

Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

28 апреля 2017 г.

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

Логика первого порядка

Интерпретация

Мотивация

- ▶ Лямбда исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику лямбда исчисления.
- ▶ С одной стороны, лямбда исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.
- ▶ С другой стороны, различные конструкции в категориях могут мотивировать новые языковые конструкции для лямбда исчисления.

Термы лямбда исчисления

- ▶ Типы строятся индуктивно из двух бинарных функций \times и \rightarrow , одной константы \top и базовых типов, множество которых мы будем обозначать \mathcal{S} .
- ▶ Термы строятся индуктивно согласно следующим правилам:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\vdash} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, x : A \vdash}, x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : A}, (x : A) \in \Gamma \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \text{unit} : \top} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B} \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1 p : A} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2 p : B} \\[10pt] \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x. b : A \rightarrow B} \quad \frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f a : B} \end{array}$$

Аксиомы лямбда исчисления

Кроме того, у нас есть следующие аксиомы:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_1(a, b) \equiv a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_2(a, b) \equiv b : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \top}{\Gamma \vdash \text{unit} \equiv t : \top} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash (\pi_1 p, \pi_2 p) \equiv p : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x. b) a \equiv b[x := a] : B} \quad \frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \lambda x. f x \equiv f : A \rightarrow B}$$

Интерпретация лямбда исчисления

- ▶ Что является моделями алгебраической теории лямбда исчисления (которую мы так и не построили)?
- ▶ Это в точности декартово замкнутые категории!
- ▶ Так как мы точно не определили эту теорию, то мы и не можем доказать это утверждение, но мы хотя бы можем проинтерпретировать лямбда исчисление в произвольной декартовой категории (так же как термы теории групп можно проинтерпретировать в произвольной группе).
- ▶ Пусть \mathcal{C} – декартово замкнутая категория. Тогда мы будем интерпретировать типы как объекты категории, а термы как ее морфизмы.

Интерпретация типов

- ▶ Интерпретацию типов и термов мы будем обозначать как $\llbracket - \rrbracket$.
- ▶ Тогда типы интерпретируются следующим образом:

$$\llbracket \top \rrbracket = 1$$

$$\llbracket A \times B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket}$$

- ▶ Если $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$, то мы можем определить интерпретацию Γ как $\llbracket \Gamma \rrbracket = \llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket$.

Интерпретация термов

- ▶ Теперь мы определим интерпретацию термов.
- ▶ Если $\Gamma \vdash a : A$, то $\llbracket a \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket A \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket x_i \rrbracket = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$.
- ▶ $\llbracket \text{unit} \rrbracket = !_{\llbracket \Gamma \rrbracket}$.
- ▶ $\llbracket (a, b) \rrbracket = \langle \llbracket a \rrbracket, \llbracket b \rrbracket \rangle$.
- ▶ $\llbracket \pi_1 p \rrbracket = \pi_1 \circ \llbracket p \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \pi_2 p \rrbracket = \pi_2 \circ \llbracket p \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket f a \rrbracket = \text{ev} \circ \langle \llbracket f \rrbracket, \llbracket a \rrbracket \rangle$, где $\text{ev} : \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket} \times \llbracket A \rrbracket \rightarrow \llbracket B \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \lambda x. b \rrbracket = \varphi(\llbracket b \rrbracket)$, где
 $\varphi : \text{Hom}(\llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket) \simeq \text{Hom}(\llbracket \Gamma \rrbracket, \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket})$ – функция
каррирования из определения экспонент.

Проверка аксиом

- ▶ Разумеется нам нужно проверить, что эта интерпретация уважает аксиомы.
- ▶ Для этого сначала нужно доказать лемму, что подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $\llbracket b[x := a] \rrbracket = \llbracket b \rrbracket \circ \langle \text{id}_{\llbracket \Gamma \rrbracket}, \llbracket a \rrbracket \rangle$. Это легко сделать индукцией по b .
- ▶ Теперь бета эквивалентность соответствуют тому, что функция каррирования и обратная к ней дают тождественную функцию при композиции, а эта эквивалентность соответствует тому, что эти функции дают id при композиции в обратном порядке.
- ▶ Аксиомы для \top и \times легко следуют из определения произведений.

План лекции

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

Логика первого порядка

Интерпретация

Логика, теория типов и теория категорий

| Logic | Type theory | Category |
|--|---|-------------------|
| algebraic | $\top + \times$ | Cartesian |
| | $\top + \times + \rightarrow$ | Cartesian closed |
| essentially algebraic | $\top + \Sigma + \text{Id}$ | finitely complete |
| | $\top + \Sigma + \text{Id} + \Pi$ | LCC |
| regular ($=, \wedge, \top, \exists$) | $\top + \Sigma + \text{Id} + \parallel - \parallel$ | regular |
| coherent (reg, \perp, \vee) | $\text{reg} + 0 + \vee$ | coherent |
| first order ($\text{coh}, \rightarrow, \forall$) | $\text{coh} + \forall$ | Heyting |
| higher order | $\top + \Sigma + \text{Id} + \Pi + \text{Prop}$ | elementary topos |

Замечания

- ▶ Пусть T – теория типов из второго столбца. Тогда существуют эквивалентности $(2-)$ категорий $T\text{-}\mathbf{Mod} \simeq C \simeq L$, где C – категория категорий из третьего столбца, а L – категория теорий логики из первого.
- ▶ Все теории в первом столбце мультисортные.
- ▶ Теории в столбце Logic перечислены в порядке возрастания числа логических связок в них; каждая последующая строчка включает предыдущую.
- ▶ Все теории типов, начиная с третьей строчки, включают аксиому K .
- ▶ LCC – это локально декартово замкнутые категории, то есть такие категории C , что для любого объекта X категория C/X – декартово замкнута.

Замечания

- ▶ `reg` и `coh` – это теории, соответствующие строчкам `regular` и `coherent` соответственно.
- ▶ `→` и `Π` включают функциональную экстенциональность.
- ▶ `Prop` включает пропозициональную экстенциональность и полноту.
- ▶ Последняя строчка включает все предыдущие, даже те, для которых нет записи в первом столбце.

Интерпретации теорий

- ▶ Мы уже видели как проинтерпретировать $T + \times$ в декартовой категории, а $T + \times + \rightarrow$ в декартово замкнутой категории.
- ▶ Мы (почти) увидим как каждую из теорий типов проинтерпретировать в соответствующей категории.
- ▶ Для любой логической теории можно определить понятие модели в **Set**. Это обычное понятие модели.
- ▶ Но можно определить модели теории и в других категориях, если они удовлетворяют определенным условиям.
- ▶ Конкретно, для любой теории из первого столбца можно определить категорию моделей в любой категории, удовлетворяющей соответствующему условию из третьего.

Модели теорий

- ▶ Например, мы можем определить категории моноидов, групп, колец, и так далее в любой декартовой категории.
- ▶ Так как аксиомы полей используют \perp , \exists и \vee , то поля можно определить в любой когерентной категории.
- ▶ Если отождествить логическую теорию с соответствующей ей категорией \mathcal{C} , то модели \mathcal{C} в категории \mathcal{D} – это просто функторы $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, которые сохраняют дополнительную структуру из той строчки таблицы, в которой находятся \mathcal{C} и \mathcal{D} .

План лекции

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

Логика первого порядка

Интерпретация

Сигнатуры логики первого порядка

Сигнатура $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ логики первого порядка состоит из:

- ▶ Множества \mathcal{S} , называемого множеством *сортов*.
- ▶ Множества \mathcal{F} , называемого множеством *функциональных символов*. Каждому функциональному символу $f \in \mathcal{F}$ приписана сигнатура вида $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$, где $s_1, \dots, s_n, s \in \mathcal{S}$.
- ▶ Множества \mathcal{P} , называемого множеством *предикатных символов*. Каждому предикатному символу $R \in \mathcal{P}$ приписана сигнатура вида $R : s_1 \times \dots \times s_n$, где $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}$.

Термы логики первого порядка

Пусть V – \mathcal{S} -индексированное множество переменных. Тогда мы можем определить множество $\text{Term}_\Sigma(V)_s$ *термов* сорта s индуктивным образом:

- ▶ Если $x \in V_s$, то $x \in \text{Term}_\Sigma(V)_s$.
- ▶ Если $a_i \in \text{Term}_\Sigma(V)_{s_i}$ и $(f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s) \in \mathcal{F}$, то $f(a_1, \dots, a_n) \in \text{Term}_\Sigma(V)_s$.

Конструкцию термов можно доопределить до функтора $\text{Term}_\Sigma : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Более того, на этом функторе существует естественная структура монады. Упражнение: определите эту структуру.

Формулы логики первого порядка

Пусть, как и раньше, $V \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Теперь мы определим множество $\text{Form}_{\Sigma}(V)$ *формул* индуктивным образом:

- ▶ Если $a_i \in \text{Term}_{\Sigma}(V)_{s_i}$ и $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{P}$, то $R(a_1, \dots, a_n) \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $a_1, a_2 \in \text{Term}_{\Sigma}(V)_s$, то $a_1 = a_2 \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.
- ▶ $\perp, \top \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$, то $\neg\varphi \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi, \psi \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$, то $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi \in \text{Form}_{\Sigma}(V \cup \{x : s\})$, то $\forall(x : s)\varphi, \exists(x : s)\varphi \in \text{Form}_{\Sigma}(V)$.

Теории логики первого порядка

- ▶ Теория логики первого порядка состоит из сигнатуры Σ и множества аксиом вида $\varphi \vdash^V \psi$, где V – конечное множество переменных, а φ и ψ – формулы такие, что $FV(\varphi) \subseteq V$ и $FV(\psi) \subseteq V$.
- ▶ Когда мы рассматриваем логики, более слабые, чем первого порядка, то мы можем ограничить формулы и/или секвенции, которые можно использовать.
- ▶ О секвенции $\varphi \vdash^{x_1, \dots, x_n} \psi$ можно думать как о формуле $\forall x_1 \dots x_n (\varphi \rightarrow \psi)$.
- ▶ Если в логике есть импликация, то секвенции можно заменить одной формулой.
- ▶ Если в логике еще есть квантор всеобщности, то можно считать, что эта формула замкнута.
- ▶ Таким образом, теории в логике первого порядка обычно определяют как множество замкнутых формул.

Интерпретация сигнатуры

Пусть \mathbf{C} – декартова категория. Тогда интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в \mathbf{C} состоит из следующих данных:

- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket : \mathcal{S} \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{C})$.
- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket$, сопоставляющая каждому $(\sigma : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s) \in \mathcal{F}$ морфизм $\llbracket \sigma \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$.
- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket$, сопоставляющая каждому $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{P}$ мономорфизм $\llbracket R \rrbracket : d_R \rightarrow \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.

Интерпретация термов

Пусть \mathbf{C} – декартова категория и $\llbracket - \rrbracket$ – некоторая интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Если t – терм этой сигнатуры сорта s со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \dots, x_n : s_n\}$, то мы можем определить его интерпретацию $\llbracket t \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$ следующим образом:

- ▶ $\llbracket x_i \rrbracket = \pi_i$.
- ▶ $\llbracket \sigma(t_1, \dots, t_n) \rrbracket = \llbracket \sigma \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$.

Модели алгебраических теорий

- ▶ Пусть \mathcal{A} – алгебраическая теория, то есть множество аксиом вида $t_1 = t_2$.
- ▶ Тогда модель этой теории в декартовой категории \mathbf{C} – это интерпретация сигнатуры теории, такая что для любой аксиомы $t_1 = t_2$ верно $\llbracket t_1 \rrbracket = \llbracket t_2 \rrbracket$.

Интерпретация формул в **Set**

- ▶ Прежде чем описать интерпретацию формул в произвольной конечно полной категории, вспомним как она описывается в **Set**.
- ▶ В **Set** формулы интерпретируются как подмножества.
- ▶ Пусть $\llbracket - \rrbracket$ сопоставляет каждому $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{S}$ подмножество множества $\llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.
- ▶ Пусть $V = x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k$ — упорядоченное множество переменных. Тогда функция интерпретации $\llbracket - \rrbracket$ сопоставляет каждой формуле из $Form_{\Sigma}(V)$ подмножество множества $\llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_k \rrbracket$.

Интерпретация формул в **Set**

- ▶ $\llbracket \perp \rrbracket$ – пустое подмножество.
- ▶ $\llbracket \top \rrbracket$ – всё множество.
- ▶ $\llbracket \neg \varphi \rrbracket$ – дополнение подмножества $\llbracket \varphi \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ Упражнение: опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства.

Истинность формул в **Set**

- ▶ Интерпретация замкнутой формулы – это подмножество одноэлементного множества.
- ▶ Следовательно, либо одноэлементное множество, либо пустое.
- ▶ В первом случае говорят, что эта формула *истинна* в этой интерпретации, во втором, что она *ложна*.

Интерпретация формул в конечно полной категории

- ▶ Пусть \mathbf{C} – конечно полная категория.
- ▶ Тогда формулы со свободными переменными в V интерпретируются как подобъекты $\llbracket V \rrbracket$.
- ▶ Если $\llbracket t_1 \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$, то формула $t_1 = t_2$ интерпретируется как уравнитель $\llbracket t_1 \rrbracket$ и $\llbracket t_2 \rrbracket$.
- ▶ Формула $\varphi = R(t_1, \dots, t_k)$ интерпретируется как пулбэк $\llbracket R \rrbracket$:

$$\begin{array}{ccc} d_\varphi & \xrightarrow{\quad} & d_R \\ \downarrow \lrcorner \llbracket \varphi \rrbracket & & \downarrow \llbracket R \rrbracket \\ \llbracket V \rrbracket & \xrightarrow{\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_k \rrbracket \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_k \rrbracket \end{array}$$

Истинность секвенций

- ▶ Мы будем говорить, что секвенция $\varphi \vdash \psi$ истина в некоторой интерпретации $\llbracket - \rrbracket$, если подобъект $\llbracket \varphi \rrbracket$ является подобъектом $\llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ В частности мы можем говорить, что формула ψ истина, если истина секвенция $\top \vdash \psi$; другими словами, если $\llbracket \psi \rrbracket$ – максимальный подобъект, то есть изоморфизм.
- ▶ Модель некоторой теории логики первого порядка – это интерпретация, такая что все аксиомы в ней истинны.

Интерпретация \top и \wedge

- ▶ \top интерпретируется как максимальный объект.
- ▶ Наибольший подобъект объекта X – это id_X .
- ▶ $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $\llbracket \varphi \rrbracket$ и $\llbracket \psi \rrbracket$.