Теория категорий

Функторы

Валерий Исаев

10 марта 2021 г.

План лекции

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий

Определение функторов

- Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.
- Функтор F состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.
- Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Забывающие функторы

- Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, и так далее.
- Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- Например, существует два забывающих функтора $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$.

Примеры функторов

- Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- Если M и N – пара моноидов, и $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – категории на одном объекте, соотетствующие этим моноидам, то функторы между $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N.
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория и A – объект $\mathbf{C}$, тогда $A \times - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \to B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \to A \times B'$.

Примеры функторов

- Существует очевидный функтор $I : \Lambda \to \mathbf{Set}$ интерпретации лямбда-исчисления в категории **Set** (или в любой декартово замкнутой категории).
- Функторам в хаскелле соответствуют функторы $\mathbf{Hask} \to \mathbf{Hask}$ (игнорируя факт, что **Hask** не является категорией).
- Пусть $I(M)$ – группа обратимых элементов моноида M. Если $f : M \to N$, и x – обратимый элемент M, то $f(x)$ – обратимый элемент N. Таким образом, f сужается до гомоморфизма $I(M) \to I(N)$, и, следовательно, $I : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Grp}$ – функтор.

Функторы и дуальность

- Каждому функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ можно сопоставить функтор $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- Другими словами существует биекция между множествами функторов $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- С другой стороны, функторы вида $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ никак не связаны с функторами вида $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Первые называются контравариантными функторами, а вторые – ковариантными.

Пределы и копределы функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ можно определить понятие предела *lim* F и копредела *colim* F. Определение такое же как и для диаграмм.
- Категории $\mathbf{J}$ можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ – как обощение диаграмм в $\mathbf{C}$.
- Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- Функторы $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ тоже называют диаграммами.

План лекции

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий

Индуктивные типы данных

- Допустим мы хотим описать объект в произвольной категории, являющийся аналогом какой-либо структуры данных (списки, деревья, и так далее).
- В теории множеств они строятся индуктивно, то есть мы сначала определяем, скажем, множества $L_n(A)$ списков длины не больше n, а потом говорим, что множество всех списков – это объединение множеств конечных списков $L(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(A)$.
- В теории категорий можно сделать аналогичную конструкцию.
- Во-первых, определим объект $L_n(A)$ списков длины не больше n следующим образом:

$$1 + A + A^2 + \ldots + A^n$$

Примеры бесконечных (ко)пределов

- Теперь мы можем определить объект L как следующий копредел:
$$L_0 \to L_1 \to L_2 \to \ldots$$
- Рассмотрим вместо копредела следующий предел:
$$\ldots \to L_2 \to L_1 \to L_0$$
где функция $L_{n+1} \to L_n$ сопоставляет каждому списку $[x_1, \ldots x_{n+1}]$ список $[x_2, \ldots x_{n+1}]$, а остальные списки не меняет.
- Тогда предел этой последовательности – это множество (потенциально) бесконечных списков.

Общее определение индуктивных типов данных

- Любой (ко)индуктивный тип данных можно задать в виде функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.
- Функтор, соответствующий, спискам определяется как $L_A(X) = 1 + A \times X$.
- Функтор, соответствующий, бинарным деревьям определяется как $T_A(X) = 1 + A \times X \times X$.
- В общем случае $F_D(X)$ задается как правая часть определения типа данных D, в котором все рекурсивные вхождения этого типа заменены на X.
- Таким образом, если X является интерпретацией D, то он должен удовлетворять уравнению $X \simeq F(X)$.

Алгебры над эндофунктором

- Существует два канонических способа найти решение уравнения $X \simeq F(X)$, как начальную F-алгебру или конечную F-коалгебру.
- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – некоторый эндофунктор, то *F-алгебра* – это пара (X, α), где X – объект $\mathbf{C}$, а $\alpha : F(X) \to X$ – морфизм $\mathbf{C}$.
- Морфизм F-алгебр (X, α) и (Y, β) – это морфизм $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ такой, что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(Y) \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Начальные алгебры

- Легко видеть, что определения на предыдущем слайде задают категорию, которую мы будем обозначать $F\text{-}\mathrm{alg}$.
- Начальный объект этой категории называется начальной F-алгеброй, и если она существует, то она является решением уравнения $X \simeq F(X)$.
- Если категория $\mathbf{C}$ достаточно хорошая, то начальную F-алгебру можно определить как копредел следующей диаграммы:

$$0 \xrightarrow{!_{F(0)}} F(0) \xrightarrow{F(!_{F(0)})} F(F(0)) \xrightarrow{F(F(!_{F(0)}))} F(F(F(0))) \to \dots$$

Начальные алгебры и индуктивные типы

- Начальные F-алгебры можно использовать для интерпретации индуктивных типов данных.
- Если $N(X) = X \amalg 1$ – функтор, соответствующий типу данных унарных натуральных чисел, то начальная N-алгебра – это в точности объект натуральных чисел.
- Если $L_A(X) = 1 \amalg A \times X$ – функтор, соответствующий спискам, то начальная L_A-алгебра в **Set** – это множество конечных списков элементов A.
- В общем случае начальная L_A-алгебра – это копроизведение объектов 1, A, A^2, A^3, ...

Коалгебры над эндофунктором

- *Коалгебры* над $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ определяются дуальным образом как пары (X, α), где X – объект $\mathbf{C}$, а $\beta : X \to F(X)$ – морфизм $\mathbf{C}$.
- По дуальности конечные F-коалгебры тоже являются решением уравнения $X \simeq F(X)$.
- Если категория $\mathbf{C}$ достаточно хорошая, то конечную F-коалгебру можно определить как предел следующей диаграммы:

$$\ldots \to F(F(F(1))) \xrightarrow{F(F(!_{F(1)}))} F(F(1)) \xrightarrow{F(!_{F(1)})} F(1) \xrightarrow{!_{F(1)}} 1$$

- Конечные коалгебры являются интерпретацией коиндуктивных типов данных.
- Например, конечная L_A-коалгебра в **Set** – это множество потенциально бесконечных списков.

План лекции

Определение

(Ко)индуктивные типы данных

Изоморфизм категорий

Изоморфные категории

- Для любой категории $\mathbf{C}$ существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G.
- Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Злые понятия

- Как правило, имея две группы, не имеет смысла спрашивать равны ли они; нужно спрашивать об их изоморфности.
- Это верно для объектов в любой категории.
- Любое понятие, которое говорит о равенстве объектов некоторой категории, называют *злым*.
- Изоморфизм категорий – злое понятие.

Полные и строгие функторы

- Функтор F называется *строгим*, если функция $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ является инъективной для любых X и Y. Он называется *полным*, если эта функция является сюръективной.
- Любой забывающий функтор является строгим.
- Любой функтор, "забывающий свойства"является полным и строгим. Например, забывающие функторы $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Mon}$ являются таковыми.