Теория категорий Определение категорий

Валерий Исаев

9 февраля 2021 г.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Литература

- ➤ Saunders Mac Lane, Categories for the working mathematician, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998
- R. Goldblatt, Topoi: The categorial analysis of logic, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2006
- Peter T. Johnstone, Sketches of an elephant: a topos theory compendium. vol. 1, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, Oxford, 2002, Autre tirage: 2008
- S. MacLane and I. Moerdijk, Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer New York, 1992
- ► F. Borceux, Handbook of categorical algebra: Volume 1, basic category theory, Cambridge Textbooks in Linguistics, Cambridge University Press, 1994

Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ► Множества: N, Z и Q.
- ightharpoonup Группы: $(\{0,1\},+)$ и $\mathbb{Z}/2$.
- ightharpoonup Типы в языках программирования: (a,b) и (b,a).
- ► Еще пример: Bool и Maybe ().

Изоморфизмы

- ightharpoonup Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- lacktriangle Когда существует пара «функий» f:A o B и g:B o A, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.
- И эти функции взаимообратны.
- lack Пример: $f=g=\lambda(x,y) o (y,x)$: (a,b) o (b,a).
- Пример:

$$f = \lambda x \rightarrow if \ x \ then \ Just \ () \ else \ Nothing : Bool \rightarrow Maybe \ ()$$
 $g = maybe \ True \ (const \ False) : Maybe \ () \rightarrow Bool$

Определение категории

Категория С состоит из:

- ▶ Коллекции объектов $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ для любой пары объектов $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ мы будем писать $f:X\to Y$.
- lacktriangle Операции, сопоставляющей каждому объекту $X\in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ морфизм $\mathrm{id}_X:X o X$.
- ightharpoonup Операции, сопоставляющей каждой паре морфизмов f: X o Y и g: Y o Z морфизм $g \circ f: X o Z$.
- ightharpoonup Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам: $g \circ \mathrm{id}_X = g$, $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ и $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Изоморфизмы

- lacktriangle Морфизм f:X o Y называется *изоморфизмом*, если существует морфизм g:Y o X такой, что $g\circ f=\mathrm{id}_X$ и $f\circ g=\mathrm{id}_Y.$
- Объекты X и Y называются изоморфными, если существует изоморфизм $f: X \to Y$.
- Если X объект категории ${\bf C}$, то моноид эндоморфизмов X (обозначение: $\operatorname{Endo}_{\bf C}(X)$) это множество $\operatorname{Hom}_{\bf C}(X,X)$ с операцией композиции в качестве бинарной операции моноида, и id_X в качестве единицы.
- Если X объект категории \mathbf{C} , то *группа автоморфизмов* X (обозначение: $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$) это множество изоморфизмов $f:X\to X$ с операциями, определенными аналогичным предыдущему пункту образом.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Категория **Set**

- ▶ Объекты категории Set множества.
- ightharpoonup $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ множество функций из X в Y.
- $ightharpoonup \mathrm{id}_X$ тождественная функция: $\mathrm{id}_X(x) = x$.
- $ightharpoonup g\circ f$ композиция функций: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.
- Изоморфизмы биекции.

Kaтегория FinSet

- ▶ Объекты категории FinSet конечные множества.
- ightharpoonup $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ множество функций из X в Y.
- ightharpoonup id_X тождественная функция: $\operatorname{id}_X(x) = x$.
- $ightharpoonup g\circ f$ композиция функций: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.
- Множества изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.

Категория **Grp**

- ▶ Объекты категории Grp группы.
- ightharpoonup Нот $_{\mathsf{Grp}}(G,H)$ множество гомоморфизмов групп G и H.
- $ightharpoonup \mathrm{id}_G$ тождественный гомоморфизм: $\mathrm{id}_G(x) = x$.
- $ightharpoonup g\circ f$ композиция гомоморфизмов: $(g\circ f)(x)=g(f(x)).$

Категория **Vec**

- Объекты категории Vec конечномерные векторные пространства.
- $lackbox{Hom}_{\mathbf{Vec}}(V,W)$ множество линейных операторов из V в W.
- ightharpoonup id_V тождественный линейный оператор.
- $ightharpoonup g\circ f$ композиция линейных операторов.

Категория **Hask**

- ▶ Объекты категории Hask типы хаскелла.
- $ightharpoonup \operatorname{Hom}_{\mathsf{Hask}}(A,B)$ множество функций хаскелла, имеющих тип A o B.
- ightharpoonup id_A тождественная функция: $\mathrm{id}_A = \lambda x \to x$.
- $ightharpoonup g\circ f$ композиция функций: $g\circ f=\lambda x\to g\ (f\ x)$.

Категория Л

- ▶ Объекты категории Л типы просто типизированного лямбда-исчисления с произведениями, юнит-типом и типами функций.
- $ightharpoonup {
 m Hom}_{\Lambda}(A,B)$ множество термов, имеющих тип A o B, с точностью до бета-эта эквивалентности.
- ightharpoonup $\operatorname{id}_A = \lambda x. x.$
- $ightharpoonup g \circ f$ композиция термов: $g \circ f = \lambda x.g \ (f \ x).$
- Можно определить расширение категории Λ, которая будет содержать все индуктивные типы данных. Для каждого индуктивного типа мы добавляем его конструкторы и рекурсор. Мы будем обозначать эту категорию Λ_{ID}.

Категория Mat

- ▶ Объекты категории Mat натуральные числа.
- lacktriangle $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Mat}}(n,k)$ множество матриц над $\mathbb R$ размера n imes k.
- ightharpoonup id_n единичная матрица размера $n \times n$.
- ▶ А ∘ В произведение матриц.
- Матрица является изоморфизмом тогда и только тогда, когда она обратима.

Категория Num

- ▶ Объекты категории Num натуральные числа.
- $lackbox{f Hom}_{f Num}(n,k)$ множество кортежей $(a_1,\dots a_n)$ таких, что $1\leq a_i\leq k$
- $ightharpoonup \mathrm{id}_n = (1, \ldots n).$
- $(b_1,\ldots b_k)\circ (a_1,\ldots a_n)=(b_{a_1},\ldots b_{a_n}).$

План лекции

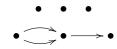
Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

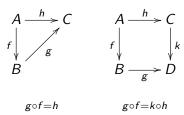
Графы

- ightharpoonup Граф состоит из коллекции вершин V и коллекции ребер E(X,Y) для любой пары вершин $X,Y\in V$.
- Любой категории можно сопоставить граф.
- Примеры:

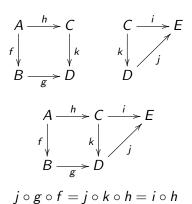


Диаграммы

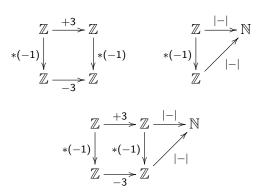
- ▶ Диаграмма граф, вершины которого помечены объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.
- Диаграмма является коммутативной, если для любой пары вершин в графе X и Y, композиция любого пути из X в Y дает один и тот же результат.
- Примеры:



Склейка диаграмм



Пример



Частные случаи категорий

- ightharpoonup Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X , называются дискретными.
- Категории с ровно одним объектом моноиды.
- ▶ Категории, в которых все множества Hom(X, Y) содержат максимум один элемент, предпорядки.
- Категории, в которых все морфизмы являются изоморфизмами, называются группоидами.
- ► Категории, в которых изоморфные объекты равны, называются *скелетными*.

Малые категории

- Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется малой.
 Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют большими.
- Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.
- Если мы будем формализовывать категории в теории типов, то объекты малых категории лежат в Type_0 , а объекты больших в Type_1 .
- Категории, объекты которых лежат в Type_2 , называются очень большими, и так далее.



Локально малые категории

- ightharpoonup Категория называется локально малой, если для любых объектов A и B класс $\operatorname{Hom}(A,B)$ является множеством.
- Подавляющее большинство категорий, возникающих на практике, являются локально малыми.
- ▶ Любая малая категория является локально малой, но, конечно, не наоборот.