

# Задания

9 февраля 2021 г.

Если  $M$  – моноид, то мы будем обозначать  $\mathbf{C}_M$  категорию с одним объектом  $*$  и множеством морфизмов  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_M}(*, *) = M$ , операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в  $M$ .

Предпорядок  $(X, \leq)$  – это множество  $X$  с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением  $\leq$ . Задать структуру предпорядка на множестве – это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если  $(X, \leq)$  – предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как  $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$ . Множество объектов этой категории равно  $X$ , а множество морфизмов  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x, y)$  состоит из одного элемента, если  $x \leq y$ , и пусто в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории  $\Lambda_{\text{ID}}$ ? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.

- (a)  $\text{Bool}$  и  $\text{Maybe Bool}$ .
- (b)  $\text{Either Bool Bool}$  и  $\text{Bool} \times \text{Bool}$ .
- (c)  $\text{Nat}$  и  $\text{Maybe Nat}$ .
- (d)  $\text{Nat}$  и  $\text{List Nat}$ .

2. Пусть  $M$  – некоторый моноид. Определим тогда категорию  $\mathbf{C}_M$  как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным  $M$ . Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?

- (a)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, +)}$ .
- (b)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, *)}$ .
- (c)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, +)}$ .
- (d)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z}, *)}$ .
- (e)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, +)}$ .
- (f)  $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q}, *)}$ .

3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что  $x \leq y$  и  $y \leq x$ , следует, что  $x = y$ . Чему в категориальных терминах соответствует это свойство? (Другими словами, утверждается, что предпорядок  $(X, \leq)$  является порядком тогда и только тогда, когда категория  $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$  обладает некоторым свойством, которое обсуждалось на лекции. Что это за свойство?)
4. Опишите следующие моноиды и группы:
  - (a)  $\text{Aut}_{\mathbf{Set}}(A)$ , где  $A$  – множество букв русского алфавита.
  - (b)  $\text{Aut}_{\mathbf{FinSet}}(A)$ , где  $A$  – множество букв русского алфавита.
  - (c)  $\text{Endo}_{\mathbf{C}_M}(*)$ , где  $M$  – некоторый моноид.
  - (d)  $\text{Endo}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$ .
  - (e)  $\text{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$ .
  - (f)  $\text{Endo}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$ , где  $\mathbf{Ring}$  – категория колец с единицей.
  - (g)  $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ , где  $\mathbf{C}$  – скелетная категория, и  $X$  – произвольный объект  $\mathbf{C}$ .
  - (h)  $\text{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$ .
  - (i)  $\text{Aut}_{\mathbf{Num}}(n)$ .
  - (j)  $\text{Endo}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x)$ , где  $x$  – произвольный элемент  $X$ .
5. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Λ**, **Mat**, **Num**?
6. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Λ**, **Mat**, **Num**?
7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?
  - (a) Дискретные категории.
  - (b) Категории вида  $\mathbf{C}_M$ .
  - (c) Категории предпорядка.
  - (d) Группоиды.
8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?
  - (a) Дискретные категории.
  - (b) Категории вида  $\mathbf{C}_M$ .
  - (c) Категории предпорядка.
  - (d) Скелетные категории.

9. Пусть  $f, f' : X \rightarrow Y$  и  $g, g' : Y \rightarrow X$  – морфизмы в некоторой категории **C**. Докажите, что если диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & X & \\ g' \nearrow & & \searrow f' \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

коммутируют и  $f = f'$ , то  $X$  и  $Y$  изоморфны.

10. Приведите пример, показывающий, что условие  $f = f'$  в предыдущем задании является необходимым.
11. Какие из следующих категорий являются малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**,  $\Lambda$ , **Mat**, **Num**,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$ ?
12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**,  $\Lambda$ , **Mat**, **Num**,  $\mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$ ?