



# **Trabajo Práctico N°7: Controlador con estimación de estados**

Nieva Miguel Pedro Valentin | M.U:00932

Código: <https://github.com/valkur5/Control-Optimo/tree/main/TP7>

## Índice

Actividades.....	3
Actividad 1:.....	3
Actividad 2:.....	3
Actividad 3:.....	3
Desarrollo:.....	4
Actividad 1:.....	4
Caso del Péndulo invertido.....	4
$\sigma = 0.01$ .....	5
$\sigma = 0.02$ .....	6
$\sigma = 0.05$ .....	7
$\sigma = 0.1$ .....	8
Caso del avión.....	9
Observador de Luenberger.....	10
Estimador de Kalman.....	11
Conclusión del modelo del avión.....	11
Actividad 2:.....	12
1. Estimador de Kalman con ganancia fija (Estado estacionario).....	12
2. Estimador de Kalman calculada en línea.....	13
Conclusiones.....	14

**Actividades****Actividad 1:**

Implementar un sistema de control con estimación de estados para cada caso del TPN° 6 (El péndulo invertido y el Avión), y realizar la comparación del observador allí empleado (el de Luenberger) con el estimador de Kalman.

**Actividad 2:**

Dividir en 3 al tiempo de simulación, inicia con F y G definidas, en la segunda etapa F y G al doble, y en la tercer etapa, F y G como al inicio. Definir si es posible calcular la ganancia de Kalman de estado estacionario, o hay que calcularla en línea.

**Actividad 3:**

Explicitar una tabla, que indique el desempeño de cada controlador, con el funcional calculado mediante la expectativa de las realizaciones. Se recomiendan 50 en total.

**Desarrollo:**

Para más claridad y comodidad de cálculo, todas las simulaciones y las gráficas serán hechas utilizando el software GNU Octave, ya que este posee mejores cualidades a la hora de realizar múltiples gráficas para comparar el desempeño de cada caso.

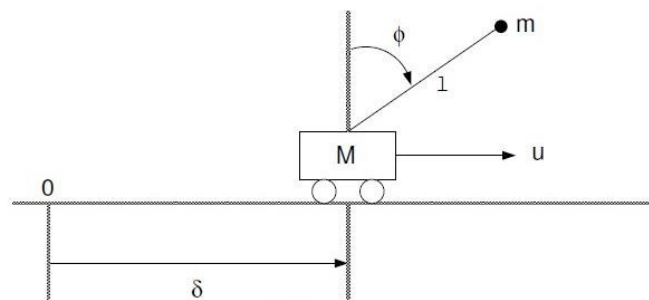
En cada caso se comparará la evolución del sistema con el estimador de Kalman, con la evolución del sistema con el observador de Luenberger obtenida en el TP6..

**Actividad 1:**

Analizaremos los casos vistos en el TP6 (Ver el repositorio de dicha actividad [aquí](#)), en los cuales se Implementó: un LQG para el controlador de la planta y un observador de Luenberger con un DLQR para la estimación de los estados del sistema.

**Caso del Péndulo invertido**

No entraremos en detalle del cálculo de las matrices del sistema, ya que fue analizado en la guía anterior. Pero recordaremos que el sistema y sus variables se pueden observar en el siguiente gráfico:

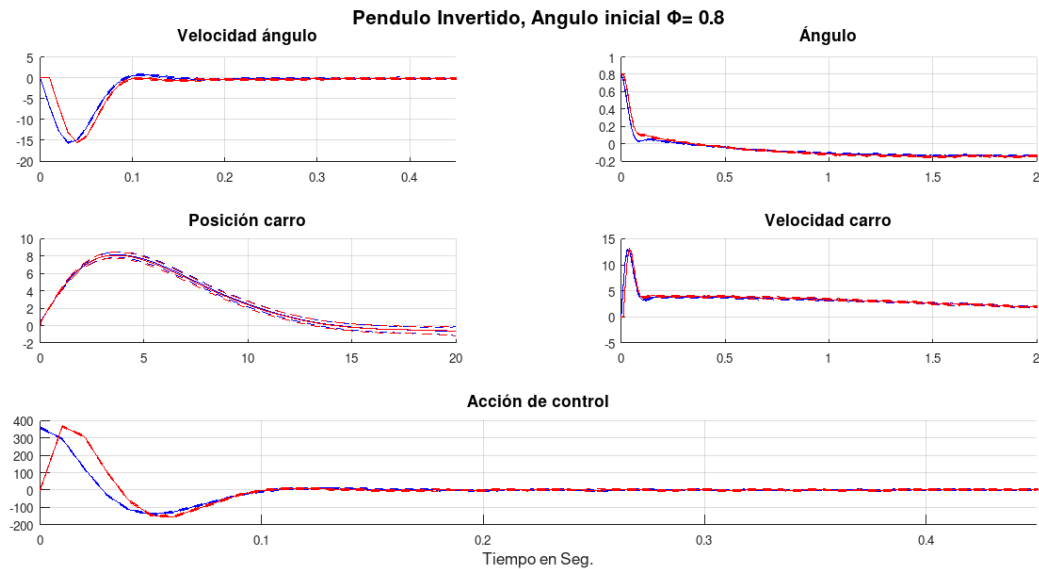


Donde nuestra condición inicial es un ángulo  $\phi = 0.8 \text{ [rad]}$ , y se busca que este sea 0. En el caso anterior utilizábamos 5 tipos de ruido diferentes, una de ellas inclusive en el caso de que no exista el ruido. Este último no lo analizaremos ya que el estimador de Kalman no se podría utilizar.

Compararemos entonces el péndulo invertido con 4 ruidos diferentes ( 0.01, 0.02, 0.05, y 0.1).

**$\sigma = 0.01$**

En este caso podemos ver que a la salida obtenemos:



**Azul: Estimador de Kalman; Rojo: Observador de Luenberger**

Donde hicimos zoom principalmente en la zona transitoria del sistema, esto con el objetivo de poder ver con claridad las diferencias entre el observador de Luenberger y el estimador de Kalman.

Vemos a simple vista que no existe mucha diferencia entre ambos casos, ya que si bien parece que el estimador de Kalman reacciona más rápido, en ambos casos se llega a la condición deseada en aproximadamente el mismo tiempo. Con este resultado podemos decir que al ser tan pequeña la varianza del ruido, las diferencias entre ambos casos son mínimas.

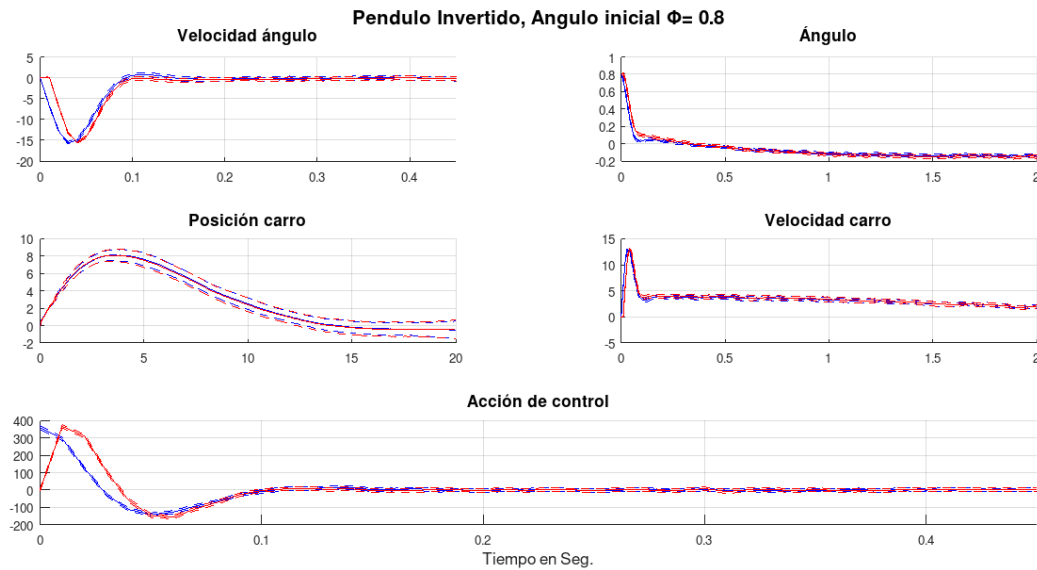
Los funcionales de costos de estos sistemas sin embargo, fueron:

- Con Luenberger:  $568 \times 10^3$
- Con Kalman:  $513 \times 10^3$

Por lo que podemos decir que el caso del estimador de Kalman posee un mejor desempeño con resultados casi similares.

**$\Sigma = 0.02$** 

Ahora el segundo caso de ruido, es utilizando un  $\sigma = 0.02$ , que es el doble que el caso anterior, como podemos ver:



**Azul: Estimador de Kalman; Rojo: Observador de Luenberger**

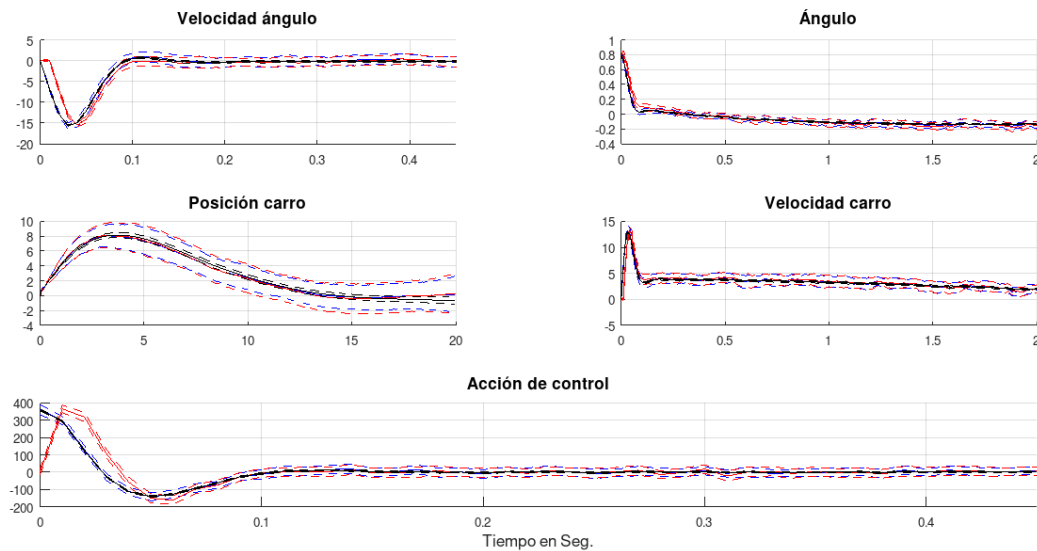
Si bien el resultado es similar, un análisis más profundo podemos determinar que la diferencia es mínima. Se hizo una comparación con el caso anterior y apenas si hay variación en los valores medios, solamente hay una leve variación en el ancho de la varianza de la señal (Representado por el margen entre las líneas de trazos). Por lo que no es apreciable a simple vista, sin embargo, analizando el funcional de costos obtenemos:

- Con Luenberger:  $1.233 \times 10^3$
- Con Kalman:  $1.052 \times 10^3$

Si bien hay un crecimiento del funcional de costos, apenas existe variación en los resultados, y nuevamente Kalman tiene un funcional menor, por lo que podemos concluir que tiene mejor desempeño.

**$\Sigma = 0.05$** 

Este es un ruido 5 veces más grande que el primer caso que analizamos, y obtuvimos el siguiente gráfico:



**Azul: Estimador de Kalman; Rojo: Observador de Luenberger**

En esta ocasión imprimimos también el caso del estimador de Kalman con  $\sigma=0.01$  (en Negro), con el objetivo de observar cuánto cambió la evolución del sistema agrandando el ruido.

Podemos ver que la acción de control es prácticamente la misma, sin embargo, viendo la posición del carro, podemos pensar que mientras mayor el ruido, menos precisa es esta posición del carro.

Más allá de estas variaciones, lo que más se puede apreciar (En especial en la posición del carro) es que la varianza (delimitada por ambas curvas de trazos los límites superiores e inferiores) creció bastante en comparación con el primer caso visto. Esto implica mayor incertidumbre en el valor real de estas variables, aunque nos podemos dar una idea con la línea continua, ya que esta se traza según el valor medio.

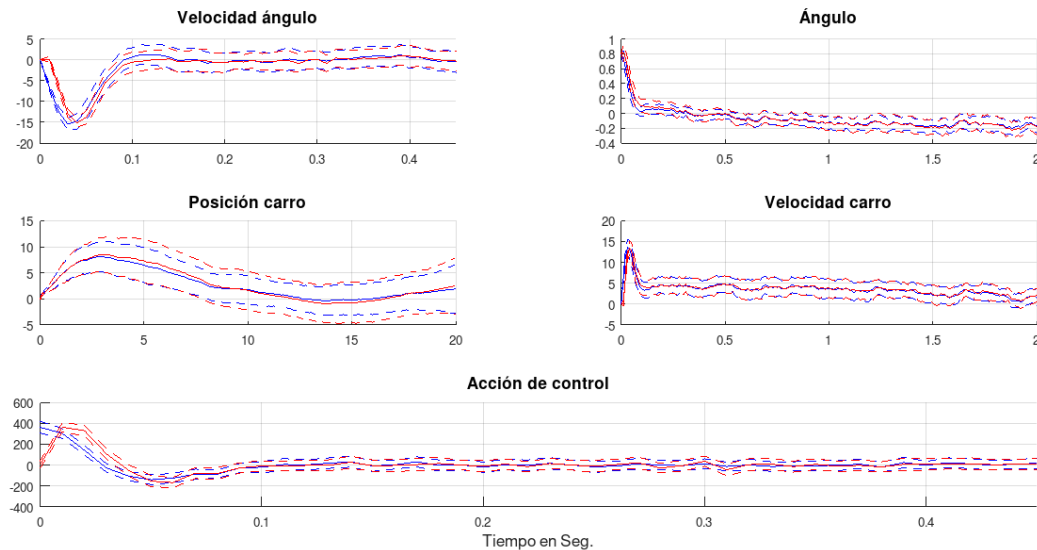
Los funcionales de costos obtenidos son:

- Con Luenberger:  $5.875 \times 10^6$
- Con Kalman:  $4.812 \times 10^6$

Nuevamente, Kalman nos genera un mejor desempeño, en este caso es de un orden aún mayor al caso anterior.

**$\Sigma = 0.1$** 

En este caso, tenemos un ruido que es 10 veces más grande que el primer caso, implica una dispersión de valores de un 10% de la magnitud de la señal, por lo que esperamos que el margen de varianza de los estados sea notablemente más grande que los casos anteriores



**Azul: Estimador de Kalman; Rojo: Observador de Luenberger**

En este caso se nota aún más la diferencia del estimador de Kalman frente al observador de Luenberger, si analizamos la posición de carro, la varianza de esta variable cambia, volviéndose más suave y menos dispersa. La acción de control cambia ligeramente en la parte transitoria, sin embargo vemos como cuando entra en régimen, el sistema se mantiene prácticamente igual, tanto con el estimador de Kalman como con el observador de Luenberger.

Los funcionales de costos obtenidos son:

- Con Luenberger:  $22.43 \times 10^6$
- Con Kalman:  $18.21 \times 10^6$

Vemos que el funcional de costos creció exponencialmente, así como también la diferencia entre los funcionales de cada caso.

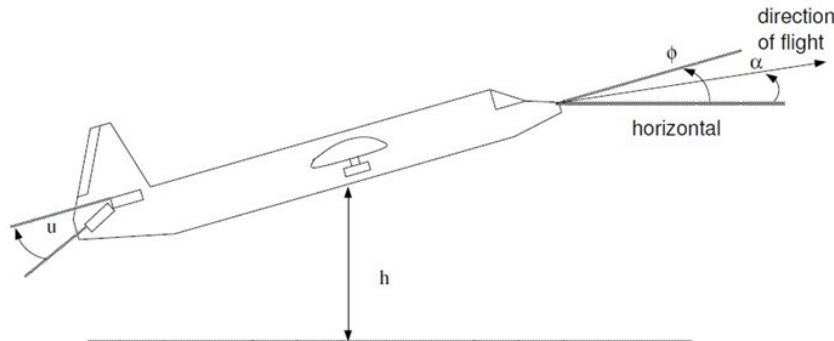
Podemos concluir que el estimador de Kalman nos da mejores resultados, tanto por tener menos variaciones en las variables, como por tener un mejor desempeño, esto reflejado en el funcional de costos calculado en cada caso.



### Caso del avión

Al igual que con el péndulo, analizaremos directamente el diagrama para tener noción de las variables de estado, no las fórmulas de la cual se extraen las matrices de estado, dichas fórmulas se pueden ver en el TP6 mencionado anteriormente.

El modelo del avión responde al siguiente diagrama:



Sin embargo, hay que destacar un aspecto particular de este caso, y es la imposibilidad de usar el estimador de Kalman correctamente debido a la naturaleza de las matrices que conforman este caso.

La matriz de estados  $A$  en este caso es:

$$A = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 81 & -81 & 0 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde vemos a simple vista 2 características importantes.

1. La matriz es singular, debido a que la última columna es nula.
2. La matriz posee grandes variaciones de valores entre una fila y otra.

Viendo esto, decimos que la Matriz **está mal condicionada**.

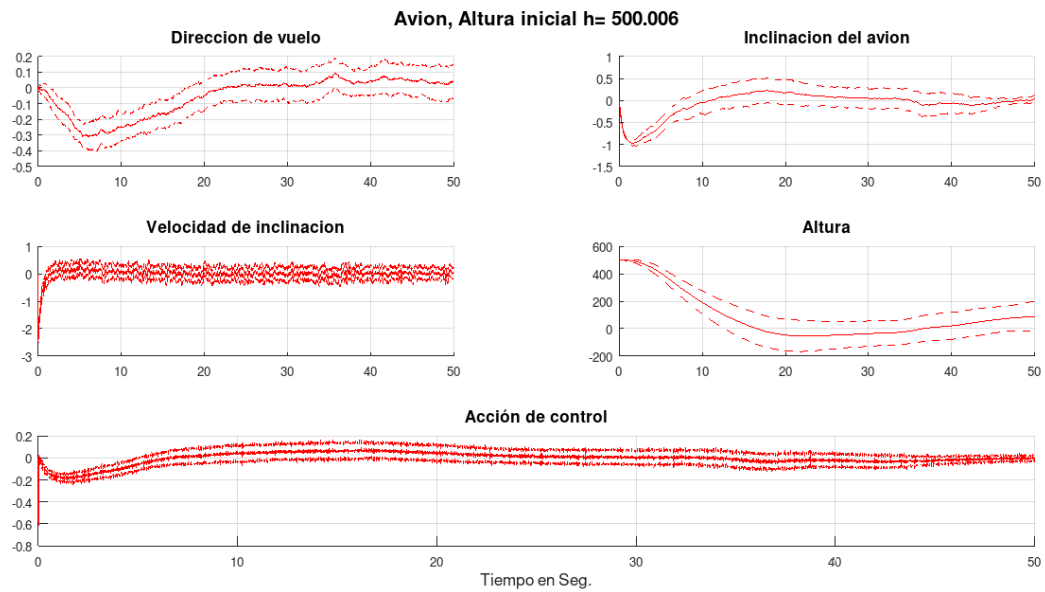
La condición de una matriz (o número de condición) es una medida que indica la *sensibilidad de la solución* de un sistema de ecuaciones lineales a los cambios en los coeficientes de la matriz.

Mientras más grande sea la condición de una matriz, peor condicionada está. La condición de una matriz se calcula como:

$$k(A) = |A| * |A^{-1}|$$

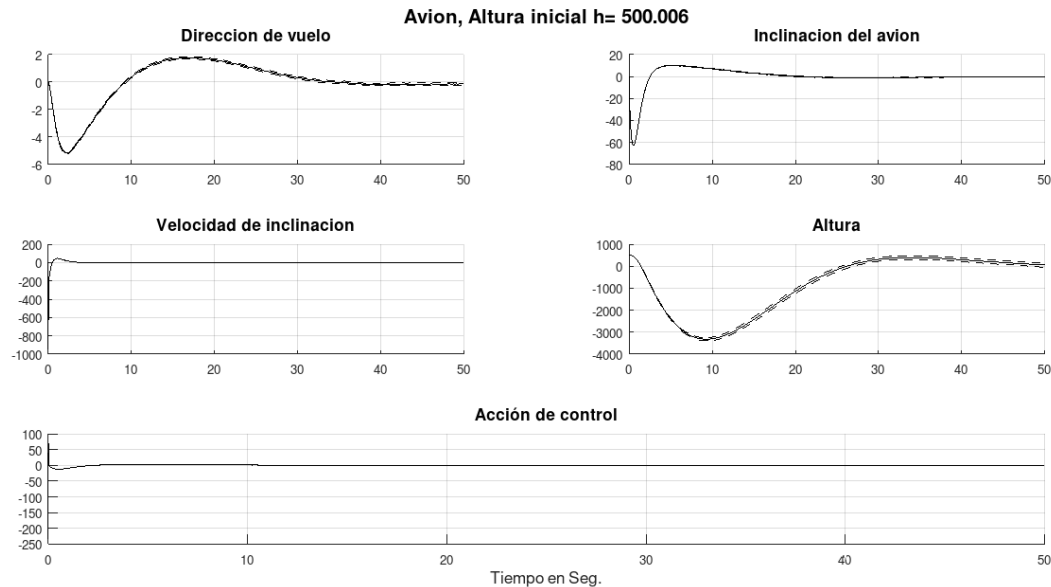
Este número sabemos que dará muy alto porque al ser singular la matriz  $A$ , su inversa nos daría infinito.

A continuación, mostraremos cómo afecta la mala condición de esta matriz al estimador de Kalman, comparando los resultados con lo que se obtiene del observador de Luenberger.

**Observador de Luenberger**

Obtenemos una salida aceptable, ya que las variables cambian lentamente y dentro de los márgenes esperados. En este caso lo estamos viendo con un ruido de varianza 0.01.

## Estimador de Kalman



Obtenemos una salida con un control que luego de unos segundos se estabiliza correctamente, pero teniendo variaciones irreales y fuera del intervalo de valores aceptable. Notamos como la altura cae a casi  $-4000$ , la acción de control (Expresada en radianes) llega a casi  $-250$ . Esto no es un controlador aceptable para los resultados esperados.

## Conclusión del modelo del avión

El estimador de Kalman se utiliza para estimar estados de un sistema dinámico combinando un modelo con mediciones ruidosas. Y funciona en dos etapas:

- **Predicción:** Usa el modelo del sistema para predecir el estado en el siguiente instante de tiempo.
- **Actualización:** Corrige la predicción utilizando las mediciones y la ganancia de Kalman, que se calcula a partir de *las matrices de covarianza del ruido del proceso y del ruido de medición*.

Cuando este se actualiza, necesita realizar operaciones matriciales que dependen de  $A$  y de las covarianzas. Si la matriz  $A$  está mal condicionada, entonces estas operaciones se vuelven numéricamente inestables debido a errores por redondeo o amplificación de los mismos. Por eso esto resulta en estimaciones que muestran variaciones grandes e irreales.

En cambio, el **Observador de Luenberger** no depende de covarianzas ni de inversiones matriciales sensibles al condicionamiento de la matriz  $A$ . Por eso **Luenberger** funciona mejor que **Kalman** en este caso.

Es posible hacer funcionar mejor el sistema haciendo un reescalamiento de las variables que conforman a la matriz  $A$ . Pero esto podría alejar el modelo de una representación de un caso real. Por eso concluimos el estudio del modelo del avión hasta aquí.

## Actividad 2:

Se nos pide realizar una simulación en donde dividamos el tiempo en 3 etapas, donde en la primera se empieza con una varianza de ruido definida, en la segunda etapa se duplica la varianza del ruido, y en la tercera vuelve a estar como antes.

En nuestro caso utilizaremos el peor caso de ruido, que es con  $\sigma=0.1$ , donde luego de 1/3 del tiempo (unos 6 segundos aproximadamente), este se duplica, y luego de 2/3 del tiempo vuelve al ruido inicial.

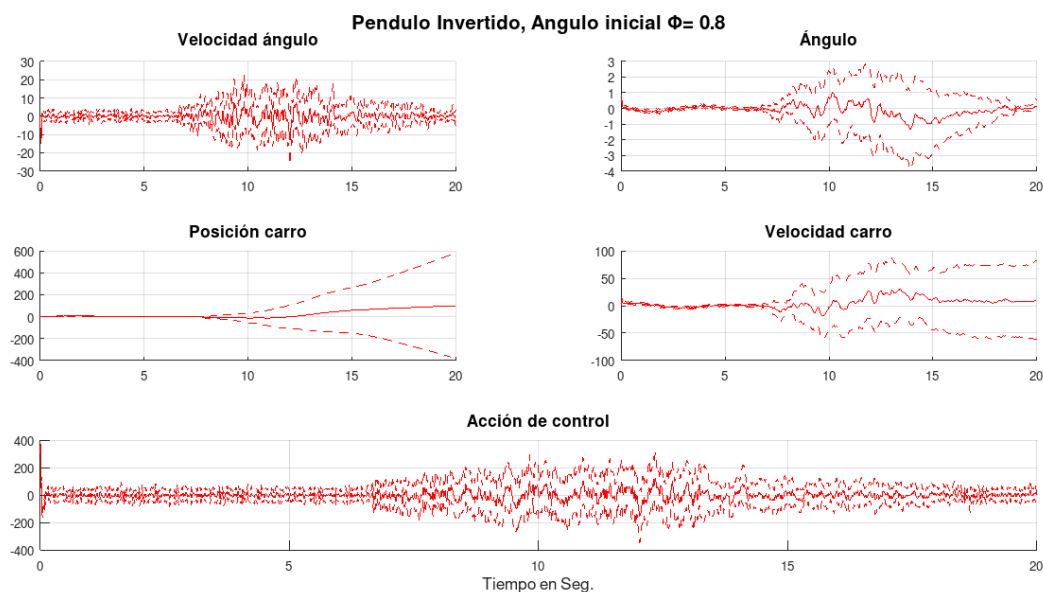
También se nos pregunta si es posible calcular la ganancia de Kalman de estado estacionario o si hay que calcularla en línea.

Utilizaremos únicamente el caso del péndulo invertido debido a lo mencionado en la actividad anterior sobre el caso del avión.

### 1. Estimador de Kalman con ganancia fija (Estado estacionario)

Empezamos con la ganancia calculada al inicio de la simulación, donde se realizan iteraciones hasta que la ganancia converge a un valor de estado estacionario, luego realizamos una simulación del sistema con su variación de ruido pero **sin cambiar la ganancia de Kalman durante la simulación**.

Se obtuvo lo siguiente:



Vemos que aproximadamente a los 6 segundos aparece una perturbación, que es cuando la varianza del ruido se duplica. Y luego a los 12 segundos esta vuelve al ruido inicial, sin embargo la acción de control tarda en volverse a estabilizar.

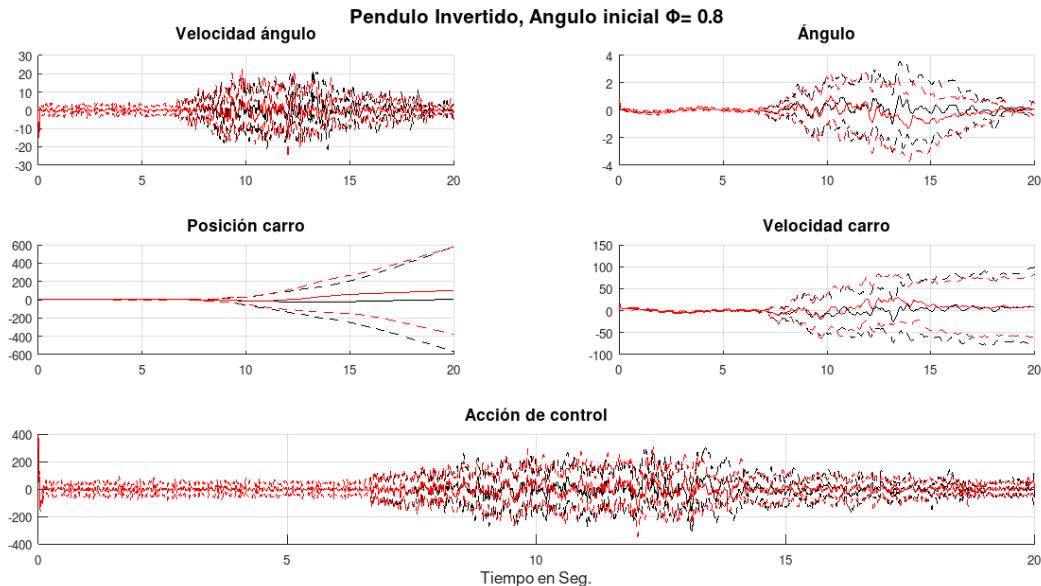
En cuanto a las demás variables, notamos que luego de esta perturbación tardan demasiado en volver a estabilizarse y disminuir su varianza, como lo es el caso de la velocidad del carro, que sus valores mantienen una alta varianza.

En cuanto al ángulo específicamente, notamos como al aumentar el ruido este comienza a oscilar y luego se estabiliza nuevamente.

## 2. Estimador de Kalman calculada en línea

Cuando estamos “calculando en línea” estamos constantemente modificando la ganancia de Kalman. Esto no tiene mucho sentido si el ruido es siempre el mismo, sin embargo ante cambios en el ruido (Como es este caso), el cálculo de su ganancia “en línea” favorece el desempeño, ya que este se “actualiza” al cambiar el ruido.

Se obtuvo lo siguiente:



Las curvas Rojas representan el estimador de Kalman con ganancia calculada en estado estacionario y las curvas negras representan el estimador calculado en línea.

A simple vista parece que las varianzas de las variables aumentan ligeramente, sin embargo hay una mejoría notable si vemos el valor medio de cada variable, ya que este se desplaza menos y se mantiene en la condición deseada.

En ambos casos, se obtuvo el siguiente funcional de costos:

1. Estimador de Kalman con ganancia fija:  $454,12 \times 10^6$
2. Estimador de Kalman calculada en línea:  $589,1 \times 10^6$

Estos valores se obtuvieron con 50 realizaciones.

Vemos que el funcional de costos con Kalman calculada en línea, presenta una mejoría en la evolución de las variables, sin embargo esto reduce el desempeño.

## Conclusiones

El estimador de Kalman en general presenta un mejor control y desempeño ante la presencia de ruido. Sin embargo, vimos con el caso del avión, que no siempre es factible su implementación bajo ciertas condiciones, almenos con la metodología de trabajo implementada en esta actividad.

Si bien en la actividad anterior vimos cómo el funcional de costos aumenta ante cambios en la varianza del ruido (En nuestro caso aumentó alrededor de un 12%), sigue siendo óptima su aplicación, ya que las variables del sistema tiene un valor medio más estable y con menor varianza. Es decir, se se adapta mejor al ruido.