Теория категорий

Категории предпучков

Валерий Исаев

7 апреля 2021 г.

План лекции

Hom-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры
- Категория графов
- Категория глобулярных множеств

Определение

- Пусть A – объект некоторой категории $\mathbf{C}$. Тогда существуют функторы

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

- На объектах они действуют следующим образом: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$.
- На морфизмах они действуют следующим образом: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(f) = g \mapsto f \circ g$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(f) = g \mapsto g \circ f$.
- Эти функторы называются (ковариантным и контравариантным) Hom-*функторами*.

Определение (ко)пределов через Hom-функторы

- Существует определение (ко)пределов через Hom-функторы и (ко)пределы в **Set**.
- Если $D : J \to \mathbf{C}$ – диаграмма и L – объект $\mathbf{C}$, то пусть $\mathrm{Conus}_D(L) = \lim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L, D(j))$ – множество конусов диаграммы D с вершиной L.
- Если C – конус диаграммы D, то существует естественное преобразование $\alpha_X : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, L) \to \mathrm{Conus}_D(X)$, определяемое как $\alpha_X(f)_j = C_j \circ f$.
- Конус C является пределом тогда и только тогда, когда α – естественный изоморфизм.
- Отсюда следует, что $\mathrm{Hom}(X, -)$ сохраняет пределы.

Пример

- Например, пусть J – дискретная категория на $\{1, 2\}$, $D(j) = A_j$.
- Тогда L вместе с функиями $\pi_j : L \to A_j$ является произведением A_1 и A_2 тогда и только тогда, когда функции $\mathrm{Hom}(X, L) \to \mathrm{Hom}(X, A_1) \times \mathrm{Hom}(X, A_2)$, порождаемые композицией с проекциями являются биекциями для любого X.
- Аналогичные утверждения верны и для $\mathrm{Hom}(-, X) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Например, он сохраняет пределы.
- Действительно, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A \amalg B, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, X)$ является биекцией.

Приложение

- Докажем, что правый сопряженный функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ сохраняет пределы.
- Пусть F – левый сопряженный к G, $D : J \to \mathbf{D}$ – диаграмма в $\mathbf{D}$ и L – ее предел. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, G(L)) &\simeq \\ \mathrm{Hom}(F(X), L) &\simeq \\ \lim_{j \in J} \mathrm{Hom}(F(X), D(j)) &\simeq \\ \lim_{j \in J} \mathrm{Hom}(X, GD(j)). \end{aligned}$$

План лекции

Лемма Йонеды

Lemma

Пусть a – объект категории $\mathbf{C}$ и $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ – некоторый функтор. Тогда существует биекция $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a), F) \simeq F(a)$ естественная по a.

Доказательство.

Если $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \to F$, то определим $T(\alpha) = \alpha_a(id_a) \in F(a)$. Если $x \in F(a)$, то определим $S(x) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \to F$ как $S(x)_b(f) = F(f)(x)$. Естественность $S(x)$ следует из того факта, что F сохраняет композиции.

Лемма Йонеды

Доказательство.

Нужно проверить, что T и S взаимообратны. Пусть $x \in F(a)$, тогда $T(S(x)) = S(x)_a(id_a) = F(id_a)(x) = x$.
Пусть $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \to F$. Тогда
$S(T(\alpha))_b(f) = F(f)(T(\alpha)) = F(f)(\alpha_a(id_a)) = \alpha_b(f)$. Последнее равенство следует из естественности α.

Осталось проверить естественность по a. Ее достаточно проверить для S. Если $g : a \to c$ и $x \in F(c)$, то нужно проверить, что $S_c(F(g)(x))_b(f) = S_a(x)_b(g \circ f)$. Это следует непосредственно из определения S. $\square$

Вложение Йонеды

- Для любой категории $\mathbf{C}$ функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ является полным и строгим.
- Действительно, в лемме Йонеды достаточно взять в качестве F функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,b)$.
- Этот функтор называется *вложением Йонеды* и обозначается $\mathbf{y} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$.
- Для того, чтобы проверить, что объекты a и b категории $\mathbf{C}$ изоморфны, достаточно проверить, что $\mathbf{y}a \simeq \mathbf{y}b$.
- Если $f : a \to b$, то f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого c композиция с f задает биекцию на множествах $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,a)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,b)$.

Пример

- В качестве примера использования этого факта покажем, что в декартово замкнутой категории верно $a^{b \amalg c} \simeq a^b \times a^c$.
- Действительно,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(x, a^{b \amalg c}) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(b \amalg c, a^x) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(b, a^x) \times \mathrm{Hom}(c, a^x) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(x, a^b) \times \mathrm{Hom}(x, a^c) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(x, a^b \times a^c)&.
\end{aligned}
$$

Ко- лемма Йонеды

- Интуитивно, ко- лемма Йонеды говорит, что произвольный функтор $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ является копределом функторов вида $\mathbf{y}a$.
- Объекты категории J_P – это пары (a, x), где a – объект $\mathbf{C}$, $x \in P(a)$.
- Морфизмы между (a, x) и (b, y) – это морфизмы $f : a \to b$ категории $\mathbf{C}$, такие, что $P(f)(y) = x$.
- Диаграмма $D_P : J_P \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ каждому (a, x) сопоставляет $\mathbf{y}a$.
- *Ко- лемма Йонеды* утверждает, что P является копределом D_P.

Ко- лемма Йонеды

Доказательство.

По лемме Йонеды достаточно проверить, что $\mathrm{Hom}(P, -) \simeq \mathrm{Hom}(\operatorname{colim} D_P, -)$. У нас есть следующая последовательность биекций.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\operatorname{colim}_{(a,x)\in J}(\mathbf{y}a), R) &\simeq \\ \lim_{(a,x)\in J}\mathrm{Hom}(\mathbf{y}a, R) &\simeq \\ \lim_{(a,x)\in J} R_a. \end{aligned}$$

Ко- лемма Йонеды

Доказательство.

Нужно проверить, что $\mathrm{Hom}(P, R) \simeq \lim_{(a,x)\in J} R_a$, и эта биекция естественна по R.

Но элементы множества $\mathrm{Hom}(P, R)$ – это естественные преобразования, то есть функции, которые каждому $a \in Ob(\mathbf{C})$ и $x \in P_a$ сопоставляют элемент R_a и удовлетворяют условию естественности.

С другой стороны, множество $\lim_{(a,x)\in J} R_a$ состоит из таких же функций α, удовлетворяющих условию, что для любого $f : a \to b$ если $P(f)(y) = x$, то $\alpha(a, x) = R(f)(\alpha(b, y))$. Это условие в точности условие естественности α.

Естественность по R проверяется напрямую. $\square$

План лекции

Примеры

- *Предпучок* на малой категории $\mathbf{C}$ – это функтор $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Категория предпучков – это категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$.
- Если P – предпучок на $\mathbf{C}$ и a – объект $\mathbf{C}$, то мы будем писать P_a вместо $P(a)$.
- Категория графов – это категория предпучков.
- Категория последовательностей множеств

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \dots$$

  является категорией предпучков.
- Категория действий группы G – категория предпучков на G.

Свойства категорий предпучков

- Категории предпучков полные и кополные.
- Действительно, в категориях функторов пределы и копределы считаются поточечно.
- Категории предпучков декартовы замкнуты.
- Действительно, пусть P, R – предпучки на $\mathbf{C}$. Если R^P существует, то для любого $a \in \mathbf{C}$ должно быть верно

$$(R^P)_a \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{y}a, R^P) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{y}a \times P, R)$$

- Мы можем использовать это свойство как определение R^P.

Доказательство

Мы уже видели, что свойство экспоненты верно для представимых функторов. Осталось проверить для произвольных:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(X, R^P) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}_a(\mathbf{y}a), R^P) &\simeq \\
\lim_a(\mathrm{Hom}(\mathbf{y}a, R^P)) &\simeq \\
\lim_a(\mathrm{Hom}(\mathbf{y}a \times P, R)) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}_a(\mathbf{y}a \times P), R) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}_a(\mathbf{y}a) \times P, R) &\simeq \\
\mathrm{Hom}(X \times P, R)
\end{aligned}
$$

Генераторы категории

- Коллекция S объектов категории $\mathbf{C}$ называется ее *генератором*, если для любой пары морфизмов $f, g : A \to B$ верно, что если $f \circ s = g \circ s$ для любого морфизма s с доменом в S, то $f = g$.
- Другими словами, чтобы проверить равенство двух стрелок, достаточно проверить их равенство на объектах из S.
- Если S является генератором категории $\mathbf{C}$ и $x \in S$, то морфизмы вида $x \to a$ называют *обобщенными элементами* объекта a.

Примеры генераторов

- В **Set** генератором является множество, состоящее из одного одноэлементного множества.
- В **Grp** генератором является $\mathbb{Z}$.
- Обощенные элементы для этого генератора – это просто элементы множества.
- Коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.

План лекции

Hom-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры

- Категория графов
- Категория глобулярных множеств

Категория графов **Graph**

- В этом разделе мы просто разберем подробно пример категории графов.
- Граф G состоит из множества вершин G_V, множества ребер G_E и пары функций $d, c : G_E \to G_V$, сопостовляющих каждому ребру его начало и конец.
- Таким образом, категория графов **Graph** – это категория предпучков на категории **C**, состоящей из двух объектов V и E и двух не тождественных морфизмов.

$$V \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} E$$

Лемма Йонеды для **Graph**

- Вложение Йонеды говорит, что категория **C** вкладывается в категорию графов.
- $\mathbf{y}V$ – это граф, состоящий из одной вершины.
- $\mathbf{y}E$ – это граф, состоящий из одного ребра.
- $\mathbf{y}d$ и $\mathbf{y}c$ – функции, отображающие единственную вершину графа $\mathbf{y}V$ в левый или правый конец единственного ребра графа $\mathbf{y}E$.
- Лемма Йонеды говорит, что $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Graph}}(\mathbf{y}V, G) \simeq G_V$.
- Действительно, морфизмы из графа $\mathbf{y}V$ в G – это в точности вершины графа G.
- Лемма Йонеды говорит, что $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Graph}}(\mathbf{y}E, G) \simeq G_E$.
- Действительно, морфизмы из графа $\mathbf{y}E$ в G – это в точности ребра графа G.

Ко- лемма Йонеды для **Graph**

- О копределах можно думать геометрически.
- Например, если G_1 – подграф графов G_2 и G_3, то пушаут $G_2 \amalg_{G_1} G_3$ – это граф, “склеенный” из G_2 и G_3 вдоль G_1.
- Таким, образом ко- лемма Йонеды говорит, что любой предпучок можно “склеить” из представимых предпучков.
- В случае с графами это означает, что любой граф можно склеить из графов $\mathbf{y}V$ и $\mathbf{y}E$.
- Действительно, любой граф можно склеить из вершин и ребер, которые в нем содержатся.

Генераторы в категории графов

- Коллекция графов $\{\mathbf{y}V, \mathbf{y}E\}$ является генератором категории **Graph**.
- Действительно, чтобы проверить, что морфизмы графов $f, g : G \to H$ равны, достаточно проверить, что они совпадают на вершинах и на ребрах.
- Другими словами, достаточно проверить, что они совпадают на морфизмах из $\mathbf{y}V$ и $\mathbf{y}E$.
- Обобщенный элемент для этого генератора – это либо вершина графа (обобщенный элемент вида $\mathbf{y}V$), либо его ребро (обощенный элемент вида $\mathbf{y}E$).

Категория глобулярных множеств Glob

- Глобулярное множество – это предпучок на следующей категории:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left, "s_0"] \arrow[r, shift right, "t_0"'] & 1 \arrow[r, shift left, "s_1"] \arrow[r, shift right, "t_1"'] & 2 \arrow[r, shift left, "s_2"] \arrow[r, shift right, "t_2"'] & \dots
\end{tikzcd}
$$

  где $s_{i+1} \circ s_i = t_{i+1} \circ s_i$ и $s_{i+1} \circ t_i = t_{i+1} \circ t_i$.

- Другими словами, объекты этой категории – натуральные числа, $\mathrm{Hom}(n, n) = \{id_n\}$, $\mathrm{Hom}(n, k) = \varnothing$ если $n > k$, и $\mathrm{Hom}(n, k)$ состоит из двух элементов, если $n < k$.

Лемма Йонеды для **Glob**

- О глобулярных множествах вида $\mathbf{y}n$ можно думать как о n-мерных шарах.
- $\mathbf{y}0$ – точки, $\mathbf{y}1$ – отрезки, $\mathbf{y}2$ – диски, $\mathbf{y}3$ – 3-мерные шары, и т.д.
- $\mathbf{y}s_n$ вкладывает n-мерный шар в верхнюю половну границы $(n+1)$-мерного шара.
- $\mathbf{y}t_n$ вкладывает n-мерный шар в нижнюю половну границы $(n+1)$-мерного шара.
- Таким образом, $\mathbf{y}s_n$ и $\mathbf{y}t_n$ пересекаются по $(n-1)$-мерным шарам.
- Лемма Йонеды говорит, что если X – глобулярное множество, то $\mathrm{Hom}(\mathbf{y}n, X)$ изоморфно множеству X_n его n-мерных шаров.
- Ко- лемма Йонеды говорит, что любое глобулярное множество склеено из шаров.