Теория категорий

Естественные преобразования

Валерий Исаев

17 марта 2021 г.

План лекции

Подкатегории

Естественные преобразования

Рефлективные подкатегории

Подкатегории

- *Подкатегория* $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ – это подкласс объектов $\mathbf{C}$ и для каждой пары объектов X, Y в $\mathbf{C}'$ подкласс множества $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что $\mathbf{C}'$ содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- Подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.
- Понятие подкатегории не очень полезное.

Полные подкатегории

- Подкатегория $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ называется *полной*, если для любых объектов X, Y в $\mathbf{C}'$ множества $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- Полные подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

Примеры

- **FinSet** – полная подкатегория **Set**.
- **Ab** – полная подкатегория **Grp**.
- Категория частичных порядков – полная подкатегория предпорядков.
- Категория предпорядков вкладывается в категорию категорий.
- Категория моноидов вкладывается в категорию категорий.
- Существует не полное вложение Λ в **Set**.

План лекции

Подкатегории

Естественные преобразования

Рефлективные подкатегории

Определение

- Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- *Естественное преобразование* $\alpha : F \to G$ – это функция, сопоставляющая каждому объекту X из $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$, удовлетворяющая условию, что для любого морфизма $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ следующий квадрат коммутирует:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Категория функторов

- Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- Если $\alpha : F \to G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \to G(Y)$ в $\mathbf{D}$.
- Морфизм α_f определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_Y$, что равно $\alpha_X \circ G(f)$ по естественности.
- Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

Композиция естественных преобразований

- Если $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \to H$ как функцию, сопоставляющую каждому X из **C** морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$.
- Композиция $\beta \circ \alpha$ – естественна:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Категория функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$.
- Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- Таким образом, для любой пары категорий $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ существует категория функторов, которая обозначается $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Эквивалентность категорий

- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- Последнее условие означает, что для любого объекта X в $\mathbf{D}$ существует объект Y в $\mathbf{C}$, такой что $F(Y)$ изоморфен X.

Пример

- Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \to \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указаным выше способом.
- Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^{dim(V)}$.
- Таким образом, F – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

Доказательство

Proposition

Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.

Доказательство.

Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Пусть $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – обратный к нему, $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Тогда F – существенно сюръективен на объектах.
Действительно, для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ возьмём $Y = G(X)$, тогда $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$.
Покажем, что F – строгий. Пусть $F(f) = F(f')$ для некоторых $f, f' : X \to Y$. Тогда по естественности α получается, что $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$. Аналогично доказывается, что G – строгий.

Доказательство (продолжение)

Докажем, что F – полный. Пусть $h : F(X) \to F(Y)$ – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку $f : X \to Y$ как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$. С другой стороны, по естественности α у нас есть равенство $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$. Следовательно $G(h) = G(F(f))$. По строгости G мы получаем, что $h = F(f)$. Таким образом, f – прообраз h, то есть F – полный.

Доказательство (в обратную сторону)

Пусть F – полный, строгий и существенно сюрьективен на объектах. Тогда для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ существует объект $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ и изоморфизм $\alpha_X : F(Y) \simeq X$. Определим $G : \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ как функцию, возвращающую на каждом X такой Y (не важно какой конкретно).

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dashed, "F(f')"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Так как F полон, то для каждого $f : X \to Y$ существует $f' : G(X) \to G(Y)$, такая что $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$. Так как F строг, то такая стрелка уникальна. Положим $G(f) = f'$. Из уникальности f' следует, что G сохраняет id и $\circ$.

Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что $G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Преобразование $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$ естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности α.
Так как F – полный, то для любой стрелки $\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \to F(Y)$ существует прообраз $\beta_Y : G(F(Y)) \to Y$. Все β_Y – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы $\alpha^{-1}_{F(Y)} : F(Y) \to F(G(F(Y)))$.

Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что β естественен.

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(F(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G(F(Y)) \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Применив F к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как α естественен. Но так как F – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.

План лекции

Подкатегории

Естественные преобразования

Рефлективные подкатегории

Рефлективные подкатегории

- Пусть $\mathbf{D}$ – полная подкатегория $\mathbf{C}$. Допустим мы хотим доказать, что вложение $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – эквивалентность.
- Тогда нам нужно найти для каждого объекта X из $\mathbf{C}$ объект из $\mathbf{D}$, изоморфный X.
- Иногда бывает так, что эти категории не эквивалентны, но мы всё же можем найти некоторый объект Y в $\mathbf{D}$, который является в некотором смысле лучшим приближением к X.
- Конкретно, должна существовать стрелка $f : X \to Y$, которая может не быть изоморфизмом, но всё же является в каком-то смысле наилучшей такой стрелкой.

Определение

- Пусть $\mathbf{D}$ – полная подкатегория $\mathbf{C}$. Мы говорим, что $\mathbf{D}$ – *рефлективная* подкатегория $\mathbf{C}$, если для любого объекта X из $\mathbf{C}$ существует стрелка $\eta_X : X \to Y$, где $Y \in \mathbf{D}$, такая что для любой стрелки $f' : X \to Y'$, где $Y' \in \mathbf{D}$, существует уникальный морфизм $h : Y \to Y'$, такой что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y' \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

- Функция $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, сопоставляющая объекту X кодомен η_X называется *рефлектором*.

Примеры

- Все стрелки в следующей диаргамме являются вложениям рефлективных подкатегорий:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Grp} \arrow[d] \\ \mathbf{CMon} \arrow[r] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

- Например, чтобы по группе G построить соответствующую ей абелеву группу, нужно взять фактор по коммутанту $G/[G,G]$.