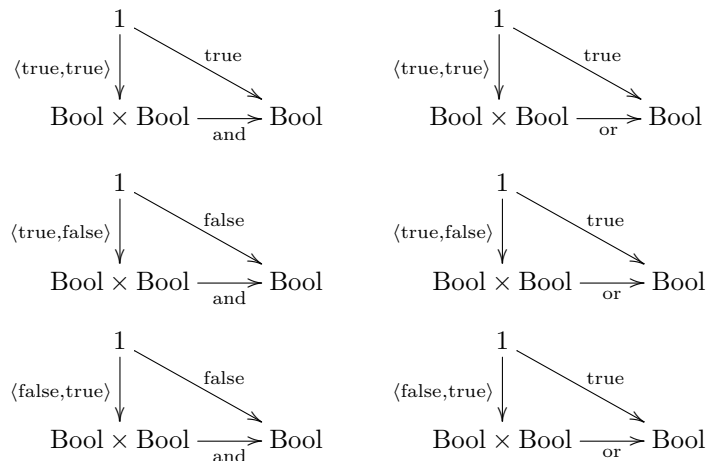
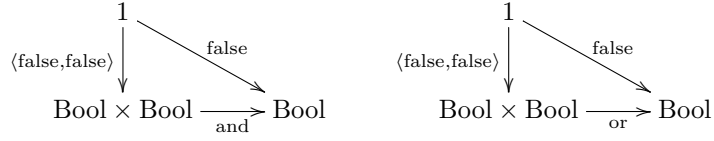


# Задания

3 марта 2021 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.
3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
  - (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
  - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).
  - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.
4. Пусть в категории **C** есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в **C** морфизмы  $\text{and}, \text{or} : \text{Bool} \times \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ , такие что следующие диаграммы коммутуют





5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевым объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть  $\mathbf{C}$  – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a)  $\mathbf{C}$  – категория предпорядка.
  - (b) В  $\mathbf{C}$  терминальный объект является булевым.
  - (c) В  $\mathbf{C}$  существует булевский объект, такой что  $\text{true} = \text{false}$ .
6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории  $\mathbf{C}$  выполнены следующие утверждения:
- (a) Для любого объекта  $A$  существует изоморфизм  $A^1 \simeq A$ .
  - (b) Для любых объектов  $A$ ,  $B$  и  $C$  существует изоморфизм  $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$ .
  - (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов  $A$ ,  $B$  и  $C$  морфизм

$$[\langle \pi_1, \text{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \text{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \rightarrow A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где  $\text{inj}_1 : B \rightarrow B \amalg C$  и  $\text{inj}_2 : C \rightarrow B \amalg C$  – канонические морфизмы копроизведения, и если  $f : B \rightarrow X$ ,  $g : C \rightarrow X$ , то  $[f, g] : B \amalg C \rightarrow X$  – уникальный морфизм, удовлетворяющий  $[f, g] \circ \text{inj}_1 = f$  и  $[f, g] \circ \text{inj}_2 = g$ .

- (d) Если в  $\mathbf{C}$  существует начальный объект  $0$ , то для любого объекта  $A$  существует изоморфизм  $A^0 \simeq 1$ .
  - (e) Если в  $\mathbf{C}$  существует копроизведение  $B \amalg C$ , то для любого объекта  $A$  существует изоморфизм  $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$ .
7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевым.
8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы  $K$  и  $S$ , то есть следующие морфизмы:

$$K : A \rightarrow A^B$$

$$S : (C^B)^A \rightarrow (C^A)^{(B^A)}$$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция  $\text{suc}$  должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм  $\text{suc}$  является расщепленным мономорфизмом.
10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого  $x$  не верно, что  $\text{zero} = \text{suc}(x)$ . В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.
- $\mathbf{C}$  – категория предпорядка.
  - В  $\mathbf{C}$  терминальный объект является объектом натуральных чисел.
  - В  $\mathbf{C}$  существует объект натуральных чисел, такой что для любого  $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  верно, что  $\text{zero} = \text{suc} \circ x$ .
  - В  $\mathbf{C}$  существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого  $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  верно, что  $\text{zero} = \text{suc} \circ x$ .
11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все малые копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.
12. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N} \\
 \langle \text{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle \downarrow & \searrow id_{\mathbb{N}} & \downarrow \text{suc} \times id_{\mathbb{N}} \quad \downarrow \text{suc} \\
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N} & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}
 \end{array}$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\langle \pi_2, \pi_1 \rangle} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 & \searrow + & \downarrow + \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times +} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
 + \times id_{\mathbb{N}} \downarrow & & & & \downarrow + \\
 \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad \quad \quad + \quad \quad \quad} & & & \mathbb{N}
 \end{array}$$