



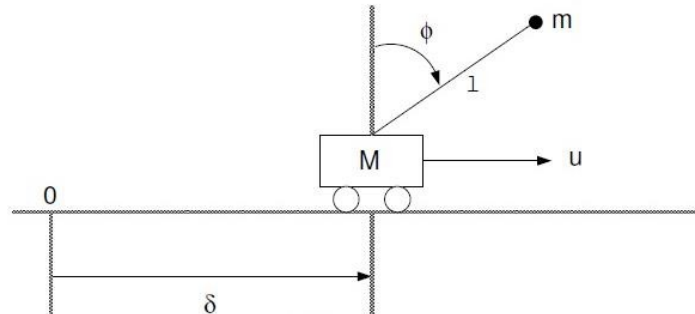
## **Trabajo Práctico N°6: Modelos de estado para sistemas estocásticos de tiempo discreto**

Nieva Miguel Pedro Valentin | M.U:00932

Código: <https://github.com/valkur5/Control-Optimo/tree/main/TP6>

### Actividad 1:

Se pide utilizar el sistema del péndulo invertido y establecer un modelo de ruido para simular *incertidumbre* en la medición tanto del estado como de la salida.



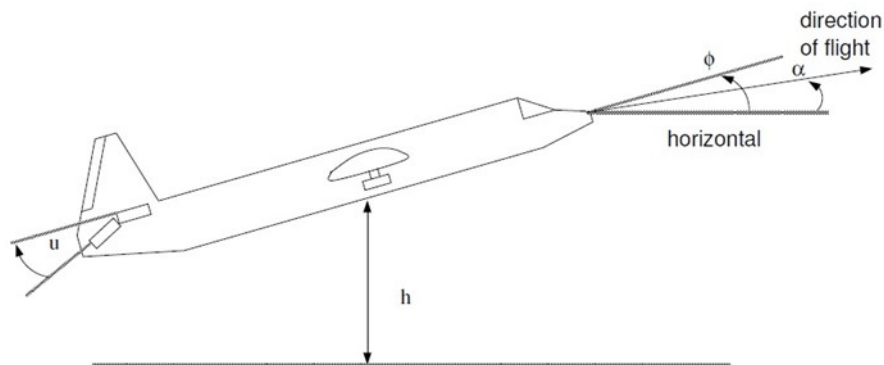
Todo esto asumiendo que los sensores utilizados tienen un error con *media nula* y *sigma*  $0, 0.01, 0.02, 0.05$  y  $0.1$  respectivamente. Es decir, 5 clases de ruido, con  $F$  y  $G$  iguales a la matriz identidad. Esto indica que es necesario el empleo de un observador.

Se desea diseñar un controlador que estabilice el sistema y acelere su dinámica mediante:

- a) Diseño con LQR (No se tiene en cuenta  $F$  y  $G$ ), midiendo ángulo y desplazamiento.
- b) Diseño con LQG (Teniendo en cuenta  $F$  y  $G$ ), midiendo ángulo y desplazamiento.

### Actividad 2:

Repetir los puntos del caso anterior pero utilizando el modelo del avión. Se utilizarán los mismos parámetros de ruido y se medirá el ángulo con respecto a la horizontal y la altura.



## Desarrollo:

### Actividad 1: Péndulo invertido

El sistema está definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{\delta} + m l \ddot{\phi} \cos \phi - m l \dot{\phi}^2 \sin \phi + F \dot{\delta} = u \\ l \ddot{\phi} - g \sin \phi + \ddot{\delta} \cos \phi = 0 \end{cases}$$

Realizando los pasos correspondientes determinamos que las matrices de estado para nuestro sistema, quedaría definido por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{m \cdot g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{(l \cdot M)} & \frac{g \cdot (m + M)}{(l \cdot M)} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{l \cdot M} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

En el código (Revisar repositorio adjunto) partiremos de definir primero un DLQG, donde obtendremos dos matrices de control;  $K_x$  y  $K_v$ , donde el  $K_x$  es el equivalente a utilizar un LQR convencional, mientras que el  $K_v$  lo usaremos cuando queramos tener en cuenta también el ruido, es decir, un DLQG propiamente dicho. Dicho de otra forma, la aplicación de la acción de control según si utilizamos un DLQR o un DLQG, quedará definida por las expresiones:

$$u_{LQR} = -K_x \times \hat{X}$$

$$u_{LQG} = -K_x \times \hat{X} - K_v \times V$$

Donde  $\hat{X}$  es el estado obtenido por el observador, y  $V$  es el ruido de estado.

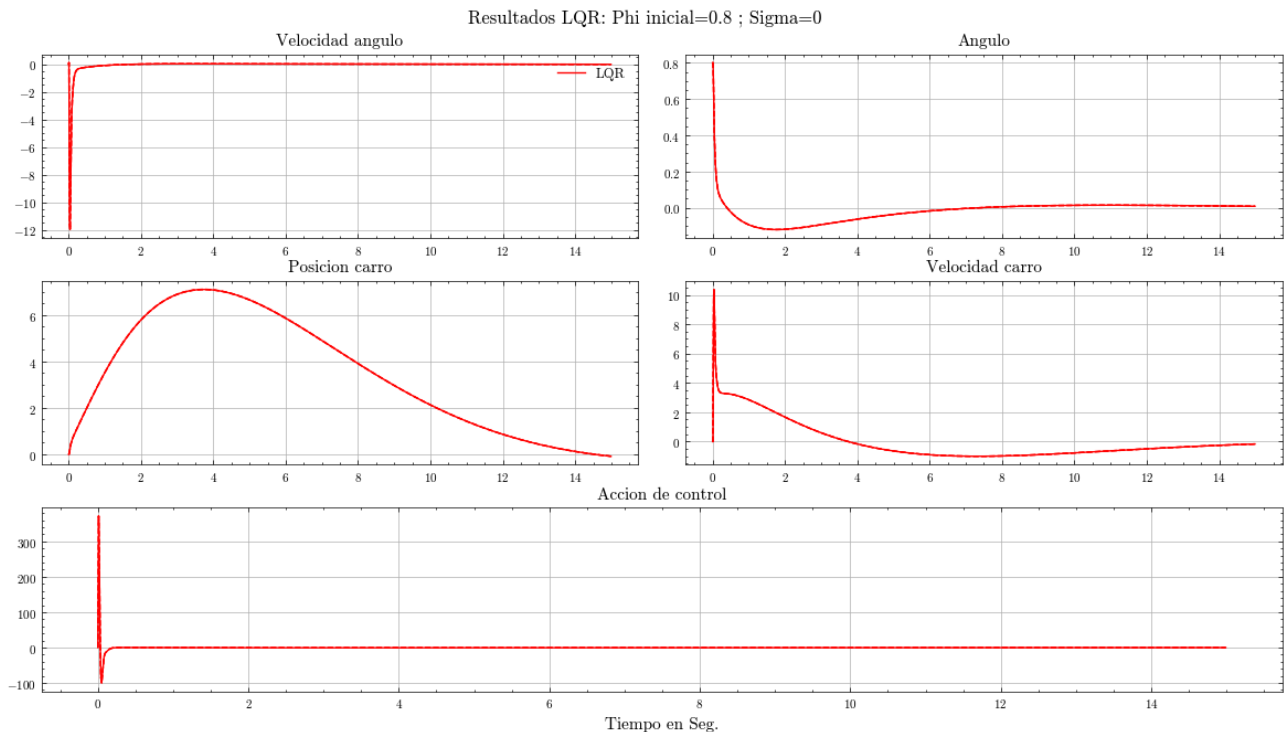
Por último, definiremos la condición inicial, en nuestro caso  $\phi = 0.8 [rad]$ .

Debido a que sigma tiene 5 valores diferentes, nos centraremos primero en 2 casos particulares,  $\sigma = 0$ , y  $\sigma = 0.1$ , que es el caso mínimo y el caso máximo respectivamente. Luego de analizar estos realizaremos una gráfica donde podamos ver los 5 casos juntos. Veremos que debido a que trabajamos con valores muy pequeños casi no habrá diferencia entre unos y otros.

## a) Controlador con LQR:

***Sigma = 0***

Este valor de sigma implica que no existe el ruido (Ya que no hay desviación de los valores), por lo tanto esperamos una respuesta y una acción de control suave y clara.



Podemos observar lo siguiente:

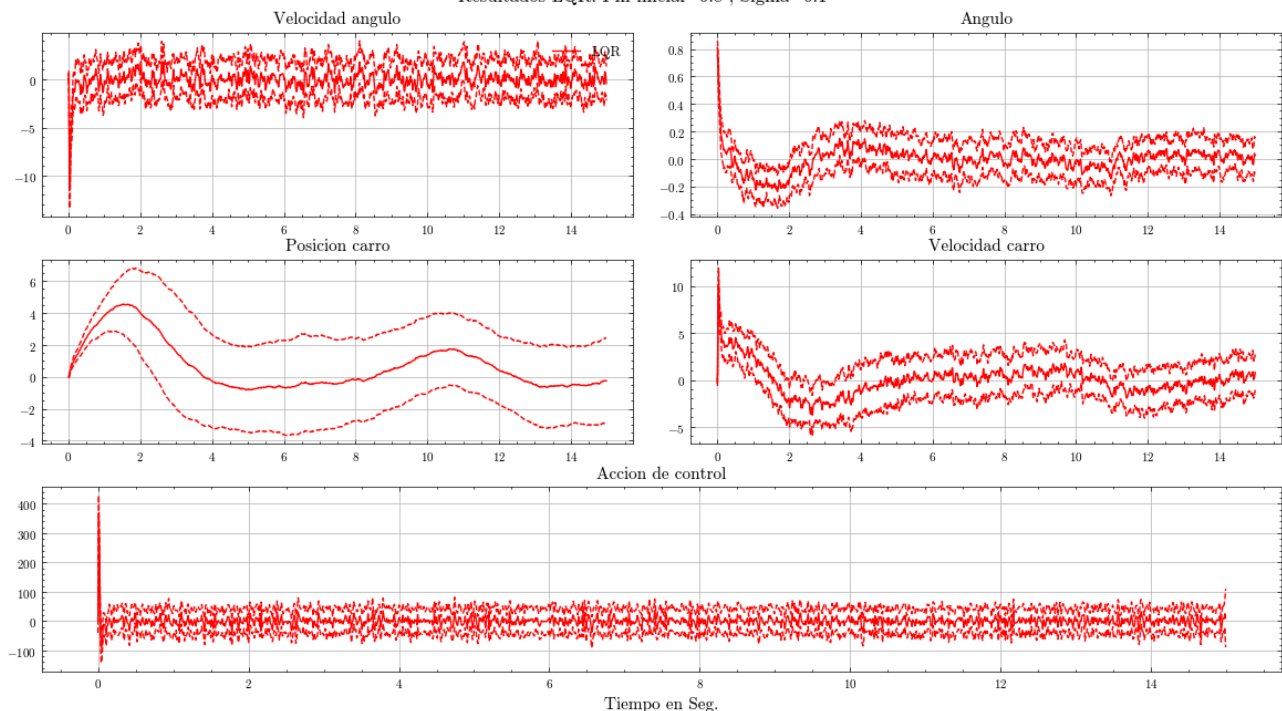
- Tenemos curvas claras y suaves debido a la ausencia de ruido.
- La posición del carro se mueve unos 6 metros hacia un lado para poder estabilizar el ángulo en la posición deseada.
- La acción de control elevada al principio implica una gran fuerza  $u$  aplicada, esto para mover el carro y estabilizar el péndulo de manera rápida.

Esta acción de control es rápida y efectiva, sin embargo no se pudo lograr acciones de control acotadas y suaves en el origen sin que el sistema empiece a oscilar o que estabilice el ángulo con la suficiente rapidez para ser observada con el tiempo de simulación estipulado.

### ***Sigma = 0.1***

Este caso es el que mayor desviación ruidosa obtenemos, y al controlador LQR le costará estabilizar el sistema de manera eficiente, elevando el funcional de costos. Sin embargo se logra la estabilidad deseada en tiempos similares.

Resultados LQR: Phi inicial=0.8 ; Sigma=0.1



Las magnitudes de la acción de control son similares al caso anterior, sin embargo podemos ver por la posición del carro como le cuesta mantenerse en una misma posición para mantener su estabilidad. Haciendo que se mueva unos 2 metros y luego vuelva al origen.

El ángulo del péndulo se mantiene prácticamente estable. Sin embargo tiene un funcional de costos mayor debido a que el LQR no es bueno para señales ruidosas.

Para finalizar la simulación con el controlador LQR, realizaremos las simulaciones con los valores de  $\sigma$  restantes, y compararemos la función de costos en cada caso.

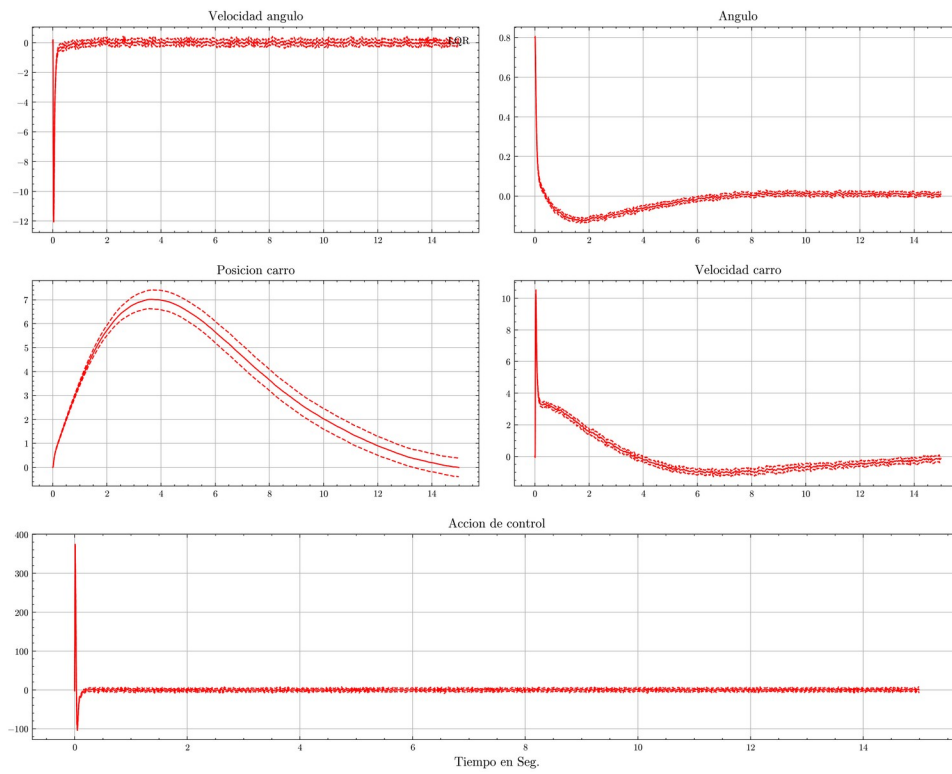
Comparativa ruido/costo - LQR					
$\sigma$	0	0.01	0.02	0.05	0.1
Costo $J$	$9.8 \times 10^6$	$10.55 \times 10^6$	$13.13 \times 10^6$	$32.11 \times 10^6$	$132.11 \times 10^6$

Vemos que a medida que aumenta el ruido, le cuesta más al controlador realizar su acción de control y mantener un valor estable aproximado. De hecho, veremos en las siguientes gráficas, cómo a medida que aumenta el ruido, la posición del carro parece no poder mantenerse estable, y luego de un tiempo manteniendo su posición en el origen, vuelve a moverse para intentar mantener el equilibrio.

A continuación tenemos los gráficos resultantes con cada valor de sigma.

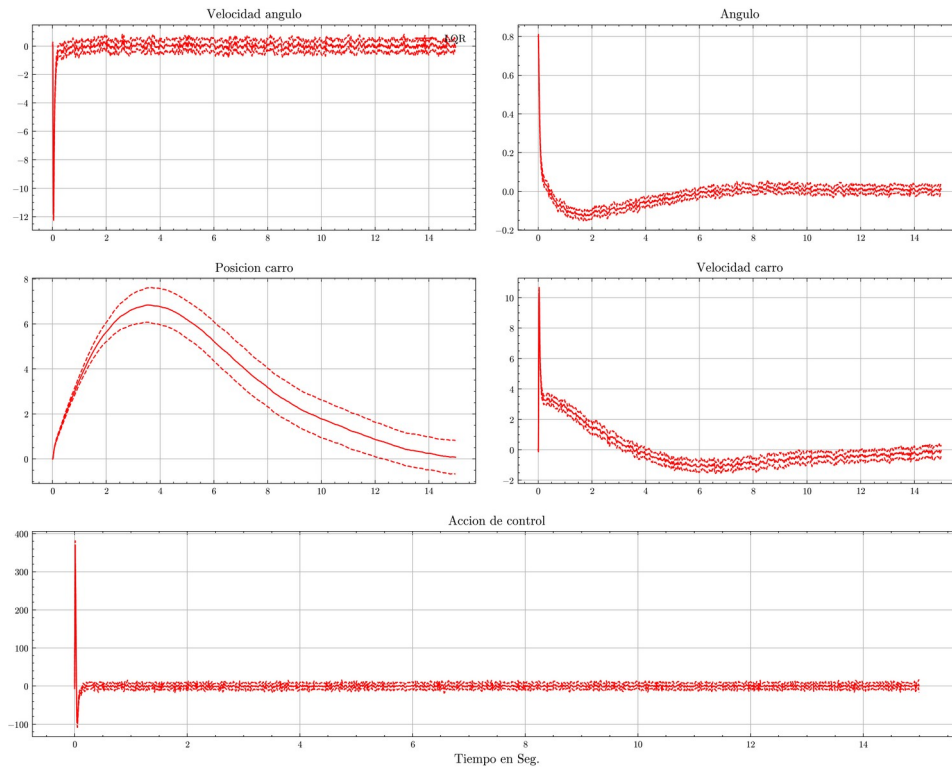
**$\Sigma = 0.01$**

Resultados LQR:  $\Phi$  inicial=0.8 ;  $\Sigma$ =0.01



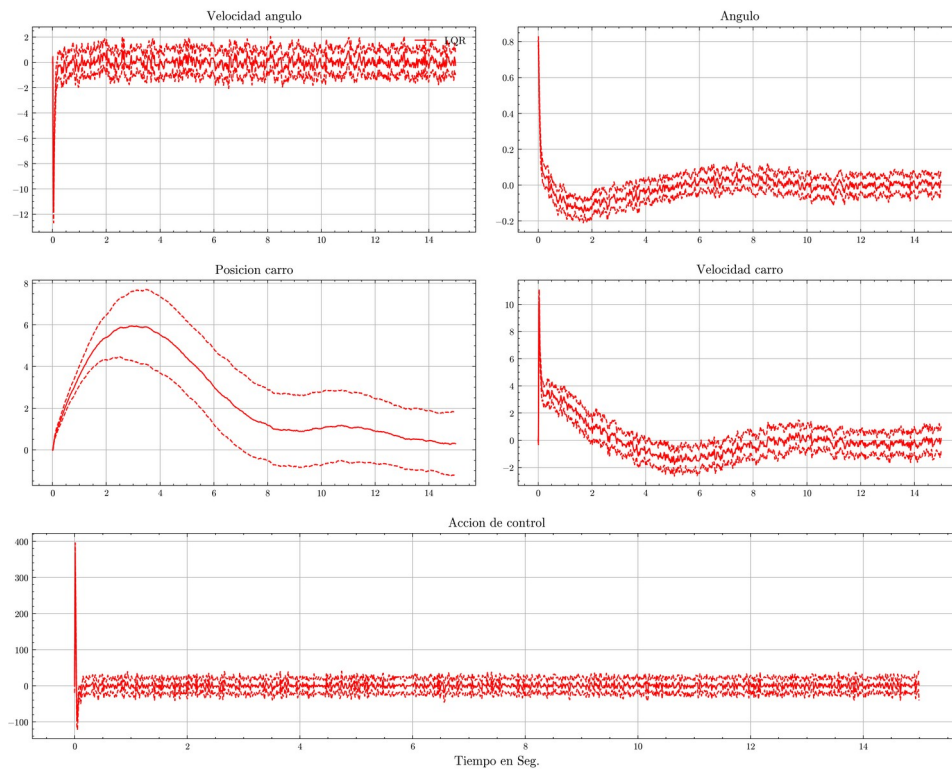
**$\Sigma = 0.02$**

Resultados LQR:  $\Phi$  inicial=0.8 ;  $\Sigma$ =0.02



**$\Sigma = 0.05$**

Resultados LQR:  $\Phi$  inicial=0.8 ;  $\Sigma=0.05$



Con esto concluimos el estudio del péndulo invertido con el LQR.

### **b) Controlador con LQG:**

Como mencionamos anteriormente, para utilizar el LQG es necesario utilizar la constante calculada  $K_v$ , quedando la ecuación de la acción de control como:

$$u_{LQG} = -K_x \times \hat{X} - K_v \times V$$

Siendo  $V$  el ruido aleatorio de estado.

Realizaremos ahora nuevamente las simulaciones correspondientes.

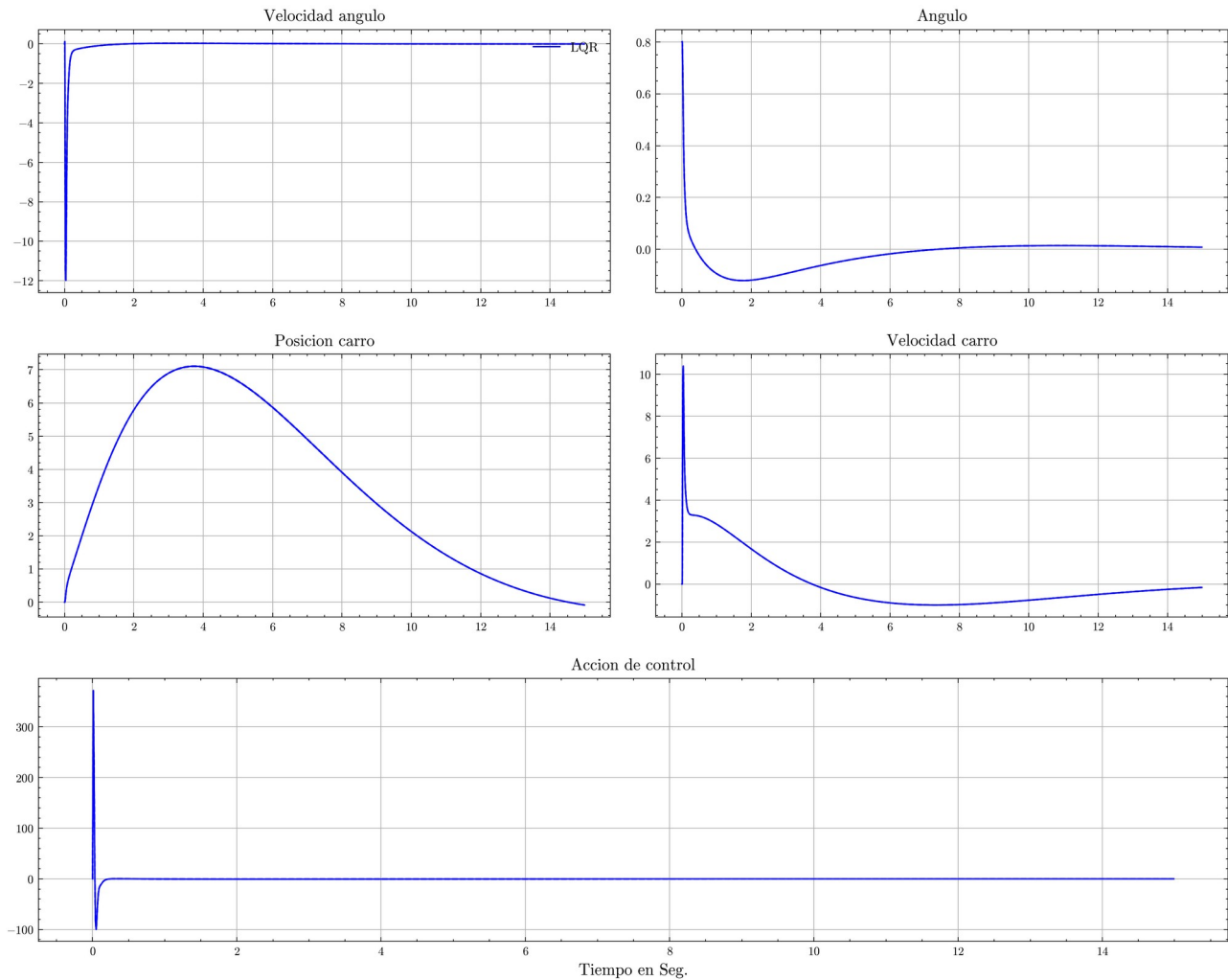
## ***Sigma = 0***

La expectativa de esta simulación es similar a la del LQR, ya que al no haber ruido significa que  $V=0$ , es decir:

$$u_{LQG} = -K_x \times \hat{X} - K_v \times 0 = -K_x \times \hat{X} = u_{LQR}$$

Vemos a continuación como la gráfica resultante es idéntica, inclusive compartiendo el mismo funcional de costos.

Resultados LQG: Phi inicial=0.8 ; Sigma=0



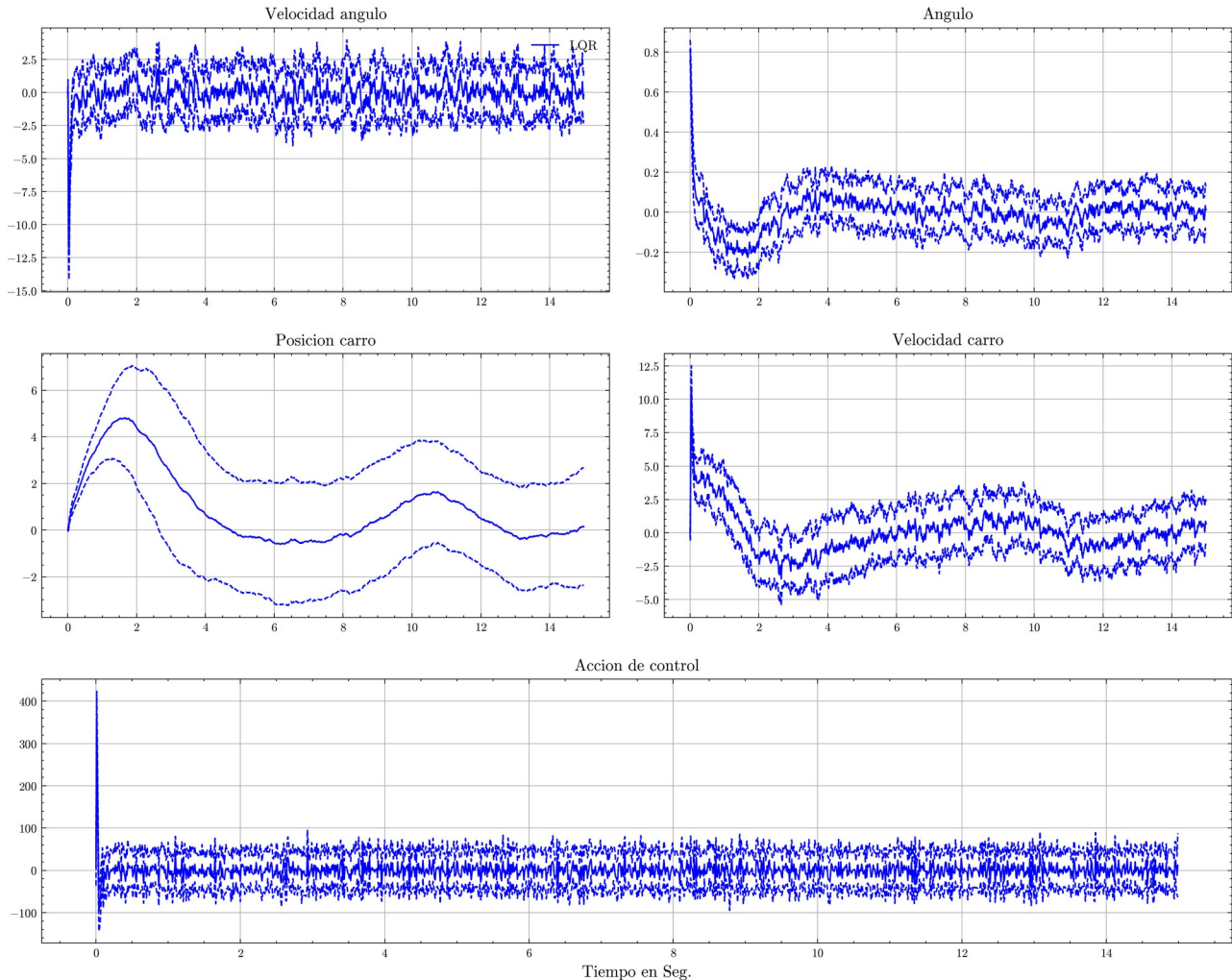
Podemos ver como el resultado fue idéntico al anterior debido a la ausencia de ruido. Y la función de costo da el mismo valor que el caso anterior también ( $9.8 \times 10^6$ )



## ***Sigma = 0.1***

Veremos ahora el caso más extremo, donde hay mayor presencia de ruido. Antes de realizar la simulación cabe destacar que esperamos obtener un valor de funcional de costos menor que con el LQR convencional, ya que este tiene en cuenta la presencia del ruido, y además una acción de control más estable. La simulación resultante fue:

Resultados LQG: Phi inicial=0.8 ; Sigma=0.1



En este caso se obtuvieron magnitudes similares en cuanto a la variación de parámetros. Existe también una sutil mejoría en cuanto a las variaciones de las variables, solo que con la resolución de las gráficas es difícil de apreciar.

Notamos también una mejoría en el funcional de costos, ya que con el LQR obtuvimos un funcional de Costos de  $132.11 \times 10^6$ , y ahora con el LQG se obtuvo  $103.73 \times 10^6$ .

A priori podemos observar y determinar que el LQG presenta una mejoría en cuanto estabilidad y comparando los funcionales de costos podemos determinar que el LQG posee un mejor desempeño.

Si realizamos las simulaciones para los demás casos, obtendremos que:

Comparativa ruido/costo - LQG					
$\sigma$	0	0.01	0.02	0.05	0.1
Costo J	$9.8 \times 10^6$	$10.43 \times 10^6$	$12.60 \times 10^6$	$28.5 \times 10^6$	$103.73 \times 10^6$

Las gráficas restantes del LQG son muy similares a las del LQR, por lo que las omitiremos en este documento, sin embargo estas se encontrarán en el repositorio adjunto.

## Actividad 2: Avión

El sistema queda planteado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = a(\phi - \alpha) \\ \ddot{\phi} = -\omega^2(\phi - \alpha - b \cdot u) \\ \dot{h} = c\alpha \end{cases}$$

De donde obtenemos las matrices de estado:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 * b \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Una vez definido nuestro sistema, se nos pide realizar las mismas simulaciones que en el apartado anterior; primero con un LQR y luego con un LQG.

Como condiciones iniciales, seleccionamos una altura  $h$  de unos 500 metros. Se buscó en todo momento que la acción de control real no exceda los límites de  $+1$  y  $-1$ . Así también como se buscó que la inclinación no caiga de manera tan brusca, sin embargo esto último no se pudo lograr correctamente a pesar de todos los valores que se probaron en la simulación, siempre se obtiene una inclinación que por momentos supera 1 radian, lo cual es completamente inviable en un avión convencional.

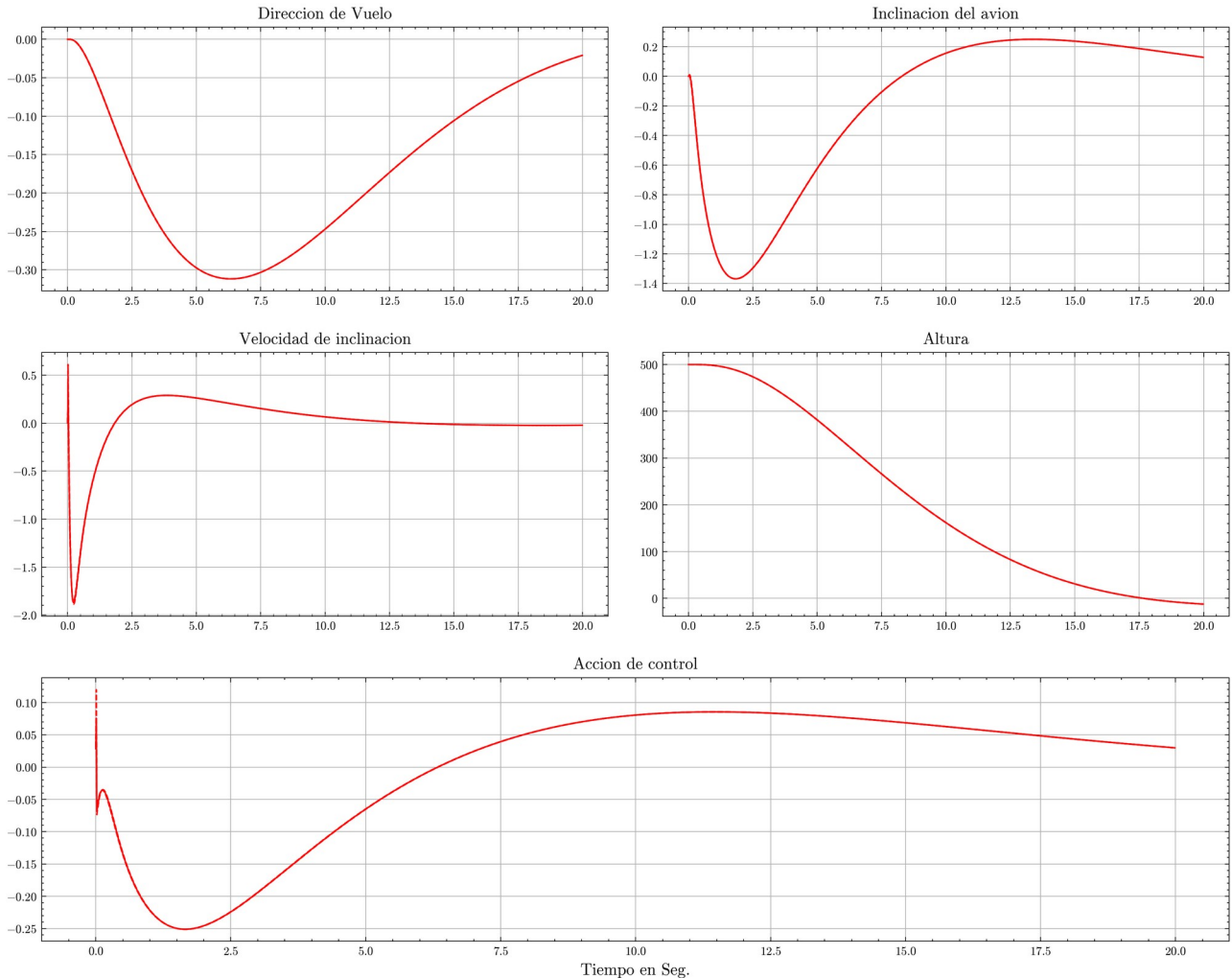
Habiendo demostrado ya que los casos más importantes de la simulación ocurren con  $\sigma=0$  y con  $\sigma=0.1$  (valor mínimo y máximo planteado), no pondremos en este documento los otros casos debido a la falta de resolución para una clara apreciación de las sutiles variaciones, sin embargo estarán en el repositorio adjunto para visualizarlas si se desea.

## a) Controlador con LQR:

***Sigma = 0***

Este es el caso ideal ya que no hay ruido presente. Obtenemos la siguiente gráfica:

Resultados LQR: Altura inicial=500 ; Sigma=0

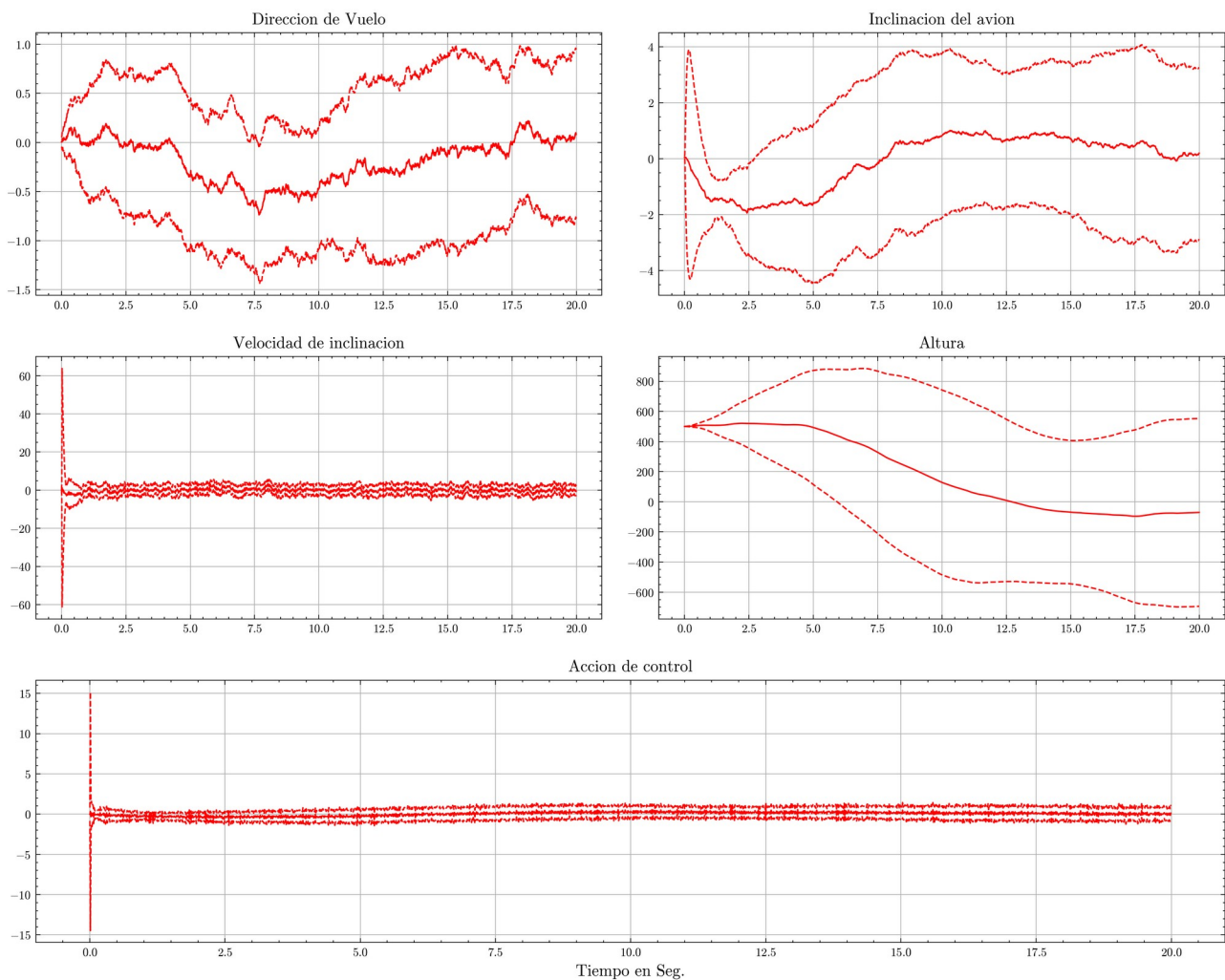


Vemos que cumple con las condiciones planteadas, generando variaciones dentro de todo suaves y llegando correctamente a tierra. El único inconveniente que como se mencionó, no se pudo lograr mejorar, fue la inclinación del avión, ya que una inclinación de 1 radian ( $57^\circ$ ) no es algo viable, ya que es prácticamente una caída en picada del avión.

## **$\Sigma = 0.1$**

Este es el peor de los casos, ya que el ruido es máximo, y el LQR no toma en cuenta estas variaciones de ruido como para poder actuar en consecuencia. Vemos que la gráfica de salida fue:

Resultados LQR: Altura inicial=500 ;  $\Sigma=0.1$



Vemos que la acción de control, así como la inclinación y la velocidad de inclinación, toman valores absurdos en el origen, sin embargo la media se mantiene en los márgenes esperados. Recordemos que la línea del medio (línea continua) representa la tendencia central, o la media de la variación de estas variables, mientras que las líneas laterales (de trazos) representan la desviación estándar, mostrando los límites superiores e inferiores del intervalo de confianza o dispersión de los datos. Nos indican cuán variable son nuestras variables principales debido al ruido presente.

Concluimos que en este caso particular, los márgenes de variaciones son muy grandes, por lo que hay mucha dispersión de los datos, algo que no es para nada deseable.

Nuevamente tabularemos las funciones de costo con respecto al ruido del sistema:

Comparativa ruido/costo - LQR					
$\sigma$	0	0.01	0.02	0.05	0.1
Costo $J$	$19.6 \times 10^3$	$32.5 \times 10^3$	$69.6 \times 10^3$	$326.2 \times 10^3$	$1238.1 \times 10^3$

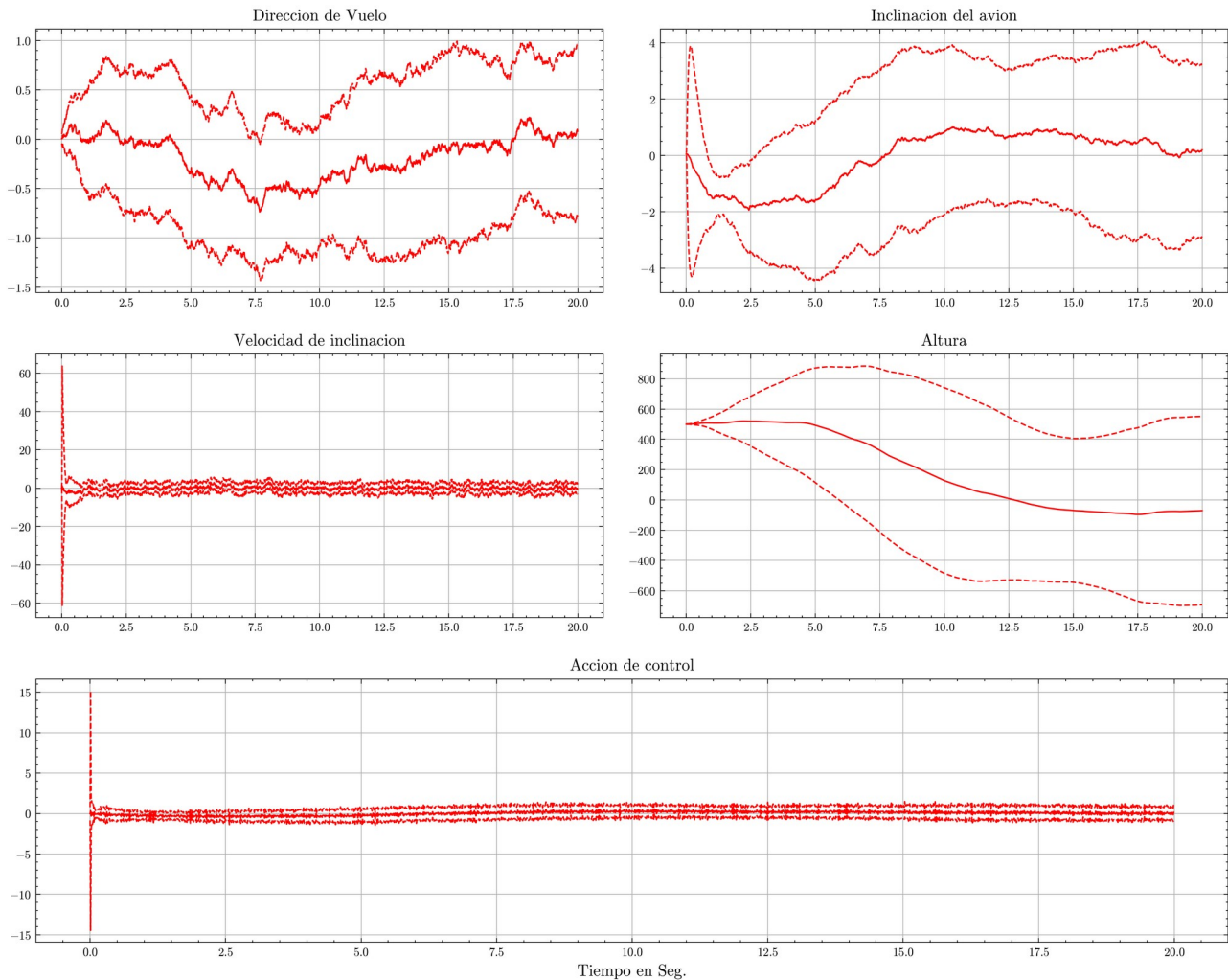
Con esto damos por concluido el análisis del LQR.

## b) Controlador con LQG:

Debido a que anteriormente demostramos que un LQG sin ruido se comporta como un LQR ideal, omitiremos la simulación del LQG con  $\sigma=0$ , pasaremos directamente al caso con máximo ruido.

***Sigma = 0.1***

Resultados LQG: Altura inicial=500 ; Sigma=0.1



A priori vemos como los valores son muy próximos y casi idénticos a los que se obtuvieron con el LQR, nuevamente la única diferencia cuantitativa que podemos tener es en el cambio de la función de costos. Ya que para este caso, tendremos un funcional de costos de  $1235.9 \times 10^3$ , ligeramente que con el LQR. Por lo que podemos decir que posee un mejor desempeño ante el ruido. Si tabulamos los valores tenemos lo siguiente:

Comparativa ruido/costo - LQG					
$\sigma$	0	0.01	0.02	0.05	0.1
Costo $J$	$19.6 \times 10^3$	$32.5 \times 10^3$	$69.5 \times 10^3$	$325.6 \times 10^3$	$1235.9 \times 10^3$

En general, y para el caso del avión en particular, el LQG posee un mejor desempeño ante el ruido que el LQR, pero esto es más apreciable cuanto más grande sea la desviación del ruido. Tanto así que para valores bajos de ruido, el LQR y el LQG tienen ciertas similitudes en cuanto a desempeño y resultados de simulación. En el caso del avión tenemos que el sistema es fácil de desestabilizar, ya que se generan grandes desviaciones por más que el ruido sea pequeño.

## **Conclusiones**

Con las herramientas vistas en este apartado, y con las simulaciones realizadas, se aprendió las diferencias entre un LQR y un LQG, donde pudimos apreciar cómo ante bajo ruido, un LQR podría usarse sin grandes problemas, pero a medida que crece el ruido, empieza a volverse primordial el uso de un controlador más robusto a perturbaciones indeseadas, tanto en los estados del sistema como en la salida del sistema, para esto es mejor el LQG, demostrándose numéricamente también como este posee mayor desempeño ante mayores desviaciones de ruido.

Entre estas herramientas aprendidas también aprendimos el uso de los límites superiores e inferiores de la desviación estándar de la señal, concepto ideal para poder determinar qué tan bueno es nuestro sistema y qué tan seguro es su aplicación en la vida real, ya que tener grandes desviaciones en sistemas de control críticos podría no ser admisible.

Queda por finalizada esta actividad.