Ejercicio 1, Práctica 3: Introducción a la teoría algorítmica de grafos

Aguilar valentin

April 2024

Teorema 1. *Se demuestra por inducción sobre la cantidad de aristas:*

Caso 1: Base: $|E(D)| = 0$

$$\sum_{v \in V} d^{\text{in}}(v) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{v \in V} d^{\text{out}}(v) = 0,$$

por lo tanto, se cumple.

Caso 2: Paso inductivo: $P(|E(D)|) = P(|E(D)| + 1)$

Hipótesis inductiva: $\sum_{v \in V} d^{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d^{\text{out}}(v) = |E(D)|$

Nombramos D' al grafo que es el grafo original más una arista como $\{(s,t)\}$, donde s es una arista de entrada y t es una arista de salida.

Como D' tiene una arista de salida y una de entrada más que D:

$$\sum_{v \in V(D')} d^{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V(D)} d^{\text{in}}(v) + 1$$

$$\text{y} \quad \sum_{v \in V(D')} d^{\text{out}}(v) = \sum_{v \in V(D)} d^{\text{out}}(v) + 1$$

$$|E(D')| = |E(D)| + 1$$

Luego, si agregamos 1 a cada lado de la igualdad en la hipótesis inductiva:

$$\sum_{v \in V(D)} d^{\text{in}}(v) + 1 = \sum_{v \in V(D)} d^{\text{out}}(v) + 1 = |E(D)| + 1$$

Por lo tanto, como vimos antes, esto es igual a:

$$\sum_{v \in V(D')} d^{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V(D')} d^{\text{out}}(v) = |E(D')|$$

Así, queda probado por inducción que todo digrafo satisface lo pedido.