# Ejercicio 4 ArteConexo

Aguilar Valentin

April 30, 2024

## Item A:

Demostrar que todo grafo de $n$ vértices que tiene más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo.

**Prueba por inducción:**

**Caso base:** $n = 1$ y $n = 2$

El antecedente se falsea para estos casos, por lo tanto, cumple.

**Paso inductivo:** Supongamos que $p(n)$ es verdadero, es decir, si $|E(G_n)| > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ entonces $G_n$ es conexo.

**Caso en que sacar un vértice no afecta la cantidad de aristas:** Como el vértice no tiene aristas, por la hipótesis inductiva se cumple la conexidad.

**Caso en que sacar un vértice afecta la cantidad de aristas:** Queremos ver la cantidad máxima de aristas que podemos sacar para que se cumpla.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} - a &> \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
\Rightarrow \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - a\right) &> \left(\frac{n^2}{2} - n - \frac{n}{2} + 1\right) \\
\Rightarrow -\frac{n}{2} - a &> -\frac{3}{2}n + 1 \\
\Rightarrow n - a &> 1 \\
\Rightarrow n - 1 &> a
\end{aligned}$$

Entonces, podemos sacar nodos de grado hasta $n-2$. Si todos los nodos tienen $n-1$ aristas, entonces eso es un grafo completo, y es conexo por definición.

Por lo tanto, probamos que $p(n+1)$ vale para todos los casos, entonces $p(n)$ vale $\forall n \geq 0$.