# Проект по геометрия

Име: Валентин Фамилия: Кирилов

Специалност: Софтуерно инженерство Курс: 1

**Теоретична част:** Взаимно положение на две равнини в пространството

**Практична част:** Правите $h\colon \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 \\ z = -3 + 2s \end{cases}$, $m\colon \begin{cases} x = 1 - u \\ y = 4 + 3u \\ z = -1 + 2u \end{cases}$, и $b\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ са съответно височина, медиана и вътрешна ъглополовяща през върха $A$ на триъгълника $ABC$, чиято височина през върха $A$ има дължина $|AD| = \sqrt{5}$. Да се намерят координатите на ортоцентъра на триъгълника.

**Теоретична част:** Взаимно положение на две равнини в пространството

Нека са дадени равнините:

$\alpha_1$: $A_1.x + B_1.y + C_1.z + D_1 = 0$

$\alpha_2$: $A_2.x + B_2.y + C_2.z + D_2 = 0$

Двете равнини са успоредни, когато:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

Двете равнини съвпадат, когато:

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Двете равнини се пресичат, когато:

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \text{ (От теоремата на Руше)}$$

**Практична част:**

Точката ***A*** лежи на правите ***h**, **m*** и ***b***.

$$y = 1 = 4 + 3u$$
$$\Leftrightarrow 3u = -3$$
$$\Rightarrow u = -1$$

Следователно можем да намерим координатите на точката ***A*** по следния начин:

$$\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 4 - 3 = 1 \\ z = -1 - 2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(2, 1, -3)$$

Точката $H(2 - s, 1, -3 + 2s) \in AH$ и $|AH| = \sqrt{5}.$

$AH(2 - s - 2, 1 - 1, -3 + 2s + 3)$, т. е $AH(-s, 0, 2s)$

$|AH| = \sqrt{s^2 + 4s^2} = \sqrt{5}$ и $s = \pm 1$

Има две такива точки:
$H_1(1, 1, -1)$и $H_2(3, 1, -5)$. Те са централно симетрични относно А.

Без ограничение на общността избираме точката $H_1$

Вектор $\vec{u}(1, 0, -2)$ ортогонален на $h \Rightarrow$

$\beta$: $x - 2r + d$ е равнина ортогонална на $h$

$H_1 \in \beta \Rightarrow 1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

$\beta$ има уравнение $x - 2r - 3 = 0$

Също така средата на отсечката $BC$ е т. $M = m \cap \beta$

$$1 - u + 2 - 4u - 3 = 0$$

$$-5u = 0 \Rightarrow u = 0$$

По същия начин, по който намерихме точката ***A*** по-горе, заместваме полученото в уравнението на правата и намираме точка ***M***:

$$\begin{cases} x = 1 - 0 = 1 \\ y = 4 + 0 = 4 \\ z = -1 + 0 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1, 4, -1)$$

$\Delta BDA \sim \Delta MON$

$\frac{AD}{CM} = \frac{AB}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 2$

Нека $P \in a$ права успоредна на $h$ и минаваща през $M$

$a(1-\mu, 4, -1+2\mu), \mu \in (-\infty, +\infty)$

$P \ \cap b \ \Rightarrow P(-1{,}4{,}3) - \ P$ е средата на дъгата $\widehat{BC}$

Нека $Q$ е среда на $AP \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$

Симетралата на AP минава през Q и е перпендикулярна на AP.

Ортогонална на AP е равнината $\gamma\colon\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + 3z + d = 0$

$$Q \in \gamma \ \Rightarrow -3x + 3y + 6z + d = 0$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + d = 0$$

$$\Rightarrow d = \ -6$$

$$\gamma\colon x - y - 2z + 2 = 0$$

Точката О-център на описаната окръжност е и прободната точка на MP и $\gamma$

$$\Rightarrow O\left(\frac{4}{5}, 4, -\frac{3}{5}\right)$$

$$CM = (\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5})$$

$$|CM| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|AD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$O \in h \Rightarrow \sqrt{5s^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$5s^2 = 2 \Rightarrow s = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

Откъдето следва, че координатите на ортоцентъра са:

$$D_{1,2}(2 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}, 1{,}3 \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}})$$