

Задания

10 марта 2021 г.

1. Пусть $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Какие из следующих утверждений верны? Как изменится ответ, если предположить, что F – эквивалентность категорий?
 - (а) Если $f : X \rightarrow Y$ – мономорфизм в \mathbf{C} , то $F(f)$ – мономорфизм в \mathbf{D} .
 - (б) Если X – (ко)предел диаграммы $D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, то $F(X)$ – (ко)предел диаграммы $F \circ D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$.
2. Пусть \mathbf{Cat} – категория малых категорий. Ее объекты – это малые категории. Морфизмы в категории \mathbf{Cat} – это функторы между категориями.

Пусть \mathbf{Graph} – категория графов. Ее объекты – графы, то есть пары (V, E) , состоящие из множества вершин V и функции E , сопоставляющей каждой паре вершин $x, y \in V$ множество $E(x, y)$ ребер из x в y .

Морфизм графов (V, E) и (U, D) состоит из функции $f : V \rightarrow U$ и функции $f : E(x, y) \rightarrow D(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in V$. Композиция и тождественные морфизмы определены очевидным образом.

Определите забывающий функтор из \mathbf{Cat} в \mathbf{Graph} . Докажите, что этот функтор строгий.
3. В лекции определялся функтор $I : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$ обратимых элементов моноида.
 - (а) Является ли I строгим? Докажите это.
 - (б) Является ли I полным? Докажите это.
4. Докажите, что если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – некоторый эндофунктор, то начальная F -алгебра X удовлетворяет уравнению $X \simeq F(X)$.