Теория категорий

Сопряженные функторы

Валерий Исаев

24 марта 2021 г.

План лекции

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Over categories

Моноиды и слова

- Пусть $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории моноидов.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ – функтор, сопоставляющий множеству A множество слов в алфавите A.

$$F(A) = \{\ [a_1 \ldots a_n] \mid a_i \in A\ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому морфизму моноидов $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g([a])$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Mon}}(F(A), B)$.

Векторные пространства и базисы

- Пусть $\mathbf{Vec}_K$ – категория векторных пространств над полем K.
- Пусть $U : \mathbf{Vec}_K \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_K$ – функтор, сопоставляющий множеству A векторное пространство с базисом A.

$$F(A) = \{\ c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A\ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до линейного преобразования $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Vec}}(F(A), B)$.

Кольца и полиномы

- Пусть $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории колец.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ring}$ – функтор, сопоставляющий множеству X кольцо полиномов с переменными в X.
- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма колец $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a^1)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Ring}}(F(A), B)$.

Сопряжение

Definition

Сопряжение между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – это тройка (F, U, φ), состоящая из функторов $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $U : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ и естественного изоморфизма $\varphi_{A,B} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, U(B))$.

В определении φ является естественным изоморфизмом между функторами $Hom_{\mathbf{D}}(F(-), -), Hom_{\mathbf{C}}(-, U(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$.

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм $\varphi_{A,B}$ был естественен по A и B. Таким образом, это были примеры сопряжений.

Уникальность сопряженных функторов

- Если (F, U, φ) – сопряжение, то пишут $F \dashv U$ и говорят, что F – *левый сопряженный* к U, а U – *правый сопряженный* к F.
- Если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то F и F' изоморфны.
- Доказательство: упражнение.
- Если $F \dashv U$ и $F \dashv U'$, то U и U' изоморфны.
- Доказательство: по дуальности.

Сохранение (ко)пределов

Proposition

Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.

Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – левый сопряженный к $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Пусть $D : J \to \mathbf{C}$ – некоторая диаграмма в $\mathbf{C}$. Пусть $L = colim\ D$ – копредел этой диаграммы.
Пусть $\alpha : F \circ D \to X$ – некоторый коконус в $\mathbf{D}$. Тогда существует уникальная стрелка из L в $G(X)$. По сопряженности она соответствует уникальной стрелки из $F(L)$ в X. Таким образом, $F(L)$ – копредел $F \circ D$. $\square$

План лекции

Определение

- Пусть (F, G) – сопряжение.
- Тогда $\varphi_{A,F(A)} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(A)) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, GF(A))$.
- Пусть $\eta_A : A \to GF(A)$ – естественное преобразование, которое определяется как $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(id_{F(A)})$.
- С другой стороны $\varphi_{G(B),B} : Hom_{\mathbf{D}}(FG(B), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(G(B), G(B))$.
- Пусть $\epsilon_B : FG(B) \to B$ – естественное преобразование, которое определяется как $\epsilon_B = \varphi^{-1}_{G(B),B}(id_{G(B)})$.
- η_A называется *единицей* сопряжения, а ϵ_B – *коединицей*.

Примеры

- $\eta_A(a)$ возвращает "одноэлементное слово на букве a".
  - Для категории моноидов $\eta_A(a) = [a]$.
  - Для категории векторных пространств $\eta_A(a) = 1a$.
  - Для категории колец $\eta_A(a) = a$ – полином, состоящий из одной переменной a.
- $\epsilon_B : FU(B) \to B$ "вычисляет" формальное выражение в B.
  - Для категории моноидов $\epsilon_B([a_1 \dots a_n]) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.
  - Для категории векторных пространств $\epsilon_B(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) = c_1 \cdot a_1 + \dots + c_n \cdot a_n$.
  - Для категории колец ϵ_B определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

Свойства единицы и коединицы

Proposition

Если (F, G, φ) – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "id_{GB}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G\epsilon_B"] \\ & G(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "id_{FA}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

Доказательство

Доказательство.

Условия естественности φ и φ^{-1} можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi(f\circ F(h))"] \arrow[d, "h"'] & G(C) \arrow[d, "G(g)"] \\
B \arrow[ur, "\varphi(f)"'] \arrow[r, "\varphi(g\circ f)"'] & G(D)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi^{-1}(f'\circ h)"] \arrow[d, "F(h)"'] & C \arrow[d, "g"] \\
F(B) \arrow[ur, "\varphi^{-1}(f')"'] \arrow[r, "\varphi^{-1}(G(g)\circ f')"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при $f = id_{FG(B)}$ и $g = \epsilon_B$. Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при $f' = id_{GF(A)}$ и $h = \eta_A$. $\square$

Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

Proposition

Четверка
$(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A : A \to GF(A), \epsilon : FG(B) \to B)$, *состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение* (F, G, φ), *где* $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$ *для любого* $f : F(A) \to B$, $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$ *для любого* $g : A \to G(B)$. *Единицей и коединицей этого сопряжения являются* η *и* ϵ *соответственно.*

Доказательство

Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения φ и φ^{-1}. Докажем, что φ и φ^{-1} взаимообратны:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varphi(f)) &= \text{(по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\
\epsilon_B \circ FG(f) \circ F(\eta_A) &= \text{(по естественности } \epsilon) \\
f \circ \epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) &= \text{(по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\
& f. \\
\varphi(\varphi^{-1}(g)) &= \text{(по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\
G(\epsilon_B) \circ GF(g) \circ \eta_A &= \text{(по естественности } \eta) \\
G(\epsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ g &= \text{(по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\
& g.
\end{aligned}$$

Доказательство

Доказательство.

Осталось доказать, что φ естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$
\begin{aligned}
G(g) \circ \varphi(f) = &\ (\text{по определению } \varphi)\\
G(g) \circ G(f) \circ \eta_B = &\ (\text{так как } G \text{ – функтор})\\
G(g \circ f) \circ \eta_B = &\ (\text{по определению } \varphi)\\
\varphi(g \circ f).&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(f) \circ h = &\ (\text{по определению } \varphi)\\
G(f) \circ \eta_B \circ h = &\ (\text{по естественности } \eta)\\
G(f) \circ GF(h) \circ \eta_A = &\ (\text{по определению } \varphi)\\
\varphi(f \circ F(h)).&
\end{aligned}
$$

План лекции

Эквивалентность категорий

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий, то F одновеременно и левый и правый сопряженный.
- Любой обратный к F будет его правым и левым сопряженным.

Рефлективные подкатегории

- Если $i : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – функтор вложения полной подкатегории, то i является правым сопряженным тогда и только тогда, когда $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория.
- Левый сопряженный к i называется рефлектором.
- Если $F \dashv i$, то $\eta_X : X \to i(F(X))$ дает нам необходимую аппроксимацию к X в $\mathbf{C}$.
- Если $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория, то $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

Определение

- Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта B функтор $- \times B$ является левым сопряженным.
- Действительно, правый сопряженный к нему – это функтор $(-)^B$, а коединица сопряжения $\epsilon_C : C^B \times B \to C$ – это морфизм вычисления ev.
- Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, – это в точности биекция каррирования.

План лекции

Семейства множеств

- Мы можем определить категорию множеств, параметризованных некоторым множеством I.
- Ее объекты – это семейства множеств, т.е. просто функции $I \to \mathbf{Set}$.
- Морфизмы двух семейств $\{X_i\}_{i \in I}$ и $\{Y_i\}_{i \in I}$ – это семейства морфизмов $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i \in I}$.
- Тождественный морфизм и композиция задаются поточечно.
- Очевидно, мы получим категорию, которую мы будем обозначать $\mathbf{Fam}_I$.

Множества над I

- Эта конструкция не обобщается на произвольную категорию очевидным образом.
- Но мы можем определить категорию $\mathbf{Fam}_I$ эквивалентным образом как $\mathbf{Set}/I$.
- Объекты категории $\mathbf{Set}/I$ – это множества над I, т.е. пара (A, f), где A – множество, а $f : A \to I$ – функция.
- Морфизмы между $f : A \to I$ и $g : B \to I$ – это функции $h : A \to B$ такие, что следующий треугольник коммутирует:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

- Тождественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в $\mathbf{Set}$.

Объекты над I

- Теперь мы можем обобщить эту конструкцию на произвольную категорию.
- Если I – объект некоторой категории $\mathbf{C}$, то *категория объектов над I* (aka slice category) обозначается $\mathbf{C}/I$ и определяется следующим образом.
- Объекты $\mathbf{C}/I$ – это пары (A, f), где A – объект $\mathbf{C}$, а $f : A \to I$ – морфизм в $\mathbf{C}$.
- Морфизмы между $f : A \to I$ и $g : B \to I$ – это морфизмы $h : A \to B$ такие, что следующий треугольник коммутирует:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

- Тождественный морфизм и композиция определены как соответствующие операции в $\mathbf{C}$.

Переиндексирование

- Если у нас есть семейство множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ и функция $f : J \to I$, то мы можем построить новое семейство $\{A_{f(j)}\}_{j \in J}$
- Если переформулировать это в терминах множеств над I, то мы получим операцию, строящую множество над J по множеству над I и функции $f : J \to I$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ J \arrow[r, "f"'] & I \end{tikzcd}$$

- Что это за операция? Можно ли ее обобщить на произвольную категорию?

Пулбэк-функтор

- Конечно, переиндексация соответствует просто пулбэку $f^*(A)$.
- Если в категории $\mathbf{C}$ существуют пулбэки, то для любого морфизма $f : J \to I$ мы можем определить функтор $f^* : \mathbf{C}/I \to \mathbf{C}/J$, обобщий эту конструкцию.
- Этот функтор по объекту над I возвращает его пулбэк вдоль f, а на морфизмах действует по универсальному свойству пулбэков.
- У функтора $f^* : \mathbf{C}/I \to \mathbf{C}/J$ всегда есть левый сопряженный $\Sigma_f : \mathbf{C}/J \to \mathbf{C}/I$, который определяется как $\Sigma_f(A) = f \circ A$.