Теория категорий

Определение категорий

Валерий Исаев

9 февраля 2021 г.

План лекции

Литература

- Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998
- R. Goldblatt, *Topoi: The categorial analysis of logic*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2006
- Peter T. Johnstone, *Sketches of an elephant : a topos theory compendium. vol. 1*, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, Oxford, 2002, Autre tirage : 2008
- S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer New York, 1992
- F. Borceux, *Handbook of categorical algebra: Volume 1, basic category theory*, Cambridge Textbooks in Linguistics, Cambridge University Press, 1994

Мотивация

- В различных контекстах один и тот же объект может иметь различные описания.
- Множества: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.
- Группы: $(\{0, 1\}, +)$ и $Z/2$.
- Типы в языках программирования: (a, b) и (b, a).
- Еще пример: Bool и $\mathrm{Maybe}\ ()$.

Изоморфизмы

- Когда два различных представления A и B задают один и тот же объект?
- Когда существует пара «функкий» $f : A \to B$ и $g : B \to A$, преобразующих «элементы» A в «элементы» B и обратно.
- И эти функции взаимообратны.
- Пример: $f = g = \lambda(x, y) \to (y, x) : (a, b) \to (b, a)$.
- Пример:

$$f = \lambda x \to \mathit{if}\ x\ \mathit{then}\ \mathit{Just}\ ()\ \mathit{else}\ \mathit{Nothing} : \mathit{Bool} \to \mathit{Maybe}\ ()$$
$$g = \mathit{maybe}\ \mathit{True}\ (\mathit{const}\ \mathit{False}) : \mathit{Maybe}\ () \to \mathit{Bool}$$

Определение категории

Категория $\mathbf{C}$ состоит из:

- Коллекции объектов $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ и коллекции морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ для любой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Обычно вместо $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ мы будем писать $f : X \to Y$.
- Операции, сопоставляющей каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ морфизм $\mathrm{id}_X : X \to X$.
- Операции, сопоставляющей каждой паре морфизмов $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ морфизм $g \circ f : X \to Z$.
- Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам: $g \circ \mathrm{id}_X = g$, $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ и $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Изоморфизмы

- Морфизм $f : X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \to X$ такой, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
- Объекты X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : X \to Y$.
- Если X – объект категории $\mathbf{C}$, то *моноид эндоморфизмов* X (обозначение: $\mathrm{Endo}_{\mathbf{C}}(X)$) – это множество $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$ с операцией композиции в качестве бинарной операции моноида, и id_X в качестве единицы.
- Если X – объект категории $\mathbf{C}$, то *группа автоморфизмов* X (обозначение: $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$) – это множество изоморфизмов $f : X \to X$ с операциями, определенными аналогичным предыдущему пункту образом.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Категория **Set**

- Объекты категории **Set** – множества.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ – множество функций из X в Y.
- id_X – тождественная функция: $\mathrm{id}_X(x) = x$.
- $g \circ f$ – композиция функций: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Изоморфизмы – биекции.

Категория **FinSet**

- Объекты категории **FinSet** – конечные множества.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ – множество функций из X в Y.
- id_X – тождественная функция: $\mathrm{id}_X(x) = x$.
- $g \circ f$ – композиция функций: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Множества изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.

Категория **Grp**

- Объекты категории **Grp** – группы.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ – множество гомоморфизмов групп G и H.
- id_G – тождественный гомоморфизм: $\mathrm{id}_G(x) = x$.
- $g \circ f$ – композиция гомоморфизмов: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Категория **Vec**

- Объекты категории **Vec** – конечномерные векторные пространства.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}}(V, W)$ – множество линейных операторов из V в W.
- id_V – тождественный линейный оператор.
- $g \circ f$ – композиция линейных операторов.

Категория **Hask**

- Объекты категории **Hask** – типы хаскелла.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Hask}}(A, B)$ – множество функций хаскелла, имеющих тип $A \to B$.
- id_A – тождественная функция: $\mathrm{id}_A = \lambda x \to x$.
- $g \circ f$ – композиция функций: $g \circ f = \lambda x \to g\ (f\ x)$.

Категория Λ

- Объекты категории Λ – типы просто типизированного лямбда-исчисления с произведениями, юнит-типом и типами функций.
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ – множество термов, имеющих тип $A \to B$, с точностью до бета-эта эквивалентности.
- $\mathrm{id}_A = \lambda x.\, x$.
- $g \circ f$ – композиция термов: $g \circ f = \lambda x.\, g\ (f\ x)$.
- Можно определить расширение категории Λ, которая будет содержать все индуктивные типы данных. Для каждого индуктивного типа мы добавляем его конструкторы и рекурсор. Мы будем обозначать эту категорию Λ_{ID}.

Категория **Mat**

- Объекты категории **Mat** – натуральные числа.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, k)$ – множество матриц над $\mathbb{R}$ размера $n \times k$.
- id_n – единичная матрица размера $n \times n$.
- $A \circ B$ – произведение матриц.
- Матрица является изоморфизмом тогда и только тогда, когда она обратима.

Категория **Num**

- Объекты категории **Num** – натуральные числа.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Num}}(n, k)$ – множество кортежей $(a_1, \dots a_n)$ таких, что $1 \leq a_i \leq k$
- $\mathrm{id}_n = (1, \dots n)$.
- $(b_1, \dots b_k) \circ (a_1, \dots a_n) = (b_{a_1}, \dots b_{a_n})$.

План лекции

Определение категорий

Примеры

Графы и диаграммы

Графы

- *Граф* состоит из коллекции вершин V и коллекции ребер $E(X, Y)$ для любой пары вершин $X, Y \in V$.
- Любой категории можно сопоставить граф.
- Примеры:

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Диаграммы

- *Диаграмма* – граф, вершины которого помечены объектами некоторой категории, а ребра – морфизмами.
- Диаграмма является *коммутативной*, если для любой пары вершин в графе X и Y, композиция любого пути из X в Y дает один и тот же результат.
- Примеры:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

$$g \circ f = h \qquad g \circ f = k \circ h$$

Склейка диаграмм

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & E \\ D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & E \\ B \arrow[r, "g"'] & D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

$$j \circ g \circ f = j \circ k \circ h = i \circ h$$

Пример

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "+3"] \arrow[d, "*(-1)"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "*(-1)"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "-3"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "|-|"] \arrow[d, "*(-1)"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, "|-|"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "+3"] \arrow[d, "*(-1)"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "|-|"] \arrow[d, "*(-1)"'] & \mathbb{N} \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "-3"'] & \mathbb{Z} \arrow[ur, "|-|"'] &
\end{tikzcd}$$

Частные случаи категорий

- Категории, в которых все морфизмы имеют вид id_X, называются *дискретными*.
- Категории с ровно одним объектом – моноиды.
- Категории, в которых все множества $\mathrm{Hom}(X, Y)$ содержат максимум один элемент, – предпорядки.
- Категории, в которых все морфизмы являются изоморфизмами, называются *группоидами*.
- Категории, в которых изоморфные объекты равны, называются *скелетными*.

Малые категории

- Если коллекция всех морфизмов категории является множеством, то такая категория называется *малой*. Категории, которые не (обязательно) являются малыми, называют *большими*.
- Что точно означают эти понятия зависит от формализма, в котором мы работаем.
- Например, в ZFC вводится понятие класса, и большие категории – это категории, коллекция объектов которых является классом.
- Если мы будем формализовывать категории в теории типов, то объекты малых категории лежат в Type_0, а объекты больших в Type_1.
- Категории, объекты которых лежат в Type_2, называются *очень большими*, и так далее.

Локально малые категории

- Категория называется *локально малой*, если для любых объектов A и B класс $\mathrm{Hom}(A, B)$ является множеством.
- Подавляющее большинство категорий, возникающих на практике, являются локально малыми.
- Любая малая категория является локально малой, но, конечно, не наоборот.