

# Теория категорий

## Определение категорий

Валерий Исаев

9 февраля 2021 г.

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

## Литература

- ▶ Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998
- ▶ R. Goldblatt, *Topoi: The categorical analysis of logic*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2006
- ▶ Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. vol. 1*, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, Oxford, 2002, Autre tirage : 2008
- ▶ S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer New York, 1992
- ▶ F. Borceux, *Handbook of categorical algebra: Volume 1, basic category theory*, Cambridge Textbooks in Linguistics, Cambridge University Press, 1994

# Мотивация

- ▶ В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- ▶ Множества:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$ .
- ▶ Группы:  $(\{0, 1\}, +)$  и  $\mathbb{Z}/2$ .
- ▶ Типы в языках программирования:  $(a, b)$  и  $(b, a)$ .
- ▶ Еще пример: `Bool` и `Maybe ()`.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

# Определение категории

Категория  $\mathbf{C}$  состоит из:

- ▶ Коллекции объектов  $\text{Ob}(\mathbf{C})$  и коллекции морфизмов  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  для любой пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ . Обычно вместо  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  мы будем писать  $f : X \rightarrow Y$ .
- ▶ Операции, сопоставляющей каждому объекту  $X \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  морфизм  $\text{id}_X : X \rightarrow X$ .
- ▶ Операции, сопоставляющей каждой паре морфизмов  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$  морфизм  $g \circ f : X \rightarrow Z$ .
- ▶ Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам:  $g \circ \text{id}_X = g$ ,  $\text{id}_Y \circ f = f$  и  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .



# План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы







## Категория **Grp**

- ▶ Объекты категории **Grp** – группы.
- ▶  $\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$  – множество гомоморфизмов групп  $G$  и  $H$ .
- ▶  $\text{id}_G$  – тождественный гомоморфизм:  $\text{id}_G(x) = x$ .
- ▶  $g \circ f$  – композиция гомоморфизмов:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

# Категория **Vec**

- ▶ Объекты категории **Vec** – конечномерные векторные пространства.
- ▶  $\text{Hom}_{\mathbf{Vec}}(V, W)$  – множество линейных операторов из  $V$  в  $W$ .
- ▶  $\text{id}_V$  – тождественный линейный оператор.
- ▶  $g \circ f$  – композиция линейных операторов.

## Категория **Hask**

- ▶ Объекты категории **Hask** – типы хаскелла.
- ▶  $\text{Hom}_{\mathbf{Hask}}(A, B)$  – множество функций хаскелла, имеющих тип  $A \rightarrow B$ .
- ▶  $\text{id}_A$  – тождественная функция:  $\text{id}_A = \lambda x \rightarrow x$ .
- ▶  $g \circ f$  – композиция функций:  $g \circ f = \lambda x \rightarrow g (f\ x)$ .









# План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

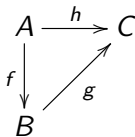
# Графы

- ▶ *Граф* состоит из коллекции вершин  $V$  и коллекции ребер  $E(X, Y)$  для любой пары вершин  $X, Y \in V$ .
- ▶ Любой категории можно сопоставить граф.
- ▶ Примеры:

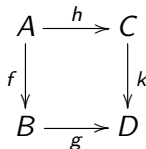


# Диаграммы

- ▶ *Диаграмма* – граф, вершины которого помечены объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.
- ▶ Диаграмма является *коммутативной*, если для любой пары вершин в графе  $X$  и  $Y$ , композиция любого пути из  $X$  в  $Y$  дает один и тот же результат.
- ▶ Примеры:

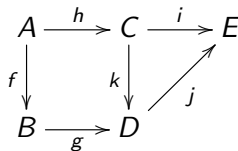
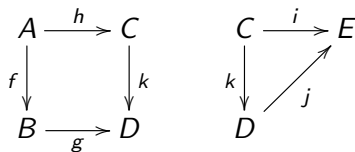


$$g \circ f = h$$



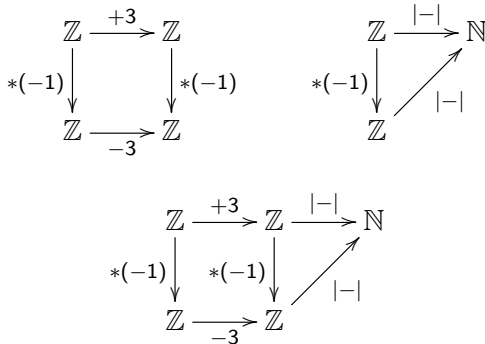
$$g \circ f = k \circ h$$

# Склейка диаграмм



$$j \circ g \circ f = j \circ k \circ h = i \circ h$$

# Пример



## Частные случаи категорий

- ▶ Категории, в которых все морфизмы имеют вид  $\text{id}_X$ , называются *дискретными*.
- ▶ Категории с ровно одним объектом – моноиды.
- ▶ Категории, в которых все множества  $\text{Hom}(X, Y)$  содержат максимум один элемент, – предпорядки.
- ▶ Категории, в которых все морфизмы являются изоморфизмами, называются *группоидами*.
- ▶ Категории, в которых изоморфные объекты равны, называются *скелетными*.

## Малые категории

- ▶ Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- ▶ Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- ▶ Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.
- ▶ Если мы будем формализовывать категории в теории типов, то объекты малых категории лежат в  $\text{Type}_0$ , а объекты больших в  $\text{Type}_1$ .
- ▶ Категории, объекты которых лежат в  $\text{Type}_2$ , называются *очень большими*, и так далее.

## Локально малые категории

- ▶ Категория называется *локально малой*, если для любых объектов  $A$  и  $B$  класс  $\text{Hom}(A, B)$  является множеством.
- ▶ Подавляющее большинство категорий, возникающих на практике, являются локально малыми.
- ▶ Любая малая категория является локально малой, но, конечно, не наоборот.