]\!] \times [\![s]\!]$. Это в точности дает нам лемму о подстановке:

$$[\![(\forall(x : s)\varphi)[\rho]]\!] = \forall_{\pi_1}(([\![\rho]\!] \times \mathrm{id}_{[\![s]\!]})^*([\![\varphi]\!])) = [\![\rho]\!]^*(\forall_{\pi_1}([\![\varphi]\!]))$$

Импликация

- Правила вывода для импликации выглядят следующим образом:
$$\frac{\chi \wedge \varphi \vdash\!\!\!\longrightarrow \psi}{\chi \vdash\!\!\!\longrightarrow \varphi \to \psi} \qquad \frac{\chi \vdash\!\!\!\longrightarrow \varphi \to \psi \qquad \chi \vdash\!\!\!\longrightarrow \varphi}{\chi \vdash\!\!\!\longrightarrow \psi}$$
- Эти правила аналогичны правилам для типа функций в лямбда-исчислении.
- Таким образом, $[\![\varphi \to (-)]\!] : \mathrm{Sub}([\![V]\!]) \to \mathrm{Sub}([\![V]\!])$ интерпретируется как правый сопряженный к $[\![\varphi \wedge -]\!] = [\![\varphi]\!] \cap - : \mathrm{Sub}([\![V]\!]) \to \mathrm{Sub}([\![V]\!])$.
- Корректность правил вывода следует из сопряжения аналогично случаю лямбда-исчисления.

Импликация

- Легко показать, что $[\![\varphi]\!] \cap -$ является композицией

$$\mathrm{Sub}([\![V]\!]) \xrightarrow{[\![\varphi]\!]^*} \mathrm{Sub}(d_\varphi) \xrightarrow{\exists_{[\![\varphi]\!]}} \mathrm{Sub}([\![V]\!])$$

- Следовательно, правый сопряженный к нему существует в любой гейтинговой категории.
- Таким образом, мы можем проинтерпретировать $\varphi \to \psi$ как $\forall_{[\![\varphi]\!]}([\![\varphi]\!]^*(\psi))$.

Лемма о подстановке

- Чтобы доказать леммы подстановке, применим Beck-Chevalley condition к следующему пулбэку:

$$\begin{tikzcd} d_{\varphi[\rho]} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k=\rho^*(\llbracket\varphi\rrbracket)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_\varphi \arrow[d, "\llbracket\varphi\rrbracket"] \\ \llbracket U\rrbracket \arrow[r, "\rho"'] & \llbracket V\rrbracket \end{tikzcd}$$

- Тогда получаем, что $\forall_k(h^*(X)) = \rho^*(\forall_{\llbracket\varphi\rrbracket}(X))$ для всех X.
- Теперь легко доказать лемму о подстановке:

$$\llbracket(\varphi \to \psi)[\rho]\rrbracket = \llbracket\varphi[\rho] \to \psi[\rho]\rrbracket = \forall_k(k^*(\rho^*(\llbracket\psi\rrbracket))) =$$

$$\forall_k(h^*(\llbracket\varphi\rrbracket^*(\llbracket\psi\rrbracket))) = \rho^*(\forall_{\llbracket\varphi\rrbracket}(\llbracket\varphi\rrbracket^*(\llbracket\psi\rrbracket))) = \rho^*(\llbracket\varphi \to \psi\rrbracket)$$