

Теория категорий

Конструкции в категориях

Валерий Исаев

17 февраля 2021 г.

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Уравнители

Мономорфизмы

- ▶ В категории **Set** морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен и сюръективен.
- ▶ Верно ли это в произвольной категории?
- ▶ Чтобы данный вопрос имел смысл, нам понадобится обобщение понятия инъективных и сюръективных функций.
- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *мономорфизмом*, если для любых стрелок $g, h : Z \rightarrow X$ равенство $f \circ g = f \circ h$ влечет $g = h$.

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xRightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y \implies g = h$$

- ▶ Мономорфизмы в **Set** – это в точности инъективные функции.

Мономорфизмы в алгебраических категориях

Proposition

В любой алгебраической категории (**Grp**, **Ab**, **Ring**, ...) мономорфизмы – это в точности инъективные функции.

Доказательство.

Докажем для **Grp**, для остальных можно доказать аналогично.

Пусть $f : A \rightarrow B$ – инъективный гомоморфизм групп, и $g, h : C \rightarrow A$ – такие, что $f \circ g = f \circ h$. Так как f – мономорфизм множеств, то g и h равны как функции над множествами. Но отсюда следует, что они равны как гомоморфизмы групп.

Наоборот, если f – мономорфизм, то пусть $a_1, a_2 \in A$ такие, что $f(a_1) = f(a_2)$. Тогда рассмотри пару гомоморфизмов $g_1, g_2 : \mathbb{Z} \rightarrow A$ таких, что $g_i(1) = a_i$. Так как $f \circ g_1 = f \circ g_2$, то $g_1 = g_2$. Следовательно $a_1 = g_1(1) = g_2(1) = a_2$.

Эпиморфизмы

- ▶ Морфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *эпиморфизмом*, если

$$X \xrightarrow{f} Y \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{matrix} Z \implies g = h$$

- ▶ Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.
- ▶ Эпиморфизмы в категориях моноидов и колец не обязательно сюръективны.
- ▶ Примеры: $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

Эпиморфизмы в **Set**

Proposition

*Эпиморфизмы в **Set** – это в точности сюръективные функции.*

Доказательство.

Пусть $f : A \rightarrow B$ – сюръекция, и $g, h : B \rightarrow C$ – такие, что $g \circ f = h \circ f$. Тогда для любого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Следовательно $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$. Наоборот, если $f : A \rightarrow B$ – эпиморфизм, то пусть $g, h : B \rightarrow \{0, 1\}$ – такие, что g всегда равно 1, а $h(b)$ равно 1 в точности когда существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Тогда $g \circ f = h \circ f$. Следовательно $g = h$. Следовательно для любого $b \in B$ верно, что $h(b) = g(b) = 1$, то есть существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$, то есть f – сюръекция. □

Расщепленные моно- и эпиморфизмы

- ▶ Морфизм $f : A \rightarrow B$ называется *расщепленным мономорфизмом*, если существует $g : B \rightarrow A$ такой, что $g \circ f = id_A$.
- ▶ Морфизм $g : B \rightarrow A$ называется *расщепленным эпиморфизмом*, если существует $f : A \rightarrow B$ такой, что $g \circ f = id_A$.
- ▶ Любой расщепленный мономорфизм является мономорфизмом. Действительно, если $f \circ h_1 = f \circ h_2$, то $h_1 = g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2 = h_2$.
- ▶ Любой расщепленный эпиморфизм является эпиморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

Сбалансированные категории

- ▶ Категория называется сбалансированной, если любой мономорфный и эпиморфный морфизм является изоморфизмом.
- ▶ Примеры сбалансированных категорий: **Set**, **Grp**, **Ab**.
- ▶ Примеры несбалансированных категорий: категории моноидов и колец.
- ▶ Любой эпиморфный расщепленный мономорфизм является изоморфизмом. Действительно, если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$, то $f \circ g \circ f = id_B \circ f$. Следовательно $f \circ g = id_B$.
- ▶ Любой мономорфный расщепленный эпиморфизм является изоморфизмом. Доказательство аналогично предыдущему.

План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Уравнители

Терминальные объекты

- ▶ В категориях **Set** и **Hask** существует много похожих объектов: \mathbb{Z} и *Integer*, $\{*\}$ и $()$, $A \times B$ и (a, b) .
- ▶ Существует ли обобщение этих конструкций в произвольных катгеориях?
- ▶ Объект A некоторой категории **C** называется *терминальным*, если для любого объекта B существует уникальная стрелка $B \rightarrow A$.
- ▶ Другими словами, A является терминальным, если для любого B множество $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ одноэлементно.

Примеры терминальных объектов

- ▶ В **Set** множество терминально тогда и только тогда, когда оно одноэлементно.
- ▶ В **Grp** группа терминальна тогда и только тогда, когда она одноэлементна.
- ▶ В **Hask** есть следующие терминальные объекты: $()$,
data Unit = Unit.
- ▶ Утверждение строчкой выше не является верным :(
▶ В группоиде существует терминальный объект только если он тривиален.

Уникальность терминальных объектов

Proposition

Любые два терминальных объекта изоморфны.

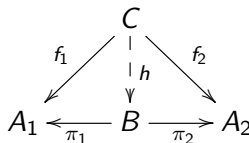
Доказательство.

Если A и B – терминальные объекты, то существует пара стрелок $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$. При этом по уникальности верно, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. □

Терминальный объект обычно обозначают 1 . Уникальный морфизм из X в 1 обычно обозначают $!_X : X \rightarrow 1$.

Декартово произведение

- ▶ Множество B вместе с парой функций $\pi_i : B \rightarrow A_i$ является декартовым произведением множеств A_1 и A_2 , если для любых $a_i \in A_i$ существует уникальный $b \in B$ такой, что $\pi_i(b) = a_i$.
- ▶ Объект B вместе с парой отображений $\pi_i : B \rightarrow A_i$ называется декартовым произведением A_1 и A_2 , если для любых $f_i : C \rightarrow A_i$ существует уникальная стрелка $h : C \rightarrow B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.



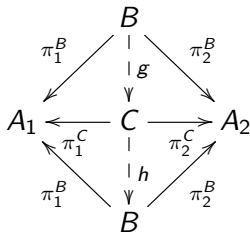
Уникальность декартова произведения

Proposition

Если (B, π_i^B) и (C, π_i^C) – произведения объектов A_1 и A_2 , то B и C изоморфны.

Доказательство.

По определению декартова произведения существуют стрелки $g : B \rightarrow C$ и $h : C \rightarrow B$ как на диаграмме ниже. По уникальности $h \circ g = id_B$ и, аналогично, $g \circ h = id_C$.



Произведение множества объектов

- ▶ Если $\{A_i\}_{i \in I}$ – коллекция объектов некоторой категории, то объект B вместе с морфизмами $\pi_i : B \rightarrow A_i$ называется декартовым произведением объектов A_i , если для любой коллекции морфизмов $\{f_i : C \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ существует уникальная стрелка $h : C \rightarrow B$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$.
- ▶ Декартово произведение объектов $\{A_i\}_{i \in I}$ уникально с точностью до изоморфизма.
- ▶ Оно обозначается $\prod_{i \in I} A_i$. Если $I = \{1, \dots, n\}$, то оно обозначается $A_1 \times \dots \times A_n$. Уникальный морфизм $C \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ обозначается $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$.

Декартовы категория

Категория, в которой существует терминальный объект и бинарные произведения, называется *декартовой*.

Proposition

Категория декартова тогда и только тогда, когда в ней существуют все конечные произведения.

Доказательство.

Терминальный объект – произведение пустого множества объектов, бинарные произведения – произведение двух объектов. И наоборот, произведение A_i можно сконструировать как

$$A_1 \times (A_2 \times \dots (A_{n-1} \times A_n) \dots)$$

Это можно доказать по индукции.



План лекции

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Произведения

Уравнители

Уравнители в Set

- ▶ Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- ▶ Например, множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_{\geq 0}$ является подмножеством \mathbb{R} таких x , что $|x| = x$.
- ▶ Другой пример: множество корней полинома p является подмножеством \mathbb{R} таких x , что $p(x) = 0$.
- ▶ В общем случае, если $f, g : A \rightarrow B$ – пара функций, то *уравнитель* этих функций – это подмножество A таких x , что $f(x) = g(x)$.

Уравнители в произвольной категории

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \rightarrow B$ – это мономорфизм $e : E \rightarrow A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \rightarrow A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует стрелка $k : F \rightarrow E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{array}{ccccc}
 F & & & & \\
 \downarrow & \searrow h & & & \\
 \exists k \downarrow & & & & \\
 E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[f]{f} & B
 \end{array}$$

Мономорфизм называется *регулярным*, если он является уравнителем некоторой пары стрелок.

Другое определение уравнителей

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \rightarrow B$ – это морфизм $e : E \rightarrow A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \rightarrow A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует уникальная стрелка $k : F \rightarrow E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ \downarrow \exists! k & \searrow h & & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B \end{array}$$

Упражнение: докажите, что эти определения эквивалентны.

Уравнители в категории **Ab**

- ▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- ▶ Если $f : A \rightarrow B$ – морфизм абелевых групп, то ядро f – это уравнитель пары стрелок $f, 0 : A \rightarrow B$.
- ▶ И наоборот, если $f, g : A \rightarrow B$ – пара морфизмов, то их уравнитель – это ядро морфизма $f - g : A \rightarrow B$.
- ▶ Таким образом, в категории **Ab** существуют все уравнители.