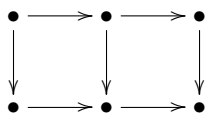


Задания

24 февраля 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Начальные объекты.
 - (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:
 - (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
 - (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
3. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
 - (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
 - (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
4. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
5. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.
6. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

7. Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C . Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.
8. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.
9. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.
10. Идемпотентный морфизм $h : B \rightarrow B$ является расщепленным, если существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
11. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.
12. Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, D – диграмма формы J в категории **C**, и A – конус диаграммы D . Мы будем говорить, что конус A является *слабым пределом*, если для него выполняется уникальность, но не обязательно существование стрелки из определения предела. Обратите внимание, что слабые пределы не обязательно уникальны. Например, любой пулбэк $A \times_C B$ – это слабый предел дискретной диаграммы, состоящей из объектов A и B .

Докажите, что если для некоторой диаграммы существует предел L , то некоторый конус является слабым пределом тогда и только тогда, когда он является подобъектом L .