Ejercicio 3 Unicidad Digrafo

Aguilar Valentin

April 2024

Quiero demostrar que para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos.

Supongamos que cada vértice tiene un grado de salida distinto. Por lo tanto, los grados de salida de los vértices van de 0 a $n-1$ (ya que no puede haber un vértice que apunte a sí mismo):

$$d_{\text{out}}(v_0) < d_{\text{out}}(v_1) < d_{\text{out}}(v_2) < \ldots < d_{\text{out}}(v_{n-1})$$

Por la demostración del ejercicio 2, sabemos que todo grafo no trivial debe tener al menos dos vértices del mismo grado. Y al tratarse de un grafo orientado, estas repeticiones de grados estarán en los grados de entrada. Esto se refleja en los grados de salida de cada vértice:

$$d_{\text{out}}(v_{n-1}) < d_{\text{out}}(v_{n-2}) < d_{\text{out}}(v_{n-3}) < \ldots < d_{\text{out}}(v_0)$$

Resulta que los grados de salida serán los opuestos a los grados de entrada.

Entonces, para todo vértice $v \in V(D)$, $d_{\text{out}}(v) + d_{\text{in}}(v) = n - 1$.
Esto significa que todos los vértices están conectados con todos los demás vértices.

Por lo tanto, el grafo orientado que cumple con que sus vértices tienen grados de salida distintos es el grafo completo, que es único.