

Задания

17 марта 2021 г.

1. Пусть \mathbf{C} – категория предпорядка, а \mathbf{D} – нет.
 - (a) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть изоморфны?
 - (b) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть эквивалентны?
2. Пусть \mathbf{C} – категория с одним объектом, а \mathbf{D} – нет.
 - (a) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть изоморфны?
 - (b) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть эквивалентны?
3. Пусть \mathbf{C} – дискретная категория, а \mathbf{D} – нет.
 - (a) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть изоморфны?
 - (b) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть эквивалентны?
4. Пусть \mathbf{C} – группоид, а \mathbf{D} – нет.
 - (a) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть изоморфны?
 - (b) Могут ли \mathbf{C} и \mathbf{D} быть эквивалентны?
5. Докажите, что \mathbf{Num} эквивалентна \mathbf{FinSet} . Изоморфны ли эти категории?
6. Докажите, что \mathbf{Mat} эквивалентна \mathbf{Mat}^{op} . Изоморфны ли эти категории?
7. Докажите, что \mathbf{FinSet} не эквивалентна \mathbf{Set} .
8. Пусть $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \rightarrow G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в \mathbf{C} морфизм $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ является изоморфизмом. Докажите, что $\alpha : F \rightarrow G$ – естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α – изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.
9. Пусть \mathbf{C} – декартова категория. Докажите, что функтор $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

10. Пусть \Rightarrow – категория, состоящая из двух объектов $\{v, e\}$ и четырех морфизмов $\{id_v : v \rightarrow v, id_e : e \rightarrow e, d : v \rightarrow e, c : v \rightarrow e\}$. Докажите, что категории **Graph** (эта категория определяется в предыдущем ДЗ) и $\mathbf{Set}^{\Rightarrow^{op}}$ эквивалентны. Изоморфны ли эти категории?
11. Пусть \mathbf{D} – рефлексивная подкатегория \mathbf{C} .
- (a) Докажите, что рефлексор $\text{Ob}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{D})$ является функтором $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
 - (b) Докажите, что η является естественным преобразованием между $\text{Id}_{\mathbf{C}}$ и $i \circ R$, где $i : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – функтор вложения.
12. Пусть $F : \mathbf{CMon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ – рефлексор вложения $i : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{CMon}$.
- (a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X , такого что $|F(X)| = |X|$.
 - (b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X , такого что $|F(X)| < |X|$.
 - (c) Приведите пример коммутативного моноида X , такого что $\eta_X : X \rightarrow i(F(X))$ – не сюръективна.
 - (d) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X функция $\eta_X : X \rightarrow i(F(X))$ является сюръективной. В частности $|F(X)| \leq |X|$.