

## Задания

7 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.
2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если  $a, b$  – объекты  $\mathbf{C}$  такие, что  $b^a$  существует, то  $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$  тоже существует и определяется как  $\mathbf{y}(b^a)$ .
3. Докажите, что коллекция объектов вида  $\mathbf{y}a$  является генератором для категории предпучков.
4. Определите категорию  $\mathbf{C}$ , такую что  $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  эквивалентна категории рефлексивных графов.
5. Докажите, что функтор  $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{D}$  является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.
6. Докажите, что функтор  $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  является свободным копополнением  $\mathbf{C}$ , то есть, что для любой кополной категории  $\mathbf{D}$  и любого функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор  $\tilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{D}$ , сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутрует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \mathbf{y} \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} & & \end{array}$$