Теория категорий Декартово замкнутые категории

Валерий Исаев

3 марта 2021 г.

План лекции

Булевские объекты

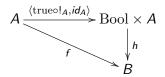
Декартово замкнутые категории

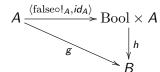
Копроизведение $1 \coprod 1$

- ▶ В **Set** множество Bool можно определить как копроизведение множеств {true} и {false}, каждое из которых является терминальным.
- lacktriangle Копроизведение 1 malg 1 обычно обозначается как 2.
- Можно было бы в произвольной категории определить объект Bool как копроизведение 1 Ⅱ 1.
- ▶ Но это недостаточно сильное определение. Мы не сможем никаких функций над ним определить.

Булевский объект

- Пусть в C существуют все конечные произведения.
- ▶ Тогда *булевский объект* в **С** это объект Bool вместе с парой морфизмов ${
 m true, false}: 1 \to {
 m Bool},$ удовлетворяющий следующему условию.
- ightharpoonup Для любых f,g:A o B существует уникальная стрелка $h:\operatorname{Bool} imes A o B$, такая что

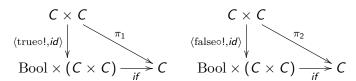




Булевский объект и 2

- ▶ Любой булевский объект является 2.
- Раборительно, если в определении булевского объекта в качестве A взять 1, то мы получим в точности универсальное свойство $1 \amalg 1$.
- Следовательно булевский объект уникален с точностью до изоморфизма.
- Но не любой объект, являющийся 2, является булевским.
- Действительно, в категории групп 2 изоморфен 1.
- Но булевский объект изоморфен 1 только в категориях предпорядка.

▶ Мы можем сконструировать морфизм $if: \operatorname{Bool} \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющий



- ▶ Действительно, в определении Bool возьмем $A = C \times C$, B = C, $f = \pi_1$ и $g = \pi_2$.
- lacktriangle Тогда существует уникальная стрелка $\mathrm{Bool} imes (\mathcal{C} imes \mathcal{C}) o \mathcal{C}$, удовлетворяющая условиям выше.

План лекции

Булевские объекты

Декартово замкнутые категории

Мотивация

- Очередная конструкция, которую мы хотим обобщить, это множество/тип функций.
- Эта конструкция называется по разному: экспонента, внутренний *Hom*.
- ▶ Пусть A и B объекты декартовой категории C. Тогда экспонента обозначаются либо B^A , либо [A, B].
- ightharpoonup Какие операции должны быть определены для B^A .
- Как минимум мы должны иметь аппликацию, которая обычно обозначается еv и является следующим морфизмом:

$$ev: B^A \times A \rightarrow B$$

▶ Морфизм ev позволяет нам "вычислять" элементы B^A .

Элементы объекта (a side note)

- В категории **Set** элементы множества X соответствуют морфизмам из термнального объекта в X.
- В произвольной категории (с терминальным объектом) мы можем определить элемент объекта таким же образом.
- Но это не очень полезное определение, так как в произвольной категории объект не определяется своими элементами.
- Например, в категории графов морфизмы из терминального графа в граф X соответствуют петлям X.
- Мы можем определить обощенный элемент объекта X как морфизм из произвольного объекта Γ в X.
- В категории графов вершины и ребра графа X являются его обобщенными элементами (конечно, существует и много других обобщенных элементов этого графа).

Определение

- Благодаря морфизму ev, мы можем думать об элементах B^A как о морфизмах $A \to B$. Мы еще должны сказать, что B^A содержит B со
- ▶ То есть мы должны сказать чему соответствуют обобщенные элементы B^A . Ясно, что у нас должна быть биекция между обобщенными элементами $\Gamma \to B^A$ и морфизмами $\Gamma \times A \to B$.
- ▶ Имея морфизм $f: \Gamma \to B^A$, мы можем построить его каррирование следующим образом:

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f \times id_A} B^A \times A \xrightarrow{\text{ev}} B$$

• Объект B^A вместе с морфизмом ${
m ev}: B^A \times A \to B$ называется *экспонентой* A и B, если для любого $g: \Gamma \times A \to B$ существует уникальный $f: \Gamma \to B^A$ такой, что композиция стрелок в диаграмме выше равна g.

Примеры

- Категория называется декартово замкнутой, если она декартова и для любых ее объектов A и B существует их экспонента B^A .
- ▶ **Set** декартово замкнута. Действительно, B^A это просто множество функций из A в B.
- $ightharpoonup \Lambda$ декартово замкнута. Действительно, B^A это простотип функций из A в B.
- Все алгебраические категории, которые мы рассматривали, не являются декартово замкнутыми (Grp, Vec, Ring, и т.д.).
- Категория графов декартово замнута.

Объект натуральных чисел

Definition

Объект натуральных чисел в декартово замкнутой категории — это объект $\mathbb N$ вместе с парой морфизмов ${\rm zero}:1\to\mathbb N$ и ${\rm suc}:\mathbb N\to\mathbb N$, удовлетворяющие условию, что для любых других морфизмов $z:1\to X$ и $s:X\to X$ существует уникальная стрелка h, такая что диаграмма ниже коммутирует.

Свойства

- Объект натуральных чисел уникален с точностью до изоморфизма.
- В любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел можно определить все примитивно рекурсивные функции.
- lacktriangle Морфизм $\mathrm{suc}:\mathbb{N} o \mathbb{N}$ является расщепленным мономорфизмом.