Теория категорий

Элементарные топосы

Валерий Исаев

5 мая 2021 г.

План лекции

Классификатор подобъектов

Определение топосов
- Эффективный топос
- Синтаксическая категория
- Категория предпучков

Свойства топосов

Классификатор подобъектов в **Set**

- В **Set** существует биекция между подмножествами некоторого множества A и предикатами $A \to 2$.
- Если $2 = \{\top, \bot\}$ и $f : A \to 2$, то соответствующее подмножество A можно определить как $f^{-1}(\top)$.
- Эту конструкцию можно переформулировать категориально. Пусть $\mathrm{true} : 1 \to 2$ – функция, выбирающая элемент $\top$. Тогда любому морфизму $f : A \to 2$ мы можем сопоставить подобъект A – пулбэк true вдоль f.
- В **Set** эта конструкция взаимно однозначна. В произвольной категории это может быть не верно.

Определение классификатора подобъектов

Пусть в $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1. Тогда объект Ω вместе с морфизмом $\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ называется *классификатором подобъектов*, если для любого мономорфизма $f : A' \hookrightarrow A$ существует уникальный морфизм $\chi_f : A \to \Omega$, такой что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, dashed, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Другими словами, функция $(-)^*(\mathrm{true}) : \mathrm{Hom}(A, \Omega) \to \mathrm{Sub}(A)$ должна быть биекцией для любого A.

Другое определение классификатора подобъектов

Definition

Мономорфизм $\mathrm{true} : \widehat{\Omega} \to \Omega$ называется *классификатором подобъектов*, если для любого мономорфизма $f : A' \hookrightarrow A$ существует уникальный морфизм $\chi_f : A \to \Omega$, такой что $\chi_f^*(\mathrm{true})(f)$ и f равны как подобъекты B.

Remark

Это определение эквивалентно предыдущему. Другими словами, можно доказать, что $\widehat{\Omega}$ всегда является терминальным объектом (упражнение).

Свойства

- Классификатор подобъектов уникален с точностью до изоморфизм
- Классификатор подобъектов в когерентной категории является внутренней дистрибутивной решеткой.
- В категории с классификатором подобъектов любой мономорфизм регулярен (упражнение).
- Категории с классификатором подобъектов являются сбалансированными.

Примеры

- В **Set** двухэлементное множество является классификатором подобъектов.
- В категории пунктированных множеств двухэлементное множество также является классификатором подобъектов.
- В категориях групп, моноидов и колец нет классификатора подобъектов, так как в них не любой мономорфизм регулярен.

План лекции

Классификатор подобъектов

Определение топосов

- Эффективный топос
- Синтаксическая категория
- Категория предпучков

Свойства топосов

Определение топосов

Definition

(Элементарный) топос – это категория, в которой существуют конечные пределы, классификатор подобъектов Ω и для любого A экспонента Ω^A.

Примеры топосов:

- Категории предпучков.
- Эффективный топос.
- Синтаксическая категория подходящего языка.

Частичные комбинаторные алгебры

- *Частичная комбинаторная алгебра* – это множество A вместе с частичной функцией $\cdot : A \times A \to A$, такое что существуют константы $k, s \in A$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$k \cdot x \cdot y = x$$
$$s \cdot x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot (y \cdot z)$$

- Частичная комбинаторная алгебра – это алгебраическая модель нетипизированного лямбда исчисления.
- Пример: A – множество нетипизированных лямбда термов по отношению $\beta\eta$-эквивалентности, $\cdot$ – аппликация.
- Пример: $A = \mathbb{N}$, $n \cdot m = \varphi(n)(m)$, где φ – некоторая нумерация вычислимых функций.

Сборки

- *A-сборка* – это множество X вместе с отношением $\Vdash$ на $A \times X$, таким что для любого $x \in X$ существует $a \in A$, такой что $a \Vdash x$, и, если $a \Vdash x$ и $a \Vdash y$, то $x = y$.
- Морфизм A-сборок X и Y – это функция $f : X \to Y$, такая что существует $r \in A$, реализующий f, то есть если $a \Vdash x$, то $r \cdot a \Vdash f(x)$.
- Категория A-сборок не является топосом (но является квазитопосом).
- Эту категорию можно расширить, получив топос.
- Такой топос, когда A – второй пример с предыдущего слайда, называется *эффективным топосом*.

Язык

- Если мы добавим в язык с зависимыми типами достаточное количество конструкций, то его синтаксическая категория (почти) будет топосом.
- Конкретно, нам нужно добавить вселенную утверждений *Prop* и правило, которое говорит, что она содержит все утверждения.

Замкнутость вселенной

- Обычно еще добавляют правила, которые говорят, что вселенная замкнута относительно различных конструкций: конъюнкций, дизъюнкций, и так далее.
- Если мы добавляем правило, которое говорит, что она замкнута относительно всех утверждений, то это не нужно делать.
- В частности, это означает, что в любом топосе можно проинтерпретировать такие правила.

Классификатор подобъектов в категории предпучков

Proposition

В любой категории предпучков существует классификатор подобъектов.

У нас должна быть биекция между множеством подобъектов объекта A и $\mathrm{Hom}(A, \Omega)$. Но по лемме Йонеды должно быть верно $\Omega_a = \mathrm{Hom}(\mathbf{y}a, \Omega)$. Следовательно, мы можем определить Ω_a как множество подобъектов $\mathbf{y}a$. Подобъект такого предпучка – это множество S морфизмов с кодоменом a, такое что $f \in S$ влечет $f \circ h \in S$ для любого h, для которого $f \circ h$ определено. Множество морфизмов с таким свойством называется *решетом* на a.

Доказательство (продолжение)

Таким образом, мы определяем Ω_a как множество решет на a.
Если $f : a \to b$, то $\Omega_f(S) = \{g | f \circ g \in S\}$.
Подобъект предпучка B можно задать как семейство $\{\beta_x \subseteq B_x \mid \forall f : y \to x, \beta_x \subseteq B_f^{-1}(\beta_y)\}_x$. Таким образом, нам нужно показать, что следующая функция является биекцией:

$$Q : \mathrm{Hom}(B, \Omega) \to \mathrm{Sub}(B)$$
$$Q : \alpha \mapsto \{\{b \mid \alpha_x(b) = \top\}\}_x$$

Обратную функцию можно задать следующим образом:

$$R : \beta \mapsto \{\lambda b. \{g : y \to x \mid B_g(b) \in \beta_y\}\}_x$$

Естественность $R(\beta)$ следует из функториальности B.

Доказательство (продолжение)

Докажем, что $R(Q(\alpha)) = \alpha$:

$$R(Q(\alpha)) = \{\lambda b.\, \{g : y \to x \mid \alpha_y(B_g(b)) = \top\}\}_x$$

По естественности α верно $\alpha_y(B_g(b)) = \Omega_g(\alpha_x(b))$, а условие $\Omega_g(\alpha_x(b)) = \top$ эквивалентно тому, что любой $h : z \to y$ принадлежит $\Omega_g(\alpha_x(b))$, что верно в точности, если для любого $h : z \to y$ стрелка $g \circ h$ приндлежит $\alpha_x(b)$. Таким образом

$$R(Q(\alpha))_x(b) = \{g : y \to x \mid \forall h : z \to y, g \circ h \in \alpha_x(b)\}$$

Если $g \in R(Q(\alpha))_x(b)$, то очевидно $g \in \alpha_x(b)$. Наоборот, если $g \in \alpha_x(b)$, то $g \in R(Q(\alpha))_x(b)$, так как $\alpha_x(b)$ – решето. Следовательно $R(Q(\alpha))_x(b) = \alpha_x(b)$.

Доказательство (конец)

Докажем, что $Q(R(\beta)) = \beta$:

$$Q(R(\beta)) = \{\{b \mid \{g : y \to x \mid B_g(b) \in \beta_y\} = \top\}\}_x$$

$$= \{\{b \mid \forall g : y \to x, B_g(b) \in \beta_y\}\}_x$$

Если $b \in Q(R(\beta))_x$, то очевидно $b \in \beta_x$. Обратная импликация верна, так как $\beta \in \mathrm{Sub}(B)$. Следовательно $Q(R(\beta))_x = \beta_x$.

План лекции

Синглтоны

- Для любого A существует морфизм $\{-\}_A : A \to \Omega^A$, о котором можно думать так, что каждому a из A он сопоставляет предикат $A \to \Omega$, который верен только на a. Другими словами, если думать о предикате как о подмножестве, то он возвращает синглтон – подмножество, состоящее из одного элемента.
- Этот морфизм можно определить как каррирование $\chi_\Delta : A \times A \to \Omega$, где $\Delta : A \hookrightarrow A \times A$ – диагональ.
- Таким образом, χ_Δ – это просто предикат равенства.

Свойства синглтонов

Proposition

Морфизм $\{-\}_A : A \to \Omega^A$ *является мономорфизмом.*

Доказательство.

Пусть $a, a' : \Gamma \to A$ – морфизмы, такие что $\{-\}_A \circ a = \{-\}_A \circ a'$. Тогда стрелки $\Gamma \times A \xrightarrow{a \times \mathrm{id}} A \times A \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega$ и $\Gamma \times A \xrightarrow{a' \times \mathrm{id}} A \times A \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega$ также равны. Но $((a \times \mathrm{id}) \circ \chi_\Delta)^*(\mathrm{true}) = (a \times \mathrm{id})^* \chi_\Delta^*(\mathrm{true}) = (a \times \mathrm{id})^*(\Delta) = \langle \mathrm{id}, a \rangle : \Gamma \to \Gamma \times A$. Из равенства стрелок выше следует, что $\langle \mathrm{id}, a \rangle$ и $\langle \mathrm{id}, a' \rangle$ изоморфны как подобъекты $\Gamma \times A$. Композиция с первой проекцией показывает, что этот изоморфизм равен id_Γ, а композиция со второй показывает, что $a = a'$. $\square$

Декартова замкнутость

Proposition

Любой топос является декартово замкнутым.

Скетч доказательства.

Мы определим экспоненту B^A так же как и в **Set** (то есть как $\{f : A \times B \to \Omega \mid \forall a : A, \exists!(b : B), f(a, b) = \top\}$). Конкретно, B^A будет уравнителем двух стрелок $\Omega^{A \times B} \to \Omega^A$. Эти стрелки определяются как карирование стрелок $f, g : \Omega^{A \times B} \times A \to \Omega$.

Стрелка f задается как композиция $\Omega^{A \times B} \times A \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Omega^B \xrightarrow{\chi_{\{-\}_B}} \Omega$.

Стрелка g задается как композиция $\Omega^{A \times B} \times A \to 1 \xrightarrow{\mathrm{true}} \Omega$.

Декартова замкнутость

Чтобы задать $\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$, зададим сначала $B^A \times A \to \Omega^B$ и покажем, что он факторизуется через $\{-\}_B$. Этот морфизм задается как композиция

$$B^A \times A \xrightarrow{e \times \mathrm{id}} \Omega^{A \times B} \times A \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Omega^B$$

где e – уравнитель из определения B^A. Стрелка факторизуется через $\{-\}_B$ тогда и только тогда, когда ее композиция с $\chi_{\{-\}_B}$ факторизуется через true. Для данной стрелки это верно по определению уравнителя e.

Универсальное свойство мы проверять не будем.

Фундаментальная теорема теории топосов

Proposition

Если A – некоторый объект топоса $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}/A$ также является топосом.

Доказательство.

Очевидно в $\mathbf{C}/A$ существуют все конечные пределы. Классификатор подобъектов определяется просто как $\Omega_A = A^*(\Omega)$. Подобъекты некоторого $(B, p_B) \in \mathbf{C}/A$ – это просто подобъекты B в $\mathbf{C}$. С другой стороны у нас есть биекция $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/A}((B, p_B), \Omega_A)$. Откуда следует, что Ω_A является классификатором подобъектов в $\mathbf{C}/A$.

Фундаментальная теорема теории топосов

Доказательство.

Теперь мы хотим показать, что для любого $(B, p_B) \in \mathbf{C}/A$ существует $\Omega_A^{(B,p_B)} \in \mathbf{C}/A$. Для такого объекта должны выполняться следующие равенства: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/A}(X, \Omega_A^{(B,p_B)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/A}(X \times_A (B, p_B), \Omega_A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \times_A B, \Omega)$. Но морфизмы $X \times_A B \to \Omega$ – это просто подобъекты $X \times_A B$. Но этот объект сам является подобъектом $X \times B$. Таким образом, это множество состоит из тех морфизмов $p : X \times B \to \Omega$, которые задают подобъект, содержащий $X \times_A B$.

Фундаментальная теорема теории топосов

Доказательство.

Пусть $q : X \times B \to \Omega$, $q = \chi_{X \times_A B}$. Тогда это множество можно описать как $\{p : X \times B \to \Omega \mid (\lambda t : X \times B.p(t) \wedge q(t)) = p\}$. Или как $\{p' : X \to \Omega^B \mid (\lambda x : X.\lambda b : B.p'(x)(b) \wedge q(x, b)) = p'\}$. Или как множество $p' : X \to \Omega^B$, таких что $\langle p', p_X \rangle : X \to \Omega^B \times A$ уравнивает стрелки $f, g : \Omega^B \times A \to \Omega^B$, где $f = \pi_1$ и $g = (\lambda(s, a)b.s(b) \wedge p_B(b) = a)$. И, следовательно, как соответствующее подмножество множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/A}(X, A^*(\Omega^B))$. Следовательно, мы можем определить $\Omega_A^{(B,p_B)}$ как уравнитель f и g. $\square$

Регулярность топосов

- Любой топос – регулярная категория.
- Образ $A \to 1$ можно определить как $\Pi_{\Omega}(\mathrm{true}^{\mathrm{true}^{p}})$, где $p = \pi_2 : A \times \Omega \to \Omega$, а $\Pi_{\Omega} : \mathbf{C}/\Omega \to \mathbf{C}$ – правый сопряженный к $\Omega \times - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Omega$.
- В нотации теории типов эта конструкция записывается следующим образом:

$$\|A\| = \prod_{X : \Omega} (A \to X) \to X$$

- Для произвольного морфизма $A \to \Gamma$ образ получается применением этой конструкции в $\mathbf{C}/\Gamma$.
- Стабильность относительно пулбэков следует из стабильности Ω, Π и Σ.

Операции над подобъектами

- Используя Ω, легко сконструировать наименьший подобъет и объединение подобъектов.
- Сделаем это сначала для терминального объекта.
- Пусть A и B – подобъекты терминального объекта, тогда определим их объединение как

$$A \cup B = \prod_{X:\Omega} (A \to X) \to (B \to X) \to X.$$

- Легко сконструировать стрелку $A \to A \cup B$, конкретно, $\lambda aXfg.f\ a$. Аналогично определяется стрелка $B \to A \cup B$.
- Теперь, если C – подобъект терминального объекта и $f : A \to C$, $g : B \to C$, то существует стрелка $A \cup B \to C$, конкретно, $\lambda d.d\ C\ f\ g$.

Когерентность топосов

- Начальный подобъект конструируется аналогичным образом: $0 = \prod\limits_{X:\Omega} X$.
- Аналогчино для любого подобъекта C существует стрелка $0 \to C$, конкретно $\lambda d.d\ C$.
- Если Γ – произвольный объект, то можно определить эти операции над подобъектами Γ.
- Действительно, так как $\mathbf{C}/\Gamma$ является топосом, то в нем эти операции определены для терминального объекта. Но терминальный объект в нем – это Γ.
- Эти операции стабильны относительно пулбэков по аналогичным соображениям.

Конечные суммы

- Следовательно, любой топос – когерентная категория, а значит в нем существует начальный объект.
- Так как $B \amalg C$ должно быть подобъектом $\Omega^{B \amalg C}$, а этот объект изоморфен $\Omega^B \times \Omega^C$, то мы можем определить $B \amalg C$ как некоторый подобъект этого произведения.
- Пусть $B' = \langle \{-\}_B, \bot \rangle : B \hookrightarrow \Omega^B \times \Omega^C$ и $C' = \langle \bot, \{-\}_C \rangle : C \hookrightarrow \Omega^B \times \Omega^C$.
- Тогда мы определяем $B \amalg C$ как объединение B' и C'.
- Универсальное свойство мы проверять не будем.

Коуравнители

- Мы хотим построить коуравнитель $f, g : R \to A$.
- Если $R \to R' \xrightarrow{\langle f', g' \rangle} A \times A$ – образ $\langle f, g \rangle$, то несложно показать, что коуравнитель f', g' также будет коуравнителем f, g.
- Если $R'' \xrightarrow{\langle f'', g'' \rangle} A \times A$ – рефлексивное симметричное транзитивное замыкание $R' \xrightarrow{\langle f', g' \rangle} A \times A$, то несложно показать, что коуравнитель f'', g'' также будет коуравнителем f', g'.
- Такое замыкание можно определить как пересечение всех отношений эквивалентности, содержащих R'.

Коуравнители

- Пересечение множества подмножеств некоторого множества строится при помощи квантора всеобщности и импликации, которые есть в любой локально декартово замкнутой категории.
- Коуравнитель отношения эквивалентности можно определить как множество классов эквивалентности, то есть подобъектов A вида $\{a' : A \mid R''(a, a')\}$.
- Другими словами, мы определяем коуравнитель f'', g'' как образ стрелки $A \to \Omega^A$, соответствующей $\langle f'', g'' \rangle : R'' \hookrightarrow A \times A$.