

Теория категорий

Пределы и копределы

Валерий Исаев

24 февраля 2021 г.

Пределы

Копределы

Конусы диграмм

- ▶ Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, и D – диграмма формы J в категории \mathbf{C} .
- ▶ Конус диграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : A \rightarrow D(v)$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутует

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ a_{s(e)} \downarrow & \searrow a_{t(e)} & \\ D(s(e)) & \xrightarrow{D(e)} & D(t(e)) \end{array}$$

Определение пределов

- ▶ *Предел* диграммы D – это такой конус A , что для любого конуса B существует уникальный морфизм $f : B \rightarrow A$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутует

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow b_v & \swarrow a_v & \\ D(v) & & \end{array}$$

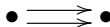
- ▶ Предел D обозначается $\lim D$.
- ▶ Категория называется *полной* (*конечно полной*), если в ней существуют все малые (конечные) пределы.

Примеры пределов

- ▶ Произведения – это пределы дискретных диаграмм.
- ▶ Бинарные произведения – это пределы диаграмм вида



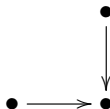
- ▶ Уравнители – это пределы диаграмм вида



- ▶ Терминальные объекты – это пределы пустой диаграммы.

Пулбэки

- ▶ Пулбэки – это пределы диаграмм вида



- ▶ Пулбэк можно изображать как коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_C B & \longrightarrow & B \\
 \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

- ▶ Пулбэк иногда называют декартовым квадратом.
- ▶ Стрелку $A \times_C B \rightarrow A$ называют пулбэком стрелки $B \rightarrow C$.

Декартово произведение через пулбэки

Proposition

Если 1 – терминальный объект, то пулбэк $A \times_1 B$ является декартовым произведением $A \times B$.

Доказательство.

Действительно, конус диаграммы $A \quad B$ – это тоже самое, что и конус диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow & \\ A & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Следовательно пределы этих диграмм также совпадают. \square

Пулбэки в **Set**

В **Set** пулбэк диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$. Действительно, если мы положим $A \times_C B = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\}$, то легко видеть, что $A \times_C B$ является пулбэком диаграммы выше.

Пулбэки через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют пулбэки.

Доказательство.

Пулбэки можно сконструировать так же, как и в **Set**. Пусть $e : D \rightarrow A \times B$ – уравнитель стрелок $f \circ \pi_1 : A \times B \rightarrow C$ и $g \circ \pi_2 : A \times B \rightarrow C$. Тогда легко видеть, что квадрат ниже является декартовым.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\pi_2 \circ e} & B \\
 \pi_1 \circ e \downarrow & & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Пределы через уравниатели и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравниатели, то в ней существуют все конечные пределы.

Доказательство.

Пусть D – диаграмма формы (V, E) . Тогда рассмотрим диаграмму, состоящую из пары стрелок

$$\langle \pi_{t(e)} \rangle_{e \in E}, \langle D(e) \circ \pi_{s(e)} \rangle_{e \in E} : \prod_{v \in V} D(v) \rightrightarrows \prod_{e \in E} D(t(e))$$

Конус этой диаграммы – это тоже самое, что конус диаграммы D . Следовательно предел этой диаграммы также является пределом D . □

Прообраз подобъекта

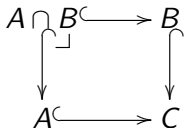
- ▶ Пусть $f : A \rightarrow C$ – функция в **Set** и $B \subseteq C$.
- ▶ Тогда мы можем определить прообраз f :
 $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subseteq A$.
- ▶ Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- ▶ Прообраз подобъекта $B \hookrightarrow C$ вдоль морфизма $f : A \rightarrow C$ – это пулбэк

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- ▶ Упражнение: докажите, что $f^{-1}(B) \rightarrow A$ является мономорфизмом.

Пересечение подобъектов

- ▶ Пусть A и B – подмножества C .
- ▶ Тогда мы можем определить их пересечение $A \cap B$, которое является подмножеством и A , и B .
- ▶ Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- ▶ *Пересечение* объектов $A \hookrightarrow C$ и $B \hookrightarrow C$ – это пулбэк



План лекции

Пределы

Копределы

Дуальная категория

Пусть \mathbf{C} – произвольная категория, тогда *дуальная* ей категория \mathbf{C}^{op} – это категория, определяемая следующим образом:

- ▶ Объекты \mathbf{C}^{op} совпадают с объектами \mathbf{C} .
- ▶ Если X, Y – объекты \mathbf{C}^{op} , то $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y)$ определяется как $Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$.
- ▶ Композиция и тождественные морфизмы определяются так же, как в \mathbf{C} .

Копределы

- ▶ Копределы – это дуальное понятие к понятию пределов.
- ▶ *Коконус* диаграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : D(v) \rightarrow A$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутрует

$$\begin{array}{ccc}
 D(s(e)) & \xrightarrow{D(e)} & D(t(e)) \\
 & \searrow a_{s(e)} & \downarrow a_{t(e)} \\
 & & A
 \end{array}$$

Определение копределов

- ▶ Копредел диаграммы D – это такой коконус A , что для любого коконуса B существует уникальный морфизм $f : A \rightarrow B$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{array}{ccc}
 D(v) & & \\
 a_v \downarrow & \searrow b_v & \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

- ▶ Копредел D обозначается $\text{colim } D$.
- ▶ Категория называется *кополной* (конечно кополной), если в ней существуют все малые (конечные) копределы.

Уникальность копределов

Дуализировать можно не только определения, но и утверждения.

Proposition

Если A и B – копределы диаграммы D , то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $f \circ a_v = b_v$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как копредел в \mathbf{C} – это предел в \mathbf{C}^{op} , то это утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для пределов. \square

Начальный объект

- ▶ Объект называется *начальным*, если он является копределом пустой диаграммы.
- ▶ В **Set** существует единственный начальный объект – пустое множество.
- ▶ В **Grp** начальный объект – тривиальная группа.

Фактор-множества

- ▶ Пусть \sim – отношение эквивалентности на множестве B .
- ▶ Тогда можно определить множество B/\sim классов эквивалентности элементов B по этому отношению.
- ▶ Существует каноническая функция $c : B \rightarrow B/\sim$, отправляющая каждый $b \in B$ в его класс эквивалентности.
- ▶ Если рассматривать отношение \sim как подмножество $B \times B$, то существуют проекции $f, g : \sim \rightarrow B$.
- ▶ Стрелка c уравнивает f и g и является универсальной с таким свойством.
- ▶ Другими словами, c является коуравнителем f и g .

Коуравнителі

- ▶ В произвольной категории коуравнители можно рассматривать как обобщение этой конструкции.
- ▶ Пусть B – абелева группа, A – подгруппа B , $f : A \hookrightarrow B$ – вложение A в B . Тогда коядро B/A – это коуравнитель стрелок $f, 0 : A \rightarrow B$.
- ▶ И наоборот, коуравнитель стрелок $f, g : A \rightarrow B$ – это коядро $B/\text{Im}(f - g)$.
- ▶ *Пушауты* – дуальное понятие к понятию пулбэков.