Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

28 апреля 2017 г.

План лекции

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

- Логика первого порядка
- Интерпретация

Мотивация

- Лямбда исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику лямбда исчисления.
- С одной стороны, лямбда исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.
- С другой стороны, различные конструкции в категориях могут мотивировать новые языковые конструкции для лямбда исчисления.

Термы лямбда исчисления

- Типы строятся индуктивно из двух бинарных функций $\times$ и $\to$, одной константы $\top$ и базовых типов, множество которых мы будем обозначать $\mathcal{S}$.
- Термы строятся индуктивно согласно следующим правилам:

$$\frac{}{\vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, x : A \vdash}, x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : A}, (x : A) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathrm{unit} : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1\, p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2\, p : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x.b : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\ a : B}$$

Аксиомы лямбда исчисления

Кроме того, у нас есть следующие аксиомы:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_1\,(a, b) \equiv a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_2\,(a, b) \equiv b : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \top}{\Gamma \vdash \mathrm{unit} \equiv t : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash (\pi_1\, p,\ \pi_2\, p) \equiv p : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x.b)\; a \equiv b[x := a] : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x.f\; x \equiv f : A \to B}$$

Интерпретация лямбда исчисления

- Что является моделями алгебраической теории лямбда исчисления (которую мы так и не построили)?
- Это в точности декартово замкнутые категории!
- Так как мы точно не определили эту теорию, то мы и не можем доказать это утверждение, но мы хотя бы можем проинтерпретировать лямбда исчисление в произвольной декартовой категории (так же как термы теории групп можно проинтерпретировать в произвольной группе).
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартово замкнутая категория. Тогда мы будем интерпретировать типы как объекты категории, а термы как ее морфизмы.

Интерпретация типов

- Интерпретацию типов и термов мы будем обозначать как $[\![-]\!]$.
- Тогда типы интерпретируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
[\![\top]\!] &= 1 \\
[\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![A \to B]\!] &= [\![B]\!]^{[\![A]\!]}
\end{aligned}
$$

- Если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$, то мы можем определить интерпретацию Γ как $[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим интерпретацию термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![\mathrm{unit}]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![\pi_1\, p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![\pi_2\, p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![f\ a]\!] = \mathrm{ev} \circ \langle [\![f]\!], [\![a]\!] \rangle$, где $\mathrm{ev} : [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.
- $[\![\lambda x.b]\!] = \varphi([\![b]\!])$, где $\varphi : \mathrm{Hom}([\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!], [\![B]\!]) \simeq \mathrm{Hom}([\![\Gamma]\!], [\![B]\!]^{[\![A]\!]})$ – функция каррирования из определения экспонент.

Проверка аксиом

- Разумеется нам нужно проверить, что эта интерпретация уважает аксиомы.
- Для этого сначала нужно доказать лемму, что подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle \mathrm{id}_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!] \rangle$. Это легко сделать индукцией по b.
- Теперь бета эквивалентность соответствуют тому, что функция каррирования и обратная к ней дают тождественную функцию при композиции, а эта эквивалентность соответствует тому, что эти функции дают id при композиции в обратном порядке.
- Аксиомы для $\top$ и $\times$ легко следуют из определения произведений.

План лекции

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

- Логика первого порядка
- Интерпретация

Логика, теория типов и теория категорий

Logic	Type theory	Category
algebraic	$\top + \times$	Cartesian
	$\top + \times + \to$	Cartesian closed
essentially algebraic	$\top + \Sigma + \mathrm{Id}$	finitely complete
	$\top + \Sigma + \mathrm{Id} + \Pi$	LCC
regular ($=$, $\wedge$, $\top$, $\exists$)	$\top + \Sigma + \mathrm{Id} + \| - \|$	regular
coherent (reg, $\bot$, $\vee$)	reg $+ 0 + \vee$	coherent
first order (coh, $\to$, $\forall$)	coh $+ \forall$	Heyting
higher order	$\top + \Sigma + \mathrm{Id} + \Pi + \mathrm{Prop}$	elementary topos

Замечания

- Пусть T – теория типов из второго столбца. Тогда существуют эквивалентности (2-)категорий $T\text{-}\mathbf{Mod} \simeq C \simeq L$, где C – категория категорий из третьего столбца, а L – категория теорий логики из первого.
- Все теории в первом столбце мультисортные.
- Теории в столбце Logic перечеислены в порядке возрастания числа логчиеских связок в них; каждая последующая строчка включает предыдущую.
- Все теории типов, начиная с третьей строчки, включают аксиому K.
- LCC – это локльно декартово замкнутые категории, то есть такие категории $\mathbf{C}$, что для любого объекта X категория $\mathbf{C}/X$ – декартово замкнута.

Замечания

- reg и coh – это теории, соответствующие строчкам regular и coherent соответственно.
- $\to$ и Π включают функциональную экстенсиональность.
- Prop включает пропозициональную экстенсиональность и полноту.
- Последняя строчка включает все предыдущие, даже те, для которых нет записи в первом столбце.

Интерпретации теорий

- Мы уже видели как проинтерпретировать $\top + \times$ в декартовой категории, а $\top + \times + \to$ в декартово замкнутой категории.
- Мы (почти) увидим как каждую из теорий типов проинтерпретировать в соответствующей категории.
- Для любой логической теории можно определить понятие модели в **Set**. Это обычное понятие модели.
- Но можно определить модели теории и в других категориях, если они удовлетворяют определенным условиям.
- Конкретно, для любой теории из первого столбца можно определить категорию моделей в любой категории, удовлетворяющей соответствующему условию из третьего.

Модели теорий

- Например, мы можем определить категории моноидов, групп, колец, и так далее в любой декартовой категории.
- Так как аксиомы полей используют $\bot$, $\exists$ и $\vee$, то поля можно определить в любой когерентной категории.
- Если отождествить логическую теорию с соответствующей ей категорией C, то модели C в категории D – это просто функторы $C \to D$, которые сохраняют дополнительную структуру из той строчки таблицы, в которой находятся C и D.

План лекции

Интерпретация лямбда исчисления

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

- Логика первого порядка
- Интерпретация

Сигнатуры логики первого порядка

Сигнатура $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ логики первого порядка состоит из:

- Множества $\mathcal{S}$, называемого множеством *сортов*.
- Множества $\mathcal{F}$, называемого множеством *функциональных символов*. Каждому функциональному символу $f \in \mathcal{F}$ приписана сигнатура вида $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, где $s_1, \ldots s_n, s \in \mathcal{S}$.
- Множества $\mathcal{P}$, называемого множеством *предикатных символов*. Каждому предикатному символу $R \in \mathcal{P}$ приписана сигнатура вида $R : s_1 \times \ldots \times s_n$, где $s_1, \ldots s_n \in \mathcal{S}$.

Термы логики первого порядка

Пусть V – $\mathcal{S}$-индексированное множество переменных. Тогда мы можем определить множество $\mathrm{Term}_\Sigma(V)_s$ *термов* сорта s индуктивным образом:

- Если $x \in V_s$, то $x \in \mathrm{Term}_\Sigma(V)_s$.
- Если $a_i \in \mathrm{Term}_\Sigma(V)_{s_i}$ и $(f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s) \in \mathcal{F}$, то $f(a_1, \ldots a_n) \in \mathrm{Term}_\Sigma(V)_s$.

Конструкцию термов можно доопределить до функтора $\mathrm{Term}_\Sigma : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Более того, на этом функторе существует естественная структура монады. Упражнение: определите эту структуру.

Формулы логики первого порядка

Пусть, как и раньше, $V \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Теперь мы определим множество $\mathrm{Form}_\Sigma(V)$ *формул* индуктивным образом:

- Если $a_i \in \mathrm{Term}_\Sigma(V)_{s_i}$ и $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{P}$, то $R(a_1, \ldots a_n) \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.
- Если $a_1, a_2 \in \mathrm{Term}_\Sigma(V)_s$, то $a_1 = a_2 \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.
- $\bot, \top \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$, то $\neg\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$, то $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V \cup \{x : s\})$, то $\forall(x : s)\varphi, \exists(x : s)\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(V)$.

Теории логики первого порядка

- *Теория* логики первого порядка состоит из сигнатуры Σ и множества аксиом вида $\varphi \stackrel{V}{\longmapsto} \psi$, где V – конечное множество переменных, а φ и ψ – формулы такие, что $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq V$ и $\mathrm{FV}(\psi) \subseteq V$.
- Когда мы рассматриваем логики, более слабые, чем первого порядка, то мы можем ограничить формулы и/или секвенции, которые можно использовать.
- О секвенции $\varphi \stackrel{x_1,\ldots x_n}{\longmapsto} \psi$ можно думать как о формуле $\forall x_1 \ldots x_n \; (\varphi \to \psi)$.
- Если в логике есть импликация, то секвенции можно заменить одной формулой.
- Если в логике еще есть квантор всеобщности, то можно считать, что эта формула замкнута.
- Таким образом, теории в логике первого порядка обычно определяют как множество замкнутых формул.

Интерпретация сигнатуры

Пусть **C** – декартова категория. Тогда интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в **C** состоит из следующих данных:

- Функция $[\![-]\!] : \mathcal{S} \to Ob(\mathbf{C})$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(\sigma : s_1 \times \ldots \times s_n \to s) \in \mathcal{F}$ морфизм $[\![\sigma]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{P}$ мономорфизм $[\![R]\!] : d_R \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.

Интерпретация термов

Пусть **C** – декартова категория и $[\![-]\!]$ – некоторая интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Если t – терм этой сигнатуры сорта s со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \ldots x_n : s_n\}$, то мы можем определить его интерпретацию $[\![t]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$ следующим образом:

- $[\![x_i]\!] = \pi_i$.
- $[\![\sigma(t_1, \ldots t_n)]\!] = [\![\sigma]\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle$.

Модели алгебраических теорий

- Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая теория, то есть множество аксиом вида $t_1 = t_2$.
- Тогда модель этой теории в декартовой категории $\mathbf{C}$ – это интерпретация сигнатуры теории, такая что для любой аксиомы $t_1 = t_2$ верно $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- Прежде чем описать интерпретацию формул в произвольной конечно полной категории, вспомним как она описывается в **Set**.
- В **Set** формулы интерпретируются как подмножества.
- Пусть $[\![-]\!]$ сопоставляет каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{S}$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Пусть $V = x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k$ – упорядоченное множество переменных. Тогда функция интерпретации $[\![-]\!]$ сопостовляет каждой формуле из $Form_\Sigma(V)$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- $[\![\bot]\!]$ – пустое подмножество.
- $[\![\top]\!]$ – всё множество.
- $[\![\neg\varphi]\!]$ – дополнение подмножества $[\![\varphi]\!]$.
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.
- $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$.
- Упражнение: опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства.

Истинность формул в **Set**

- Интерпретация замкнутой формулы – это подмножество одноэлементного множества.
- Следовательно, либо одноэлементное множество, либо пустое.
- В первом случае говорят, что эта формула *истинна* в этой интерпретации, во втором, что она *ложна*.

Интерпретация формул в конечно полной категории

- Пусть **C** – конечно полная категория.
- Тогда формулы со свободными переменными в V интерпретируются как подобъекты $[\![V]\!]$.
- Если $[\![t_1]\!], [\![t_2]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$, то формула $t_1 = t_2$ интерпретируется как уравнитель $[\![t_1]\!]$ и $[\![t_2]\!]$.
- Формула $\varphi = R(t_1, \ldots t_k)$ интерпретируется как пулбэк $[\![R]\!]$:

$$
\begin{tikzcd}
d_\varphi \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_R \arrow[d, hook, "{[\![R]\!]}"] \\
{[\![V]\!]} \arrow[r, "{\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_k]\!] \rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]}
\end{tikzcd}
$$

Истинность секвенций

- Мы будем говорить, что секвенция $\varphi \longmapsto \psi$ истина в некоторой интерпретации $[\![-]\!]$, если подобъект $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом $[\![\psi]\!]$.
- В частности мы можем говорить, что формула ψ истина, если истина секвенция $\top \longmapsto \psi$; другими словами, если $[\![\psi]\!]$ – максимальный подобъект, то есть изоморфизм.
- Модель некоторой теории логики первого порядка – это интерпретация, такая что все аксиомы в ней истины.

Интерпретация $\top$ и $\wedge$

- $\top$ интерпретируется как максимальный объект.
- Наибольший подобъект объекта X – это id_X.
- $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $[\![\varphi]\!]$ и $[\![\psi]\!]$.