

Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

28 апреля 2021 г.

План лекции

Интерпретация

Подстановка

Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и \forall

Подстановка

- ▶ Пусть U и V – \mathcal{S} -индексированные множества переменных. Тогда подстановка из U в V (обозначается $\rho : U \rightarrow V$) – это просто V -индексированное множество термов $\{\rho(x) \in \text{Term}(V)_s\}_{(x:s) \in U}$.
- ▶ Подстановка $(x := a)$ – это просто ρ такая, что $\rho(x) = a$ и $\rho(y) = y$ для любого $y \neq x$.
- ▶ Если $\rho : U \rightarrow V$ и $t \in \text{Term}(V)_s$, то $t[\rho]$ – это терм в $\text{Term}(U)_s$, который определяется рекурсивно:
 - ▶ Если $t = x$, то $t[\rho] = \rho(x)$.
 - ▶ Если $t = f(t_1, \dots, t_k)$, то $t[\rho] = f(t_1[\rho], \dots, t_k[\rho])$.
- ▶ Подстановка $\varphi[\rho]$ в формулы определяется рекурсией по построению φ .

Интерпретация подстановки в термах

Если $\rho : U \rightarrow V$, то мы определяем $\llbracket \rho \rrbracket : \llbracket U \rrbracket \rightarrow \llbracket V \rrbracket$ как $\langle \rho(x) \rangle_{x \in V}$.

Lemma

Если $t \in \text{Term}(V)_s$ и $\rho : U \rightarrow V$, то $\llbracket t[\rho] \rrbracket = \llbracket \rho \rrbracket \circ \llbracket t \rrbracket$.

Доказательство.

Индукцией по построению t .



Интерпретация подстановки в формулах

Lemma

Если $\varphi \in \text{Form}_\Sigma(V)$ и $\rho : U \rightarrow V$, то существует (уникальный) морфизм $d_{\varphi[\rho]} \rightarrow d_\varphi$ такой, что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{array}{ccc}
 d_{\varphi[\rho]} & \longrightarrow & d_\varphi \\
 \downarrow \llbracket \varphi[\rho] \rrbracket & & \downarrow \llbracket \varphi \rrbracket \\
 \llbracket U \rrbracket & \xrightarrow{\llbracket \rho \rrbracket} & \llbracket V \rrbracket
 \end{array}$$

- ▶ Доказывается индукцией по построению φ .
- ▶ Сейчас мы проверим это утверждение только для атомарных формул, так как мы вводили только их пока.
- ▶ Для других связок проверим позже.

Интерпретация подстановки

Если $\varphi = R(t_1, \dots, t_k)$, то мы получаем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 d_{\varphi[\rho]} & \xrightarrow{\quad} & d_{\varphi} & \xrightarrow{\quad} & d_R \\
 \downarrow \llbracket \varphi[\rho] \rrbracket & & \downarrow \llbracket \varphi \rrbracket & & \downarrow \llbracket R \rrbracket \\
 \llbracket U \rrbracket & \xrightarrow{\llbracket \rho \rrbracket} & \llbracket V \rrbracket & \xrightarrow{\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_k \rrbracket \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_k \rrbracket
 \end{array}$$

Правый квадрат – это определение интерпретации $R(t_1, \dots, t_k)$. Композиция нижних стрелок – это $\langle \llbracket t_1[\rho] \rrbracket, \dots, \llbracket t_k[\rho] \rrbracket \rangle$. По определению интерпретации $R(t_1[\rho], \dots, t_k[\rho])$ у нас есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \rightarrow d_R$ такая, что внешний прямоугольник является пулбэком. По свойствам пулбэков у нас есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \rightarrow d_{\varphi}$ такая, что левый квадрат является пулбэком.

Интерпретация подстановки

Если $\varphi = (t_1 = t_2)$, то в следующей диаграмме $\llbracket \varphi \rrbracket$ по определению является уравнителем $\llbracket t_1 \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket : \llbracket V \rrbracket \rightarrow \llbracket S \rrbracket$, а $\llbracket \varphi[\rho] \rrbracket$ является уравнителем $\llbracket t_1 \rrbracket \circ \llbracket \rho \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket \circ \llbracket \rho \rrbracket : \llbracket U \rrbracket \rightarrow \llbracket S \rrbracket$.

$$\begin{array}{ccccc}
 d_{\varphi[\rho]} & \longrightarrow & d_{\varphi} & & \\
 \downarrow \llbracket \varphi[\rho] \rrbracket & & \downarrow \llbracket \varphi \rrbracket & & \\
 \llbracket U \rrbracket & \xrightarrow{\llbracket \rho \rrbracket} & \llbracket V \rrbracket & \xRightarrow[\llbracket t_2 \rrbracket]{\llbracket t_1 \rrbracket} & \llbracket S \rrbracket
 \end{array}$$

По универсальному свойству уравнителей у нас есть стрелка $d_{\varphi[\rho]} \rightarrow d_{\varphi}$ и квадрат является пулбэком.

Правила вывода

Во всех наших логиках будут следующие правила вывода:

$$\frac{}{\varphi \vdash^V \psi \wedge \varphi} \qquad \frac{\varphi \vdash^V \psi \quad \psi \vdash^V \chi}{\varphi \vdash^V \chi}$$

$$\frac{\varphi \vdash^U \psi}{\varphi[\rho] \vdash^V \chi[\rho]}$$

С добавлением логических связок будут добавляться и правила вывода.

Корректность интерпретации

- ▶ Разумеется мы хотим, чтобы интерпретация уважала правила вывода.
- ▶ Первые два правила очевидны: $\llbracket \varphi \rrbracket$ является подобъектом самого себя и, если $\llbracket \varphi \rrbracket$ является подобъектом $\llbracket \psi \rrbracket$ и $\llbracket \psi \rrbracket$ является подобъектом $\llbracket \chi \rrbracket$, то $\llbracket \varphi \rrbracket$ является подобъектом $\llbracket \chi \rrbracket$.
- ▶ Третье правило следует из леммы об интерпретации подстановки.

Корректность \top

- ▶ Правило вывода для \top :

$$\varphi \vdash \top$$

- ▶ Чтобы доказать, что эта аксиома всегда корректна, нужно проверить, что для любой подобъект $d_\varphi \hookrightarrow V$ является подобъектом $\llbracket \top \rrbracket = id_V : V \hookrightarrow V$, что очевидно.

Корректность \wedge

- Правила вывода для \wedge :

$$\frac{\varphi \vdash \psi \quad \varphi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}$$

$$\frac{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}{\varphi \vdash \psi} \quad \frac{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}{\varphi \vdash \chi}$$

- Эти правила уважаются, так как по определению пулбэков стрелка $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \psi \rrbracket \cap \llbracket \chi \rrbracket$ существует тогда и только тогда, когда существуют стрелки $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \psi \rrbracket$ и $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \chi \rrbracket$.

План лекции

Интерпретация

Подстановка

Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и \forall

Интерпретация \exists

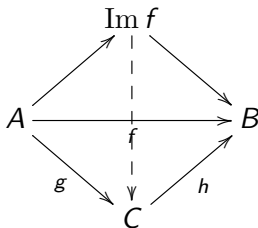
- ▶ Теории, в которых формулы состоят только из равенств, конъюнкций, \top и \exists называются *регулярными*.
- ▶ Мы не можем проинтерпретировать \exists в произвольной конечно полной категории.
- ▶ Категории, где можно это сделать, называются *регулярными*.
- ▶ Формальное определение будет дано ниже.

Интерпретация \exists в **Set**

- ▶ Пусть $\llbracket \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rrbracket : d_\varphi \hookrightarrow \llbracket s \rrbracket \times \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.
- ▶ Как проинтерпретировать $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$?
- ▶ Если рассмотреть $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket : d_\varphi \rightarrow \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$, то это почти дает нам интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$, так как прообраз некоторого элемента (a_1, \dots, a_n) населен тогда и только тогда, когда существует $a \in \llbracket s \rrbracket$, такой что $(a, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \varphi \rrbracket$.
- ▶ Единственная проблема заключается в том, что $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$ не является мономорфизмом.
- ▶ Мы можем решить эту проблему, определив интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$ как образ $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$.

Образ морфизма

- ▶ Мы можем обобщить понятие образа функции на произвольную категорию.
- ▶ Образ морфизма $f : A \rightarrow B$ – это наименьший мономорфизм $\text{Im } f \hookrightarrow B$, через который f факторизуется.
- ▶ Другими словами, существует стрелка $A \rightarrow \text{Im } f$, такая что для любых стрелок $g : A \rightarrow C$ и $h : C \hookrightarrow B$ если $h \circ g = f$, то $\text{Im } f$ является подобъектом C :



Интерпретация существования

- ▶ В произвольной категории образ может не существовать, но он уникален, если существует.
- ▶ Если предположить, что в категории существуют образы, то можно попробовать проинтерпретировать существование так же как и в **Set**.
- ▶ Если $\llbracket \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rrbracket : d_\varphi \hookrightarrow \llbracket s \rrbracket \times \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$, то мы определяем $\llbracket \exists(x : s)\varphi \rrbracket$ как образ $\pi_{1,\dots,n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$.

Интерпретация подстановки

- ▶ Так как правила вывода для существования используют подстановку, нам нужно знать как она интерпретируется, чтобы проверить эти правила.
- ▶ Утверждено: если φ – формула со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \dots, x_n : s_n\}$ и t_1, \dots, t_n – термы сортов s_1, \dots, s_n , то $\llbracket \varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \rrbracket$ является пулбэком d_φ :

$$\begin{array}{ccc}
 d_{\varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]} & \xrightarrow{\quad} & d_\varphi \\
 \downarrow \llbracket \varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \rrbracket & & \downarrow \llbracket \varphi \rrbracket \\
 V & \xrightarrow{\langle t_1, \dots, t_n \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket
 \end{array}$$

Интерпретация подстановки

- ▶ Доказывать это утверждение мы будем индукцией по φ .
- ▶ Для \top это очевидно, так как пулбэк тождественного морфизма – тождественный морфизм.
- ▶ Проверим для равенства. Пусть $\llbracket t \rrbracket, \llbracket t' \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s' \rrbracket$ и $\llbracket t_i \rrbracket : V \rightarrow \llbracket s_i \rrbracket$. Тогда нужно показать, что морфизм $E \rightarrow V$ в диаграмме ниже является уравниателем $\llbracket t \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$ и $\llbracket t' \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$, что легко сделать, используя универсальное свойство пулбэков.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\quad} & d_{t=t'} \\
 \downarrow \lrcorner & & \downarrow \llbracket t=t' \rrbracket \\
 V & \xrightarrow{\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \xrightarrow[\llbracket t' \rrbracket]{\llbracket t \rrbracket} \llbracket s' \rrbracket
 \end{array}$$

Интерпретация подстановки в \exists

- ▶ Даже если в категории существуют образы всех морфизмов, они могут не коммутировать с пулбэками.
- ▶ Категория называется *регулярной*, если у всех морфизмов существуют образы, и они стабильны относительно пулбэков.
- ▶ Таким образом, в любой регулярной категории подстановка действительно интерпретируется как пулбэк.

Корректность интерпретации \exists

- Правила вывода для \exists :

$$\frac{\exists(x : s)\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\exists(x : s)\varphi \vdash \psi}$$

- Обратите внимание, что ψ определен в контексте x_1, \dots, x_n , но используется также и в контексте x_1, \dots, x_n, x . По лемме об интерпретации подстановки ψ во втором контексте интерпретируется как пулбэк.
- Используя этот факт, легко показать, что данные правила корректны.

План лекции

Интерпретация

Подстановка

Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и \forall

Определение

- ▶ Категория называется *когерентной*, если она регулярна, для любого объекта A в порядке подобъектов $\text{Sub}(A)$ существуют все конечные копроизведения, и для любого морфизма $f : A \rightarrow B$ функтор $f^* : \text{Sub}(B) \rightarrow \text{Sub}(A)$ сохраняет их.
- ▶ Эта дополнительная структура – это в точности то, что необходимо для интерпретации ложного утверждения и дизъюнкций.

Дистрибутивность пересечений

Proposition

В когерентной категории пересечения дистрибутивно над объединением подобъектов: $A \cap (B \cup C) \simeq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и $A \cap 0 = 0$.

Доказательство.

Функтор $A \cap - : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X)$ можно определить как композицию

$$\text{Sub}(X) \xrightarrow{f^*} \text{Sub}(A) \xrightarrow{\exists_f} \text{Sub}(X)$$

где $f : A \rightarrow X$ и \exists_f — левый сопряженный к f^* . Функтор f^* сохраняет копроизведения по предположению когерентности, а \exists_f сохраняет копределы как левый сопряженный. □

Начальный объект

Proposition

В когерентной категории существует строгий начальный объект.

Доказательство.

Определим 0 как наименьший подобъект 1 . Заметим, что $\pi_1 : X \times 0 \hookrightarrow X$ является наименьшим подобъектом X . Если у нас есть стрелка $X \rightarrow 0$, то π_1 является изоморфизмом.

Другими словами, он является и наибольшим подобъектом X . Следовательно, у любого такого X ровно один подобъект – он сам. □

Начальный объект

Доказательство.

Докажем, что если есть морфизм $A \rightarrow 0$, то A является подобъектом 1. Действительно, если у нас есть пара стрелок $f, g : B \rightarrow A$, то так как у нас есть стрелка $B \rightarrow 0$, то уравниватель f и g является изоморфизмом, то есть f и g равны. Следовательно $X \times 0$ изоморфен 0 , то есть 0 – строгий. Докажем, что 0 – начальный. Так как у нас есть стрелка из $X \times 0$ в 0 , то $X \times 0 \simeq 0$, а значит у нас есть стрелка из 0 в X . Если у нас есть стрелки $f, g : 0 \rightarrow X$, то их уравниватель является подобъектом 0 , а значит изоморфизмом, то есть f и g равны. □

План лекции

Интерпретация

Подстановка

Корректность интерпретации

Регулярные теории

Когерентные теории

Импликация и \forall

Квантор всеобщности

- Правила вывода для \forall дуальны правилам для \exists :

$$\frac{\varphi \vdash \forall(x:s)\psi}{\varphi \vdash \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \forall(x:s)\psi}$$

- То есть у нас есть биекция между стрелками $\pi_1^*([\varphi]) \rightarrow [\psi]$ в $\text{Sub}(X \times [s])$ и $[\varphi] \rightarrow [\forall(x:s)\psi]$ в $\text{Sub}(X)$, где $\pi_1 : X \times [s] \rightarrow X$.
- Таким образом, $[\forall(x:s)\psi]$ можно определить как $\forall_{\pi_1}([\psi])$, где $\forall_{\pi_1} : \text{Sub}(X \times [s]) \rightarrow \text{Sub}(X)$ – правый сопряженный к $\pi_1^* : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X \times [s])$.

Гейтинговые категории

- ▶ Категория называется *гейтинговой*, если она регулярна, у любого объекта существует минимальный подобъект и объединения подобъектов, и для любого морфизма $f : X \rightarrow Y$ существует правый сопряженный функтор $\forall_f : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$ к функтору $f^* : \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$.
- ▶ Так как гейтингова категория регулярна, то у функтора f^* есть и левый сопряженный. Таким образом, мы получаем цепочку сопряженных функторов:

$$\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$$

- ▶ Мы не требуем, чтобы f^* сохранял наименьший подобъект и объединения, так как это следует из того, что он левый сопряженный.

\forall коммутирует с подстановкой

Чтобы доказать, что \forall коммутирует с подстановкой, нам нужно доказать, что для любого пулбэка слева квадрат функторов справа коммутирует с точностью до изоморфизма.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{h} & A \\
 k \downarrow \lrcorner & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{g} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Sub}(A) & \xrightarrow{h^*} & \text{Sub}(P) \\
 \forall_f \downarrow & & \downarrow \forall_k \\
 \text{Sub}(C) & \xrightarrow{g^*} & \text{Sub}(B)
 \end{array}$$

\forall коммутирует с подстановкой

- Функторы в правом квадрате являются правыми сопряженными к следующим функторам:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Sub}(A) & \xleftarrow{\exists_h} & \text{Sub}(P) \\
 f^* \uparrow & & \uparrow k^* \\
 \text{Sub}(C) & \xleftarrow{\exists_g} & \text{Sub}(B)
 \end{array}$$

- Так как этот квадрат коммутирует по регулярности, то квадрат на предыдущем слайде коммутирует по уникальности правых сопряженных функторов.

Импликация

- ▶ Интерпретация импликации определяется так же как интерпретация экспонент.
- ▶ То есть $\llbracket \varphi \rightarrow (-) \rrbracket : \text{Sub}(X) \rightarrow \text{Sub}(X)$ – правый сопряженный к $\llbracket \varphi \wedge - \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cap -$.
- ▶ Так как $A \cap -$ является композицией

$$\text{Sub}(X) \xrightarrow{f^*} \text{Sub}(A) \xrightarrow{\exists_f} \text{Sub}(X)$$

где $f : A \hookrightarrow X$, то правый сопряженный к нему существует в любой гейтинговой категории.

- ▶ Таким образом, мы можем проинтерпретировать $\varphi \rightarrow \psi$ как $\forall_{\llbracket \varphi \rrbracket} (\llbracket \varphi \rrbracket^*(\psi))$.
- ▶ Так как $\forall_{\llbracket \varphi \rrbracket}$ и $\llbracket \varphi \rrbracket^*$ коммутируют с подстановкой, то и интерпретация импликации с ней коммутирует.