

# Теория категорий

## Сопряженные функторы

Валерий Исаев

24 марта 2021 г.

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories



## Векторные пространства и базисы

- ▶ Пусть  $\mathbf{Vec}_K$  – категория векторных пространств над полем  $K$ .
- ▶ Пусть  $U : \mathbf{Vec}_K \rightarrow \mathbf{Set}$  – забывающий функтор.
- ▶ Пусть  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vec}_K$  – функтор, сопоставляющий множеству  $A$  векторное пространство с базисом  $A$ .

$$F(A) = \{ c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A \}$$

- ▶ Тогда любая функция  $f : A \rightarrow U(B)$  уникальным образом доопределяется до линейного преобразования  $g : F(A) \rightarrow B$ .
- ▶ У этого соответствия существует обратное, каждому линейному преобразованию  $g : F(A) \rightarrow B$  сопоставляющее функцию  $f : A \rightarrow U(B)$ ,  $f(a) = g(1a)$ .
- ▶ Таким образом, существует биекция  $\varphi : \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}}(F(A), B)$ .



# Сопряжение

## Definition

Сопряжение между категориями  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  – это тройка  $(F, U, \varphi)$ , состоящая из функторов  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  и  $U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  и естественного изоморфизма

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, U(B)).$$

В определении  $\varphi$  является естественным изоморфизмом между функторами  $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), -), \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, U(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм  $\varphi_{A,B}$  был естественен по  $A$  и  $B$ . Таким образом, это были примеры сопряжений.

# Уникальность сопряженных функторов

- ▶ Если  $(F, U, \varphi)$  – сопряжение, то пишут  $F \dashv U$  и говорят, что  $F$  – левый сопряженный к  $U$ , а  $U$  – правый сопряженный к  $F$ .
- ▶ Если  $F \dashv U$  и  $F' \dashv U$ , то  $F$  и  $F'$  изоморфны.
- ▶ Доказательство: упражнение.
- ▶ Если  $F \dashv U$  и  $F \dashv U'$ , то  $U$  и  $U'$  изоморфны.
- ▶ Доказательство: по дуальности.

# Сохранение (ко)пределов

## Proposition

*Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.*

## Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  – левый сопряженный к  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ .

Пусть  $D : J \rightarrow \mathbf{C}$  – некоторая диаграмма в  $\mathbf{C}$ . Пусть

$L = \operatorname{colim} D$  – копредел этой диаграммы.

Пусть  $\alpha : F \circ D \rightarrow X$  – некоторый коконус в  $\mathbf{D}$ . Тогда существует уникальная стрелка из  $L$  в  $G(X)$ . По сопряженности она соответствует уникальной стрелке из  $F(L)$  в  $X$ . Таким образом,  $F(L)$  – копредел  $F \circ D$ . □



# План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories





# Свойства единицы и коединицы

## Proposition

Если  $(F, G, \varphi)$  – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:

$$\begin{array}{ccc} G(B) & \xrightarrow{\eta_{GB}} & GFG(B) \\ & \searrow id_{GB} & \downarrow G\epsilon_B \\ & & G(B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F\eta_A} & FGF(A) \\ & \searrow id_{FA} & \downarrow \epsilon_{FA} \\ & & F(A) \end{array}$$

# Доказательство

## Доказательство.

Условия естественности  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  можно переписать в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi(f \circ F(h))} & G(C) \\ h \downarrow & \nearrow \varphi(f) & \downarrow G(g) \\ B & \xrightarrow{\varphi(g \circ f)} & G(D) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi^{-1}(f' \circ h)} & C \\ F(h) \downarrow & \nearrow \varphi^{-1}(f') & \downarrow g \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(g) \circ f')} & D \end{array}$$

Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при  $f = id_{FG(B)}$  и  $g = \epsilon_B$ . Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при  $f' = id_{GF(A)}$  и  $h = \eta_A$ . □

# Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

## Proposition

*Четверка*

$(F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \eta_A : A \rightarrow GF(A), \epsilon : FG(B) \rightarrow B)$ ,  
состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение  $(F, G, \varphi)$ ,  
где  $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$  для любого  $f : F(A) \rightarrow B$ ,  
 $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$  для любого  $g : A \rightarrow G(B)$ . Единицей и коединицей этого сопряжения являются  $\eta$  и  $\epsilon$  соответственно.



## Доказательство

### Доказательство.

Осталось доказать, что  $\varphi$  естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$G(g) \circ \varphi(f) = (\text{по определению } \varphi)$$

$$G(g) \circ G(f) \circ \eta_B = (\text{так как } G - \text{функтор})$$

$$G(g \circ f) \circ \eta_B = (\text{по определению } \varphi)$$

$$\varphi(g \circ f).$$

$$\varphi(f) \circ h = (\text{по определению } \varphi)$$

$$G(f) \circ \eta_B \circ h = (\text{по естественности } \eta)$$

$$G(f) \circ GF(h) \circ \eta_A = (\text{по определению } \varphi)$$

$$\varphi(f \circ F(h)).$$



# План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories







# План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

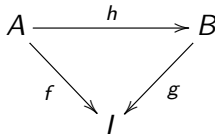
Over categories

## Семейства множеств

- ▶ Мы можем определить категорию множеств, параметризованных некоторым множеством  $I$ .
- ▶ Ее объекты – это семейства множеств, т.е. просто функции  $I \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- ▶ Морфизмы двух семейств  $\{X_i\}_{i \in I}$  и  $\{Y_i\}_{i \in I}$  – это семейства морфизмов  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ .
- ▶ Тожественный морфизм и композиция задаются поточечно.
- ▶ Очевидно, мы получим категорию, которую мы будем обозначать  $\mathbf{Fam}_I$ .

## Множества над $I$

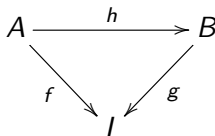
- ▶ Эта конструкция не обобщается на произвольную категорию очевидным образом.
- ▶ Но мы можем определить категорию **Fam**, эквивалентным образом как **Set**/ $I$ .
- ▶ Объекты категории **Set**/ $I$  – это множества над  $I$ , т.е. пара  $(A, f)$ , где  $A$  – множество, а  $f : A \rightarrow I$  – функция.
- ▶ Морфизмы между  $f : A \rightarrow I$  и  $g : B \rightarrow I$  – это функции  $h : A \rightarrow B$  такие, что следующий треугольник коммутирует:



- ▶ Тожественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в **Set**.

## Объекты над $I$

- ▶ Теперь мы можем обобщить эту конструкцию на произвольную категорию.
- ▶ Если  $I$  – объект некоторой категории  $\mathbf{C}$ , то *категория объектов над  $I$*  (aka slice category) обозначается  $\mathbf{C}/I$  и определяется следующим образом.
- ▶ Объекты  $\mathbf{C}/I$  – это пары  $(A, f)$ , где  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , а  $f : A \rightarrow I$  – морфизм в  $\mathbf{C}$ .
- ▶ Морфизмы между  $f : A \rightarrow I$  и  $g : B \rightarrow I$  – это морфизмы  $h : A \rightarrow B$  такие, что следующий треугольник коммутует:



- ▶ Тожественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в  $\mathbf{C}$ .



## Переиндексирование

- ▶ Если у нас есть семейство множеств  $\{A_i\}_{i \in I}$  и функция  $f : J \rightarrow I$ , то мы можем построить новое семейство  $\{A_{f(j)}\}_{j \in J}$
- ▶ Если переформулировать это в терминах множеств над  $I$ , то мы получим операцию, строящую множество над  $J$  по множеству над  $I$  и функции  $f : J \rightarrow I$ :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow & \\ J & \xrightarrow{f} & I \end{array}$$

- ▶ Что это за операция? Можно ли ее обобщить на произвольную категорию?

