Теория категорий

Монады

Валерий Исаев

31 марта 2021 г.

План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

- Свойства категории моделей
- Связь с монадами

Определение

Definition

Монада на категории **C** – это тройка (T, η, μ), состоящая из эндофунктора $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, и пары естественных преобразований $\eta_A : A \to T(A)$ и $\mu_A : TT(A) \to T(A)$. Эта тройка должна удовлетворять следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
TTT(A) \arrow[r, "T(\mu_A)"] \arrow[d, "\mu_{T(A)}"'] & TT(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\
TT(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & TT(A) \arrow[d, "\mu_A"] & T(A) \arrow[l, "T(\eta_A)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\
& T(A) &
\end{tikzcd}
$$

Монады из сопряжения

- Если $(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A : A \to GF(A), \epsilon_B : FG(B) \to B)$ – сопряжение, то $(G \circ F, \eta, G(\epsilon_{F(A)}))$ – монада.
- Коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} GFGFGF(A) \arrow[r, "GFG(\epsilon_{F(A)})"] \arrow[d, "G(\epsilon_{FGF(A)})"'] & GFGF(A) \arrow[d, "G(\epsilon_{F(A)})"] \\ GFGF(A) \arrow[r, "G(\epsilon_{F(A)})"'] & GF(A) \end{tikzcd}$$

следует из того факта, что ϵ – естественное преобразование.

Монады из сопряжения

Коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\eta_{GF(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GF(A)}"'] & GFGF(A) \arrow[d, "G(\epsilon_{F(A)})"] & GF(A) \arrow[l, "GF(\eta_A)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{GF(A)}"] \\ & GF(A) & \end{tikzcd}$$

следует из свойст единицы и коединицы.

Примеры монад из сопряжения

- В категории Λ функтор $- \times B$ является левым сопряженным. В хаскелле монада, соответствующая этому сопряжению, называется State.
- Мы видели пример сопряжения между категорией моноидов и категорией множеств. Монада на категории **Set**, соответствующая этому сопряжению, является аналогом монады списков в хаскелле.
- На хаскелле можно определить аналоги монад над категорией **Set**, соответствующих другим алгебраическим структурам, если правильно определить *instance Eq* для типа монад.

План лекции

Мотивация

- Пусть T – монада над категорией $\mathbf{C}$, которая получена из некоторого сопряжения.
- Можно ли восстановить это сопряжение по монаде?
- Не всегда, но если исходное сопряжения достаточно хорошее (говорят, что оно *монадично*), то можно.

Определение алгебр

Definition

Пусть (T, η, μ) – монада над $\mathbf{C}$. Тогда T-алгебра – это пара (A, h), где A – объект $\mathbf{C}$ и $h : T(A) \to A$ – морфизм, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
TT(A) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "h"] \\
T(A) \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & T(A) \arrow[d, "h"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

Определение категории алгебр

Definition

Морфизм T-алгебр (A, h) и (A', h') – это **C**-морфизм $f : A \to A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ T(A') \arrow[r, "h'"'] & A' \end{tikzcd}$$

Тождественный морфизм и композиция морфизмов определены так же, как в **C**. Это задает категорию T-алгебр, которую мы будем обозначать T-**alg**.

Примеры категорий алгебр

- Пусть $T : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ – монада, соотвествующая сопряжению $F \dashv U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$. То есть $T(A)$ – множество конечных последовательностей элементов из A.
- Тогда структура T-алгебры на множестве A состоит из функции $h : T(A) \to A$, удовлетворяющей ряду аксиом.
- Если A – моноид, то мы можем определить h как $h([a_1 \ \dots \ a_n]) = a_1 * \dots * a_n$.
- И наоборот, если на A есть структура T-алгебры, то на A есть структура моноида: $1 = h([])$ и $a * b = h([a\, b])$.
- Можно показать, структура T-алгебры и структура моноида на множестве A – это одно и то же.
- Можно показать, что категории T-алгебр и моноидов изоморфны.

Примеры категорий алгебр

- В общем случае это тоже верно.
- Пусть $T : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ – монада, соответствующая некоторому "алгебраическому" сопряжению $F \dashv U : \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$, где $\mathbf{D}$ – категория каких-либо алгебраических структур.
- Тогда категории T-алгебр изоморфна категории $\mathbf{D}$.
- Это следует из теоремы Бека, которую мы доказывать не будем.

Примеры алгебр

- Тип *Tree* бинарных деревьев

$$data\ Tree\ a \;=\; Leaf\ a \mid Node\ (Tree\ a)\ (Tree\ a)$$

  является монадой.
- Алгебра над *Tree* – это тип X с одной бинарной операцией $* : X \times X \to X$.
- Связь становится более очевидной, если переписать тип *Tree* следующим образом:

$$data\ Expr\ a \;=\; Var\ a \mid Expr\ a\ \ :*\ Expr\ a$$

Монадичность алгебр

- Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Из категории алгебр существует забывающий функтор $U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$, $U^T(A, h) = A$.
- Существует функтор $F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$, сопоставляющий каждому объекту A свободную T-алгебру на A.

$$F^T(A) = (T(A), \mu_A)$$

- F^T является левым сопряженным к U^T и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T.
- Доказательство: упражнение.

Монадичность сопряжения

- Пусть $F \dashv U : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – сопряжение, а $T = U \circ F$ – соответствующая ему монада.
- Тогда существует уникальный функтор $K : \mathbf{D} \to T\text{-}\mathbf{alg}$, такой что $U^T \circ K = U$ и $K \circ F = F^T$.
- Это утверждение доказывается не очень сложно, но мы не будем этого делать.
- Если функтор K является эквивалентностью категорий, то говорят, что сопряжение *монадично* (еще говорят, что U монадичен, и, что $\mathbf{D}$ монадично над $\mathbf{C}$).
- Если K является изоморфизмом, то говорят, что сопряжение *строго монадично*.
- Как уже отмечалось ранее, алгебраические категории строго монадичны над $\mathbf{Set}$.

План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

- Свойства категории моделей
- Связь с монадами

Определение

- Пусть (T, η, μ) – монада над $\mathbf{C}$. Тогда категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ определяется следующим образом.
- Объекты $\mathbf{Kl}_T$ – это объекты $\mathbf{C}$.
- Морфизмы $\mathbf{Kl}_\mathbf{T}$ из A в B – это морфизмы в $\mathbf{C}$ из A в $T(B)$.
- Тождественный морфизм – η_A, композиция морфизмов $f : A \to T(B)$ и $g : B \to T(C)$ – $\mu_C \circ T(g) \circ f$.

Свойства

- Категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории T-**alg** на свободных T-алгебрах. То есть алгебрах вида $(T(A), \mu_A)$.
- Доказательство: упражнение.
- Существует функтор $F_T : \mathbf{C} \to \mathbf{Kl}_T$, $F_T(A) = A$, $F_T(f : A \to B) = \eta_B \circ f$.
- Существует функтор $U_T : \mathbf{Kl}_T \to \mathbf{C}$, $U_T(A) = T(A)$, $U_T(f : A \to T(B)) = \mu_B \circ T(f)$.
- Функтор F_T является левым сопряженным к U_T, монада $U_T \circ F_T$ – это просто T.

Свойства

- Пусть $F \dashv U : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – некоторое сопряжение, и T – соответствующая ему монада.
- Тогда существует уникальный функтор $L : \mathbf{Kl}_T \to \mathbf{D}$, такой что $U \circ L = U_T$ и $L \circ F_T = F$.
- Таким образом, категория Клейсли является начальным объектом в некоторой категории сопряжений (мы ее не определяли), а категория алгебр является терминальным объектом в этой категории.

План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

- Свойства категории моделей
- Связь с монадами

Определение

Алгебраическая теория $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ состоит из следующего набора данных:

- Множество сортов $\mathcal{S}$.
- Множество функциональных символов $\mathcal{F}$, где для каждого символа указана его сигнатура:

$$\sigma : s_1 \times \ldots \times s_k \to s$$

- Множество аксиом $\mathcal{A}$, где каждая аксиома – это выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы, составленные из функциональных символов теории и переменных.

Примеры теорий

- Теории (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются примерами алгебраических теорий с одним сортом.
- Теория коммутативных колец и модулей над ними является примером алгебраической теории с двумя сортами.
- Теория полей не алгебраична.
- Теория графов состоит из двух сортов V и E и двух функциональных символов $d, c : E \to V$.
- Теория множеств состоит из одного сорта и не содержит никаких символов и аксиом.
- Тривиальная теория состоит из одного сорта и одной аксиомы $x = y$.

Модели теории

- Модель M теории T – это коллекция множеств $\{M_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ вместе с функциями $M(\sigma) : M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_k} \to M_s$ для каждого функционального символа $\sigma : s_1 \times \ldots \times s_k \to s$, удовлетворяющая аксиомам.
- Морфизм f моделей M и N – это коллекция функций $\{f_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, такая что для всех $\sigma : s_1 \times \ldots \times s_k \to s$ и всех $a_1 \in M_{s_1}, \ldots a_k \in M_{s_k}$ верно, что $f_s(M(\sigma)(a_1, \ldots a_k)) = N(\sigma)(f_{s_1}(a_1), \ldots f_{s_k}(a_k))$.
- У нас есть тождественный морфизм и композиция морфизмов, удовлетворяющие необходимым свойствам.
- Следовательно, существует категория моделей теории T, которую мы будем обозначать T-**Mod**.

Примеры моделей

- Категории моделей теорий (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются категориями соответствующих алгебраических структур.
- Категория моделей теории графов эквивалентна категории графов.
- Категория моделей теории множеств – это **Set**.
- Категория моделей тривиальной теории тривиальна, то есть эквивалентна дискретной категории на одном объекте.

Модели теории в декартовой категории

- Если $\mathbf{C}$ – декартовая категория и $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ – алгебраическая теория, то мы можем определить категорию T-$\mathbf{Mod}(\mathbf{C})$ моделей T в категории $\mathbf{C}$.
- Модель M теории T в категории $\mathbf{C}$ – это коллекция объектов $\{M_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ вместе с функциями $M(\sigma) : M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_k} \to M_s$ для каждого функционального символа $\sigma : s_1 \times \ldots \times s_k \to s$, удовлетворяющая аксиомам. Морфизмы моделей определяются как раньше.

Моноиды в декартовой категории

Например, моноид в $\mathbf{C}$ – это объект M вместе с морфизмами $e : 1 \to M$ и $* : M \times M \to M$ такой, что следующие диаграммы коммутируют.

$$
\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "* \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times *"'] & M \times M \arrow[d, "*"] \\
M \times M \arrow[r, "*"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_M, e \circ !_M \rangle"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & M \times M \arrow[d, "*"] & M \arrow[l, "\langle e \circ !_M, \mathrm{id}_M \rangle"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

Функторы

- Пусть $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ – категория $\mathcal{S}$-индексированных множеств.
- Забывающий функтор $U : T\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ является строгим и правым сопряженным.
- Левый сопряженный $F : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \to T\text{-}\mathbf{Mod}$ к нему для каждого $\mathcal{S}$-индексированного множества X возвращает свободную модель на X.
- Другими словами, $F(X)$ определяется как множество термов теории T с переменными в X с точностью до эквивалентности, определяемой аксиомами.
- Единица сопряжения $\eta_X : X \to UF(X)$ каждому $x \in X$ сопоставляет терм из одной переменной x.
- Коединица сопряжения $\epsilon_M : FU(M) \to M$ каждому терму сопоставляет элемент модели M, который задается этим термом.

Пределы и копределы

- Категория моделей любой алгебраической теории полна, U сохраняет пределы.
- Все операции определены поточечно.
- Категория моделей любой алгебраической теории кополна.
- Коуравнитель $f, g : M \to N$ можно определить как $UFU(N)$ с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями $f(x) \sim g(x)$ для всех $x \in M$.
- Копроизведение $\coprod_{i \in I} M_i$ определяется как $UF(\coprod_{i \in I} U(M_i))$ с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями $\sigma(a_1, \ldots a_k) \sim M_i(\sigma)(a_1, \ldots a_k)$ для всех символов σ и всех $a_1, \ldots a_k \in M_i$.

От теорий к монадам

- Любая алгебраическая теория T определяет монаду на $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ – монаду, соответствующую сопряжению $F \dashv U$.
- Категория моделей T эквивалентна категории алгебр над $U \circ F$.
- Действительно, алгебра над $U \circ F$ – это просто $\mathcal{S}$-индексированное множество вместе с функцией интерпретирующей термы теории T.
- Любую модель теории можно достроить до интерпретации всех теормов теории.
- В частности у нас есть интерпретация всех функциональных символов $\sigma(x_1, \ldots x_k)$.
- В этой интерпретации выполняются аксиомы, так как термы рассматриваются с точностью до эквивалентности, пораждаемой аксиомами.

От монад к теориям

- Любой монаде $T : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ можно сопоставить алгебраическую теорию с множеством сортов $\mathcal{S}$.
- Множество функциональных символов с сигнатурой $s_1 \times \ldots \times s_k \to s$ мы определим как $T(\{x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k\})_s$.
- Аксиомы теории:

$$\eta_{\{x:s\}}(x) = x$$

$$\mathrm{bind}(t, x_i \mapsto t_i) = t(t_1, \ldots t_k)$$

для всех $t \in T(\{x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k\})_s$ и $t_1 \in T(X)_{s_1}$, $\ldots t_k \in T(X)_{s_k}$, где $\mathrm{bind}(t, f) = \mu_X(T(f)(t))$.

Финитарные монады

- В общем случае категория моделей теории, которую мы построили по монаде, не будет эквивалентна категории алгебр над этой монадой.
- Действительно, мы в определении применяли T только к конечным множествам.
- Если монада финитарна, то это будет верно, то есть финитарные монады – это примерно то же самое, что и алгебраические теории.
- Интуитивно монада финитарна, если ее значения на бесконечных множествах однозначно определяется ее значением на конечных.

Направленные копределы

- Частично упорядоченное множество называется *направленным*, если любое его конечное подмножество имеет верхнюю границу (не обязательно точную!).
- Диаграмма в некоторой категории называется *направленной*, если она индексирована направленным множеством.
- Копредел называется *направленным*, если он является копределом направленной диаграммы.
- Монада называется *финитарной*, если она сохраняет направленные копределы.

Примеры направленных копределов

- Любая полурешетка является направленным множеством.
- В частности множество конечных подмножеств любого множества является направленным.
- Любое множество является копределом своих конечных подмножеств, индексированных этим множеством.