Задания

17 февраля 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Терминальные объекты.
   (b) Произведения объектов.
2. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1. Докажите, что для любого объекта A в $\mathbf{C}$ существует произведение $A \times 1$.
3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \to B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \to A$ является эпиморфизмом.
5. Докажите, что в $\mathbf{Ab}$ существуют все произведения.
6. Докажите, что два определения уравнителей, приводившихся в лекции, эквивалентны.
7. Докажите, что уравнитель пары стрелок $f, g : A \to B$ уникален с точностью до изоморфизма. То есть, если $e_1 : E_1 \to A$ и $e_2 : E_2 \to A$ – два уравнителя f и g, то существует уникальный изоморфизм $i : E_1 \to E_2$ такой, что $e_2 \circ i = e_1$.
8. Морфизм $h : B \to B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:
   (a) Если $f : A \to B$ и $g : B \to A$ – такие, что $g \circ f = id_A$, то $h = f \circ g$ является идемпотентным.
   (b) Если в категории есть уравнители, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h : B \to B$ существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.
9. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

10. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *сильным*, если для любой коммутативного квадрата, где $e : C \to D$ является эпиморфизмом,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

существует стрелка $D \to A$ такая, что диаграмма выше коммутирует.

Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

11. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма $e : A \to C$ и любого морфизма $g : C \to B$ таких, что $g \circ e = f$, верно, что e – изоморфизм.

Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.

12. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?

13. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.

14. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

Бонусные задания:

1. Докажите, что если в категории $\mathbf{C}_M$ существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.

2. Докажите, что если в категории $\mathbf{C}_M$ существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.

3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории $\mathbf{C}_M$ существует бинарные произведения.