# Задания

31 марта 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

   является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

   и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто $T$.

2. Докажите, что категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ эквивалентна полной подкатегории $T$-**alg** на свободных $T$-алгебрах.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

4. Докажите, что для любой малой категории $\mathbf{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{fs}}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.

5. Докажите, что категория fs-**Mod**(fs-**Mod**) моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).

6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.

7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом $A$ – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$

- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом $A$ – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
   - $0 \cdot x = 0$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

   $$\mathit{data}\ \mathit{Term}\ a\ =\ \mathit{Var}\ a \mid \mathit{App}\ (\mathit{Term}\ a)\ (\mathit{Term}\ a) \mid \mathit{Lam}\ (\mathit{Term}\ (\mathit{Maybe}\ a))$$

   Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.