Валерий Исаев

24 марта 2021 г.

## План лекции

#### Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories

- тусть  $O: Mon \to Set$  заоывающий функтор на категории моноидов.
- ▶ Пусть  $F: \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$  функтор, сопоставляющий множеству A множество слов в алфавите A.

$$F(A) = \{ [a_1 \ldots a_n] \mid a_i \in A \}$$

- lacktriangle Тогда любая функция f:A o U(B) уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов g:F(A) o B.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому морфизму моноидов  $g:F(A)\to B$  сопоставляющее функцию  $f:A\to U(B),\ f(a)=g([a]).$
- ► Таким образом, существует биекция  $\varphi: Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Mon}}(F(A), B).$

## Векторные пространства и базисы

- ightharpoons Пусть  $\mathbf{Vec}_K$  категория векторных пространств над полем Κ.
- lacktriangle Пусть  $U: \mathbf{Vec}_K o \mathbf{Set}$  забывающий функтор.
- ightharpoons Пусть  $F: \mathbf{Set} o \mathbf{Vec}_K \mathbf{\phi}$ унктор, сопоставляющий множеству A векторное пространство с базисом A.

$$F(A) = \{ c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A \}$$

- lacktriangle Тогда любая функция f:A o U(B) уникальным образом доопределяется до линейного преобразования  $g: F(A) \to B$ .
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию g:F(A) o B сопоставляющее функцию  $f: A \to U(B)$ , f(a) = g(1a).
- Таким образом, существует биекция  $\varphi: \mathit{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, \mathit{U}(B)) \simeq \mathit{Hom}_{\mathsf{Vec}}(\mathit{F}(A), \mathit{B})$

# Кольца и полиномы

- lacktriangle Пусть  $U: \mathbf{Ring} 
  ightarrow \mathbf{Set}$  забывающий функтор на категории колец.
- ightharpoons Пусть  $F: \mathbf{Set} o \mathbf{Ring} \mathbf{ф}$ унктор, сопоставляющий множеству X кольцо полиномов с переменными в X.
- lacktriangle Тогда любая функция f:A o U(B) уникальным образом доопределяется до морфизма колец  $g: F(A) \to B$ .
- > У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию  $g:F(A)\to B$  сопоставляющее функцию  $f: A \to U(B), f(a) = g(1a^1).$
- Таким образом, существует биекция  $\varphi: Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Ring}}(F(A), B).$

# Сопряжение

#### Definition

Сопряжение между категориями **C** и **D** – это тройка  $(F, U, \varphi)$ , состоящая из функторов  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  и  $U: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$  и естественного изоморфизма  $\varphi_{A,B}: Hom_{\mathbb{D}}(F(A),B) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(A,U(B)).$ 

В определении  $\varphi$  является естественным изоморфизмом между функторами  $Hom_{\mathbf{D}}(F(-),-), Hom_{\mathbf{C}}(-,U(-)): \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}.$ 

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм  $\varphi_{A.B}$  был естественен по A и B. Таким образом, это были примеры сопряжений.

- ► Если  $(F, U, \varphi)$  сопряжение, то пишут  $F \dashv U$  и говорят, что F левый сопряженный к U, а U правый сопряженный к F.
- $\blacktriangleright$  Если  $F \dashv U$  и  $F' \dashv U$ , то F и F' изоморфны.
- Доказательство: упражнение.
- $\blacktriangleright$  Если  $F \dashv U$  и  $F \dashv U'$ , то U и U' изоморфны.
- Доказательство: по дуальности.

# Сохранение (ко)пределов

#### **Proposition**

Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.

#### Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть  $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  – левый сопряженный к  $G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ . Пусть  $D: J \to \mathbf{C}$  – некоторая диаграмма в  $\mathbf{C}$ . Пусть  $L=colim\ D$  – копредел этой диаграммы. Пусть  $\alpha: F\circ D \to X$  – некоторый коконус в  $\mathbf{D}$ . Тогда существует уникальная стрелка из L в G(X). По сопряженности она соответствует уникальной стрелки из F(L) в X. Таким образом, F(L) – копредел  $F\circ D$ .

## План лекции

Определение сопряженности

#### Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories

- ightharpoonup Пусть (F,G) сопряжение.
- lacktriangle Тогда  $\varphi_{A,F(A)}: Hom_{\mathbb{D}}(F(A),F(A)) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(A,GF(A)).$
- ▶ Пусть  $\eta_A: A \to GF(A)$  естественное преобразование, которое определяется как  $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(id_{F(A)})$ .
- ightharpoonup С другой стороны  $arphi_{G(B),B}: Hom_{\mathbf{D}}(FG(B),B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(G(B),G(B)).$
- ▶ Пусть  $\epsilon_B : FG(B) \to B$  естественное преобразование, которое определяется как  $\epsilon_B = \varphi_{G(B),B}^{-1}(id_{G(B)})$ .
- $ightharpoonup \eta_A$  называется *единицей* сопряжения, а  $\epsilon_B$  *коединицей*.

## Примеры

- $ightharpoonup \eta_A(a)$  возвращает "одноэлементное слово на букве a".
  - ightharpoonup Для категории моноидов  $\eta_A(a) = [a]$ .
  - ightharpoonup Для категории векторных пространств  $\eta_A(a)=1a$ .
  - lacktriangle Для категории колец  $\eta_A(a)=a$  полином, состоящий из одной переменной а.
- lacktriangle  $\epsilon_B$  : FU(B) o B "вычисляет" формальное выражение в B.
  - ightharpoonup Для категории моноидов  $\epsilon_B([a_1 \ldots a_n]) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ .
  - Для категории векторных пространств  $\epsilon_B(c_1a_1+\ldots+c_na_n)=c_1\cdot a_1+\ldots+c_n\cdot a_n.$
  - lacktriangle Для категории колец  $\epsilon_B$  определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

## Свойства единицы и коединицы

#### **Proposition**

Если  $(F, G, \varphi)$  – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:

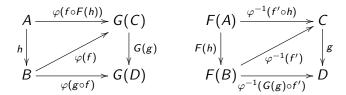
$$G(B) \xrightarrow{\eta_{GB}} GFG(B) \qquad F(A) \xrightarrow{F\eta_{A}} FGF(A)$$

$$\downarrow_{id_{GB}} \qquad \downarrow_{G\epsilon_{B}} \qquad \downarrow_{id_{FA}} \qquad \downarrow_{\epsilon_{FA}} \qquad \downarrow_{\epsilon_$$

## оказательство

#### Доказательство.

Условия естественности arphi и  $arphi^{-1}$  можно переписать в следующем виде:



Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при  $f=id_{FG(B)}$  и  $g=\epsilon_B$ . Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при  $f'=id_{GF(A)}$  и  $h=\eta_A$ .

# Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

#### Proposition

Четверка

 $(F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G: \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A: A \to GF(A), \epsilon: FG(B) \to B),$ состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение  $(F,G,\varphi)$ , где  $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$  для любого  $f: F(A) \to B$ ,  $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$  для любого  $g: A \to G(B)$ . Единицей и коединицей этого сопряжения являются  $\eta$  и  $\epsilon$  соответственно.

# Доказательство

#### Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения arphiи  $\varphi^{-1}$ . Докажем, что  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  взаимообратны:

$$arphi^{-1}(arphi(f))=$$
 (по определению  $arphi$  и  $arphi^{-1})$   $\epsilon_B\circ FG(f)\circ F(\eta_A)=$  (по естественности  $\epsilon$ )  $f\circ \epsilon_{F(A)}\circ F(\eta_A)=$  (по свойству  $\epsilon$  и  $\eta$ )  $f.$   $arphi(arphi^{-1}(g))=$  (по определению  $arphi$  и  $arphi^{-1})$   $G(\epsilon_B)\circ GF(g)\circ \eta_A=$  (по естественности  $\eta$ )  $G(\epsilon_B)\circ \eta_{G(B)}\circ g=$  (по свойству  $\epsilon$  и  $\eta$ )  $g.$ 

# Доказательство

#### Доказательство.

Осталось доказать, что arphi естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$G(g)\circ arphi(f)=$$
 (по определению  $arphi)$   $G(g)\circ G(f)\circ \eta_B=$  (так как  $G$  — функтор)  $G(g\circ f)\circ \eta_B=$  (по определению  $arphi)$   $arphi(g\circ f).$   $arphi(f)\circ h=$  (по определению  $arphi)$   $G(f)\circ \eta_B\circ h=$  (по естественности  $\eta$ )  $G(f)\circ GF(h)\circ \eta_A=$  (по определению  $arphi$ )  $arphi(f\circ F(h)).$ 

## План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

### Примеры

Over categories

# Эквивалентность категорий

- **Е**сли  $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  эквивалентность категорий, то F одновеременно и левый и правый сопряженный.
- ightharpoonup Любой обратный к F будет его правым и левым сопряженным.

# Рефлективные подкатегории

- **Р** Если  $i: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$  функтор вложения полной подкатегории, то i является правым сопряженным тогда и только тогда, когда  $\mathbf{C}$  рефлективная подкатегория.
- Левый сопряженный к і называется рефлектором.
- ightharpoonup Если  $F\dashv i$ , то  $\eta_X:X\to i(F(X))$  дает нам необходимую аппроксимацию к X в  ${f C}$ .
- ▶ Если  ${\bf C}$  рефлективная подкатегория, то  $F:{\bf D}\to{\bf C}$  на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

## Определение

- Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта B функтор  $- \times B$  является левым сопряженным.
- Действительно, правый сопряженный к нему это функтор  $(-)^B$ , а коединица сопряжения  $\epsilon_C:C^B imes B o C$ – это морфизм вычисления *ev*.
- Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, – это в точности биекция каррирования.

## План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

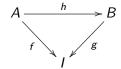
Over categories

## Семейства множеств

- ▶ Мы можем определить категорию множеств, параметризованных некоторым множеством 1.
- ► Ее объекты это семейства множеств, т.е. просто функции  $I o \mathbf{Set}$ .
- ▶ Морфизмы двух семейств  $\{X_i\}_{i\in I}$  и  $\{Y_i\}_{i\in I}$  это семейства морфизмов  $\{f_i: X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ .
- Тождественный морфизм и композиция задаются поточечно.
- Очевидно, мы получим категорию, которую мы будем обозначать Fam<sub>I</sub>.

# Множества над *I*

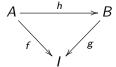
- Эта конструкция не обобщается на произвольную категорию очевидным образом.
- ▶ Но мы можем определить категорию Fam, эквивалентным образом как  $\mathbf{Set}/I$ .
- ▶ Объекты категории  $\mathbf{Set}/I$  это множества над I, т.е. пара (A, f), где A – множество, а  $f: A \rightarrow I$  – функция.
- lacktriangle Морфизмы между f:A o I и g:B o I это функции h:A o B такие, что следующий треугольник коммутирует:



 Тождественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в **Set**. 4D + 4B + 4B + B + 990

# Объекты над I

- Теперь мы можем обобщить эту конструкцию на произвольную категорию.
- **Р** Если I объект некоторой категории  $\mathbb{C}$ , то *категория объектов над I* (aka slice category) обозначается  $\mathbb{C}/I$  и определяется следующим образом.
- lackbox Объекты  ${f C}/I$  это пары (A,f), где A объект  ${f C}$ , а f:A o I морфизм в  ${f C}$ .
- lacktriangle Морфизмы между f:A o I и g:B o I это морфизмы h:A o B такие, что следующий треугольник коммутирует:



 Тождественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в С.

# Переиндексирование

- lacktriangle Если у нас есть семейство множеств  $\{A_i\}_{i\in I}$  и функция  $f: J \to I$ , то мы можем построить новое семейство  $\{A_{f(i)}\}_{i\in J}$
- Если переформулировать это в терминах множеств над I, то мы получим операцию, строящую множество над J по множеству над I и функции  $f: J \rightarrow I$ :



Что это за операция? Можно ли ее обобщить на произвольную категорию?

# Пулбэк-функтор

- Конечно, переиндексация соответствует просто пулбэку  $f^*(A)$ .
- **Р** Если в категории **C** существуют пулбэки, то для любого морфизма  $f: J \to I$  мы можем определить функтор  $f^*: \mathbf{C}/I \to \mathbf{C}/J$ , обобщий эту конструкцию.
- ightharpoonup Этот функтор по объекту над I возвращает его пулбэк вдоль f, а на морфизмах действует по универсальному свойству пулбэков.
- lackbox У функтора  $f^*: {f C}/I o {f C}/J$  всегда есть левый сопряженный  $\Sigma_f: {f C}/J o {f C}/I$ , который определяется как  $\Sigma_f(A) = f \circ A$ .