



Trabajo Práctico N°3: Procesos estocásticos y transformada de Fourier

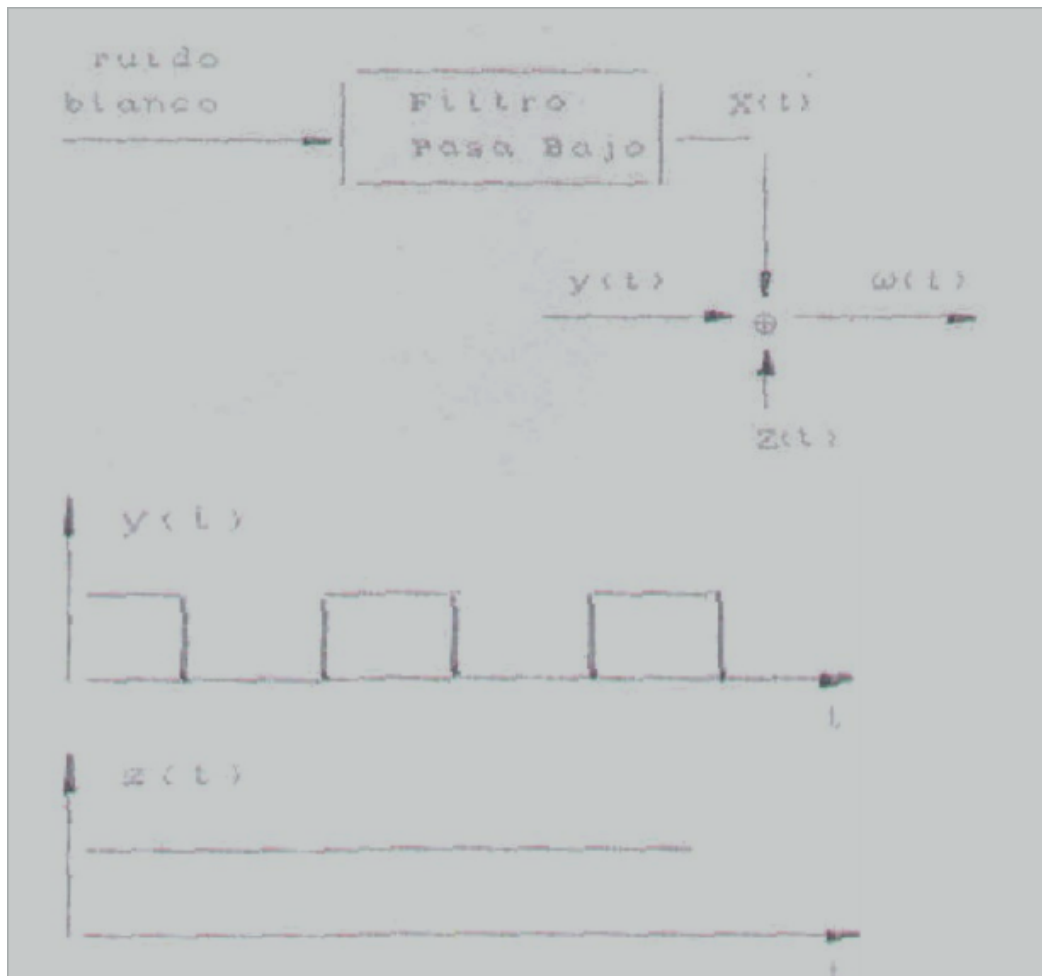
Nieva Miguel Pedro Valentin | M.U:00932

Código: <https://github.com/valkur5/Control-Optimo/tree/main/TP3>

Desarrollo:

Ejercicio 1:

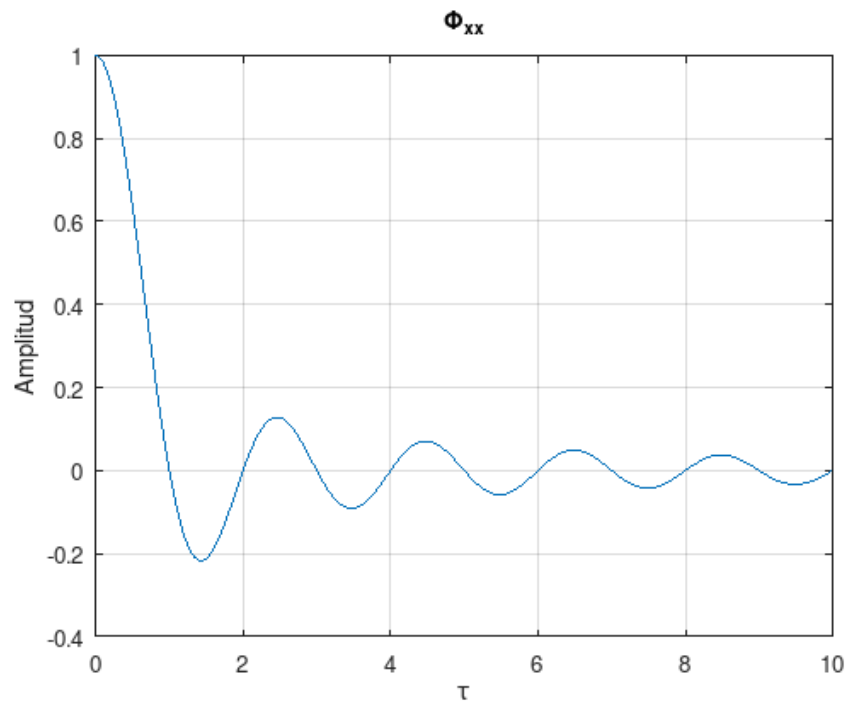
Se nos pide graficar las funciones de correlación ϕ_{xx} , ϕ_{yy} , ϕ_{zz} , ϕ_{ww} de las siguientes señales temporales:



Las autocorrelaciones se analizarán analíticamente pero su gráfica de autocorrelación será aproximada utilizando GNU Octave para una mejor representación.

Ruido blanco:

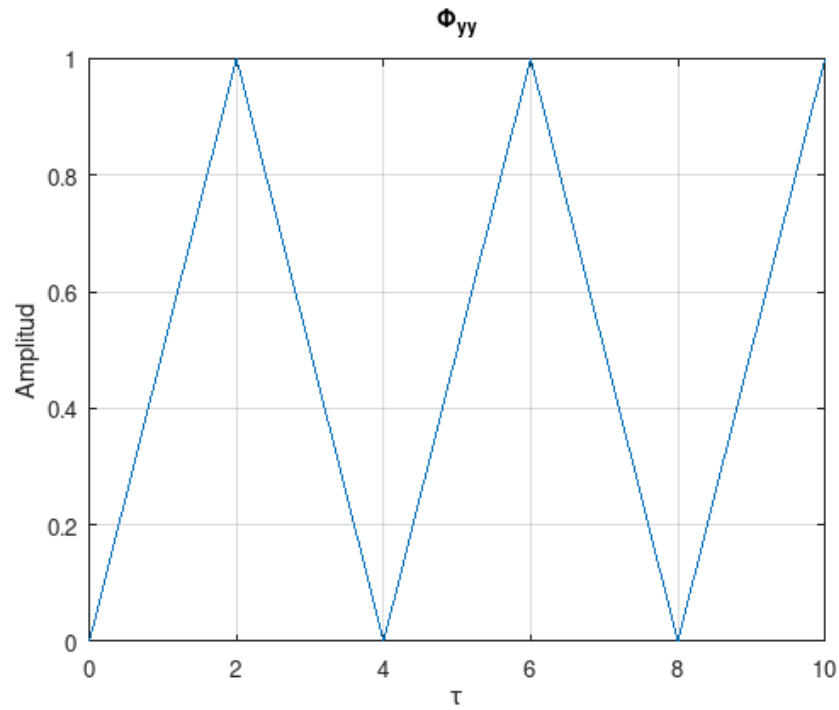
Empezaremos a calcular la función de correlación del ruido blanco, este ruido debido a su naturaleza, tendría un valor infinito al inicio, y luego se anularán sus valores ante cada desplazamiento. Sin embargo, este ruido blanco pasa primero por un filtro pasabajos, por lo que se vería algo como:



Donde en el origen, para $\tau = 0$, el valor de la autocorrelación es infinito.

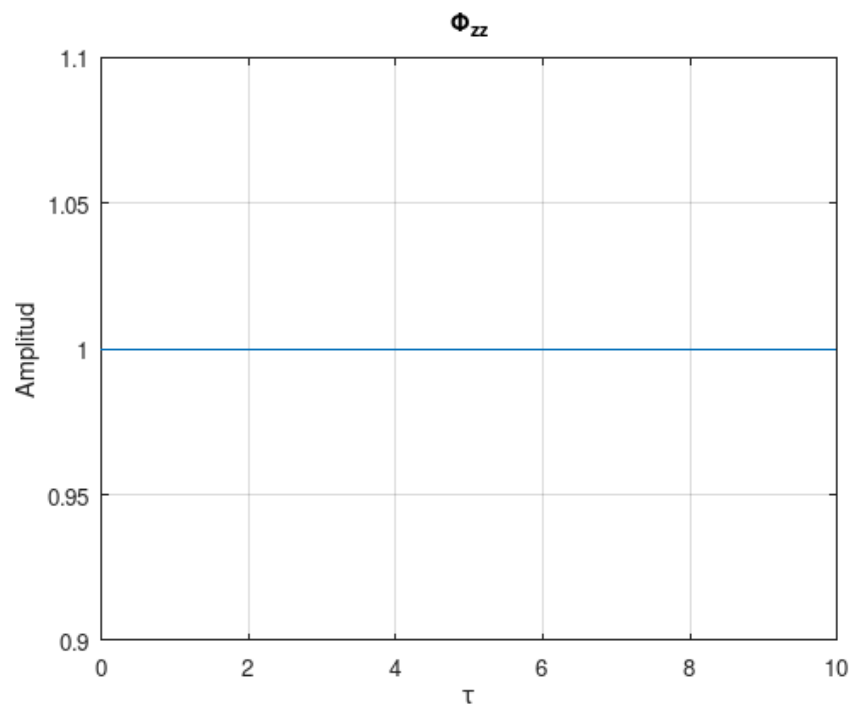
Onda cuadrada:

Tenemos ahora una onda periódica cuadrada, que a medida que lo vamos desplazando τ , los valores decrecen hasta llegar a cero, y luego vuelven a crecer a un máximo cuando la onda cuadrada vuelve a estar en fase. Esto nos da por resultado una onda triangular como la siguiente:



Pulso constante:

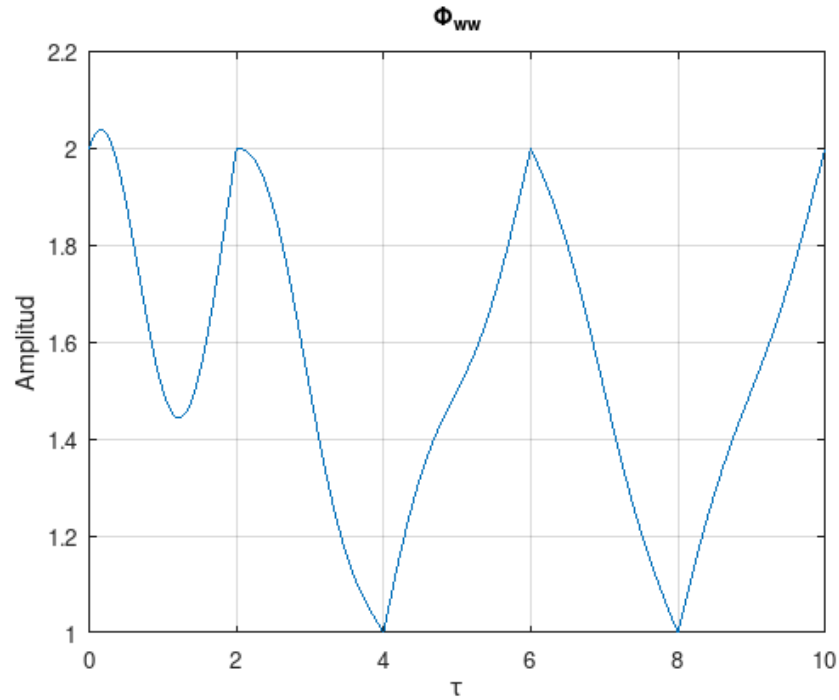
En este caso, la autocorrelación será simplemente otro valor constante.



Esto ocurre ya que el valor se mantiene igual para cada desplazamiento τ .

Salida del sistema:

La salida del sistema, tendrá una autocorrelación equivalente a la suma de las autocorrelaciones mostradas anteriormente, que se verá como:



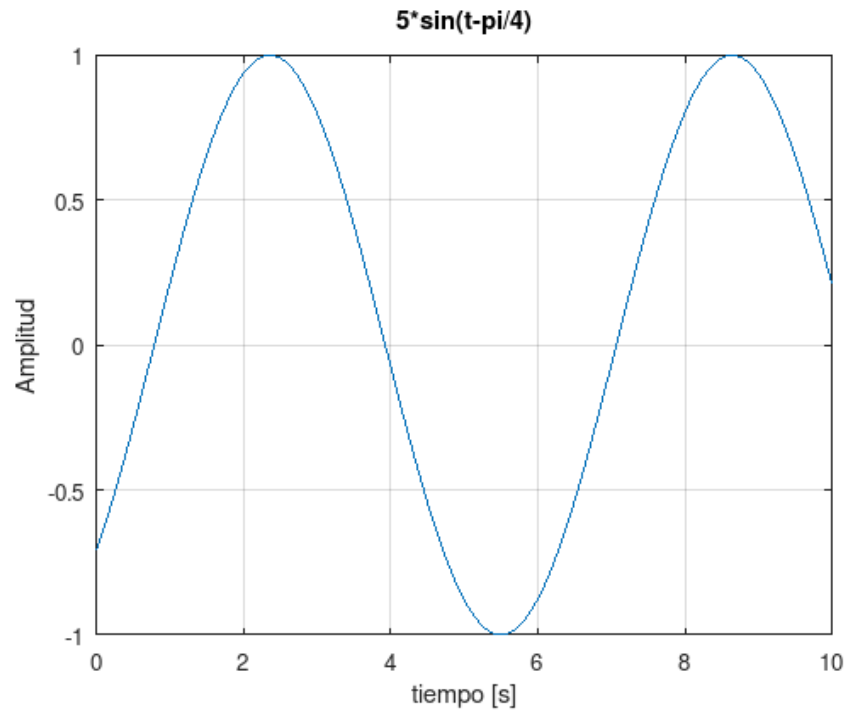
Este resultado vemos que tiene un offset de 1 (Debido a la señal continua), tiene el inicio igual al de la función sync (Debido a la correlación del ruido blanco filtrado), y cuando la función sync se hace más pequeña se nota más la señal triangular (Debido a la correlación de la onda cuadrada).

Ejercicio 2:

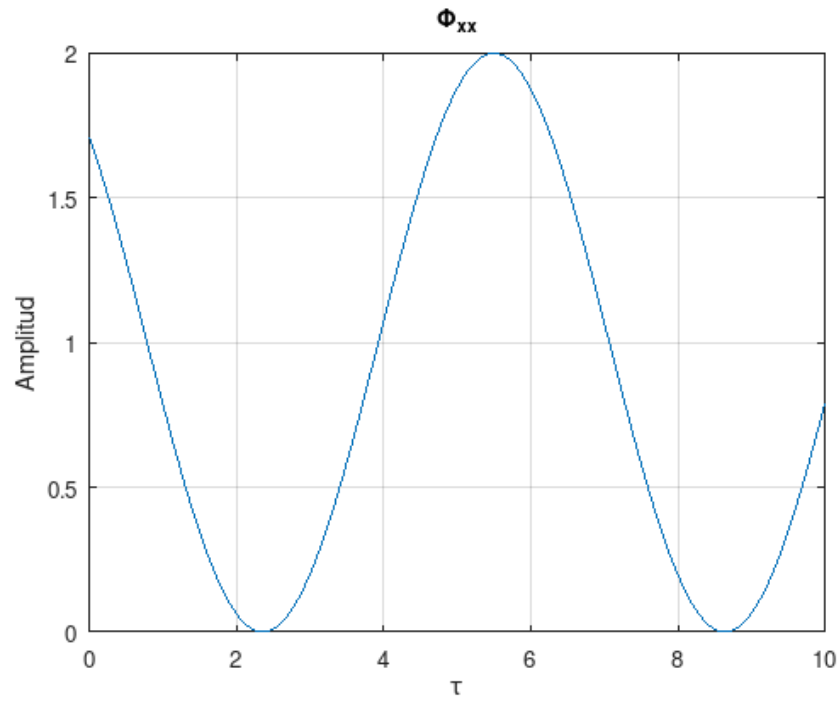
Se nos pide calcular y graficar la autocorrelación de la siguiente señal temporal:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t - \sigma)$$

En nuestro caso, para graficarlo, utilizaremos $A = 5$ y $\sigma = \pi/4$, quedándonos lo siguiente:



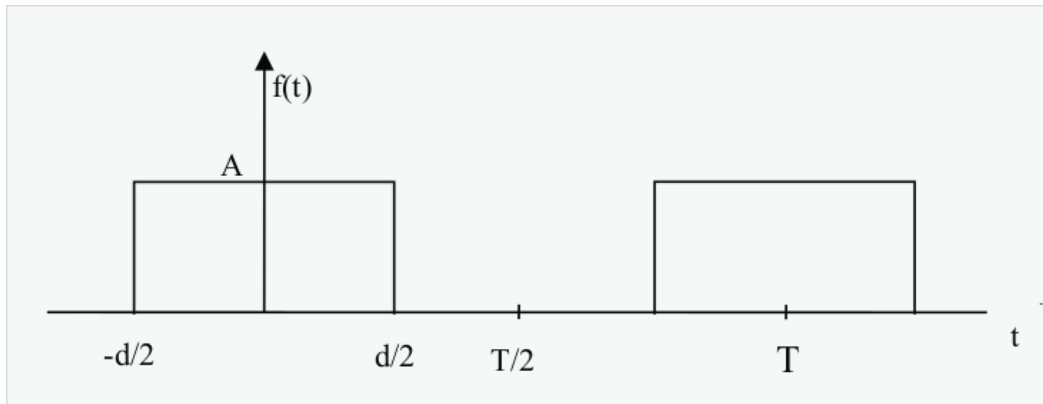
Analizando esto para hacer la autocorrelación, podemos determinar que la correlación es positiva para todo τ , y nos terminará graficando una señal similar a la siguiente.



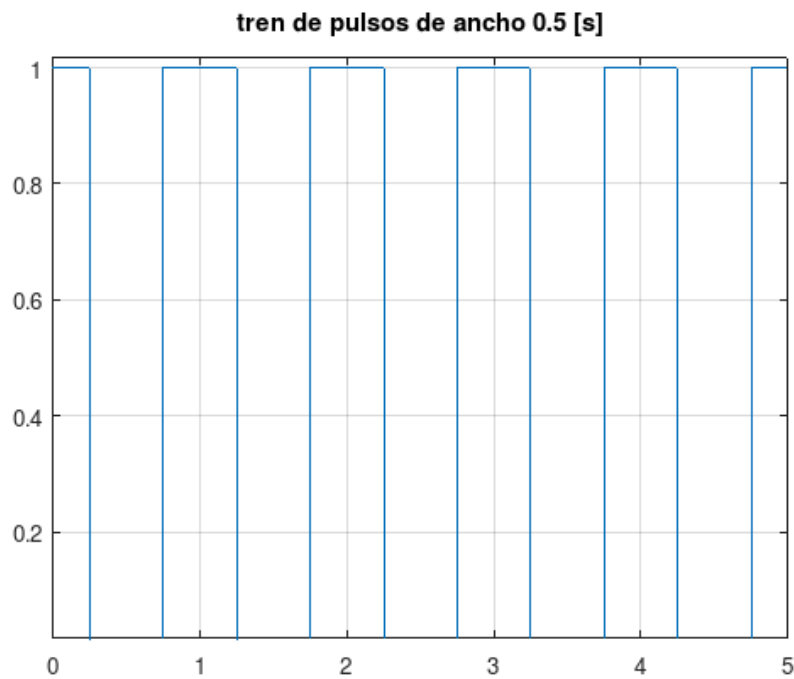
Donde vemos que debido a los valores negativos iniciales que tenemos en la señal original, tenemos valores cercanos al máximo positivo cuando hacemos la correlación, debido a que para valores bajos de τ , estas señales tienen el mismo signo.

Ejercicio 3:

Se nos pide graficar el espectro de amplitud de un tren de pulsos rectangulares como el que sigue:



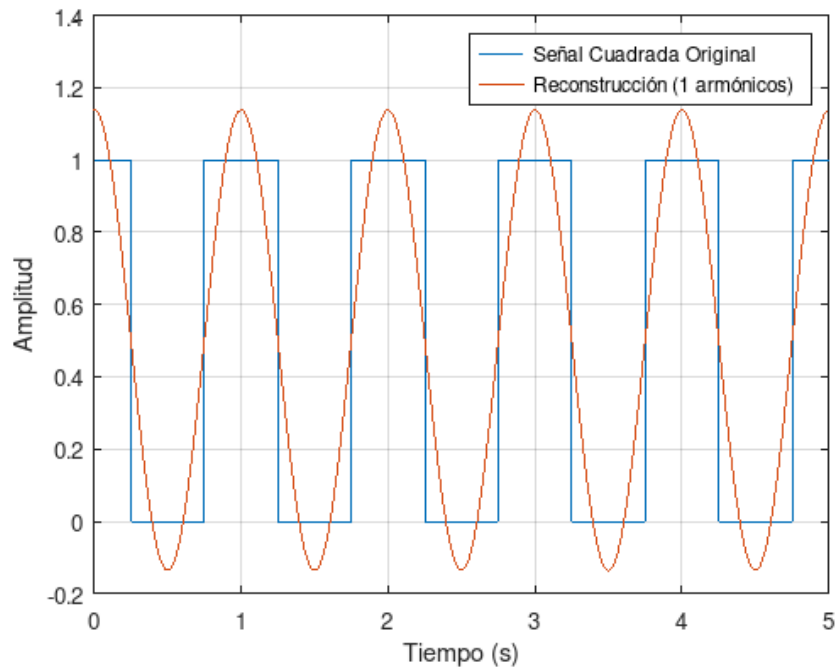
Trasladando esta figura a GNU Octave lo más fiel posible a esta onda cuadrada, obtenemos lo siguiente:



Ahora lo que realizaremos será la transformada de Fourier y reconstruiremos algunos de los armónicos.

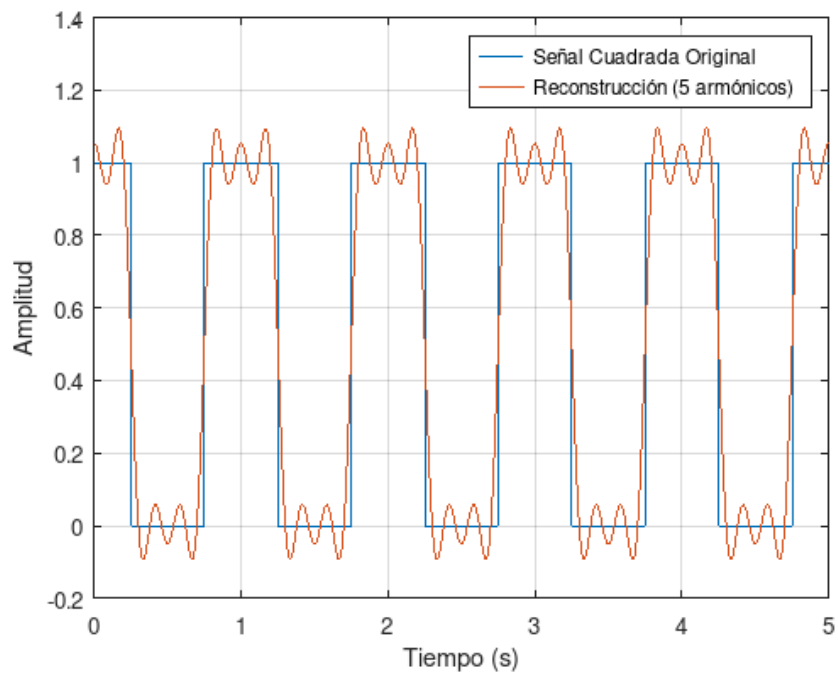
- **1 armónico** (La fundamental):

Señal Cuadrada y Reconstrucción con Componentes Cosenoidales

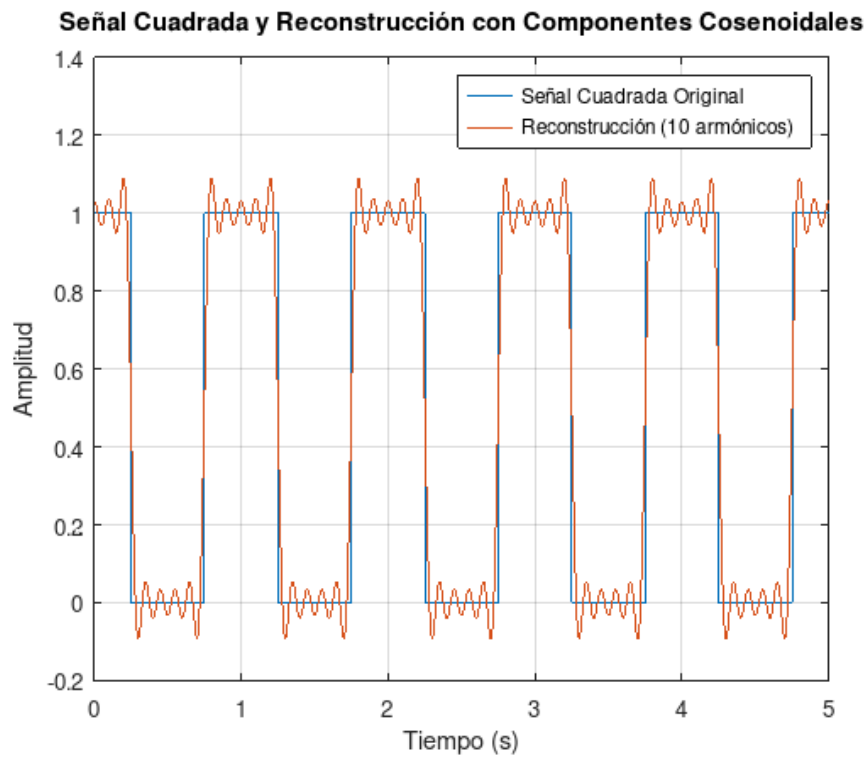


- **5 armónicos:**

Señal Cuadrada y Reconstrucción con Componentes Cosenoidales



- 10 armónicos:



Vemos que como es de esperable gracias a Fourier, podemos reconstruir una señal periódica con una serie de señales (en este caso cosenoidales, debido a que la señal es simétrica), y que mientras más armónicos tomemos, más nos aproximamos a la señal original.

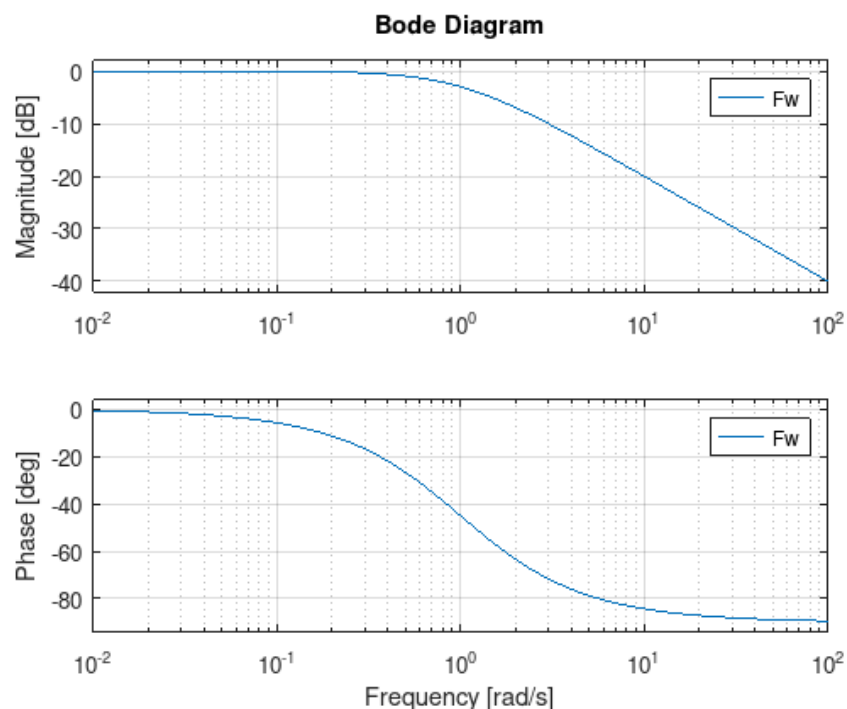
Ejercicio 4:

Se nos presenta la siguiente señal con transformada de Fourier

$$F(W) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

Para analizar esta señal lo haremos con el diagrama de Bode, y para eso necesitamos asignar valores a K y a T . En nuestro caso $K = 1$ y $T = 1$.

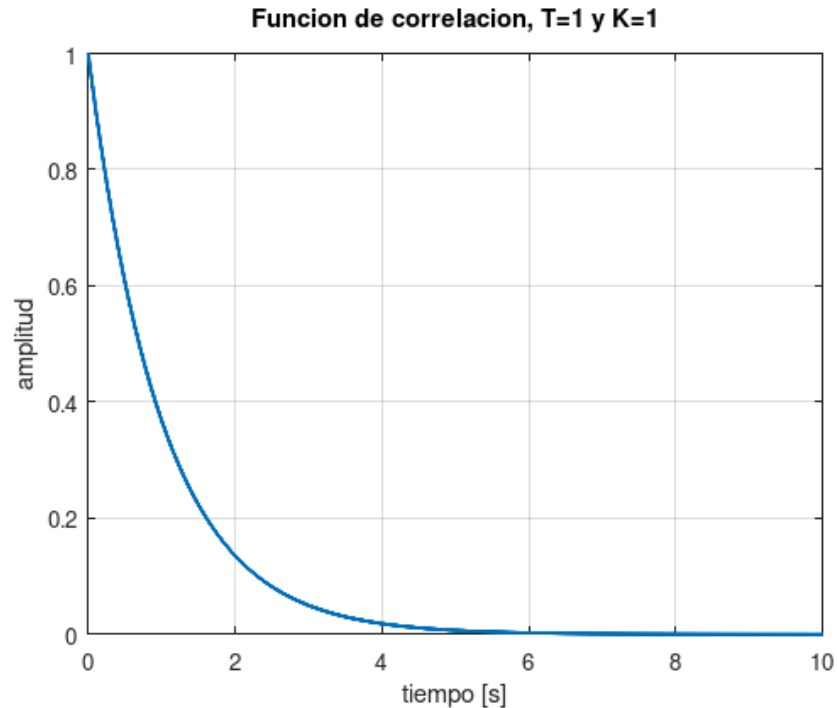
A) La densidad espectral de potencia la expresaremos utilizando el diagrama de Bode:



B) Se nos pide también determinar la función de autocorrelación, esto nosotros sabemos que se calcula como la antitransformada de Fourier a la densidad espectral de potencia. Esto es:

$$\Phi_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{K}{1 + j\omega T} \right\}$$
$$\Phi_{xx}(\tau) = \frac{K}{T} e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}$$

Esta se ve gráficamente como:



- C) Se nos pide determinar el valor medio y el valor cuadrático medio. Esto lo podemos determinar fácilmente conociendo la función de correlación, ya que la función de correlación en $\tau = 0$ nos da por resultado el valor medio, y el valor cuadrático medio se calcula elevando ese resultado al cuadrado.

En nuestro caso será:

$$\Phi_{xx}(0) = \frac{K}{T} e^{\left(-\frac{0}{T}\right)}$$

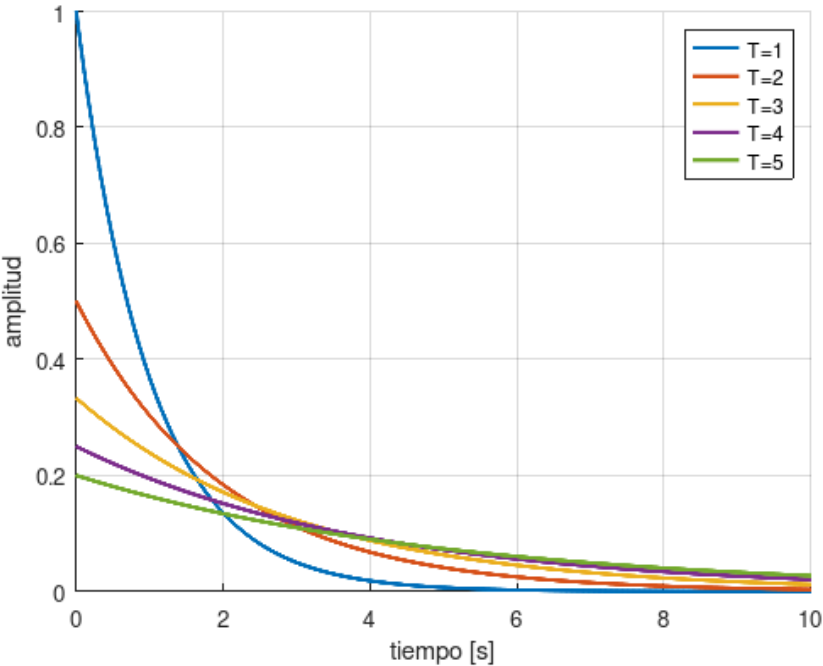
$$\Phi_{xx}(0) = \frac{K}{T}$$

Y como mencionamos anteriormente, elevando este valor al cuadrado obtenemos el valor cuadrático medio. En ambos casos tendremos que esto es igual a 1.

Valor medio 1 y valor cuadrático medio 1.

- D) Se nos plantea analizar cómo cambia nuestra función de correlación al cambiar T, para esto realizaremos las gráficas con $1 \leq T \leq 5$, donde de esta forma podremos observar cómo cambia la función a medida que T aumenta:

Funcion de correlacion, K=1

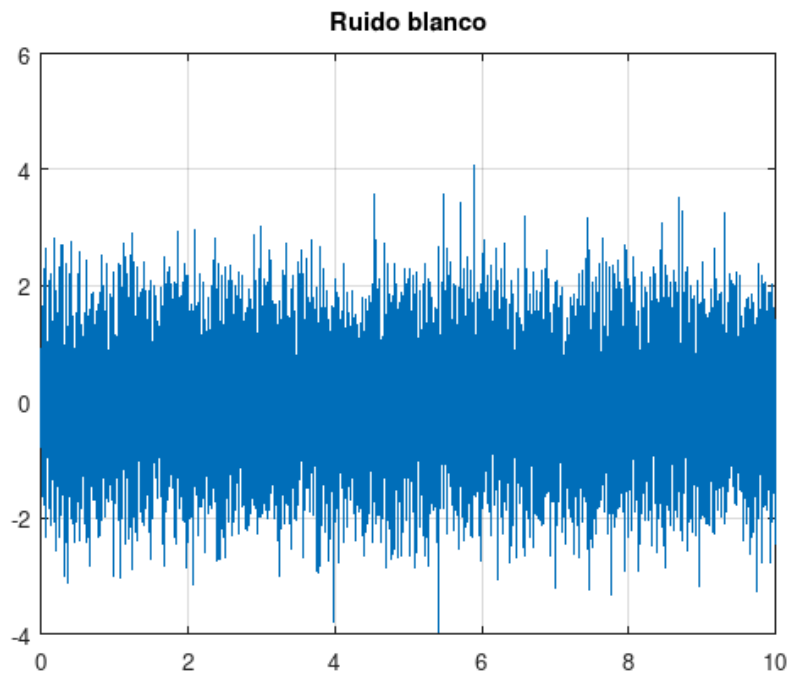


Ejercicio 5:

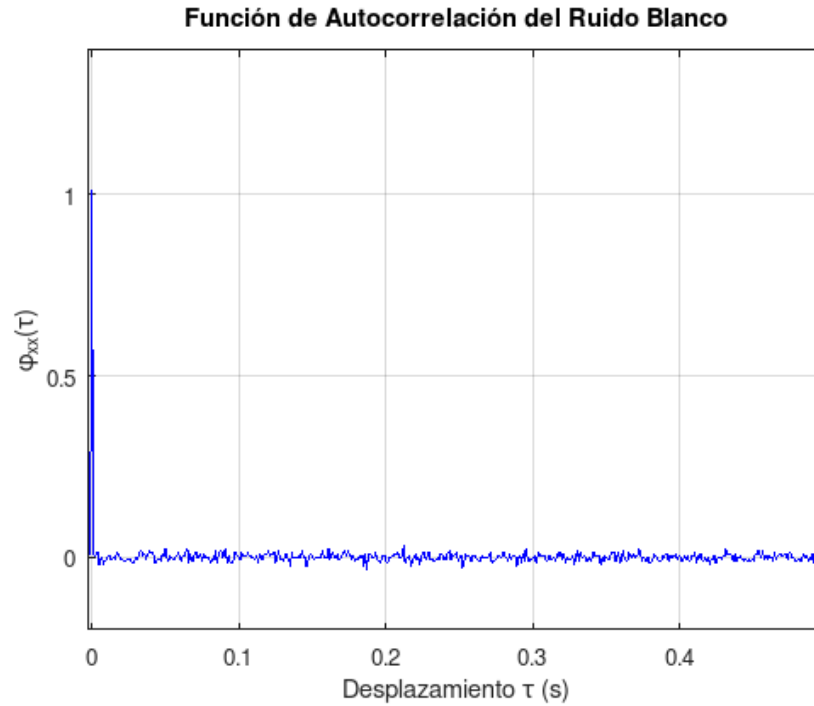
Se nos pide graficar las funciones de autocorrelación y autoespectro de potencia del ruido blanco.

Realizaremos estas gráficas utilizando GNU Octave.

En este software, contamos con el comando `"randn"` que nos permite generar una serie de números aleatorios con la variación que queramos y la cantidad de valores que queramos, con esto vamos a crear nuestro ruido blanco, como vemos a continuación:



Con esta señal podremos obtener la autocorrelación. Como analizamos anteriormente, en el origen tenderá a infinito, y luego todos los valores serán nulos (En el ejercicio 1, esto no se veía tan claramente debido a que primero teníamos un filtro pasa bajos). Esto lo podemos corroborar fácilmente con el comando `"xcorr"` que con los parámetros correctos nos puede entregar la función de correlación deseada.

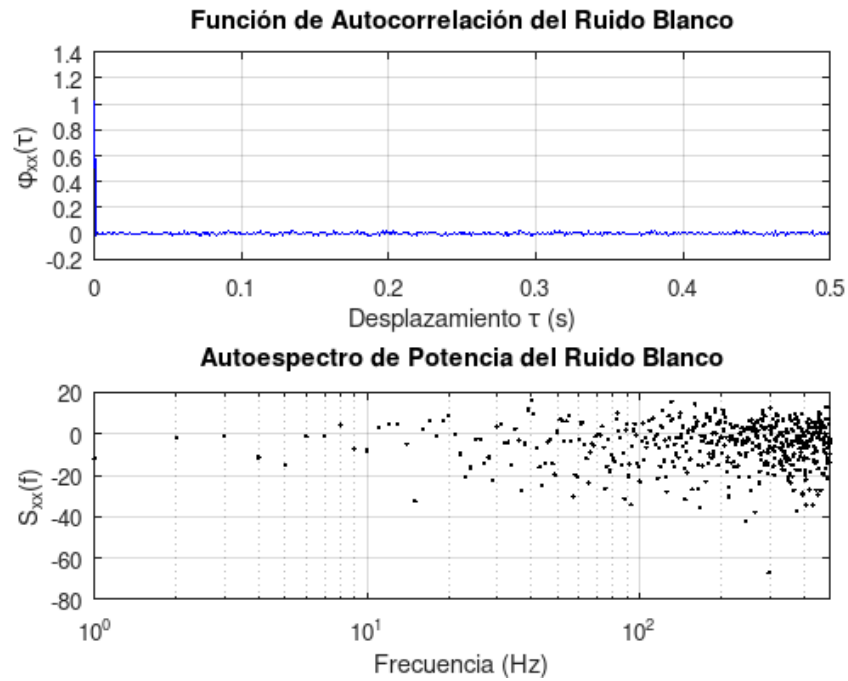


Por último se nos pide calcular el autoespectro de esta señal. Nosotros sabemos que para obtener el autoespectro podemos utilizar la expresión:

$$S_x(j\omega) = \mathcal{F}[\Phi_{xx}(\tau)]$$

Entonces significa que debemos utilizar la transformada de Fourier para obtener el autoespectro. Esto en octave se realiza fácilmente con la función “*fft*” que nos entrega el resultado de la transformada rápida de Fourier.

A la salida obtenemos:



El autoespectro de potencia del ruido blanco lo representamos en escala logarítmica como si se tratase de un diagrama de Bode. Si bien podemos ver que hay ciertas dispersiones en la potencia, vemos que tiende a mantenerse dentro de todo constante. Esto tiene sentido y de hecho se espera que sea así, ya que justamente una de las características principales del ruido blanco es que este mantiene constante su potencia en todo el espectro de frecuencias. De ahí que se le dice *Ruido Blanco*.

Ejercicio 6:

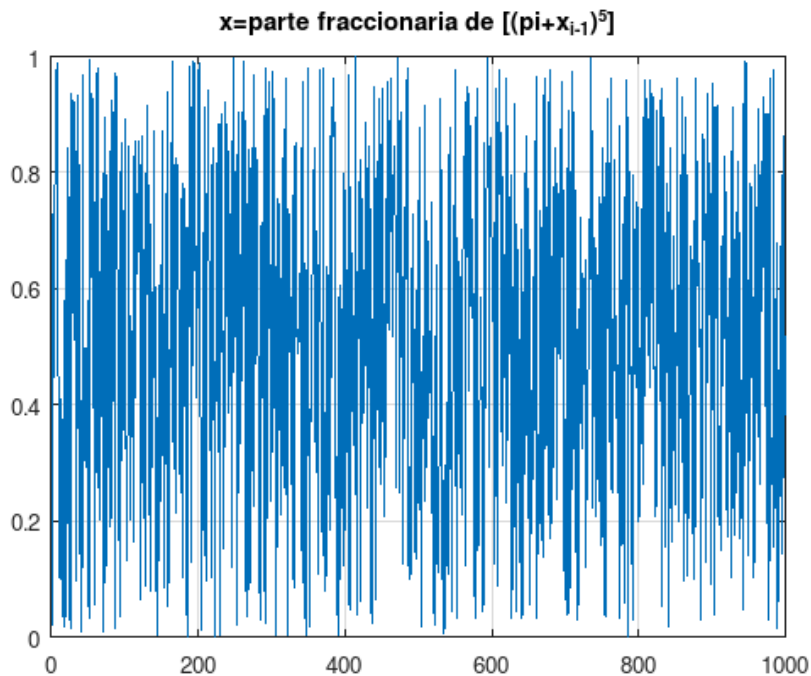
Se nos pide generar una señal numérica pseudoaleatoria de 100 datos cuyos valores varíen entre 0 y 1, con la expresión:

$$x_i = \text{parte fraccionaria de } [(\pi + x_{i-1})^5]$$

siendo $x_0 = 0$.

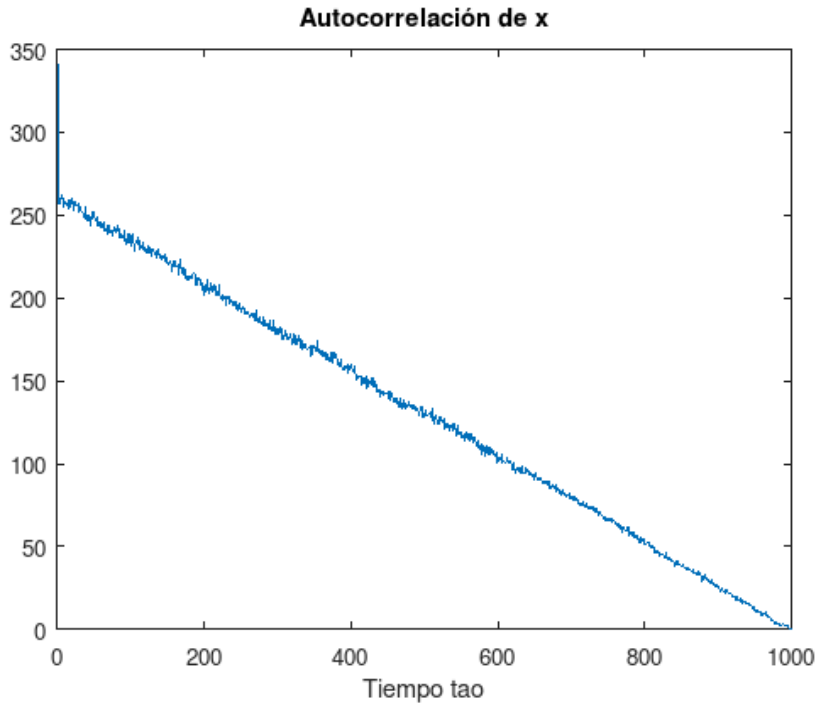
Luego, con esta señal nos piden la autocorrelación y el espectro de potencia, tal cual como hicimos en el ejercicio anterior.

Primero generamos la señal con la expresión que se nos otorgó, quedándonos así:



Vemos que es un ruido, similar al ruido blanco pero sólo tomando valores positivos.

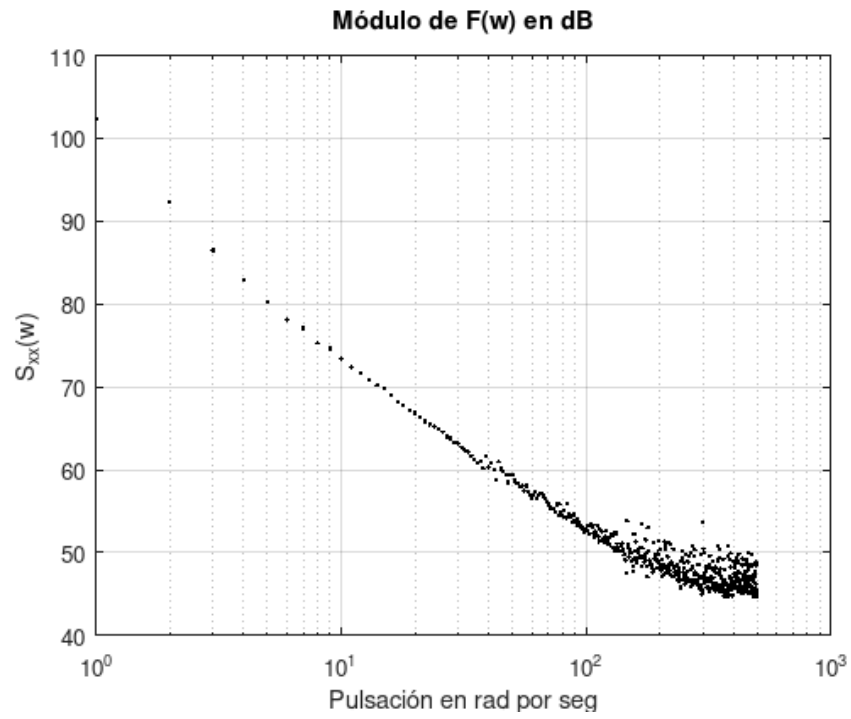
Nuevamente para determinar la función de autocorrelación utilizamos el comando “*xcorr*” en octave, obteniendo así:



Vemos aquí la primera diferencia con el ruido blanco, la autocorrelación es diferente, inicia con un valor muy alto igual que con el *ruido blanco* pero luego va decreciendo hasta llegar a cero. Podemos adjudicar este efecto a que la señal es completamente positiva, en el caso anterior tomaba valores positivos y negativos que se anulaban entre sí al hacer la correlación.

Ahora realizaremos el espectro de potencia, y para ello usaremos el mismo análisis que el caso anterior, solamente que aquí viendo el resultado de la función de autocorrelación y la naturaleza del ruido generado, no tendremos una potencia que tienda a ser constante, al contrario, esperamos que la potencia decaiga para altas frecuencias.

El resultado obtenido lo podemos ver a continuación:



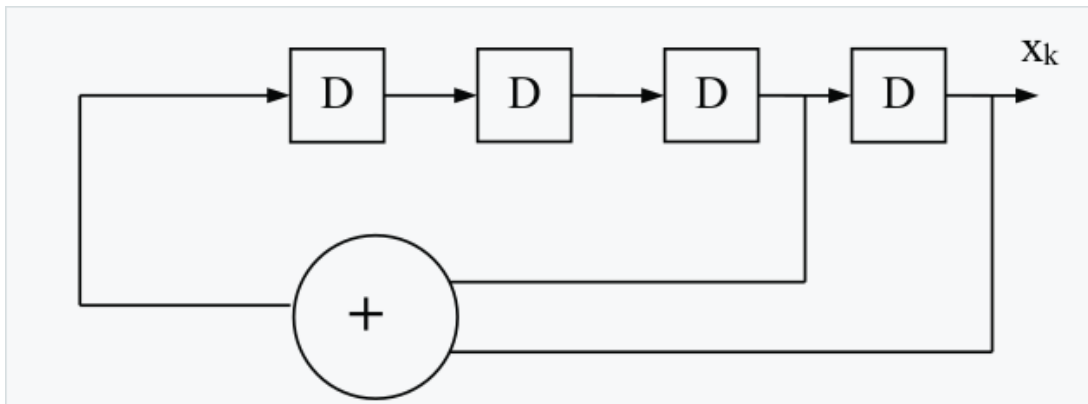
Obtuvimos una curva que va decreciendo su potencia a medida que aumenta su frecuencia. Esto concuerda con los resultados esperados de nuestro análisis.

Ejercicio 7:

Se nos pide generar una señal binaria pseudoaleatoria (PRBS) con $m = 4$, donde $r(t) = 1$ corresponde a un estado lógico alto, y $r(t) = -1$ corresponde a un estado lógico bajo. Con esta señal debemos calcular la función de autocorrelación y su espectro de potencia. Se nos otorga como dato:

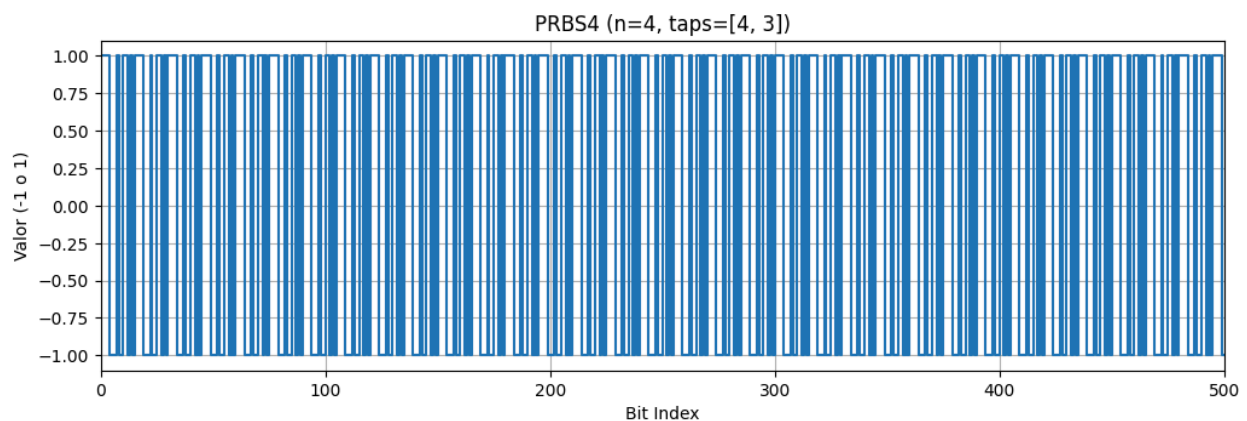
$$\tau = M\Delta\tau$$
$$T = N\Delta T$$

Se pide $N = 500$. Sin embargo nosotros tomaremos un $N = 5000$, y modificaremos las gráficas para que sólo veamos 2 periodos. El diagrama en bloques es el siguiente:



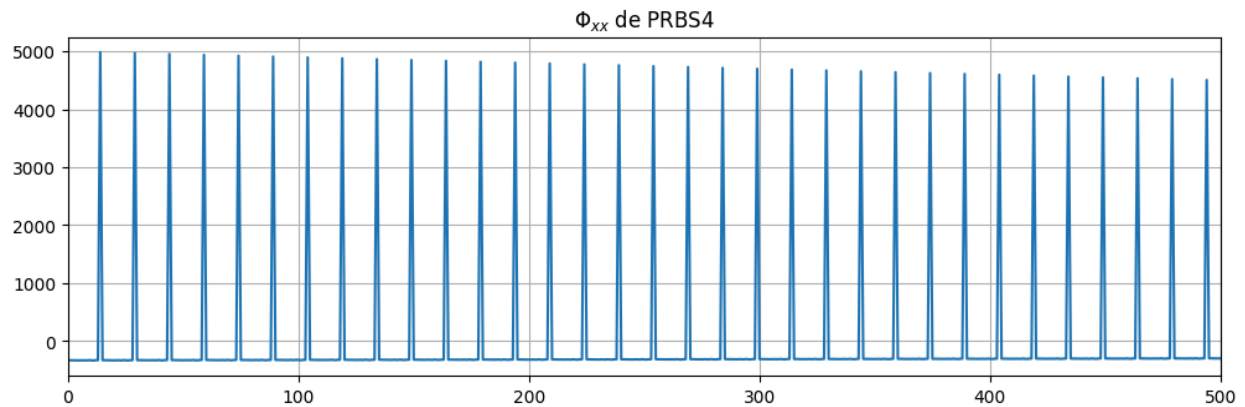
Se plantea que debemos detectar el patrón repetitivo y verificar si la autocorrelación lo acusa.

Si graficamos la PRBS dada, obtendremos lo siguiente:



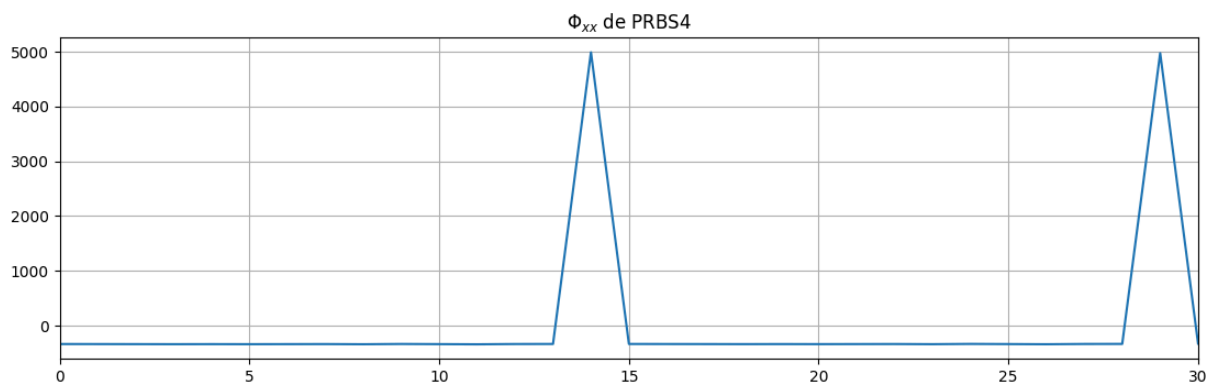
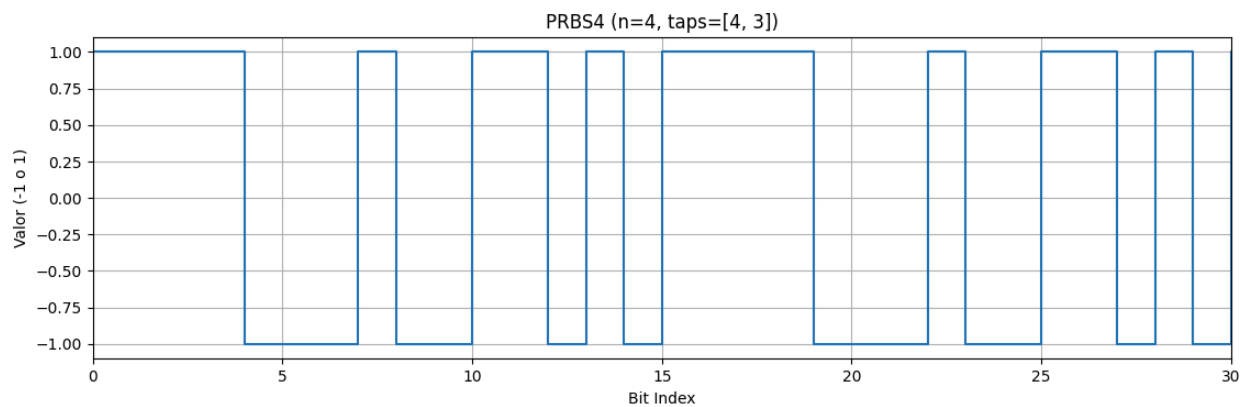
Vemos que es una señal que no se puede distinguir fácilmente si tiene algún patrón repetitivo, al contrario, uno podría interpretar esto como únicamente ruido.

Para determinar si existe algún patrón repetitivo se puede utilizar la autocorrelación, donde veremos como un pico cuando en el desplazamiento del τ exista una coincidencia, es decir, cuando se repita la señal.



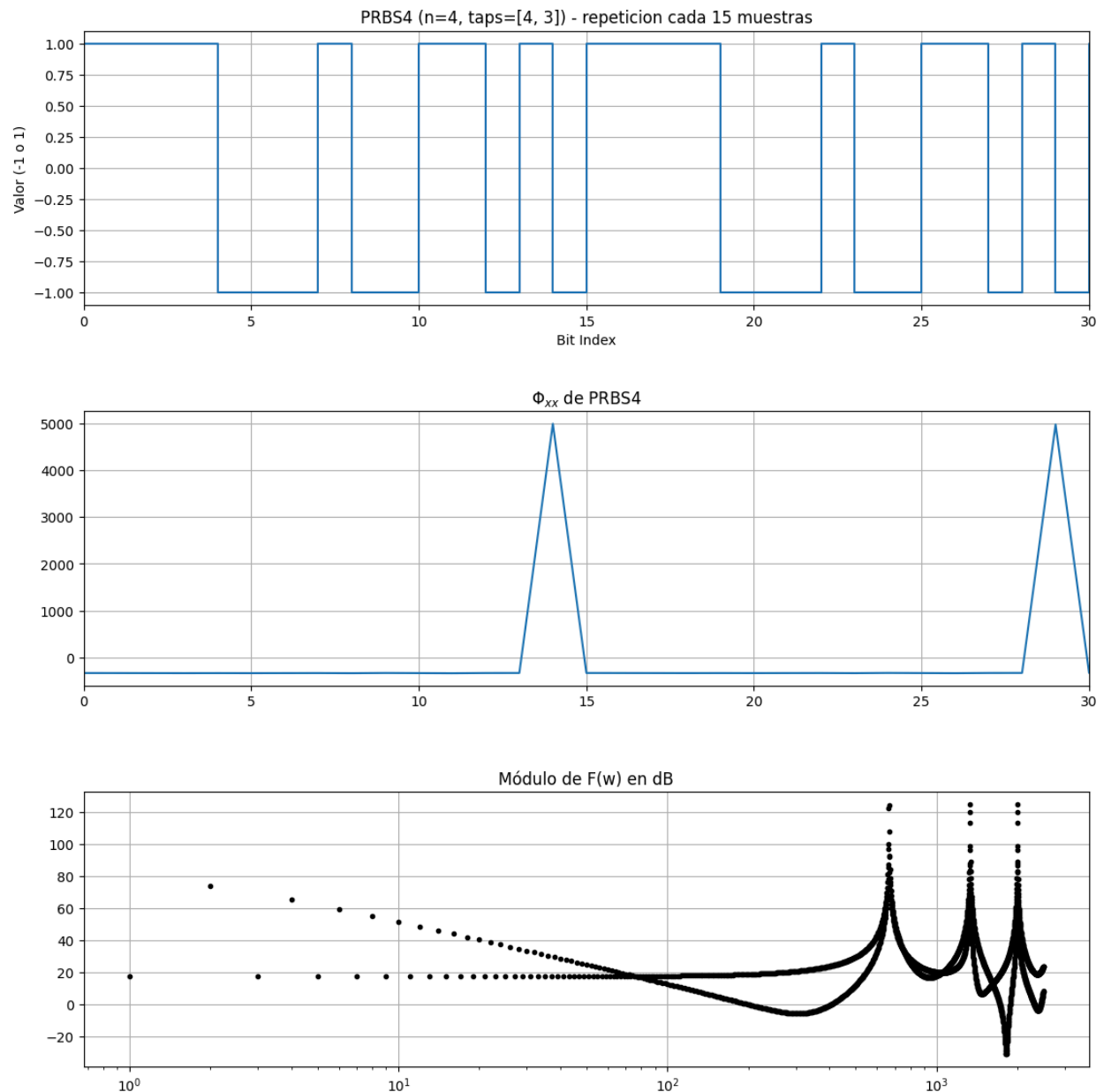
Vemos que efectivamente existe un patrón, que podemos analizarlo en los picos de la señal.

Este patrón tiene que aparecer cada $2^n - 1$ muestras. En este caso $n = 4$, por lo que tendríamos que ver un pico repetitivo cada $2^4 - 1 = 15$ muestras. Conociendo este aspecto teórico vamos a analizar la señal PRBS y su espectro de autocorrelación en un periodo igual al doble de esta cantidad de muestras, es decir, 30:



Vemos que efectivamente tenemos un pico de repetición cada 15 muestras. Esto lo vemos de esta forma gracias a que asumimos un $\Delta T = 1$, ya que si fuese menor el la cantidad de muestras antes de ver una repetición sería menor.

A continuación mostraremos además la gráfica del espectro de potencia en dB.



Vemos que el espectro de potencia tiene sus picos en torno a los 600 y a los 2000 Hz.

Para los siguientes casos de PRBS que se plantean, se realizará el mismo análisis. Para simplificar utilizaremos un solo ploteo, intentando abarcar dos periodos de la señal para que sea visible.

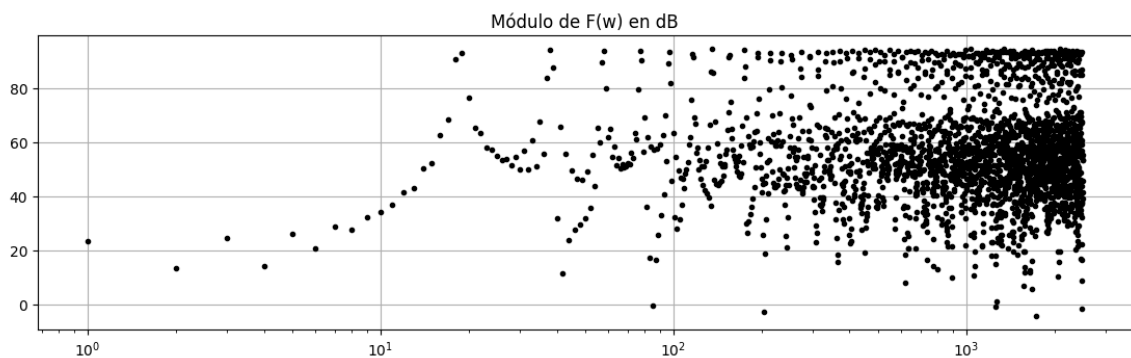
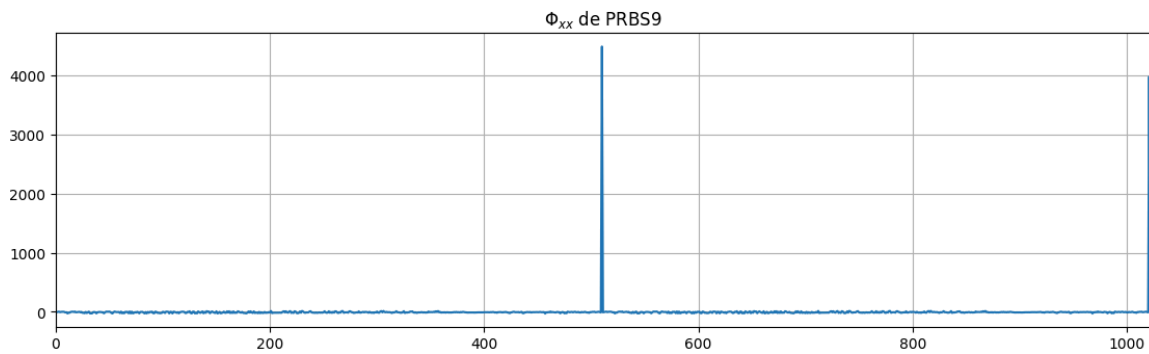
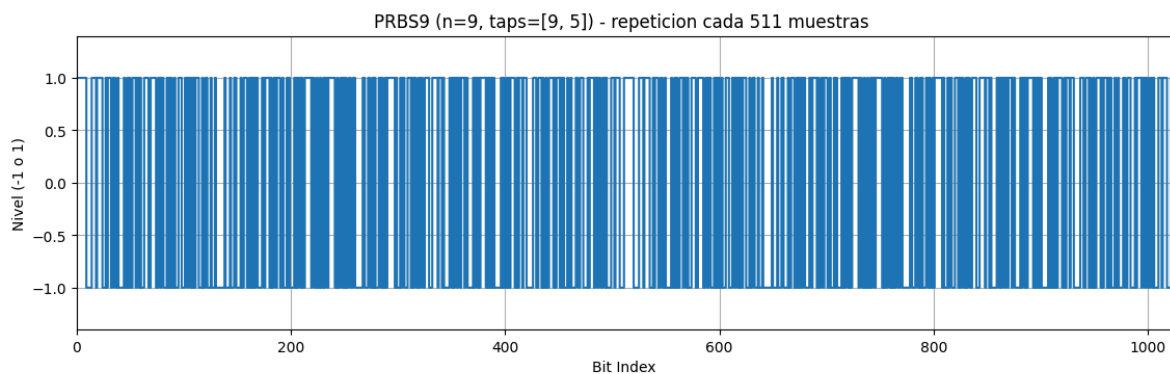
A continuación, se nos pide que hagamos la recreación de otras PRBS; las PRBS9, PRBS11, PRBS15 y PRBS20. Adjuntaremos un gráfico con el periodo encontrado, y haremos una observación de cada uno.

PRBS9:

Se nos pidió:

$$PRBS9 : x^9 + x^5 + 1$$

Dándonos por resultado:



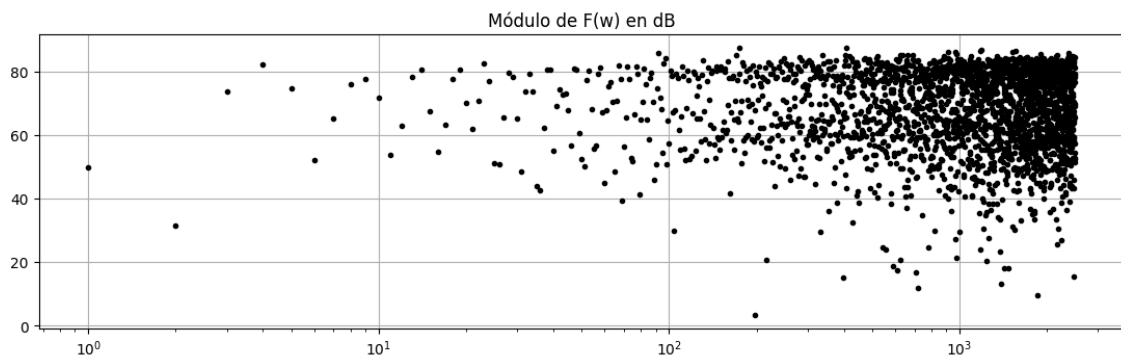
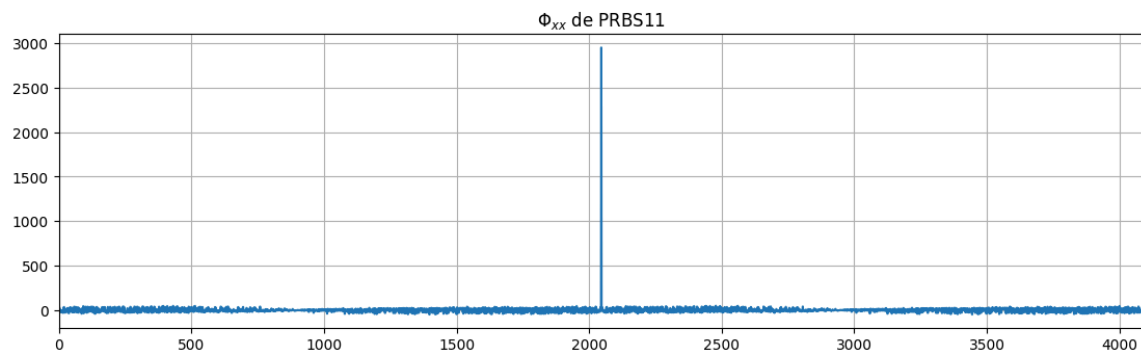
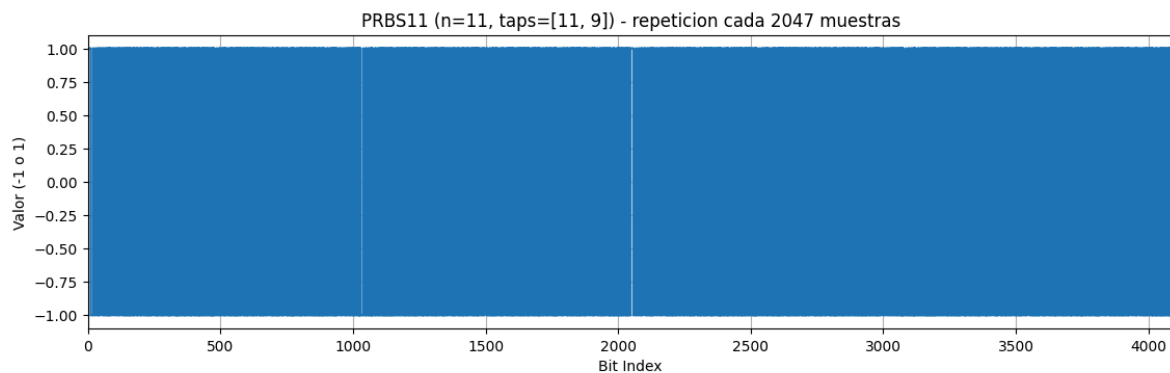
Al generar una PRBS de grado mayor, nuestro periodo de repetición crece exponencialmente, en este caso teniendo un ciclo repetitivo cada 511 muestras. Es por esto que decidimos abarcar 5000 muestras por señal, para poder observar claramente los picos repetitivos del periodo en la autocorrelación.

PRBS11:

Se nos pidió:

$$PRBS11: x^{11} + x^9 + 1$$

Obtuvimos gráficamente:



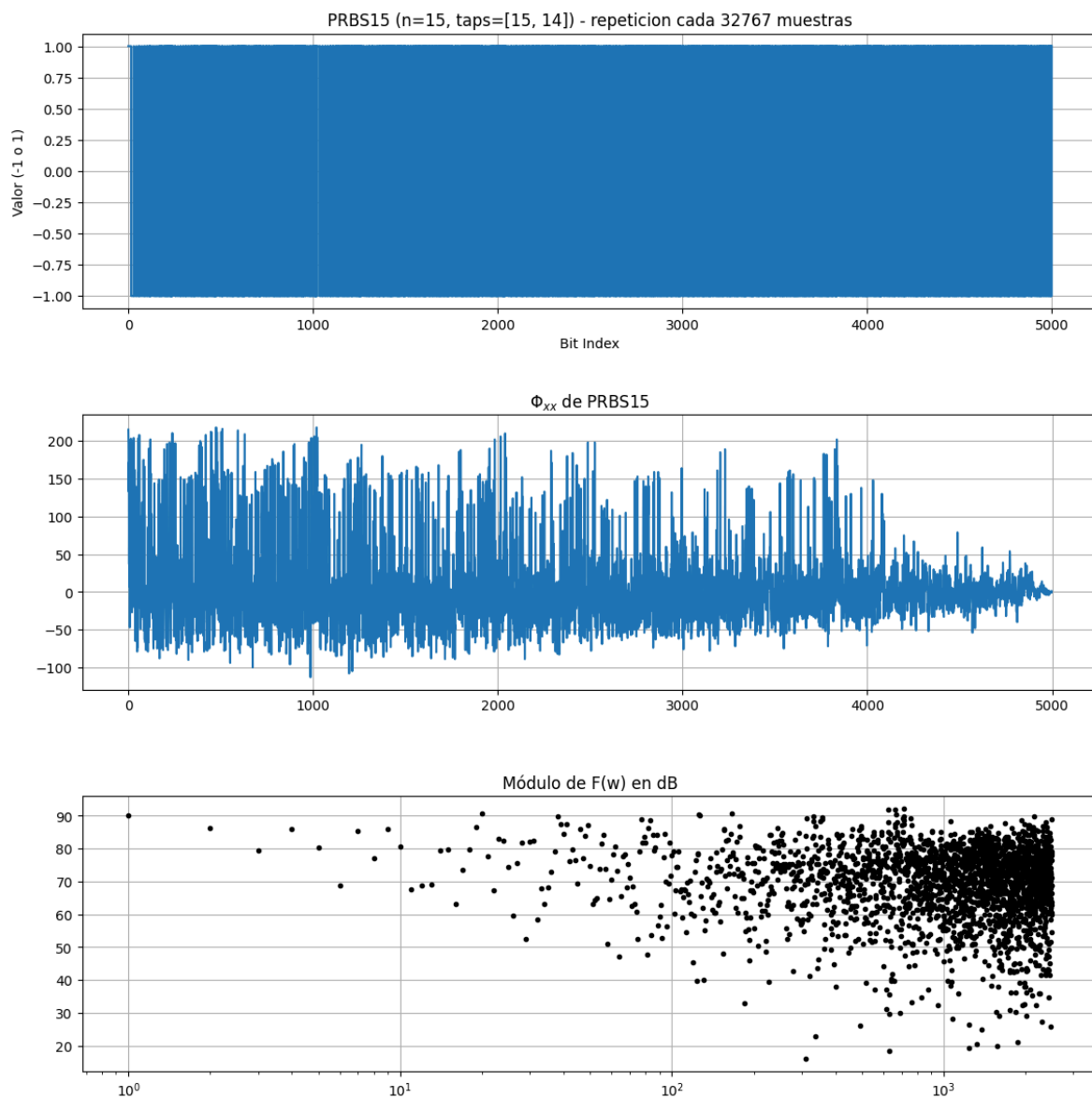
Nuestro periodo creció nuevamente, dándonos un ciclo repetitivo cada 2047 muestras. Este ciclo repetitivo es apreciable gracias a la autocorrelación nuevamente. Podemos observar también que el módulo del espectro de potencias se vuelve más desordenado.

PRBS15:

La expresión es:

$$PRBS15: x^{15} + x^{14} + 1$$

Con lo que obtuvimos gráficamente:



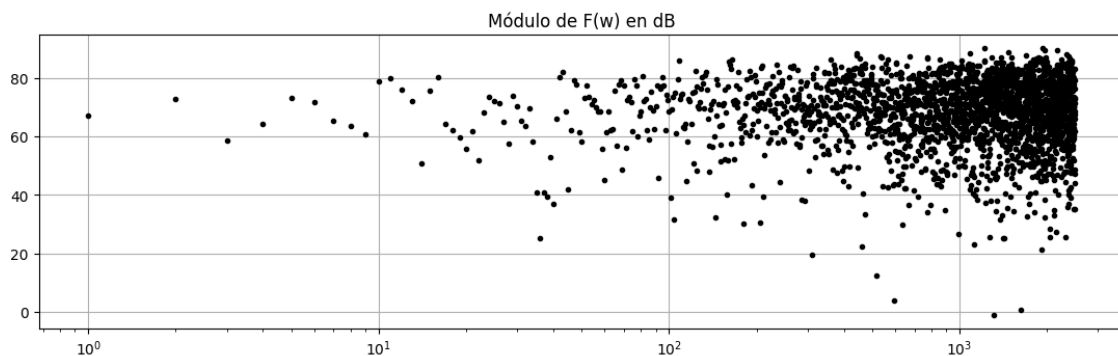
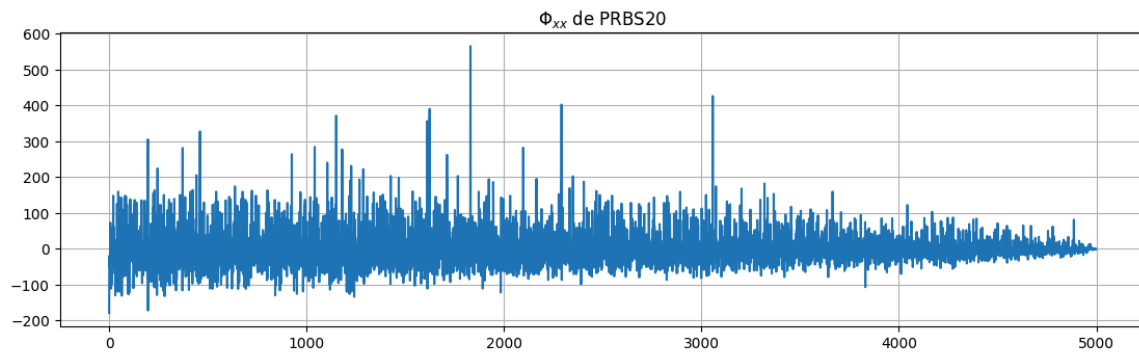
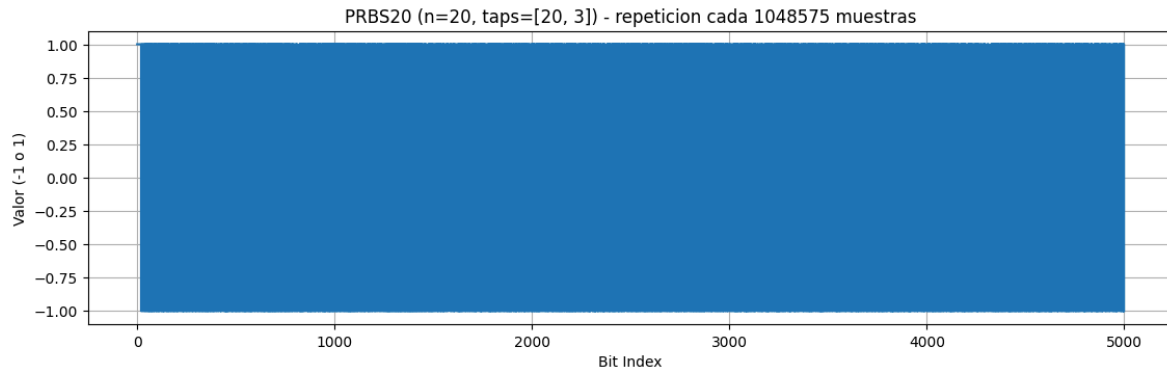
Podemos ver que ahora se nos hace imposible ver el espectro repetitivo de nuestra señal en su autocorrelación, esto es porque la naturaleza de este tipo de PRBS tiene un ciclo repetitivo cada 32767 muestras. Teniendo en cuenta que tomamos un $\Delta T = 1$, significa que tenemos un periodo de repetición cada 9 minutos aproximadamente. Se puede considerar prácticamente aleatoria este tipo de señal.

PRBS20:

En este caso se nos presenta la expresión:

$$PRBS20 : x^{20} + x^3 + 1$$

Con lo que se obtuvo:



Como podemos observar, nos dá un periodo de repetición de 1048575 segundos (debido a nuestro ΔT), esto es cada 4.8 *hs*. Este tipo de señal de este grado podemos decir que se puede considerar completamente aleatoria. Dando por concluído así el ejercicio.

Este ejercicio fue realizado utilizando Python, analizar el código en el Github Anexado. La primera versión de este trabajo fue realizado en octave, pero debido a inconvenientes en la programación no obtuvimos las PRBS que cumplan las propiedades deseadas. Es por eso que se hizo el traspaso de octave a Python.

Ejercicio 8:

Se nos da la siguiente función de peso de un sistema lineal:

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^{\infty} g(a)x(t-a)da$$

Demostremos:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t)\Phi_{xx}(\tau-t)dt = g(\tau) * \Phi_{xx}(\tau)$$

Empezaremos nuestro análisis, sin embargo es necesario aclarar que esta demostración es posible gracias a que (gracias a los límites de integración) el sistema es causal, eso es lo que hace que el límite de integración de la correlación cruzada va de 0 a infinito.

Para comenzar esta demostración, definiremos la función de correlación cruzada.

$$\Phi_{xy}(\tau) = E[x(t-\tau)y(t)]$$

Sustituimos $y(t)$:

$$\Phi_{xy}(\tau) = E\left[x(t-\tau) \int_0^{\infty} g(a)x(t-a)da\right]$$

Dado que la esperanza es un operador lineal, y $g(\tau)$ es una función determinista, podemos:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(a)E[x(t-\tau)x(t-a)]da$$

Donde la expectativa nos terminará entregando lo que conocemos como la autocorrelación de la entrada, evaluada en el instante $(\tau - a)$:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(a)\Phi_{xx}(\tau-a)da$$

Haciendo un cambio de variable de a a t :

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t)\Phi_{xx}(\tau - t)dt$$

Esta última expresión es igual a la convolución:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t)\Phi_{xx}(\tau - t)dt = g(\tau)*\Phi_{xx}(\tau)$$

Damos entonces concluida la demostración pedida.