Задания

3 марта 2021 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?

2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.

3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.

   (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.

   (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).

   (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в $\mathbf{C}$ морфизмы $\mathrm{and}, \mathrm{or} : \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\langle \text{false},\text{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\text{false}"] & \\
\text{Bool} \times \text{Bool} \arrow[r, "\text{and}"'] & \text{Bool}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\langle \text{false},\text{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\text{false}"] & \\
\text{Bool} \times \text{Bool} \arrow[r, "\text{or}"'] & \text{Bool}
\end{tikzcd}
$$

5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

   Пусть **C** – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) **C** – категория предпорядка.

   (b) В **C** терминальный объект является булевским.

   (c) В **C** существует булевский объект, такой что $\text{true} = \text{false}$.

6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории **C** выполнены следующие утверждения:

   (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.

   (b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.

   (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов A, B и C морфизм

   $$[\langle \pi_1, \text{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \text{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \to A \times (B \amalg C)$$

   является изоморфизмом, где $\text{inj}_1 : B \to B \amalg C$ и $\text{inj}_2 : C \to B \amalg C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f : B \to X$, $g : C \to X$, то $[f, g] : B \amalg C \to X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f, g] \circ \text{inj}_1 = f$ и $[f, g] \circ \text{inj}_2$.

   (d) Если в **C** существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.

   (e) Если в **C** существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K : A \to A^B$$
$$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc}(x)$. В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

    (a) **C** – категория предпорядка.

    (b) В **C** терминальный объект является объектом натуральных чисел.

    (c) В **C** существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

    (d) В **C** существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все малые копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

12. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "\langle \mathrm{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"] & \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\mathrm{suc} \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathrm{suc}"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times +"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "+"'] & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$