Modelo Probit de Dependencias Espaciales y Demográficas

Valeria Jimeno Villegas

Asesora: Dra. Ruth Selene Fuentes García

Facultad de Ciencias, UNAM

2021

Índice

Objetivo

El objetivo principal fue aprender como se lleva a cabo la **inferencia Bayesiana**.

Para esto se estudió el modelo de *Yang y Allenby* [2], en donde se presenta un modelo que hace inferencia acerca de una preferencia binaria no sólo con las covariables X, si no también incluyendo un segundo término de error al modelo Probit en el cual se toma en cuenta la **interdependencia** que pudiera exisitir entre los individuos de estudio.

Modelo InterProbit

Modelo Probit

aumentado de variables latentes

Decisiones

$$y_i = \begin{cases} 1 & \texttt{si se elige A} \\ 0 & \texttt{si se elige B} \end{cases}.$$

Maximización de la utilidad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(y_i = 1) &= \mathbb{P}(U_{i,A} > U_{i,B}) \\ &= \mathbb{P}(U_{i,A} - U_{i,B} > 0) \\ &= \mathbb{P}(z_i > 0). \end{aligned}$$

Probit de variables latentes

$$z_i = x_i\beta + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

Modelo Probit

Componentes

$$z_i = x_i\beta + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

donde:

z_i = Preferencia latente del individuo i.

x_i = vector de covariables.

β = vector de coeficientes asociados a x_i.

ε_i = coeficiente de error

Modelo Probit

Problemática

Al tener a ε_i **independiente** a través de los individuos, se refleja la **ausencia de posibles efectos de dependencia** entre las preferencias de los individuos.

James LeSage[1]

[1]

consideró introducir una matriz de covarianzas de ε a través de los individuos, mediante un parámetro **autorregresivo** θ,

$$\theta = \rho W\theta + u \qquad u \sim N(0, \sigma_u^2 I_m).$$

Modelo InterProbit

Efecto regional

θ: parámetro autoregresivo

Representa todas las dependencias no observadas entre los individuos.

Es autorregresivo

porque describe las variaciones que exhiben las preferencias latentes medidas en diferentes lugares.

Entonces ...

los aspectos de estas dependencias pueden ser parecidas o inclusive iguales a las de individuos cercanos.

Modelo InterProbit

Efecto regional

θ: parámetro autoregresivo

$$\theta = \rho W \theta + u \qquad u \sim N(0, \sigma_u^2 I_m)$$
$$\theta = (I_m - \rho W)^{-1} u$$

donde:

ρ: grado de dependencia entre los individuos
W : matriz de pesos $(m \times m)$
u : vector de errores iid de tamaño $(m \times 1)$
σ_u^2 : incertidumbre de la estructura espacial

Modelo InterProbit

Modelo Probit de preferencias espaciales y demográficas

$$
\begin{aligned}
Z &= X\beta + \varepsilon + \theta, \\
\theta &= \rho W \theta + u, \\
\varepsilon &\sim N(0, I_m), \\
u &\sim N(0, \sigma^2 I_m).
\end{aligned}
$$

Al haber aumentado un término de error, θ, que determine que las covarianzas sean distintas de cero en las preferencias latentes, y que además no se encuentre en la verosimilitud, se toman en cuenta los efectos de las covarianzas distintas de cero y se simplifica la evaluación de la función de verosimilitud

$$
Z \sim N\left(X\beta, I_m + \sigma^2 \left[(I_m - \rho W)(I_m - \rho W)'\right]^{-1}\right).
$$

Modelo InterProbit

Componentes de θ: ρ

ρ

Es la fuerza de dependencia espacial y demográfica entre los individuos.

- Dada W, ρ representa el impacto de primer orden.
- $\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}} < \rho < \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}}$.
- Si $\rho > 0$ entonces existe una dependencia positiva entre los individuos.

Probit

Modelo InterProbit

Componentes de θ: W

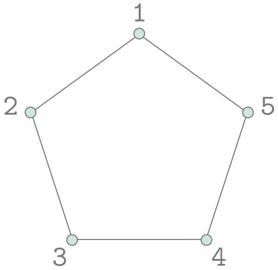

Figura: Gráfico de conexión circular del modelo.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & .5 & 0 & 0 & .5 \\ .5 & 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 & .5 \\ .5 & 0 & 0 & .5 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura: Estructura de la matriz W (normalizada) de 5 individuos.

Modelo InterProbit

Componentes de θ: W

W: matriz de pesos espaciales y demográficos

Sea $W_{(n\times n)}$ una matriz, se dice que $W_{(n\times n)}$ es la *matriz de pesos* si el elemento $w_{i,j}$, $i,j = 1,\ldots,n$, de la matriz describe la cercanía entre el elemento i con el j en términos de una medida de distancia, esto es:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{el elemento } i \text{ es vecino contiguo de } j \\ 0 & \text{el elemento } i \text{ no es vecino contiguo de } j \end{cases}.$$

Los elementos que se ven como vecinos de un elemento dado interactúan con ese elemento de una manera significativa. Como al elemento i no se le considera como su propio vecino entonces $w_{i,i} = 0$.

Modelo InterProbit

Componentes de θ: W con múltiples covariables

Yang y Allenby[2] especifican un matriz autorregresiva W como una mezcla finita de matrices de coeficientes, cada una relacionada con una covariable específica:

$$W = \sum_{k=1}^{K} \phi_k W_k \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \phi_k = 1, \tag{2}$$

Inferencia Bayesiana

Modelo InterProbit

Teorema de Bayes

Modelo InterProbit

Distribuciones iniciales

$$\beta \sim N\left(\bar{\beta}, T^{-1}\right) \quad \texttt{con} \;\; T = XX'$$

$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 s_0^2}{2}\right),$$

$$\rho \sim U\left(\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}}, \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}}\right),$$

$$\theta \sim N\left(0, \sigma^2 \left[BB'\right]^{-1}\right), \quad \texttt{con} \;\; B = (I_m - \rho W)$$

$$Z \sim N\left(X\beta, I_m + \sigma^2 \left[BB'\right]^{-1}\right).$$

priors

Modelo InterProbit

Distribuciones finales

$$
\begin{aligned}
\beta &\sim N\left(\bar{\beta}, T^{-1}\right) \quad \texttt{con} \;\; T = XX' \\
\sigma^2 &\sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 s_0^2}{2}\right), \\
\rho &\sim U\left(\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}}, \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}}\right), \\
\theta &\sim N\left(0, \sigma^2 \left[BB'\right]^{-1}\right), \quad \texttt{con} \;\; B = (I_m - \rho W) \\
Z &\sim N\left(X\beta, I_m + \sigma^2 \left[BB'\right]^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

James P LeSage. ‘‘Bayesian estimation of limited dependent variable spatial autoregressive models’’. En: *Geographical Analysis* 32.1 (2000), págs. 19-35.

Sha Yang y Greg M Allenby. ‘‘Modeling interdependent consumer preferences’’. En: *Journal of Marketing Research* 40.3 (2003), págs. 282-294.