Задания

28 апреля 2021 г.

1. Пусть $\mathbf{C}$ – конечно полная категория. Тогда для любого морфизма $f : A \to B$ можно определть функтор $f^* : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$, где $\mathrm{Sub}(X)$ – полная подкатегория $\mathbf{C}/X$, объекты которой – это стрелки $Y \to X$, являющиеся мономорфизмами. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
   (a) У любого морфизма $f : A \to B$ существует образ $\mathrm{im}\, f \hookrightarrow B$.
   (b) Для любого морфизма $f : A \to B$ у функтора f^* есть левый сопряженный функтор $\exists_f : \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(B)$.

2. Пусть $\mathbf{C}$ – конечно полная категория. На лекции доказывалось, что если в $\mathbf{C}$ можно проинтерпретировать $\perp$ (то есть у любого объекта существует наименьший подобъект и наименьшие подобъекты стабильны относительно пулбэков), то в $\mathbf{C}$ есть строгий начальный объект. Докажите обратное утверждение, то есть что, если в $\mathbf{C}$ есть строгий начальный объект, то в ней можно проинтерпретировать $\perp$.

3. Категория $\mathbf{C}$ называется локально декартово замкнутой, если в ней существуют конечные пределы и $\mathbf{C}/A$ является декартово замкнутой для любого объекта A. Докажите, что если в локально декартово замкнутой регулярной категории существуют все конечные суммы, то она гейтингова.