

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Mutamenti nella Nozione di Vuoto

Elettrodinamica dei Sistemi Accelerati,
Radiazione di Unruh-Hawking
e Termodinamica dei Buchi Neri

Relatore: Chiar.mo Prof. *Massimo Pauri*

Correlatori: Chiar.mo Prof. *Antonio Scotti*

Dott. *Roberto De Pietri*

Candidato: *Michele Vallisneri*

ANNO ACCADEMICO 1995-1996

Indice

Introduzione	vii
Ringraziamenti	xi
Notazione e convenzioni	xii
1 Detectors, particelle ed effetto Unruh	1
1.1 Il “piccolo fisico teorico”	2
1.1.1 Il Campo Scalare Neutro	2
1.1.2 I Topi <i>Detectors</i>	3
1.1.3 <i>Topo Pigro</i> e <i>Topo Costante</i>	4
1.1.4 Mettendo i Topi in pentola	7
1.1.5 <i>Qu’est-ce que c’est les particules?</i>	9
1.1.6 <i>Topo Frettoloso</i> è un topo caloroso	12
1.1.7 Altri topi	13
1.2 Particelle di Rindler ed effetto Unruh	23
1.2.1 Axel in moto	24
1.2.2 La metrica di Rindler e l’isometria di boost	26
1.2.3 Tempi diversi, energie diverse	27
1.2.4 Quantizzazione secondo Axel	29
1.2.5 Lo schema di Unruh	34
1.2.6 Dal punto di vista di Beatrice	36
1.3 Parliamo ancora di particelle	39
1.3.1 Morte di un concetto matematico	40
1.3.2 Lo zoo dei <i>detectors</i>	42
1.3.3 Covarianza della teoria per la scelta dei modi e stati	45
non-particolati	45
2 Interludio classico: il principio di equivalenza per le particelle cariche classiche e il concetto di “radiazione”	47
2.1 Un criterio per la radiazione	48
2.2 Campi gravitazionali costanti	52
2.3 Quattro esperimenti non troppo <i>gedanken</i>	54
2.3.1 Osservatore <i>free-falling</i> , carica <i>free-falling</i>	54
2.3.2 Osservatore <i>free-falling</i> , carica <i>sostenuta</i>	55
2.3.3 Osservatore <i>sostenuto</i> , carica <i>sostenuta</i>	56
2.3.4 Osservatore <i>sostenuto</i> , carica <i>free-falling</i>	58
2.4 La questione dell’energia	58
2.4.1 La domanda di Axel: il bilancio dell’energia nel secondo	

esperimento	59
2.4.2 La domanda di Beatrice: il bilancio dell'energia nel quarto esperimento	61
2.4.3 Il principio di equivalenza per le particelle cariche	62
3 Teoria quantistica dei campi in uno spazio-tempo curvo	65
3.1 Teoria dei campi nello spazio-tempo piatto	67
3.1.1 Formulazione hamiltoniana delle teorie di campo classiche	67
3.1.2 Teorie di campo lineari	69
3.1.3 Alla ricerca delle relazioni di commutazione	70
3.1.4 Costruzione della rappresentazione	73
3.1.5 Ancora sulla specificazione di \mathbb{H}	75
3.1.6 Un esempio: il campo di Klein-Gordon	76
3.2 Teoria dei campi in uno spazio-tempo curvo	78
3.2.1 <i>Shopping for Lagrangians</i>	78
3.2.2 I problemi del prof. Cauchy	79
3.2.3 <i>Monsieur Shift et Mademoiselle Lapse</i>	80
3.3 Teorie inequivalenti e produzione di particelle	81
3.3.1 Costruzione della teoria su spazio-tempo stazionari	82
3.3.2 Costruzioni asintotiche e matrice S	83
3.3.3 Equivalenza unitaria e produzione di particelle	85
3.3.4 Un esempio: ancora l'effetto Unruh	87
3.3.5 Teorie inequivalenti!	88
3.3.6 <i>L'algebraic approach</i>	89
3.3.7 L'ultima parola sul problema dell'equivalenza unitaria . .	92
3.3.8 Tensore di energia-impulso; condizione di Hadamard . . .	93
3.4 L'effetto Unruh negli spazio-tempo curvi	96
3.4.1 Orizzonti di Killing biforcati	97
3.4.2 L'effetto Unruh	98
3.4.3 Un assaggio di effetto Hawking e un addio allo spazio-tempo di Minkowski	100
4 Termodinamica dei buchi neri	103
4.1 La geometria di Schwarzschild	103
4.1.1 Il campo esterno di una stella sferica	104
4.1.2 Moto delle <i>test-particles</i> nella geometria di Schwarzschild	105
4.1.3 <i>Mesdames e Messieurs, i Buchi Neri!</i>	108
4.2 Termodinamica dei buchi neri	110
4.2.1 I teoremi <i>no hair</i>	111
4.2.2 Buchi neri stazionari: massa, carica e momento angolare . all'infinito	112
4.2.3 <i>Frame-dragging</i> e principio zero della termodinamica . . .	114
4.2.4 La seconda legge della termodinamica dei buchi neri . . .	115
4.2.5 Prima legge	117
4.2.6 Processi di Penrose	118
4.2.7 Ancora la prima legge	119
4.2.8 Le quattro leggi della termodinamica dei buchi neri	121

4.3	Entropia e temperatura	123
4.3.1	Area ed entropia secondo Bekenstein	124
4.3.2	La seconda legge generalizzata	126
4.3.3	Il <i>quantum black hole</i> : la radiazione di Hawking	128
4.3.4	La matrice di densità termica	135
4.3.5	Il processo di evaporazione dei buchi neri	137
4.3.6	Altre particelle, altri buchi neri	140
4.3.7	Un Topo nello spazio	141
4.3.8	Il problema dell' <i>information loss</i>	147
5	Sull'interpretazione statistica dell'entropia dei buchi neri	149
5.1	Ancora sull'entropia informazionale	150
5.2	<i>Entanglement entropy</i>	152
5.3	<i>Path-integrals</i> e termodinamica dei buchi neri	156
5.3.1	Il calcolo a <i>path-integrals</i> di Hawking e Gibbons	156
5.3.2	Sulla validità dell'approssimazione di punto a sella	158
5.3.3	Energia quasi-locale ed <i>ensemble statistici</i>	160
5.3.4	Il buco nero nella scatola	164
5.4	<i>Welcome to Flatland</i>	165
5.4.1	La gravità (2 + 1)-dimensionale come teoria di Chern-Simons	166
5.4.2	Il buco nero BTZ	167
5.4.3	I gradi di libertà dell'orizzonte	168
5.5	S_{bh} in <i>loop gravity</i>	171
5.5.1	Le "nuove variabili" e le osservabili di <i>loop</i>	172
5.5.2	<i>Loop representation</i>	175
5.5.3	L'operatore d'area	177
5.5.4	L'area dell'orizzonte degli eventi	178
A	Campi di Killing e geodetiche	181
A.1	Derivata di Lie	181
A.2	Campi di Killing	182
A.3	Congruenze di geodetiche	183
B	Causalità e struttura conforme	187
B.1	Punti all'infinito e punti singolari	187
B.2	Trasformazioni conformi e diagrammi di Penrose	189
B.3	Lo spazio di Minkowski	189
B.4	Lo spazio-tempo di Schwarzschild	192
B.5	<i>Asymptotic flatness</i>	194

Introduzione

All'inizio degli anni '70 è stata individuata una precisa analogia tra la termodinamica classica e le leggi che in relatività generale regolano la dinamica dei buchi neri: si è trovato che è possibile scrivere le “quattro leggi della termodinamica dei buchi neri”, in cui la massa del buco nero svolge il ruolo dell'energia (in modo consistente con l'identificazione relativistica delle due grandezze), la gravità superficiale dell'orizzonte degli eventi prende il posto della temperatura, e la sua area quello dell'entropia.

Un preciso indizio che questi risultati fossero da considerare più di una semplice analogia è venuto nel 1975 dalla scoperta teorica della *radiazione di Hawking*, ovvero dell'emissione da parte dei buchi neri di uno spettro termico di particelle quantistiche caratterizzato da una temperatura esattamente proporzionale alla gravità superficiale dell'orizzonte degli eventi. Più precisamente, se si quantizza una teoria di campo classica sul *background* spazio-temporale di un buco nero formatosi per collasso gravitazionale, si trova che lo stato di vuoto del campo definito rispetto a misurazioni effettuate per “tempi antichi” (quando la materia è ancora molto dispersa) appare agli osservatori “tardi” esterni al buco nero come un bagno termico di particelle provenienti dalla direzione dell'orizzonte.

Il fatto sorprendente è che la produzione di particelle non può essere attribuita a una interazione diretta del campo quantistico con il campo gravitazionale, ma appare piuttosto essere un effetto della diversa definizione del concetto di “particella” da parte degli osservatori “antichi” e “tardi”. Questa circostanza ci induce a riflettere sul carattere “confittuale” dell'eredità scientifica lasciataci da Albert Einstein (vedi fig. 1).

Da una parte, l'affermazione del gruppo di Poincaré della relatività ristretta come gruppo di simmetria *globale* dello spazio-tempo è stata alla base della grande sintesi teorica della prima metà del secolo, iniziata con il riconoscimento dell'elettromagnetismo di Maxwell come teoria special-relativistica e culminata con la formulazione della teoria quantistica dei campi; i concetti fisici e gli schemi interpretativi di queste teorie si riferiscono pertanto alla classe privilegiata degli *osservatori inerziali* special-relativistici. Dall'altra parte, il *principio di equivalenza* della relatività generale garantisce il gruppo di Lorentz come gruppo di simmetria *solo locale*: c'è pertanto una difficoltà di principio nel generalizzare a geometrie spazio-temporali curve i concetti e gli schemi ereditati dalle teorie special-relativistiche, in particolare quando questi si basano esplicitamente sulle simmetrie *globali* dello spazio-tempo di Minkowski.

Questo è il caso, in elettromagnetismo classico, del concetto di “radiazio-

ne” e, in teoria quantistica dei campi, della nozione di “particella” (che non è soltanto un aspetto interpretativo, ma interviene esplicitamente nella quantizzazione degli operatori di campo e nella determinazione dello stato di vuoto). Già nel 1939, questa difficoltà era chiara a Erwin Schroedinger, che si preoccupava della creazione di particelle dovuta al *mixing* delle frequenze positive e negative (e quindi, come vedremo, degli operatori di creazione e di distruzione) in un universo in espansione [Schroedinger 1939].

È interessante vedere che una comprensione qualitativa di queste difficoltà si può ottenere già nel caso semplice di un campo gravitazionale costante, simulabile nella stessa relatività speciale utilizzando sistemi di riferimento accelerati (campi apparenti). In elettromagnetismo classico, ad esempio, si trova che la nozione di *radiazione* di una particella accelerata, apparentemente “fisica” e ben assestata, *non è invariante* rispetto a trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali e sistemi accelerati. Per la teoria di un campo quantistico nello spazio-tempo di Minkowski, un fenomeno analogo è dato dall’*effetto Unruh*, ovvero dalla misurazione di una radiazione termica quantistica nello stato di vuoto del campo da parte di un osservatore uniformemente accelerato; l’usuale definizione *matematica* di “particella” (legata alla decomposizione di Fourier degli operatori di campo) non è pertanto valida per gli osservatori accelerati.

Mediante l’introduzione di una serie di “esperimenti teorici” originali, basati sull’utilizzazione di un semplice modello di *detector* semiclassico (un sistema quantistico puntiforme in moto su una traiettoria assegnata nello spazio di Minkowski), abbiamo pertanto esplorato il significato che è possibile dare *operativamente* in teoria di campo al concetto di “particella”, individuandolo negli scambi energetici discreti dei *detectors* con il campo; questa nozione coincide con l’usuale definizione matematica soltanto per la ristretta classe degli osservatori inerziali nello spazio-tempo piatto. Abbiamo quindi esteso l’effetto Unruh a una classe di osservatori uniformemente accelerati più generale di quella usualmente considerata (ovvero a tutte le traiettorie a curvatura costante), ricavando gli spettri (quasi-termici!) osservati.

In un contesto più generale, la teoria quantistica dei campi su spazio-tempo di *background* curvi, studiata a partire dai primi anni ’70, rende definitivamente evidente l’arbitrarietà del concetto di “particella” negli spazio-tempo diversi da quello di Minkowski, e ci permette di collocare in un quadro di riferimenti fisici e matematici più precisi il fenomeno della radiazione di Hawking.

Per sondare ulteriormente l’effetto Hawking dal punto di vista del nostro concetto *operativo* di “particella”, abbiamo anche esaminato le misurazioni di un *detector* in orbita intorno a un buco nero.

Il punto debole della “termodinamica dei buchi neri” rimane l’assenza di una soddisfacente interpretazione *statistica* della loro “entropia” nei termini della dinamica dei campi di materia sul *background* di buco nero, o, ancor meglio, della stessa dinamica *quantistica* del campo gravitazionale. Il nostro lavoro termina con una discussione dei tentativi più interessanti emersi in questo senso.

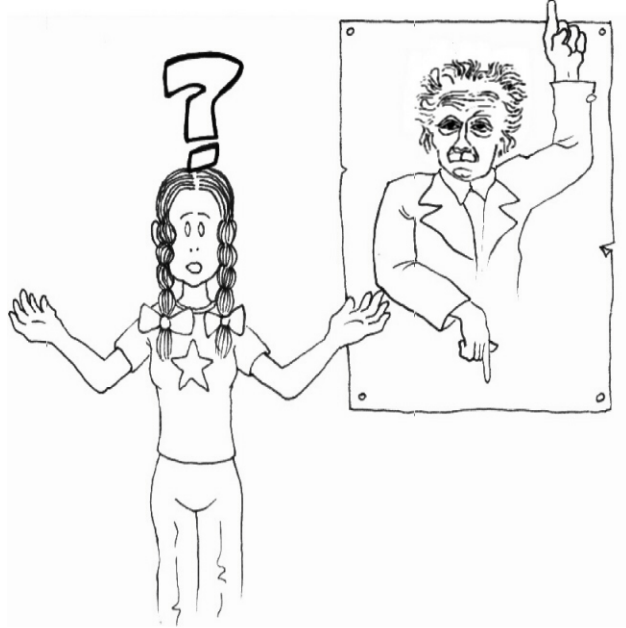


Figura 1: Beatrice, la “piccola fisica” protagonista di questa tesi, medita la difficile eredità di Einstein

È affascinante pensare che gran parte della fisica di cui ci siamo occupati è, in un certo senso, *fisica del vuoto*: gli effetti Hawking e Unruh consistono in misurazioni sullo *stato di vuoto* del campo quantistico, che rivela proprietà dinamiche assolutamente inaspettate; d'altronde, l'assenza di “particelle” e di “radiazione”, che sugli spazio-tempo curvi diventano così elusive e maldefinite, è proprio il metro con cui intuitivamente si vorrebbe definire il *vuoto*; infine, i buchi neri sono soluzioni delle equazioni di Einstein *nel vuoto*, in assenza di campi di materia; sono *pura geometria*, eppure sono caratterizzati da parametri che chiamiamo “massa”, “temperatura” ed “entropia”!

La tesi è organizzata come segue:

- *nel primo capitolo* presentiamo la nostra discussione sulla nozione *operativa* di particella, che utilizziamo per discutere l'effetto Unruh;
- *il secondo capitolo* è un “interludio” sul concetto di radiazione in elettromagnetismo classico e in particolare sulla validità del principio di equivalenza per le *test-particles* cariche;
- *nel terzo capitolo* esponiamo brevemente la formulazione della teoria quantistica dei campi su uno spazio-tempo di *background* curvo, seguendo principalmente la sintesi di [Wald 1994]; tra le altre cose, discutiamo il “formalismo di matrice S ” necessario per un'analisi organica degli effetti Unruh e Hawking;

- *nel quarto capitolo*, dopo una breve introduzione ai buchi neri, sia nella loro definizione *globale* (come regioni dello spazio-tempo escluse dal passato causale dell’“infinito futuro nullo”) che come famiglia di soluzioni esatte (di Kerr-Newman) delle equazioni di Einstein, dimostriamo le leggi della “termodinamica” e deriviamo il risultato di Hawking;
- *il quinto capitolo*, infine, è occupato da una discussione delle principali proposte per l’interpretazione statistica dell’entropia dei buchi neri. Analizziamo, tra l’altro, il lavoro recentemente svolto nell’ambito della *loop quantum gravity* di Ashtekar, Rovelli e Smolin, dove si tenta di ottenere una stima per l’entropia contando esplicitamente il numero di stati quantistici caratterizzati da un certo autovalore dell’operatore “area”.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutte le persone che hanno contribuito a rendere il mio lavoro di tesi un'esperienza assolutamente speciale ed entusiasmante: prima di tutto il mio Relatore, Prof. Massimo Pauri, per la simpatia, per l'*humour* e l'*insight* che ha saputo infondere in queste pagine, e soprattutto per la disponibilità e la generosità con cui mi ha dedicato il suo prezioso tempo; poi i miei Correlatori: il Prof. Antonio Scotti, con cui ho avuto molte piacevoli e stimolanti discussioni e che non ha mai fatto mancare un po' del suo sano scetticismo, e il Dott. Roberto De Pietri, che mi ha accolto nel suo studio (e nei suoi pensieri!) letteralmente a qualsiasi ora del giorno e della notte. Roberto è stato insostituibile negli ultimi affannosi giorni prima della stampa di questa tesi, e gliene sarò sempre grato.

Un caloroso grazie va anche a Federico Piazza, che, oltre ad aver contribuito alla stesura della seconda appendice, ha condiviso con me più di una serata davanti agli schermi dei computers, ma con cui soprattutto è sempre un gran piacere discutere di fisica e di tutto il resto. Vorrei poi ringraziare il mio *tutor*, Prof. Giuseppe Mambriani, che mi ha sempre seguito con simpatia e sostegno, e tutti i docenti che hanno reso piacevoli e interessanti questi anni di università; un grazie particolare va inoltre a Marina, Massimo e Fabrizia della biblioteca per la disponibilità che mi hanno sempre dimostrato, e a Raffaele Cicchese, che mi ha permesso di continuare a lavorare su questa tesi anche "in trasferta".

Un *enorme* grazie va a Kola Krauze, M. A. che ha disegnato tutte le Beatrici e gli Axel che compaiono in queste pagine: Kola è un fratello, un amico, e una persona eccezionale, senza la quale non sarei la persona che sono oggi.

Ci sono tante altre persone che mi hanno aiutato in questi mesi e a tutte vorrei manifestare la mia gratitudine: innanzitutto la mia famiglia, che ha sopportato strani orari, cattivi umori, e non mi ha mai fatto mancare il suo sostegno e la sua approvazione sebbene non le fosse ben chiaro *di che cosa* precisamente stessi scrivendo; e poi Nicoletta Paris, Filippo Vernizzi, Alessandro Tellini.

Grazie, infine, alla mia dolce Elisa: senza il suo sostegno e il suo amore questo lavoro non sarebbe semplicemente stato possibile.

16 Aprile 1997

Michele Vallisneri

Notazioni e convenzioni

In questo lavoro adottiamo la *notazione a indici astratti* per le grandezze tensoriali su una varietà differenziabile: gli indici latini a, b, \dots denotano il carattere covariante o controvariante *astratto* dei tensori senza riferimento a nessuna base di coordinate particolare. Ad esempio, u^a è un vettore, u_b una 1-forma, è così via. Quando abbiamo voluto indicare esplicitamente le componenti dei tensori in un sistema di coordinate, abbiamo utilizzato gli indici greci μ, ν, \dots .

Nel contesto della relatività speciale, dove la distinzione tra oggetti fisici e *coordinate-dependent* è più sfumata, abbiamo generalmente utilizzato gli indici greci per denotare le componenti dei tensori nei sistemi di coordinate inerziali; inoltre abbiamo indicato come x^μ, z^μ gli *eventi* dello spazio-tempo di Minkowski e abbiamo usato il carattere *bold* (come in **u**) per i quadrivettori.

Per le metriche delle varietà differenziali lorentziane abbiamo assunto una segnatura *positiva*: in particolare, la metrica di Lorentz è data (in una base di coordinate inerziali) da

$$\eta_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dove non diversamente indicato, abbiamo adottato le *unità di Planck*, in cui $\hbar = G = c = 1$; tutte che nelle unità ordinarie sono esprimibili in termini di L, T e M *diventano adimensionali*. In tabella sono riportati i valori CGS delle unità di Planck.

lunghezza:	$l_P = (G\hbar/c^3)^{1/2}$	$1.6 \cdot 10^{-33}$ cm
tempo:	$t_P = l_P/c$	$5.4 \cdot 10^{-44}$ s
massa:	$m_P = l_P c^2/G$	$2.2 \cdot 10^{-33}$ g
energia:	$E_P = l_P c^4/G$	$2.0 \cdot 10^{16}$ erg = $1.3 \cdot 10^{19}$ GeV
temperatura:	$T_P = E_P/k$	$1.4 \cdot 10^{32}$ °K

Capitolo 1

Detectors, particelle ed effetto Unruh

Che cos'è, in teoria quantistica dei campi, una “particella”?

La domanda sembra quasi oltraggiosa: non ci dovrebbero essere problemi a definire gli oggetti che quotidianamente si osservano nelle fotografie degli esperimenti di *scattering*, e per i quali sappiamo calcolare sezioni d'urto e *branching ratios* con un'ottima rispondenza ai risultati sperimentali. Ma è proprio questa aderenza dei calcoli teorici all'empirìa che ci fa dimenticare che la parola “particella” assume in effetti due significati ben distinti:

1. per “particelle” si intendono, con una *definizione operativa*, “gli oggetti misurati dai rivelatori di particelle” (le tracce nelle camere a bolle, i *click* dei contatori Geiger, e così via);
2. con “particelle” si denota un *concetto matematico* legato alla decomposizione di Fourier degli operatori di campo in frequenze positive e negative, oppure, ad un altro livello, alle diverse rappresentazioni del gruppo di Poincaré.

La tesi di questo capitolo è che la definizione *matematica* di “particella” è fatalmente legata alla simmetria dello spazio-tempo di Minkowski, al punto di non risultare invariante rispetto a trasformazioni da sistemi di riferimento inerziali a sistemi uniformemente accelerati, e di cadere completamente per osservatori in moto su traiettorie non inerziali più generali.

Di fronte a questo risultato ci si potrebbe accontentare della sola definizione *operativa*, finché non ci si ricorda che l'identità dei due concetti costituisce l'interfaccia tra i risultati sperimentali della fisica delle particelle e il formalismo teorico (di matrice S). Ora, qui sulla terra, il punto di vista degli osservatori inerziali è più che sufficiente per descrivere tutti gli esperimenti desiderabili; è evidente, però, che se lo spazio-tempo fosse apprezzabilmente curvo ci troveremmo in guai seri. Ma questo è l'argomento del cap. 3!

Nel corso di questo capitolo mettiamo a punto una nostra definizione *operativa* di “particella” basata su un semplice modello di *detector* semiclassico accoppiato al campo (sez. 1.1); incontriamo l'*effetto Unruh* (la misurazione



Figura 1.1: Beatrice e il *Piccolo Fisico Teorico*

di “particelle” nello stato di vuoto del campo da parte di un *detector* uniformemente accelerato), che poi interpretiamo come la misurazione di “particelle degli osservatori accelerati” (sez. 1.2); infine (sez. 1.3), discutiamo in modo esteso la relazione tra la definizione *operativa* e quella *matematica* e il fallimento di quest’ultima, tanto che con [Davies 1984] potremmo dire

particles do not exist!

1.1 Il “piccolo fisico teorico”

Per Natale, Beatrice ha ricevuto il regalo che desiderava: il *Piccolo Fisico Teorico 4: Seconda Quantizzazione*. Il kit contiene una strana scatola quadrata e una serie di buffi topolini meccanici (fig. 1.1). Le istruzioni recitano:

Questa scatola contiene il nostro speciale Campo Scalare Neutro. L’interruttore sul lato permette di attivare e disattivare l’evoluzione temporale del campo; la manopola permette di regolarne la temperatura.

1.1.1 Il Campo Scalare Neutro

Il Campo Scalare è il campo più semplice che si può studiare in fisica teorica: si tratta di un campo scalare *reale* di Klein-Gordon con densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2 + \frac{1}{2}m\phi(x)^2, \quad (1.1)$$

ed equazione classica

$$\square\phi(x) - m^2\phi(x) = 0. \quad (1.2)$$

Al fine di semplificare i calcoli, porremo d'ora in avanti $m = 0$. I risultati che otterremo sono comunque estendibili a $m \neq 0$ e agli altri campi che si considerano di solito.

Il campo $\phi(x)$ è quantizzato canonicamente secondo l'usuale procedura (vedi ad es. [Bjorken e Drell 1965]): si impongono le relazioni di commutazione canoniche (CCR) per $\phi(x)$ e $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$; si sviluppano gli operatori di campo sulla base delle soluzioni di onda piana dell'eq. (1.2),

$$\phi(x^j, t) = \int d^3k_j \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left(a_{k_j} e^{-i\omega t + ik_j x^j} + a_{k_j}^\dagger e^{i\omega t - ik_j x^j} \right), \quad |k_j| = \omega; \quad (1.3)$$

si inverte questa equazione, insieme a quella per $\pi(x)$, e si dimostra che a_{k_j} e $a_{k_j}^\dagger$, come operatori, soddisfano all'algebra bosonica

$$[a_{k'_j}, a_{k''_j}^\dagger] = \delta(k'_j - k''_j); \quad (1.4)$$

si sceglie infine come spazio di Hilbert della teoria lo spazio di Fock generato dall'applicazione ripetuta degli $a_{k_j}^\dagger$ sullo *stato di vuoto* $|0\rangle$.

1.1.2 I Topi *Detectors*

Beatrice apre la scatola; a lei sembra assolutamente vuota, ma...

...dato che il Campo Scalare non è accoppiato con i campi “fisici” del Modello Standard, non è possibile osservarlo direttamente (e il kit offre garanzie assolute dal punto di vista della sicurezza: *non interagisce con i bambini!*). Allo scopo di compiere osservazioni, il kit comprende un set di Topi *Detectors*, appositamente costruiti per essere sensibili al Campo.

I Topi si muovono classicamente nello spazio-tempo di Minkowski secondo traiettorie prestabilite; internamente sono sistemi quantistici a due livelli,

$$H_T = (\Delta E) A^\dagger A, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} A^\dagger |0_T\rangle &= |1_T\rangle, \quad A |1_T\rangle = |0_T\rangle, \\ A |0_T\rangle &= A^\dagger |1_T\rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

L'hamiltoniana di interazione tra Topi e Campo è data da

$$H_I(\tau) = \mu (A(\tau) + A^\dagger(\tau)) \phi(x(\tau)), \quad (1.7)$$

dove μ è la costante di accoppiamento, τ è il tempo proprio (relativistico) del Topo e $x(\tau)$ la sua *world-line*.

Un'interruttore sul dorso dei Topi permette di predisporli nello stato $|0_T\rangle$ o $|1_T\rangle$; una manopola di regolare la differenza di energia ΔE tra i livelli. Infine i Topi sono dotati di un timer che può essere regolato per suonare dopo un tempo proprio T .

L'esperimento-tipo consiste nel liberare un Topo nel Campo facendo partire il timer; chiudere la scatola, aspettare che il timer suoni, riapirla e verificare lo stato del Topo.

Le istruzioni spiegano come predire il risultato dell'esperimento utilizzando la *regola d'oro*: al prim'ordine le probabilità di transizione tra gli stati dei Topi sono date, se il campo è inizialmente nello stato di vuoto, da

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|0_T\rangle \rightarrow |1_T\rangle) &= \sum_{|\Psi\rangle} \left| i\mu \int_0^T d\tau \langle 1_T | \langle \Psi | (A(\tau) + A^\dagger(\tau)) \phi(x(\tau)) | 0_T \rangle | 0 \rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{|\Psi\rangle} \left| i\mu \int_0^T d\tau e^{i(\Delta E)\tau} \langle \Psi | \phi(x(\tau)) | 0 \rangle \right|^2 = \\ &= \mu^2 \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 e^{-i(\Delta E)(\tau_2 - \tau_1)} \langle 0 | \phi(x(\tau_1)) \phi(x(\tau_2)) | 0 \rangle; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\mathcal{P}(|1_T\rangle \rightarrow |0_T\rangle) = \mu^2 \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 e^{i(\Delta E)(\tau_2 - \tau_1)} \langle 0 | \phi(x(\tau_1)) \phi(x(\tau_2)) | 0 \rangle, \quad (1.9)$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza da H_T degli operatori di Heisenberg $A(\tau)$ e $A^\dagger(\tau)$,

$$\begin{aligned} A(\tau) &= e^{iH_T\tau} A e^{-iH_T\tau}, \\ A^\dagger(\tau) &= e^{iH_T\tau} A^\dagger e^{-iH_T\tau}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

preso gli autovalori sugli stati $|1_T\rangle$ e $|0_T\rangle$ e sfruttato la completezza degli stati $|\Psi\rangle$ (Beatrice infatti può osservare soltanto lo stato finale *del Topo*).

$W(x_1, x_2) = \langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle$ è la *funzione di correlazione a due punti* o *funzione di Wightman* del campo nello stato di vuoto. Se $W(x(\tau_1), x(\tau_2))$ è funzione soltanto di $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ e se $W(\Delta\tau)$ diventa trascurabile per grandi $\Delta\tau$, allora è possibile passare alle variabili di integrazione $\Delta\tau$ e $(\tau_1 + \tau_2)/2$ e integrare per $\Delta\tau \in (-\infty, +\infty)$ (invece che per $\Delta\tau \in (-T, +T)$). L'integrazione su $(\tau_1 + \tau_2)/2$ dà un fattore T che può essere eliminato se si considerano le *probabilità di transizione per unità di tempo*, che sono così

$$R_+ = \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{-i(\Delta E)\Delta\tau} W(\Delta\tau) \quad (1.11)$$

$$R_- = \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{i(\Delta E)\Delta\tau} W(\Delta\tau). \quad (1.12)$$

1.1.3 Topo Pigro e Topo Costante

Esperimento n. 1: preparare il Topo Meccanico P (*Pigro*) nello stato $|0_T\rangle$. Regolare la temperatura del campo *sullo 0 assoluto*. Porre il Topo nel Campo e fare evolvere il sistema. Quando il timer suona, prelevare il Topo e annotare il suo stato. Ripetere il processo fino a ottenere un campione statistico soddisfacente.

La traiettoria programmata in *Topo Pigro* è banale: *non si muove!* Nelle coordinate di Beatrice (che è una osservatrice inerziale), la sua *world-line* è espressa (scegliendo opportunamente l’origine) da

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x = y = z = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Procediamo ora a calcolare la probabilità di transizione R_+ . Per il campo di Klein-Gordon *massless*, la funzione di Wightman si deriva dalla rappresentazione

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik_0(t_1-t_2) + k_i(x_1^i - x_2^i)}}{2k_0} \delta(k^2) \theta(k_0) = \\ &= - \int_0^\infty \frac{d|k_i|}{(2\pi)^2} \frac{\sin |k_i|(x_1^i - x_2^i)}{(x_1^i - x_2^i)} e^{-i|k_i|(t_1-t_2)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove si è integrato su k_0 , sfruttando la δ di *null-shell*, e sulla parte angolare di k_i ; integrando infine sul modulo del momento e scartando i termini oscillanti all’infinito, si ottiene

$$W(x_1, x_2) = \frac{-1}{(4\pi^2)[(t_1 - t_2)^2 - |x_1^j - x_2^j|^2]}, \quad (1.15)$$

cioè $-1/(4\pi^2\sigma^2)$, dove σ è la distanza di Minkowski tra x_1 e x_2 . Questa funzione presenta per $\sigma \rightarrow 0$ un polo doppio che può essere interpretato spostandolo nel semipiano complesso superiore e separandolo in due poli semplici¹. Per la traiettoria (1.13) si ottiene subito

$$R_+^P = \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{-i(\Delta E)\Delta\tau}}{(4\pi^2)(\Delta\tau - i\epsilon)^2}. \quad (1.16)$$

È possibile valutare l’eq. (1.16) come un integrale di cammino in campo complesso chiudendo il contorno di integrazione nel semipiano inferiore; dato che la prescrizione sul polo lo pone all’esterno del contorno di integrazione (vedi fig. 1.2), l’integrale è nullo e

$$R_+^P = 0. \quad (1.20)$$

Beatrice fa alcune prove e non trova mai *Topo Pigro* nello stato eccitato $|1_T\rangle$. Ma questo non è sorprendente: dopo tutto, come può *Topo Pigro* misurare qualcosa se tutto quello che fa è starsene fermo? Beatrice passa allo

Esperimento n. 2: ripetere l’esperimento n. 1 utilizzando il Topo Meccanico C (*Costante*). *Topo Costante* è programmato per muoversi con una velocità costante v^i regolabile per mezzo dell’apposita rotellina.

¹Il polo è dovuto alla ben nota *divergenza ultravioletta* della teoria libera per il prodotto di operatori di campo nello stesso punto; come vedremo, la prescrizione equivale a richiedere che la funzione di correlazione sullo stato di vuoto contenga soltanto frequenze negative.

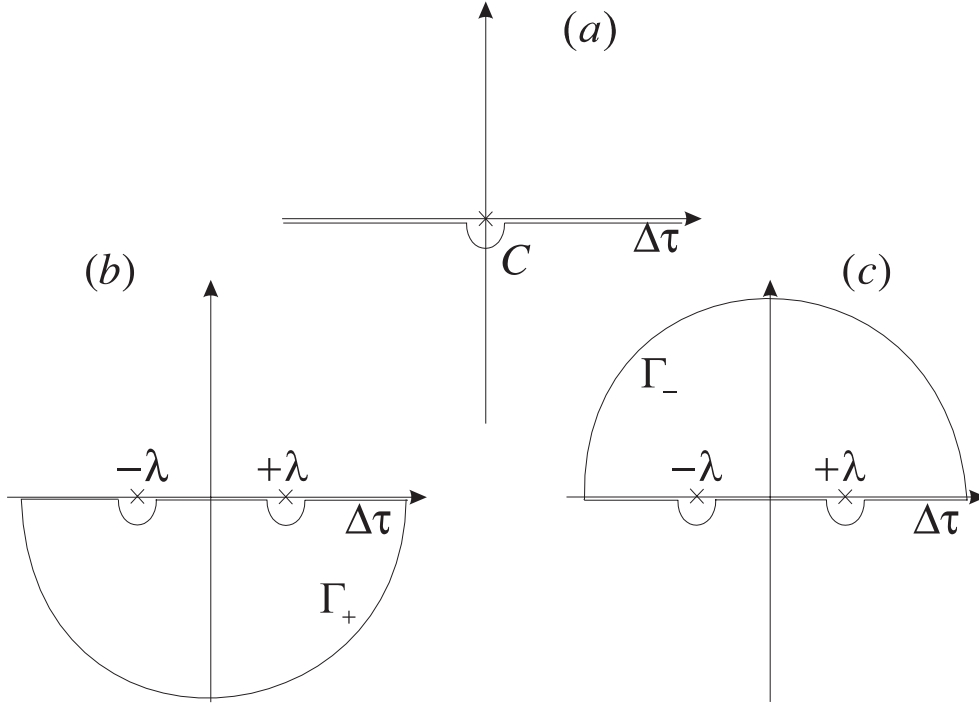


Figura 1.2: Trasformata di Fourier della funzione di Wightman

(a) Aggiungere il polo doppio nell'origine non è sufficiente affinché l'integrale

$$R_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{\mp i(\Delta E)\Delta\tau}}{(4\pi^2)(\Delta\tau - i\epsilon)^2} \quad (1.17)$$

sia ben definito, perché l'integrale sulla semicirconferenza C di raggio ϵ diverge come $1/\epsilon$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

(b) Possiamo tuttavia separare il polo doppio in due poli semplici in $\Delta\tau = \pm\lambda$; per la formula di Plemelj-Morera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{\mp i(\Delta E)\Delta\tau}}{(4\pi^2)(\Delta\tau - \lambda - i\epsilon)(\Delta\tau + \lambda - i\epsilon)} = P \int \dots + \pi i \operatorname{res}_{-\lambda} + \pi i \operatorname{res}_{+\lambda} \quad (1.18)$$

per ottenere R_+ integriamo sul contorno Γ_+ ; visto che in questo modo escludiamo i poli, il lemma di Jordan implica che l'integrale è nullo per ogni $\lambda > 0$ e possiamo dunque porre $R_+ = 0$;

(c) per ottenere R_- integriamo invece sul contorno Γ_- , includendo i due poli, e prendiamo il limite per $\lambda \rightarrow 0$

$$R_- = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\pi i (\operatorname{res}_{-\lambda} + \operatorname{res}_{+\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta E \lambda}{2\pi \lambda} = \frac{\Delta E}{2\pi}. \quad (1.19)$$

Le *world-lines* di *Topo Costante* (scegliendo opportunamente assi e origine) sono i *moti inerziali*

$$\begin{cases} t = \tau (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ x = v\tau (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ y = z = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Dato che per i moti inerziali la distanza di Minkowski tra punti successivi della *world-line* non è che *il tempo proprio trascorso*,

$$(t_1 - t_2)^2 - |x_1^j - x_2^j|^2 = \frac{\Delta\tau^2}{1 - v^2} - \frac{v^2 \Delta\tau^2}{1 - v^2} = \Delta\tau^2, \quad (1.22)$$

ci si riduce subito al caso di *Topo Pigno* e si trova (I sta per *inerziale*)

$$R_+^I = 0. \quad (1.23)$$

Concludiamo dunque che:

detectors in moto inerziale (compreso il caso particolare del detector fermo) non vengono eccitati dall'interazione con lo stato di vuoto del campo.

1.1.4 Mettendo i Topi in pentola

Esperimento n. 3: regolare la temperatura del campo su $T = T_0$; ripetere gli esperimenti n. 1 e n. 2, preparando i Topi sia nello stato $|0_T\rangle$ che $|1_T\rangle$; studiare la distribuzione statistica degli esiti.

Negli esperimenti precedenti, il campo si trovava in uno stato puro (lo *stato di vuoto* $|0\rangle$); questo era consistente con il fatto che la sua temperatura fosse lo zero assoluto². *Un sistema a temperatura finita, però, non è descritto da uno stato puro, ma da una matrice densità che esprime la sua distribuzione statistica su tutti gli stati puri del sistema.*

Il valore di aspettazione alla temperatura $T = \beta^{-1}$ di un operatore O è dato da

$$\langle O \rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle \Psi_i | O | \Psi_i \rangle, \quad (1.24)$$

dove $|\Psi_i\rangle$ è una base di stati per il sistema, e

$$\rho_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}. \quad (1.25)$$

Z è ovviamente la *funzione di partizione canonica* del sistema:

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j} = e^{-\beta \Omega}. \quad (1.26)$$

Introducendo l'*operatore di densità*

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{e^{-\beta \Omega}} = e^{\beta(\Omega - H)} \quad (1.27)$$

l'eq. (1.25) diventa

$$\langle O \rangle_\beta = \text{tr } \rho O. \quad (1.28)$$

²E d'altronde al Campo era possibile mantenersi stabilmente allo zero assoluto nella ben più calda *camera di Beatrice*, perché questa *non interagisce* con i Campi Scalari Neutri!

Beatrice si appresta a mettere i Topi Pigno e Costante nel campo. Le probabilità di transizione saranno ancora descritte dalle eq. (1.11) e (1.12); dovremo però utilizzare la *funzione di Wightman termica*

$$W_\beta(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_\beta. \quad (1.29)$$

Il calcolo dell'integrale (1.11) è grandemente semplificato se notiamo che

$$W_\beta(t_1, x_1^i; t_2, x_2^i) = W_\beta(t_2, x_2^i; t_1 + i\beta, x_1^i), \quad (1.30)$$

come si può dimostrare scrivendo

$$\begin{aligned} W_\beta(t_1, x_1^i; t_2, x_2^i) &= (\text{tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{tr} \left[e^{-\beta H} \phi(t_1, x_1^i) \phi(t_2, x_2^i) \right] = \\ &= (\text{tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{tr} \left[e^{-\beta H} \phi(t_1, x_1^i) e^{\beta H} e^{-\beta H} \phi(t_2, x_2^i) \right] = \\ &= (\text{tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{tr} \left[\phi(t_1 + i\beta, x_1^i) e^{-\beta H} \phi(t_2, x_2^i) \right] = \\ &= (\text{tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{tr} \left[e^{-\beta H} \phi(t_2, x_2^i) \phi(t_1 + i\beta, x_1^i) \right] = \\ &= W_\beta(t_2, x_2^i; t_1 + i\beta, x_1^i). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Per vedere come questo ci permetta di calcolare R_+^β e R_-^β , integriamo

$$\mathcal{J} \equiv \mu^2 \int_{\mathcal{C}} d\Delta\tau e^{-i(\Delta E)\Delta\tau} W_\beta(\Delta\tau) \quad (1.32)$$

lungo il contorno \mathcal{C} della striscia $-\beta + \epsilon < \text{Im } \Delta\tau < -\epsilon$. In questa striscia è garantita l'analiticità di W_β (vedi ad es. [Fulling e Ruijsenaars 1987]) e dunque l'integrale \mathcal{J} si annulla. Ma

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= R_+^\beta - \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{-i(\Delta E)(\Delta\tau - i\beta)} W_\beta(\Delta\tau - i\beta) = \\ &= R_+^\beta - \mu^2 e^{-\beta(\Delta E)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{-i(\Delta E)\Delta\tau} W_\beta(\Delta\tau - i\beta) = \\ &= R_+^\beta - \mu^2 e^{-\beta(\Delta E)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau' e^{i(\Delta E)\Delta\tau'} W_\beta(-\Delta\tau' - i\beta) = \\ &= R_+^\beta - \mu^2 e^{-\beta(\Delta E)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau' e^{i(\Delta E)\Delta\tau'} W_\beta(\Delta\tau') = \\ &= R_+^\beta - e^{-\beta(\Delta E)} R_-^\beta = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Nel calcolo, cambiando la variabile di integrazione in $\Delta\tau' = -\Delta\tau$ si sono anche invertiti gli estremi mantenendo il segno invariato. Poiché nella derivazione non abbiamo utilizzato la forma esplicita del propagatore per le *world-lines* di *Topo Pigno* e *Topo Costante*, il risultato

$$\frac{R_+^\beta}{R_-^\beta} = e^{-\beta(\Delta E)} \quad (1.34)$$

è valido per entrambi. Beatrice, che ha già ben studiato il *Piccolo Fisico Teorico 3: Meccanica Statistica*, sa che imponendo la condizione di *bilancio dettagliato*

$$\begin{aligned} N_-^\beta R_+^\beta &= N_+^\beta R_-^\beta, \\ N_-^\beta + N_+^\beta &= 1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

dove N_-^β e N_+^β sono i *numeri di occupazione* degli stati $|0_T\rangle$ e $|1_T\rangle$, si ottiene la distribuzione di Fermi-Dirac³

$$N_+^\beta = \frac{1}{1 + e^{\beta\Delta E}}. \quad (1.36)$$

Ciò significa che *un ensemble di Topi Detectors è in equilibrio con il Campo quando i suoi stati sono termicamente distribuiti alla stessa temperatura T del Campo*. Ovvero,

La distribuzione statistica di un ensemble di detectors (in moto inerziale) in equilibrio con il campo è un indicatore efficace della temperatura del campo.

1.1.5 *Qu'est-ce que c'est les particules?*

A Beatrice, però, non è chiaro *cosa succeda* ai Topi mentre stanno attraversando il campo con la scatola chiusa. Non è sufficiente dire che “il *detector* interagisce con il campo”; deve essere possibile caratterizzare più precisamente l'interazione. A questo scopo sarebbe utile esaminare lo stato finale del campo; purtroppo, però, le istruzioni sono esplicite: *non è possibile osservare direttamente gli stati del campo!*

Tuttavia, Beatrice ha già una sua idea. Perché mai infatti la quantizzazione del campo avviene attraverso la decomposizione in modi normali di eq. (1.3)? È presto detto: perché ci si accorge che l'hamiltoniana del campo,

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (\dot{\phi}(x)^2 + |\nabla_i \phi(x)|^2 + m^2 \phi(x)^2), \quad (1.37)$$

può essere anche essere scritta

$$H = \int d^3k_i \frac{1}{2} (\dot{\phi}(k^i, t)^2 + (k^j k_j + m^2) \phi(k^i, t)^2), \quad (1.38)$$

dove $\phi(k^i, t)$ è la trasformata di Fourier del campo, definita da

$$\phi(x^i, t) = \int \frac{d^3k^i}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ik_i x^i} \phi(k^i, t). \quad (1.39)$$

L'hamiltoniana del campo è uguale alla somma delle hamiltoniane di infiniti oscillatori armonici unidimensionali disaccoppiati, con variabili coniugate⁴ $q =$

³ I Topi sono fermioni! (vedi l'eq. (1.6)). Se fossero invece bosoni con stati $|n_T\rangle$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ le probabilità R_+ e R_- sarebbero proporzionali a $n+1$ e n , e otterremmo senza troppa fatica la distribuzione di Bose-Einstein.

⁴Per la meccanica quantistica degli oscillatori armonici si veda ad es. [Sakurai 1985]; per la quantizzazione canonica delle teorie di campo il riferimento è sempre [Bjorken e Drell 1965].

$\phi(k_i, t)$ e $p = \dot{\phi}(k_i, t)$; gli oscillatori possono essere quantizzati imponendo⁵

$$\phi(k_i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_i}}}(a_{k_i} + a_{-k_i}^\dagger), \quad (1.42)$$

dove a_{k_i} e $a_{k_i}^\dagger$ soddisfano l'algebra $[a_{k_i}, a_{k_i}^\dagger] = 1$. Quando però si cerca di definire lo spazio di Hilbert “globale” come il prodotto degli infiniti spazi di Hilbert “a un oscillatore”, si incontrano dei problemi matematici. Si procede allora così: dato che a ciascuno degli oscillatori armonici indipendenti di eq. (1.38) corrisponde una soluzione ψ_{k_i} di onda piana a *frequenza positiva* dell'eq. (1.2) (cioè l'equazione della teoria di *prima quantizzazione*⁶ della *particella* di Klein-Gordon), si interpretano gli stati “a n quanti” dell'oscillatore armonico associato a ψ_{k_i} come stati contenenti n “particelle” nello stato quantistico (*di prima quantizzazione*) ψ_{k_i} . La costruzione dello spazio di Hilbert “globale” parte da uno *stato di vuoto* $|0\rangle$ che non contiene nessuna “particella”; tutti gli altri stati si “etichettano” secondo il numero di “particelle” (di qualsiasi tipo) contenute e si ottengono applicando a $|0\rangle$ i costruttori $a_{k_i}^\dagger$:

$$|\xi\rangle = (a_{k_{(1)}}^\dagger)^{p_1} (a_{k_{(2)}}^\dagger)^{p_2} \dots |0\rangle; \quad (1.43)$$

si dice allora che lo stato $|\xi\rangle$ contiene p_1 “particelle” di vettore d'onda $k_{(1)}$ e energia $\omega_{k_{(1)}}$, p_2 “particelle” di vettore d'onda $k_{(2)}$ e energia $\omega_{k_{(2)}}$, e così via. E in effetti, l'energia totale del campo si può scrivere

$$H = \int d^3k_j \omega_j a_{k_j}^\dagger a_{k_j}. \quad (1.44)$$

Beatrice sospetta che le transizioni dei Topi siano dovute in qualche modo proprio a queste “particelle”. Per verificarlo, si propone di calcolare (con la fidata *regola d'oro*) il risultato dell'interazione di un Topo con lo stato del campo

$$|n_{k'_j}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_{k'_j}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.45)$$

È vero che il suo kit non le permette di preparare il campo in uno stato “a n particelle”, ma ciò non ha importanza: sarà un *gedankenexperiment*, come

⁵È necessario “mischiare” gli indici k_i e $-k_i$ a causa di due effetti che si sovrappongono: la condizione di realtà del campo implica che $\phi(k_i, t) = \phi(-k_i, t)$; ma la parte reale e quella immaginaria di ogni $\phi(k_i, t)$ corrispondono però a *due* oscillatori armonici indipendenti. Si pone perciò

$$\begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{Re} \phi(k_i, t) = (2\omega_{k_i})^{\frac{1}{2}} (b_{k_i} + b_{k_i}^\dagger), \\ \sqrt{2} \operatorname{Im} \phi(k_i, t) = (2\omega_{k_i})^{\frac{1}{2}} (c_{k_i} + c_{k_i}^\dagger), \end{cases} \quad (1.40)$$

dove su b e c sussistono le condizioni $b_{k_i} = b_{-k_i}$, $c_{k_i} = -c_{-k_i}$; definendo

$$a_{k_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{k_i} + ic_{k_i}), \quad (1.41)$$

gli a_{k_i} si possono considerare tutti indipendenti, e ne segue la (1.42).

⁶ Come è ben noto, si tratta di una teoria inconsistente dal punto di vista dell'interpretazione di Born; ma questo è proprio uno dei motivi che portano irresistibilmente la fisica teorica verso le teorie di campo!

quelli di Einstein! Scriviamo dunque (al prim'ordine) l'ampiezza di transizione

$$|0_T\rangle|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |1_T\rangle|\Psi\rangle, \quad (1.46)$$

(vedi la seconda delle eq. (1.8)), e sviluppiamo l'operatore di campo:

$$i\mu \int_0^T d\tau e^{i(\Delta E)\tau} \int \frac{dk_i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \langle \Psi | (e^{-i\omega t + ik_i x^i} a_{k_j} + e^{i\omega t - ik_i x^i} a_{k_j}^\dagger) | n_{k'_j} \rangle, \quad (1.47)$$

dove (t, x^i) è funzione di τ . È chiaro che gli unici stati finali $|\Psi\rangle$ da considerare sono $|(n-1)_{k'_j}\rangle$ e $|(n+1)_{k'_j}\rangle$:

$$|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |(n-1)_{k'_j}\rangle : \frac{i\mu}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \int_0^T d\tau \sqrt{n} e^{i(\Delta E)\tau} e^{-i\omega' t + ik'_i x^i}, \quad (1.48)$$

$$|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |(n+1)_{k'_j}\rangle : \frac{i\mu}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \int_0^T d\tau \sqrt{n+1} e^{i(\Delta E)\tau} e^{i\omega' t - ik'_i x^i}. \quad (1.49)$$

Inserendo ora, per semplicità, la traiettoria di Pigro (eq. (1.13)), quadrando e cambiando variabili ed estremi di integrazione come discusso sotto eq. (1.12), integrando infine su $\Delta\tau$, si ottengono le probabilità di transizione⁷

$$\mathcal{P}(|0_T\rangle|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |1_T\rangle|(n-1)_{k'_j}\rangle) = \frac{n\mu^2}{4\pi^2 2\omega'} \delta(\Delta E - \omega'), \quad (1.50)$$

$$\mathcal{P}(|0_T\rangle|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |1_T\rangle|(n+1)_{k'_j}\rangle) = \frac{(n+1)\mu^2}{4\pi^2 2\omega'} \delta(\Delta E + \omega'). \quad (1.51)$$

È chiaro che la seconda probabilità è sempre nulla. Tuttavia, con la sostituzione $\Delta E \rightarrow -\Delta E$ (che porta le formule per R_+ in quelle per R_-) la (1.51) viene a descrivere esattamente la probabilità

$$\mathcal{P}(|1_T\rangle|n_{k'_j}\rangle \rightarrow |0_T\rangle|(n+1)_{k'_j}\rangle) = \frac{(n+1)\mu^2}{4\pi^2 2\omega'} \delta(\Delta E - \omega'). \quad (1.52)$$

Il processo descritto dall'eq. (1.50) può venire interpretato come *l'assorbimento da parte del Topo di una “particella” del campo*. In conseguenza di tale processo l'energia del Topo aumenta e quella del campo diminuisce; l'assorbimento può avvenire soltanto se le due differenze si eguagliano. Inoltre, *la probabilità del processo è proporzionale al numero di “particelle” presenti nel campo*.

Il processo descritto dall'eq. (1.52), invece, è interpretabile come *l'emissione da parte del Topo di una “particella” del campo*; l'energia del Topo diminuisce, mentre quella del campo aumenta. Il fatto che la probabilità del processo sia proporzionale a $n+1$ dà origine ai fenomeni di *emissione stimolata* (ovvero il Topo ha maggiori probabilità di emettere proprio nei “modi” più popolati del campo) o, per $n=0$, di *emissione spontanea*⁸.

⁷ Non deve spaventare il fatto che contengano una δ . Come usuale nell'applicazione della *regola d'oro*, le probabilità di transizione vanno poi integrate sugli stati finali del campo.

⁸ Wald sottolinea [Wald 1994] come questo tenda a oscurare il ruolo dinamico svolto dallo stato di vuoto del campo: l'emissione *spontanea* non è dovuta solo allo stato eccitato del *detector*, ma alla sua interazione con lo stato di vuoto.

Rifacendo i conti per *Topo Costante*, si ritrovano le formule (1.50) e (1.52), ma con un *redshift* (o *blueshift*) dell'energia:

$$\omega' \rightarrow \tilde{\omega}' = \frac{\omega - k'_i v^i}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.53)$$

La dinamica dei processi di assorbimento ed emissione rafforza così l'interpretazione degli stati del campo come stati “a particelle”. Beatrice si è fatta una chiara idea di cosa succede dentro alla scatola:

il processo di eccitazione o diseccitazione dei detectors (in moto inerziale) corrisponde (al prim'ordine) all'assorbimento o emissione di una “particella” del campo. Inoltre, la probabilità che il detector “assorba” una “particella” è proporzionale al numero n di “particelle” presenti nello stato del campo; la probabilità che la emetta è proporzionale a $n + 1$.

1.1.6 *Topo Frettoloso* è un topo caloroso

Esperimento n. 4: riportare la temperatura del campo allo zero assoluto; procedere come per l'esperimento n. 3, utilizzando il Topo Meccanico F (*Frettoloso*). Studiare la distribuzione statistica degli esiti.

Topo Frettoloso è programmato per muoversi di moto *uniformemente accelerato alla Pauli*. Rimandando alla sezione 1.2.1 per un'analisi accurata della cinematica, diamo qui soltanto l'espressione della traiettoria come vista dall'osservatrice inerziale Beatrice:

$$\begin{cases} t = g^{-1} \sinh g\tau, \\ x = g^{-1} \cosh g\tau, \\ y = z = 0, \end{cases} \quad (1.54)$$

dove τ , come sempre, è il tempo proprio del Topo e g è la sua accelerazione nel sistema istantaneamente in quiete con esso. Passiamo subito a calcolare le probabilità di transizione: inserendo la traiettoria (1.54) nella formula (1.15) per la funzione di Wightman, otteniamo

$$\begin{aligned} W(x(\tau_1), x(\tau_2)) &= \\ &= -\left(4\pi^2 g^{-2}[(\sinh g\tau_1 - \sinh g\tau_2 - i\epsilon)^2 - (\cosh g\tau_1 - \cosh g\tau_2)^2]\right)^{-1} = \\ &= -\left(4\pi^2 g^{-2}[\sinh^2 g\tau_1 - \cosh^2 g\tau_1 + \sinh^2 g\tau_2 - \cosh^2 g\tau_2 + \right. \\ &\quad \left. - 2 \sinh g\tau_1 \sinh g\tau_2 + 2 \cosh g\tau_1 \cosh g\tau_2]\right)^{-1} = \\ &= -\left(4\pi^2 g^{-2}[-2 + 2 \cosh g(\tau_2 - \tau_1)]\right)^{-1} = \\ &= -\left(16\pi^2 g^{-2} \sinh^2 \frac{g\Delta\tau}{2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Poiché in una corona circolare intorno a $\Delta\tau = 0$ la funzione di Wightman è espandibile in serie di Laurent come $-1/(4\pi^2 \Delta\tau^2) + O(1)$ la sua trasformata

di Fourier può essere definita con gli accorgimenti utilizzati in fig. 1.2 per il caso inerziale. Poiché inoltre sull’asse immaginario $\sinh^2 g\Delta\tau/2$ è periodico con periodo $2\pi i/g$, la funzione di Wightman soddisfa

$$W(-\Delta\tau - \frac{2\pi i}{g}) = W(\Delta\tau); \quad (1.56)$$

ne segue che vale la derivazione di eq. (1.33) e per *Topo Frettoloso*

$$\frac{R_+^F}{R_-^F} = e^{-2\pi\Delta E/g}, \quad (1.57)$$

e, di conseguenza, per un *ensemble* di Topi Frettolosi in equilibrio con il campo,

$$N_+^F = \frac{1}{1 + e^{\Delta E/T_H}}, \quad (1.58)$$

dove T_H è la *temperatura di Hawking*

$$T_H = \frac{g}{2\pi}. \quad (1.59)$$

Beatrice è molto sorpresa. *La temperatura effettiva del campo è lo zero assoluto, ma un Topo accelerato registra invece la temperatura di Hawking.* Non importa che questa sia molto piccola per le accelerazioni raggiungibili dai Topi (rimettendo a posto tutte le costanti si trova $T_H = \hbar a/2\pi ck$, dove a è l’accelerazione “misurabile”; $T_H \approx 1^\circ\text{K}$ per $a \approx 10^{19}\text{m/s}^2$); il problema è di principio: a $T_{\text{campo}} = 0$, i Topi non hanno “particelle” da assorbire!

Le istruzioni non sono di molto aiuto:

Effetto Unruh: nello stato di vuoto del campo, un detector in moto uniformemente accelerato alla Pauli si comporta come se fosse immerso in un bagno termico alla temperatura di Hawking $T_H = g/2\pi$.

e a Beatrice rimane l’impressione che nel *Piccolo Fisico Teorico 4: Seconda Quantizzazione* ci sia qualcosa di sbagliato.

1.1.7 Altri topi

Certamente, il comportamento di *Topo Frettoloso* deve essere in qualche misura condiviso da *tutti* i Topi in un moto accelerato *generico*. Limitiamoci a studiare il caso dei *moti stazionari*, ovvero quelli per cui la distanza tra due punti della *world-line* $\mathcal{P}(\tau)$ è funzione soltanto dell’intervallo di tempo proprio:

$$\forall\tau, \quad |\mathcal{P}(\tau + \Delta\tau) - \mathcal{P}(\tau)| = |\mathcal{P}(\Delta\tau) - \mathcal{P}(0)|. \quad (1.60)$$

Il motivo per considerare proprio questi moti è che soltanto se il moto del Topo è “lo stesso” a qualsiasi tempo (ovvero se ponendoci nel sistema di riferimento istantaneamente in quiete con il Topo non possiamo dire nulla riguardo alla parte della *world-line* in cui ci troviamo), possiamo aspettarci che il Topo entri in equilibrio con il campo. Dal punto di vista matematico, le probabilità di

transizione (per unità di tempo) possono essere allora calcolate con le formule (1.11) e (1.12), e non dipendono dal tempo a cui viene effettuata la misurazione dello stato del Topo. La classe dei moti stazionari nello spazio di Minkowski coincide con quella delle *eliche time-like*. Seguiamo perciò la definizione e la classificazione data in [Synge 1967].

Ogni *world-line* $\mathcal{P}(\tau)$ nello spazio di Minkowski è una soluzione delle *equazioni di Frenet-Serret*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} &= c_1 \mathbf{n}_1, \\ \dot{\mathbf{n}}_1 &= c_2 \mathbf{n}_2 + c_1 \mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{n}}_2 &= c_3 \mathbf{n}_3 - c_2 \mathbf{n}_1, \\ \dot{\mathbf{n}}_3 &= -c_3 \mathbf{n}_2, \end{cases} \quad (1.61)$$

dove la 4-velocità $\mathbf{u}(\tau) \equiv d\mathcal{P}(\tau)/d\tau$ e la tre *normali* $\mathbf{n}_i(\tau)$ formano a ogni istante una tetraide ortonormale; c_1 , c_2 e c_3 sono la prima, seconda e terza *curvatura*. In particolare, \mathbf{n}_1 è la 4-accelerazione $d^2\mathcal{P}(\tau)/d\tau^2$ e $g \equiv c_1$ è il suo modulo.

Una *elica* è definita dalla condizione che *le tre curvature siano costanti lungo la curva*. Che questo sia equivalente alla condizione di stazionarietà (1.60) si può vedere sviluppando $\mathcal{P}(\tau)$ in serie di Taylor intorno a $\tau = \tau_0$, utilizzando le eq. (1.61) per esprimere le derivate di $\mathbf{u}(\tau)$ in funzione della *tetraide di Frenet* e, infine, sfruttando l'ortonormalità della tetraide per semplificare il quadrato:

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(\tau) - \mathcal{P}(\tau_0)|^2 &= |\mathcal{P}(\tau_0 + \Delta\tau) - \mathcal{P}(\tau_0)|^2 = \\ &= \left| \mathbf{u}(\tau_0) \Delta\tau + \dot{\mathbf{u}}(\tau_0) \frac{\Delta\tau^2}{2!} + \ddot{\mathbf{u}}(\tau_0) \frac{\Delta\tau^3}{3!} + \dots \right|^2 = \\ &= \left| \mathbf{u} \Delta\tau + c_1 \mathbf{n}_1 \frac{\Delta\tau^2}{2!} + (\dot{c}_1 \mathbf{n}_1 + c_1^2 \mathbf{u} + c_1 c_2 \mathbf{n}_2) \frac{\Delta\tau^3}{3!} + \dots \right|^2 = \\ &= -\Delta\tau^2 + c_1 \Delta\tau^3 + \frac{4\dot{c}_1 - c_1^2 + 4c_1 c_2}{12} \Delta\tau^4 + F_5(c_1, \dot{c}_1, \ddot{c}_1, c_2, \dot{c}_2, c_3) \Delta\tau^5 + \dots; \end{aligned} \quad (1.62)$$

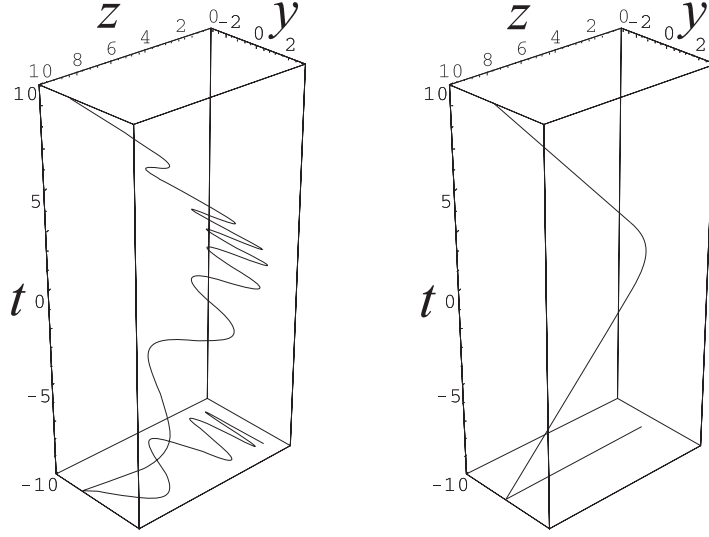
(si intende che la tetraide di Frenet e le curvature sono valutate in τ_0). $\mathcal{P}(\tau)$ è stazionaria se e solo se, *a tutti gli ordini*, l'eq. (1.62) è indipendente da τ_0 ; questo implica immediatamente che anche le tre curvature devono esserlo.

Tutte le eliche si possono classificare secondo le tre curvature:

Tipo I È il caso generale: $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$; l'integrazione delle eq. (1.61) dà, per coordinate opportune,

$$\begin{cases} t = r\chi^{-1} \sinh \chi\tau, \\ x = q\gamma^{-1} \sin \gamma\tau, \\ y = q\gamma^{-1} \cos \gamma\tau, \\ z = r\chi^{-1} \cosh \chi\tau, \end{cases} \quad (1.63)$$

dove $q^2 - r^2 = -1$; l'elica non è confinata in nessun iperpiano tridimensionale e la 4-accelerazione ha modulo costante $g = \sqrt{r^2\chi^2 + q^2\gamma^2}$ (vedi

Figura 1.3: *Topo Complicato* e *Topo Frettoloso*

Topo Complicato è un topo *frettoloso* a cui “gira la testa”: le eliche di tipo I sono la combinazione di un *moto iperbolico alla Pauli* (elica di tipo III) e di un moto circolare uniforme. Nell’immagine è mostrata soltanto una delle dimensioni nelle quali si svolge il moto circolare di *Topo Complicato*.

fig. 1.3; l’elica I è percorsa da *Topo Complicato*)⁹. La distanza tra due punti della *world-line* è data da

$$\sigma_C^2 = 4r^2\chi^{-2}\sinh^2\frac{\chi\Delta\tau}{2} - 4q^2\gamma^{-2}\sin^2\frac{\gamma\Delta\tau}{2}. \quad (1.65)$$

Tipo II L’elica è degenera ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 = 0$) e giace in un iperpiano tridimensionale (vedi fig. 1.4); per questo motivo possiamo eliminare la coordinata z senza perdita di generalità.

Sottotipo IIa: $c_1^2 - c_2^2 > 0$, *Topo Strano*. L’elica è una *run-away curve* di equazioni

$$\begin{cases} t = r\chi^{-1}\sinh\chi\tau, \\ x = r\chi^{-1}\cosh\chi\tau, \\ y = q\tau, \end{cases} \quad (1.66)$$

⁹I parametri χ , γ , q , r sono legati alle curvature dalle relazioni

$$\begin{cases} \chi^2 = (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + R)/2, \\ \gamma^2 = (-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + R)/2, \\ q^2 = [(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)/R - 1]/2, \\ r^2 = [(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)/R + 1]/2, \end{cases} \quad (1.64)$$

dove $R^2 = (c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)^2 + 4c_1^2c_3^2$.

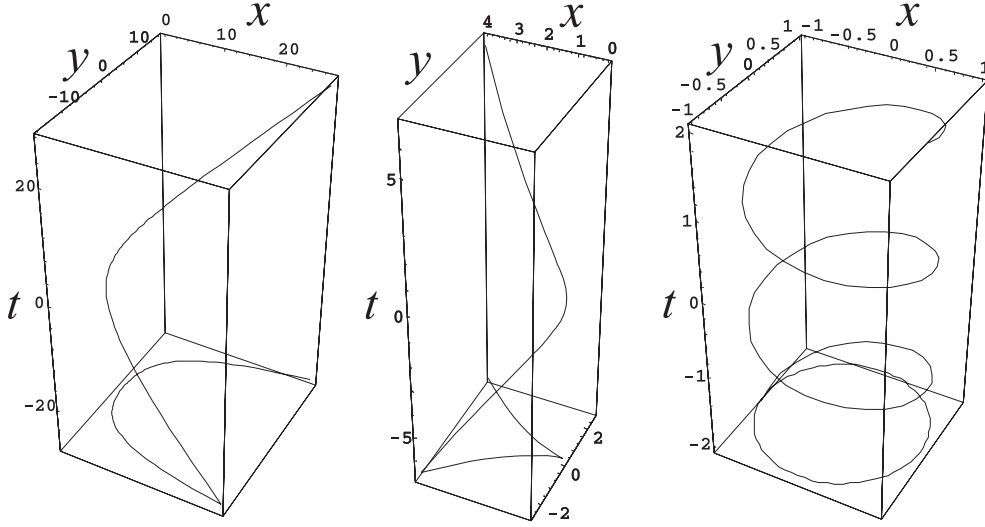


Figura 1.4: Le traiettorie di *Topo Strano*, *Topo Appuntito* e *Topo Girotondo*.

dove¹⁰ $q^2 - r^2 = -1$; l'accelerazione ha modulo $g = r\chi$, e la distanza geodetica è data da

$$\sigma_S^2 = 4r^2\chi^{-2} \sinh^2 \frac{\chi\Delta\tau}{2} - q^2\Delta\tau^2. \quad (1.68)$$

Sottotipo IIb: $c_1^2 - c_2^2 = 0$, *Topo Appuntito*. L'elica è ancora una curva *run-away* (ma solo cubicamente e non esponenzialmente) con una peculiare cuspid. Le equazioni, in un opportuno sistema di riferimento, sono

$$\begin{cases} t = \tau + \frac{1}{6}g^2\tau^3, \\ x = \frac{1}{2}g\tau^2, \\ y = \frac{1}{6}g^2\tau^3; \end{cases} \quad (1.69)$$

l'accelerazione ha modulo $g = c_1$, e la distanza tra i punti della *world-line* per un intervallo $\Delta\tau$ di tempo proprio è

$$\sigma_A^2 = \Delta\tau^2 \left(1 + \frac{g^2\Delta\tau^2}{12} \right). \quad (1.70)$$

Sottotipo IIc: $c_1^2 - c_2^2 < 0$, *Topo Girotondo*. L'elica descrive un moto

¹⁰I parametri sono dati da

$$\begin{cases} \chi^2 = c_1^2 - c_2^2, \\ q^2 = c_2^2/(c_1^2 - c_2^2), \\ r^2 = c_1^2/(c_1^2 - c_2^2). \end{cases} \quad (1.67)$$

circolare (quindi *limitato*) con raggio $q\gamma^{-1}$ e velocità angolare γ :

$$\begin{cases} t = r\tau, \\ x = q\gamma^{-1} \sin \gamma\tau, \\ y = q\gamma^{-1} \cos \gamma\tau; \end{cases} \quad (1.71)$$

dove¹¹ $q^2 - r^2 = -1$; l'accelerazione ha modulo $g = q\gamma$, e la distanza geodetica è data da

$$\sigma_G^2 = r^2 \Delta\tau^2 - 4q^2 \gamma^{-2} \sin^2 \frac{\gamma \Delta\tau}{2}. \quad (1.73)$$

Tipo III L'elica è doppiamente degenera ($c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = 0$) e giace in un 2-piano. Il moto è iperbolico (*Topo Frettoloso!*) Vedi fig. 1.3, eq. (1.54), eq. (1.55) per l'espressione di σ_F e la discussione più avanti, alla sezione 1.2.1.

Tipo IV Tutte le curvature si annullano. Il moto è inerziale (*Topo Pigro* e *Topo Costante*).

Le istruzioni suggeriscono di vedere se i quattro nuovi Topi rispondono allo stato di vuoto del campo in modo simile a *Topo Frettoloso*:

Esperimento n. 5: ripetere l'esperimento n. 4 con i Topi Meccanici C, S, A, G, studiando la distribuzione statistica degli esiti *in funzione della “soglia” ΔE* .

[Un esperimento simile è svolto in [Letaw 1981].] Dobbiamo dunque calcolare le probabilità di eccitazione e diseccitazione ottenute calcolando gli integrali (1.8) e (1.9) sulle nuove traiettorie stazionarie. Per tutti i nuovi Topi, gli integrali hanno la forma

$$R_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{\mp \Delta E \Delta\tau}}{4\pi^2 [\sigma(\Delta\tau)]^2}, \quad (1.74)$$

e in tutti l'integrando presenta un polo doppio nell'origine, che deve essere interpretato con il metodo di fig. 1.2. In effetti, visto che per tutti i Topi

$$\frac{1}{[\sigma(\Delta\tau)]^2} = \frac{1 + O(\Delta\tau^2)}{\Delta\tau^2}, \quad (1.75)$$

il limite della somma dei residui per $\lambda \rightarrow 0$ è sempre $\mp iE/4\pi^2$. Ora, R_- si può scrivere come

$$\begin{aligned} R_- &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{+\Delta E \Delta\tau}}{4\pi^2 [\sigma(\Delta\tau - i\epsilon)]^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau' \frac{-e^{-\Delta E \Delta\tau'}}{4\pi^2 [\sigma(-\Delta\tau' - i\epsilon)]^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau' \frac{-e^{-\Delta E \Delta\tau'}}{4\pi^2 [\sigma(+\Delta\tau' + i\epsilon)]^2} \end{aligned} \quad (1.76)$$

¹¹ I parametri sono dati da

$$\begin{cases} \gamma^2 = c_2^2 - c_1^2, \\ q^2 = c_1^2 / (c_2^2 - c_1^2), \\ r^2 = c_2^2 / (c_2^2 - c_1^2). \end{cases} \quad (1.72)$$

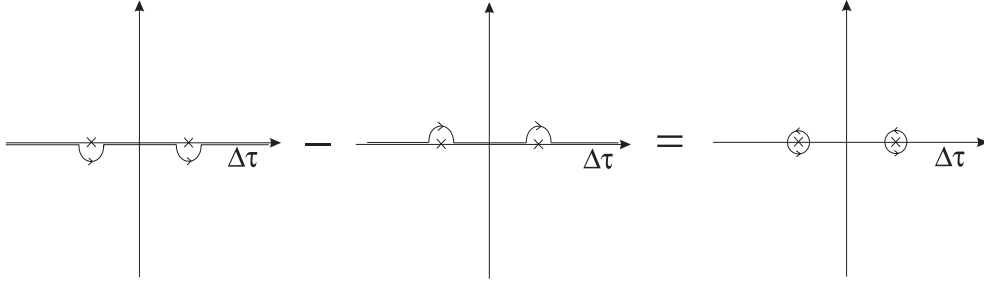


Figura 1.5: $R_+ - R_-$ è uguale a $2\pi i$ volte il residuo nei poli separati

(abbiamo cambiato variabile di integrazione da $\Delta\tau$ in $\Delta\tau' = -\Delta\tau$, invertito gli estremi di integrazione e sfruttato il fatto che $[\sigma(\Delta\tau)]^2$ è pari). L'integrale che definisce R_- è dunque formalmente uguale a quello per R_+ , tranne che per il senso di aggiramento dei poli. Ne segue che (vedi fig. 1.5)

$$R_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} R_- + 2\pi i (\text{res}_{-\lambda} + \text{res}_{+\lambda}) = R_- - \frac{E}{2\pi}. \quad (1.77)$$

Soltanto per *Topo Appuntito*, tuttavia, possiamo imitare il calcolo di fig. 1.2, dove si calcola R_+ chiudendo all'infinito un contorno di integrazione in campo complesso. Il lemma di Jordan, infatti, richiede che la funzione integranda tenda uniformemente a zero per $|\Delta\tau| \rightarrow \infty$, mentre per *Topo Complicato*, *Topo Strano* e *Topo Girotondo* $\sigma(\Delta\tau)$ ha una singolarità essenziale nel punto all'infinito.

Gli integrali che dobbiamo calcolare non appaiono facilmente attaccabili nemmeno con altri metodi analitici, per cui integriamo numericamente. Facendo così però ci scontriamo con il problema di gestire la presenza del polo doppio. Ragioniamo allora in questo modo: se separiamo il polo doppio in due poli semplici, R_+ è dato da

$$R_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[P \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{-i\Delta\tau\Delta E}}{4\pi^2(\sigma - \lambda)(\sigma + \lambda)} + \pi i \text{res}_{-\lambda} + \pi i \text{res}_{+\lambda} \right]; \quad (1.78)$$

ma come abbiamo visto in fig. 1.2,

$$R_+^P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[P \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{-i\Delta\tau\Delta E}}{4\pi^2(\Delta\tau - \lambda)(\Delta\tau + \lambda)} + \pi i \text{res}_{-\lambda} + \pi i \text{res}_{+\lambda} \right] = 0; \quad (1.79)$$

visto che il limite dei residui è lo stesso per tutti i moti stazionari, possiamo sottrarre R_+^P all'espressione (1.78) per R_+ ottenendo

$$\begin{aligned} R_+ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{-i\Delta\tau\Delta E}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{(\sigma - \lambda)(\sigma + \lambda)} - \frac{1}{(\Delta\tau - \lambda)(\Delta\tau + \lambda)} \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau \frac{-e^{-i\Delta\tau\Delta E}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{[\sigma(\Delta\tau)]^2} - \frac{1}{\Delta\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

R_+ è perciò uguale all'integrale della funzione *analitica* che si ottiene sottraendo da $1/\sigma^2$ il polo doppio nell'origine; R_- si ricava dall'eq. (1.77).

La condizione di bilancio dettagliato (1.35) implica che un *ensemble* di Topi è in equilibrio con il campo quando la frazione di Topi (con energia ΔE) eccitati è data da

$$N_+(\Delta E) = \left(1 + \frac{R_+(\Delta E) + \Delta E/2\pi}{R_+(\Delta E)}\right)^{-1}. \quad (1.81)$$

Oltre che per calcolare la distribuzione dei Topi all'equilibrio, la probabilità di eccitazione può essere usata per stimare la densità di energia del campo. Ritorniamo per un momento al caso di moti stazionari e al concetto di “particella” emerso in sez. 1.1.5. Come abbiamo visto, la probabilità di eccitazione R_+ in presenza di n “particelle” di momento k_j è proporzionale a $(n/8\pi^2\omega)\delta(\Delta E - \omega)$. Nell'ipotesi che *tutti i modi di energia ω' siano ugualmente popolati*, possiamo integrare su k_j ottenendo una *probabilità complessiva di eccitazione* $n\Delta E/2\pi^2$. Ne segue che il numero di occupazione degli stati del campo di energia ω è dato da¹²

$$n(\omega) = \frac{2\pi R_+(\omega)}{\omega}; \quad (1.82)$$

moltiplicando per l'energia e per la *densità degli stati del campo per unità di volume* $g(\omega) = \omega^2/2\pi^2$ si trova la *densità di energia del campo*,

$$S(\omega') = \frac{\omega^2 R_+}{\pi}. \quad (1.83)$$

Questa analisi può essere estesa al caso generale dei moti stazionari¹³ per definire una *densità di energia del campo* “dal punto di vista” dei Topi accelerati, ed è confermata da un argomento di teoria dei segnali: come sappiamo, R_+ è dato, dopo aver eliminato l'integrazione più interna dividendo per un tempo infinito, dall'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{-i\Delta E\Delta\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle 0 | \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau + \Delta\tau)) | 0 \rangle, \quad (1.84)$$

L'eq. (1.84) esprime la *trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del campo* lungo la *world-line* $x(\tau)$, che per il teorema di Wiener-Khinchin (vedi ad es. [Press et al. 1992]) è *uguale alla densità spettrale del campo lungo la world-line*. Naturalmente, la densità spettrale di una *time-series* infinita diverge: l'eliminazione dell'integrale su τ dà pertanto a R_+ l'interpretazione di *densità spettrale per unità di tempo*.

Studiamo dunque le distribuzioni di equilibrio e le densità di energia osservate dei nuovi Topi. Esprimeremo la differenza di energia tra i livelli dei Topi *in unità corrispondenti alla loro accelerazione g* (nelle unità di Planck, la dimensione di ΔE è allora l'inverso di un tempo: $[\Delta E] = [g] = T^{-1}$); in questo modo, ad esempio, gli *ensemble di Topi Frettolosi* che rimangono in equilibrio con il

¹²Nel caso del campo *massless*, il numero di occupazione tende all'infinito per $\omega \rightarrow 0$ (ciò è dovuto alla *divergenza infrarossa* della teoria); tuttavia, la densità di energia resta finita.

¹³Un osservatore accelerato definirà i modi normali del campo quantizzando *secondo le sue coordinate*, ottenendo ancora $\omega^2/2\pi^2$ per la densità degli stati del campo; ma il concetto di “particella” implicito nell'argomento è ora quello “accelerato” e non più quello inerziale. Ne parleremo ampiamente in sez. 1.2.

campo mentre si muovono con accelerazioni diverse saranno tutti distribuiti termicamente alla temperatura $T = 1/2\pi$. Scriviamo dunque la probabilità di eccitazione in funzione dell'energia normalizzata ϵ ; possiamo ulteriormente semplificare l'integrale notando che $1/\sigma^2$ è sempre pari, e dunque

$$R_+ = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} d\Delta\tau \cos(g\Delta\tau \cdot \epsilon) \left(\frac{1}{[\sigma(\Delta\tau)]^2} - \frac{1}{\Delta\tau^2} \right). \quad (1.85)$$

Vediamo per ogni Topo l'integrale da calcolare:

Topo Complicato (elica di tipo I):

$$R_+^C(\epsilon) = \frac{-g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} d\tau \cos(\tau\epsilon) \cdot \left(\frac{1}{4r^2\Omega_\chi^2 \sin^2(\tau/2\Omega_\chi) - 4(r^2 - 1)\Omega_\gamma^2 \sin^2(\tau/2\Omega_\gamma)} - \frac{1}{\tau^2} \right), \quad (1.86)$$

$$\Omega_\chi = \sqrt{r^2 + \frac{r^2 - 1}{\alpha^2}}, \quad \Omega_\gamma = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2 - 1}, \quad (1.87)$$

dove $\tau = g\Delta\tau$ e $\alpha = \chi/\gamma$.

Topo Strano (elica di tipo IIa): l'integrale da calcolare è

$$R_+^S(\epsilon) = \frac{-g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} d\tau \cos(\tau\epsilon) \left(\frac{-1}{(r^2 - 1)\tau^2 - 4r^4 \sinh^2(\tau/2r)} - \frac{1}{\tau^2} \right); \quad (1.88)$$

dove $\tau = g\Delta\tau$.

Topo Appuntito (elica di tipo IIb): l'integrale

$$R_+^A(\epsilon) = \frac{-g}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{-i\epsilon\tau}}{\tau^2 (1 + \tau^2/12)} \quad (1.89)$$

(dove $\tau = g\Delta\tau$) è risolvibile in campo complesso chiudendo un contorno di integrazione nel semipiano immaginario negativo, e trattando il polo doppio nell'origine come in fig. 1.2. L'unica singolarità che viene raccolta è dunque il polo semplice in $\tau = -i\sqrt{12}$, dove il residuo è $e^{-\sqrt{12}\epsilon}/2\sqrt{12}$. La probabilità di transizione è quindi

$$R_+^A(\epsilon) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{12}\epsilon}}{\sqrt{12}}. \quad (1.90)$$

Topo Girotondo (elica di tipo IIc):

$$R_+^G(\epsilon) = \frac{-g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} d\tau \cos(\tau\epsilon) \left(\frac{1}{(q^2 + 1)\tau^2 - 4q^4 \sin^2(\tau/2q)} - \frac{1}{\tau^2} \right); \quad (1.91)$$

dove $\tau = g\Delta\tau$.

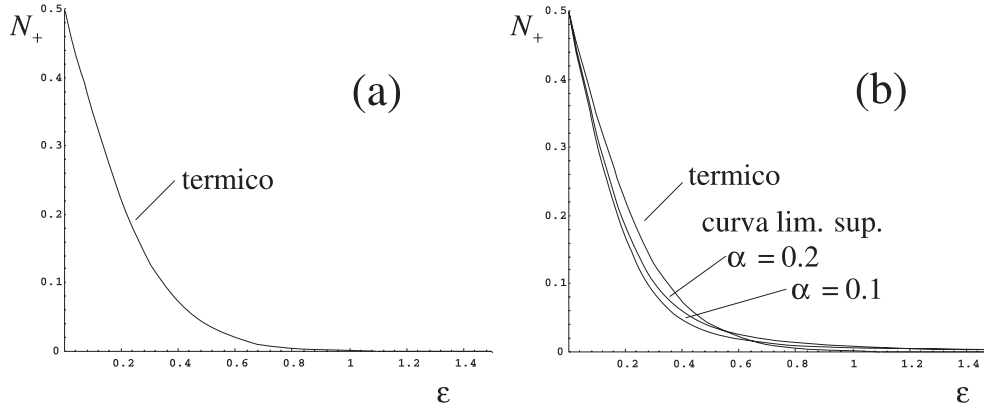


Figura 1.6: Distribuzione di equilibrio dei Topi in moto stazionario

- (a) *Distribuzione termica di Topo Frettoloso*: approssima molto bene la distribuzione per tutti gli altri Topi stazionari ...
- (b) ... tranne che per i *moti circolari* (o moti composti con una componente circolare) con una *velocità angolare molto grande*. Visto che stiamo confrontando moti con accelerazioni uguali in modulo, questo limite corrisponde a raggi “di rivoluzione” tendenti a 0 e può probabilmente essere considerato “poco fisico”. In figura sono mostrate le curve più “calde” ottenibili per *Topo Complicato* a valori fissati $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.1$ e al variare di r . Si osserva uno spostamento della popolazione dei livelli verso energie più alte.

Le distribuzioni di equilibrio trovate si discostano molto poco dalla distribuzione termica di *Topo Frettoloso*,

$$N_+ = \frac{1}{1 + e^{2\pi\epsilon}} : \quad (1.92)$$

la *temperatura effettiva* (definita come la temperatura della distribuzione termica che minimizza l’area compresa tra sè stessa e la distribuzione di equilibrio) resta entro l’1% della temperatura di Hawking $1/2\pi$. Scostamenti apprezzabili si osservano solo per moti circolari di velocità angolare estremamente grande: per *Topo Girotondo*, nel limite $q \rightarrow 0$; per *Topo Complicato*, per $\alpha \rightarrow 0$ (fig. 1.6). Le densità di energia “soggettive” appaiono invece essere indicatori più sensibili (fig. 1.7).

Abbiamo dunque provato ampiamente che esiste un

effetto Unruh generalizzato: detectors in moto su tutte le classi di eliche di Synge (tranne la classe IV dei moti inerziali) vengono eccitati dall’interazione con lo stato di vuoto del campo. La distribuzione di equilibrio dei Topi è con ottima approssimazione termica alla temperatura di Hawking.

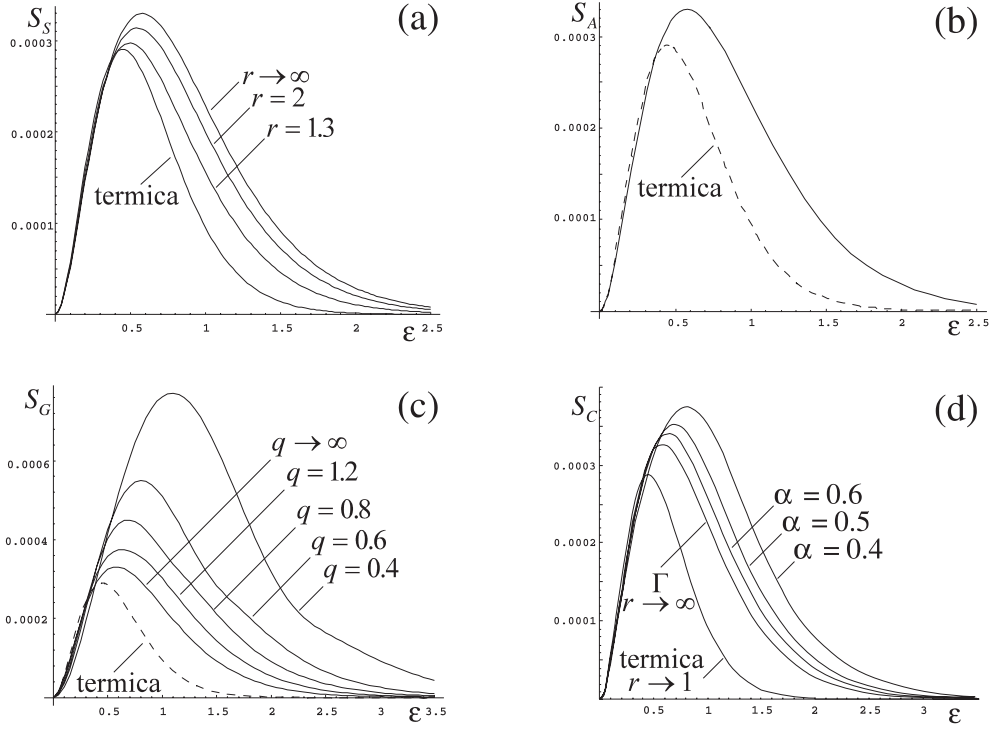


Figura 1.7: Le densità spettrali osservate da (a) *Topo Strano*, (b) *Topo Appuntito*, (c) *Topo Girotondo*, (d) *Topo Complicato*

- (a) *Topo Strano*: la densità di energia dipende dal parametro r , ed è esattamente termica (alla temperatura $1/2\pi$) nel limite $r \rightarrow 1$ (come è corretto: il moto tende a quello di *Topo Frettoloso*; vedi fig. (1.66)). Nel limite $r \rightarrow +\infty$, S_S tende a una curva limite superiore.
- (b) *Topo Appuntito*: S_A non dipende da alcun parametro, e a parità di accelerazione è più “calda” della S termica.
- (c) *Topo Girotondo*: S_G dipende dal parametro q ; è sempre più “calda” della densità di energia termica, e si assesta su una curva limite inferiore per $q \rightarrow +\infty$; S_G raggiunge massimi sempre più alti e giunge a comprendere aree indefinitamente grandi per $q \rightarrow 0$.
- (d) *Topo Complicato*: la densità di energia dipende da due parametri, r e α . La *world-line* di *Topo Complicato* è un “incrocio” tra *Topo Strano* e *Topo Girotondo*, e come tale si comporta anche la sua densità di energia “soggettiva”.

Per ogni valore di α , S_C è esattamente termica (alla temperatura $1/2\pi$) per $r \rightarrow 1$ (in questo limite la componente circolare del moto si annulla, vedi eq. (1.63)); tende invece alla curva limite Γ per $r \rightarrow +\infty$. Tuttavia, per $\alpha \geq 1$ (prevale *Topo Strano*) S_C tende a Γ da valori inferiori, mentre per $\alpha < 1$ (prevale *Topo Girotondo*) S_C si assesta su Γ dopo aver raggiunto (per r finito) una curva limite superiore il cui massimo e la cui area crescono indefinitamente per $\alpha \rightarrow 0$.



Figura 1.8: Beatrice in moto (uniformemente accelerato!) con suo fratello Axel

1.2 Particelle di Rindler ed effetto Unruh

Lo stupore di Beatrice di fronte all'effetto Unruh è stato ampiamente condiviso dalla comunità dai fisici quando il fenomeno è stato chiaramente indicato per la prima volta [Unruh 1976]. Beatrice, però, è stata ingannata dai due “schemi mentali” con i quali ha cercato di interpretare le transizioni dei Topi¹⁴:

1. la percezione dello stato di vuoto $|0\rangle$ come uno stato, appunto *vuoto e dinamicamente inerte*;
2. il concetto di “particella” legato alla decomposizione (1.3) dell'operatore di campo.

Entrambi sono concetti invarianti rispetto al gruppo di simmetria della teoria dei campi à la *Bjorken*, il gruppo di Poincaré; come tali, sono condivisi da tutti gli osservatori *inerziali* e abbiamo potuto usarli per spiegare il comportamento sia di *Topo Pigro* che di *Topo Costante*¹⁵. Il moto di *Topo Frettoloso*, invece, non è inerziale, e fatalmente la teoria dei campi “gli apparirà” diversa.

Bisognerebbe cercare di scrivere una teoria dei campi “dal punto di vista di *Topo Frettoloso*”, per vedere come lui interpreta lo stato di vuoto della teoria inerziale, e quale concetto ha di “particella”. I Topi, però, sono solo sistemi quantistici a due stati, e non hanno una “visione del mondo”!

¹⁴ “Schemi mentali” difficili da abbandonare, visto che l'effetto Unruh è stato “scoperto” solo nel 1976, mentre gli “ingredienti” teorici necessari erano disponibili sin dai primi tempi della teoria dei campi!

¹⁵ Perché il *Topo Costante* di una Beatrice ferma è il *Topo Pigro* di una Beatrice in moto con velocità $-v_i$, e viceversa, mentre lo stato di vuoto del campo resta lo stesso...

Beatrice pensa allora di chiedere aiuto a suo fratello Axel (fig. 1.8), che è un fisico e che va sempre in giro in motocicletta *senza mai staccare la mano dall'acceleratore* (ovvero, in moto uniformemente accelerato).

1.2.1 Axel in moto

Beatrice: dimmi, Axel, come scriveresti la teoria dei campi dal tuo punto di vista?

Axel: iniziamo studiando la mia traiettoria. . .

Beatrice: lo sapevo che mi avresti fatto faticare!

Siamo nello spazio-tempo di Minkowski \mathcal{M}_{ink} . Diremo che Axel, che percorre la *world-line* $\mathcal{P}(\tau)$, è in moto *uniformemente accelerato* se la sua 4-accelerazione $\mathbf{a} = d^2\mathcal{P}/d\tau^2$ (che è un *vettore funzione del punto mobile*) ha norma costante:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = g^2. \quad (1.93)$$

Quest'equazione si può risolvere insieme a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.94)$$

(\mathbf{u} è la 4-velocità con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$) per l'equazione parametrica della *world-line* in funzione del tempo proprio di Axel τ .

Se supponiamo che il moto avvenga in un piano, la *world-line* di Axel si può scrivere nelle coordinate (t, x, y, z) di Beatrice come

$$\begin{cases} t = g^{-1} \sinh g\tau, \\ x = g^{-1} \cosh g\tau, \\ y = z = 0. \end{cases} \quad (1.95)$$

Le eq. (1.95) definiscono un'iperbole (figura 1.9) che ha per asintoti le generatrici h_A e h_B del cono di luce nell'origine; cosicché la zona II è esclusa dal passato causale della *world-line*, la zona IV dal suo futuro causale, la zona II da entrambi. Axel è in grado di assegnare delle coordinate soltanto agli eventi ai quali può inviare e dai quali può ricevere segnali di luce. Il suo sistema di coordinate può quindi estendersi al massimo a tutta la regione I. Come coordinata temporale, Axel sceglie il suo tempo proprio τ ; dato che il moto avviene nel piano xt , può usare le rimanenti coordinate y e z di Beatrice. Infine gli serve una coordinata spaziale ξ che completi la descrizione del piano xt ; per individuarla gli basta trovare in ogni punto di $\mathcal{P}(\tau)$ un versore ortogonale a \mathbf{u} (e quindi alla direzione di τ): guardando le equazioni (1.93) e (1.94) Axel trova subito $g^{-1}\mathbf{a}$.

Più formalmente, per un qualsiasi osservatore accelerato (non necessariamente in modo uniforme) che percorre la *world-line* $\mathcal{Q}(\tau)$, un sistema di coordinate “infinitesimo” è fornito da una tetrad $\mathbf{e}_\mu(\mathcal{Q}(\tau))$ tale che: (1) in ogni punto della *world-line* \mathbf{e}_μ definisca un *rest frame* (ovvero \mathbf{e}_μ sia composta di vettori ortonormali e che $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$); (2) la tetrad sia “non rotante” (senza tenere

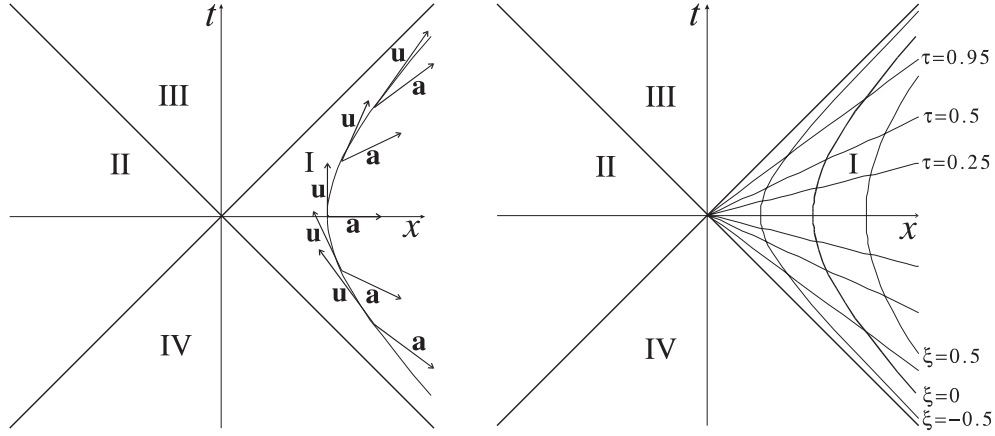


Figura 1.9: La traiettoria e il sistema di coordinate dell'osservatore accelerato Axel

conto della pseudorotazione nel piano *time-like* \mathbf{u} - \mathbf{a} dovuta alla variazione della 4-velocità).

Da ogni punto $\mathcal{Q}(\tau)$ possiamo allora trasportare parallelamente i vettori spaziali \mathbf{e}_i per definire tre coordinate da affiancare a τ . Le condizioni (1) e (2) sono soddisfatte dal *trasporto alla Fermi-Walker* (vedi ad es. [Misner et al. 1973]), dato per un vettore \mathbf{v} da¹⁶

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = (u^\mu a^\nu - u^\nu a^\mu) v_\nu. \quad (1.97)$$

Le coordinate così definite saranno locali nel senso che le geodetiche definite da uno stesso \mathbf{e}_i a punti $\mathcal{Q}(\tau)$ diversi potranno intersecarsi a una distanza finita dalla *world-line* perdendo l'interpretazione di coordinate.

Axel riesce così a dare una coordinatizzazione consistente dell'intera regione I, che risulta foliata in ipersuperfici spaziali $\tau = \text{cost}$, percepite da Axel come composte di eventi “simultanei”. Per l'evento \mathcal{R} sulla superficie $\tau = \tau_0$, la relazione tra le coordinate di Beatrice (t, x) e le coordinate di Axel (τ, ξ) è data da (y e z sono condivise da Axel e Beatrice)

$$\begin{cases} t &= \mathcal{R}(\tau_0)^{(0)} + \xi g^{-1} \mathbf{a}(\tau_0)^{(0)}, \\ x &= \mathcal{R}(\tau_0)^{(1)} + \xi g^{-1} \mathbf{a}(\tau_0)^{(1)}. \end{cases} \quad (1.98)$$

esplicitamente si trova (vedi figura 1.9)

$$\begin{cases} t &= (g^{-1} + \xi) \sinh g\tau, \\ x &= (g^{-1} + \xi) \cosh g\tau. \end{cases} \quad (1.99)$$

¹⁶Un trasporto più generale contiene una “rotazione” e può essere espresso, sempre per il vettore \mathbf{v} , da

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = (u^\mu a^\nu - u^\nu a^\mu + u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}) v_\nu, \quad (1.96)$$

dove $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ è il tensore completamente antisimmetrico e ω è un vettore *ortogonale* a \mathbf{v} , che esprime la velocità angolare rispetto alla tetrad “non rotante” della nuova tetrad “rotante” che si ottiene in ogni punto della *world-line* utilizzando la (1.96).

1.2.2 La metrica di Rindler e l'isometria di boost

La metrica di Minkowski η_{ab} , espressa nelle coordinate di Axel, è

$$ds^2 = -(1 + g\xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.100)$$

Questa metrica (di Rindler¹⁷) è, naturalmente, piatta, e presenta una singolarità “apparente” (una *coordinate singularity*) per $\xi \rightarrow -1$, in corrispondenza degli orizzonti h_A e h_B che limitano il passato e il futuro causali di Axel. La trasformazione (1.99) permette di eliminare la singolarità e di estendere I all'intero spazio di Minkowski \mathcal{M}_{ink} (gli intervalli $\tau : (-\infty, +\infty)$, $\xi : (-1, +\infty)$ sono trasformati in $t : (-\infty, +\infty)$, $x : (0, +\infty)$ con $x > |t|$; \mathcal{M}_{ink} si ottiene completando gli intervalli di t e x .)

Dal punto di vista di Axel, che “misura il mondo” con le sue nuove coordinate, la geometria dello spazio non sembra cambiare anche se lui sta acquistando sempre più velocità. L'eq. (1.100) implica infatti che il map $\phi_\chi : I \rightarrow I$ definito da

$$\phi_\chi \begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + \chi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

sia un'isometria nella regione I. Possiamo chiederci che aspetto ha ϕ_χ dal punto di vista di Beatrice. Dalle eq. (1.101) e (1.99) segue

$$\phi_\chi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh g\chi & \sinh g\chi \\ \sinh g\chi & \cosh g\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad (1.102)$$

ovvero ϕ_χ è un boost di Lorentz con velocità $\tanh g\chi$! ϕ_χ genera le traiettorie degli “oggetti” che ad Axel appaiono fermi. Beatrice si stupisce. Come è possibile?

Consideriamo un esempio: Quando $\tau = 0$, Beatrice vede Axel nel punto di inversione del moto ($t = 0$, $x = g^{-1}$). Burt e Curt, due amici di Axel che lo seguono dovunque (nel senso che si mantengono a ξ costante per ogni τ), si trovano in ($t = 0$, $x = \frac{1}{2}g^{-1}$) e ($t = 0$, $x = 2g^{-1}$) (vedi fig. 1.10). Più tardi, al tempo di Beatrice $t = g^{-1} \sinh g\tau_0$, Axel si trova in $x = g^{-1} \cosh g\tau_0$ e si sta allontanando da lei con velocità (vedi l'eq. (1.95))

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \tanh g\tau_0. \quad (1.103)$$

È chiaro che, dal punto di vista di Beatrice, per essere in quiete rispetto ad Axel al suo tempo $\tau = \tau_0$, Burt e Curt avranno bisogno di una “spinta” che li metta in moto con velocità $dx/dt = \tanh g\tau_0$! E questo è proprio il lavoro dei boosts di Lorentz.

Per passare il tempo, Axel, Burt e Curt giocano a scacchi. Axel batte sempre Burt, ma perde sempre da Curt. Per forza! Per restare al passo con

¹⁷[Rindler 1975] la studia con la motivazione che tra “Rindler” e “Minkowski” c'è essenzialmente la stessa relazione che tra “Schwarzschild” e “Kruskal” (vedi app. B per una definizione di queste due metriche; sempre in app. B la loro relazione con le metriche piatte è resa particolarmente evidente dai *diagrammi di Penrose*).

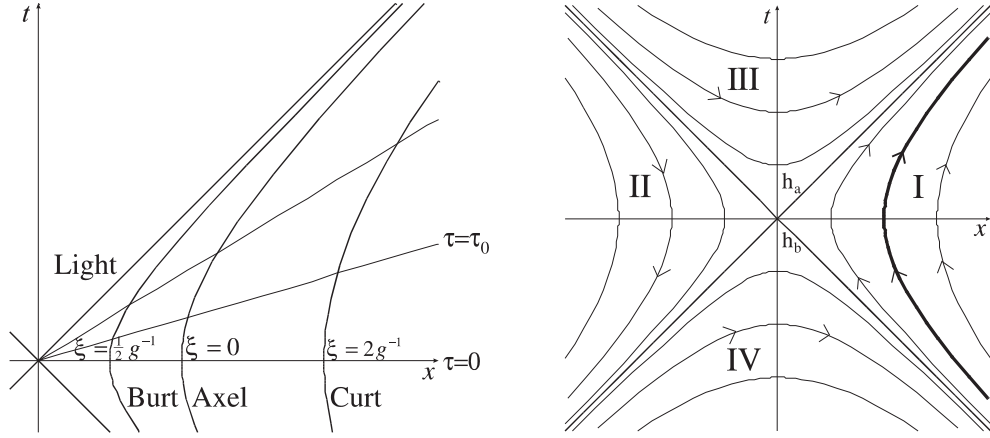


Figura 1.10: Le traiettorie di Axel, Burt e Curt; le orbite del campo di Killing ξ^a

Axel, Burt e Curt stanno percorrendo traiettorie con accelerazioni diverse; ad esempio, la traiettoria di Burt è

$$\begin{cases} t &= \frac{1}{2}g^{-1} \sinh g\tau, \\ x &= \frac{1}{2}g^{-1} \cosh g\tau. \end{cases} \quad (1.104)$$

che definisce (vedi eq. (1.95)) un moto iperbolico con accelerazione $2g$ e tempo proprio $\tau/2$. Quindi per ogni unità di tempo meditata da Axel, Burt ne ha potuta utilizzare solo mezza. Curt invece due!

A questi risultati si poteva arrivare anche considerando il campo di Killing (vedi appendice A) associato all'isometria ϕ_χ (si ottiene derivando (1.102) rispetto a χ):

$$\mathbf{b} = g(x \partial_t + t \partial_x). \quad (1.105)$$

Lungo la traiettoria di Axel, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = -1$: \mathbf{b} è effettivamente la sua 4-velocità. La traiettoria di Burt è sì generata da \mathbf{b} a partire dal punto $(t = 0, x = \frac{1}{2}g)$, ma $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{4}$: quindi il tempo proprio di Burt non è il “tempo di Killing” (la variabile di integrazione di \mathbf{b}), ma $\xi/2$. Nel limite di traiettorie schiacciate sugli orizzonti h_A e h_B , il tempo di Killing ξ perde l'interpretazione di “multiplo di un tempo proprio”, perché la norma di \mathbf{b} si annulla.

La famiglia di boost di Lorentz ϕ_χ non è definita solo su I, ma su tutto \mathcal{M}_{ink} : come si può vedere in fig. 1.10, le orbite di ϕ_χ sono *time-like* nelle regioni I e II, *space-like* nelle regioni III e IV, e *lightlike* su h_A e h_B .

1.2.3 Tempi diversi, energie diverse

Beatrice: bene, ora so qual è il tuo sistema di coordinate “natural”. Ma cosa c'entra questo con le “particelle”?

Axel: come le classifichi le tue “particelle”?

Beatrice: mah, in base alla loro energia...

Axel: certo! E qual è l'operatore dell'energia?

Beatrice: $i\partial_t$. Ma il tuo sarà $i\partial_\tau$!

Che cosa sono le “particelle” di Beatrice? Come abbiamo visto, corrispondono ai modi $\psi_i(t, x^i)$ sui quali viene decomposto l'operatore di campo:

$$\phi(t, x^i) = \sum_i \psi_i(t, x^i) a_i + \psi_i^*(t, x^i) a_i^\dagger \quad (1.106)$$

I modi $\psi_i(t, x^i)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon a una particella che sono anche autofunzioni dell'energia e del momento; cosicché parliamo di “particelle di energia ω_i e di momento k_i ”. È importante notare che *la decomposizione avviene soltanto su soluzioni a frequenza (energia) positiva*. La richiesta che i modi $\psi_i(t, x^i)$ siano autofunzioni dell'energia,

$$i\partial_t \psi_i(t, x^i) = \omega \psi_i(t, x^i), \quad (1.107)$$

implica che la dipendenza dal tempo di $\psi_i(t, x^i)$ sia separabile,

$$\psi_i(t, x^i) = e^{-i\omega_i t} F_i(x^i), \quad (1.108)$$

e questo ci conforta nell'interpretazione dei modi come “particelle”, perché significa che queste esprimono configurazioni “stabili” del campo preservate dall'evoluzione temporale.

Axel però definisce l'energia relativamente al *suo* tempo, con le autofunzioni di $i\partial_\tau$; la sua decomposizione del campo sarà perciò fatta su una base di soluzioni diverse:

$$\phi(\tau, \xi, y, z) = \sum_i \chi_i(\tau, \xi, y, z) c_i + \chi_i^*(\tau, \xi, y, z) c_i^\dagger. \quad (1.109)$$

Naturalmente sarà possibile sviluppare le $\psi_i(t, x^i)$ in funzione delle $\chi_i(\tau, \xi, y, z)$:

$$\psi_i = \sum_j \alpha_{ij} \chi_j + \beta_{ij} \chi_j^*, \quad (1.110)$$

dove

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = (\chi_j, \psi_i), \\ \beta_{ij} = (\chi_j^*, \psi_i). \end{cases} \quad (1.111)$$

(\cdot, \cdot) indica qui il prodotto scalare di Klein-Gordon (parleremo a lungo di prodotti scalari in cap. 3),

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{t=t_0} dx^i \phi_1(t, x^i) \overleftrightarrow{i\partial_t} \phi_2(t, x^i). \quad (1.112)$$

La relazione tra i creatori (e distruttori) $a^{(\dagger)}$ e $c^{(\dagger)}$ (detta *trasformazione di Bogoliubov*) corrispondente all'eq. (1.110) è

$$c_i = \sum_j \alpha_{ij} a_j + \beta_{ij}^* a_j^\dagger. \quad (1.113)$$

Se in eq. (1.110) soltanto i coefficienti α_{ij} sono non nulli, allora i tempi t e τ si *equivalgono*, nel senso che le soluzioni a frequenza positiva rispetto a t possono essere decomposte esclusivamente in soluzioni a frequenza positiva rispetto a τ . Se invece anche i coefficienti β_{ij} sono non nulli, assisteremo a un *mixing* delle frequenze positive e negative. Questo è un fatto importante perché, nella decomposizione dell'operatore di campo, alle soluzioni a frequenza negativa corrispondono gli operatori di creazione: e il distruttore delle particelle “ τ ” (di Axel) si scriverà allora come una combinazione di creatori e di distruttori delle particelle “ t ” (di Beatrice). Ne segue immediatamente che *lo stato di vuoto di Beatrice non è uno stato di vuoto per Axel*:

$$\langle 0_{\text{Beatrice}} | \sum_i c_i^\dagger c_i | 0_{\text{Beatrice}} \rangle = \sum_{i,j} \beta_{ij}^* \beta_{ij} \neq 0. \quad (1.114)$$

Ora, come abbiamo visto, l'ampiezza di transizione $|0_T\rangle \rightarrow |1_T\rangle$ dei Topi in moto attraverso lo stato di vuoto inerziale di Minkowski (per un processo in cui il campo passa da $|0\rangle$ allo stato $|\Psi\rangle$), è proporzionale alla trasformata di Fourier

$$\int_0^T d\sigma e^{i(\Delta E)\sigma} \langle \Psi | \phi(x(\sigma)) | 0 \rangle, \quad (1.115)$$

dove σ è il tempo proprio del Topo e $x(\sigma)$ la sua *world-line*. Questa trasformata seleziona le componenti del campo di frequenza positiva ΔE rispetto al tempo σ .

Bene: se σ è il tempo inerziale t (come avviene per *Topo Pigro* e *Topo Costante*), le componenti a frequenza positiva del campo sono le ψ_i , associate ai distruttori a_i che agendo su $|0\rangle$ annullano l'ampiezza di transizione. Se invece σ è il tempo di Axel (è il caso di *Topo Frettoloso*), le componenti a frequenza positiva sono le χ_i della decomposizione di Axel; su $|0\rangle$ agiranno ancora distruttori, ma i c_i di Axel, non gli a_i ! E, come sappiamo, $|0\rangle$ non è uno stato di vuoto rispetto ai c_i .

Un modo euristico di spiegare le cose è il seguente: *dato che Topo Frettoloso “integra” rispetto a τ , “vedrà” come “particelle” le soluzioni a frequenza positiva rispetto a τ ; ora, lo stato di vuoto inerziale si può pensare riempito¹⁸ dal “mare” delle “particelle” a frequenza negativa (rispetto a t); rispetto a τ , però, queste hanno anche componenti a frequenza positiva che Topo Frettoloso non può fare a meno di vedere!*

Nella prossima sezione proveremo che il contenuto di “particelle” di Axel del vuoto di Beatrice è proprio consistente con la distribuzione termica (1.58) degli stati di *Topo Frettoloso*.

1.2.4 Quantizzazione secondo Axel

Beatrice: vuoi dire che *dal tuo punto di vista*, non solo ci sono “particelle” nel mio stato di vuoto, ma che sono anche distribuite termicamente?

Axel: prendi carta e penna e facciamo i conti!

¹⁸Per una “particella” a energia negativa l'operatore numero è aa^\dagger !

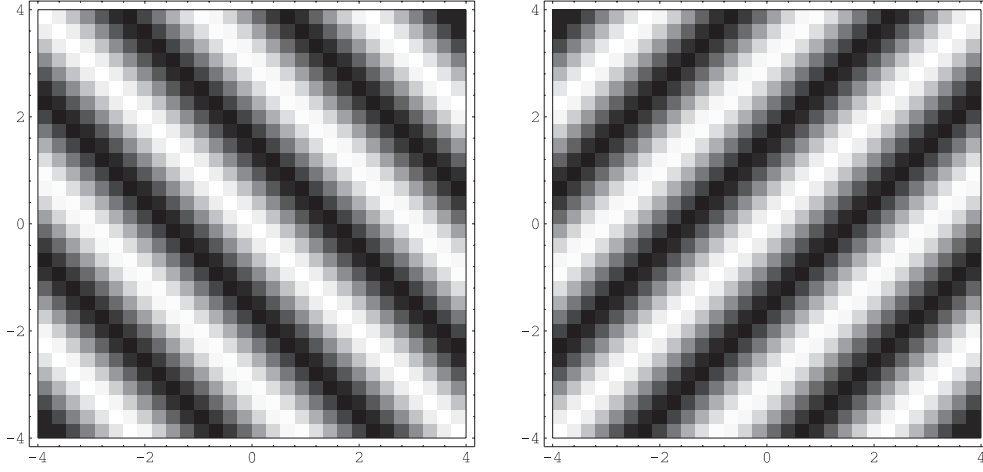


Figura 1.11: I modi $\vec{\psi}_{\omega}(u)$ e $\overleftarrow{\psi}_{\omega}(v)$, per $\omega = 2$

Scriviamo allora esplicitamente i modi di Beatrice e di Axel, e cerchiamo la trasformazione di Bogoliubov che li collega. Per semplicità, faremo i conti nello spazio di Minkowski bidimensionale¹⁹.

Dal punto di vista di Beatrice, l'eq. di Klein-Gordon *massless*

$$(-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi(t, x) = (-\partial_u \partial_v)\phi(u, v) = 0, \quad (1.116)$$

dove

$$\begin{cases} u = t - x, \\ v = t + x, \end{cases} \quad (1.117)$$

ammette una base di soluzioni particolarmente semplici in funzione delle *null coordinates* u e v :

$$\begin{cases} \vec{\psi}_{\omega}(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}, \\ \overleftarrow{\psi}_{\omega}(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}, \end{cases} \quad (1.118)$$

dove $\omega > 0$. Le frecce a destra e sinistra indicano le soluzioni che chiameremo *right* e *left (movers)*: il loro momento è infatti rispettivamente positivo e negativo (vedi fig. 1.11).

Nelle coordinate di Axel, che coprono la regione I, l'eq. di Klein-Gordon si riscrive²⁰ (prendendo per comodità $\eta = (1 + g\xi)$),

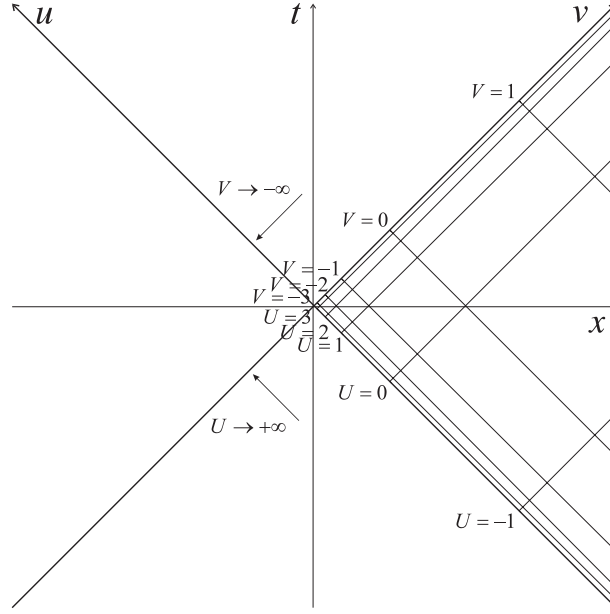
$$\left(-\frac{1}{\eta^2} \partial_{\tau}^2 + \frac{1}{g^2 \eta} \partial_{\eta} \eta \partial_{\eta}\right) \phi(\tau, \eta) = \frac{1}{\eta^2} \left(-\frac{1}{\eta^2} \partial_{\tau}^2 + \frac{1}{g^2} \partial_{\ln \eta}^2\right) \phi(\tau, \eta) = 0. \quad (1.120)$$

¹⁹Dove i modi sono esprimibili come semplici esponenziali e non, come nel caso quadridimensionale, con le *funzioni di MacDonald*!

²⁰In quattro dimensioni, il dalembertiano corrispondente alla metrica $\text{diag}(-h_0^2, h_1^2, h_2^2, h_3^2)$ ($h_{\mu} > 0$) è dato da

$$\square = \frac{1}{h_0 h_1 h_2 h_3} \left(-\partial_0 \frac{h_1 h_2 h_3}{h_0} \partial_0 + \partial_1 \frac{h_0 h_2 h_3}{h_1} \partial_1 + \partial_2 \frac{h_0 h_1 h_3}{h_2} \partial_2 + \partial_3 \frac{h_0 h_1 h_2}{h_3} \partial_3 \right); \quad (1.119)$$

la restrizione a due dimensioni è quella ovvia.

Figura 1.12: I sistemi di coordinate (t, x) , (u, v) , (U, V)

Anche qui conviene passare alle coordinate “nulle” (vedi fig. 1.12)

$$\begin{cases} U = \tau - g^{-1} \ln \eta = -g^{-1} \ln -gu, \\ V = \tau + g^{-1} \ln \eta = g^{-1} \ln gv, \end{cases} \quad (1.121)$$

per scrivere i *modi di Rindler*

$$\begin{cases} \chi_{\sigma}^I(U) = \frac{\theta(-u)}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{-i\sigma U} = \frac{\theta(-u)}{\sqrt{4\pi\sigma}} (-gu)^{i\sigma/g}, \\ \chi_{\sigma}^I(V) = \frac{\theta(v)}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{-i\sigma V} = \frac{\theta(v)}{\sqrt{4\pi\sigma}} (gv)^{-i\sigma/g}, \end{cases} \quad (1.122)$$

dove $\sigma > 0$. Le coordinate U e V sono limitate a I, ma $\chi_{\sigma}^I(U)$ è analiticamente estendibile a IV, come si vede dalla sua espressione in funzione di u ; analogamente, $\chi_{\sigma}^I(V)$ è definita in I e III (vedi fig. 1.13).

I modi di Rindler χ_{σ}^I definiscono una base di soluzioni completa soltanto nella regione I; il metodo più semplice per completarla è aggiungere le soluzioni χ_{σ}^{II} ottenute riflettendo le χ_{σ}^I attraverso l'origine (vedi fig. 1.14):

$$(t, x) \rightarrow (-t, -x), \quad (1.123)$$

$$\begin{cases} \chi_{\sigma}^{II}(U_{II}) = \frac{\theta(u)}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{i\sigma U_{II}} = \frac{\theta(u)}{\sqrt{4\pi\sigma}} (gu)^{-i\sigma/g}, \\ \chi_{\sigma}^{II}(V_{II}) = \frac{\theta(-v)}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{i\sigma V_{II}} = \frac{\theta(-v)}{\sqrt{4\pi\sigma}} (-gv)^{i\sigma/g}. \end{cases} \quad (1.124)$$

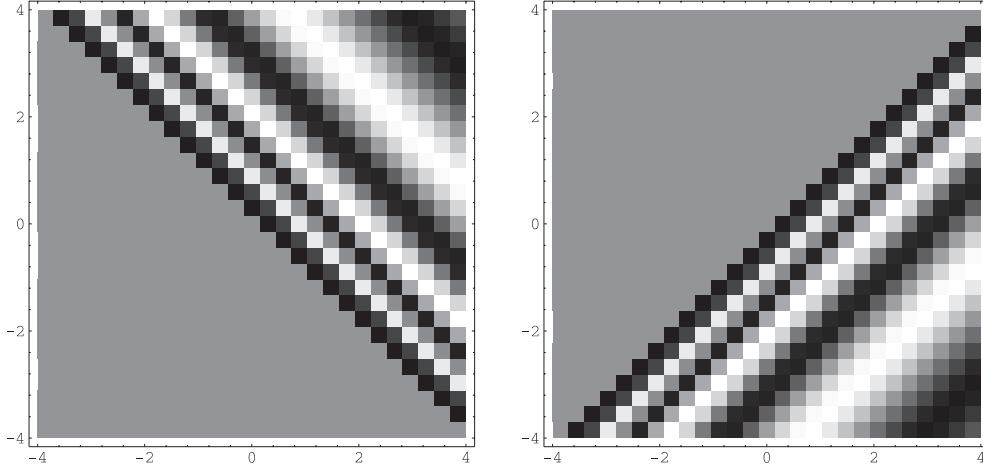


Figura 1.13: I modi $\chi_\sigma^I(U)$ e $\chi_\sigma^I(V)$, per $\sigma = 8$ (parte reale)

Le coordinate (U_{II}, V_{II}) sono ancora definite dall'eq. (1.121) dove però le (τ, η) sono prese a coprire II:

$$\begin{cases} t = -\eta \sinh g\tau, \\ x = -\eta \cosh g\tau. \end{cases} \quad (1.125)$$

Ora che abbiamo un set completo per Beatrice e uno per Axel, possiamo scrivere le due decomposizioni del campo:

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \int_0^\infty d\omega \left[\psi_\omega a_\omega + \psi_\omega^* a_\omega^\dagger + \text{l.m.} \right] = \\ &= \int_0^\infty d\sigma \left[\theta(-u) \left(\chi_\sigma^I \underline{c}_\sigma^I + \chi_\sigma^{*I} \underline{c}_\sigma^{\dagger I} \right) + \theta(v) (\text{l.m.}) \right] + \\ &\quad + \left[\theta(u) \left(\chi_\sigma^{\text{II}} \underline{c}_\sigma^{\text{II}} + \chi_\sigma^{*\text{II}} \underline{c}_\sigma^{\dagger \text{II}} \right) + \theta(-v) (\text{l.m.}) \right] \end{aligned} \quad (1.126)$$

Cerchiamo i coefficienti della trasformazione di Bogoliubov

$$\begin{cases} \psi_\omega = \int_0^\infty d\sigma \alpha_{\omega\sigma}^I \chi_\sigma^I + \beta_{\omega\sigma}^I (\chi_\sigma^{*I}) + \alpha_{\omega\sigma}^{\text{II}} \chi_\sigma^{\text{II}} + \beta_{\omega\sigma}^{\text{II}} (\chi_\sigma^{*\text{II}}), \\ \psi_\omega = \int_0^\infty d\sigma \alpha_{\omega\sigma}^I \chi_\sigma^I + \beta_{\omega\sigma}^I (\chi_\sigma^{*I}) + \alpha_{\omega\sigma}^{\text{II}} \chi_\sigma^{\text{II}} + \beta_{\omega\sigma}^{\text{II}} (\chi_\sigma^{*\text{II}}), \end{cases} \quad (1.127)$$

Gli α e β sono i prodotti scalari di Klein-Gordon dei due modi a cui si riferiscono. Si può vedere (calcolandoli) che la trasformazione non mescola *right-* e *left-movers*. Visto che il differenziale si trasforma in modo controvariante alla derivata, non importa rispetto a quale tempo si calcola il prodotto scalare: ad esempio (per i *right-movers* derivare rispetto a t o u è perfettamente equivalente a derivare rispetto a τ o U)

$$\alpha_{\omega\sigma}^I = \int_{-\infty}^{+\infty} du \chi_\sigma^{*I}(u) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_u \psi_\omega(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dU \chi_\sigma^{*I}(U) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_U \psi_\omega(u(U)). \quad (1.128)$$

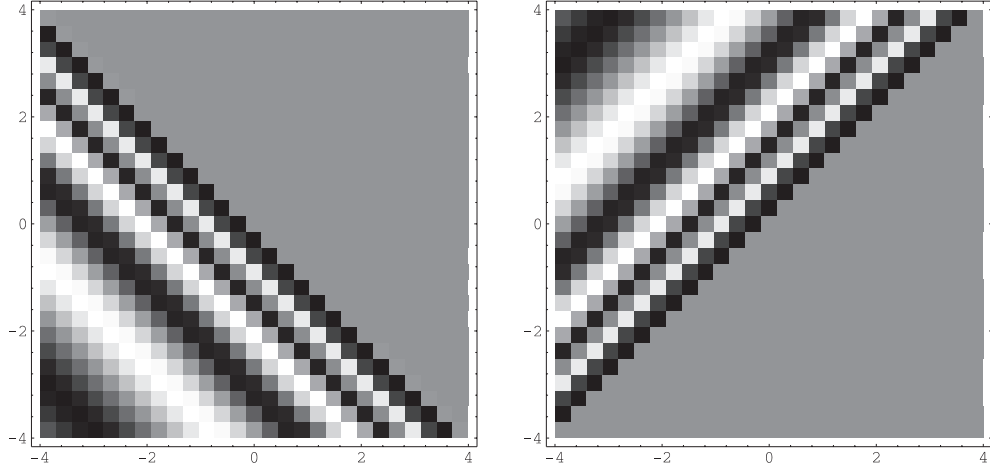


Figura 1.14: I modi $\chi_{\sigma}^{\text{II}}(U_{\text{II}})$ e $\chi_{\sigma}^{\text{II}}(V_{\text{II}})$, per $\sigma = 8$ (parte reale)

Gli operatori $\underline{c}_{\sigma}^{\text{I}}$ sono dati da

$$\underline{c}_{\sigma}^{\text{I}} = \int_0^{\infty} d\sigma \, \underline{\alpha}_{\omega\sigma}^{\text{I}} \underline{a}_{\omega} + \underline{\beta}_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \underline{a}_{\omega}^{\dagger}, \quad (1.129)$$

(e analogamente per $\underline{c}_{\sigma}^{\text{I}}$). Questa formula ci avvicina finalmente al risultato per cui abbiamo speso tanta fatica: *il contenuto in “particelle” di Axel dello stato di vuoto di Beatrice è*

$$\langle 0_{\text{Beatrice}} | \underline{c}_{\sigma}^{\dagger\text{I}} \underline{c}_{\sigma}^{\text{I}} | 0_{\text{Beatrice}} \rangle = \int_0^{\infty} d\omega \, \underline{\beta}_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \underline{\beta}_{\omega\sigma}^{\text{I}}. \quad (1.130)$$

Calcoliamo esplicitamente il coefficiente $\underline{\beta}_{\omega\sigma}^{\text{I}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{\omega\sigma}^{\text{I}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} du \, \underline{\chi}_{\sigma}^{\text{I}}(u) (-i \overleftrightarrow{\partial}_u) \underline{\psi}_{\omega}(u) = \\ &= \frac{1}{4\pi \sqrt{\sigma\omega}} \int_{-\infty}^0 du \, (-gu)^{i\sigma/g} (-i \overleftrightarrow{\partial}_u) e^{-i\omega u} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega}} \int_{-\infty}^0 du \, (-gu)^{i\sigma/g-1} e^{-i\omega u} = \\ &= \frac{1}{2\pi g} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega}} e^{-\pi\sigma/2g} \left(\frac{g}{\omega}\right)^{i\sigma/g} \Gamma(i\sigma/g), \end{aligned} \quad (1.131)$$

dove tra la seconda e la terza riga si è integrato per parti, lasciando cadere il termine di superficie²¹; analogamente si trova

$$\underline{\alpha}_{\omega\sigma}^{\text{I}} = \frac{1}{2\pi g} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega}} e^{\pi\sigma/2g} \left(\frac{g}{\omega}\right)^{-i\sigma/g} \Gamma(-i\sigma/g). \quad (1.132)$$

²¹Il termine di superficie non si annulla per questi set di modi non normalizzabili. Ma, come è costume nella letteratura di teoria di campi, ci appelliamo al fatto che “si potrebbe rifare tutta la derivazione con pacchetti d’onda normalizzabili...”

Inserendo il risultato nell'eq. (1.130), si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle 0_{\text{Beatrice}} | \underset{\sigma}{c}^{\text{I}} \underset{\sigma'}{c}^{\text{I}} | 0_{\text{Beatrice}} \rangle &= \\
&= \frac{\sqrt{\sigma\sigma'}}{4\pi^2 g^2} \Gamma^*(i\sigma'/g) \Gamma(i\sigma/g) e^{-\pi(\sigma'+\sigma)/2g} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1}{\omega} e^{ig^{-1}(\sigma'-\sigma) \ln \omega/g} = \\
&= \frac{\sqrt{\sigma\sigma'}}{4\pi^2 g^2} \Gamma^*(i\sigma'/g) \Gamma(i\sigma/g) e^{-\pi(\sigma'+\sigma)/2g} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda g e^{i(\sigma'-\sigma)\lambda} = \\
&= \frac{\delta(\sigma' - \sigma)}{e^{2\pi\sigma/g} - 1},
\end{aligned} \tag{1.133}$$

dove $\lambda = g^{-1} \ln \omega/g$, e nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione $|\Gamma(ix)|^2 = \pi/x \sinh \pi x$. *Le particelle di Rindler seguono la distribuzione di Bose-Einstein alla temperatura di Hawking.* Proprio come pensavamo!

1.2.5 Lo schema di Unruh

Presentiamo ora lo schema di [Unruh 1976], che permette di ottenere un set completo di funzioni di modo con una frequenza definita rispetto al tempo di Axel, ma scomponibili esclusivamente in modi di Minkowski *a frequenza positiva*. Questo è possibile combinando le funzioni $\chi_{\sigma}^{\text{I,R}}$ definite nel settore I con le $\chi_{\sigma}^{\text{II,R}}$ del settore II. Vediamo come.

Quando non indichiamo diversamente, si intende nel seguito che ci stiamo occupando dei right-movers; i conti sono paralleli per i loro amici mancini. Invertendo l'eq. (1.127) si ottiene

$$\begin{cases} \chi_{\sigma}^{\text{I}} = \int_0^{\infty} d\omega \alpha_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \psi_{\omega} - \beta_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \psi_{\omega}^*, \\ \chi_{\sigma}^{\text{II}} = \int_0^{\infty} d\omega \alpha_{\omega\sigma}^{*\text{II}} \psi_{\omega} - \beta_{\omega\sigma}^{*\text{II}} \psi_{\omega}^*. \end{cases} \tag{1.134}$$

I coefficienti α e β per il settore I sono dati dalle eq. (1.132) e (1.131). Per quanto riguarda il settore II, ci si convince facilmente che

$$\alpha_{\omega\sigma}^{\text{II}} = \alpha_{\omega\sigma}^{*\text{I}}, \quad \beta_{\omega\sigma}^{\text{II}} = \beta_{\omega\sigma}^{*\text{I}}. \tag{1.135}$$

Quindi

$$\begin{cases} \chi_{\sigma}^{\text{II}} &= \int_0^{\infty} d\omega (\alpha_{\omega\sigma}^{\text{I}} \psi_{\omega} - \beta_{\omega\sigma}^{\text{I}} \psi_{\omega}^*), \\ \chi_{\sigma}^{*\text{II}} &= \int_0^{\infty} d\omega (-\beta_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \psi_{\omega} + \alpha_{\omega\sigma}^{*\text{I}} \psi_{\omega}^*). \end{cases} \tag{1.136}$$

Come eliminare la parte di χ_{σ}^{I} a frequenza *di Minkowski* negativa? Possiamo sfruttare il fatto che tra α^{I} e β^{I} sussiste la relazione (indipendente da ω)

$$\beta_{\omega\sigma}^{\text{I}} = e^{-\pi\sigma/g} \alpha_{\omega\sigma}^{*\text{I}}; \tag{1.137}$$

allora

$$\chi_{\sigma}^{\text{I}} + e^{-\pi\sigma/g} \chi_{\sigma}^{*\text{II}} = \int_0^{\infty} d\omega (\alpha_{\omega\sigma}^{*\text{I}} - \beta_{\omega\sigma}^{\text{I}}) \psi_{\omega} \tag{1.138}$$

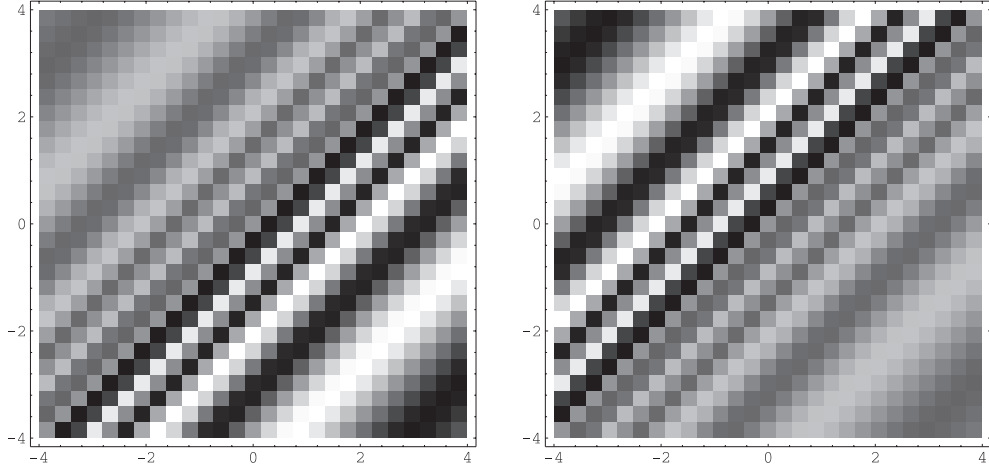


Figura 1.15: I *modi di Unruh* $\tilde{\chi}_\sigma$ e $\tilde{\chi}_{-\sigma}$, per $\sigma = 8$ (parte reale)

contiene soltanto componenti a frequenza di Minkowski positiva. Normalizzando queste funzioni e aggiungendo quelle analoghe ottenute a partire da χ_σ^{II} , si ottengono i *modi di Unruh*:

$$\begin{cases} \tilde{\chi}_\sigma &= \frac{\chi_\sigma^{\text{I}} + e^{-\pi\sigma/g} \chi_\sigma^{*\text{II}}}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\sigma/g}}} = \alpha_\sigma \chi_\sigma^{\text{I}} + \beta_\sigma \chi_\sigma^{*\text{II}}, \\ \tilde{\chi}_{-|\sigma|} &= \frac{\chi_{|\sigma|}^{\text{II}} + e^{-\pi|\sigma|/g} \chi_{|\sigma|}^{*\text{I}}}{\sqrt{1 - e^{-2\pi|\sigma|/g}}} = \alpha_{|\sigma|} \chi_{|\sigma|}^{\text{II}} + \beta_{|\sigma|} \chi_{|\sigma|}^{*\text{I}}, \end{cases} \quad (1.139)$$

dove $\sigma > 0$, e

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\sigma/g}}}, \quad \beta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\sigma/g} - 1}}. \quad (1.140)$$

I modi di Unruh con $\sigma > 0$ sono composti per la maggior parte dai modi di Rindler χ_σ^{I} del settore I, con una coda corrispondente al modo $\chi_\sigma^{*\text{II}}$ nel settore II. Si ricordi che in II il tempo τ è diretto in modo opposto a I! Il modo coniugato $\chi^{*\text{II}}$ ha pertanto frequenza negativa rispetto a τ_{II} ma positiva rispetto alla direzione del tempo di Axel e di Beatrice, come è necessario perché $\tilde{\chi}_\sigma$ abbia complessivamente una frequenza di Minkowski positiva. I modi con $\sigma < 0$ stanno invece prevalentemente in II (vedi fig. 1.15).

La decomposizione dell'operatore di campo in modi di Unruh è

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left(\tilde{\chi}_\sigma \tilde{a}_\sigma + \tilde{\chi}_\sigma^* \tilde{a}_\sigma^\dagger \right) + \text{l.m.}; \quad (1.141)$$

e la relazione tra gli operatori di creazione e distruzione di Rindler e Unruh è (con $\sigma > 0$)

$$\begin{cases} \tilde{a}_\sigma &= \alpha_\sigma c_\sigma^{\text{I}} - \beta_\sigma c_\sigma^{\dagger\text{II}}, \\ \tilde{a}_{-\sigma} &= \alpha_\sigma c_\sigma^{\text{II}} - \beta_\sigma c_\sigma^{\dagger\text{I}}, \end{cases} \quad (1.142)$$

$$\begin{cases} c_{\sigma}^{\text{I}} &= \alpha_{\sigma} \tilde{a}_{\sigma} + \beta_{\sigma} \tilde{a}_{-\sigma}^{\dagger}, \\ c_{\sigma}^{\text{II}} &= \alpha_{\sigma} \tilde{a}_{-\sigma} + \beta_{\sigma} \tilde{a}_{\sigma}^{\dagger}. \end{cases} \quad (1.143)$$

I modi di Unruh ci permettono di ricavare la forma esplicita dello stato di vuoto inerziale $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$ come stato dello spazio di Fock generato a partire dal vuoto di Axel $|0_{\text{Axel}}\rangle$ (che soddisfa $c_{\sigma}^{\text{I}}|0_{\text{Axel}}\rangle = c_{\sigma}^{\text{II}}|0_{\text{Axel}}\rangle = 0$) applicando gli operatori di creazione $c_{\sigma}^{\text{I}\dagger}$ e $c_{\sigma}^{\text{II}\dagger}$. Infatti, dato che i modi di Unruh sono modi a frequenza di Minkowski puramente positiva,

$$\tilde{a}_{\sigma}|0_{\text{Beatrice}}\rangle = 0, \quad (1.144)$$

e vista l'eq. (1.142) si ha

$$\begin{aligned} (\alpha_{\sigma} c_{\sigma}^{\text{I}} - \beta_{\sigma} c_{\sigma}^{\text{II}\dagger})|0_{\text{Beatrice}}\rangle &= 0, \\ (\alpha_{\sigma} c_{\sigma}^{\text{II}} - \beta_{\sigma} c_{\sigma}^{\text{I}\dagger})|0_{\text{Beatrice}}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Se guardiamo attentamente queste equazioni, ci accorgiamo che ci dicono molte cose: innanzitutto che $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$ deve poter essere ottenuto da $|0_{\text{Axel}}\rangle$ applicando soltanto gli operatori di creazione nella combinazione $c_{\sigma}^{\text{I}\dagger} c_{\sigma}^{\text{II}\dagger}$; poi, che la componente di $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$ lungo il vettore $(c_{\sigma'}^{\text{I}\dagger} c_{\sigma'}^{\text{II}\dagger})^{(n+1)} \dots |0_{\text{Axel}}\rangle$ (con i puntini si intende l'applicazione di operatori di creazione relativi ad altre σ) deve essere $\beta_{\sigma'}/(n+1)\alpha_{\sigma'}$ volte quella lungo $(c_{\sigma'}^{\text{I}\dagger} c_{\sigma'}^{\text{II}\dagger})^n \dots |0_{\text{Axel}}\rangle$. Insomma²², $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$ è dato da

$$\begin{aligned} |0_{\text{Beatrice}}\rangle &= Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \oplus_{\sigma} \left(\frac{\beta_{\sigma}}{\alpha_{\sigma}} \right)^n c_{\sigma}^{\text{I}\dagger} c_{\sigma}^{\text{II}\dagger} \right) |0_{\text{Axel}}\rangle = \\ &= Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\oplus_{\sigma} e^{-n\pi\sigma/g} |n_{\sigma}, \text{I}\rangle \otimes |n_{\sigma}, \text{II}\rangle \right). \end{aligned} \quad (1.146)$$

Facendo la traccia sui modi del settore II, non accessibili alle osservazioni di Axel e di *Topo Frettoloso*, si ottiene la matrice di densità

$$|0_{\text{Beatrice}}\rangle \stackrel{\text{I}}{\cong} Z^{-1} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\oplus_{\sigma} e^{-2\pi n\sigma/g} |n_{\sigma}, \text{I}\rangle \langle n_{\sigma}, \text{I}| \right). \quad (1.147)$$

Abbiamo così dimostrato che *Topo Frettoloso* aveva completamente ragione:

lo stato di vuoto inerziale $|0\rangle$ è formalmente un bagno termico di modi di Rindler alla temperatura di Hawking $T = g/2\pi$.

1.2.6 Dal punto di vista di Beatrice

Alla nostra analisi dell'effetto Unruh manca ancora una parte importante. Abbiamo concluso che *Topo Frettoloso* viene eccitato perché è in grado di assorbire le “particelle” di Rindler presenti nel vuoto inerziale. Lo stato del campo, dopo l'assorbimento di una particella di energia σ , è dato da (vedi eq. (1.143))

$$c_{\sigma}^{\text{I}}|0_{\text{Beatrice}}\rangle = \beta_{\sigma} \tilde{a}_{-\sigma}^{\dagger}|0_{\text{Beatrice}}\rangle, \quad (1.148)$$

²²Questo ragionamento è corretto e sufficiente per stabilire l'eq. (1.146); questa può tuttavia essere derivata anche utilizzando la trasformazione *generale* tra stati di rappresentazioni diversi che presenteremo in cap. 3.

ovvero l'assorbimento della "particella" di Rindler di energia σ equivale all'emissione del modo di Unruh $\tilde{\chi}_{-\sigma}$. Ma, come sappiamo, i modi di Unruh sono pacchetti di "particelle" di Minkowski! Se Beatrice potesse osservare lo stato del campo dopo che *Topo Frettoloso* ha assorbito una particella di Rindler, vedrebbe proprio che sono state create delle "particelle" di Minkowski!

Questo risultato è senza dubbio sorprendente, e ci spinge dritti verso due paradossi:

1. L'assorbimento di una particella di Rindler da parte del *detector* dovrebbe essere un processo che diminuisce l'energia del campo. Come è possibile che questa invece aumenti (con la creazione di "particelle" di Minkowski)?
2. Il modo di Unruh $\tilde{\chi}_{-\sigma}$ emesso dal *detector* è concentrato principalmente nel settore II, causalmente sconnesso dal settore I. Dunque l'eccitazione del *detector* nel settore I sembra "causare" istantaneamente la comparsa di una "particella" (e un incremento dell'energia del campo) nel settore II. L'osservatore accelerato Axel potrà quindi inviare *messaggi superluminali* da I in II semplicemente accendendo e spegnendo il Topo che porta con sè!

Le risposte a questi dilemmi sono discusse in [Unruh e Wald 1984]. Prima di tutto, l'assorbimento di una "particella" di Rindler non solo la rimuove dal campo, ma compie anche una misurazione parziale dello stato quantistico. Il fatto che ci fosse una "particella" di energia σ "pesa" la matrice di densità (eq. (1.147)) nella direzione di grandi numeri di "particelle", e quindi *aumenta* l'energia media attesa²³.

D'altronde, non ci potevamo aspettare che l'energia del campo diminuisse, perché il vuoto di Minkowski è *già* un minimo dell'energia! Quindi il vuoto di Rindler $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$, al quale è necessario aggiungere un bagno termico di particelle per arrivare al vuoto inerziale, deve avere un'energia *negativa*. Ricordiamoci però che la definizione di energia totale dipende da come si compie il normal-ordering, cosicché l'energia del vuoto di Rindler è effettivamente negativa secondo Beatrice, ma è zero secondo Axel!

C'è ancora qualcosa che non torna, perché complessivamente aumentano sia l'energia del campo che quella del Topo. Prima di essere accusati di eresia per aver negato la conservazione dell'energia totale, esaminiamo ancora tutti gli elementi del sistema: il colpevole non può che essere il moto semiclassico del Topo. L'assorbimento di una "particella" dotata di energia e momento dovrebbe modificarne la traiettoria, ma questo non avviene: evidentemente il motorino che muove il Topo compensa automaticamente questo disturbo e fornisce energia quando necessario.

Per quanto riguarda il secondo problema, *non è possibile utilizzare l'effetto Unruh per violare la causalità*. Questo si può vedere provando che il sistema *detector* + campo è *manifestamente* causale [Unruh e Wald 1984] (cioè che il valore di aspettazione del campo dipende dal *detector* soltanto nel futuro

²³[Unruh e Wald 1984] danno l'esempio dello stato del campo $|0\rangle + (1/\sqrt{n})|n\rangle$; il valor medio di H è l'energia di un singolo quanto E ; se però un *detector* assorbe una "particella", lo stato salta a $|n-1\rangle$ e l'energia media attesa a $(n-1)E$.

causale del momento della sua accensione) oppure con il seguente argomento euristico: supponiamo che Beatrice si trovi in II per raccogliere il messaggio di Axel. Beatrice deve accendere e spegnere *asintoticamente* il suo *detector*, altrimenti introdurrà delle eccitazioni spurie, dovute allo *switching* del *detector*, che oscureranno il “messaggio” di Axel. Beatrice, inoltre, dovrà muoversi di moto inerziale (altrimenti non potrà distinguere i “messaggi” di Axel dal bagno termico di Unruh); ma ciò significa che Beatrice entrerà prima o poi nella regione III, e che allora il suo *detector* sarà ancora acceso. Quindi, la trasmissione del “messaggio” può essere ricondotta all’interazione col campo del *detector* di Beatrice nella regione III, *che è causalmente accessibile ad Axel*.

Anche se non è possibile violare la causalità, entra qui ugualmente in gioco un fenomeno di tipo EPR²⁴: come è evidente dall’espressione di eq. (1.146) dello stato di vuoto inerziale, c’è una correlazione tra le fluttuazioni del vuoto (che qui vestono i panni delle “particelle” di Rindler) in regioni dello spazio-tempo separate da distanze *space-like*. L’interazione con il *detector* “invischia” anche quest’ultimo (ma in modo causale!) nella correlazione, e la decoerenza del *detector* assume necessariamente un’influenza non-locale sullo stato del campo.

Del resto il fatto che le fluttuazioni dello stato di vuoto esibiscano una correlazione per distanze *space-like* non è niente di nuovo: ne è testimonianza ad esempio l’espressione (1.15) della funzione di Wightman (detta, appunto, anche *funzione di correlazione a due punti del campo*):

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \frac{-1}{(4\pi^2)|x_1 - x_2|^2} \neq \langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle \cdot \langle 0 | \phi(x_2) | 0 \rangle = 0 \cdot 0 = 0. \quad (1.149)$$

Come afferma [Wald 1986],

“this implies that knowledge of the field at x_2 will alter the probability distribution for the field at x_1 . On the other hand, the commutator of field operators *does* vanish when x_1 and x_2 are space-like related [...] when the altered probability distributions for the field at x_1 are weighted by the probability of the outcome of the measurement at x_2 and summed, one obtains the original probability distribution. Hence, the decision to measure the field at x_2 does not result in a change in the probability distribution for the field at x_1 , and one cannot make use of the existence of the field correlations at x_1 and x_2 to communicate information between these events.”

Visto tutto questo e tenendo in mente l’espressione (1.146) dello stato di vuoto inerziale, possiamo dare una descrizione definitiva dell’effetto Unruh con le parole di [Unruh e Wald 1984]:

“it seems as though the detector is excited by swallowing part of the vacuum fluctuation of the field in the region of spacetime containing the detector. This liberates the correlated fluctuation in a noncausally related region of the spacetime to become a real particle.”

²⁴Per un’introduzione all’EPR vedi ad es. [Penrose 1994], [Penrose et al. 1986] e, con particolare riferimento alla teoria dei campi e all’effetto Unruh, [Wald 1986].

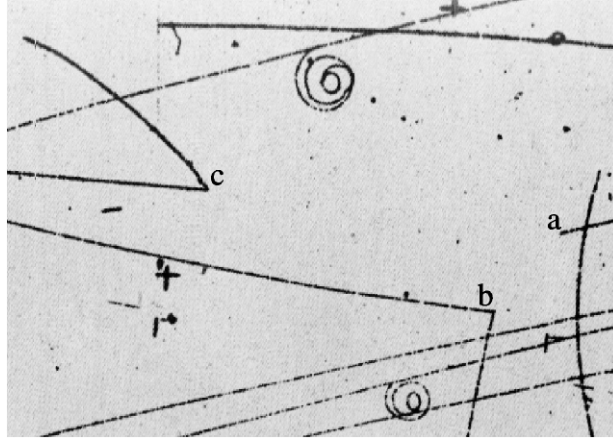


Figura 1.16: Fotografia di un processo di produzione di particelle strane in una camera a bolle (negativo)

La reazione mostrata, da destra verso sinistra, è $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ (vertice a); $K^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+$ (vertice b); $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$ (vertice c). Si immagini di congiungere a con b e c per segnare la traiettoria delle particelle neutre. Da [Segré 1977].

1.3 Parliamo ancora di particelle

È giunto il momento di tirare le somme degli sforzi che Beatrice ha fatto per dare un senso al concetto di “particella”. Beatrice è soddisfatta dei risultati che ha ottenuto finora: le sembra che le “particelle” siano dopotutto oggetti fisici reali, anche se stranamente dipendenti dallo stato di moto dell’osservatore. Axel invece è molto più scettico:

Axel: dopotutto, una teoria di campo non è che, appunto, una teoria *di campo*! Le “particelle” sono il residuo di un vecchio modo di pensare, del tentativo di interpretare la fisica del ventesimo secolo con i concetti del diciannovesimo!

È vero; ma come fa notare [Unruh 1990], la teoria quantistica dei campi mette sullo stesso piano i campi di gauge, eredi della teoria classica di un “vero” campo, il campo elettromagnetico (il cui valore è *direttamente accessibile all’esperimento*) e i campi di materia, che discendono dalle teorie quantistiche a una particella, *dove il campo non è direttamente osservabile*, ma esprime in ogni punto *la probabilità di un’osservazione*.

È perciò difficile rinunciare a parlare di “particelle” per i campi di materia; per quanto uno continui a ripetersi, “questi disegni rappresentano *solo* dei termini di uno sviluppo perturbativo”, il formalismo dei diagrammi di Feynman porta proprio in questa direzione; e che dire degli esperimenti di fisica delle particelle?

Beatrice: eppure! Hai visto le fotografie delle camere a bolle? Quelle sottili tracce. . . non ti sembrano proprio i sentieri di piccolissime, velocissime palline?

Axel: oh, certo, ma se non ci fosse un liquido sovrariscaldato che, uhm, bolle, diresti che le “particelle” ci sono lo stesso?

Beatrice: ah, tu vuoi dire che io non posso riferire il concetto di “particella” al campo, ma solo alla sua interazione con il *detector*!

E in effetti si può dire che *un concetto operativo di “particella” è definito dagli scambi discreti di energia tra il campo e un detector*, come abbiamo visto in sez. 1.1.5.

Axel: e come hai visto, il concetto *operativo* di “particella” non è invariante se passi da *detectors* inerziali a *detectors* accelerati. Ma c’è di più! Hai pensato che potresti prendere *detectors* con una diversa interazione con il campo?

Beatrice: e perché dovrei? Che i miei Topi siano i *detectors* “giusti” è confermato dalla decomposizione del campo in modi normali. Siamo riusciti a interpretare anche l’effetto Unruh in questo modo: basta prendere modi diversi!

Un concetto matematico di “particella” è definito dalla struttura dello spazio di Fock della teoria: l’applicazione dei creatori allo stato di vuoto genera stati stabili “a n particelle”. Ma dato che, alla fine dei conti, l’interazione con i *detectors* equivale ancora all’applicazione di creatori e distruttori allo stato del campo. . .

Beatrice: . . . *il concetto operativo e quello matematico coincidono* e le particelle esistono davvero!

Axel: tsk, tsk. . .

Beatrice: non ti sopporto, quando fai “tsk, tsk”! Dimmi allora cosa c’è che non va!

1.3.1 Morte di un concetto matematico

Ma è proprio vero che i due concetti coincidono? In realtà, soltanto per una ristretta classe di osservatori è possibile trovare un set di modi “adattato” che permetta di definire il concetto *matematico* di “particella”.

Consideriamo Jenny, un’osservatrice *in moto generico* (nessuna parentela con Beatrice e Axel!) Jenny vorrebbe che le sue “particelle” avessero un’energia definita rispetto al suo tempo proprio τ_J . Per prima cosa, Jenny deve riuscire a coordinatizzare con τ_J e altre tre coordinate spaziali una regione sufficientemente vasta dello spazio-tempo. Ammesso che possa fare questo, le serve una decomposizione del campo in modi ψ^J tali che

$$i\partial_{\tau_J}\psi_i^J(t, x^i) = \omega\psi_i^J(t, x^i); \quad (1.150)$$

questo, tuttavia, è possibile *soltanto se l’operazione di “traslazione lungo il tempo τ_J ” è una simmetria della teoria di Klein Gordon!* Dato che queste

simmetrie coincidono con quelle della metrica di Minkowski η_{ab} , i soli osservatori che possono definire un concetto *matematico* di “particella” sono quelli il cui moto è definito da una isometria di η_{ab} , ovvero quelli che *si muovono lungo le traiettorie di un gruppo a un parametro di isometrie della metrica*. Bisogna ovviamente che la traiettoria sia *time-like*!

Ora, i gruppi a un parametro di isometrie di η_{ab} sono tutti generate da combinazioni lineari dei 10 campi di Killing (vedi app. A) indipendenti che comprendono le quattro traslazioni

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_z; \quad (1.151)$$

le tre rotazioni spaziali indipendenti

$$R_x \equiv y\partial_z - z\partial_y, \quad R_y \equiv z\partial_x - x\partial_z, \quad R_z \equiv x\partial_y - y\partial_x; \quad (1.152)$$

e i tre boosts di Lorentz

$$L_x \equiv x\partial_t + t\partial_x, \quad L_y \equiv y\partial_t + t\partial_y, \quad L_z \equiv z\partial_t + t\partial_z. \quad (1.153)$$

Con un po' di fatica²⁵ si può mostrare che *le curve integrali time-like delle combinazioni di questi campi di Killing sono tutte e sole le eliche di Synge*. Dunque soltanto gli osservatori che si muovono con i Topi del set di Beatrice possono formulare un concetto *matematico* di particella.

Ma c'è di peggio. [Letaw e Pfautsch 1981] quantizzano il campo di Klein-Gordon nelle coordinate “naturali” (ovvero ottenibili a partire da una tetrad trasportata parallelamente sulla traiettoria stazionaria, come abbiamo fatto in sez. 1.2.1 per il moto di Axel) degli osservatori in moto sulle eliche di Synge, e ricavano il contenuto in “particelle accelerate”²⁶ dello stato di vuoto “inerziale”. Bene, *il risultato è consistente con lo spettro di energia riportato dai Topi corrispondenti soltanto per moti inerziali o uniformemente accelerati alla Pauli*.

Negli altri casi, non esiste nessuna *initial value surface* su cui la coordinata “di tempo” sia dovunque *time-like*. Prendiamo ad esempio il caso del moto di *Topo Girotondo*: il sistema di coordinate “naturali” è costituito un sistema di riferimento rigido “co-rotante” con il Topo. Il tempo, in particolare, è dato dal “tempo di Killing” relativo al campo vettoriale

$$\mathbf{b} = \gamma(x\partial_y - y\partial_x) + r\partial_t \quad (1.154)$$

(vedi eq. (1.71); per raggi abbastanza grandi, sia \mathbf{b} che il tempo di Killing diventano *space-like* (fisicamente, questo è dovuto al fatto che un sistema rigido “co-rotante” con il Topo dovrà necessariamente avere punti che si muovono a velocità superiori a quelle della luce rispetto a un sistema inerziale).

Non è certo ovvio che in tali condizioni il problema di Cauchy *classico* sia ugualmente ben posto! Se ammettiamo che lo sia, il risultato è che le funzioni

²⁵Si tratta di scrivere le velocità dei moti di eq. (1.63) e seg. come combinazioni lineari dei campi di eq. (1.151)-(1.153).

²⁶Quelle che per i moti alla Pauli chiamiamo “particelle di Rindler”.

di modo *a norma positiva* con le quali si decompone l'operatore di campo non sono tutte *a frequenza positiva* dal punto di vista dell'osservatore accelerato. Esistono dunque particelle a energia negativa²⁷!

Quando si studia il contenuto in “particelle accelerate” dello stato di vuoto “inerziale”, si trova che non ce ne sono affatto (è il caso ad esempio di *Topo Girotondo*) o che ce n'è una distribuzione termica alla temperatura di Hawking (come succede per *Topo Strano* e *Topo Complicato*). Come mai allora *Topo Girotondo* rileva una densità di energia non-nulla, e *Topo Strano* non riporta uno spettro strettamente planckiano? Il motivo è che i Topi hanno a disposizione due modi per guadagnare energia: assorbire “particelle accelerate”, quando ce ne sono, ma anche *emettere* “particelle accelerate” a energia negativa. La corrispondenza tra il concetto *matematico* e quello *operativo* è dunque distrutta²⁸.

Axel: mi sembra insomma inutile giustificare la tua convinzione che le “particelle” esistono con il fatto che i due concetti coincidono, visto che il concetto *matematico* è riservato a un'élite di osservatori, e porta comunque a conclusioni sbagliate se non in casi particolarissimi!

Beatrice: non so come fai a chiamare “particolarissimi” gli osservatori inerziali, visto che non si è fatta altra fisica che la loro, almeno fino a Einstein! Beh, vorrà dire che mi accontenterò del mio concetto *operativo*!

1.3.2 Lo zoo dei *detectors*

Perché, con Beatrice, siamo così restii ad abbandonare per sempre le “particelle”? Un motivo, come diceva Beatrice, sono le tracce che vediamo nelle camere a bolle, o i clicks dei contatori Geiger: le “particelle” si possono vedere e sentire! Dato che però quello che vediamo e sentiamo è essenzialmente il comportamento di alcuni semplici sistemi fisici in presenza di eccitazioni del campo quantistico, ha ragione [Unruh 1990] quando dice,

particles are what particles detectors detect.

Certo, se i *detectors* definiscono il concetto di “particella”, questo non può essere usato per costruire il *detector* “giusto”! Dopo tutto, aggiungiamo noi,

particles detectors are those things that detect particles!

Hmm! Non c'è però una arbitrarietà *totale* nella scelta del *detector*. La maggior parte degli osservatori (umani e terrestri, per lo meno) è *quasi* inerziale dal

²⁷Si badi bene, non nel senso delle antiparticelle: uno stato popolato da queste particelle avrà effettivamente un'energia inferiore a 0.

²⁸Secondo [Grove e Ottewill 1983], non irrimediabilmente. Se non si considerano osservazioni *elementari* (ovvero singoli esperimenti), ma osservazioni *complete* (ovvero inferenze su serie di esperimenti), e si corregge per le presenza di particelle negative, è possibile considerare il comportamento degli “altri Topi” come indicativo della presenza o meno di “particelle accelerate”. Un'altra proposta, limitata al caso di *Topo Girotondo*, è dovuta a [Davies et al. 1996], che propongono di limitare la quantizzazione del campo alla regione in cui il “tempo” è effettivamente *time-like*. La struttura dei modi del campo risulta radicalmente alterata e viene ripristinata la coerenza tra le osservazioni dei *detectors* e la presenza di “particelle accelerate”.

punto di vista della teoria dei campi (in altre parole, la temperatura di Hawking è terribilmente piccola per accelerazioni realizzabili). Appare perciò ragionevole prendere le “particelle” *matematiche* di Minkowski (che corrispondono alle rappresentazioni del gruppo di Poincaré) come punto di partenza, e richiedere che tutti i *detectors* misurino *queste* nel limite di moti inerziali.

La maggior parte dei *detectors* studiati in letteratura appartiene alla classe dei *detectors* semiclassici: ovvero di sistemi quantistici in moto *classico* su una *world-line* predeterminata $\mathcal{P}(\tau)$, immersa nel campo quantistico ϕ da misurare. L’idea è che un osservatore può muoversi sulla sua *world-line* con uno di questi *detectors*, controllandone ogni tanto i “quadranti” (e facendone così precipitare lo stato quantistico²⁹).

1. Il primo articolo in cui si considera l’interazione con un *detector* come criterio per la presenza di “particelle” è [Unruh 1976]³⁰; qui si esamina una “scatola” in moto uniformemente accelerato alla Pauli nello spazio di Minkowski *in modo da apparire ferma nelle coordinate di Rindler*; la scatola contiene una particella di Schroedinger con funzione d’onda ψ , che si evolve con il tempo di Rindler ed è accoppiata al campo da misurare ϕ dal termine di interazione

$$H_I = \int_{\text{box}} \psi(\tau, \xi^i) \phi(\tau, \xi^i) \sqrt{-g} d^3 \xi^i, \quad (1.155)$$

(per ξ^i si intendono le tre coordinate spaziali di Rindler, che chiamavamo (ξ, y, z) in sez. 1.2.1; l’integrazione è limitata all’interno della scatola). La rilevazione di una “particella” corrisponde alla transizione di ψ dal livello fondamentale a un livello eccitato.

2. [DeWitt 1979] mostra come semplificare ulteriormente questo *detector*, prendendo un sistema quantistico *puntiforme* con spettro discreto e interazione con il campo data da

$$H_I = m(\tau) \phi(\mathcal{P}(\tau)), \quad (1.156)$$

dove $m(\tau)$ opera sugli stati del *detector*. I nostri Topi sono essenzialmente *detectors* di DeWitt!

Il fatto che il *detector* sia puntiforme semplifica notevolmente i calcoli, ma è ragionevole pensare che un *detector* realistico debba essere spazialmente esteso. Purtroppo, non è possibile generalizzare lo “Schroedinger box” a traiettorie non stazionarie, perché in tal caso non si potrebbe richiederne la rigidità³¹.

²⁹È interessante notare, come fa [Unruh 1990], che questi *detectors* subiscono il ben noto (almeno agli amanti del tè) *effetto della teiera*: *a watched pot never boils*; se infatti si osserva continuamente il loro stato, non subiscono mai alcuna transizione.

³⁰Lo stesso articolo in cui si identifica per la prima volta un “effetto Hawking nello spaziotempo piatto”, i. e. l’effetto Unruh.

³¹La definizione di rigidità generalmente accettata è quella di Born: un corpo si dice rigido se i *vettori di deviazione* (vedi app. A) tra le *world-lines* dei suoi elementi hanno norma costante rispetto al tempo proprio dell’oggetto. È stato provato, tuttavia, che un corpo che obbedisce a questo criterio ha soltanto tre gradi di libertà invece dei sei della meccanica classica. In generale, data una *world-line* è impossibile trovare un corpo rigido tale che almeno uno dei suoi punti la segua. A questo proposito, si veda ad es. [Anderson 1967].

Utilizzare un “box” rigido è desiderabile perché generalmente si vorrà imporre sul “campo interno” del *detector* una condizione di periodicità sulle “pareti” della scatola; la presenza di superfici “riflettenti” accelerate causa fenomeni spuri di produzione di particelle³² che sono da ritenere estranei all’osservazione.

3. [Grove e Ottewill 1983] propongono di considerare un “box” rigido soltanto *nel sistema di coordinate naturale dell’osservatore accelerato*, che abbiamo discusso in sez. 1.2.1. In questo modo non c’è produzione spuria di particelle almeno dal punto di vista dell’osservatore accelerato.

Questi *detectors*, tuttavia, sono matematicamente molto ingombranti, e la superiorità delle osservazioni che permettono rispetto a quelle dei *detectors* “puntiformi” è tutta da dimostrare.

4. ancora in [Unruh 1976], viene discusso un *detector* consistente in due campi di Klein-Gordon Ψ_F e Ψ_E (“fondamentale” ed “eccitato”, con $m_E > m_F$), accoppiati al campo ϕ dalla densità di Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_I = (\Psi_F^*(x)\Psi_E(x) + \Psi_E^*(x)\Psi_F(x))\phi(x), \quad (1.157)$$

e *accelerati da un campo esterno classico*. La rilevazione di una “particella” di ϕ comporta la distruzione di una “particella” di Ψ_F e la creazione di una di Ψ_E .

Questo *detector* non soffre (ovviamente) di problemi legati alla “rigidità”, ma presenta la caratteristica poco fisica di essere spazialmente illimitato.

5. Come esempio di almeno un *detector* che non conferma l’effetto Unruh, si può vedere [Brown et al. 1982]. Qui si esamina un *detector* spazialmente esteso le cui pareti seguono un campo di Killing *conforme* nello spazio-tempo di Minkowski (questa condizione si può considerare poco “fisica” perché il *detector* non sarà in nessun senso rigido e apparirà a tratti grossolanamente distorto dal punto di vista degli osservatori inerziali). È allora possibile realizzare una trasformazione conforme che porta lo spazio di Minkowski in sé stesso e il *detector* uniformemente accelerato in un *detector* inerziale. Dato che si può mostrare che lo stato di vuoto inerziale è invariante per questa trasformazione, il *detector* non rileverà mai alcuna “particella”.
6. Piuttosto speculativa, infine, appare l’impostazione di [Sanchez 1979] che considera in teoria dei campi (1+1)-dimensionale sistemi di coordinate definiti da funzioni analitiche reali $F(u)$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}[F(x+t) + F(x-t)], \\ y' = \frac{1}{2}[F(x+t) - F(x-t)]. \end{cases} \quad (1.158)$$

³²La produzione di particelle ottenuta accelerando dei conduttori è un fenomeno imparentato con l’effetto Unruh, discusso in [DeWitt 1975] e nella maggior parte delle rassegne e dei testi sulla teoria dei campi nello spazio curvo.

La “produzione di particelle” è studiata confrontando le funzioni di modo nelle coordinate inerziali e in quelle “accelerate”, ed è determinata dalla struttura delle singolarità di F . È possibile avere produzione di particelle, con distribuzioni termiche e non termiche, anche per trasformazioni che non inducono orizzonti causali per gli osservatori “accelerati”.

Il problema principale di tutti i *detectors* semiclassici è che questi non permettono di discutere la conservazione dell’energia: infatti all’assorbimento o all’emissione di una “particella” del campo da parte del *detector* dovrebbe corrispondere una variazione del suo momento e della sua energia; essendo però la traiettoria del *detector* già data a priori, bisogna postulare, come abbiamo già osservato in sez. 1.2.6) che la “causa fisica” che la determina (per i Topi, ad esempio, è un piccolo motore a pile) compensi automaticamente queste variazioni, e in particolare fornisca al *detector* l’energia necessaria per l’emissione di una “particella” del campo quando questo processo avviene. Nemmeno il *detector* 4 si sottrae a questo problema, perché l’accelerazione è ottenuta ancora attraverso un “agente esterno”, in questo caso un campo classico.

1.3.3 Covarianza della teoria per la scelta dei modi e stati non-particolati

In tutto questo capitolo abbiamo ragionato sul fatto che il concetto di “particella” non fa parte del “nucleo” della teoria quantistica dei campi, ma è una sovrastruttura intimamente legata alle simmetrie dello spazio di Minkowski che viene a cadere non appena consideriamo la teoria dal punto di vista di osservatori in moto non inerziale. Il nostro ragionamento ci ha portato a esaminare il metodo di quantizzazione canonica, e in particolare il procedimento di decomposizione del campo in modi normali.

Con un certo stupore, abbiamo scoperto che gli stati di vuoto definiti da diverse decomposizioni del campo possono non essere equivalenti. Non ci siamo chiesti, tuttavia, se lo spazio di Fock di una costruzione contenga tutti gli stati definibili in tutte le altre, ovvero *se lo spazio degli stati quantistici del campo* sia invariante per la scelta delle *mode functions*.

La risposta è no. Un esempio è dato dallo stato di vuoto inerziale di Beatrice: il suo contenuto in particelle di Rindler, di tutte le frequenze, è dato da

$$\langle 0_{\text{Beatrice}} | \sum_i c_i^\dagger c_i | 0_{\text{Beatrice}} \rangle = \sum_{i,j} \beta_{ij}^* \beta_{ij} = \int \frac{d\sigma}{e^{2\pi\sigma/g} - 1}; \quad (1.159)$$

ma quest’integrale diverge! Uno stato con un numero infinito di particelle non può stare nello spazio di Fock, e dunque $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$ non fa parte dello spazio di Fock di Axel.

Non si preoccupi il lettore che teme che questo risultato infici la derivazione dell’effetto Unruh data in sez. 1.2.4: come vedremo nel cap. 3, è ugualmente possibile dare un senso fisico ai vettori (come $|0_{\text{Beatrice}}\rangle$) che stanno solo formalmente nello spazio di Fock ma non sono normalizzabili.

Piuttosto, visto che in modo analogo è possibile definire stati che non rientrano nello spazio di Fock inerziale, ci si può chiedere se questo sia “abbastanza

vasto” per accomodare tutti gli stati *fisici* realizzabili, o se piuttosto non si debbano considerare *insieme* tutti gli stati di tutti gli spazi di Fock ottenuti per diverse scelte dei modi. La maggior parte di questi stati non saranno stati “particolati” secondo la maggior parte delle scelte dei modi. [Deutsch 1981] osserva,

there might be non-particulate matter in this very room – though the success of the [single Fock space] hypothesis in field theory to date presumably indicates that the state of the world has at most a very small component [outside the “Minkowski” Fock space].

Nel capitolo 3 studieremo in un contesto più generale (quello degli spazio-tempo curvi) le conseguenze della scelta dei modi per la quantizzazione, e scopriremo perché la quantizzazione standard *à la Bjorken* è sufficiente per descrivere così bene il mondo che ci circonda.

Capitolo 2

Interludio classico: il principio di equivalenza per le particelle cariche classiche e il concetto di “radiazione”

(Beatrice arriva da Axel in visita.)

Beatrice: eccomi qui! Però, hai ristrutturato proprio bene la tua nuova casa! Quanti computers! Posso accenderli?

Axel: sì, ma perché prima non provi il mio nuovo ascensore? L’ho appena fatto installare.

Beatrice: è sicuro? Te lo chiedo perché ha un’aria un po’ antica!

Axel: sicurissimo. Sali.

(Axel preme un pulsante, e improvvisamente l’ascensore precipita in caduta libera, lasciando Beatrice e Axel a galleggiare nel vuoto. Altrettanto improvvisamente si ferma, sbattendoli con violenza contro il pavimento.)

Beatrice: ugh!

Axel: sorellina mia, hai appena avuto una dimostrazione del principio di equivalenza di Einstein! Hai letto i libri di relatività generale che ti ho dato, vero?

Beatrice: sì che li ho letti! Però preferisco quando i *gedankenexperimenten* rimangono, appunto, *gedanken*. La mia schiena!

Axel: oggi voglio raccontarti una storia molto interessante.

Beatrice: parla di fisica? Di teoria dei campi?

Axel: parla di elettromagnetismo classico. Ma prima torniamo su. Hai portato uno dei tuoi Topi?

Beatrice: sì, eccolo qui.

Axel: guarda cosa facciamo. Con questa piccola antenna il tuo Topo diventa un perfetto rivelatore di onde elettromagnetiche. Ora prendo questa

carica elettrica puntiforme, e le faccio fare un bel tuffo nell'ascensore. Cosa pensi che misurerà il tuo Topo?

Beatrice: oh, non c'è bisogno di fare la prova. La carica cadrà con accelerazione uniforme emettendo una radiazione elettromagnetica, che il mio Topo potrà facilmente misurare.

Axel: ne sei così sicura? Cosa dice il principio di equivalenza che hai appena sperimentato?

Beatrice: beh, in buona sostanza dice che i sistemi di riferimento in caduta libera sono (localmente) inerziali: la *forza* di gravità può essere (localmente) simulata da un'opportuna *accelerazione*.

Axel: sistemi inerziali, vero? Quindi nell'ascensore che cade varranno anche le equazioni di Maxwell. D'altronde, nel sistema di riferimento dell'ascensore la carica è ferma...

Beatrice: e quindi non può irradiare! Oddio, non capisco più niente! Mi sembra davvero strano che la carica non irradii, ma se lo facesse dovrebbe perdere energia, e non potrebbe cadere così velocemente come l'ascensore, che non è carico.

Axel: vorrebbe dire che le particelle cariche violano il principio di equivalenza!

Beatrice: lo fanno?

Axel: questa è la domanda a cui cercheremo di rispondere.

2.1 Un criterio Lorentz-invariante per la definizione di “radiazione”

Per risolvere il dilemma di Beatrice abbiamo bisogno di alcuni strumenti teorici. Prima di tutto, ci serve una caratterizzazione precisa del concetto di “radiazione elettromagnetica”. Poniamoci in relatività speciale, e partiamo dall'espressione del campo elettromagnetico per una carica classica in moto sulla traiettoria descritta da $z^\mu(\tau)$ in un sistema di riferimento inerziale. In ogni punto Q della *world-line* si producono dei campi elettromagnetici che si muovono con la velocità della luce sul cono di luce futuro di Q . Ne segue che se la carica è l'unica sorgente di campi elettromagnetici nello spazio-tempo di Minkowski, il campo in ogni punto \mathcal{P} di coordinate x^μ ha avuto origine unicamente nell'intersezione di $z^\mu(\tau)$ con il cono di luce *passato* di \mathcal{P} (il campo è perciò detto *ritardato*).

Il valore dei potenziali elettromagnetici in x^μ è dato dalla formula di *Liénard-Wiechert*¹

$$A_{\text{ret}}^\mu = \left(\frac{eu^\mu}{-u^\alpha R_\alpha} \right)_{\text{ret}}, \quad (2.1)$$

dove e è la carica della particella classica, $u^\mu = dz^\mu/d\tau$ è la sua 4-velocità e $R^\mu = x^\mu - z^\mu(\tau_{\text{ret}})$ collega x^μ al punto della *world-line* della carica che giace sul

¹Per la dimostrazione di questo e degli altri risultati esposti in questo capitolo si veda, ove non espressamente indicato altrimenti, [Rohrlich 1965].

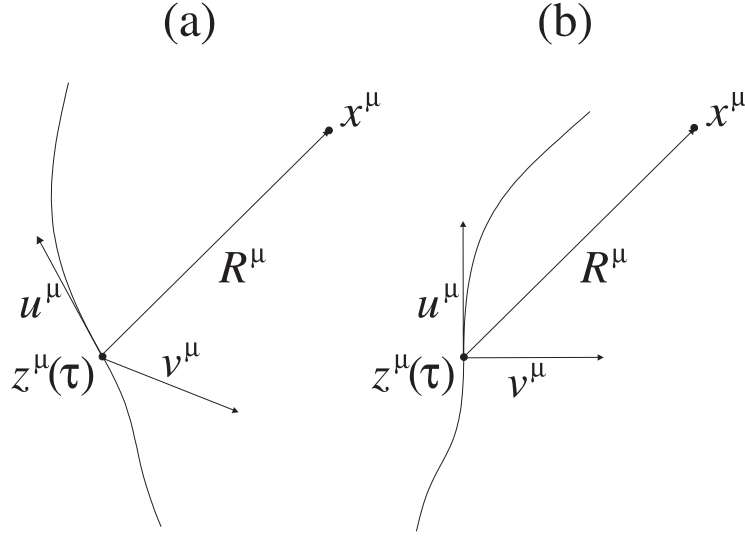


Figura 2.1: Calcolo del campo elettromagnetico sul cono di luce futuro di una carica classica: (a) sistema inerziale generico; (b) sistema inerziale in quiete con la carica

Ci si può convincere della forma di A^μ in eq. (2.1) considerando il campo di Coulomb della carica ferma nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente in quiete (b).

suo cono di luce passato (vedi fig. 2.1; si tenga presente che in eq. (2.1) anche u^μ è valutato in τ_{ret}).

Introducendo per comodità il versore v^μ *space-like* diretto verso x^μ e ortogonale a u^μ , e la *distanza invariante* $\rho = v^\mu R^\mu = -u^\mu R^\mu$, si può ricavare il valore del campo in x^μ ,

$$F_{\text{ret}}^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2} u^{[\mu} v^{\nu]} - \frac{e}{\rho} \left[u^{[\mu} a^{\nu]} + v^{[\mu} a^{\nu]} + u^{[\mu} v^{\nu]} (a^\alpha v_\alpha) \right], \quad (2.2)$$

dove $a^\mu = d^2 z^\mu / d\tau^2$ è la 4-accelerazione della carica, e $(a^\alpha v_\alpha)$ la sua componente normale alla velocità. $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ consiste di un *campo di velocità* indipendente da a^μ e proporzionale a $1/\rho^2$ (che si riduce nel caso di una carica ferma al campo di Coulomb) e dei *campi di accelerazione* (tra parentesi quadre) che sono funzioni lineari omogenee di a^μ e sono proporzionali a $1/\rho$.

Da quest'espressione è evidente che i campi di accelerazione svaniscono se il vettore di accelerazione a^μ si annulla. Inoltre, possiamo verificarne la presenza muovendoci sul cono di luce futuro del punto $z^\mu(\tau)$ e accertando se per $\rho \rightarrow \infty$ l'intensità del campo elettromagnetico diminuisce come $1/\rho$ o come $1/\rho^2$ (questo criterio, però, non è applicabile se la lunghezza d'onda λ tipica della radiazione è molto grande e quindi faticiamo a raggiungere la *wave-zone* $\rho \gg \lambda$).

Ma si può fare di meglio. Intuitivamente, associamo l'idea di “radiazione” al trasporto di energia e momento da parte di una perturbazione del campo elettromagnetico che “si stacca” dal campo di velocità della carica accelerata e, da quel momento in poi, attraversa lo spazio-tempo alla velocità della luce,

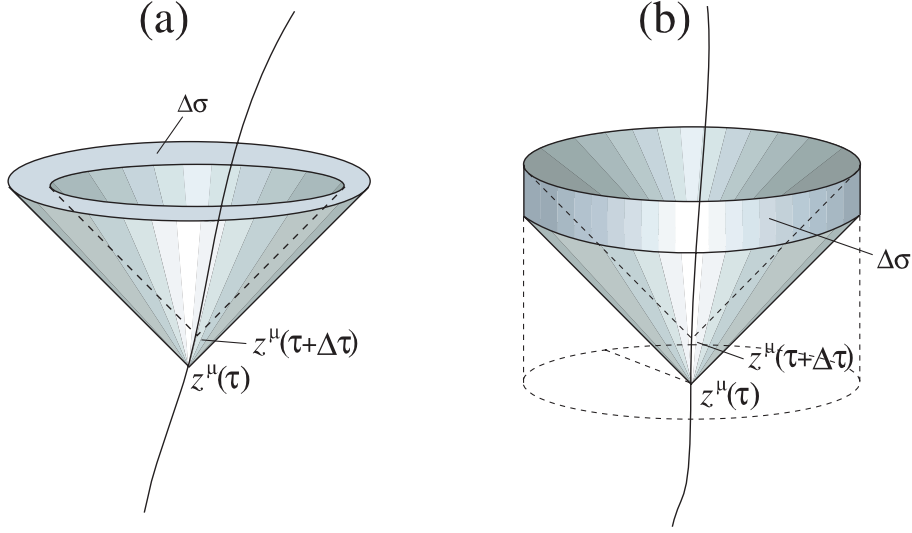


Figura 2.2: Emissione di energia-momento da parte di una carica accelerata

Si considera il flusso di energia-momento attraverso la superficie $\Delta\sigma$ data dall'intersezione dei coni di luce futuri di z^μ nell'intervallo $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ con (a) una superficie *space-like*; (b) una superficie *time-like* che appare come un cilindro diritto nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente in quiete con la carica nell'istante di emissione.

in modo indipendente dal successivo moto della carica. Per valutare l'energia irradiata dalla carica nell'intervallo di tempo infinitesimo $\mathcal{I} = (\tau, \tau + \Delta\tau)$ calcoleremo il flusso ΔP^μ di energia-momento del campo elettromagnetico attraverso una superficie $\Delta\sigma$ data dall'intersezione di una superficie *space-like* σ con i coni di luce futuri della carica nell'intervallo \mathcal{I} (vedi fig. 2.2a). ΔP^μ sarà dato da

$$\Delta P^\mu = \int_{\Delta\sigma} T^{\mu\nu} n_\nu d^3\sigma, \quad (2.3)$$

dove n_ν è il versore normale all'elemento infinitesimo di superficie, e $T^{\mu\nu}$ è il tensore di energia-impulso del campo elettromagnetico

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.4)$$

Il risultato, ovviamente, non è univoco, ma dipende dalla scelta della superficie σ . Si può però dimostrare (*teorema di Schild*) che ΔP^μ diventa un 4-vettore indipendente da σ nel limite di superfici di integrazione tendenti all'infinito (tali cioè che la loro intersezione con $z^\mu(\tau)$ avvenga per $\tau \rightarrow \infty$).

È interessante vedere che è possibile ottenere il valore di questo limite con una integrazione *al finito* se si sceglie opportunamente $\Delta\sigma$. In particolare, prenderemo $\Delta\sigma$ come l'intersezione tra i coni di luce della carica in istanti successivi e una superficie *time-like* σ che nel sistema di quiete istantaneo della carica (riferito all'istante di emissione) è un cilindro diritto (fig. 2.2b).

Utilizzando le eq. (2.3), (2.4) e (2.2) è possibile esprimere il flusso di energia-momento nei termini delle grandezze cinematiche della carica [Rohrlich 1965]: dividendo per $\Delta\tau$ si ottiene

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{e^2}{4\pi} \int (a_\alpha a^\alpha - (a_\alpha v^\alpha)^2) \frac{R^\mu R^\nu v^\nu}{\rho^2} d\Omega, \quad (2.5)$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido e ρ è il raggio del cilindro σ . Questo integrale è indipendente da ρ , e deve pertanto coincidere con il limite per $\rho \rightarrow \infty$ del flusso attraverso superfici *space-like*. L'espressione finale per il *rate* di radiazione della carica è allora il quadrivettore

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} e^2 (a_\alpha a^\alpha) u^\mu; \quad (2.6)$$

in particolare, la componente parallela a u^μ dà il *rate* di emissione di energia

$$\mathcal{R} = -u_\mu \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} e^2 (a^\alpha a_\alpha). \quad (2.7)$$

Questa espressione Lorentz-invariante costituisce la generalizzazione relativistica della *formula di Larmor*; \mathcal{R} è dovuta soltanto ai campi di *radiazione della carica* e può essere utilizzata per formulare un *criterio per la presenza di radiazione* che è *locale e Lorentz-invariante*:

una carica emette radiazione relativamente a un osservatore inerziale se e solo se $\mathcal{R} \neq 0$, ovvero se e solo se la carica è accelerata ($a_\alpha a^\alpha \neq 0$).

Sono d'obbligo alcuni commenti:

1. il criterio è *locale* perché l'integrazione di $dP^\mu/d\tau$ può essere eseguita arbitrariamente vicino alla carica; questo conforta l'interpretazione di $dP^\mu/d\tau$ come il *rate* con la quale energia e momento *sono emessi dalla carica*;
2. il criterio è *Lorentz-invariante* perché \mathcal{R} è formalmente uno scalare di Lorentz; tutti gli osservatori inerziali, pertanto, concorderanno sull'emissione radiativa da parte di una carica accelerata;
3. la forma della superficie di integrazione $\Delta\sigma$ indica che è possibile interpretare operativamente \mathcal{R} nel modo seguente [Rohrlich 1965]: se, a un tempo t_0 , una carica passa attraverso una sfera di raggio ρ in quiete rispetto a un osservatore inerziale, questi può misurare $F^{\mu\nu}$ sulla superficie della sfera al tempo $t = t_0 + \rho$, e integrare poi l'espressione (2.3) trovando così il *rate* invariante di radiazione \mathcal{R} ;
4. non c'è radiazione se sul cono di luce futuro dell'evento di emissione si annullano le componenti di $F^{\mu\nu}$ che sono "di tipo spazio" (cioè relative al campo magnetico) nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente in quiete con la carica nell'evento di emissione².

²Per vederlo, si consideri l'eq. (2.3) per una superficie $\Delta\sigma$ *time-like*: ci interessa allora

2.2 Campi gravitazionali costanti

L'ingrediente che ci manca per analizzare compiutamente il “problema dell'ascensore” è una caratterizzazione precisa della relazione tra il sistema riferimento “sostenuto” a un'altezza costante dalla superficie terrestre (il salotto di Axel) e il sistema di riferimento in caduta libera dell'ascensore.

Il nostro primo impulso è di porci dal punto di vista degli osservatori “sostenuti” spiegando il moto accelerato dell'ascensore come dovuto alla forza gravitazionale costante esercitata dalla terra. Come sappiamo bene, però, non è possibile descrivere i fenomeni gravitazionali semplicemente introducendo delle nuove forze nella teoria della relatività speciale.

Passiamo allora in relatività *generale* e cerchiamo di caratterizzare la geometria dello spazio-tempo nella nostra situazione. Agli osservatori “sostenuti” lo spazio-tempo appare *piatto, omogeneo* nelle due direzioni “orizzontali” (che etichettiamo con x e y) e *statico* (ovvero la geometria non cambia al passare del tempo t). Definiamo allora come *campo gravitazionale statico e omogeneo* (CGSO) la geometria

$$ds^2 = -D(z)dt^2 + A(z)dx^2 + B(z)dy^2 + C(z)dz^2, \quad (2.9)$$

dove A , B , C e D sono funzioni della sola z . Richiederemo inoltre che la curvatura si annulli e che, nel limite non relativistico, la metrica “simuli” il potenziale gravitazionale $\phi_{\text{NR}} = gz$; si dimostra allora [Rohrlich 1963] che la metrica si può scrivere come

$$ds^2 = -D(z)dt^2 + dx^2 + dy^2 + \left(\frac{d}{dz} \sqrt{D(z)} / g \right)^2 dz^2, \quad (2.10)$$

dove $D(z)$ è una arbitraria funzione reale e continua, ristretta soltanto dal limite non relativistico

$$D_{\text{NR}}(z) = 1 + 2gz \quad \text{per } gz \ll 1, \quad gt \ll 1. \quad (2.11)$$

Tra le infinite metriche consentite ve ne sono tre di particolare interesse: la *metrica di Moeller*³

$$ds^2 = -(1 + gz)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.12)$$

che implica che una variazione lineare della velocità degli orologi con l'altezza è sufficiente a simulare un CGSO; la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + e^{2gz}(dz^2 - dt^2), \quad (2.13)$$

valutare le sole componenti T^{0i} del tensore di energia-impulso (la decomposizione “ $\mu \equiv (0, i)$ ” è riferita al sistema di riferimento inerziale istantaneamente in quiete con la carica nell'evento di emissione). Se le uniche componenti non nulle di $F^{\mu\nu}$ sono le $F^{0i} = -F^{i0}$, si ha (eq. (2.4)):

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^{0\alpha} F_{\alpha}{}^i + \frac{1}{4} \eta^{0i} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} (F^{00} F_0{}^i + F^{0j} F_j{}^i) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

³La metrica di Moeller coincide con la metrica di Rindler (1.100).

che soddisfa la *condizione armonica* $g^{ab}\Gamma^c_{ab} = 0$; infine, la *metrica di Kottler-Whittaker*,

$$ds^2 = -(1 + 2gz) dt^2 + dx^2 + dy^2 + (1 + 2gz)^{-1} dz^2, \quad (2.14)$$

per la quale la forma non relativistica di $D(z)$ è esatta.

Il moto di una *test-particle* nella geometria generica (2.10) è regolato dall'*equazione geodetica*⁴

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0; \quad (2.15)$$

nell'ipotesi che la traiettoria giaccia interamente nel piano zt , ci si riduce all'equazione differenziale

$$\left(\frac{du(z)}{dt} \right)^2 = g^2 u(z)^2 (1 - u(z)^2). \quad (2.16)$$

La soluzione di questa equazione dovrebbe darci la traiettoria della carica in caduta libera, dal punto di vista degli osservatori “sostenuti”. Bene, *per nessuna delle tre metriche* (2.12)-(2.14) *la soluzione è il moto iperbolico alla Pauli di eq. (1.95)*, che si ottiene invece per

$$\frac{1}{u(z)} = \cosh \sqrt{(1 - gz)^2 - 1}. \quad (2.17)$$

Poniamoci ora nel sistema di riferimento inerziale che si muove con la *test-particle* in caduta libera, e chiediamoci che aspetto ha la traiettoria $t = \tau$, $z = z_0$ di un osservatore “sostenuto” nella geometria (2.10). La trasformazione di coordinate necessaria si ottiene imponendo

$$-dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -u^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + (u'/g)^2 dz^2, \quad (2.18)$$

ed è data (a meno di una traslazione) da

$$\begin{cases} t' = \frac{u(z)}{g} \sinh gt, \\ x' = x, \\ y' = y, \\ z' = \frac{u(z)}{g} \cosh gt. \end{cases} \quad (2.19)$$

Giungiamo pertanto alla conclusione che *un osservatore in caduta libera in un CGSO vedrà un osservatore “sostenuto” percorrere una traiettoria iperbolica, indipendentemente dalla scelta di $u(z)$* (anche se con accelerazioni $g/u(z_0)$ diverse; a parte questo, la cinematica è esattamente quella di *Topo Frettoloso* e di Axel nel primo capitolo: vedi sez. 1.1.6 e 1.2.1). Invece, come abbiamo già notato, dal punto di vista dell'osservatore “sostenuto” l'osservatore in caduta libera non compirà un moto uniformemente accelerato se non per una particolare scelta di $u(z)$.

⁴Vedi app. A, e i testi standard di relatività generale: [Anderson 1967, Misner et al. 1973, Wald 1984a].

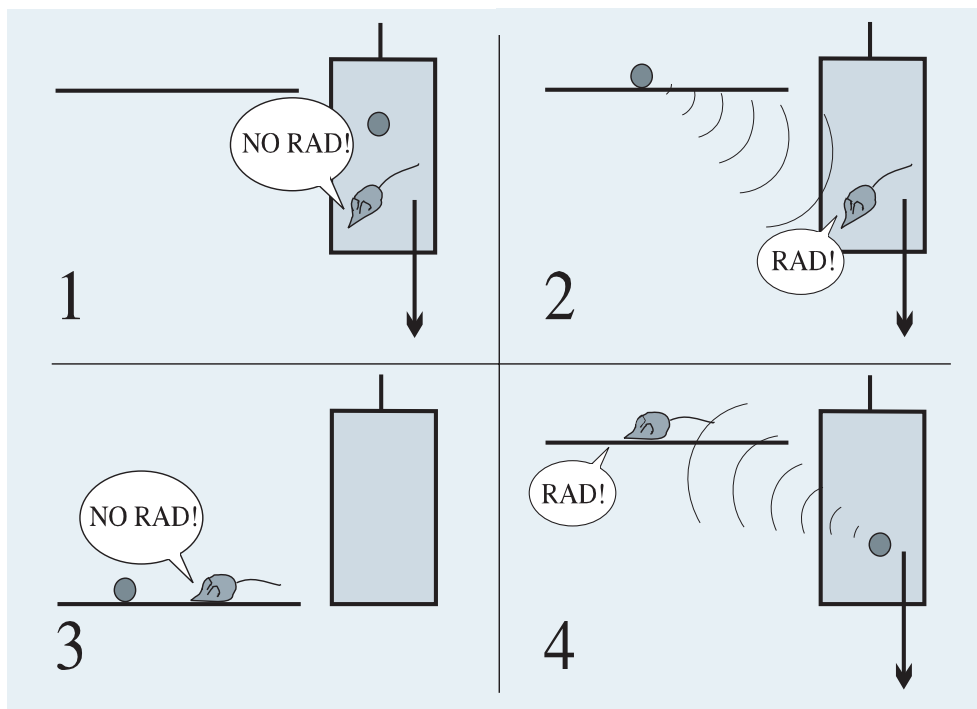


Figura 2.3: I quattro esperimenti di Axel e Beatrice

In relatività generale, infatti, l'accelerazione non è *relativa* se per questo si intende che il moto di A rispetto a B è identico (a parte la direzione) al moto di B rispetto ad A. Questo è dovuto al fatto che $d^2x^\mu/d\tau^2$ non è una *grandezza intrinseca* e ha senso soltanto rispetto a un sistema di riferimento dato.

2.3 Quattro esperimenti non troppo *gedanken*

Axel: penso che a questo punto la cosa migliore sia passare al buon vecchio metodo sperimentale. Abbiamo ben quattro prove da fare: te le ho schizzate qui in fig. 2.3. . .

Beatrice: cominciamo!

Axel: bene, allora prendi il Topo e la carica e sali sull'ascensore. Quando sei pronta premi il pulsante e vedi un po' se rilevi radiazione.

Beatrice: OK, capo!

2.3.1 Osservatore *free-falling*, carica *free-falling*

Prima di controllare il risultato del primo esperimento, è utile formulare con più precisione il *principio di equivalenza* di Einstein. In genere, se ne distinguono tre versioni⁵: il *principio di equivalenza debole* stabilisce l'*equivalenza locale*

⁵Vedi ad es. [Ciufolini e Wheeler 1995].

tra campi gravitazionali e sistemi di riferimento accelerati; questa non è che una riaffermazione dell'eguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, valida perfino in fisica newtoniana. Il *principio di equivalenza forte*, invece, richiede che *in ogni punto di un campo gravitazionale arbitrario sia possibile scegliere un “sistema di riferimento inerziale” in cui, per esperimenti svolti in un intorno spazio-temporale “abbastanza piccolo” del punto in questione, tutte le leggi della fisica assumano la forma speciale-relativistica che avrebbero in assenza della gravitazione*⁶.

Se assumiamo il principio di equivalenza forte, l'ascensore in caduta libera costituirà allora un *sistema di riferimento inerziale* in cui saranno valide le equazioni special-relativistiche di Maxwell. Rispetto all'ascensore, sia Beatrice che la carica sono in quiete; Beatrice gode pertanto dello status di osservatore inerziale e rispetto a lei il *rate* di radiazione della carica classica non accelerata è nullo.

Beatrice: ahi ahi! Che botta! Però mi sembra che il Topo non abbia misurato alcuna emissione elettromagnetica. Se non ho sbagliato a guardarlo: sai, non è facile mentre stai galleggiando nell'aria!

Axel: no, non hai sbagliato:

*nel primo esperimento (osservatore e carica entrambi free-falling)
l'osservatore non misura alcuna radiazione.*

2.3.2 Osservatore *free-falling*, carica *sostenuta*

Axel: ora lasciami qui la carica e rientra nell'ascensore con il Topo.

Beatrice: non dirmi che devo fare un altro volo! Ma perché sempre io?

Axel: per amore della scienza, e perché sei la più giovane. Su, vai!

La nostra analisi dei CGSO indica chiaramente che dal punto di vista di Beatrice e del Topo in caduta libera nell'ascensore Axel e la carica, che sono “sostenuti”, appaiono muoversi con un moto uniformemente accelerato alla Pauli. Il campo elettromagnetico di una carica su una tale traiettoria è stato calcolato da Born nel 1909 ed è dato⁷, in coordinate cilindriche ($r'^2 = x'^2 + y'^2$, $\phi' = \arctan y'/x'$), da

$$\begin{cases} E_{r'} &= \frac{8eg^{-2}r'z'}{\xi^3}, \\ E_{z'} &= \frac{-4eg^{-2}}{\xi^3}(g^{-2} + t'^2 + r'^2 - z'^2), \\ E_{\phi'} &= 0, \\ H_{r'} &= H_{z'} = 0, \\ H_{\phi'} &= \frac{8eg^{-2}rt}{\xi^3}, \end{cases} \quad (2.20)$$

⁶ Si distingue ulteriormente un principio *medio-forte* in cui a “tutte le leggi della fisica” si sostituisce “tutte le leggi non-gravitazionali della fisica”.

⁷Si veda ad es. [Fulton e Rohrlich 1960].

dove

$$\xi = \sqrt{(g^{-2} + t'^2 - r'^2 - z'^2)^2 + 4g^{-2}r'^2}. \quad (2.21)$$

L'assunzione di potenziali elettromagnetici *ritardati* implica che questo campo va ristretto⁸ soltanto alla regione $z' + t' > 0$ che si trova nel *futuro causale* della carica (cioè alle regioni I e III di fig. 1.9). Se si vuole che i campi così modificati soddisfino le equazioni di Maxwell è ulteriormente necessario aggiungere⁹ delle appropriate δ di Dirac sull'orizzonte ($z' + t' = 0$).

[Pauli 1921] nota che per $t' = 0$ la soluzione di Born prevede un campo magnetico nullo. In $t' = 0$, la 3-velocità della carica si annulla; il sistema inerziale “primato” coincide con il sistema inerziale istantaneo di quiete della carica, e la superficie spaziale $t' = 0$ coincide con la superficie $t = 0$ (eq. (2.19)). Ora, la simmetria del moto iperbolico implica che nel sistema inerziale istantaneamente in quiete con la carica *per un qualsiasi tempo* $t = \tilde{t}$, il campo magnetico deve annullarsi sulla superficie $t = \tilde{t}$ percepita come “simultanea” dalla carica. Pauli ne conclude che non può esservi alcuna radiazione.

Tuttavia, il valore di H_i sulla superficie $t' = 0$ (o su una delle altre superfici a “tempo della carica” costante) è determinato dai campi emessi da tutti gli eventi *precedenti* della traiettoria, e il fatto che il campo magnetico si annulli è indubbiamente una peculiarità del moto iperbolico, ma non ha niente a che vedere con la radiazione che la carica emette in $t' = 0$. Per valutare la radiazione non serve conoscere il campo elettromagnetico in un intorno *space-like* di un evento della traiettoria, ma bisogna valutarlo *sul cono di luce futuro basato in quell'evento*.

Il criterio generale che abbiamo sviluppato in sez. 2.1 resta pertanto valido e ci informa che la carica emette radiazione con un *rate* costante

$$\mathcal{R} = \frac{2}{3}e^2g^2. \quad (2.22)$$

Nel secondo esperimento (osservatore free-falling e carica “sostenuta” nel CGSO) l'osservatore vede la carica svolgere un moto uniformemente accelerato e misura un rate di radiazione costante dato dall'eq. (2.22).

2.3.3 Osservatore *sostenuto*, carica *sostenuta*

Axel: bene, ora restiamo tutti qui nel sistema di riferimento “sostenuto” e vediamo se la carica irradia.

Beatrice: certo che irradia! Non è quello che ho appena misurato? $\mathcal{R} = (2/3)e^2g^2$! Però ...mi sembrerebbe un po' strano che una carica ferma qui vicino a me emetta radiazione!

Axel: ti vedo dubbiosa! Facciamo la prova, e vediamo cosa succede!

⁸I campi (2.20) con questa restrizione sono noti come *soluzione di Schott*: nel calcolo originale, Born “dimentica” apparentemente di imporre la condizione di causalità.

⁹Se ne sono resi conto Bondi e Gold nel 1955.

Il sistema di riferimento degli osservatori “sostenuti” nel CGSO non è ovviamente un sistema di riferimento inerziale (per vederlo è sufficiente considerare la forma della trasformazione di coordinate (2.19)); la formulazione dell’elettromagnetismo in un CGSO dovrà pertanto passare attraverso le equazioni di Maxwell *general-covarianti*

$$\begin{aligned} g^{ab}\nabla_a\nabla_b A^c &= -4\pi j^c, \\ \nabla_a A^a &= 0; \end{aligned} \quad (2.23)$$

∇_a indica qui la *derivata covariante*, la cui espressione nelle coordinate del CGSO dipende in modo complicato dalla scelta di $u(z)$. Tuttavia, non c’è bisogno di risolvere le equazioni (2.23): possiamo ottenere il campo della carica “sostenuta” a partire dal campo (2.20) riferito al sistema dell’ascensore, utilizzando la trasformazione (2.19). Il risultato è [Rohrlich 1963]

$$\begin{cases} E_\phi &= 0, \\ E_r &= g(z'E_{r'} - t'H_{\phi'}), \\ E_z &= g^{-1}uu'E_{z'}, \\ H_\phi &= H_r = H_z = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Dato che il campo magnetico si annulla dappertutto¹⁰ in modo indipendente da u , una carica sostenuta in un CGSO non emette radiazione: $\mathcal{R} = 0$. Questo risultato è perfettamente consistente con la conclusione che la radiazione non è nulla nel sistema di riferimento inerziale dell’ascensore, perché il criterio di sez. 2.1 è *invariante per trasformazioni di Lorentz, ma non per la trasformazione (2.19)*¹¹.

Le eq. (2.24) descrivono un campo di Coulomb distorto in modo dipendente dalla scelta di $u(z)$: se con R indichiamo la componente radiale “tridimensionale” ($R^2 = r^2 + z^2$),

$$E_R = \frac{e}{r^2 + [1 - (gr)^2 - u^2(z)]^2/4g^2}, \quad (2.26)$$

¹⁰A differenza dell’argomento di Pauli per l’esperimento n. 2, qui il campo magnetico si annulla identicamente in tutti i punti dello *stesso* sistema di riferimento inerziale.

¹¹Una certa confusione è ingenerata dal fatto che le equazioni di Maxwell (e quindi anche il nostro criterio per l’emissione di radiazione) sono invarianti per il gruppo a 15 parametri delle *trasformazioni conformi*, che comprende, oltre al gruppo di Poincaré, la *dilatazione* $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ e la “*trasformazione di accelerazione*”

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - a^\mu x^\alpha x_\alpha}{1 - 2a^\alpha x_\alpha + a^\alpha a_\alpha x^\beta x_\beta}. \quad (2.25)$$

Il gruppo conforme è il più largo gruppo di trasformazioni che porta moti uniformemente accelerati (caratterizzati dall’eq. (1.93)) in altri moti uniformemente accelerati, ma *non contiene* la trasformazione (2.19) tra un sistema inerziale e un CGSO. Le trasformazioni conformi non comprese nel gruppo di Poincaré, infatti, trasformano la metrica di Lorentz in una metrica *non statica*.

È pertanto sbagliato concludere che l’invarianza delle equazioni di Maxwell per trasformazioni conformi implica che una carica “sostenuta” in un CGSO debba necessariamente irradiare.

che si riduce all'usuale espressione e/R^2 per l'elemento di linea di Kottler-Whittaker ($u^2 = 1 + 2gz$). La correzione per u diversi è dell'ordine di gz/c^2 ed è troppo piccola per essere osservabile per le accelerazioni gravitazionali che si incontrano di solito.

Nel terzo esperimento (osservatore e carica entrambi “sostenuti”) l'osservatore non misura alcuna radiazione: la carica dà origine a un campo elettrico di Coulomb distorto.

2.3.4 Osservatore *sostenuto*, carica *free-falling*

Axel: ecco l'ultimo esperimento, quello che inizialmente ti aveva turbato.

Beatrice: eh, sì! Vediamo se riesco a predirne l'esito. Nel sistema di riferimento in caduta libera dell'ascensore la carica è a riposo e quindi non emette radiazione. . .

Axel: sì: è il risultato del primo dei nostri esperimenti.

Beatrice: d'altronde, dato che ci troviamo in un sistema di riferimento non inerziale, per noi il *rate* \mathcal{R} calcolato nell'ascensore non è significativo. Beh, possiamo sempre scegliere un $u(z)$, risolvere l'eq. (2.16) per la traiettoria della carica in caduta libera e infine utilizzare le eq. (2.23) per calcolare il campo dal nostro punto di vista.

Axel: Troppo difficile! Visto che conosciamo il campo di una carica ferma in un sistema inerziale (è puro Coulomb), possiamo utilizzare ancora la trasformazione (2.19) per ottenere il campo nel sistema “sostenuto”.

Beatrice: facciamolo!

Axel: c'è chi l'ha fatto¹²: imponendo esplicitamente la condizione di causalità, si trova che dal punto di vista del nostro sistema di riferimento c'è effettivamente radiazione.

Nel quarto esperimento (osservatore “sostenuto” e carica free-falling) l'osservatore osserva la carica svolgere un moto accelerato (in generale non uniformemente), e misura l'emissione di una radiazione la cui forma dipende dalla scelta della metrica CGSO.

2.4 La questione dell'energia

Beatrice: torniamo ai miei dubbi sul principio di equivalenza. Quello che mi preoccupava era che l'emissione di energia facesse rallentare la carica in caduta libera, cosicché il suo moto sarebbe stato diverso da quello di una *test-particle* neutra.

Axel: bene, mi sembra che il risultato di quest'ultimo esperimento dimostri con chiarezza che *assumere il principio di equivalenza forte per le particelle cariche non porta a nessuna contraddizione*. Se ci pensi, il sistema di riferimento appropriato per fare considerazioni sull'energia

¹²Si vedano [Rosen 1962] e [Rohrlich 1963, nota 11].

è quello inerziale (è lì che si scrivono le equazioni, come quella di Lorentz-Dirac, che legano la dinamica della carica all'emissione di una radiazione elettromagnetica). Nel loro sistema inerziale, le particelle in caduta libera sono in quiete: non c'è radiazione, e dunque nessuna perdita di energia.

Beatrice: sì! Però allora non capisco da dove viene l'energia misurata dall'osservatore “sostenuto”!

Axel: questa è una domanda interessante! Prima di risponderti, ti propongo un problema più semplice (così vediamo se hai studiato bene): da dove viene l'energia misurata dall'osservatore *inerziale* nel secondo esperimento?

2.4.1 La domanda di Axel: il bilancio dell'energia nel secondo esperimento

Poniamoci nel sistema inerziale dell'ascensore, e consideriamo il bilancio di energia di una carica classica *costretta a compiere* un moto uniformemente accelerato dalla “forza” esercitata verso l'alto dal pavimento del salotto di Axel. Abbiamo bisogno di un'equazione del moto per la carica: in questo lavoro accetteremo senza discuterla *l'equazione di Lorentz-Dirac*¹³,

$$ma^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + eF_{\text{in}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{2}{3}e^2(\dot{a}^\mu - a^\alpha a_\alpha u^\mu), \quad (2.27)$$

dove a^μ e \dot{a}^μ sono la prima e la seconda derivata della 4-velocità u^μ della carica rispetto al suo tempo proprio; F_{ext}^μ è un campo di forza esterno di natura non elettromagnetica, e $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$ è il campo elettromagnetico entrante, cioè non dovuto alla carica (lo porremo a 0).

Il termine rimanente, detto *vettore di Abraham* Γ^μ , è composto da una parte,

$$-(2/3)e^2(a^\alpha a_\alpha)u^\mu \equiv -\mathcal{R}u^\mu, \quad (2.28)$$

che si può interpretare come la perdita di energia cinetica della carica dovuta all'emissione di radiazione (*reazione di radiazione*); e dal *termine di Schott* $(2/3)e^2\dot{a}^\mu$ che ha un significato fisico più oscuro ed è responsabile del fenomeno della *pre-accelerazione* (ovvero della non località dell'eq. (2.27)).

Il moto iperbolico è molto particolare perché ha un vettore di Abraham sempre nullo¹⁴: apparentemente, pertanto, *la forza F_{ext}^μ viene convertita interamente in energia cinetica*. Ma allora da dove proviene l'energia irradiata?

Questo paradosso si può risolvere soltanto ragionando sulla circostanza che il moto iperbolico alla Pauli descrive la situazione poco “fisica” di una carica che *provviene* da $z' \rightarrow -\infty$ e *tende* a $z' \rightarrow +\infty$ alla velocità limite della luce: questi limiti sono inconsistenti con le condizioni che si assumono solitamente quando

¹³La teoria classica delle particelle cariche è un argomento difficile e pieno di sottigliezze: in particolare il concetto di “particella puntiforme” porta a inconsistenze risolvibili soltanto con assunzioni *ad hoc* o con un trattamento semi-fenomenologico. Si veda [Rohrlich 1965] per una parziale discussione.

¹⁴Ce ne si può convincere considerando le eq. (1.61) per $c_2 = 0$: $\dot{\mathbf{a}}$ è parallelo a \mathbf{u} , con un coefficiente di proporzionalità dato da c_1^2 , ovvero dal modulo quadro dell'accelerazione.

si deriva l'equazione di Lorentz-Dirac a partire dalle equazioni di Maxwell e da considerazioni di conservazione dell'energia¹⁵.

Consideriamo allora un moto iperbolico “fisico” composto da *due tratti di moto uniforme congiunti* (in modo sufficientemente liscio) *da un tratto di moto uniformemente accelerato*¹⁶. La reazione di radiazione agisce durante i periodi iniziale e finale di accelerazione *non uniforme* in modo da assicurare che *il lavoro totale compiuto dalla “causa” che accelera la carica sia uguale alla somma dell'energia cinetica guadagnata dalla carica e dell'energia elettromagnetica irradiata all'infinito*.

Beatrice: se non ho sbagliato qualcosa, quindi, l'energia che ho misurato nel secondo esperimento proviene dal pavimento del tuo soggiorno, che l'ha fornita... nell'istante in cui ci ho appoggiato (ma mi è più semplice pensare “lasciato cadere”) la carica!

Axel: sì! In effetti, però, la mia casa è un sistema fisico un po' troppo complicato per ragionare bene su queste cose. Immaginati invece di essere nello spazio (con la tua tuta), in caduta libera attraverso un CGSO. Di fianco ci sono io, e tengo in mano la carica. Ad un certo momento accendo i miei retrorazzi, che “sostengono” me e la carica nel campo gravitazionale. Da quell'istante inizia l'emissione radiativa.

Beatrice: ma come può il tuo retrorazzo fornire *tutta* l'energia che la carica emetterà *solo in seguito*? Come può insomma *sapere esattamente* quanto durerà il moto accelerato?

Proviamo a investigare questa difficoltà integrando il quadrimomento totale fornito dalla forza esterna F_{ext}^μ per il nostro moto iperbolico “fisico”. Poniamo che il moto uniformemente accelerato avvenga tra i tempi propri τ_1 e τ_2 . Supponiamo poi con [Tagliavini 1991] che la transizione dal moto uniforme al moto uniformemente accelerato avvenga durante i brevi intervalli $(\tau_1 - \delta\tau_1, \tau_1)$, $(\tau_2, \tau_2 + \delta\tau_2)$. È chiaro che \dot{a}^μ (e con lei il termine di Schott del vettore di Abraham) diventa arbitrariamente grande per $\delta\tau_1$ e $\delta\tau_2$ sufficientemente piccoli. Allora,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1 - \delta\tau_1}^{\tau_2 + \delta\tau_2} F_{\text{ext}}^\mu d\tau &= \int_{\tau_1 - \delta\tau_1}^{\tau_2 + \delta\tau_2} \left[ma^\mu - \frac{2}{3}e^2(\dot{a}^\mu - a^\alpha a_\alpha u^\mu) \right] d\tau \cong \\ &\cong m(u^\mu(\tau_2) - u^\mu(\tau_1)) - \int_{\tau_1 - \delta\tau_1}^{\tau_1} \frac{2}{3}e^2 \dot{a}^\mu d\tau - \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \delta\tau_2} \frac{2}{3}e^2 \dot{a}^\mu d\tau = \quad (2.29) \\ &= m(u^\mu(\tau_2) - u^\mu(\tau_1)) + \frac{2}{3}e^2(a^\mu(\tau_2) - a^\mu(\tau_1)), \end{aligned}$$

¹⁵Vedi [Rohrlich 1965].

¹⁶È interessante notare che la δ di Dirac necessaria alla soluzione di Schott per soddisfare le equazioni di Maxwell anche sull'orizzonte $z + t = 0$ può essere ottenuta considerando il limite di questo moto iperbolico “fisico” per tratti di moto uniforme che recedono verso l'infinito con velocità sempre più vicine a c . In questo limite il campo di Coulomb del moto uniforme “entrante” viene “compressso” sulla superficie $z + t = 0$: per velocità tendenti a c , i *boosts* di Lorentz tendono infatti a una trasformazione singolare che mappa lo spazio-tempo di Minkowski *sul cono di luce nell'origine*.

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il vettore di Abraham si annulla nel tratto uniformemente accelerato, e abbiamo considerato soltanto il termine (dominante) di Schott negli intervalli di accelerazione non costante. Ora, il quadrimomento totale emesso come radiazione elettromagnetica nel tratto uniformemente accelerato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} -\mathcal{R}u^\mu d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{2}{3}e^2(a^\alpha a_\alpha)u^\mu d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu d\tau = \frac{2}{3}e^2(a^\mu(\tau_2) - a^\mu(\tau_1)) : \end{aligned} \quad (2.30)$$

pertanto *durante gli intervalli iniziale e finale di accelerazione non uniforme, la forza esterna fornisce esattamente il lavoro necessario per la variazione dell'energia cinetica della carica e per tutta la radiazione elettromagnetica emessa durante il moto uniformemente accelerato.* Questa circostanza può apparire sospetta: come può un lavoro concentrato *all'inizio e alla fine* del moto iperbolico bilanciare un'emissione costante avvenuta *durante tutto l'intervallo di accelerazione uniforme*?

La risposta ci viene dalla considerazione che la quadricorrente associata al trasporto di energia elettromagnetica è sempre conservata. Il flusso costante di energia attraverso le superfici *time-like* $\Delta\sigma$ sulle quali si integra \mathcal{R} deve perciò avvenire *a spese dell'energia* del campo elettromagnetico nella regione vicina alla carica, che si comporta effettivamente come un *reservoir* infinito¹⁷ (lo chiameremo Θ). Cedendo energia, Θ si allontana progressivamente dalla forma di campo puro di velocità che avrebbe intorno a una carica in moto uniforme; quando il moto iperbolico cessa, la forza esterna dovrà fornire (in modo pressoché impulsivo) tutta l'energia necessaria per ripristinare la struttura originaria di Θ .

2.4.2 La domanda di Beatrice: il bilancio dell'energia nel quarto esperimento

Esaminiamo ora l'esperimento in cui il *detector* è “sostenuto” nel CGSO, mentre la carica cade liberamente nell'ascensore. È chiaro che la radiazione misurata dal Topo non può essere emessa a spese dell'energia cinetica della carica, che si muove di moto uniforme in un sistema inerziale. *L'energia deve invece provenire ancora una volta dalla “causa fisica” che “sostiene” il Topo nel CGSO:* oltre alla forza necessaria per mantenere il Topo su una traiettoria non geodetica, questa dovrà agire per compensare la “spinta” dovuta al momento trasportato dal campo elettromagnetico.

Vorremmo che il lettore notasse la somiglianza tra il quarto esperimento e l'effetto Unruh presentato nel cap. 1: in entrambi i casi consideriamo un sistema inerziale caratterizzato da uno stato apparentemente “non dinamico”: lo stato di vuoto del campo quantistico, oppure un campo puramente elettrostatico di Coulomb. Istintivamente, siamo portati a concludere *che non ci sono “particelle” quantistiche né “radiazione” elettromagnetica.*

¹⁷Come per il campo di Coulomb, l'energia del campo diverge avvicinandosi alla sorgente puntiforme.

Tuttavia, gli appropriati *detectors* in moto uniformemente accelerato rilevano un bagno termico di “particelle” quantistiche nello stato di vuoto del campo, e una radiazione elettromagnetica classica non nulla “emessa” da una carica che rimane comunque inerziale. Non c’è nessuna contraddizione: *le diverse osservazioni riflettono definizioni diverse dei concetti di “particella” e “radiazione”*, invarianti per trasformazioni di Poincaré, ma *non* per la trasformazione che porta da un sistema inerziale nel sistema di coordinate naturale di un osservatore accelerato.

2.4.3 Il principio di equivalenza per le particelle cariche

Beatrice: bene, sono soddisfatta. I nostri risultati non danno adito a dubbi: le particelle cariche rispettano il principio di equivalenza forte!

Axel: un attimo, chi ha detto questo?

Beatrice: beh, un po’ tutta la discussione di questo capitolo...

Axel: ... che era incentrata sul caso di campi gravitazionali statici e omogenei, e soprattutto *piatti*. In assenza di curvatura (cioè per i cosiddetti *campi gravitazionali apparenti*) la struttura dello spazio-tempo è ancora sostanzialmente quella special-relativistica, ed è sufficiente porsi nei sistemi inerziali di caduta libera per ritrovare i risultati familiari (se uno si ostina comunque a descrivere le cose dal punto di vista non inerziale, trova dei risultati che possono sembrargli strani, ma che sono comunque giusti). Se tuttavia lo spazio-tempo fosse curvo, avremmo dei problemi a estendere l’equazione di Lorentz-Dirac!

[DeWitt e Brehme 1960] e [Rohrlich 1965] cercano di ricavare un’equazione general-relativistica per il moto di una particella carica classica in uno spazio-tempo curvo, generalizzando l’azione elettromagnetica e procedendo in modo covariante. Ottengono così un’equazione analoga a quella di Lorentz-Dirac,

$$ma^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + F_{\text{in}}^\mu + \Gamma^\mu + \phi^\mu, \quad (2.31)$$

dove però a^μ è la derivata *covariante* della quadrivelocità,

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (2.32)$$

e il termine aggiuntivo ϕ^μ può essere visto come una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo. ϕ^μ è legato in modo complicato al tensore di Riemann, ma soprattutto dipende dall’intera traiettoria della particella e introduce un elemento non-locale nell’equazione.

Fisicamente, si può pensare che i “*bumps*” dello spazio curvo provochino una certa “diffusione” del campo elettromagnetico della carica; la *reazione di radiazione* viene allora a dipendere dal cammino che la carica intraprende tra i “*bumps*”. La natura curva dello spazio-tempo non si manifesta perciò attraverso un accoppiamento esplicito con il campo gravitazionale, ma solo per mezzo di una reazione di radiazione “*enhanced*”. Questo d’altronde è consistente con il carattere “geometrodinamico” di tutta la relatività generale.

Ora, per particelle cariche l'eq. (2.31) non è soddisfatta dalla geodetica $a^\mu = 0$, nemmeno se $F_{\text{in}}^{\mu\nu} = 0$. Quindi una particella carica *non seguirà la stessa traiettoria di una particella neutra in un campo gravitazionale reale*.

Beatrice: oh, che peccato! Vuol dire che Einstein ha sbagliato!

Axel: come per tante altre domande importanti della fisica, la risposta giusta è “chi lo sa?”. È corretto estrapolare l'equazione di Dirac-Lorentz agli spazio-tempo curvi? Che dire del fatto che in questo modo non si permette all'energia elettromagnetica generata dalla carica di agire come sorgente della curvatura dello spazio-tempo? (in termini tecnici, si sopprime la *back-reaction*).

Beatrice: forse una teoria unificata che tenga conto anche di *quello* potrebbe mettere a posto le cose... Però c'è qualcosa che non capisco: chi ha detto che l'affermazione *globale* “tutte le *test-particles*, cariche o meno, seguono curve geodetiche” sia esattamente equiparabile alla formulazione del principio di equivalenza che abbiamo dato in sez. 2.3.1, che parla invece di “intorni spazio-temporali *abbastanza piccoli*” (rispetto alla curvatura)?

Axel: in parte, hai ragione. Il modo in cui si pone usualmente la questione è un po' fuorviante: tuttavia, tieni conto che il termine ϕ^μ ha una natura *non-locale* dipendente da tutta la *world-line* della particella; se anche si potesse eliminarlo con una trasformazione di coordinate locali, recuperando così l'equazione di Lorentz-Dirac special-relativistica, ci troveremmo nella situazione infelice di dover considerare sistemi inerziali di caduta libera diversi per particelle cariche e neutre che si trovano nello stesso punto dello spazio-tempo!

Beatrice: oh, insomma! Qual è la soluzione?

Axel: la soluzione è accontentarsi di rilevare che *la descrizione di Lorentz-Dirac delle particelle classiche cariche è apparentemente incompatibile con la teoria della relatività generale* (che *esige* il principio di equivalenza forte). Può darsi che una maggiore armonia si possa trovare con una descrizione di livello più profondo, magari quantizzando il campo elettromagnetico e i campi di materia, e forse anche la geometria dello spazio-tempo!

Beatrice: oomph! Abbiamo iniziato questo capitolo ponendoci *una* domanda. Eccoci alla fine: a *quella* domanda abbiamo risposto, ma quante altre ne abbiamo trovate!

Axel: *questa* è la fisica, Bea!

Capitolo 3

Teoria quantistica dei campi in uno spazio-tempo curvo

Di fronte al successo delle due grandi teorie sviluppate in questo secolo, la teoria quantistica dei campi e la teoria della relatività generale, è immediato porsi il problema di formulare una teoria unificata, quantizzando *insieme* il campo gravitazionale (cioè la metrica) e i *campi di materia* che compaiono, attraverso il tensore di energia-impulso T_{ab} , nel termine di destra delle equazioni di Einstein,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (3.1)$$

Questo è indubbiamente un obiettivo molto difficile, perché la teoria quantistica special-relativistica dei campi è fortemente basata sulla presenza della struttura metrica e causale di Minkowski come oggetto *assoluto*, dato *a priori*; in una teoria quantistica unificata, invece, la metrica diventerebbe un operatore quantistico quasi alla pari con i campi di materia, e la struttura metrica dello spazio-tempo sarebbe disponibile soltanto *a posteriori* come valore di aspettazione su uno stato.

Come primo passo meno ambizioso si può formulare la *teoria quantistica dei campi in uno spazio-tempo curvo*, costruita a partire da un'azione classica definita su una varietà metrica *di background* data *a priori*¹, che governa la dinamica e causalità dei campi quantistici senza che questi possano influenzarla a loro volta. Questo è un tradimento esplicito dello spirito della relatività generale, secondo la quale i campi di materia si muovono sullo sfondo del campo metrico e ne sono contemporaneamente la sorgente.

La curvatura dello spazio-tempo dovuta alla presenza di materia (detta *back-reaction* della materia sulla metrica) è permessa in modo limitato nella teoria *semiclassica*, in cui la metrica resta un campo classico e come sorgente nell'equazione di Einstein si prende il *valore di aspettazione* del operatore di energia-impulso dei campi quantistici di materia:

$$G_{ab} = 8\pi \langle \hat{T}_{ab} \rangle; \quad (3.2)$$

¹In generale si richiede che la metrica di background sia una soluzione dell'equazione di Einstein, ma molti dei risultati che presenteremo sono indipendenti da questa assunzione.



Figura 3.1: La nostra eroina, impegnata nello studio della teoria dei campi

ci si aspetta che la teoria semiclassica sia valida quando la dispersione relativa $\Delta T_{ab}/\langle \hat{T}_{ab} \rangle$ del tensore energia-impulso associato con il campo quantistico è trascurabile, e le curvature sono piccole rispetto alla scala di Planck; $\langle \hat{T}_{ab} \rangle$ si comporta allora approssimativamente come una sorgente classica.

In questo capitolo ci proponiamo di studiare la teoria dei campi in spazio-tempo di *background* curvi, nella sintesi che [Wald 1994] dà di un intenso lavoro teorico in cui sono stati impegnati molti fisici a partire dai primi anni '70. In sez. 3.1 riesamineremo brevemente le teorie di campo special-relativistiche per evidenziare quali aspetti nella loro formulazione siano da considerarsi essenziali in vista di una generalizzazione agli spazio-tempo curvi e quali invece dipendano dalla particolare simmetria dello spazio-tempo di Minkowski. In sez. 3.2 e 3.3 definiremo la teoria quantistica dei campi in uno spazio-tempo curvo, evidenziando in particolare come i problemi legati alla definizione delle “particelle”, che già ci disturbavano nel quadro della relatività speciale, ricompaiano con rinnovato vigore.

La teoria dei campi in uno spazio-tempo curvo soffre però di un problema più grave: in breve, la realizzazione delle relazioni di commutazione canoniche su uno spazio di Hilbert non definisce un'unica teoria, ma *infinite teorie unitariamente inequivalenti*, senza che sussista alcun motivo fisico per preferirne una rispetto alle altre. La risoluzione di questo problema (essenzialmente basato sulla considerazione di *tutte* queste teorie insieme) è l'obiettivo dell'*algebraic approach* di Haag e Kastler, presentato in sez. 3.3.6.

Un prodotto estremamente utile di questa discussione è un'espressione formale per gli elementi delle “matrici S ” costruita tra due diverse rappresentazioni unitarie di una teoria dei campi, che generalizza, ad esempio, la trasformazione di Bogoliubov tra la base di “particelle” di Beatrice e quella di Axel (sez. 1.2.3). Questo ci permetterà in sez. 3.4 di definire un *effetto Unruh negli spazio-tempo curvi*, preparando così la strada allo studio dell'effetto Hawking, oggetto (tra le altre cose) del cap. 4.

Possiamo cominciare. Purtroppo, in questo capitolo e in particolare nella sez. 3.1, l'esposizione diventerà molto astratta e piuttosto noiosa. Beatrice ha trovato in soffitta un pesante tomo pieno di formule e di polvere: presumibilmente, un residuo degli studi di Axel (fig. 3.1); l'argomento, però, sembra

pertinente ai suoi esperimenti con i Topi... Iniziamo dunque a leggere!

3.1 Fisica polverosa: “*Della teoria quantistica dei campi nello spazio-tempo di Minkowski*”

Dove ci si giustifica con il lettore per la scelta di quantizzare canonicamente.

Precisiamo innanzitutto che per “teoria quantistica dei campi” intendiamo una teoria ottenuta dalla *quantizzazione canonica* di una teoria di campo classica. Entrambi i termini, “quantizzazione” e “canonica”, meritano un commento.

Perché *quantizzare una teoria classica*? Bene, è vero che è possibile definire una teoria quantistica *ex novo*, senza quantizzazione, ma la teoria dei campi special-relativistica è assurda ai fasti del modello standard basandosi largamente sul *principio di corrispondenza*; appare allora ragionevole mantenere questa impostazione anche nell’estenderla ai backgrounds curvi.

Perché, però, quantizzare *canonicamente*? Perché questo è il metodo di quantizzazione più semplice, e quello con cui gli autori sono più familiari! Inoltre, mentre può essere necessario ricorrere alla quantizzazione funzionale per trattare i campi *interagenti* negli spazio-tempo curvi, per i campi *liberi* la quantizzazione canonica sembra offrire più *insight*, anche se rende necessario considerare separatamente il problema della covarianza della teoria.

Seguiamo dunque la procedura di quantizzazione canonica di un generico campo classico *lineare* (ovvero la cui hamiltoniana ha termini al più quadratici nelle variabili di campo e nei momenti coniugati; l’equazione d’onda risulta essere lineare e il campo viene detto *libero*). Assumiamo inoltre (senza perdita di generalità) che il campo sia scalare e che segua la statistica di Bose-Einstein².

3.1.1 Formulazione hamiltoniana delle teorie di campo classiche

Dove si parla al lettore di variabili coniugate, di equazioni di Hamilton e della possibilità di dare nello spazio delle fasi una formulazione geometrica del problema del moto grazie agli uffici della 2-forma simplettica.

Consideriamo la teoria classica nella formulazione hamiltoniana: scelto un particolare tempo coordinato t , lo *spazio delle configurazioni* \mathcal{G} è lo spazio delle funzioni $\phi_0(x^i)$ lisce e a supporto compatto su una ipersuperficie spaziale $t = t_0$ dello spazio di Minkowski; \mathcal{G} è dotato in modo naturale della struttura di spazio lineare infinito-dimensionale.

Una *storia* $\phi(x^i, t)$ è una funzione da \mathbb{R} in \mathcal{G} che descrive l’evoluzione temporale del campo; le *soluzioni* del sistema sono le storie che rendono stazionaria

²Il carattere scalare del campo implica solo la soppressione di alcuni indici che potremo eventualmente rimettere a posto alle fine; per quanto riguarda i sistemi fermionici, si dovranno affrontare le solite questioni di segno e (anti-) commutazione. Per i campi di gauge, infine... è davvero necessario un po’ di lavoro aggiuntivo non banale.

l'azione

$$S = \int d^3x dt \mathcal{L}[\phi(x^i, t), \dot{\phi}(x^i, t)], \quad (3.3)$$

dove \mathcal{L} è la *densità di lagrangiana*. Le soluzioni sono date dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0. \quad (3.4)$$

Si definisce ora il *momento coniugato* $\pi(x^i, t) = \delta \mathcal{L} / \delta \dot{\phi}(x^i, t)$; dato che esprime una sorta di “differenziale infinito dimensionale” di \mathcal{L} , per ogni configurazione $\phi_0(x^i)$ del campo il momento $\pi_0(x^i)$ sta nello spazio cotangente a \mathcal{G} in $\phi_0(x^i)$, $T^*\mathcal{G}_{\phi_0}$.

La *trasformata di Legendre* di \mathcal{L} , $\mathcal{H}[\phi, \pi] = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}[\phi, \dot{\phi}]$ viene a dipendere soltanto da ϕ e da π , ed è detta *densità di hamiltoniana*. Lo stesso principio variazionale $\delta S = 0$ che abbiamo utilizzato per derivare l'equazione di Eulero-Lagrange dà origine se scritto nei termini di \mathcal{H} alle *equazioni di Hamilton*:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}, \\ \dot{\pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Una volta scelte le *condizioni iniziali* (cioè i *dati del campo* $(\phi_0(x^i), \pi_0(x^i))$, che indicheremo sinteticamente con $\Phi_0(x^i)$) a un tempo t_0 , le equazioni di Hamilton determinano unicamente il comportamento della soluzione $\Phi(x^i, t) \equiv (\phi(x^i, t), \pi(x^i, t))$ che corrisponde a quei dati iniziali (ovvero tale che $\Phi(x^i, t_0) = \Phi_0(x^i)$).

Visto che $\phi_0(x^i)$ e $\pi_0(x^i)$ determinano un punto del *cotangent bundle* $\Gamma \equiv T^*\mathcal{G}$ (detto *spazio delle fasi*), il problema del moto del sistema è equivalente alla ricerca della traiettoria nello spazio delle fasi del punto che all'istante t_0 si trova in Φ_0 e la cui velocità è data a ogni istante dalle eq. (3.5). Le equazioni di Hamilton si possono scrivere in modo più sintetico (e geometrico!) per Φ se si definisce la *2-forma simplettica*

$$\begin{aligned} \Omega_{ab} &: T^*\Gamma \times T^*\Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega^{a_\phi b_\phi} &= \Omega^{a_\pi b_\pi} = 0, \\ \Omega^{a_\phi a_\pi} &= 1, \\ \Omega^{a_\pi a_\phi} &= -1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove gli indici latini a, b descrivono una base dello spazio delle fasi Γ , e sono dati dagli indici a_ϕ, b_ϕ relativi allo spazio delle configurazioni \mathcal{G} , insieme agli indici a_π, b_π associati alle coordinate “canoniche” degli spazi cotangenti³. Si noti che non abbiamo definito le componenti di Ω_{ab} , ma della sua *inversa* Ω^{ab} tale che $\Omega^{ab}\Omega_{ab} = 1$. In modo forse più familiare, si può scrivere

$$\Omega = \sum_{a_\phi, a_\pi} d\Phi_{a_\pi} \wedge d\Phi_{a_\phi}. \quad (3.7)$$

³Attenzione! Quando scriviamo, ad esempio, $\Omega^{a_\phi a_\pi}$ intendiamo l'elemento corrispondente a un grado di libertà di ϕ e al *corrispondente* grado di libertà di π , ovvero la derivata funzionale di \mathcal{L} rispetto alla variazione di ϕ nella “direzione” a_ϕ .

Le traiettorie in Γ corrispondenti al moto del sistema sono ora date dalle curve integrali di

$$\dot{\Phi}^a = \Omega^{ab} \partial_b \mathcal{H}. \quad (3.8)$$

Questa equazione riassume le (3.5), ma in più permette di ottenere il moto del sistema dinamico nello spazio delle fasi in modo puramente geometrico, senza nessuna distinzione tra il ruolo di ϕ e π , definendo Ω semplicemente come una qualsiasi 2-forma non degenera e chiusa. La libertà che allora si ha nel coordinatizzare Γ corrisponde alla possibilità di effettuare *trasformazioni canoniche* sulle variabili ϕ e π .

3.1.2 Teorie di campo lineari

Dove ci si abitua ai lussi della linearità, ovvero all'isomorfismo tra soluzioni e condizioni iniziali, e all'esistenza di una grandezza conservata tra coppie di soluzioni, che appelliamo prodotto simplettico.

Le ipotesi che di solito si associano con i *sistemi dinamici lineari* sono due: che lo spazio delle configurazioni \mathcal{G} sia uno spazio vettoriale e che l'hamiltoniana sia una funzione al più quadratica delle variabili dinamiche. Per i campi, la definizione di \mathcal{G} come uno spazio di funzioni sullo spazio di Minkowski verifica automaticamente la prima ipotesi; ne segue che in ogni punto di Γ sarà possibile identificare lo spazio cotangente $T^*\Gamma_\Phi$ con lo stesso Γ , e dunque per ogni coppia di punti di Γ la 2-forma simplettica definisce una *struttura simplettica*⁴

$$\Omega_{ab} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

La seconda ipotesi, come abbiamo detto, è che \mathcal{H} sia una funzione al più quadratica dei dati del campo Φ . Ne segue che le equazioni di Hamilton sono lineari: ciò significa che la combinazione lineare di due soluzioni è ancora soluzione, ma anche che la soluzione corrispondente ai dati iniziali $\Phi_1(x^i) + \Phi_2(x^i)$ è proprio $\Phi_1(x^i, t) + \Phi_2(x^i, t)$. *Lo spazio \mathcal{S} delle soluzioni è dunque uno spazio lineare isomorfo allo spazio delle condizioni iniziali Γ !*

La *struttura simplettica* si presta allora a essere definita anche sul prodotto di spazi lineari $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$: dimostreremo ora che questa estensione non dipende dal tempo t_0 in cui si identificano \mathcal{S} e Γ , ovvero in cui i punti di Γ vengono presi come dati iniziali delle soluzioni di \mathcal{S} . Equivalentemente, vedremo che il *prodotto simplettico di soluzioni*

$$\Omega(\Phi_1(x^i, t), \Phi_2(x^i, t)) = \Omega_{ab}(\Phi_1(x^i, t))^a (\Phi_2(x^i, t))^b, \quad (3.10)$$

non dipende dal tempo (con un abuso di notazione, per $(\Phi_i(x^i, t))^a$ intendiamo l'elemento di Γ corrispondente alla soluzione $\Phi_i(x^i, t)$ al tempo t).

Senza perdita di generalità possiamo riassorbire in una ridefinizione di Φ i termini di grado inferiore al secondo:

$$\mathcal{H}[\Phi] = \frac{1}{2} K_{ab} \Phi^a \Phi^b; \quad (3.11)$$

⁴Si noti che la *forma simplettica* è una funzione definita da $T^*\Gamma \times T^*\Gamma$ in \mathbb{R} , cioè agisce contemporaneamente sugli spazi cotangenti di tutti i punti di Γ , mentre la *struttura simplettica* corrisponde all'azione in un solo punto $T^*\Gamma_\Phi \times T^*\Gamma_\Phi \cong \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.

visto che la parte antisimmetrica si cancella comunque, K_{ab} si può considerare simmetrico. Scriviamo ora esplicitamente la derivata di $\Omega(\Phi_1(t), \Phi_2(t))$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Omega(\Phi_1(t), \Phi_2(t)) &= \frac{d}{dt}\Omega_{ab}\Phi_1^a\Phi_2^b = \\
&= \Omega_{ab}(\dot{\Phi}_1^a\Phi_2^b + \Phi_1^a\dot{\Phi}_2^b) = \\
&= \Omega_{ab}\left[(\Omega^{ac}K_{cd}\Phi_1^d)\Phi_2^b + \Phi_1^a(\Omega^{be}K_{ef}\Phi_2^f)\right] = \\
&= -K_{bd}\Phi_1^d\Phi_2^b + K_{af}\Phi_1^a\Phi_2^f = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dove tra la seconda e la terza riga si sono utilizzate l'eq. del moto (3.8) e la definizione dell'hamiltoniana quadratica (3.11), e per ottenere il risultato finale si sono sfruttate la definizione di forma simplettica inversa e la sua antisimmetria.

Ripristinando la distinzione tra ϕ e π , si può ottenere un'espressione più familiare per il prodotto simplettico di soluzioni:

$$\Omega((\phi_1, \pi_1), (\phi_2, \pi_2)) = \int_{t=\text{cost}} d^3x^i [\pi_1(x^i, t)\phi_2(x^i, t) - \pi_2(x^i, t)\phi_1(x^i, t)]. \tag{3.13}$$

3.1.3 Alla ricerca delle relazioni di commutazione

Dove si è introdotti alle algebre di osservabili classiche, e alla loro imitazione quantistica (trovar la quale vuol dire quantizzare!)

Le meraviglie della 2-forma simplettica non sono ancora finite: l'insieme delle *osservabili* (ovvero delle funzioni reali f su Γ , eventualmente dipendenti dal tempo) ha una struttura naturale di spazio vettoriale; Ω permette di aggiungere a questa la struttura di algebra generata dalle *parentesi di Poisson*

$$\{f_1, f_2\} \equiv \Omega^{ab}\nabla_a f_1 \nabla_b f_2. \tag{3.14}$$

L'algebra delle osservabili codifica tutte le informazioni sulla dinamica del sistema. In particolare, anche le eq. di Hamilton (3.8) possono essere espresse con le parentesi di Poisson:

$$\frac{d}{dt}\Phi^\mu = \{\Phi^\mu, \mathcal{H}\}; \tag{3.15}$$

si noti però che abbiamo dovuto ricorrere all'espedito un po' di maldestro di scrivere l'equazione per le componenti di Φ in una particolare base di vettori; questo perché come osservabili abbiamo bisogno di funzioni da Γ in \mathbb{R} .

L'idea base della quantizzazione⁵ è di *trasferire nel sistema quantistico l'informazione contenuta nell'algebra di osservabili classiche, dandone una rappresentazione come algebra di commutazione di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert*.

⁵Secondo l'impostazione algebrica di Dirac; il programma di *quantizzazione intrinseca* cerca di dare alla procedura di quantizzazione una fondazione più trasparente basata sulle caratteristiche "geometriche" del sistema dinamico classico; si veda ad esempio [Onofri e Pauri 1972].

Più precisamente, una *rappresentazione* dell'algebra di osservabili classiche \mathcal{O} è un map $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{F})$, dove \mathcal{A} è lo spazio degli operatori lineari autoaggiunti su uno spazio di Hilbert \mathbb{F} , tale che $\forall f, g \in \mathcal{O}$

$$\rho(\{f, g\}) = -i[\rho(f), \rho(g)] = -i(\rho(f)\rho(g) - \rho(g)\rho(f)). \quad (3.16)$$

Il modo in cui si costruisce la rappresentazione è guidato dal *principio di corrispondenza*: visto che tutte le osservabili classiche sono funzioni delle *osservabili fondamentali* ϕ e π , si dà una rappresentazione di queste e si costruisce *formalmente* la rappresentazione di tutte le osservabili classiche sostituendo nella loro espressione $\rho(\phi)$ e $\rho(\pi)$ per ϕ e π . Non è però garantito che operatori così costruiti siano autoaggiunti; si può tentare di assicurarsene seguendo alcune “regole di ordinamento”, ma in generale è impossibile rappresentare in questo modo tutta l'algebra \mathcal{O} . Ci si accontenta allora di dare una rappresentazione delle parentesi di Poisson per le osservabili fondamentali:

$$\begin{aligned} \{\phi(x^i, t), \phi(y^i, t)\} &= 0, \\ \{\pi(x^i, t), \pi(y^i, t)\} &= 0, \\ \{\phi(x^i, t), \pi(y^i, t)\} &= \delta(x^i - y^i). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Qui per $\phi(x^i, t)$ si intende “l'osservabile data dal valore del campo in x^i all'istante t ” (che, ben inteso, dipende dal punto di Γ in cui si trova il sistema all'istante t !) Queste equazioni, modellate sulle analoghe relazioni per i sistemi finito-dimensionali

$$\begin{aligned} \{q^\mu(t), q^\nu(t)\} &= \{p_\mu(t), p_\nu(t)\} = 0, \\ \{q^\mu(t), p_\nu(t)\} &= \delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (3.18)$$

sono matematicamente indesiderabili perché implicano lo sviluppo delle variabili di campo (che sono funzioni lisce) sulla base non numerabile delle $\delta(x^i)$. Potremmo comportarci come per l'eq. (3.15), scrivendo le parentesi di Poisson per le componenti di ϕ e π in una base di funzioni,

$$\begin{aligned} \{\phi^\mu(t), \phi^\nu(t)\} &= 0, \\ \{\pi_\nu(t), \pi_\nu(t)\} &= 0, \\ \{\phi^\mu(t), \pi_\nu(t)\} &= \delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ma non vogliamo che le relazioni che stanno alla base della nostra teoria quantistica dipendano dalla scelta arbitraria di una base di vettori in Γ !

Possiamo trovare un modo più geometrico per caratterizzare l'osservabile fondamentale di “posizione nello spazio delle fasi” senza ricorrere alle componenti? Sì, con l'aiuto della struttura simplettica! Consideriamo infatti le osservabili $\Omega(\Psi, \cdot) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$\Omega(\Psi, \cdot)(\Phi) = \Omega(\Psi, \Phi); \quad (3.20)$$

ad ogni $\Psi \in \Gamma$ corrisponde una diversa osservabile. Per ogni punto Φ dello spazio delle fasi, il valore di tutte le $\Omega(\Psi, \cdot)$ “etichettate” da ciascuno dei punti

$\Psi \in \Gamma$ localizza Φ in modo sovrabbondante (per convincersene, basta pensare che l'insieme delle $\Omega(\Psi, \cdot)$ contiene tutte le “componenti osservabili” in tutte le possibili basi di vettori: se ad esempio interessa la componente relativa al vettore di base $\phi^{(a)}$, si può prendere $\Psi = (0, -\pi^{(a)})$, vedi eq. (3.6)).

Quello che stiamo facendo consiste essenzialmente nel caratterizzare un punto di Γ (e quindi per isomorfismo una soluzione) con il suo prodotto simplettico con tutte le altre soluzioni. Per quanto abbiamo dimostrato più sopra, le osservabili $\Omega(\Psi, \cdot)$ sono intrinsecamente indipendenti dal tempo.

Scriviamo allora le parentesi di Poisson delle $\Omega(\Psi, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \{\Omega(\Psi_1, \cdot), \Omega(\Psi_2, \cdot)\}(\Phi) &= \{\Omega(\Psi_1, \Phi), \Omega(\Psi_2, \Phi)\} = \\ &= \Omega^{ab} \partial_a (\Omega_{cd} \Psi_1^c \Phi^d) \partial_b (\Omega_{ef} \Psi_2^e \Phi^f) = \\ &= \Omega^{ab} (\Omega_{cd} \Psi_1^c \partial_a \Phi^d) (\Omega_{ef} \Psi_2^e \partial_b \Phi^f) = \\ &= \Omega^{ab} \Omega_{cd} \Omega_{ef} \delta_a^d \delta_b^f \Psi_1^c \Psi_2^e = \\ &= \Omega_{ec} \Psi_1^c \Psi_2^e = -\Omega(\Psi_1, \Psi_2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Gli argomenti che abbiamo dato sono forse sufficienti a convincerci che è corretto quantizzare costruendo una rappresentazione degli operatori $\Omega(\Psi, \cdot)$; il loro senso fisico, però, resta oscuro: perché quantizzare proprio questi prodotti simplettici di soluzioni classiche? In realtà, le $\Omega(\Psi, \cdot)$ hanno un'interpretazione molto stringente in termini delle funzioni di campo. Tuttavia, è indispensabile un po' di matematica per vederlo.

Prendiamo lo spazio \mathcal{T} delle *funzioni di prova* sullo spazio di Minkowski (ovvero funzioni infinitamente differenziabili e con supporto compatto). Allora, a fianco delle soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange *omogenea* (3.4), si possono considerare le soluzioni dell'equazione *con sorgente*

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = f, \quad (3.22)$$

ottenibile aggiungendo un termine $\phi(x^i, t)f(x^i, t)$ alla densità di lagrangiana. In particolare, indicheremo con Af la soluzione *avanzata* dell'eq. (3.22), ovvero tale da annullarsi *nel futuro* del supporto di f , e con Rf la soluzione *ritardata* che si annulla *nel passato* del supporto di f . $Ef = Af - Rf$ è soluzione dell'eq. omogenea, e gode di due importanti proprietà⁶:

1. E , visto come map lineare $E : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$, è suriettivo, ovvero $E\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$;
2. $\forall \phi(x, t) \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{T}$, si ha

$$\phi(f) = \int d^4x f(x^i, t) \phi(x^i, t) = \Omega(Ef, \phi). \quad (3.23)$$

Quindi *tutte le osservabili $\Omega(\Psi, \cdot)$ coincidono con gli “smearings” (nello spazio-tempo) del campo con le funzioni di prova!* Possiamo allora senza ulteriori indugi quantizzare imponendo la relazione

$$\{\phi(f), \phi(g)\} = \{\Omega(Ef, \cdot), \Omega(Eg, \cdot)\} = -\Omega(Ef, Eg) = \int d^4x f Eg. \quad (3.24)$$

⁶La prova, svolta per l'equazione di Klein-Gordon, ma estendibile agli operatori differenziali corrispondenti in generale all'eq. (3.4), si trova in [Wald 1994].

3.1.4 Costruzione della rappresentazione

Dove si fatica alquanto per trasformare \mathcal{S} in uno spazio di Hilbert, e indi farne uno spazio di Fock, ove rappresentare gli operatori di campo.

Certo, il grosso del lavoro è ancora da fare: dobbiamo cercare un adeguato spazio di Hilbert \mathbb{F} su cui siano definiti gli operatori autoaggiunti $\hat{\phi}(f)$ (per ogni $f \in \mathcal{T}$) che obbediscono all'algebra di Weyl

$$[\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)] = -i\Omega(Ef, Eg). \quad (3.25)$$

L'idea fondamentale è questa: (1) partire dallo spazio vettoriale \mathcal{S} delle soluzioni classiche dell'eq. di Eulero-Lagrange e considerare i raggi di \mathcal{S} come “stati a una particella”; (2) trattare ciascuno di questi come un oscillatore armonico libero implementando un'algebra di costruttori e distruttori e costruendo uno *spazio di Fock*; (3) prendere questo come spazio di Hilbert della teoria quantistica e scrivere gli operatori di campo *smeared* in funzione dei costruttori e distruttori in modo da soddisfare l'eq. (3.25). Vediamo tutto questo in dettaglio.

1. Sebbene \mathcal{S} sia uno spazio vettoriale, per essere interpretato come spazio di stati quantistici esso ha bisogno anche di un prodotto scalare. Il prodotto simplettico di soluzioni $\Omega(\cdot, \cdot)$ è bilineare e non-degenere, ma è anche antisimmetrico e non definito positivo.

Questi problemi possono essere risolti considerando la complessificazione $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ di \mathcal{S} e prendendo un sottospazio $\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}$ di $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ tale che

- (a) il prodotto scalare definito da

$$(\Psi_1^+, \Psi_2^+) = -i\Omega(\overline{\Psi_1^+}, \Psi_2^+) \quad (3.26)$$

è definito positivo;

- (b) $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{S}^{\mathbb{C}+} \oplus \overline{\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}}$, dove $\overline{\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}}$ è lo *spazio complesso coniugato*⁷ di $\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}$;
- (c) $\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}$ è ortogonale a $\overline{\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}}$.

Allora il completamento di $\mathcal{S}^{\mathbb{C}+}$ nella metrica derivata dalla forma simplettica è uno spazio di Hilbert \mathbb{H} , che viene preso come spazio degli stati “a una particella” della teoria quantistica.

Useremo come di consueto le lettere greche minuscole ψ, χ, \dots per denotare i vettori di \mathbb{H} .

2. Lo *spazio di Fock* simmetrico $\mathbb{F}_S(\mathbb{H})$ associato allo spazio di Hilbert \mathbb{H} è definito da

$$\mathbb{F}_S(\mathbb{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_S^n \mathbb{H}), \quad (3.27)$$

⁷Se $\mathbb{V} \equiv (V, +, \times)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} , dove $+$ rappresenta la somma di vettori e \times il prodotto di un vettore per uno scalare, lo *spazio vettoriale complesso coniugato* $\overline{\mathbb{V}}$ è definito da $(V, +, \bar{\times})$, dove $c \bar{\times} \Psi = \bar{c} \times \Psi$. Dato che come per lo spazio duale \mathbb{V}^* la corrispondenza uno a uno naturale tra \mathbb{V} e $\overline{\mathbb{V}}$ è antilineare, lo *spazio complesso coniugato* e lo *spazio duale* sono isomorfi.

dove \oplus indica la *somma diretta*⁸ di spazi di Hilbert, \otimes_S il *prodotto tensoriale simmetrico*⁹ e con il prodotto di 0 spazi \mathbb{H} si intende \mathbb{C} .

Un vettore $|\xi\rangle$ dello spazio di Fock $\mathbb{F}_S(\mathbb{H})$ può essere espresso dalla successione

$$|\xi\rangle = (\xi_0, \xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_1 a_2}, \dots, \xi_n^{a_1 \dots a_n}, \dots), \quad (3.29)$$

dove $\xi_0 \in \mathbb{C}$, $\xi_1 \in \mathbb{H}$, $\xi_2 \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, e così via. Tutti gli n-vettori sono simmetrici per scambi di indici: $\xi_n^{a_1 \dots a_n} = \xi_n^{(a_1 \dots a_n)}$.

L'*operatore di creazione* $a^\dagger(\psi)$ associato con il vettore $\psi \in \mathbb{H}$ è definito da

$$a^\dagger(\psi)|\xi\rangle = (0, \psi^{a_1} \xi_0, \sqrt{2}\psi^{(a_1} \xi_1^{a_2)}, \sqrt{3}\psi^{(a_1} \xi_2^{a_2 a_3)}, \dots); \quad (3.30)$$

e merita il suo nome perché promuove sistematicamente vettori del sottospazio $\otimes^n \mathbb{H}$ al sottospazio $\otimes^{(n+1)} \mathbb{H}$. In modo opposto si comporta l'*operatore di distruzione* $a(\bar{\psi})$ associato¹⁰ con $\bar{\psi} \in \overline{\mathbb{H}}$:

$$a(\bar{\psi})|\xi\rangle = (\bar{\psi}_a \xi_1^a, \sqrt{2}\bar{\psi}_a \xi_2^{aa_2}, \sqrt{3}\bar{\psi}_a \xi_3^{aa_2 a_3}, \dots). \quad (3.31)$$

Se i loro domini vengono ristretti a vettori $|\xi\rangle$ di norma finita, si può verificare che $a^\dagger(\psi) = [a(\bar{\psi})]^\dagger$, e che creatori e distruttori chiudono un'algebra di commutazione:

$$\begin{aligned} [a(\bar{\psi}), a(\bar{\eta})] &= [a^\dagger(\psi), a^\dagger(\eta)] = 0, \\ [a(\bar{\psi}), a^\dagger(\eta)] &= \bar{\psi}_a \eta^a. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3. Vediamo ora come definire gli operatori di campo $\hat{\phi}(f)$ in funzione di a e a^\dagger per soddisfare l'algebra (3.25): definiamo $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}$ come la restrizione a \mathcal{S} del proiettore ortogonale da $\mathcal{S}^\mathbb{C}$ in \mathbb{H} ; poniamo

$$\hat{\phi}(f) = \hat{\Omega}(Ef, \cdot) = ia(\overline{K(Ef)}) - ia^\dagger(K(Ef)). \quad (3.33)$$

L'eq. (3.25) si verifica subito: siano $\Psi_f = Ef$, $\Psi_g = Eg$; si ha:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)] &= [ia(\overline{K\Psi_f}) - ia^\dagger(K\Psi_f), ia(\overline{K\Psi_g}) - ia^\dagger(K\Psi_g)] = \\ &= (K\Psi_f, K\Psi_g) - (K\Psi_g, K\Psi_f) = \\ &= -i\Omega(\overline{K\Psi_f}, K\Psi_g) + i\Omega(\overline{K\Psi_g}, K\Psi_f) = \\ &= -i\Omega(K\Psi_f + \overline{K\Psi_f}, K\Psi_g + \overline{K\Psi_g}) = \\ &= -i\Omega(\Psi_f, \Psi_g), \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove tra per ottenere il risultato finale abbiamo utilizzato l'antisimmetria di Ω e l'ortogonalità delle soluzioni in \mathbb{H} e in $\overline{\mathbb{H}}$.

⁸La somma diretta di infiniti spazi di Hilbert \mathbb{H}_i si può definire come lo spazio di Hilbert delle successioni $\{\psi_i\}$ con $\psi_i \in \mathbb{H}_i$ e $\sum_i \|\psi_i\|^2 < \infty$.

⁹Il prodotto tensoriale simmetrico di due spazi di Hilbert si può definire come lo spazio di Hilbert di tutti i map *simmetrici* $\alpha : \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ tali che se $\{\bar{e}_i^{(1)}\}$, $\{\bar{e}_j^{(2)}\}$ sono basi ortonormali di $\overline{\mathbb{H}}_1$ e $\overline{\mathbb{H}}_2$, allora

$$\sum_{ij} |\alpha(\bar{e}_i^{(1)}, \bar{e}_j^{(2)})|^2 < \infty. \quad (3.28)$$

¹⁰È preferibile associare il distruttore con un vettore dello spazio complesso coniugato in modo che la dipendenza di a dal suo argomento sia lineare e non antilineare.

3.1.5 Ancora sulla specificazione di \mathbb{H}

Dove si segue da vicino [Wald 1994] nel dimostrare (macchinosa-mente) che “scegliere il sottospazio $\mathbb{H} \subset \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ è esattamente equivalente a specificare un prodotto scalare reale μ su \mathcal{S} ”. Al generoso lettore che ritiene di accettare la nostra parola, concediamo di saltare la sezione a piè pari.

In effetti la costruzione di \mathbb{H} che abbiamo presentato non è soddisfacente dal punto di vista del rigore matematico nel caso di spazi \mathcal{S} infinito-dimensionali (come quelli delle teorie di campo); infatti in generale \mathbb{H} non sarà un sottospazio di $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ se \mathcal{S} non viene prima completato nel prodotto scalare di \mathbb{H} . Come si vede, c'è un preoccupante elemento di circolarità nella definizione del prodotto scalare.

Tuttavia si può provare che \mathbb{H} risulta determinato una volta definito un prodotto scalare reale μ su \mathcal{S} tale che

$$\mu(\Psi_1, \Psi_1) = \frac{1}{4} \sup_{\Psi_2 \neq 0} \frac{[\Omega(\Psi_1, \Psi_2)]^2}{\mu(\Psi_2, \Psi_2)}. \quad (3.35)$$

Una volta dato μ , consideriamo infatti il completamento \mathcal{S}_μ nella norma indotta dal prodotto scalare $(\Psi_1, \Psi_2) = 2\mu(\Psi_1, \Psi_2)$. Per l'eq. (3.35), Ω è limitato su $\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{S}_\mu$, e dunque per il lemma di Riesz è ben definito l'operatore $J : \mathcal{S}_\mu \rightarrow \mathcal{S}_\mu$ dato da

$$\Omega(\Psi_1, \Psi_2) = 2\mu(\Psi_1, J\Psi_2) = (\Psi_1, J\Psi_2); \quad (3.36)$$

dall'antisimmetria di Ω segue $J^\dagger = -J$; ponendo $\Psi_1 = J\Psi_2$, l'eq. (3.35) implica che J preserva la norma ed è dunque unitario, $J^\dagger J = I$. Dunque $J^2 = -I$ e J dota \mathcal{S}_μ di una struttura complessa.

Ora complessifichiamo \mathcal{S}_μ (per linearità complessa) e definiamo il prodotto scalare complesso su $\mathcal{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ come

$$(\Psi_1, \Psi_2) = 2\mu(\overline{\Psi_1}, \Psi_2). \quad (3.37)$$

Consideriamo ora l'operatore autoaggiunto $iJ : \mathcal{S}_\mu^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{S}_\mu^{\mathbb{C}}$, i cui soli autovalori sono $\pm i$; i due autospazi corrispondenti sono uno il complesso coniugato dell'altro e la loro somma è $\mathcal{S}_\mu^{\mathbb{C}}$. Il sottospazio $\mathbb{H} \subset \mathcal{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ si definisce come l'autospazio di autovalore $+i$, e si verifica che soddisfa le proprietà di pag. 73.

Si può anche dimostrare che la specificazione di uno spazio di Hilbert \mathbb{H} che soddisfa le proprietà di pag. 73, insieme al map lineare $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}$, dà origine al prodotto scalare reale

$$\mu(\Psi_1, \Psi_2) = \text{Re}[-i\Omega(\overline{K\Psi_1}, K\Psi_2)] \quad (3.38)$$

che soddisfa l'eq. (3.35). Infatti dato che

$$\begin{aligned} \text{Im}[-i\Omega(\overline{K\Psi_1}, K\Psi_2)] &= -\text{Re}[\Omega(\overline{K\Psi_1}, K\Psi_2)] = \\ &= -\frac{1}{2}[\Omega(\overline{K\Psi_1}, K\Psi_2) + \Omega(K\Psi_1, \overline{K\Psi_2})] = \\ &= -\frac{1}{2}\Omega(\overline{K\Psi_1} + K\Psi_1, \overline{K\Psi_2} + K\Psi_2) = \\ &= -\frac{1}{2}\Omega(\Psi_1, \Psi_2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

(dove si è sfruttata l'ortogonalità dei vettori in \mathbb{H} e $\overline{\mathbb{H}}$), si ha

$$-i\Omega(\Psi_1, \Psi_2) = \mu(\Psi_1, \Psi_2) - \frac{i}{2}\Omega(\Psi_1, \Psi_2). \quad (3.40)$$

Per la disuguaglianza di Schwarz del prodotto scalare $-i\Omega(\cdot, \cdot)$, vale

$$\|K\Psi_1\|^2\|K\Psi_2\|^2 \geq |-i\Omega(\Psi_1, \Psi_2)|^2 \geq |\operatorname{Im}[-i\Omega(K\Psi_1, K\Psi_2)]|^2 = \frac{1}{4}|\Omega(\Psi_1, \Psi_2)|^2; \quad (3.41)$$

ma la disuguaglianza può sempre essere saturata (basta prendere $\Psi_1 = \Psi_2$, nel qual caso il prodotto scalare $-i\Omega(\cdot, \cdot)$ è puramente reale), e abbiamo così riottenuto l'eq. (3.35).

3.1.6 Un esempio: il campo di Klein-Gordon

Dove si mostra al lettore che le astruse concuzioni che gli abbiamo somministrato altro non sono che la buona vecchia teoria dei campi di Klein-Gordon.

La costruzione che abbiamo presentato può sembrare piuttosto astratta e priva del contenuto fisico che di solito si associa con la teoria dei campi (questo è il prezzo per cercare la generalità!) Vediamo allora come la quantizzazione à la *Bjorken* del nostro campo modello (il campo reale di Klein-Gordon) derivi direttamente dal meccanismo generale.

Densità di lagrangiana ed equazione di Eulero-Lagrange sono date da

$$\mathcal{L} = (-)\frac{1}{2}(|\nabla\phi(x)|^2 + m^2\phi(x)^2), \quad (3.42)$$

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.43)$$

Il momento canonico coniugato è $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$; il prodotto symplettico di soluzioni (eq. (3.13)) non è altro (a meno del fattore $-i$) che il prodotto scalare di Klein-Gordon:

$$-i\Omega(\phi_1(x^i, t), \phi_2(x^i, t)) = \int_{t=\text{cost}} d^3x^i [\phi_1(x^i, t)\partial_t\phi_2(x^i, t) - \phi_2(x^i, t)\partial_t\phi_1(x^i, t)]. \quad (3.44)$$

Come abbiamo visto in sez. 1.1.5, la costruzione dello spazio di Fock prevede la scelta di un set di *modi* su cui viene decomposto l'operatore di campo e che vengono considerati gradi di libertà indipendenti del campo. I modi soddisfano tre proprietà:

1. devono essere soluzioni dell'equazione classica del campo (perché lo sia anche l'operatore ϕ , nel senso delle distribuzioni);
2. il set dei modi e dei loro coniugati deve essere completo rispetto a un prodotto scalare definito nello spazio delle soluzioni classiche;
3. i modi devono avere norma positiva rispetto a questo prodotto scalare (questo è necessario perché le relazioni di commutazione canonica seguano dall'imposizione dell'algebra dei costruttori e distruttori).

La scelta di un set di modi a norma positiva equivale esattamente alla specificazione del sottospazio $\mathbb{H} \subset \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$: se come \mathbb{H} si prende la chiusura lineare del set dei modi, allora \mathbb{F} coinciderà con lo spazio di Fock ottenuto a partire dallo stato di vuoto $|0\rangle$ che soddisfa $a_i|0\rangle = 0$ per tutti i distruttori associati al set di modi¹¹. Nel caso del campo di Klein-Gordon, le soluzioni complesse

$$\psi_{k_i} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-i\omega_k t + ik_i x^i} \quad (3.45)$$

(dove $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$) sono una buona scelta¹² perché non solo hanno norma positiva, ma hanno anche una frequenza ben definita e positiva rispetto al tempo t : le ψ_{k_i} sono perciò interpretabili (dal punto di vista degli osservatori inerziali) come soluzioni “a una particella” di energia ω_k .

Dimostriamo che la teoria à la Bjorken coincide con la nostra costruzione “formale” se si sceglie \mathbb{H} come la chiusura lineare delle $\{\psi_{k_i}\}$. I costruttori e distruttori “ingenui” a_{k_i} e $a_{k_i}^\dagger$ corrispondono ad $a(\overline{\psi_{k_i}})$ e $a^\dagger(\psi_{k_i})$, e la prescrizione

$$\hat{\phi}(f) = \hat{\Omega}(Ef, \cdot) = ia(\overline{K(Ef)}) - ia^\dagger(K(Ef)) \quad (3.46)$$

può essere ricondotta a

$$\phi(x^i, t) = \int d^3 k_i (\psi_{k_i}(x^i, t) a_k + \overline{\psi_{k_i}}(x^i, t) a_k) \quad (3.47)$$

prendendo $f \rightarrow \delta(x)$ e rappresentando i propagatori A e R sulla base delle soluzioni “a energia positiva” ψ_{k_i} e “a energia negativa” $\overline{\psi_{k_i}}$ ¹³:

$$\begin{aligned} E\delta(x) &= G^{(a)}(y, x) - G^{(r)}(y, x) = \\ &= \theta(x^0 - y^0)G(y, x) + \theta(y^0 - x^0)G(y, x) = \\ &= -i \int d^3 k_i [\psi_{k_i}(y) \overline{\psi_{k_i}}(x) - \overline{\psi_{k_i}}(y) \psi_{k_i}(x)]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ora, si ha

$$\begin{aligned} ia(\overline{KE\delta(x)}) - ia^\dagger(KE\delta(x)) &= \\ &= a \left[\int d^3 k_i \overline{\psi_{k_i}}(y) \psi_{k_i}(x) \right] + a^\dagger \left[\int d^3 k_i \psi_{k_i}(y) \overline{\psi_{k_i}}(x) \right] = \\ &= \int d^3 k_i \left[\psi_{k_i}(x^i, t) a(\overline{\psi_{k_i}}) + \overline{\psi_{k_i}}(x^i, t) a^\dagger(\psi_{k_i}) \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

il che dimostra¹⁴ l'equivalenza tra le due costruzioni.

¹¹Più precisamente \mathbb{F} coinciderà con il *completamento* dello spazio degli stati ottenuti applicando un numero finito di costruttori a $|0\rangle$.

¹²Anche se bisognerebbe considerare una base *numerabile* (e normalizzabile!) di funzioni. Tuttavia, dalle soluzioni di onda piana è possibile costruire (con il procedimento degli *auto-differenziali*) un *set* numerabile di pacchetti d'onde normalizzabili. Come è costume in teoria dei campi, deriveremo i nostri risultati soltanto per le soluzioni di onda piana, riservandoci di dimostrare che valgono anche per i pacchetti.

¹³Per la rappresentazione delle funzioni di Green si vedano ad es. [Bjorken e Drell 1965, Birrell e Davies 1984, Fulling 1989].

¹⁴Nell'ultima serie di equazioni, si intende che l'“overline” di coniugazione complessa si applica agli argomenti degli esponenziali e non alla i che precede l'integrale.

3.2 Teoria dei campi in uno spazio-tempo curvo

La costruzione che abbiamo presentato si presta a essere facilmente generalizzata agli spazio-tempo curvi. Ci dobbiamo preoccupare soprattutto di due aspetti: verificare per quale classi di spazio-tempo la formulazione hamiltoniana della teoria dei campi classica resta ben definita, e porre una particolare attenzione alla scelta delle “funzioni di modo” (ovvero dello spazio di Hilbert \mathbb{H}) dato che non abbiamo più le simmetrie dello spazio di Minkowski a guidarci.

3.2.1 *Shopping for Lagrangians*

La generalizzazione della densità di lagrangiana “piatta” \mathcal{L}_P a una più generale \mathcal{L}_C “curva” è guidata dal *principio di equivalenza medio-forte*, che vogliamo qui ripetere: *in ogni punto dello spazio-tempo, esiste un sistema di riferimento locale (quello di un osservatore in caduta libera) in cui tutte le leggi della fisica non gravitazionali hanno “localmente” la consueta forma special-relativistica*. Il significato che va attribuito all’avverbio “localmente” è “relativamente a esperimenti confinati a regioni dello spazio-tempo abbastanza piccole rispetto alla scala di lunghezza definita dalla variazione del campo gravitazionale”.

Ne segue, in particolare, che la densità di lagrangiana sarà localmente esprimibile con gli operatori differenziali “special-relativistici” dei sistemi di riferimento di Lorentz locali, ovvero con la derivata ordinaria ∂_a calcolata rispetto alle coordinate locali. Questa, tuttavia, *coincide localmente* con la derivata covariante ∇_a ; ne segue che \mathcal{L}_C è *ottenibile sostituendo formalmente le derivate ordinarie di \mathcal{L}_P con derivate covarianti*, cioè, come dicono [Misner et al. 1973], *sostituendo virgole con punti e virgola*.

Una teoria così ottenuta ha il pregio di tendere automaticamente alla teoria “piatta” quando la curvatura del campo gravitazionale si annulla (poiché in questo limite $\nabla_a \rightarrow \partial_a$). C’è tuttavia un *problema di ordinamento* paragonabile a quello che si incontra quantizzando le parentesi di Poisson: nelle teorie special-relativistiche scambiare l’ordine delle derivazioni non ha nessun effetto, mentre nello spazio-tempo curvo la commutazione di derivate covarianti genera dei termini di curvatura.

Per il campo reale di Klein-Gordon, ad esempio, siamo tentati di scrivere

$$\mathcal{L}_C = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{ab} \nabla_a \phi(x) \nabla_b \phi(x) + m^2 \phi(x)), \quad (3.50)$$

e il problema sembra non presentarsi (non ci sono derivate doppie); a seconda di come si applica il principio variazionale, però, l’eq. del moto può essere

$$\square \phi - m^2 \phi = 0, \quad (3.51)$$

oppure

$$\square \phi - (m^2 + \frac{1}{2} R) \phi = 0. \quad (3.52)$$

Conviene allora inserire un generico termine di curvatura direttamente in \mathcal{L}_C ,

$$\mathcal{L}_C = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{ab} \nabla_a \phi(x) \nabla_b \phi(x) + m^2 \phi(x) + \lambda R(x) \phi(x)^2); \quad (3.53)$$

l'eq. che ne risulta è

$$\square\phi - (m^2 + \lambda R)\phi = 0. \quad (3.54)$$

Se $\lambda = 0$ si dice che il campo scalare è *accoppiato minimalmente*; se $\lambda = \frac{1}{6}$ si dice invece che è *accoppiato conformalmente*¹⁵: in questo caso le soluzioni dell'equazione del moto sono infatti invarianti per le *trasformazioni conformi* $g_{ab} \rightarrow \Lambda(x)g_{ab}$ della metrica.

3.2.2 I problemi del prof. Cauchy

Per dare una formulazione hamiltoniana di una teoria di campo è necessario rompere l'unità relativistica di spazio e tempo per descrivere *l'evoluzione nel tempo* di una configurazione iniziale del campo. In altre parole, ci serve un parametro per descrivere la traiettoria del punto nello spazio delle fasi che descrive il sistema. Nel caso dello spazio-tempo di Minkowski era sufficiente prendere il tempo coordinato t di un qualsiasi osservatore per dividere lo spazio-tempo in infinite *slices* spaziali di eventi che dal suo punto di vista erano *contemporanei*.

Negli spazio-tempo curvi, però, non esiste *in generale* un modo per *foliare* lo spazio-tempo \mathcal{M} , ovvero per identificarlo con il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \Sigma$ del “tempo” per una varietà spaziale (ovvero con metrica riemanniana). Non c'è insomma (in generale) nessun “tempo globale” che possiamo usare per parametrizzare la traiettoria del sistema nello spazio delle fasi.

In spazio-tempo curvi generici, quindi, ci si può aspettare che le proprietà di esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange (senza un tempo le equazioni di Hamilton non si possono neppure scrivere!) siano molto diverse da quelle che valgono nello spazio di Minkowski¹⁶.

Perché l'*initial value formulation* hamiltoniana sia ben posta, richiediamo che gli spazio-tempo di cui ci occupiamo siano *orientabili e globalmente iperbolic*. Per spiegare cosa questo significhi ci servono alcune definizioni (una rassegna più estesa dei concetti necessari per lo studio dei *metodi globali* in relatività generale è data in appendice B).

Uno spazio-tempo \mathcal{M} si dice *orientabile* se è possibile fare una scelta continua di quale metà del cono di luce, in ogni punto, costituisce il “futuro” e quale il “passato”. Un sottoinsieme $S \subset \mathcal{M}$ è detto *acronale* se nessuna coppia di suoi punti può essere collegata da una curva time-like. Il *dominio di dipendenza* $D(S)$ di S è dato dall'insieme dei punti che “dipendono totalmente” da S ,

¹⁵In generale,

$$\lambda_{\text{conf}} = \frac{d-2}{4(d-1)}, \quad (3.55)$$

dove d è la dimensione dello spazio-tempo.

¹⁶[Wald 1994] fa l'esempio dell'equazione di Klein-Gordon *massless* su un 4-toro piatto con “circonferenze” T e L ; le soluzioni hanno la solita forma

$$\psi(x^i, t) = e^{-i\omega t + ik_i x^i}, \quad (3.56)$$

ma la condizione di periodicità

$$\omega = \frac{2\pi}{L}n_0, \quad k_i = \frac{2\pi}{T}n_i, \quad (3.57)$$

implica che le soluzioni possono stare sulla shell di massa nulla $\omega^2 = k^i k_i$ solo se $T^2/L^2 \in \mathbb{Q}$.

tali cioè che ogni curva causale (time-like o null-like) che li attraversa debba necessariamente intersecare S .

Un sottoinsieme acronale $\Sigma \subset \mathcal{M}$ è una *superficie di Cauchy* per lo spazio-tempo \mathcal{M} se $D(\Sigma) = \mathcal{M}$. Nel nostro caso, se sappiamo come “propagare” lungo curve causali una soluzione della teoria di campo, allora la specificazione dei dati del campo su una superficie di Cauchy determina la soluzione su tutto \mathcal{M} . In una varietà d -dimensionale, le eventuali superfici di Cauchy sono sempre $(d - 1)$ -dimensionali.

Se \mathcal{M} ammette una superficie di Cauchy, siamo a posto! In tal caso si dice che lo spazio-tempo è *globalmente iperbolico*. Che questa sia proprio l'ipotesi di cui abbiamo bisogno è confermato dal

Teorema [Geroch 1970]: se \mathcal{M} ammette la superficie di Cauchy Σ allora \mathcal{M} ha la topologia di $\mathbb{R} \times \Sigma$ e può essere foliato da una famiglia a un parametro Σ_t di superfici di Cauchy lisce;

e dal

Teorema (si veda ad es. [Hawking ed Ellis 1973]): se Σ è una superficie di Cauchy per \mathcal{M} , allora l'eq. di Klein-Gordon ammette su \mathcal{M} un'unica soluzione una volta definiti i dati del campo ϕ_0 e π_0 su Σ .

3.2.3 *Monsieur Shift et Mademoiselle Lapse*

Anche se abbiamo foliato lo spazio-tempo in una famiglia di superfici di Cauchy Σ_t , ci resta una certa libertà nella scelta della funzione di “tempo globale”: dobbiamo specificare un campo vettoriale t^a (di “evoluzione temporale”) che specifica quale punto di Σ_{t+dt} “è il futuro” di ciascun punto di Σ_t .

Poiché vogliamo che lo scalare t che indicizza le Σ_t sia effettivamente il parametro di integrazione delle curve integrali di t^a , richiediamo che $t^a \nabla_a t = 1$. Non è necessario che t^a sia ortogonale alle superfici di Cauchy; questo è reso evidente nella decomposizione

$$t^a = N n^a + N^a, \quad (3.58)$$

dove in ogni punto $p \in \mathcal{M}$, n^a è il versore normale alla superficie di Cauchy che passa per p , N è detta *lapse function* e N^a è detto *shift vector*. È conveniente utilizzare t come coordinata globale e affiancargli tre coordinate (locali) x^i tali che $t^a \nabla_a x^i = 0$; allora $t^a = (\partial_t)^a$.

L'azione di Klein-Gordon prende così la forma

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int dt \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left[(n^a \nabla_a \phi(x))^2 - h^{ab} \nabla_a \phi(x) \nabla_b \phi(x) - m^2 \phi(x)^2 \right] N \sqrt{h} dx^i, \quad (3.59)$$

dove h_{ab} è la metrica riemanniana indotta da g_{ab} su Σ_t . Sostituendo nell'espressione di \mathcal{L}

$$n^a \nabla_a \phi = \frac{1}{N} (t^a - N^a) \nabla_a \phi = \frac{1}{N} \dot{\phi} - \frac{1}{N} N^a \nabla_a \phi, \quad (3.60)$$

si vede che il momento coniugato $\pi \equiv \delta\mathcal{L}/\delta\dot{\phi}$ è dato da

$$\pi(x) = \sqrt{h}(n^a \nabla_a \phi(x)). \quad (3.61)$$

Fatte queste identificazioni, i risultati validi per la teoria nello spazio-tempo di Minkowski lo sono ancora nello spazio-tempo curvo: un punto nello spazio delle fasi Γ consiste nella specificazione delle funzioni $\phi(x^i)$ e $\pi(x^i)$ (lisce e a supporto compatto) su una delle superfici di Cauchy Σ_t ; l'insieme delle soluzioni \mathcal{S} è ancora isomorfo (per teorie lineari) a Γ , e la struttura simplettica

$$\Omega((\phi_1, \pi_1), (\phi_2, \pi_2)) = \int_{\Sigma_t} d^3x^i [\pi_1(x^i, t)\phi_2(x^i, t) - \pi_2(x^i, t)\phi_1(x^i, t)] \quad (3.62)$$

definisce un prodotto simplettico tra soluzioni conservato attraverso le superfici di Cauchy.

Una volta definito un prodotto scalare $\mu : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa l'eq. (3.35), risultano determinati \mathbb{H} e l'operatore di proiezione $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}$; si prende $\mathbb{F}_{\mathcal{S}}(\mathbb{H})$ come spazio di Hilbert della teoria quantistica e si pone

$$\hat{\phi}(f) = \hat{\Omega}(Ef, \cdot) = ia(\overline{K(Ef)}) - ia^\dagger(K(Ef)). \quad (3.63)$$

3.3 Teorie inequivalenti e produzione di particelle

Come abbiamo appena visto, un ingrediente essenziale per la definizione di una teoria di campo quantistica è l'individuazione dello spazio \mathbb{H} degli stati “a una particella” (direttamente, specificando una base per \mathbb{H} , oppure definendo il prodotto scalare reale μ). Per evidenziare questo fatto, chiameremo \mathbb{H} -*teorie* le teorie di campo (su spazio-tempo piatti o curvi) ottenute con la procedura di sez. 3.1.4.

Nello spazio-tempo piatto la scelta di \mathbb{H} era facile, perché potevamo richiedere che le funzioni di modo condividessero una delle simmetrie della metrica (sebbene Axel e Beatrice avessero idee diverse su *quale* simmetria imporre! vedi sez. 1.2.3). La scelta di Beatrice aveva il vantaggio di condurre a una definizione *matematica* di “particella” valida per la vasta classe degli osservatori inerziali (e quasi inerziali). Al concetto *globale* di osservatore inerziale nello spazio-tempo piatto corrisponde però nello spazio-tempo curvo il concetto *locale* di *osservatore in caduta libera*; e non è possibile sfruttare quest'ultimo per la scelta (necessariamente globale!) delle funzioni di modo.

In generale, lo spazio-tempo curvo non gode di nessuna simmetria globale che renda *geometricamente evidente* una scelta di \mathbb{H} . *Il concetto matematico di “particella” non ha dunque in generale nessun fondamento, nemmeno approssimato.*

Come vedremo, tuttavia, \mathbb{H} -teorie diverse (cioè caratterizzate da diversi \mathbb{H} per lo stesso spazio-tempo) possono essere non solo differenti dal punto di vista “interpretativo” (il che si traduce nel disaccordo delle teorie sul concetto di “particella” e di “stato di vuoto”), ma anche da quello *sostanziale* (possono cioè portare a *predizioni fisiche diverse*, tanto che è necessario chiedersi *qual è l' \mathbb{H} -teoria “giusta”*.)

3.3.1 Costruzione della teoria su spazio-tempo stazionari

Il “suggerimento geometrico” di cui abbiamo bisogno per scegliere le funzioni di modo, come abbiamo visto in sez. 1.3.1, è un gruppo a un parametro di isometrie della metrica (o, equivalentemente, un campo di Killing ξ^a globale) con traiettorie time-like. Uno spazio-tempo che ne è dotato si dice *stazionario*: la metrica non cambia spostandosi lungo ξ^a tra le *slices* Σ_v definite da un *tempo di Killing* v (tale che $\xi^a \nabla_a v = 1$) costante¹⁷.

In questo caso è possibile definire \mathbb{H} come il sottospazio delle soluzioni classiche a frequenza positiva rispetto al tempo di Killing v . O almeno questa è l’idea, ma la costruzione matematica necessaria è più sottile. Ne diamo solo un *outline*, rimandando a [Ashtekar e Magnon 1975] e [Kay 1978] per la dimostrazione.

1. Si complessifica \mathcal{S} e si definisce il *prodotto interno di energia*

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{\Sigma_{v_0}} T_{ab}(\Psi_1, \Psi_2) \xi^a n^b \sqrt{h} d^3x, \quad (3.64)$$

dove l’integrazione avviene su una *slice* $v = v_0$, n^b è il versore ortogonale a Σ_{v_0} , e T_{ab} è dato da

$$T_{ab}(\Psi_1, \Psi_2) = \nabla_{(a} \bar{\psi}_1 \nabla_{b)} \psi_2 - \frac{1}{2} g_{ab} [\nabla^c \bar{\psi}_1 \nabla_c \psi_2 + m^2 \bar{\psi}_1 \psi_2], \quad (3.65)$$

($T_{ab}(\Psi_1, \Psi_1)$ è il tensore classico di energia-impulso per la soluzione Ψ_1). Si può provare che (Ψ_1, Ψ_2) è indipendente da v .

2. Si prende ora il completamento $\tilde{\mathbb{H}}$ di $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ in questo prodotto; la “traslazione su v ” definisce su questo spazio un gruppo unitario a un parametro V_v . Per il teorema di Stone, $V_v = e^{-ihv}$; per ogni $\tilde{\Psi} \in \tilde{\mathbb{H}}$,

$$h\tilde{\Psi} = i\mathcal{L}_{\xi^a} \tilde{\Psi}. \quad (3.66)$$

Si può verificare che

$$(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) = \frac{\Omega(\tilde{\Psi}_1, h\tilde{\Psi}_2)}{2i}, \quad (3.67)$$

e che h^{-1} è un operatore limitato su $\tilde{\mathbb{H}}$.

3. Allora un prodotto scalare μ che soddisfa l’eq. (3.35) è definito da

$$\mu(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) = 2 \operatorname{Re} (\overline{K\tilde{\Psi}_1}, h^{-1} K\tilde{\Psi}_2), \quad (3.68)$$

dove K è il proiettore sul sottospazio $\tilde{\mathbb{H}}^+$ delle autofunzioni di h ad autovalori positivi. La \mathbb{H} -teoria è così ben definita; il suo spazio di Hilbert “a una particella” \mathbb{H} è dato dal completamento di $\tilde{\mathbb{H}}^+$.

¹⁷Queste slices sono anche superfici di Cauchy per lo spazio-tempo, che dunque è *globalmente iperbolico*. Se, in più, il campo di Killing è anche ortogonale alle Σ_v , lo spazio-tempo si dice *statico*; questo permette di eliminare dalla metrica tutti i termini misti del tipo $dv dx$, dove x è una generica coordinata spaziale sulle Σ .

Il concetto *matematico* di particella sopravvive dunque per gli spazio-tempo stazionari¹⁸ (e coincide con il concetto *operativo* per *detectors* il cui tempo proprio è v .)

È possibile definire un concetto *approssimato* di particella per gli spazio-tempo che potremmo definire *quasi-stazionari*, ovvero per i quali la metrica varia molto lentamente (in funzione di una variabile di tempo appropriata) rispetto alla frequenza minima dei modi del campo¹⁹. Simili definizioni, però, sono *locali* nel senso che se scegliamo come modi le funzioni a frequenza positiva (rispetto al tempo di “quasi-stazionarietà”) nella regione $O_1 \subset \mathcal{M}$, queste esibiranno un *mixing* delle frequenze positive e negative in regioni O_2 abbastanza lontane.

Il concetto di “particella” si dissolve gradualmente mentre ci spostiamo da spazio-tempo stazionari a spazio-tempo curvi senza alcuna simmetria. Fulling illustra questo fatto con una similitudine:

“Elementary particles can be very much like the quasi-particles of solid-state physics. The quantum theory of the physical system composed of the atoms or the electrons in a crystal predicts particle-like excitations (phonons or plasmons). But these quasi-particles are stable only for a perfect crystal. The more severe the impurities or dislocations or external perturbations, the faster the quasi-particles decay away, until finally the concept becomes useless. Then, one must go to the *substratum*: in solid-state physics, the atoms and electrons; in more fundamental physics, the fields.” [Fulling 1972]

3.3.2 Costruzioni asintotiche e matrice S

Uno spazio-tempo \mathcal{M} globalmente iperbolico si dice *asintoticamente stazionario nel passato* quando esso è isometrico a uno spazio-tempo stazionario \mathcal{M}_{in} nel passato di una superficie di Cauchy Σ_0 . Più realisticamente, si richiederà che esista una corrispondenza da \mathcal{M} in \mathcal{M}_{in} che approssimi sempre meglio un’isometria per “tempi globali” sempre più “antichi”.

Gli spazi $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_{\text{in}}}$ delle soluzioni dell’equazione di campo su \mathcal{M} e su \mathcal{M}_{in} potranno allora essere identificati considerando per entrambi i dati iniziali del campo su una superficie di Cauchy nel passato di Σ_0 . Sarà quindi possibile estendere a \mathcal{M} la costruzione dello spazio \mathbb{H}_{in} “a una particella” fatta su \mathcal{M}_{in} sfruttando la sua stazionarietà. In questo modo si definisce una \mathbb{H}_{in} -teoria dotata di un’interpretazione naturale “a particelle” nel passato asintotico.

Analogamente è possibile operare per spazio-tempo asintoticamente stazionari nel futuro, definendo una \mathbb{H}_{out} -teoria naturalmente interpretabile in termini di “particelle” nel futuro asintotico.

¹⁸Si noti che lo spazio-tempo di Minkowski è propriamente stazionario soltanto rispetto alla “traslazione rispetto al tempo inerziale” ∂_t ; gli altri campi di Killing che abbiamo considerato sono time-like *soltanto in una porzione* dello spazio-tempo.

¹⁹Ovviamente il nostro campo modello non ha una frequenza minima dettata dalla condizione di *mass-shell*, ed è necessario pertanto imporla *ad hoc* sulla base di considerazioni diverse.

Se uno spazio-tempo è asintoticamente stazionario sia nel passato che nel futuro, è possibile costruire sia una \mathbb{H}_{in} -teoria che una \mathbb{H}_{out} -teoria. Ora, è possibile che le due \mathbb{H} -teorie siano *interpretativamente differenti*, nel senso che, ad esempio, lo stato di vuoto $|0_{\text{in}}\rangle$ contenga delle “particelle”-*out*, e che in generale a stati *in* dotati di una certa struttura di “particelle”-*in* corrispondano stati *out* con una struttura diversa.

Ora, supponiamo che per tempi globali “antichi” gli osservatori “stazionari” utilizzino in modo naturale l’ \mathbb{H}_{in} -teoria, e stabiliscano che il campo si trova nello stato di vuoto; per tempi globali intermedi, non sussiste alcuna interpretazione “a particelle” e gli osservatori si astengono da misurazioni del campo; infine, per tempi globali molto “tardi”, gli osservatori adotteranno l’ \mathbb{H}_{out} -teoria, e *constateranno che lo stato di vuoto-in contiene delle “particelle”!* Tali stupiti osservatori saranno allora portati a dire che *delle “particelle” sono state prodotte dal vuoto per effetto della metrica di background.*

Ricordiamoci però che i vettori dei due spazi di Fock descrivono degli stati fisici non solo asintoticamente, ma *in tutto lo spazio-tempo*; lo stato $|\xi_{\text{out}}\rangle$ corrispondente allo stato di vuoto-*in* sarà perciò definito richiedendo che i due vettori siano *fisicamente equivalenti*, cioè che il valore di aspettazione di tutte le osservabili sia lo stesso su $|0_{\text{in}}\rangle$ e su $|\xi_{\text{out}}\rangle$.

Più in generale, si dovrà trovare una stato *out* corrispondente a ciascuno stato *in*, ovvero *stabilire un’equivalenza unitaria tra le due \mathbb{H} -teorie*: due rappresentazioni ρ_1, ρ_2 su spazi di Hilbert $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ della stessa algebra di osservabili classiche \mathcal{O} si dicono *unitariamente equivalenti* se esiste una trasformazione unitaria $U : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ tale che per tutte le $f \in \mathcal{O}$,

$$U^{-1}\rho_2(f)U = \rho_1(f). \quad (3.69)$$

Dato che tutte le predizioni fisiche della teoria sono ottenute prendendo gli *elementi di matrice* degli operatori $\rho(f)$, le due rappresentazioni saranno *fisicamente equivalenti* nel senso che lo stato $|\xi_1\rangle \in \mathbb{F}_1$ avrà *esattamente* le stesse proprietà fisiche dello stato $U|\xi_2\rangle \in \mathbb{F}_2$.

Questa situazione è analoga al *formalismo di matrice S* della fisica delle particelle, in quanto in entrambi i casi si identificano *stati asintotici* con una interpretazione “a particelle” e si cerca quindi di costruire una matrice unitaria che collega gli stati *fisicamente equivalenti* delle rappresentazioni *in* e *out*.

Sono tuttavia d’obbligo due *caveat*:

1. la *scala* dei processi considerati è molto diversa: gli *scatterings* di particelle avvengono in regioni microscopiche dello spazio-tempo, mentre nel nostro caso gli stati *in* e *out* si trovano niente meno che *agli estremi opposti dell’universo!*
2. mentre per gli *scatterings* è naturale interpretare la creazione e distruzione di particelle come l’effetto *dinamico* delle interazioni del campo, la produzione di particelle nella teoria dei campi su background curvo è piuttosto *il risultato delle diverse definizioni di “particella” in regioni lontane dello spazio-tempo*. Ovvero, l’effetto è legato sostanzialmente all’*interpretazione* degli stati fisici.

3.3.3 Equivalenza unitaria e produzione di particelle

In questa sezione vogliamo determinare la forma della *trasformazione unitaria* $U : \mathbb{F}_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{F}_{\text{out}}$ tra l' \mathbb{H}_{in} -teoria e l' \mathbb{H}_{out} -teoria di uno spazio-tempo asintoticamente stazionario nel passato e nel futuro. La U è nota come *trasformazione di Bogoliubov*, ed è caratterizzata dalla condizione che per ogni $\Psi \in \mathcal{S}$,

$$U\Omega_{\text{in}}(\Psi, \cdot)U^{-1} = \Omega_{\text{out}}(\Psi, \cdot). \quad (3.70)$$

Questo formalismo non si applica soltanto agli spazio-tempo asintoticamente stazionari nel passato e nel futuro, ma a tutti i casi in cui si vogliono confrontare teorie di campo sullo stesso spazio-tempo ottenute con scelte diverse del prodotto scalare μ . L'analisi che ne diamo è tratta da [Wald 1975] e [Wald 1994].

Innanzitutto, si può dimostrare che affinché si possa scrivere U , μ_{in} e μ_{out} devono definire *norme equivalenti*, ovvero ogni sequenza di Cauchy in una norma deve esserlo anche nell'altra. Per questo è sufficiente che esistano $c, c' \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $\Psi \in \mathcal{S}$,

$$c\mu_{\text{in}}(\Psi, \Psi) \leq \mu_{\text{out}}(\Psi, \Psi) \leq c'\mu_{\text{in}}(\Psi, \Psi). \quad (3.71)$$

La dimostrazione è data in nota²⁰. Se questa condizione sussiste, i completamenti di \mathcal{S} in μ_{in} e μ_{out} coincidono, e \mathbb{H}_{in} e \mathbb{H}_{out} saranno entrambi sottospazi di $\mathcal{S}_{\mu}^{\mathbb{C}}$. La condizione (3.70) di equivalenza unitaria si può riscrivere

$$U \left[ia_{\text{in}}(\overline{K}_{\text{in}}\Psi) - ia_{\text{in}}^{\dagger}(K_{\text{in}}\Psi) \right] U^{-1} = ia_{\text{out}}(\overline{K}_{\text{out}}\Psi) - ia_{\text{out}}^{\dagger}(K_{\text{out}}\Psi) \quad (3.74)$$

dove $K_{\text{in}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{in}}$ e $K_{\text{out}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{in}}$ sono i proiettori sugli spazi “a una particella” determinati dai μ ; \overline{K}_{in} e $\overline{K}_{\text{out}}$ proiettano direttamente sugli spazi coniugati $\overline{\mathbb{H}}_{\text{in}}$ e $\overline{\mathbb{H}}_{\text{out}}$. Seguendo la notazione di [Wald 1975], chiamiamo ora

$$\begin{array}{llll} A : \mathbb{H}_{\text{out}} & \rightarrow & \mathbb{H}_{\text{in}} & \text{l'estensione di } K_{\text{in}} \text{ a } \mathbb{H}_{\text{out}} \subset \mathcal{S}_{\mu}^{\mathbb{C}} \\ B : \mathbb{H}_{\text{out}} & \rightarrow & \overline{\mathbb{H}}_{\text{in}} & \overline{K}_{\text{in}} \text{ } \mathbb{H}_{\text{out}} \\ C : \mathbb{H}_{\text{in}} & \rightarrow & \mathbb{H}_{\text{out}} & K_{\text{out}} \text{ } \mathbb{H}_{\text{in}} \\ D : \mathbb{H}_{\text{in}} & \rightarrow & \overline{\mathbb{H}}_{\text{out}} & \overline{K}_{\text{out}} \text{ } \mathbb{H}_{\text{in}}. \end{array} \quad (3.75)$$

Gli operatori A, B, C, D ci permettono di studiare la relazione tra gli spazi \mathbb{H}_{in} e \mathbb{H}_{out} . Questi operatori svolgono lo stesso ruolo che i coefficienti α e β avevano in sez. 1.2.3: in particolare, un operatore D non nullo corrisponde alla presenza di

²⁰Se l'eq. (3.71) non vale, è possibile trovare in \mathcal{S} una successione $\{\Psi_n\}$ a norma μ_{in} costante e norma μ_{out} tendente a 0; ne segue che su \mathbb{F}_{out} la sequenza di operatori

$$\{T_{\text{out},n}\} \equiv \{\exp[i\Omega_{\text{out}}(\Psi_n, \cdot)] - 1\} \quad (3.72)$$

converge fortemente a 0 (per convincersene, si vedano le eq. (3.63) e (3.30)-(3.31)), mentre su \mathbb{F}_{in} la successione di vettori $T_{\text{in},n}|0_{\text{in}}\rangle$ non si annulla; ora, se è davvero possibile scrivere la trasformazione unitaria U , la successione di vettori

$$\{T_{\text{out},n}U|0_{\text{in}}\rangle\} = \{UT_{\text{in},n}|0_{\text{in}}\rangle\} \quad (3.73)$$

deve tendere a 0, *ex quo absurdum*.

coefficienti β in eq. (1.110), e il *mixing* delle frequenze che ne risulta implicherà, come allora, che gli stati di vuoto delle due costruzioni non siano equivalenti.

Dalla condizione (3.71) segue che A, B, C, D sono operatori limitati; i quattro proiettori sono poi ulteriormente vincolati dalle relazioni²¹

$$\begin{aligned} A^\dagger A - B^\dagger B &= 1, & C^\dagger C - D^\dagger D &= 1, \\ A^\dagger \overline{B} &= B^\dagger \overline{A}, & C^\dagger \overline{D} &= D^\dagger \overline{C}, \\ A^\dagger &= C, & \overline{B}^\dagger &= -D. \end{aligned} \quad (3.77)$$

dove $\overline{A} : \mathbb{H}_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{in}}$ è definito da $\overline{A} \overline{\psi}_{\text{out}} = \overline{(A \psi_{\text{out}})}$, e $\overline{B} : \mathbb{H}_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{in}}$ in modo analogo. L'eq. (3.74) implica che per tutti i $\chi_{\text{in}} \in \mathbb{H}_{\text{in}}$ valga

$$U a_{\text{in}}(\overline{\chi_{\text{in}}}) U^{-1} = a_{\text{out}}(\overline{C \chi_{\text{in}}}) - a_{\text{out}}^\dagger(\overline{D \chi_{\text{in}}}); \quad (3.78)$$

in particolare possiamo prendere $\chi_{\text{in}} = C^{-1} \psi_{\text{out}}$ e applicare gli operatori che compaiono nei due termini di eq. (3.78) al vettore

$$|\xi\rangle = U|0_{\text{in}}\rangle = (\xi_0, \xi_1^{a_1}, \xi_2^{a_1 a_2}, \dots, \xi_n^{a_1 \dots a_n}, \dots), \quad (3.79)$$

scritto utilizzando la notazione di pag. 74; si ottiene così l'equazione

$$\begin{aligned} U a_{\text{in}}(\overline{\chi_{\text{in}}}) U^{-1} U|0_{\text{in}}\rangle &= \left[a_{\text{out}}(\overline{\psi_{\text{out}}}) - a_{\text{out}}^\dagger(\overline{D C^{-1} \psi_{\text{out}}}) \right] U|0_{\text{in}}\rangle; \\ 0 &= \left[a_{\text{out}}(\overline{\psi_{\text{out}}}) - a_{\text{out}}^\dagger(\overline{\mathcal{E} \psi_{\text{out}}}) \right] |\xi\rangle, \end{aligned} \quad (3.80)$$

dove $\mathcal{E} : \mathbb{H}_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{out}}$ è definito da $\mathcal{E} = \overline{D} \overline{C}^{-1}$. Facendo ora agire esplicitamente costruttori e distruttori come da eq. (3.30)-(3.31), si ottiene un sistema infinito di equazioni, valido per ogni $\psi_{\text{out}} \in \mathbb{H}_{\text{out}}$:

$$\begin{cases} \overline{\psi}_a \xi_1^a = 0 \\ \sqrt{2} \overline{\psi}_a \xi_2^{a a_2} = (\mathcal{E} \overline{\psi})^{a_1} \xi_0 \\ \sqrt{3} \overline{\psi}_a \xi_3^{a a_2 a_3} = \sqrt{2} (\mathcal{E} \overline{\psi})^{(a_1} \xi_1^{a_2)} \\ \sqrt{4} \overline{\psi}_a \xi_4^{a a_2 a_3 a_4} = \sqrt{3} (\mathcal{E} \overline{\psi})^{(a_1} \xi_2^{a_2 a_3)} \\ \dots \end{cases} \quad (3.81)$$

La prima equazione è risolta solo da $\xi_1^a = 0$: ciò implica che si annullino tutti i vettori $\xi_n^{a_1 \dots a_n}$ dei sottospazi “a n particelle” con n dispari, ovvero che *la*

²¹ Dimostriamo soltanto la prima delle eq. (3.77) [Wald 1994]: per $\psi_{\text{out}}, \xi_{\text{out}} \in \mathbb{H}_{\text{out}}$ arbitrari, vale

$$\begin{aligned} (\psi_{\text{out}}, \xi_{\text{out}})_{\mathbb{H}_{\text{out}}} &= -i\Omega(\overline{\psi_{\text{out}}}, \xi_{\text{out}}) = \\ &= -i\Omega(K_{\text{in}} \psi_{\text{out}} + \overline{K_{\text{in}}} \psi_{\text{out}}, K_{\text{in}} \xi_{\text{out}} + \overline{K_{\text{in}}} \xi_{\text{out}}) = \\ &= (A \psi_{\text{out}}, A \xi_{\text{out}})_{\mathbb{H}_{\text{in}}} - (B \psi_{\text{out}}, B \xi_{\text{out}})_{\mathbb{H}_{\text{out}}} = \\ &= (\psi_{\text{out}}, A^\dagger A \xi_{\text{out}})_{\mathbb{H}_{\text{out}}} - (\psi_{\text{out}}, B^\dagger B \xi_{\text{out}})_{\mathbb{H}_{\text{out}}}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $K_{\text{in}} + \overline{K_{\text{in}}} = A + B = 1$ e che il prodotto scalare $i\Omega(\cdot, \cdot)$ si annulla tra vettori appartenenti a sottospazi coniugati. Le altre relazioni si ottengono con manipolazioni analoghe.

produzione di “particelle” per effetto della metrica di background avvenga solo a coppie. Nella notazione a indici astratti, \mathcal{E} è un 2-vettore \mathcal{E}^{ab} ; la seconda equazione del sistema dà allora

$$\xi_2^{ab} = \frac{\mathcal{E}^{ab}}{\sqrt{2}} \quad (3.82)$$

(dalle proprietà di C e D segue che \mathcal{E}^{ab} è simmetrico, come richiesto per i “sotto-vettori” di un $|\xi\rangle \in \mathbb{F}_S$). Operando ricorsivamente, si trova

$$U|0_{\text{in}}\rangle = |\xi_0\rangle \left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{E}^{a_1 a_2}, 0, \frac{\sqrt{3 \cdot 1}}{\sqrt{4 \cdot 2}}\mathcal{E}^{(a_1 a_2} \mathcal{E}^{a_3 a_4)}, 0, \frac{\sqrt{5 \cdot 3 \cdot 1}}{\sqrt{6 \cdot 4 \cdot 2}}\mathcal{E}^{(a_1 a_2} \mathcal{E}^{a_3 a_4} \mathcal{E}^{a_5 a_6)}, 0, \dots \right). \quad (3.83)$$

L’azione di U su un qualsiasi altro stato “a n particelle” di \mathbb{F}_{in} può essere calcolata applicando a $|\xi\rangle$ gli operatori *aggiunti* a quelli di eq. (3.78).

Abbiamo in tal modo determinato formalmente la struttura dello stato di vuoto *in* “dal punto di vista” della costruzione *out*, verificando che quando c’è *mixing* delle frequenze si assiste alla produzione di coppie di “particelle”.

3.3.4 Un esempio: ancora l’effetto Unruh

Come promesso, utilizziamo la formula generale che abbiamo ottenuto per derivare nuovamente l’effetto Unruh. Al lettore potrà essere utile riferirsi alla sez. 1.2.5 (pag. 34 e seguenti).

Come \mathbb{H}_{in} -teoria prendiamo la teoria di campo inerziale ottenuta decomponendo l’operatore di campo sulla base dei *modi di Minkowski* o, equivalentemente, dei *modi di Unruh*. La \mathbb{H}_{out} -teoria sarà invece costruita a partire dai *modi di Rindler* nei settori I e II, insieme.

Dunque: una base di \mathbb{H}_{in} è data dalle $\tilde{\chi}_\sigma$; una base di \mathbb{H}_{out} dalle χ_σ^{I} e χ_σ^{II} ; ispezionando le eq. (1.139), si può scrivere l’azione di $C : \mathbb{H}_{\text{in}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{out}}$:

$$\begin{cases} C\tilde{\chi}_\sigma &= \alpha_\sigma \chi_\sigma^{\text{I}}, \\ C\tilde{\chi}_{-\sigma} &= \alpha_\sigma \chi_\sigma^{\text{II}} \end{cases} \quad (3.84)$$

(per $\sigma > 0$); analogamente,

$$\begin{cases} D\tilde{\chi}_\sigma &= \beta_\sigma \bar{\chi}_\sigma^{\text{II}}, \\ D\tilde{\chi}_{-\sigma} &= \beta_\sigma \bar{\chi}_\sigma^{\text{I}}. \end{cases} \quad (3.85)$$

Allora

$$\begin{cases} DC^{-1}\chi_\sigma^{\text{I}} &= (\beta_\sigma/\alpha_\sigma)\bar{\chi}_\sigma^{\text{II}}, \\ DC^{-1}\chi_\sigma^{\text{II}} &= (\beta_\sigma/\alpha_\sigma)\bar{\chi}_\sigma^{\text{I}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{D} \overline{C}^{-1}\bar{\chi}_\sigma^{\text{I}} &= (\beta_\sigma/\alpha_\sigma)\chi_\sigma^{\text{II}}, \\ \overline{D} \overline{C}^{-1}\bar{\chi}_\sigma^{\text{II}} &= (\beta_\sigma/\alpha_\sigma)\chi_\sigma^{\text{I}}. \end{cases} \quad (3.86)$$

Visto come 2-vettore, \mathcal{E} è allora dato (si ricordi che $(\beta_\sigma/\alpha_\sigma) = e^{-\pi\sigma/g}$) da

$$\mathcal{E}^{ab} = \int d\sigma e^{-\pi\sigma/g} 2 (\chi_\sigma^{\text{I}})^{(a} (\chi_\sigma^{\text{II}})^{b)}, \quad (3.87)$$

e inserendo questa espressione nell'eq. (3.83) si trova ancora una volta

$$U|0_{\text{in}}\rangle = Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\oplus_0^{\infty} d\sigma e^{-n\pi\sigma/g} |n_{\sigma}, \text{I}\rangle \otimes |n_{\sigma}, \text{II}\rangle \right) \quad (3.88)$$

(i coefficienti numerici $\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$ vengono assorbiti nelle simmetrizzazioni e nella normalizzazione degli stati “a n particelle”).

3.3.5 Teorie inequivalenti!

Abbiamo però trascurato di evidenziare un fatto molto importante emerso nella costruzione di U : l'eq. (3.71) è una *condizione necessaria* affinché sia possibile stabilire l'equivalenza unitaria. In effetti c'è un'altra condizione da soddisfare: il vettore $|\xi\rangle$ di eq. (3.83) è normalizzabile soltanto se

$$\text{tr}(\mathcal{E}^\dagger \mathcal{E}) < \infty. \quad (3.89)$$

Se entrambe le condizioni sono valide, il procedimento di sez. 3.3.3 dimostra in modo costruttivo che le due \mathbb{H} -teorie sono *unitariamente equivalenti*:

Teorema: condizione necessaria e sufficiente affinché le \mathbb{H} -teorie costruite sui prodotti scalari reali μ_{in} e μ_{out} siano unitariamente equivalenti è che valgano le eq. (3.71) e (3.89).

Ma se questo non accade? Siamo costretti a concludere che le \mathbb{H} -teorie sono *fisicamente diverse*: ciascuna di esse ammetterà stati fisici non previsti nell'altra. Avevamo anticipato questo problema in sez. 1.3.3, osservando che gli stati di uno spazio di Fock non devono necessariamente appartenere anche agli spazi di Fock costruiti con scelte diverse delle funzioni di modo. Una tale difficoltà proietta un'ombra preoccupante sul nostro formalismo “di matrice S ”: è possibile che uno stato asintotico di \mathbb{F}_{in} non appartenga alla \mathbb{H}_{out} -teoria? Purtroppo, questo è proprio il caso dell'effetto Unruh: lo stato $U|0_{\text{in}}\rangle$ di eq. (3.88) non sta in \mathbb{F}_{out} , dove avrebbe norma infinita²².

Ma come è possibile? Quando quantizziamo una teoria classica, ci aspetteremmo che la specificazione dell'algebra degli operatori quantistici²³ fosse sufficiente a determinare completamente la teoria quantistica dal punto di vista fisico; in altre parole, che tutte le rappresentazioni della stessa algebra fossero unitariamente equivalenti. E in effetti, per i sistemi quantistici *con un numero finito di gradi di libertà* si prova il

Teorema (di Stone-von Neumann): tutte le rappresentazioni *unitarie e irriducibili* dell'algebra di Weyl (eq. (3.25)) costruita a partire da uno spazio vettoriale simplettico *finito-dimensionale* sono unitariamente equivalenti²⁴.

²²L'abbiamo dimostrato in sez. 1.3.3.

²³Piuttosto che dell'algebra delle osservabili classiche, visto che l'applicazione del principio di corrispondenza non è univoca.

²⁴La discussione di sez. 3.3.3 si può considerare una prova del teorema di Stone-von Neumann in quanto le condizioni (3.71) e (3.89) valgono necessariamente per gli spazi \mathbb{H} *finito-dimensionali* (in quanto costruiti a partire da spazi simplettici finito-dimensionali).

Non è però così nel caso di sistemi infinito-dimensionali come le teorie di campo, dove siamo costretti a scegliere tra infinite \mathbb{H} -teorie unitariamente inequivalenti (perché in linea di principio ci sono infiniti modi di specificare prodotti scalari μ che rispettano la (3.35) ma non la (3.71)).

Naturalmente, questo era vero anche nello spazio-tempo piatto, dove potevamo però imporre il forte criterio dell'invarianza della teoria rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Nello spazio-tempo curvo invece la nostra situazione comincia ad apparire disperata. Non solo abbiamo perso i concetti di “particella” e “stato di vuoto”, a cui eravamo legati, ma abbiamo individuato un nuovo elemento di grave incertezza: letteralmente, *non sappiamo quale teoria usare!*

3.3.6 L'algebraic approach

L'unico modo per risolvere la situazione è accogliere il suggerimento di Deutsch (vedi sez. 1.3.3), e *considerare contemporaneamente tutti gli stati di tutte le \mathbb{H} -teorie*. Fortunatamente il formalismo necessario è stato studiato nell'ambito delle teorie di campo special-relativistiche, ed è noto con il nome di *algebraic approach* [Haag e Kastler 1964, Haag 1993]. Prima di esaminarlo, è bene avere in mente il consueto

schema interpretativo di una \mathbb{H} -teoria

stati: sono i sottospazi unidimensionali (i “raggi”) dello spazio di Hilbert \mathbb{F} ; generalmente si considerano gli *stati normalizzati* $|\xi\rangle$ (con norma $\langle\xi|\xi\rangle = 1$);

osservabili: operatori hermitiani A su \mathbb{F} ; in particolare gli operatori di campo *smeared* $\hat{\phi}(f)$, dai quali si possono ottenere tutte le altre osservabili, sono dette *osservabili fondamentali*.

valore di aspettazione dell'osservabile A : è una funzione $\langle A \rangle : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$|\xi\rangle \mapsto \langle\xi|A|\xi\rangle; \quad (3.90)$$

misurazione dell'osservabile A : se il sistema si trova nello stato $|\xi\rangle$, la probabilità che sia misurato un valore di A nell'intervallo \mathcal{J} del suo spettro è data da

$$\mathcal{P}(A \in \mathcal{J}) = \|P_A(\mathcal{J})|\xi\rangle\|^2, \quad (3.91)$$

dove $P_A(\mathcal{J})$ è il *proiettore* sull'autospazio relativo agli autovalori di A compresi in \mathcal{J} ;

riduzione dello stato quantistico: dopo la misurazione il sistema “salterà” nello stato

$$|\xi'\rangle = \frac{P_A(\mathcal{J})|\xi\rangle}{\|P_A(\mathcal{J})|\xi\rangle\|} \quad (3.92)$$

se A è stato trovato in \mathcal{J} ; nello stato

$$|\xi''\rangle = \frac{(1 - P_A(\mathcal{J}))|\xi\rangle}{\|(1 - P_A(\mathcal{J}))|\xi\rangle\|} \quad (3.93)$$

altrimenti.

L'osservazione cruciale da fare è che le $*$ -algebre²⁵ di commutazione degli operatori hermitiani di tutte le \mathbb{H} -teorie costruite sullo stesso spazio simplettico sono isomorfe, perché la loro “legge di moltiplicazione” è sempre data dall'eq. (3.25): la struttura algebrica astratta della teoria di campo è pertanto indipendente dalla sua implementazione su un particolare spazio di Fock. Porremo questo fatto alla base della nuova impostazione.

Invece che prendere come *osservabili fondamentali* gli operatori di campo *smeared* $\hat{\phi}(f)$, è però conveniente considerare gli operatori unitari $\hat{w}(f) = \exp[i\hat{\phi}(f)]$, che offrono il vantaggio di essere limitati; l'algebra di Weyl per i nuovi operatori si scrive

$$\begin{aligned}\hat{w}(f)\hat{w}(g) &= e^{\frac{i}{2}\Omega(Ef, Eg)}\hat{w}(f+g), \\ (\hat{w}(f))^\dagger &= \hat{w}(-f).\end{aligned}\tag{3.94}$$

Gli operatori $\hat{w}(f)$ possono essere normati in modo indipendente dal particolare spazio di Fock su cui sono fatti vivere, e definiscono una C^* -algebra²⁶ astratta \mathcal{A} comune a tutte le \mathbb{H} -teorie. Ogni spazio simplettico definisce perciò una unica

teoria di campo algebrica (\mathcal{A} -teoria)

osservabile: un elemento dell'algebra di Weyl astratta \mathcal{A} ;

stato algebrico: un funzionale lineare $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfa per ogni $A \in \mathcal{A}$ la *condizione di positività*

$$\omega(A^*A) \geq 0 \tag{3.95}$$

e la *condizione di normalizzazione*

$$\omega(1) = 1; \tag{3.96}$$

valore di aspettazione dell'osservabile $a \in \mathcal{A}$ sullo stato algebrico ω : semplicemente $\omega(a)$;

misurazione dell'osservabile $a \in \mathcal{A}$: se il sistema si trova nello stato $|\xi\rangle$, la probabilità che sia misurato un valore di a nell'intervallo $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ è data da

$$\mathcal{P}(a \in \mathcal{J}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \omega(Q_i(a)Q_i(a)), \tag{3.97}$$

dove Q_i è una sequenza di polinomi in a tali da essere uniformemente limitati sullo spettro di a e da convergere in norma²⁷ alla funzione caratteristica di \mathcal{J} ;

²⁵Un'algebra \mathcal{A} su \mathbb{C} è uno spazio vettoriale dotato di una “legge di moltiplicazione” bilineare e associativa $(a_1, a_2) \rightarrow a_1 a_2$. Una $*$ -algebra possiede in più una funzione antilineare $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tale che $a^{**} = a$ e $(a_1 a_2)^* = a_2^* a_1^*$.

²⁶Un'algebra si dice *di Banach* se è normata e completa. Una C^* -algebra è una $*$ -algebra di Banach con $\|a^*\| = \|a\|$ e $\|a^* a\| = \|a\|^2$. Nel caso degli operatori hermitiani su uno spazio di Hilbert, la “moltiplicazione” è data da $A_1 A_2 = [A_1, A_2]$ e la “star” dalla coniugazione hermitiana da $A^* = A^\dagger$.

²⁷Sarebbe più immediato definire la misurazione con l'operatore di proiezione perfettamente *sharp* di a sull'intervallo \mathcal{J} , ma non è garantito che questo faccia parte della C^* -algebra.

riduzione dello stato algebrico ω : dopo che a è stato misurato e trovato nell'intervallo \mathcal{I} , il nuovo stato algebrico ω' è dato per ogni $b \in \mathcal{A}$ da

$$\omega'(b) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega(Q_i(a) b Q_i(a))}{\mathcal{P}(a \in \mathcal{I})}. \quad (3.98)$$

Ogni vettore normalizzato $|\xi\rangle \in \mathbb{F}$ di ogni \mathbb{H} -teoria dà origine a uno stato algebrico $\omega_{|\xi\rangle}$ definito da

$$\omega_{|\xi\rangle}(a) = \langle \xi | \rho(a) | \xi \rangle, \quad (3.99)$$

dove $\rho(a)$ è la rappresentazione di a come operatore hermitiano su \mathbb{F} . In questo senso la \mathcal{A} -teoria comprende tutti gli stati di tutte le \mathbb{H} -teorie. Inversamente, a ogni stato algebrico corrisponde uno stato “vettoriale” di una rappresentazione dell'algebra di Weyl su uno spazio di Hilbert:

Teorema (costruzione GNS²⁸): per ogni stato algebrico $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ su un'algebra di Weyl \mathcal{A} , esiste ed è unica (a meno di equivalenza unitaria) la tripletta $(\mathbb{F}, \rho, |\omega\rangle)$, dove \mathbb{F} è uno spazio di Hilbert (non necessariamente di Fock!), ρ è una rappresentazione di \mathcal{A} su \mathbb{F} e $|\omega\rangle$ è un vettore di \mathbb{F} tale che per ogni $a \in \mathcal{A}$,

$$\omega(a) = \langle \omega | \rho(a) | \omega \rangle; \quad (3.100)$$

inoltre $|\omega\rangle$ è un vettore *ciclico* di \mathbb{F} (cioè $\rho(\mathcal{A})|\omega\rangle$ è un insieme *denso* in \mathbb{F}).

Traccia della dimostrazione: si definisce su \mathcal{A} il “prodotto scalare” $(a, b)_{\mathcal{A}} = \omega(a^* b)$, eliminando da \mathcal{A} le osservabili c con “norma” $\omega(c^* c)$ nulla, e si completa lo spazio così ottenuto; l'azione delle osservabili sugli stati $|a\rangle$ è data da $a|b\rangle = |ab\rangle$ (*autorappresentazione*). Il vettore ciclico $|\omega\rangle$ corrisponde all'identità su questo spazio.

L'insieme degli stati “vettoriali” della costruzione GNS relativa allo stato algebrico ω viene detto *folium* di ω . Si può vedere che l' \mathbb{H} -teoria corrispondente al prodotto scalare reale μ è riprodotta dalla costruzione GNS relativa allo stato

$$\omega_{\mu}(\hat{w}(f)) = e^{-\mu(Ef, Ef)/2}, \quad (3.101)$$

la condizione (3.35) per μ assicura che ω_{μ} sia uno stato algebrico (cioè che soddisfi le eq. (3.95) e (3.96)). Ne segue che *tutti gli stati “vettoriali” di tutte le \mathbb{H} -teorie sono compresi nei folia degli stati algebrici della forma di eq. (3.101)*. Le condizioni di positività e normalizzazione, tuttavia, sono soddisfatte da una classe di stati algebrici ben più vasta! Dunque *l'allargamento della nozione di “stato” dato dalla formulazione algebrica va ben oltre quello ottenuto considerando insieme tutti gli stati di tutte le costruzioni simplettiche*.

²⁸Da I. M. Gelfand, M. A. Naimark e I. E. Segal.

3.3.7 L'ultima parola sul problema dell'equivalenza unitaria

Se comprendere tutti gli stati “vettoriali” in un'unica \mathcal{A} -teoria elimina il problema di dover scegliere tra \mathbb{H} -teorie concorrenti, l'incertezza si sposta però sulla determinazione dello stato algebrico: le procedure sperimentali di fisica delle particelle trovano infatti un riferimento teorico nel formalismo di matrice S , con stati *in* e *out* che dipendono ancora una volta dalla scelta dell' \mathbb{H} -teoria. Gli operatori di campo *smeared*, che sono gli oggetti fondamentali dell' \mathcal{A} -teoria, non appaiono invece immediatamente misurabili.

Studiando le \mathcal{A} -teorie, tuttavia, si trova un risultato che chiarifica la relazione che intercorre tra le diverse \mathbb{H} -teorie basate sulla stessa struttura simplettica classica:

Teorema di equivalenza (di Fell): Data una C^* -algebra \mathcal{A} , l'insieme degli stati “vettoriali” di una sua rappresentazione fedele è *denso* nell'insieme di tutti gli stati algebrici su \mathcal{A} .

La nozione di “densità” che compare in questo teorema è data rispetto alla *topologia debole* degli stati algebrici: per ogni stato ω , e per ogni insieme finito $\{a_i\} \subset \mathcal{A}$, si può definire la norma

$$\|\omega\|_{\{a_i\}} = \sup_{i=1,\dots,n} |\omega(a_i)|; \quad (3.102)$$

gli intorni $\|\omega - \omega'\|_{\{a_i\}} < \epsilon$, per scelte arbitrarie di $\{a_i\}$, inducono la topologia debole degli stati algebrici. Dato che in pratica la determinazione dello stato quantistico di un sistema deve avvenire attraverso un numero finito di misurazioni di precisione finita, il meglio che si può fare è individuare un intorno debole dello stato. Vale allora il

Teorema (di “equivalenza fisica”): ogni coppia di \mathbb{H} -teorie con spazi di Fock \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 ammette stati indefinitamente vicini rispetto a ogni nozione di “misurazione fisica”²⁹ ovvero per ogni $\{a_i\} \subset \mathcal{A}$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, esistono due stati $\omega_1 \in \mathbb{H}_1$, $\omega_2 \in \mathbb{H}_2$ tali che

$$\forall i, |\omega_1(a_i) - \omega_2(a_i)| < \epsilon. \quad (3.103)$$

Il risultato è di grande portata: le infinite rappresentazioni (\mathbb{H} -teorie) *unitariamente inequivalenti* della stessa algebra \mathcal{A} sono invece “*fisicamente equivalenti*” rispetto a un concetto di equivalenza opportunamente indebolito considerando il tipo di misurazioni che si può effettuare in pratica. Forse, dopotutto, l'ansia di sez. 3.3.5 era prematura!

Alla luce del teorema di Fell siamo inoltre in grado di interpretare la situazione in cui non è possibile stabilire una corrispondenza unitaria tra due \mathbb{H} -teorie perché cade la condizione (3.71) o la (3.89) (vedi sez. 3.3.3): invece

²⁹ Ancora una volta ci scontriamo con il fatto che gli operatori di proiezione sullo spettro delle osservabili non appartengono necessariamente all'algebra; non è pertanto possibile utilizzarli per definire la nostra “misurazione fisica”. Non è però irragionevole pensare di modellarla utilizzando le successioni di polinomi in \mathcal{A} , che convergono *in norma* alle funzioni caratteristiche degli intervalli reali.

di vettori non normalizzabili (come l'espressione formale (3.88) dello stato di vuoto di Minkowski dal punto di vista dell'osservatore accelerato) si possono considerare i loro "troncamenti" ottenuti scegliendo un insieme di osservabili $\{a_i\}$ e proiettando lo spazio di Fock su un suo sottospazio finito-dimensionale nel quale gli spettri degli a_i sono ragionevolmente completi e "di grana fine". Questi "troncamenti" sono arbitrariamente vicini allo stato di vuoto di Minkowski nella topologia debole degli stati algebrici.

3.3.8 Tensore di energia-impulso; condizione di Hadamard

Nell'accogliere (con un certo scetticismo) la nozione di "equivalenza fisica" delle \mathbb{H} -teorie abbiamo però dimenticato un fatto importante: ci possono essere altre osservabili *non comprese* nell'algebra generata dagli operatori di campo *smeared*, rispetto alle quali le \mathbb{H} -teorie *sono effettivamente inequivalenti*. L'esempio più importante di una tale osservabile è il tensore di energia-impulso T_{ab} , che entra come sorgente nell'equazione di Einstein. Classicamente, per il campo di Klein-Gordon reale,

$$T_{ab}(x) = \nabla_a \phi(x) \nabla_b \phi(x) - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi(x) \nabla^c \phi(x) + m^2 \phi^2(x)); \quad (3.104)$$

l'algebra di Weyl, però, contiene soltanto gli operatori di campo *smeared*, e non gli "operatori in un punto" $\phi(x)$, che sono definiti solo nel senso delle distribuzioni. Come è noto, prendere il prodotto di due distribuzioni nello stesso punto dello spazio-tempo è un'operazione matematicamente mal definita, e necessita di una *procedura di regolarizzazione*. Già nella teoria special-relativistica, il problema di definire T_{ab} si manifesta con la comparsa di una densità di energia infinita per lo stato di vuoto, che è necessario sottrarre con il *normal ordering*, oppure definendo

$$\langle \phi^2(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} F(x, x'), \quad (3.105)$$

dove

$$F(x, x') = \langle \phi(x) \phi(x') \rangle - \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle. \quad (3.106)$$

Purtroppo, non c'è modo di generalizzare questa prescrizione agli spazio-tempo curvi, perché, come abbiamo visto ripetutamente, non esiste uno stato di vuoto "preferito". Possiamo però conservare l'idea fondamentale (che, cioè, è ben definita la *differenza* di energia tra stati diversi, ma non il suo valore assoluto) e porla alla base di una trattazione *assiomatica* tesa a definire T_{ab} come un oggetto *esterno* all'algebra caratterizzato da quattro assiomi che codificano proprietà "fisicamente desiderabili":

1. quando per due stati ω' e ω'' la funzione $\langle \phi(x) \phi(x') \rangle_{\omega'} - \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_{\omega''}$ è ben definita e liscia, $\langle T_{ab} \rangle_{\omega'} - \langle T_{ab} \rangle_{\omega''}$ dovrebbe essere ottenibile con la prescrizione di *point-splitting* che abbiamo descritto per la teoria special-relativistica;
2. *località* di T_{ab} : su spazio-tempo localmente isometrici in una regione Q , stati "uguali in Q " (ovvero le cui restrizioni³⁰ a operatori di campo *smea-*

³⁰Nell'impostazione algebrica si restringono gli stati a una classe di operatori, e non il contrario!

red internamente a Q coincidono) dovrebbero avere gli stessi valori di aspettazione per $T_{ab}(x)$ con $x \in Q$;

3. analogamente a quanto avviene per i campi classici, vorremmo che l'energia-impulso fosse conservata:

$$\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0; \quad (3.107)$$

questo è assolutamente necessario nella teoria semiclassica (eq. (3.2)) in cui $\langle T_{ab} \rangle$ viene eguagliato al tensore di Einstein G_{ab} , la cui divergenza si annulla per l'identità di Bianchi;

4. infine, nel limite in cui lo spazio-tempo tende alla geometria piatta di Minkowski, vorremmo che il tensore di energia impulso coincidesse con quello regolarizzato per sottrazione dell'energia del vuoto:

$$\langle 0|T_{ab}|0 \rangle = 0 \quad (\text{Minkowski}). \quad (3.108)$$

Si può vedere che queste proprietà rendono T_{ab} *unico a meno di termini locali di curvatura*. Infatti l'assioma 1 implica che per due stati ω' e ω'' relativi alla stessa geometria dello spazio-tempo, e per due "prescrizioni" T_{ab} e \tilde{T}_{ab} per il tensore di energia-impulso,

$$\langle T_{ab} \rangle_{\omega'} - \langle T_{ab} \rangle_{\omega''} = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_{\omega'} - \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_{\omega''}; \quad (3.109)$$

ne segue che la quantità $t_{ab} = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_{\omega} - \langle T_{ab} \rangle_{\omega}$ è *indipendente dallo stato* ω ; per l'assioma di località, $t_{ab}(x)$ può allora dipendere soltanto dalla geometria dello spazio-tempo in un intorno di x . Gli assiomi 3 e 4, insieme all'assunzione che l'unico parametro che compare in t_{ab} sia la massa m del campo e che t_{ab} sia costruito con termini lineari o quadratici nella curvatura, riducono i candidati a $m^2 G_{ab}$ e alle derivate funzionali di R^2 e $R_{ab}R^{ab}$ rispetto alla metrica.

Abbiamo pertanto provato l'unicità³¹ del T_{ab} "assiomatico". Cosa si può dire della sua esistenza? È necessario trovare una *bi-distribuzione* $H(x, x')$, con una appropriata struttura singolare nel limite $x \rightarrow x'$, da sottrarre a $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle$ per poi prendere il limite $x \rightarrow x'$ e inserirlo nell'eq. (3.104); $H(x, x')$ deve essere costruita *localmente* (assioma 2), soddisfare l'equazione d'onda in x e x' (per l'assioma 3) e eguagliare $\langle 0|T_{ab}|0 \rangle$ nello spazio-tempo di Minkowski (assioma 4). Il problema è stato risolto da J. Hadamard nel 1923, sebbene in una versione leggermente diversa: Hadamard cercava funzioni di Green per l'equazione di Laplace nello spazio euclideo piatto n -dimensionale. La struttura singolare della sua soluzione era determinata da un termine proporzionale a $1/\sigma^s(x, x')$, dove $\sigma(x, x')$ era la distanza geodetica tra x e x' , e $s = (n-2)/2$. L'estensione di questo risultato a una varietà differenziabile lorentziana è un problema sottile che implica, tra l'altro, l'aggiunta di un termine *ad hoc* per soddisfare³² gli assiomi 3 e 4.

³¹Sebbene la clausola "a meno di termini locali di curvatura" non sia così innocua come sembra: l'ambiguità nella definizione di T_{ab} non può essere risolta senza possedere una teoria completa della *quantum gravity* e costituisce un grave ostacolo all'utilizzo della *teoria semiclassica* per calcolare effetti di *back-reaction*.

³²Fare questo però genera la *trace anomaly* dei campi conformemente invarianti, per i quali classicamente $T^a_a = 0$, mentre $\langle T^a_a \rangle \neq 0$! L'investigazione di questa anomalia costituisce una delle diramazioni della teoria dei campi nello spazio-tempo curvo, con una estesa letteratura.

Chiaramente, questa prescrizione definisce $\langle \phi^2(x) \rangle$, e dunque $\langle T_{ab} \rangle$, per tutti gli stati per i quali $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle$ abbia la struttura singolare “di Hadamard” a breve distanza. Uno stato che soddisfa questa condizione è detto appunto *di Hadamard*. Vista l'importanza di T_{ab} come osservabile, è naturale richiedere che tutti gli stati quantistici *fisicamente accettabili* soddisfino la *condizione di Hadamard*. È logico però chiedersi se esista in ogni spazio-tempo globalmente iperbolico “un numero sufficiente” di stati di questo tipo. A questo proposito, si prova che:

1. in uno spazio-tempo *statico*, lo stato di vuoto e gli stati “a n particelle” ottenuti con la costruzione di sez. 3.3.1 (dunque un insieme di vettori denso nello spazio di Fock della teoria) soddisfano la condizione di Hadamard [Fulling et al. 1981];
2. la condizione di Hadamard è preservata nell'evoluzione dinamica del campo [Kay e Wald 1991];
3. l'esistenza di un insieme denso di stati di Hadamard può essere provata per arbitrari spazio-tempo globalmente iperbolici deformandoli in modo che siano isometrici “nel passato” a uno spazio-tempo statico, identificando i generici stati del campo con quelli della costruzione *in*, e applicando i due risultati appena enunciati.

Abbiamo così aggiunto una osservabile “esterna” all'algebra di Weyl degli operatori di campo *smeared*, restringendo opportunamente lo spazio degli stati algebrici. Che cosa cambia, però, dal punto di vista dell'equivalenza (unitaria oppure “fisica”) delle diverse \mathbb{H} -teorie, ora che per gli stati è richiesta la condizione di Hadamard?

Cambiano molte cose: *per universi chiusi* (spazio-tempo con superfici di Cauchy compatte) *tutti gli stati di vuoto di Hadamard definiscono (attraverso la costruzione GNS) rappresentazioni unitariamente equivalenti dell'algebra \mathcal{A}* . La prova passa per il risultato di [Fulling et al. 1981], che dimostrano che per un universo chiuso *statico* nel passato e nel futuro le costruzioni *in* e *out* sono unitariamente equivalenti (esiste la matrice S); deformando un arbitrario universo chiuso in modo che sia statico nel passato e nel futuro, è possibile identificare due generici stati di Hadamard ω' e ω'' con due stati *out*: le rappresentazioni costruite da ω' e ω'' sono pertanto equivalenti alla costruzione *in* e perciò anche tra di loro.

Per universi aperti, invece, [Verch 1994] ha provato che \mathbb{H} -teorie di *Hadamard* unitariamente inequivalenti *non possono essere distinte* compiendo solo misurazioni (*anche perfette*, a differenza del teorema di Fell) su regioni *limitate* dello spazio-tempo. Non è necessario che le osservabili misurate appartengano all'algebra di Weyl: devono però soddisfare l'assioma di località di pag. 94. Il motivo fisico alla base di questi risultati è facile da capire. Il teorema di Stone-von Neumann non vale per i campi quantistici, perché questi sono dotati di infiniti gradi di libertà: la condizione di Hadamard sul limite a breve distanza della funzione a due punti impone un *cut-off* ultravioletto efficace ai gradi di libertà del campo; gli infiniti gradi di libertà del lontano infrarosso possono

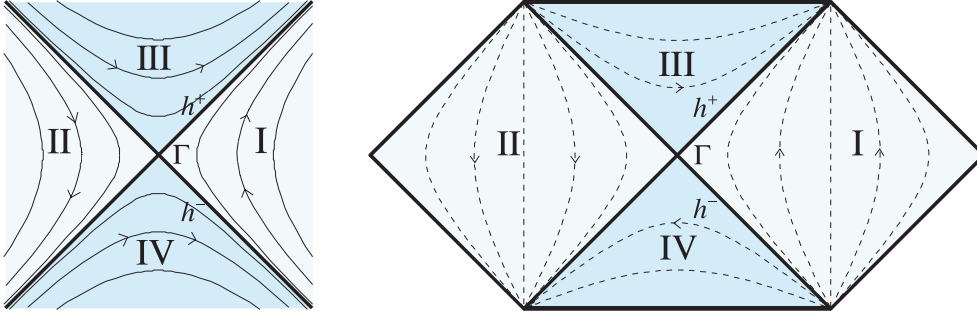


Figura 3.2: La struttura dello spazio-tempo di Minkowski “dal punto di vista” di Axel; diagramma di Penrose (vedi app. B) dello spazio-tempo di Schwarzschild esteso

In entrambi i casi sono tracciate le orbite del campo di Killing “di stazionarietà”; è evidente come la struttura dell’orizzonte biforcuto sia la stessa.

essere controllati eliminandoli effettivamente (se l’universo è chiuso e esiste pertanto una frequenza minima) oppure rendendoli inaccessibili all’osservazione, e quindi, si può argomentare, alla descrizione teorica.

In conclusione, le discussioni svolte in questa sezione e in quella precedente dimostrano che *l’apparente ambiguità nella definizione della teoria di campo può essere risolta adottando un concetto “fisico” di misurazione e/o imponendo la condizione “fisica” di Hadamard sugli stati quantistici*. Tenendo presente questi accorgimenti, è perfettamente legittimo limitarsi a una particolare \mathbb{H} -teoria (e non alla più generale \mathcal{A} -teoria) nello studio della teoria dei campi nello spazio-tempo curvo.

3.4 L’effetto Unruh negli spazio-tempo curvi

Vogliamo ora generalizzare agli spazio-tempo curvi l’effetto Unruh, che abbiamo esaminato estesamente nel cap. 1 per lo spazio-tempo piatto di Minkowski. Ritorniamo per un momento alla struttura dello spazio-tempo indotta dal moto di Axel (sez. 1.2.1-1.2.2; fig. 3.2): muovendosi nella regione I, Axel si trova sempre nel passato causale della regione III (dalla quale non può ricevere messaggi) e nel futuro causale della regione IV (alla quale non può inviarne), mentre è sempre in relazione *space-like* con gli eventi della regione II. h^+ e h^- sono pertanto *orizzonti causali*, in quanto delimitano il passato e il futuro causale della *worldline* stazionaria di Axel.

Il campo di Killing $b^a = g(x \partial_t + t \partial_x)$ è tangente alle traiettorie dei *boosts* di Lorentz che collegano i sistemi di riferimento istantaneamente in quiete con Axel a tempi diversi; la *worldline* di Axel è contraddistinta da $b^a b_a = -1$. Ora, b^a è tangente (e normale) agli orizzonti h^+ e h^- e si annulla nella loro intersezione, la superficie bidimensionale $x = t = 0$. Vedremo come questa proprietà sia cruciale per la sussistenza dell’effetto Unruh nello spazio di Minkowski, e permetta un’estensione del concetto agli spazio-tempo curvi.

3.4.1 Orizzonti di Killing biforcati

In generale, una ipersuperficie nulla h che ammette un campo di Killing χ^a *normale* si dice *orizzonte di Killing*; se in più χ^a si annulla su una ipersuperficie *space-like* bidimensionale $\Gamma \subset h$, la superficie h si dice *orizzonte di Killing biforcato*.

È semplice vedere che in prossimità di Γ le orbite di χ^a assomigliano molto a quelle di b^a nel caso di Minkowski: come è noto (vedi app. A), un campo di Killing χ^a è determinato in tutto lo spazio-tempo dal suo valore e dal valore di $\nabla_a \chi_b$ in un punto. Se ci mettiamo sulla superficie Γ , oltre a χ^a dovranno annullarsi anche le componenti $\nabla_a \chi_b$ nelle direzioni tangenti a Γ . Ci riduciamo così a un problema bidimensionale, e possiamo semplificare la discussione considerando Γ come un punto in una varietà differenziale a due dimensioni. Per studiare la struttura delle orbite di χ^a in un intorno di Γ , possiamo esaminare l'azione di χ^a (cioè l'azione infinitesima dell'isometria generata da χ^a) su un vettore v^b in Γ , che è data (app. A) da

$$\mathcal{L}_{\chi^a} v^b = [\chi, v]^b = -v^a \nabla_a \chi^b. \quad (3.110)$$

Poiché l'equazione di Killing implica che $\nabla_a \chi_b$ è un tensore antisimmetrico, in una varietà bidimensionale lorentziana la sua azione è, a meno di un fattore di scala, quella di un *boost* di Lorentz infinitesimo:

$$\nabla_a \chi^b \doteq c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.111)$$

dunque le orbite hanno proprio la struttura di fig. 3.2. In effetti, la condizione che il campo di Killing χ^a si annulli in Γ è sufficiente a provare che χ^a è normale alla superficie nulla h . Visto infatti che i vettori nulli su Γ sono portati da χ^a in multipli di sé stessi, e che le isometrie generate da campi di Killing portano geodetiche in geodetiche (app. A), χ^a deve essere dovunque tangente (e quindi normale) alle geodetiche nulle che generano h .

Poiché χ^a è dunque tangente alla superficie nulla h , su tutto h varrà $\chi^a \chi_a = 0$; allora $\nabla^a(\chi^a \chi_a)$ sarà ancora normale ad h , e dovrà esistere una funzione κ (detta *gravità superficiale*) tale che

$$\nabla^a(\chi^b \chi_b) = -2\kappa \chi^a \quad \text{su } h. \quad (3.112)$$

È possibile dimostrare che κ è costante lungo ogni orbita di χ^a : prendendo la derivata di Lie dei due termini dell'eq. (3.112) tutte le derivate $\mathcal{L}_{\xi^a} \xi^b$ si annullano e rimane solo

$$\mathcal{L}_{\xi^a} \kappa = 0; \quad (3.113)$$

con un calcolo un poco più complicato (Vedi ad es. [Wald 1984a]) si può provare che

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a \chi^b)(\nabla_a \chi_b); \quad (3.114)$$

e che inoltre

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow h} g(-\chi^a \chi_a)^{1/2}, \quad (3.115)$$

dove g è il modulo dell'accelerazione³³ $\chi^b \nabla_b \chi^c / (-\chi^a \chi_a)$ delle orbite di χ^b . Differenziando su Γ l'eq. (3.114) in una direzione tangente, otteniamo

$$\begin{aligned} \kappa s^a \nabla_a \kappa &= -\frac{1}{2} s^c (\nabla^a \chi^b) (\nabla_c \nabla_a \chi_b) = \\ &= \frac{1}{2} s^c (\nabla^a \chi^b) (R_{abc}{}^d \chi_d) = 0, \end{aligned} \quad (3.116)$$

dove abbiamo utilizzato l'eq. (A.12) e il fatto che $\chi^a = 0$ su Γ ; dunque κ non cambia spostandosi tra le diverse geodetiche nulle che generano Γ , e la gravità superficiale κ è costante su tutto l'orizzonte di Killing biforcuto.

3.4.2 L'effetto Unruh

Poniamoci ora nel caso di un generico spazio-tempo globalmente iperbolico (\mathcal{M}, g_{ab}) che possieda un orizzonte di Killing biforcuto e una superficie di Cauchy Σ che passa per la superficie di biforcazione Γ . Per il ragionamento che abbiamo svolto nella sezione precedente, lo spazio-tempo risulta diviso in 4 regioni analoghe a quelle di fig. 3.2, definite da

$$\begin{aligned} \text{regione I} &= I^-(h^+) \cap I^+(h^-), \\ \text{regione II} &= I^+(h^+) \cap I^-(h^-), \\ \text{regione III} &= J^+(\Gamma), \\ \text{regione IV} &= J^-(\Gamma), \end{aligned} \quad (3.117)$$

dove con h^+ e h^- distinguamo le porzioni di orizzonte biforcuto dirette nelle due direzioni nulle a partire da Γ . Per un insieme Q , $I^+(Q)$ e $I^-(Q)$ designano gli insiemi futuro e passato *cronologici* di Q (dati dagli eventi raggiungibili dai punti di Q con curve *time-like* dirette rispettivamente nel futuro e nel passato); $J^+(Q)$ e $J^-(Q)$ denotano invece gli insiemi futuro e passato *causali* (gli insiemi degli eventi raggiungibili da Q con curve *time-like* o *null-like*).

Come nel caso dello spazio-tempo di Minkowski, è allora possibile formulare una teoria di campo per tutto \mathcal{M} considerando dati iniziali su Σ per i campi classici, oppure scrivere una teoria *per la sola regione I* utilizzando la superficie di Cauchy $\Sigma \cap I$.

Si può provare che *la restrizione alla regione I dello stato di vuoto quantistico “della teoria completa” è uno stato termico alla temperatura $\kappa/2\pi$ rispetto alla nozione di energia indotta dal campo di Killing χ^a* [Kay e Wald 1991]. Precisiamo meglio il significato di questa affermazione:

1. per stato di vuoto quantistico “della teoria completa” si intende lo stato di vuoto dell'HL-teoria con funzioni di modo *a frequenza positiva* rispetto al “tempo affine” delle geodetiche nulle che generano h . Nel caso particolare dello spazio-tempo di Minkowski, questo coincide con la richiesta di modi a frequenza positiva rispetto al tempo coordinato inerziale t ;

³³Se χ^b all'infinito tende a una pura traslazione temporale (come nel caso di Minkowski e della geometria di Schwarzschild, vedi sez. 4.1.2), $(-\chi^a \chi_a)^{1/2}$ è il *fattore di redshift gravitazionale* (nota 4 di pag. 105). κ ha allora l'interpretazione di forza che deve essere esercitata all'infinito per tenere ferma una *test-particle* vicino all'orizzonte; ovvero, di *gravità superficiale*.

2. in generale, tuttavia, il “tempo affine” dell’orizzonte non ha alcuna interpretazione fisica come tempo di una classe di osservatori; è comunque estremamente ragionevole imporre questa condizione perché *uno stato di vuoto che soddisfa alla condizione di Hadamard ed è invariante rispetto alle isometrie generate da χ^a* (come è logico aspettarsi, almeno se χ^a è il campo di Killing di stazionarietà dello spazio-tempo) *appartiene necessariamente, se esiste*³⁴, *a una \mathbb{H} -teoria con modi a frequenza positiva rispetto al “tempo affine”* [Kay e Wald 1991];
3. per stato termico alla temperatura $\kappa/2\pi$ si intende una matrice di densità in cui a ogni stato è attribuito il peso di Boltzmann³⁵ $e^{-2\pi E/\kappa}$, dove l’energia totale E è misurata rispetto al “tempo di Killing” v delle traiettorie di χ^a , che soddisfa $\chi^a \nabla_a v = 1$. Nel caso di Minkowski v coincide con il tempo proprio di Axel, mentre per spazio-tempo generali assume il significato di “tempo all’infinito spaziale” quando in quel limite χ^a tende a una traslazione temporale (metriche asintoticamente statiche).

La ragione essenziale di questo risultato sta nella relazione, sull’orizzonte h , tra il tempo di Killing v e il parametro affine V delle geodetiche nulle, dovuta solamente alla struttura di orizzonte biforcuto di h . *Tutte le altre simmetrie dello spazio-tempo presenti nel caso di Minkowski non sono pertanto essenziali per il risultato.*

Abbiamo già dimostrato che su h il campo di Killing χ^a è tangente alle generatrici nulle di h . Effettivamente, dall’eq. (3.112) segue che

$$\chi^a \nabla_a \chi^b = \kappa \chi^b, \quad (3.118)$$

che assomiglia all’equazione del trasporto parallelo che definisce le geodetiche (app. A), tranne che per il termine di destra non nullo: questo determina il fattore di proporzionalità tra χ^a e il vettore tangente u^a delle geodetiche nulle, dato da

$$u^a = e^{-\kappa v} \chi^a; \quad (3.119)$$

si può infatti verificare che questa definizione di u^a soddisfa l’equazione delle geodetiche $u^a \nabla_a u^b = 0$. Se ora sostituiamo u^a nella relazione che definisce il parametro affine V delle geodetiche nulle, otteniamo

$$1 = u^a \nabla_a V = e^{-\kappa v} \chi^a \nabla_a V = e^{-\kappa v} \frac{dV}{dv}; \quad (3.120)$$

risolvendo poi l’equazione differenziale per V , si trova

$$V = \kappa^{-1} e^{\kappa v}, \quad (3.121)$$

³⁴Non può esistere, ad esempio, se χ^a non è globalmente *time-like* nelle regioni I e II. Se però esiste, se ne può provare, sotto alcune ipotesi aggiuntive, l’unicità.

³⁵In realtà questo è possibile solo per teorie di campo con uno spettro discreto per le soluzioni classiche (cioè teorie *in a box*); nel caso più generale si prova invece la *condizione KMS* (da R. Kubo, P. C. Martin, J. Schwinger; vedi [Haag 1993]), che caratterizza i sistemi termodinamici infinito-dimensionali all’equilibrio.

e dunque

$$u^a = \frac{1}{\kappa V} \chi^a. \quad (3.122)$$

L'eq. (3.121) *riproduce esattamente l'eq. (1.121)* che regolava nel caso dello spazio-tempo di Minkowski la relazione tra la coordinata nulla *inerziale* V e la coordinata nulla *di Axel* v . Ne segue che è possibile ripetere l'analisi che porta alla costruzione dei *modi di Unruh*, quantizzando prima rispetto ai modi a frequenza positiva “ v ” per poi costruire con questi i modi “di Unruh” a frequenza positiva “ V ”; in particolare, si ottiene un'equazione simile alla (1.137), dalla quale segue il carattere termico della matrice di densità finale.

La temperatura misurata localmente da un osservatore che segue le orbite di χ^a differirà dalla temperatura di Hawking $T_H = \kappa/2\pi$ di un fattore dato dal rapporto tra il tempo di Killing v e il tempo proprio dell'osservatore:

$$T_{\text{loc}} = (-\chi_a \chi^a)^{-1/2} \frac{\kappa}{2\pi}; \quad (3.123)$$

supponiamo che χ^a tenda a una traslazione temporale all'infinito spaziale; in quel limite $\chi_a \chi^a \rightarrow -1$ e la temperatura osservata sarà proprio T_H ; la temperatura misurata localmente da osservatori più vicini a Γ sarà invece *blue-shifted* di un fattore $(-\chi_a \chi^a)^{-1/2}$ (dunque *infinitamente blue-shifted* per gli osservatori quasi *light-like* schiacciati su h , dove $\chi_a \chi^a \rightarrow 0$).

L'eq. (3.115) dimostra che la formula (3.123) riproduce correttamente la temperatura $g/2\pi$ dell'effetto Unruh “piatto”; *nel limite di traiettorie molto vicine ad h* , comunque, la temperatura osservata è *la stessa in qualsiasi spazio-tempo con un orizzonte biforcuto*. Il motivo fisico è che la struttura delle orbite di χ^a nei pressi dell'orizzonte è, in un certo senso, *singolare*, e domina tutti gli effetti di curvatura dello spazio-tempo, che sono sempre *finiti*.

3.4.3 Un assaggio di effetto Hawking e un addio allo spazio-tempo di Minkowski

Sarebbe deludente lasciare questo capitolo senza almeno un esempio esplicito di effetto Unruh nello spazio-tempo curvo. Un caso interessante è dato dallo spazio-tempo di Schwarzschild esteso (app. B), il cui campo di Killing di staticità, $(\partial_t)^a$, genera un orizzonte di Killing biforcuto (fig. 3.2). La gravità superficiale è $\kappa = 1/4M$, e lo stato di vuoto di Hadamard, invariante rispetto alle isometrie generate da $(\partial_t)^a$, è detto *vuoto di Hartle-Hawking* [Hartle e Hawking 1976].

Questo stato sarà dunque uno stato termico con una temperatura osservata all'infinito $T_H = 1/8\pi M$, o, rimettendo a posto le costanti, di

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} = 6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{K}, \quad (3.124)$$

dove M_\odot è la massa del sole. Tuttavia, sebbene la temperatura sia la stessa, *questo non è l'effetto Hawking*, che descrive il processo di creazione di particelle da parte di un buco nero formatosi per collasso gravitazionale, e che studieremo in sez. 4.3. Il vuoto di Hartle-Hawking, infatti, oltre che dalla singolarità di

buco bianco (già per sé stessa problematica dal punto di vista della “fisicità”), implica una radiazione termica *entrante dall'infinito* della regione I *correlata* con un simile radiazione entrante dall'infinito della regione II.

A differenza dell'effetto Hawking, inoltre, l'effetto Unruh non può essere esteso ai buchi neri rotanti “eterni” (ne parleremo in sez. 4.2.2); per questi *non esiste* uno stato di vuoto con le caratteristiche richieste più sopra al punto 2.

Dal prossimo capitolo in poi ci occuperemo esclusivamente di buchi neri e dei loro aspetti termici. Prima di abbandonare definitivamente lo spazio-tempo di Minkowski, vogliamo fare un'ultima considerazione. Abbiamo visto (in sez. 1.1.7) come per moti stazionari diversi dal moto uniformemente accelerato un *detector* rilevi una radiazione “quasi-termica”. Ci si può chiedere se i campi di Killing associati a questi moti inducano una struttura dello spazio-tempo simile a quella che abbiamo utilizzato per caratterizzare geometricamente l'effetto Unruh.

La risposta è no (evidentemente il “quasi” è molto importante): considerando il più generale campo di Killing ottenibile combinando le 10 isometrie dello spazio-tempo di Minkowski e richiedendo che questo si annulli su una superficie bidimensionale, non si trova nessuna soluzione oltre ai *boosts* puri, corrispondenti al moto uniformemente accelerato di *Topo Frettoloso*³⁶.

³⁶Il più generale campo di Killing dello spazio-tempo di Minkowski è dato da

$$\begin{aligned} b^a = & g_x(x \partial_t + t \partial_x) + g_y(y \partial_t + t \partial_y) + g_z(z \partial_t + t \partial_z) + \\ & + f_x(z \partial_y - y \partial_z) + f_y(x \partial_z - z \partial_x) + f_z(y \partial_x - x \partial_y) + \\ & + h_t \partial_t + h_x \partial_x + h_y \partial_y + h_z \partial_z \end{aligned} \quad (3.125)$$

(vedi anche la sez. 1.3.1); b^a si annulla per le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & 0 & -f_z & f_y \\ g_y & f_z & 0 & -f_x \\ g_z & -f_y & f_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_t \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}; \quad (3.126)$$

perché b^a si annulli su una superficie bidimensionale il rango della matrice al primo termine deve essere < 3 ; calcolando esplicitamente i minori, si vede che perché ciò avvenga devono annullarsi tutti gli (f, g, h) oppure deve essere $f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = 0$. Questo corrisponde a *boosts* ortogonali alle rotazioni spaziali; si vede però che la struttura dello spazio-tempo che si viene a creare non porta a un orizzonte biforcuto se non nel caso di f tutti nulli (l'effetto Unruh “puro”).

Capitolo 4

Termodinamica dei buchi neri

Già nel 1795 Laplace si era reso conto che, nel quadro della gravitazione newtoniana e della teoria corpuscolare della luce, un oggetto dotato di massa sufficientemente grande è in grado di catturare tutti i raggi di luce che emette o che lo raggiungono, risultando invisibile. Per il concetto contemporaneo di *buco nero* si è dovuto aspettare il 1939, quando Oppenheimer e Snyder, studiando con i metodi della relatività generali i processi di collasso stellare, hanno scoperto che è possibile che si formi una regione di spazio-tempo alla quale è preclusa la comunicazione con il resto dell'universo.

I buchi neri costituiscono uno degli oggetti più affascinanti della fisica moderna, e la letteratura sull'argomento è immensa. Questo capitolo non si propone, ovviamente, di rivaleggiare con i testi “sacri” [Misner et al. 1973, Wald 1984a, Chandrasekhar 1983], dai quali invece attinge liberamente per proporre un veloce itinerario che ci conduca a quanto a noi interessa maggiormente: le leggi della *termodinamica dei buchi neri* (sez. 4.2) e il *quantum black hole* (sez. 4.3).

4.1 La geometria di Schwarzschild

Storicamente, lo studio dei buchi neri si è concentrato in un primo momento sull'analisi di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein, prima fra tutte la metrica derivata da Schwarzschild nel 1916, che descrive il buco nero più semplice perché dotato di maggiore simmetria. Nel 1965 un articolo di Roger Penrose¹ ha dato il via a una nuova fase dell'indagine, caratterizzata dall'uso di *metodi globali*, attenti cioè alla struttura complessiva dello spazio-tempo e in particolare alla sua *struttura causale* (si veda l'app. B per una breve introduzione). Nella nostra esposizione studieremo brevemente una soluzione esatta (proprio quella di Schwarzschild) per evidenziarne poi le proprietà globali e ottenere conseguentemente una definizione generale di buco nero.

¹[Penrose 1965], il primo dei lavori sulle “singolarità”.

4.1.1 Il campo esterno di una stella sferica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (4.1)$$

Questa è la venerabile *metrica di Schwarzschild*, originariamente derivata per descrivere il campo gravitazionale *esterno* di una stella neutra *a simmetria sferica*. La sua rilevanza deriva dal fatto che *se una regione di spazio-tempo che soddisfa alle equazioni di Einstein nel vuoto è sfericamente simmetrica, allora la sua geometria coincide con una parte o con tutta la geometria descritta dall'eq. (4.1) (teorema di Birkhoff)*; in altre parole, *la più generale soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto dotata di simmetria sferica è quella di Schwarzschild*.

Precisiamo innanzitutto che, vista l'invarianza per diffeomorfismi della teoria, la definizione che bisogna dare di “simmetria sferica” non può essere ingenuamente legata a una particolare scelta di coordinate. Diremo invece che una regione di spazio è sfericamente simmetrica se *ammette un gruppo di isometrie isomorfo al gruppo delle rotazioni spaziali $SO(3)$, e se le orbite di queste isometrie foliano lo spazio in 2-superfici con la topologia di una superficie sferica S^2* . Il teorema di Birkhoff può essere provato² scrivendo la metrica in una forma sufficientemente generale, e poi dimostrando che le equazioni di Einstein implicano per un'opportuna scelta di coordinate l'eq. (4.1).

Quando diciamo che la metrica di Schwarzschild descrive il campo gravitazionale *esterno* di una stella, intendiamo che l'espressione di eq. (4.1) è valida solo per $r > r_0(t)$, dove $r_0(t)$ è il “raggio stellare”; per raggi inferiori è naturalmente necessario scrivere un'altra metrica che sia soluzione delle equazioni di Einstein *con materia*. Abbiamo espresso r_0 come funzione di t perché prevediamo che la stella possa evolversi mutando il suo raggio. Dato che le equazioni di Einstein proibiscono onde gravitazionali di monopolo, l'evoluzione a stretta simmetria sferica della metrica interna non può però in alcun modo influire sulla metrica della regione esterna. È per questo che, *con la sola assunzione di simmetria sferica*, il teorema di Birkhoff implica che lo spazio-tempo sia stazionario³.

I nomi delle coordinate di eq. (4.1) non sono scelti a caso: per $r \rightarrow \infty$ la metrica tende alla metrica piatta di Minkowski (espressa in coordinate sferiche), cosicché t ha l'interpretazione di “tempo all'infinito”; dato poi che l'area delle superfici sferiche descritte da θ e ϕ è $4\pi r^2$, r è effettivamente il “raggio fisico”. Il parametro M invece merita il suo nome perché si comporta come *massa gravitazionale newtoniana all'infinito* (vedi nota 6 a pag. 106).

Tutto questo è vero nella regione $r > 2M$; per $r < 2M$, invece, le coordinate t ed r “si scambiano i ruoli”: t diventa *space-like* ed r *time-like*. Inoltre, sulla superficie $r = 2M$ e per $r = 0$ la metrica diviene *singolare*: come vedremo, per $r = 2M$ ciò è causato dall'inadeguatezza delle coordinate (t, r, θ, ϕ) a descrivere la geometria dello spazio-tempo; $r = 0$, invece, è una vera e propria *singolarità fisica*.

²Per questo, e in generale per lo studio della geometria di Schwarzschild, si veda [Misner et al. 1973].

³Abbiamo definito il concetto di *spazio-tempo stazionario* in sez. 3.3.1.

4.1.2 Moto delle *test-particles* nella geometria di Schwarzschild

Lo studio delle geodetiche nella geometria di Schwarzschild è di per sé interessante perché costituisce il “problema di Keplero” general-relativistico; in più, ci permetterà di esaminare da vicino le “singolarità” $r = 2M$ e $r = 0$. In questa sezione lasciamo che la metrica di Schwarzschild descriva anche la regione che dovrebbe essere coperta dalla metrica interna della stella; le geodetiche che non si spingono oltre $r = r_0$, tuttavia, sono necessariamente comuni alle due geometrie (Schwarzschild e stella a simmetria sferica).

Come sappiamo (vedi app. A), se uno spazio-tempo ammette un campo di Killing ξ^a , lungo ogni geodetica con vettore tangente u^a sarà conservato lo scalare $u^a \xi_a$. La metrica di eq. (4.1) ammette quattro campi di Killing indipendenti: la “traslazione nel tempo” $(\partial_t)^a$ e i tre generatori delle rotazioni spaziali. Questo ci permette di definire per ogni geodetica *time-like* $\mathcal{P}(\tau) \equiv (t, r, \theta, \phi)(\tau)$ quattro grandezze conservate: l’*energia all’infinito*⁴

$$E = m(1 - 2M/r) \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.5)$$

e le tre componenti del *momento angolare all’infinito*, che scriviamo introducendo le coordinate “cartesiane”⁵ x^i :

$$L_i = m \epsilon_{ijk} x^j \frac{dx^k}{d\tau}. \quad (4.6)$$

Senza perdita di generalità, possiamo allora porci nel caso di *geodetiche equatoriali* ($\theta = \pi/2$) e considerare le grandezze conservate E e

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (4.7)$$

La condizione di *mass-shell* $u^a u_a = -1$ implica

$$-1 = -(1 - 2M/r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + (1 - 2M/r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2; \quad (4.8)$$

$$-1 = -\frac{(E/m)^2}{1 - 2M/r} + \frac{1}{1 - 2M/r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{(L/m)^2}{r^2}, \quad (4.9)$$

⁴L’eq. (4.5) è conosciuta come *legge del red-shift gravitazionale* perché permette di calcolare il modo in cui l’energia di una particella (o di un fotone) misurata localmente cambia mentre questa si muove via da o verso l’origine del campo gravitazionale. Un osservatore fermo in r' nella geometria di Schwarzschild è caratterizzato dalla tetrad

$$\left((1 - 2M/r')^{-1/2} \partial_t, (1 - 2M/r')^{1/2} \partial_r, r'^{-1} \partial_\theta, (r' \sin \theta)^{-1} \partial_\phi \right), \quad (4.2)$$

e l’energia di una particella che lo sorpassa con 4-velocità $u^a = d\mathcal{P}/d\tau$ gli appare

$$E_{\text{loc}} = (1 - 2M/r')^{-1/2} (\partial_t)^a m u_a = m(1 - 2M/r')^{1/2} dt/d\tau; \quad (4.3)$$

$$E_{\text{loc}} = (1 - 2M/r')^{-1/2} E; \quad (4.4)$$

l’energia all’infinito E è perciò *red-shifted* rispetto a quella misurata a raggi finiti.

⁵Ovvero legate nel modo usuale da seni e coseni alle coordinate sferiche (r, θ, ϕ) .

ovvero

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2(r), \quad (4.10)$$

dove

$$\tilde{V}^2(r) = (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2), \quad (4.11)$$

$$\tilde{E} = E/m, \quad \tilde{L} = L/m. \quad (4.12)$$

L'eq. (4.10) governa il moto radiale di una *test-particle* nel *potenziale effettivo* \tilde{V} ; le eq. (4.5) e (4.6) completano la descrizione della traiettoria nello spazio-tempo.

Il potenziale $\tilde{V}(r) = [(1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)]^{1/2}$ è funzione del parametro \tilde{L}/M , ma tende comunque a 1 per $r \rightarrow \infty$ e a 0 per $r \rightarrow 2M$; per $r < 2M$ è definito soltanto \tilde{V}^2 , che è negativo e assume valori arbitrariamente grandi in valore assoluto per $r \rightarrow 0$. Avremo perciò traiettorie “libere” provenienti dal $r \rightarrow +\infty$ soltanto per $\tilde{E} \geq 1$. Inoltre, le geodetiche che superano la superficie $r = 2M$ provenendo dalla regione esterna non possono più invertire il proprio moto (perché $(dr/d\tau)^2$ non può annullarsi) e sono condannate a incontrare la singolarità $r = 0$. Le caratteristiche qualitative del moto radiale per diverse costanti del moto \tilde{E} e \tilde{L} si possono inferire dal grafico di $\tilde{V}(r)$ e sono discusse in fig. 4.1. Le geodetiche che si mantengono a grandi raggi e velocità non relativistiche approssimano molto bene le orbite coniche di Keplero⁶.

Si noti che le geodetiche che attraversano la superficie $r = 2M$ sono regolari per tutti gli $r > 0$; l'attraversamento, a partire da $r \rightarrow +\infty$, avviene entro un *valore finito* del tempo proprio τ e gli eventuali osservatori in moto su quelle geodetiche non percepiscono nessun effetto fisico che permetta loro di “accorgersi” dell'orizzonte. *Geometricamente*, pertanto, la teoria è ben definita; la degenerazione della metrica (4.1) in $r = 2M$ è dovuta al peculiare rapporto tra il tempo t degli osservatori “all'infinito spaziale” e il tempo proprio delle geodetiche: dato che $dt/d\tau \rightarrow +\infty$ per $r \rightarrow 2M$, a tempi propri che si avvicinano al tempo finito di attraversamento corrispondono tempi “all'infinito” sempre più grandi. Dal punto di vista degli osservatori all'infinito, insomma, le *test-particles* appaiono avvicinarsi sempre più lentamente all'orizzonte degli

⁶ *Limite newtoniano* dell'eq. (4.10): per $|\tilde{E} - 1| \ll 1$, $r \ll M$, $r \ll \tilde{L}$ si può definire l'*energia cinetica non relativistica all'infinito*

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}(\tilde{E}^2 - 1) \approx \frac{1}{2}v_\infty^2, \quad (4.15)$$

(dato che $E \approx m(1 - v_\infty^2)^{-1/2}$, dove $v_\infty = |dx^i/d\tau|$); il *potenziale effettivo newtoniano* vale

$$V_N(r) = \frac{1}{2}(\tilde{V}^2 - 1) \approx -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}. \quad (4.16)$$

L'equazione del moto radiale si scrive allora

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{M}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2} = \tilde{\epsilon}, \quad (4.17)$$

e riproduce esattamente, insieme a $d\phi/d\tau = \tilde{L}/r^2$, le equazioni newtoniane per il moto intorno a una massa M .

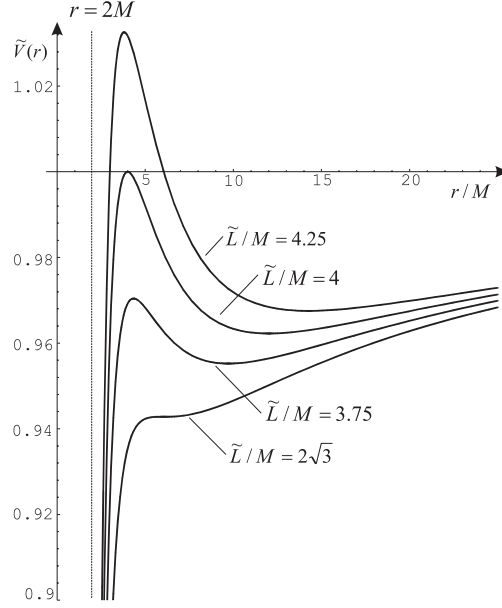


Figura 4.1: Potenziale efficace \tilde{V} per il moto radiale di *test particles* massive nella geometria di Schwarzschild

Analisi qualitativa delle geodetiche di Schwarzschild:

1. Per $\tilde{L}/M > 4$ il potenziale effettivo ammette un minimo in r_- e un massimo in r_+ (con $\tilde{V}(r_+) > 1$). Esistono delle orbite legate per $\tilde{V}(r_-) < \tilde{E} < 1$, con *punti di inversione* dove la retta di energia costante \tilde{E} interseca il potenziale; le particelle che arrivano dall'infinito con energia compresa tra 1 e $\tilde{V}(r_+)$ raggiungono un raggio minimo e ritornano all'infinito; ma le particelle con $\tilde{E} > \tilde{V}(r_+)$ superano necessariamente $r = 2M$.
2. Per $2\sqrt{3} < \tilde{L}/M < 4$ il potenziale effettivo ammette ancora un minimo e un massimo (con $\tilde{V}(r_+) < 1$). Esistono orbite legate per $\tilde{V}(r_-) < \tilde{E} < \tilde{V}(r_+)$; le particelle con $\tilde{E} > \tilde{V}(r_+)$ finiscono necessariamente in $r = 2M$.
3. Per $\tilde{L}/M < 2\sqrt{3}$ il potenziale decresce monotonamente avvicinandosi a $r = 2M$; non ci sono orbite legate e tutte le particelle attraversano $r = 2M$.
4. Per $\tilde{L}/M > 2\sqrt{3}$, in corrispondenza dei minimi e dei massimi del potenziale ci sono orbite circolari rispettivamente stabili e instabili. Risolvendo $\tilde{V}'(r) = 0$ si trova la posizione degli estremi:

$$r_{\pm} = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left(1 \mp \sqrt{1 - 12M^2/\tilde{L}^2} \right); \quad (4.13)$$

utilizzando ora le eq. (4.5) e (4.6) è possibile dimostrare che per tutte queste orbite circolari vale la *relazione di Keplero*

$$\omega^2 r^3 = M, \quad (4.14)$$

dove $\omega = d\phi/dt$ è la “velocità angolare all'infinito”.

eventi senza mai attraversarlo. Per rimuovere la degenerazione della metrica sarebbe perciò sufficiente abbandonare t e scriverla, in un intorno di $r = 2M$, in funzione del tempo proprio di una delle tante geodetiche che attraversano l'orizzonte.

4.1.3 *Mesdames e Messieurs, i Buchi Neri!*

Cosa succede invece per $r \rightarrow 0$? La geometria “impazzisce”: la curvatura diventa sempre più grande (formalmente si vede che lo scalare di curvatura $R_{abcd}R^{abcd} \rightarrow +\infty$), cosicché in $r = 0$ la metrica di Schwarzschild non è soluzione delle equazioni di Einstein. Poiché in relatività generale lo spazio-tempo è *definito* come una varietà metrica che le soddisfa, $r = 0$ resta *al di fuori della geometria dello spazio-tempo*: è una *singularità*, un punto riguardo al quale la teoria non è in grado di fare predizioni! Questo è indubbiamente un problema, perché *tutte le geodetiche che attraversano $r = 2M$ terminano necessariamente, con un tempo proprio finito⁷, in $r = 0$* . In effetti, la definizione più generale di *singularità* le caratterizza proprio come i punti che si rendono responsabili dell'*incompletezza* delle curve geodetiche.

Ma c'è di più: non solo le geodetiche, ma *tutte le curve causali* che attraversano $r = 2M$ devono finire in $r = 0$. Vediamo perché, chiedendoci innanzitutto che tipo di superficie è $r = 2M$. Il vettore normale n^a alla superficie $r - \text{cost} = 0$ è dato dal duale del differenziale $d(r - \text{cost})$:

$$n^a = g^{ab}(dr)_b = (1 - 2M/r)(\partial_t)^a; \quad (4.18)$$

in $r = 2M$, $n^a n_a$ si annulla: una superficie con vettore normale nullo è pure nulla, e in quanto tale può essere attraversata da una curva causale soltanto in un senso. Non c'è nulla di particolare in questo (il cono di luce futuro di un qualsiasi evento ha la stessa proprietà!); per $r < 2M$, tuttavia, la coordinata di Schwarzschild “di tipo tempo” diventa r : *i coni di luce futuri sono rivolti nella direzione di r decrescente*, e perciò per lo stesso motivo per cui “il tempo non si ferma mai” ogni curva causale non può fare a meno di precipitare nella singularità.

Ciò significa che tutti gli eventi all'interno della superficie $r = 2M$ *non possono esercitare nessuna influenza causale sul resto dello spazio-tempo*. Si recupera così l'idea di Laplace di una stella “invisibile”; visto però che Einstein ci ha abituato a identificare l'idea di “luce” con quella di “interazione causale”, per noi “invisibile” ha il significato più forte di *causalmente isolato*. L'inverso, naturalmente, non è vero: tutti gli osservatori esterni hanno in ogni momento l'opportunità di inviare un raggio in luce in quello che ora chiamiamo “buco nero” (o, se proprio vogliono, di andarvi di persona!)

Siamo ora pronti a dare la promessa definizione *globale* di buco nero, che sarà quella a cui faremo riferimento nel resto di questo lavoro. Con i metodi di app. B possiamo definire un “infinito futuro” (più precisamente l'*infinito nullo futuro*

⁷ Anche se chiunque decidesse di intraprendere un tale viaggio avrebbe abbastanza problemi *prima* di arrivare in $r = 0$ per preoccuparsi troppo della singularità. Per un racconto vivace ma un po' sadico si veda “The fate of a man who falls into the singularity at $r = 0$ ”, ovvero “Gore at the singularity”, [Misner et al. 1973, §32.6].

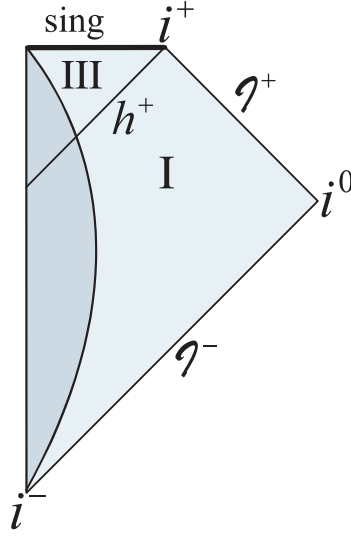


Figura 4.2: Diagramma di Penrose (app. B) del processo di collasso gravitazionale di una stella sfericamente simmetrica

La regione di spazio-tempo occupata dalla materia stellare è mostrata in grigio più scuro; la regione più chiara è sempre descritta dalla metrica di Schwarzschild. Nei diagrammi di Penrose, le curve nulle sono sempre a 45° rispetto alla verticale; è perciò chiaro che la regione di buco nero oltre h^+ è esclusa dal passato di J^+ .

J^+ per gli spazio-tempo *asintoticamente piatti*) tale che per uno spazio-tempo \mathcal{M} *well-behaved*, J^+ “vede” tutto \mathcal{M} , ovvero il suo passato causale $J^-(J^+)$ coincide con l'intero \mathcal{M} . Ciò implica che tutte le curve causali di \mathcal{M} devono raggiungere prima o poi J^+ . Nel caso di Schwarzschild, invece, la regione “di buco nero” è esclusa dall'interazione causale con l'infinito futuro nullo J^+ e non appartiene al passato causale. La superficie $r = 2M$ è il confine di $J^-(J^+)$ ed è conosciuta come *orizzonte degli eventi* h^+ . L'orizzonte degli eventi è percorso dagli ultimi raggi di luce che riescono a non cadere nel buco nero, arrivando infine in J^+ .

Bene, ecco allora la nostra definizione globale: *un buco nero è il complemento, in uno spazio-tempo \mathcal{M} , del passato causale dell'infinito futuro nullo:*

$$(\text{black hole}) = \mathcal{M} - J^-(J^+). \quad (4.19)$$

Torniamo alla nostra stella sfericamente simmetrica, il cui campo gravitazionale esterno è descritto dalla metrica di Schwarzschild. Concentriamoci sulla superficie $r = r_0$ della stella: dato che le metriche interna ed esterna devono saldarsi in modo liscio, i coni di luce su $r = r_0$ sono descritti dalla metrica di Schwarzschild. *Perciò se l'evoluzione della metrica interna della stella porta la sua superficie in $r = 2M$, questo è sufficiente a confinarla per sempre nella regione di spazio $r < 2M$, impedendole ogni interazione causale con l'esterno e spingendola verso coordinate r sempre più piccole* (fig. 4.2).

Si noti che a causa della degenerazione della metrica quando questa è scritta nelle coordinate r e t , non è possibile descrivere questo processo studiando

r_0 come funzione di t : dal punto di vista dell'osservatore all'infinito la stella appare avvicinarsi in modo sempre più lento all'orizzonte degli eventi senza mai raggiungerlo, mentre la sua emissione luminosa diventa sempre più rossa⁸.

Prima che r_0 raggiunga $2M$, la geometria della regione interna della stella è governata da una metrica diversa da quella di Schwarzschild: in generale, la metrica interna sarà regolare in $r = 0$ e da ogni r sarà possibile inviare segnali all'infinito futuro. Insomma, non c'è nessun buco nero!

Dopo che la superficie della stella ha attraversato $r = 2M$, i coni di luce indotti su $r = r_0$ dalla geometria di Schwarzschild (valida anche dove le due metriche si saldano) costringeranno la materia stellare a comprimersi in regioni di raggio sempre più piccolo e, dopo un breve tempo proprio, nel solo punto $r = 0$. A descrivere lo spazio-tempo rimarrà allora la geometria di Schwarzschild "pura", che è singolare in $r = 0$.

[Penrose 1965] ha dimostrato che la formazione di una singolarità non è una caratteristica limitata a questo processo di *collasso gravitazionale*, ma è *inevitabile* ogniqualevolta lo spazio-tempo contenga una *superficie intrappolata*, ovvero una 2-superficie spaziale di topologia S^2 tale che le curve nulle che ne limitano il futuro causale siano convergenti⁹ (questo è proprio il caso della superficie sferica $r = r_0$ della nostra stella per $r_0 < 2M$). In particolare, ogni buco nero (nella sua definizione *globale*) conterrà una singolarità.

Lo studio delle singolarità è stato un argomento centrale nello sviluppo dei metodi *globali* della relatività generale; uno dei risultati eclatanti è stata la dimostrazione che, sotto alcune ipotesi sul tensore di energia-impulso (rese plausibili nel nostro universo dalla presenza della radiazione cosmica di fondo), ogni spazio-tempo ammetterà almeno una singolarità (identificabile con la singolarità *iniziale* di *big-bang*). Questo è un modo molto crudo di porre la questione: per ulteriori approfondimenti si rinvia all'ottima rassegna di [Tipler et al. 1980].

La presenza di una singolarità dello spazio-tempo (a parte la singolarità di *big-bang* che gode di uno *status* particolare) è particolarmente sgradevole se si ammette che questa sia "visibile" dall'infinito futuro (cioè sia compresa nel passato causale di \mathcal{I}^+). Si immagini ad esempio di formulare il problema di Cauchy per un campo di materia su un tale *background*: come si possono assegnare le condizioni iniziali sulla singolarità? In questi casi si parla di *singolarità nude*; per evitarle, si è postulato un *principio di censura cosmica* ("cosmic censorship"): *tutte le singolarità devono essere "nascoste" da un orizzonte degli eventi, come nel caso dei buchi neri* (esistono varie formulazioni tecniche più o meno forti: si vedano [Tipler et al. 1980, Wald 1984a]).

4.2 Termodinamica dei buchi neri

Nelle prossime sezioni vedremo che è possibile sviluppare una impressionante serie di analogie tra la "dinamica" dei buchi neri e la termodinamica dei

⁸Vedi nota 4 a pag. 105. Se si ammette però che la luce è emessa dalla stella in modo quantizzato, ci sarà in un tempo finito un ultimo debolissimo luccichio. Dopoché, il buio.

⁹Si potrà comprendere meglio questa affermazione alla luce dei risultati di sez. 4.2.4 e di app. A.

sistemi “ordinari” all’equilibrio: entrambe sono caratterizzate da un numero piccolo di parametri “macroscopici”, e per entrambe si possono scrivere *quattro leggi* formalmente molto simili. Infine, è possibile dare un contenuto *fisico* all’identificazione *formale* tra i parametri “macroscopici” dei buchi neri e quelli della termodinamica “ordinaria”: in particolare, si può interpretare l’area dell’orizzonte degli eventi, che per i buchi neri gioca il ruolo di “entropia”, come *entropia informazionale di Shannon* (sez. 4.3.1); inoltre, sulla base della teoria dei campi sul *background* di un buco nero formatosi per collasso gravitazionale, è possibile dimostrare che il buco nero emette una radiazione termica a una temperatura esattamente proporzionale alla gravità superficiale dell’orizzonte, che svolge la parte della “temperatura” del buco nero nella nostra analogia (sez. 4.3.3 e seguenti).

4.2.1 I teoremi *no hair*

La caratteristica principale dei sistemi termodinamici all’equilibrio è di essere caratterizzati da un numero piccolo di grandezze *macroscopiche*, come l’energia interna, il volume, la temperatura e la pressione. A ogni stato macroscopico del sistema corrispondono molti possibili stati *microscopici*, che sono però tutti equivalenti dal punto di vista fenomenologico. In questo senso si parla di *coarse-graining* dei parametri termodinamici: una loro configurazione rappresenta infatti una *classe* di stati microscopici osservativamente indistinguibili.

Per quanto riguarda i buchi neri, ci si aspetterebbe che la loro definizione globale (come regione dello spazio-tempo esclusa dal passato causale di \mathcal{J}^+) sia soddisfatta da un vasto insieme di soluzioni delle equazioni di Einstein. Si può invece dimostrare che con l’ipotesi aggiuntiva (molto forte) di stazionarietà dello spazio-tempo, *il campo esterno di tutti i possibili buchi neri è descritto da un’unica famiglia di soluzioni a tre parametri*. La prova è distribuita in una serie di teoremi (detti *no-hair theorems*, poiché dimostrano l’assenza di “peli superflui” intorno ai buchi neri) pubblicati tra il 1967 e il 1975 da Israel, Carter e Hawking¹⁰:

1. *Hawking 1971, 1972*: tutti i buchi neri stazionari devono avere un orizzonte con topologia sferica; devono inoltre essere *statici* o assialmente simmetrici;
2. *Israel 1967, 1968*: ogni buco nero *statico* con un orizzonte a topologia sferica ha campi esterni determinati soltanto dalla sua massa M e carica Q , e descritti dalla soluzione di Schwarzschild per $Q = 0$ e dalla soluzione di Reissner-Nordstrom per $Q \neq 0$;
3. *Carter 1970, Mazur 1982*: tutti i buchi neri con simmetria assiale, carichi o no, ricadono nella famiglia dei buchi neri rotanti di Kerr; una generalizzazione a buchi neri con carica magnetica è possibile utilizzando una trasformazione di dualità;

¹⁰I riferimenti bibliografici si possono trovare in [Misner et al. 1973, Wald 1984a].

4. ci sono altre analisi (*Bekenstein 1972, Hartle 1972, Teitelboim 1972*) che escludono la possibilità che il buco nero eserciti interazioni deboli o forti causate dai leptoni e barioni che vi sono caduti dentro.

4.2.2 Buchi neri stazionari: massa, carica e momento angolare all'infinito

I buchi neri di Schwarzschild, Reissner-Nordstrom e Kerr sono casi particolari di un'unica famiglia (di Kerr-Newman), la cui geometria si può scrivere, generalizzando la metrica di Schwarzschild, nella forma (*di Boyer-Lundquist*)

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}[dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.20)$$

dove

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (4.21)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.22)$$

$$\text{con } M^2 \geq Q^2 + a^2; \quad (4.23)$$

il campo elettromagnetico, espresso come 2-forma, è dato da

$$F = Q\rho^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)dr \wedge [dt - a \sin^2 \theta d\theta] + 2Q\rho^{-4}ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [(r^2 + a^2)d\theta - a dt]. \quad (4.24)$$

La metrica di Boyer-Lindquist descrive buchi neri stazionari *eterni*, che si estendono cioè in tutto lo spazio-tempo e non soltanto nel futuro di un processo di collasso gravitazionale. Poiché la metrica è *invariante per inversione temporale*, oltre al buco nero è sempre presente una regione di *buco bianco* (vedi app. B) esclusa dal *futuro* causale dell'infinito nullo passato \mathcal{I}^- .

Può sembrare che per la loro simmetria questi buchi neri costituiscano casi molto speciali, e non rappresentativi dei buchi neri “fisici”. Tuttavia, si congettura (con forti indicazioni in questo senso; si vedano ad es. [Misner et al. 1973, Wald 1984a]):

1. che tutti i processi “fisici” di collasso gravitazionale per i quali si forma una superficie intrappolata non diano origine a una *singolarità nuda*, ma a un buco nero;
2. che tutti i buchi neri *incipienti* (ovvero prodotti dal collasso gravitazionale) si assestino dopo un breve tempo in una fase finale *stazionaria* descritta da una delle soluzioni di Kerr-Newman.

Per i buchi neri di Kerr-Newman l'orizzonte degli eventi si trova in

$$r_h = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}; \quad (4.25)$$

in effetti ci sono *due* distinti orizzonti: l'orizzonte *futuro* h^+ , *boundary* del buco nero, e l'orizzonte *passato* h^- , che limita il buco bianco¹¹. h^+ e h^- sono

¹¹Ci sono altre sorprese legate alla struttura globale dei buchi neri di Kerr-Newman; si veda ad esempio [Misner et al. 1973] per una discussione dell'*estensione massima* della geometria di Reissner-Nordstrom.

comunque connessi dalla superficie $t = 0$, e li indicheremo insieme come $h \equiv h^+ \cup h^-$.

Nelle eq. (4.20)-(4.25) appaiono i parametri M , Q e $a = J/M$, a cui si può dare l'interpretazione di massa, carica e momento angolare per unità di massa, *all'infinito*. Vediamo come. In generale, massa e momento angolare di un sistema isolato si possono definire ponendosi nella regione asintoticamente piatta di campo debole; con un'appropriata scelta del sistema di coordinate ("centrato intorno alla sorgente", e "in quiete rispetto ad esso") la metrica asintotica assume la forma [Misner et al. 1973]

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] dt^2 + \\ - \left[4 \epsilon_{jkl} J^k \frac{x^l}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] dt dx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2} \right) \delta_{jk} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] dx^j dx^k, \quad (4.26)$$

dove per i sistemi debolmente gravitanti, ovvero per i quali l'influenza della gravità sulla struttura interna è trascurabile, si può scrivere

$$M = \int T_{00} d^3x, \\ J_j = \int \epsilon_{jkl} x^k T^{l0} d^3x, \quad (4.27)$$

e dunque M e J_j sono effettivamente la massa-energia e il momento angolare del sistema. M può essere valutato esaminando il moto di una *test-particle* neutra: per un raggio abbastanza grande l'orbita sarà approssimativamente kepleriana ed M sarà dato da $4\pi^2 R^3/T^2$. J_j può essere invece misurato studiando la precessione rispetto al sistema di coordinate asintotico ("delle stelle fisse") di un giroscopio tenuto fermo nella regione di campo debole.

Per i sistemi (come i buchi neri) per cui l'eq. (4.27) non è più valida, appare ragionevole interpretare ancora M e J_j come massa e momento angolare, dato che la loro definizione operativa è la stessa. Se ora sviluppiamo la metrica di Boyer-Lindquist (4.20) in potenze di $1/r$,

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] dt^2 - \left[\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] dt d\phi + \\ + \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (4.28)$$

e la confrontiamo con l'eq. (4.26), scopriamo che M e J si meritano effettivamente i loro nomi.

Per quanto riguarda Q , notiamo che lontano dal buco nero il campo elettromagnetico ha componenti dominanti

$$\begin{cases} E_r = \frac{Q}{r^2}, \\ B_r = \frac{2Qa}{r^3} \cos \theta, \\ B_\theta = \frac{Qa}{r^3} \sin \theta; \end{cases} \quad (4.29)$$

Q è pertanto la carica del buco nero, mentre Qa è il suo momento di dipolo magnetico¹².

4.2.3 *Frame-dragging* e principio zero della termodinamica

Tutti i buchi neri di Kerr-Newman, oltre a essere stazionari, ammettono una simmetria assiale: questo si riflette nel fatto che tutti i coefficienti della metrica (4.20) sono indipendenti sia da t che da ϕ ; i campi vettoriali $(\partial_t)^a$ e $(\partial_\phi)^a$ saranno pertanto campi di Killing. Possiamo allora definire per le geodetiche *time-like* delle quantità conservate (la massa e la componente “ z ” del momento angolare, *all’infinito*) in modo analogo a quanto abbiamo fatto in sez. 4.1.2 per il moto delle *test-particles* nella geometria di Schwarzschild.

Il fatto che il buco nero sia dotato di un momento angolare *intrinseco* induce un fenomeno (puramente general-relativistico) molto interessante: il *dragging dei sistemi di riferimento inerziali*. Consideriamo infatti un osservatore che si muove su una *worldline* a r e θ costanti; una tale traiettoria è *stazionaria* (anche se in generale non geodetica), e la sua 4-velocità può essere scritta con i due campi di Killing che abbiamo appena trovato:

$$u^a = u_t \left((\partial_t)^a + \omega (\partial_\phi)^a \right), \quad (4.30)$$

dove $\omega = d\phi/dt$ è la *velocità angolare all’infinito* dell’osservatore, e u_t è dato dalla normalizzazione a -1 di u^a . *Non tutte le velocità angolari sono possibili*: u^a deve stare all’interno del cono futuro di luce, e pertanto deve essere

$$\left((\partial_t)^a + \omega (\partial_\phi)^a \right)^2 = g_{tt} + 2\omega g_{t\phi} + \omega^2 g_{\phi\phi} < 0; \quad (4.31)$$

questa condizione induce dei limiti per ω :

$$\begin{aligned} \omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \\ \omega_{\min, \max} = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \mp \sqrt{\left(\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Lontano dal buco nero, $r\omega_{\min} = -1$ e $r\omega_{\max} = 1$, cosicché tutte le velocità angolari sono possibili. Mentre r scende, ω_{\min} aumenta; il *trascinamento degli inertial frames* implica che la rotazione di un osservatore in senso inverso a quello del buco nero è “scoraggiata” *dalla stessa struttura dello spazio-tempo*, tanto che valori di ω minori di ω_{\min} sono *cinematicamente proibiti*. Addirittura, per il *limite statico*

$$r = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (4.33)$$

$\omega_{\min} = 0$ e *tutti gli osservatori stazionari devono orbitare intorno al buco nero con velocità angolare positiva*. Andando ancora oltre, ω_{\min} diventa sempre più

¹²Si noti che il rapporto giromagnetico (momento di dipolo magnetico / momento angolare) del buco nero non è $Q/2M$ ma Q/M , come per l’elettrone!

positivo e il *range* di velocità angolari possibili si stringe ulteriormente, finché sull'orizzonte degli eventi,

$$\omega_{\min} = \omega_{\max} = \Omega = \frac{(2Mr - Q^2)a}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.34)$$

È senza dubbio sensato allora definire Ω come la *velocità angolare dell'orizzonte degli eventi*; il campo di Killing

$$\chi^a = (\partial_t)^a + \Omega(\partial_\phi)^a \quad (4.35)$$

è proporzionale alla 4-velocità di un osservatore stazionario su h , ed è pertanto *tangente all'orizzonte degli eventi*. Si può vedere che χ^a si annulla sulla superficie $\Gamma = h^+ \cap h^-$, determinata da $t = 0$ e $r = r_h$; la discussione delle sez. 3.4.1 e 3.4.2 implica allora che h è un *orizzonte di Killing biforcuto* con una gravità superficiale *costante su tutto h* data da

$$\kappa = \frac{r_h - M}{2Mr_h - Q^2}. \quad (4.36)$$

κ si comporta in modo analogo alla temperatura di un sistema in equilibrio termodinamico, che è costante in tutto il sistema. Possiamo perciò formulare il *principio zero* della termodinamica dei buchi neri:

κ è costante su tutto l'orizzonte degli eventi.

4.2.4 La seconda legge della termodinamica dei buchi neri

Aggiungiamo ora un'altro elemento alla nostra analogia tra le proprietà del campo gravitazionale dei buchi neri e la termodinamica “ordinaria”: proprio come l'entropia termodinamica di un sistema isolato, *per tutti i buchi neri* (stazionari o meno),

l'area dell'orizzonte degli eventi non può mai diminuire.

È necessario precisare meglio ciò che intendiamo per “area dell'orizzonte” (l'orizzonte degli eventi è una superficie tridimensionale *nulla* e pertanto la sua “3-area” è 0) e per “crescere” (rispetto a quale tempo?). Un'affermazione più precisa potrebbe essere questa:

Teorema dell'area (Hawking, 1971): consideriamo una sequenza di superfici di Cauchy Σ_t per lo spazio-tempo di buco nero; t etichetta superfici di Cauchy successive (tali cioè che $\Sigma_{t_2} \subset D(\Sigma_{t_1})$ per $t_2 > t_1$);

1. nell'ipotesi che le geodetiche che giacciono sull'orizzonte degli eventi del buco nero siano *complete* (questo è assicurato nel caso si imponga la “*cosmic censorship*”);
2. nell'ipotesi che la valga la *null energy condition*

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0 \text{ per ogni } k^a \text{ null-like}; \quad (4.37)$$

allora l'area dell'intersezione di h^+ con le superfici Σ_t aumenta o al più resta costante al crescere di t .

La dimostrazione si basa sulle caratteristiche geometriche dell'orizzonte degli eventi. Innanzitutto, si può dimostrare¹³ che ogni punto di h^+ giace su una geodetica nulla inestendibile nel futuro, che è contenuta interamente in h^+ : l'orizzonte è *generato* da una congruenza di tali geodetiche (app. A). Fisicamente, questo significa che, a differenza che per le geodetiche *time-like*, a una geodetica nulla γ è possibile raggiungere l'orizzonte degli eventi senza attraversarlo; tutto il resto di γ , però, dovrà *giacere su* h^+ .

Consideriamo l'intersezione di h^+ con una superficie di Cauchy Σ_t , e concentriamoci su un'area infinitesima δA intorno a una generatrice $\gamma(\lambda)$ (dove λ è il parametro affine); l'*espansione* θ è data dalla variazione relativa della distanza media da γ delle geodetiche vicine, e misura la velocità con cui varia δA mentre ci spostiamo lungo γ :

$$\theta = \frac{1}{\delta A} \frac{d(\delta A)}{d\lambda}. \quad (4.38)$$

Ora, per θ vale l'equazione di Raychaudhuri:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}u^c u^d, \quad (4.39)$$

dove u^a è il vettore tangente a γ e θ , σ_{ab} e ω_{ab} sono rispettivamente la traccia, la parte simmetrica *traceless* e la parte antisimmetrica del tensore $B_{ab} = \nabla_b u_a$. Esaminiamo il termine di destra dell'eq. (4.39): $-\sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq 0$ (σ^{ab} è simmetrico); $\omega^{ab} = 0$ (le generatrici sono sia ortogonali che tangenti a h^+ , e dunque non ci può essere la rotazione descritta dalla parte antisimmetrica di B_{ab}); infine, utilizzando le equazioni di Einstein nella forma $R_{cd} = 8\pi(T_{cd} - 1/2g_{cd}T)$, si può scrivere

$$-R_{cd}u^c u^d = -8\pi\left[T_{cd} - \frac{1}{2}Tg_{cd}\right]u^c u^d = -8\pi T_{cd}u^c u^d \leq 0 \quad (4.40)$$

per la *null energy condition*. Si ha allora che

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \theta^{-1}(\lambda) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{2}\lambda, \quad (4.41)$$

dove θ_0 rappresenta il valore di θ per $\lambda = 0$; se $\theta_0 < 0$, cioè se inizialmente le geodetiche stanno convergendo, allora $\theta \rightarrow -\infty$ per un valore finito di λ . Tuttavia, è possibile provare¹⁴ che in nessun punto la *convergenza* $-\theta$ delle generatrici può diventare infinita! Ciò implica che θ non può essere negativo in nessun punto dell'orizzonte degli eventi.

Dunque l'area infinitesima δA intorno a ciascuna delle generatrici non diminuisce al crescere del parametro affine; inoltre, le generatrici sono contenute interamente in h^+ e sono complete, cosicché se una di loro interseca la superficie di Cauchy Σ_{t_1} , dovrà intersecare anche ogni Σ_{t_2} per $t_2 > t_1$. Ne segue che l'area complessiva di $h^+ \cap \Sigma_{t_2}$ deve *almeno eguagliare* $h^+ \cap \Sigma_{t_1}$, proprio come volevamo dimostrare.

¹³Si veda [Hawking ed Ellis 1973].

¹⁴[Hawking ed Ellis 1973].

4.2.5 Prima legge

L'analogia continua. È possibile scrivere per la variazione dei parametri “termodinamici” dei buchi neri stazionari di Kerr-Newman una relazione molto simile alla prima legge della termodinamica “ordinaria”,

$$dU = TdS - p dV. \quad (4.42)$$

In termodinamica esistono due versioni logicamente indipendenti della prima legge: si può partire con un sistema all'equilibrio, alterarlo con una perturbazione fisica infinitesima (ad esempio fornendogli calore o favorendone l'espansione) ed esaminare il nuovo stato di equilibrio che si viene a creare (*versione del processo fisico*); oppure studiare la relazione fra due configurazioni in equilibrio infinitesimalmente vicine (*versione dello stato di equilibrio*). Possiamo tentare di applicare entrambe le idee ai buchi neri stazionari.

Per la *versione del processo fisico*, immaginiamo di perturbare un buco nero facendogli cadere dentro, in un tempo breve, una piccola quantità di materia dotata di un tensore energia impulso ΔT_{ab} ; al prim'ordine in ΔT_{ab} , possiamo trascurare il cambiamento della geometria del buco nero nel calcolare la variazione della sua massa e del suo momento angolare,

$$\begin{aligned} \Delta M &= \int_0^\infty d\lambda \int d^2A \Delta T_{ab} (\partial_t)^a u^b, \\ \Delta J &= \int_0^\infty d\lambda \int d^2A \Delta T_{ab} (\partial_\phi)^a u^b : \end{aligned} \quad (4.43)$$

l'integrazione su $d\lambda$ copre il *range* di parametro affine delle geodetiche nulle che generano l'orizzonte; quella su dA descrive invece le sezioni di orizzonte a λ costante. Gli *slots* del tensore energia-impulso vengono “riempiti” con i campi di Killing $(\partial_t)^a$ (che definisce l'energia all'infinito) e $(\partial_\phi)^a$ (che definisce il momento angolare all'infinito), e con il vettore tangente u^b delle geodetiche che generano h^+ : u^b è normale all'orizzonte degli eventi e il suo prodotto con ΔT_{ab} esprime il flusso di energia e momento verso l'interno del buco nero.

Se consideriamo ancora la congruenza di geodetiche nulle che genera l'orizzonte, ci accorgiamo che al termine di destra dell'equazione di Raychauduri (4.39) è necessario aggiungere un contributo supplementare proporzionale a $-8\pi\Delta T_{cd}u^c u^d$, che rende ancora più negativa la variazione dell'espansione $d\theta/d\lambda$; moltiplicando per $\kappa\lambda$ e integrando sulle sezioni di orizzonte e su λ , si ottiene

$$\int_0^\infty d\lambda \int d^2A \kappa\lambda \frac{d\theta}{d\lambda} = \kappa \int d^2A \left[\lambda \theta \right]_0^\infty - \kappa \int d^2A \int_0^\infty \theta d\lambda = 0 - \kappa\Delta A; \quad (4.44)$$

il primo integrale si annulla perché $\theta \rightarrow 0$ più velocemente di λ^{-1} per $\lambda \rightarrow \infty$, il secondo misura precisamente κ volte l'incremento totale dell'area dell'orizzonte degli eventi. Se però nello stesso integrale inseriamo ΔT_{cd} e utilizziamo l'eq. (3.122) con il campo di Killing tangente all'orizzonte biforcuto dato dall'eq.

(4.35), otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\lambda \int d^2A \kappa \lambda \frac{d\theta}{d\lambda} &= -8\pi \int_0^\infty d\lambda \int d^2A \Delta T_{ab} u^a (\kappa \lambda u^b) = \\
 &= -8\pi \int_0^\infty d\lambda \int d^2A \Delta T_{ab} u^a \left((\partial_t)^b + \Omega (\partial_\phi)^b \right) = \quad (4.45) \\
 &= -8\pi (\Delta M - \Omega \Delta J);
 \end{aligned}$$

mettendo insieme i due risultati, si formula la *prima legge della termodinamica dei buchi neri*,

$$\boxed{\Delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \Delta A + \Omega \Delta J.} \quad (4.46)$$

4.2.6 Processi di Penrose

È interessante vedere che è possibile realizzare un processo (*di Penrose*) in cui, nel rispetto della prima legge, *si ricava energia da un buco nero* con una corrispondente diminuzione della sua massa M :

1. supponiamo di lanciare su una geodetica diretta verso un buco nero *rotante* un oggetto A dotato di energia all'infinito E_A , momento angolare L_A e carica e_A . Se A è abbastanza piccolo, possiamo trascurare la radiazione gravitazionale ed elettromagnetica generata durante la caduta, e considerare la variazione dei parametri del buco nero data da

$$\Delta M = E_A, \quad \Delta J = L_A, \quad \Delta Q = e_A; \quad (4.47)$$

2. in prossimità dell'orizzonte facciamo esplodere A in due parti B e C con energie, momenti angolari e cariche E_B, L_B, e_B ed E_C, L_C, e_C ;
3. concertiamo i passi precedenti in modo che B sia catturato dal buco nero, ma C ritorni indietro all'infinito; la variazione dei parametri del buco nero è allora data da

$$\Delta M = E_A - E_C = E_B, \quad \Delta J = L_B, \quad \Delta Q = e_B; \quad (4.48)$$

4. come ultima condizione, facciamo avvenire l'esplosione nella regione compresa tra il *limite statico* (vedi sez. 4.2.3) e l'orizzonte degli eventi: qui il campo di Killing di stazionarietà $(\partial_t)^a$ è *space-like*¹⁵ e dunque B può essere emessa con energia all'infinito negativa;
5. il “trucco” è tutto qui: in questo modo A ritorna all'infinito con un'energia $E_A - E_B$ maggiore di quella con cui era partito, e la massa del buco nero diminuisce in modo corrispondente.

[Misner et al. 1973] immaginano un impiego pratico per i processi di Penrose:

¹⁵Come abbiamo visto in sez. 4.2.3, all'interno del limite statico non è possibile orbitare intorno al buco nero con una velocità angolare nulla, corrispondente a $u^a = u_t(\partial_t)^a$.

“an advanced civilization has constructed a rigid framework around a black hole, and has built a huge city on that framework. Each day trucks carry one million tons of garbage out of the city to the garbage dump. At the dump the garbage is shoveled into shuttle vehicles which are then, one after another, dropped toward the center of the black hole. [...] When it reaches a certain ‘ejection point’, the vehicle ejects its load of garbage into an orbit of negative energy-at-infinity. As the garbage flies down the hole [...] the shuttle vehicle recoils from the ejection and goes flying back out with more energy-at-infinity than it took down.”

Quest’energia può poi essere convertita in energia elettrica per tutte le necessità della città, con il *bonus* di risolvere allo stesso tempo il problema del *garbage disposal*. I buchi neri possono essere utili!

4.2.7 Ancora la prima legge

Nella versione dello stato di equilibrio, la prima legge consente di porre in relazione l’area dell’orizzonte degli eventi di due soluzioni di buco nero infinitesimalmente vicine nello spazio dei parametri “fisici” M e J . Per la dimostrazione è necessario introdurre la *formulazione hamiltoniana della relatività generale*. Dato che si tratta di un argomento complesso e delicato, ci limiteremo qui ad alcuni accenni, rimandando il lettore a [Wald 1984a] per un approfondimento.

Nella formulazione hamiltoniana della teoria della relatività generale, un punto nello spazio delle fasi (ovvero una soluzione delle equazioni di Einstein) corrisponde alla specificazione, su una ipersuperficie di Cauchy Σ , della 3-metrica h_{ij} e del suo momento coniugato $1/16\pi p^{ij}$, legato alla curvatura estrinseca ${}^3K^{ij}$ di Σ nello spazio-tempo \mathcal{M} da

$$p^{ij} = \sqrt{h}({}^3K^{ij} - h^{ij} {}^3K). \quad (4.49)$$

La teoria è *vincolata*, in quanto i valori dinamicamente accettabili di h_{ij} e p^{ij} sono ristretti a una sottovarietà dello spazio delle fasi dove sono soddisfatti i vincoli

$$C = \frac{1}{16\pi} \sqrt{h} \left[-{}^3R + \frac{1}{h} \left(p_{ij} p^{ij} - \frac{1}{2} p^2 \right) \right] = 0, \quad (4.50)$$

$$C^i = -\frac{1}{8\pi} \sqrt{h} {}^3\nabla_j \frac{p^{ij}}{\sqrt{h}} = 0$$

(${}^3\nabla_i$ è l’operatore di derivata covariante compatibile con h_{ab} , e 3R è la curvatura scalare di h_{ab}). L’hamiltoniana può essere messa nella forma

$$H = \int_{\Sigma} NC + N^i C_i; \quad (4.51)$$

Dato che i vincoli si annullano per le soluzioni della teoria, il *lapse* N e lo *shift* N^i non sono variabili dinamiche, ma si comportano come moltiplicatori di Lagrange e possono essere prescritti arbitrariamente. N ed N^i sono i parametri

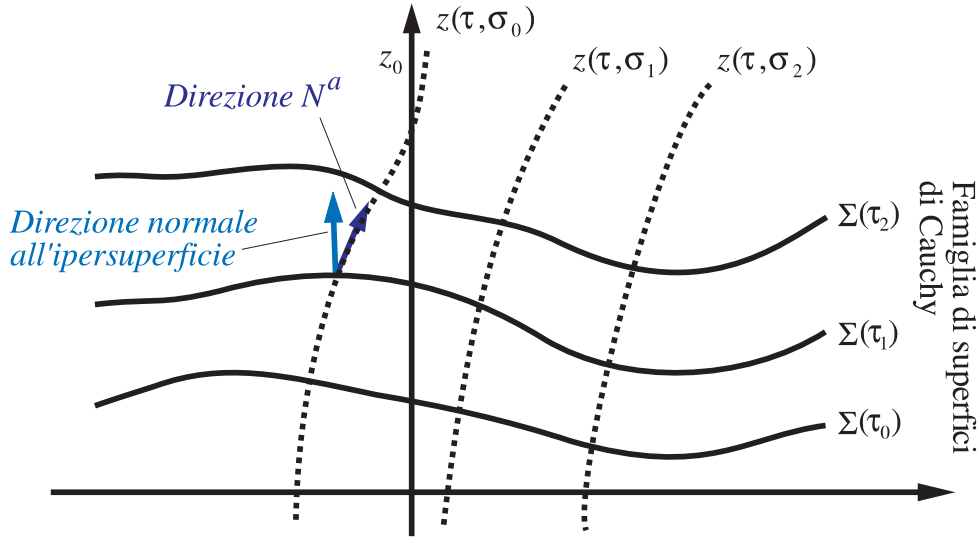


Figura 4.3: Decomposizione 3 + 1 dello spazio-tempo 4-dimensionale in una famiglia a un parametro di superfici di *Cauchy* Σ_t

Si noti come il passaggio tra due superfici di *Cauchy* infinitamente vicine sia caratterizzato da un 4-vettore N^a che può essere decomposto univocamente in una componente ortogonale N e tre componenti tangenti N^i .

delle trasformazioni di *gauge* infinitesime, generate da C e C_i , e pertanto prescrivono il modo in cui la famiglia di ipersuperfici di *Cauchy* Σ_t (vedi fig. 4.3) ricostruisce lo spazio-tempo \mathcal{M} . Da questo punto di vista N misura il *tempo proprio* trascorso per un incremento dt del tempo “di evoluzione hamiltoniana”; N^i (*shift*) genera il movimento di ogni punto di Σ nel punto corrispondente dopo un intervallo dt . La variazione di H rispetto a h_{ij} e p^{ij} genera due termini che esprimono le equazioni di Einstein in forma hamiltoniana,

$$\delta H = \int_{\Sigma} P^{ij} \delta h_{ij} + Q_{ij} \delta p^{ij} + \dots \Rightarrow \begin{cases} 16\pi Q^{ij} = \dot{h}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta(p^{ij}/16\pi)}, \\ P^{ij} = -(p^{ij}/16\pi) = \frac{\delta H}{\delta h_{ij}} \end{cases} \quad (4.52)$$

(il punto indica la “derivata rispetto al tempo”, ovvero la derivata di Lie rispetto a N^a nello spazio-tempo \mathcal{M}), *ma produce anche degli integrali di superficie* dovuti alle integrazioni per parti, necessarie per rimuovere i termini proporzionali alla variazione delle derivate di h_{ij} e p^{ij} [Sudarsky e Wald 1990]:

$$(\delta H)_{\text{surface}} = -\frac{1}{16\pi} \delta \int_{\partial\Sigma} dS^i \left[N \left({}^3\nabla^j h_{ij} - {}^3\nabla_i h_j^j \right) + \frac{2N^j}{\sqrt{h}} p_{ij} \right]. \quad (4.53)$$

Consideriamo ora un buco nero stazionario di Kerr-Newman, e foliamo la regione “esterna” dello spazio-tempo utilizzando una decomposizione 3 + 1 adattata alla presenza dell’orizzonte degli eventi: come “vettore di evoluzione temporale” N^a scegliamo il campo di Killing $\chi^a = (\partial_t)^a + \Omega(\partial_\phi)^a$. Le ipersuperfici

di Cauchy Σ_τ determinate da χ^a si intersecano tutte in $\Gamma = h^+ \cap h^-$, dove (giustamente) χ si annulla. Ogni ipersuperficie Σ_τ di questa decomposizione è caratterizzata da un *boundary* all'infinito e da un *boundary* sull'orizzonte degli eventi che coincide con Γ .

La variazione δH per perturbazioni $(\delta h_{ij}, \delta p^{ij})$ *asintoticamente piatte che soddisfano i vincoli linearizzati*¹⁶ $\delta C_a = 0$ è, vista la (4.51), nulla. D'altronde il fatto che la soluzione di *background* sia stazionaria rispetto a $\chi^a = N^a$ implica $P^{ij} = Q_{ij} = 0$. Ne segue che deve essere

$$(\delta H)_{\text{surface}} = 0. \quad (4.54)$$

Questo integrale di superficie deve essere valutato sia sul *boundary* all'infinito, dove per h_{ij} si può prendere la parte spaziale di eq. (4.28),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} \int_{\infty} dS^i \left({}^3\nabla^j h_{ij} - {}^3\nabla_i h_j^j \right) &= -M, \\ -\frac{1}{16\pi} \int_{\infty} dS^i \left(2\Omega(\partial_\phi)^j p_{ij} \right) &= \Omega J, \end{aligned} \quad (4.55)$$

che sul *boundary* all'intersezione degli orizzonti degli eventi, dove N^a si annulla; qui l'unico termine non nullo della variazione è quello proporzionale alla *derivata* di N , dovuto a una integrazione per parti necessaria per rimuovere le variazioni delle derivate della metrica:

$$-\frac{1}{16\pi} \int_{\Gamma} dS^i ({}^3\nabla^j N) \left[\delta h_{ij} - \delta_{ij} \delta h_k^k \right] = \frac{\kappa \delta A}{8\pi}, \quad (4.56)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che la derivata di N nella direzione normale a Γ è proporzionale alla gravità superficiale dell'orizzonte (l'eq. (3.119) implica infatti che $u^a \nabla_a \chi^b = \kappa \chi^b$), e abbiamo indicato con A l'area di Γ . Mettendo tutto insieme, si trova finalmente

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J. \quad (4.57)$$

Entrambe le formulazioni della prima legge si possono estendere alla teoria di Einstein-Maxwell con l'effetto di aggiungere al lato destro dell'equazione un termine aggiuntivo $\Phi \delta Q$ (Q è la carica e Φ il potenziale elettrico sull'orizzonte, normalizzato in modo che si annulli all'infinito).

4.2.8 Le quattro leggi della termodinamica dei buchi neri

Ci manca ora soltanto un'analogo della terza legge della termodinamica, il cui enunciato più generico afferma che *nessun sistema termodinamico può essere portato allo zero assoluto con un numero finito di operazioni*. In modo un poco artificioso, si può affermare che *non è possibile con nessuna procedura, non importa quanto idealizzata, annullare con un numero finito di operazioni la gravità superficiale κ di un buco nero*. Ciò comporterebbe la realizzazione di

¹⁶Le perturbazioni che portano una soluzione di Kerr-Newman in un'altra con parametri diversi soddisfano automaticamente entrambe le condizioni.

buchi neri estremali, per i quali cioè l'eq. (4.23) sia valida come uguaglianza; questi buchi neri hanno uno *status* controverso, in quanto la loro topologia è diversa da quella dei buchi neri “normali”, e da qui nasce una moltitudine di problemi tecnici che renderebbero gradito l'esilio di questi oggetti nel dominio della “non-fisicità”¹⁷. Si veda [Israel 1986] per una formulazione più precisa e una dimostrazione.

Detto questo, possiamo riepilogare i risultati che abbiamo ottenuto finora:

	<i>termodinamica</i>	<i>buchi neri</i>
<i>principio zero</i>	$T = \text{cost}$	$\kappa = \text{cost}$
<i>prima legge</i>	$dU = TdS - p dV$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ$
<i>seconda legge</i>	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
<i>terza legge</i>	$T = 0$ è irraggiungibile	$\kappa = 0$ è irraggiungibile

Una nota sulla validità delle leggi della termodinamica dei buchi neri: abbiamo derivato il principio zero utilizzando solo argomenti geometrici, a partire dall'ipotesi che l'orizzonte degli eventi sia un orizzonte di Killing biforcuto; questo è vero per tutte le soluzioni di Kerr-Newman, ma ci si può chiedere se κ continui a essere costante per l'orizzonte di Killing *tout court* di un buco nero formatosi per collasso gravitazionale; bene, è possibile provare [Bardeen et al. 1973] che le equazioni di Einstein insieme alla *condizione dominante di energia*¹⁸ per i campi di materia,

$$-T^a_b \xi^b \text{ è } \textit{time-} \text{ o } \textit{null-like} \text{ per ogni } \xi^b \text{ } \textit{time-like}, \quad (4.58)$$

implicano che la gravità superficiale deve essere costante su ogni orizzonte di Killing.

La prima legge è valida per le perturbazioni dei buchi neri stazionari (eterni, o incipienti nella fase stazionaria). Nella versione dello stato di equilibrio, si può formulare una prima legge simile all'eq. (4.57) in ogni teoria della gravitazione derivabile da un hamiltoniana; al posto del termine dA compare in generale *la variazione sull'orizzonte della carica di Noether associata al campo di Killing di stazionarietà* [Wald 1993b]. La seconda legge si riferisce invece all'evoluzione dinamica di un *qualsiasi* buco nero definito in modo globale (per

¹⁷I buchi neri estremali, tuttavia, appaiono essere molto popolari, per ragioni tecniche, presso gli “stringhisti” che cercano di derivare gli aspetti “termodinamici” della relatività generale come limite di bassa energia, appunto, delle teorie di stringa.

¹⁸La *condizione dominante di energia* vieta sostanzialmente che il flusso d'energia della materia sia “più veloce” della luce.

i buchi neri stazionari vale banalmente $A = \text{cost}$); la sua dimostrazione dipende dall'equazione di Einstein e dalla *null energy condition*.

Nel complesso, l'aderenza di questi risultati alla termodinamica "ordinaria" appare impressionante; è possibile che queste corrispondenze vadano oltre la semplice analogia e costituiscano una vera e propria *estensione della termodinamica fenomenologica ai buchi neri*? Dopotutto, all'energia interna U corrisponde la massa totale del buco nero (dunque, in relatività, ancora un'energia), e il termine di "lavoro" $-\Omega dJ$, analogo a $p dV$, apparirebbe anche nell'espressione della prima legge per un sistema termodinamico "ordinario" rotante.

Gli argomenti contrari, tuttavia, sono altrettanto forti: se all'area A dell'orizzonte degli eventi si può dare, come vedremo nella prossima sezione, l'interpretazione di *entropia informazionale*, dal punto di vista classico *la temperatura termodinamica di un buco nero è rigorosamente 0*. Poiché infatti l'orizzonte degli eventi si comporta come una membrana unidirezionale per ogni flusso di particelle e radiazione, un buco nero potrà solo assorbire energia, mai emetterla: l'equilibrio termodinamico con lo spazio esterno non è dunque possibile, e al buco nero non si può attribuire una temperatura finita. Nell'articolo in cui sono raccolte per la prima volta le quattro leggi della termodinamica dei buchi neri¹⁹, gli autori si premurano di avvisare che queste sono "simili, ma distinte" da quelle della termodinamica ordinaria. Questa opinione, tuttavia, è destinata a cambiare con l'ingresso in scena della meccanica quantistica.

4.3 Entropia e temperatura

Axel: Beatrice! Ma dove sei stata? È un secolo che non ti vedo!

Beatrice: beh, sai, ho trovato il tuo libro sulla teoria dei campi nello spazio-tempo di Minkowski, poi ho voluto sapere qualcosa sugli spazio-tempo curvi... Insomma, sai com'è quando si comincia con i libri! Poi ho visto sul giornale che è stata osservata con chiarezza l'"impronta" astronomica di un orizzonte degli eventi²⁰ e ho voluto sapere di più sui buchi neri...

Axel: affascinanti, vero?

Beatrice: oh, sì! Mi ha particolarmente appassionato la formulazione delle loro "leggi della termodinamica". Peccato però che poi siano finite in nulla! Sembra che tutto funzioni, ma l'"entropia" non è un'entropia, e la "temperatura" non è una temperatura...

¹⁹[Bardeen et al. 1973].

²⁰[Narayan et al. 1997]: dall'analisi delle immagini di alcune *X-ray novae*, composte da stelle orbitanti intorno a masse compatte invisibili, come stelle di neutroni o (si specula) buchi neri, si è notato che il gas della stella orbitante fluisce in modo costante verso l'interno, formando un disco in rapida rotazione intorno all'oggetto più compatto. La frizione nel disco scalda il gas fino a temperature straordinariamente alte, causando l'emissione di raggi X; quattro dei nove sistemi studiati nell'articolo in questione sono meno luminosi degli altri: i ricercatori ipotizzano che ciò è dovuto al fatto che una parte dell'energia radiata va persa attraverso l'orizzonte degli eventi dell'ipotetico buco nero centrale, piuttosto che venire riflessa dalla superficie della stella di neutroni.

Axel: tu credi? Forse i libri che hai trovato in soffitta non erano poi così aggiornati. Prova a leggere questo...

4.3.1 Area ed entropia secondo Bekenstein

In [Bekenstein 1973] si cerca di *identificare* l'area A della superficie degli eventi di un buco nero con la sua entropia termodinamica “ordinaria”, in base a due ordini di argomenti.

Analogie fenomenologiche: oltre alle somiglianze che abbiamo già esaminato (A obbedisce alla seconda legge ed entra “nel punto giusto” nella prima legge) possiamo aggiungerne un'altra. L'entropia termodinamica “ordinaria” S è un indice della *degradazione* dell'energia di un sistema; al crescere di S diminuisce l'energia disponibile per compiere lavoro. Analogamente, si può provare²¹ che la *massa irriducibile* $M_{\text{ir}} = \sqrt{A/16\pi}$ rappresenta l'energia che non può essere estratta da un buco nero di area A per mezzo dei *processi di Penrose* di sez. 4.2.6.

Entropia informazionale: in *teoria dell'informazione*, l'entropia di un sistema rappresenta l'incertezza o la mancanza di informazione sulla sua configurazione interna. Un'espressione dotata di un certo numero di proprietà che si possono richiedere per una misura di incertezza è l'*entropia di Shannon*, data da

$$S_{\text{Sh}} = - \sum_i p_i \ln p_i, \quad (4.59)$$

per un sistema che può assumere N diverse configurazioni, a ciascuna delle quali attribuiamo una diversa probabilità p_i . Le probabilità possono essere *intrinseche* (come i *branching ratios* di decadimento delle particelle elementari) oppure derivare semplicemente da un difetto nella nostra conoscenza dello stato del sistema. Come è lecito aspettarsi, S_{Sh} è massima per probabilità tutte uguali $p_i = 1/N$ (questo è il caso in cui la nostra ignoranza sullo stato del sistema è massima); ogni volta che si rendono disponibili nuove informazioni sul sistema, vengono imposti nuovi vincoli sulle p_i e l'entropia diminuisce. Si definisce l'*informazione* come l'opposto della variazione di S_{Sh} :

$$\Delta I = -\Delta S_{\text{Sh}}; \quad (4.60)$$

l'informazione si misura in *bits*, cioè risposte a domande sì/no; nelle nostre unità un bit equivale a $-2 \cdot 1/2 \ln 1/2 = \ln 2$ di informazione. L'entropia di Shannon di un sistema termodinamico non all'equilibrio cresce perché l'informazione iniziale sulla sua configurazione interna perde significato nel corso dell'evoluzione dinamica, mentre si diluisce la dipendenza dello stato del sistema dalle sue condizioni iniziali.

Dal punto di vista dell'informazione, un buco nero formatosi per collasso gravitazionale è molto simile a un sistema termodinamico: nella fase finale stazionaria, dominata dai teoremi *no-hair*, il campo esterno del buco nero “ha perso la memoria” della configurazione iniziale dello spazio-tempo e dei campi di materia. In altre parole, un buco nero stazionario caratterizzato dai parametri

²¹Vedi ad es. [Misner et al. 1973]

M , Q e J può aver avuto origine da moltissime distribuzioni iniziali di materia, che si riflettono nella fase finale in diverse configurazioni della metrica *interna* del buco nero, ma non del campo esterno. Tutte le informazioni riguardo alla metrica interna, però, sono *inaccessibili* per gli osservatori esterni: è dunque logico assegnare al buco nero un'entropia di Shannon relativa all'indisponibilità di questa informazione. Inoltre, come abbiamo già notato, la corrispondenza dei tre parametri "macroscopici" con *interne classi* di configurazioni interne (o equivalentemente di modi in cui il buco nero può essersi formato) è analoga al *coarse-graining* dei microstati di un *ensemble* statistico in macrostati fenomenologici: all'entropia informazionale del buco nero si può dare pertanto anche un'interpretazione statistica.

L'entropia S_{bh} del buco nero non può mai decrescere, perché non è possibile acquisire informazioni sulla regione interna all'orizzonte degli eventi; anzi, S_{bh} *aumenta* mentre il buco nero "perde i peli" per rimanere poi costante nella fase finale di equilibrio. Gli argomenti sulla massa irriducibile, insieme alle leggi della termodinamica dei buchi neri, ci portano allora a postulare che *l'area A dell'orizzonte degli eventi coincida effettivamente con l'entropia informazionale del buco nero*, a meno di una costante di proporzionalità:

$$S_{\text{bh}} = \gamma A. \quad (4.61)$$

Cerchiamo di fissare γ . Innanzitutto, l'entropia di Shannon è adimensionale, mentre A ha le dimensioni di un'area. Nelle unità senza dimensioni di Planck ($G = c = \hbar = 1$) questo non è un problema, ma è ugualmente interessante osservare che l'unica area che è possibile formare con le costanti fondamentali della fisica è l'area di Planck l_{P}^2 , pari a $2.56 \cdot 10^{-66} \text{ cm}^2$; in unità *geometriche* (solo $G = c = 1$!) $l_{\text{P}}^2 = \hbar$, e quindi

$$S_{\text{bh}} = \gamma' \hbar^{-1} A. \quad (4.62)$$

Per dare all'area dell'orizzonte degli eventi una interpretazione come entropia è dunque necessario introdurre la costante di Planck e quindi, implicitamente, la meccanica quantistica. Tuttavia, non si deve per questo concludere che questo argomento dimensionale anticipi i risultati del *quantum black hole*, che vedremo tra poco: la costante di Planck entra in modo naturale (nella misura nello spazio delle fasi) anche nelle formule della meccanica statistica *classica* (come è noto, si potrebbe addirittura dire che è da lì che storicamente è nata la meccanica quantistica.)

Per determinare definitivamente γ , consideriamo un "esperimento" in cui una particella cade in un buco nero di Kerr-Newman, e confrontiamo la variazione dell'entropia con quella dell'area. La perdita *minima* di informazione associata con il processo è un bit (la risposta alla domanda: esiste la particella?). Per una particella di raggio finito²² la variazione *minima* di A è, fortunatamente, *indipendente dai parametri del buco nero* (altrimenti γ non avrebbe un valore

²²La variazione di A può anche essere nulla per una particella puntiforme (vedi ad es. [Misner et al. 1973]). Per i nostri scopi è pertanto necessario escludere questo caso come non fisico e attribuire, un po' arbitrariamente, un raggio finito alla particella.

universale) e pari a [Bekenstein 1973]

$$\Delta A = 8\pi mb, \quad (4.63)$$

dove m è la massa e b il raggio della particella. Come limite inferiore per b si può prendere il più grande tra il *raggio gravitazionale* $2m$ e la lunghezza d'onda di Compton \hbar/m (come sempre, $c = 1$); in ogni caso²³, la variazione *minima* di A è

$$\Delta A = 8\pi\hbar; \quad (4.64)$$

eguagliando ΔA a $\ln 2$ (un bit) si ottiene

$$S_{\text{bh}} = \frac{\ln 2}{8\pi} \hbar^{-1} A. \quad (4.65)$$

La costante γ risente ovviamente delle due approssimazioni che abbiamo dovuto introdurre (sulla quantità di informazione codificata dalla particella e sul suo raggio), ma è abbastanza plausibile che l'ordine di grandezza sia quello giusto. Il risultato è interessante, perché implica, ad esempio, che un buco nero di massa solare abbia un'entropia $S_{\text{bh}} \approx 10^{60} \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1}$ (l'entropia del sole è $S_\odot \approx 10^{42} \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1}$); dunque *lo stato di buco nero è di gran lunga lo stato della materia più entropico*. È logico che sia così, perché la nostra ignoranza sulla configurazione interna di un buco nero è assoluta.

4.3.2 La seconda legge generalizzata

Beatrice: wow! Non pensavo che l'aspetto così educato dei buchi neri nascondesse una vita interiore tanto *disordinata*! La cosa più interessante, però, è che è possibile eliminare il disordine dell'universo esterno, gettandolo nel buco nero! Oh, se potessi fare così quando devo mettere in ordine la mia camera! (fig. 4.4).

È vero: l'entropia della regione esterna al buco nero è legata all'incertezza relativa allo stato della materia “ordinaria”; dopo che una porzione di questa, caratterizzata da un'entropia ΔS , ha attraversato l'orizzonte degli eventi, l'incertezza riguardo al suo stato si riferisce ora alla configurazione interna *del buco nero*: pertanto l'entropia della regione esterna diminuisce di ΔS , ma contemporaneamente l'entropia del buco nero aumenta *almeno* di ΔS (in quanto oltre all'informazione che non si possedeva, va persa anche quella che si conosceva).

Perciò non è davvero possibile *eliminare* il disordine dell'universo, ma solo *nascondere*lo, e nemmeno troppo bene, perché l'entropia “ordinaria” esiliata ricompare come area dell'orizzonte degli eventi del buco nero. Se A è davvero un'entropia, si può insomma formulare una *seconda legge della termodinamica generalizzata*: *la somma dell'entropia del buco nero (proporzionale ad A) e dell'entropia S_{ext} “ordinaria” della regione esterna non può mai decrescere*:

$$\boxed{d(S_{\text{ext}} + \gamma A) \geq 0.} \quad (4.66)$$

²³Se $m < \sqrt{\hbar/2}$, il raggio di Compton è più grande e il valore minimo possibile per mb è $\sqrt{\hbar/2} \cdot \hbar / \sqrt{\hbar/2} = \hbar$; se invece è più grande il raggio gravitazionale, il minimo di mb è $\sqrt{\hbar/2} \cdot 2\sqrt{\hbar/2} = \hbar$ di nuovo.



Figura 4.4: “Oh, se potessi gettare tutta l’*entropia* della mia camera in un buco nero!”

[Bekenstein 1973] propone due esempi che avvalorano questa tesi: un *ensemble* canonico che descrive un oscillatore armonico (in equilibrio termico a una temperatura finita) che cade nel buco nero, e un raggio di luce “termalizzato” alla temperatura T , diretto verso l’orizzonte degli eventi. Il primo caso sembra aderire senza problemi alla seconda legge generalizzata, ma il secondo la conferma soltanto per $T \gg M^{-1}$ (stiamo misurando la temperatura nelle unità dell’energia). Bekenstein attribuisce questo fallimento al fatto che per temperature piccole le fluttuazioni statistiche diventano importanti: in questo regime sono possibili perfino violazioni della seconda legge “ordinaria”.

Il problema, però, è più serio, e non dipende dalle fluttuazioni. Immergiamo il nostro buco nero in un bagno termico alla temperatura T_{ext} ; ci sarà allora un flusso continuo di radiazione termica attraverso l’orizzonte degli eventi, con una variazione infinitesima della sua entropia pari a

$$dS_{\text{ext}} = -T_{\text{ext}}^{-1} dM, \quad (4.67)$$

dove dM è l’energia infinitesima trasferita al buco nero. Analogamente, la variazione dell’entropia S_{bh} del buco nero è data da

$$dS_{\text{bh}} = \frac{\partial S_{\text{bh}}}{\partial M} dM; \quad (4.68)$$

$(\partial S_{\text{bh}}/\partial M)^{-1}$ può essere vista come la temperatura *formale* del buco nero. Per $T_{\text{ext}} > T_{\text{bh}}$ si ha che $dS_{\text{bh}} > -dS_{\text{ext}}$, e la seconda legge generalizzata resta valida. Se invece $T_{\text{ext}} < T_{\text{bh}}$, l’assorbimento nel buco nero dell’energia del bagno termico tende a *diminuire* l’entropia generalizzata (consistentemente

con i problemi trovati da Bekenstein, la temperatura “cruciale” T_{bh} è proprio²⁴ dell’ordine di M^{-1}).

4.3.3 Il *quantum black hole*: la radiazione di Hawking

Beatrice: sembra che non ci sia scampo per la seconda legge generalizzata, e quindi per l’interpretazione termodinamica di A ! Peccato, stavo cominciando a crederci. . .

Axel: beh, una via d’uscita c’è. Se il buco nero emettesse una radiazione di (ehm) *corpo* nero alla temperatura T_{bh} , per $T_{\text{ext}} < T_{\text{bh}}$ la variazione complessiva di S_{ext} sarebbe *positiva* e maggiore della diminuzione di S_{bh} , salvando così la seconda legge!

Beatrice: sì, ma come può un buco nero emettere una radiazione termica attraverso l’orizzonte degli eventi? Da lì, te lo garantisco, *non esce niente*!

Axel: tu credi?

Beatrice: non ti sopporto quando mi dici “tu credi?” Se sai qualcosa che io non so, dillo subito e facciamola finita!

In questa sezione studieremo le caratteristiche della teoria quantistica dei campi sul *background* di un buco nero di Schwarzschild formatosi per collasso gravitazionale²⁵. In particolare, formuleremo un problema “di matrice S ” tra la costruzione *in*, appropriata per tempi “antichi” molto anteriori al processo di collasso, e la costruzione *out* degli osservatori che si trovano nella regione esterna del buco nero, dopo che questo ha raggiunto la sua fase finale stazionaria (vedi sez. 4.1.3). Seguiremo il procedimento generale tracciato in sez. 3.3.3; per quanto possibile, la notazione si adeguerà a quella utilizzata in sez. 1.2.4-1.2.5. Indicheremo con \mathcal{M} lo spazio-tempo del buco nero incipiente, con ${}^{\text{e}}\mathcal{M}$ lo spazio-tempo del buco nero *eterno* di Schwarzschild della stessa massa.

Costruzione in: nell’ipotesi che per tempi sufficientemente antichi la materia sia ancora molto “dispersa” e che la sua influenza sulla curvatura dello spazio-tempo sia perciò trascurabile, possiamo assumere che la geometria di \mathcal{M} sia descritta dalla metrica di Minkowski (in coordinate sferiche)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.69)$$

A rigore, al di fuori della distribuzione sferica di materia la metrica dovrebbe essere (per il teorema di Birkhoff) Schwarzschild e non Minkowski; per raggi abbastanza grandi, tuttavia, la differenza tra le due geometrie è trascurabile, tanto che nel seguito utilizziamo gli stessi simboli per le coordinate dei due sistemi, e trattiamo le due metriche come se si saldassero con continuità.

Se per semplicità consideriamo il caso del campo reale *massless* di Klein-Gordon, il problema classico dell’evoluzione dinamica del campo è ben posto una

²⁴Come si può vedere derivando l’espressione per l’area dell’orizzonte degli eventi di un buco nero di Kerr-Newman, $A = 4\pi(2M^2r_h - Q^2)$, rispetto ad M .

²⁵[Hawking 1975, Wald 1975, DeWitt 1975, Unruh 1976, Birrell e Davies 1984, Wald 1994, Brout et al. 1995].

volta fissati i dati iniziali sul confine causale \mathcal{J}^- . L'equazione di Klein-Gordon si scrive

$$\left(-\partial_t^2 + \partial_r^2 - \frac{L^2(\theta, \phi)}{r^2}\right) r\phi = 0, \quad (4.70)$$

(dove L è il consueto operatore di momento angolare) ed è soddisfatta, nel limite $r \rightarrow \infty$, dalle soluzioni

$$\psi_{l,m,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega r}} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i\omega r} e^{-i\omega t}, \quad (4.71)$$

dove abbiamo separato la dipendenza angolare introducendo le *armoniche sferiche* $Y_{lm}(\theta, \phi)$. A partire dalle $\psi_{l,m,\omega}$ è possibile costruire²⁶ una base completa di soluzioni per l'intero spazio-tempo. La nozione di frequenza positiva implicita nella scelta delle $\psi_{l,m,\omega}$ è quella naturale per gli osservatori “inerziali” (stiamo assumendo che nel passato remoto \mathcal{M} sia pressoché minkowskiano) che si trovano vicino a i^- .

Passiamo ora alla *costruzione out*. In un primo momento ci limiteremo a considerare una teoria di campo per la sola regione di \mathcal{M} esterna al buco nero (la regione I di fig. 4.2). In questo modo, chiaramente, la \mathbb{H}_{in} -teoria e la \mathbb{H}_{out} -teoria si riferiscono a spazio-tempo diversi e non è possibile stabilire tra di loro una piena equivalenza unitaria. I risultati che otterremo sono tuttavia sufficienti a determinare il contenuto in “particelle” *out* dello stato di vuoto *in*.

La presenza in \mathcal{M} dell'orizzonte degli eventi h^+ fa sì che il solo confine causale \mathcal{J}^+ non costituisca una superficie di Cauchy nemmeno per la sola regione I. È invece necessario considerare \mathcal{J}^+ *insieme all'orizzonte degli eventi*. Per la costruzione *out*, pertanto, identificheremo lo spazio \mathcal{S} delle soluzioni classiche dell'equazione d'onda con lo spazio dei dati iniziali del campo su $\mathcal{J}^+ \cup h^+$, e cercheremo una base di soluzioni “a frequenza positiva” adatte per determinare lo spazio di Hilbert “a una particella” $\mathbb{H}_{\text{out}} = \mathbb{H}(\mathcal{J}^+ \cup h^+)$. La nozione di frequenza positiva che ci interessa è legata agli *osservatori stazionari all'infinito* (che si trovano cioè a r di Schwarzschild costanti, e il cui tempo è dato dal tempo coordinato t).

Prima di affrontare il problema per \mathcal{M} , risolviamolo nello spazio-tempo più semplice ${}^{\text{e}}\mathcal{M}$. Nelle coordinate e per la metrica di Schwarzschild, l'equazione di Klein-Gordon si scrive

$$\begin{aligned} \square\phi &= \frac{1}{g} \partial_\mu g^{\mu\nu} \sqrt{g} \partial_\nu \phi = \\ &= \frac{1}{r - 2M} \left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{L^2}{r^2}\right) \right] r\phi = 0; \end{aligned} \quad (4.72)$$

dove $r^* = r + 2M \log|1 - r/2M|$ è la *Regge-Wheeler tortoise coordinate*. Introducendo anche qui le armoniche sferiche, per la parte radiale della soluzione rimane l'equazione

$$[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 + V(r)] \phi_r = 0; \quad (4.73)$$

²⁶Formando una serie di pacchetti d'onda localizzati e normalizzabili; come è costume in meccanica quantistica, discutiamo però per semplicità il comportamento delle soluzioni “d'onda piana” non normalizzabili.

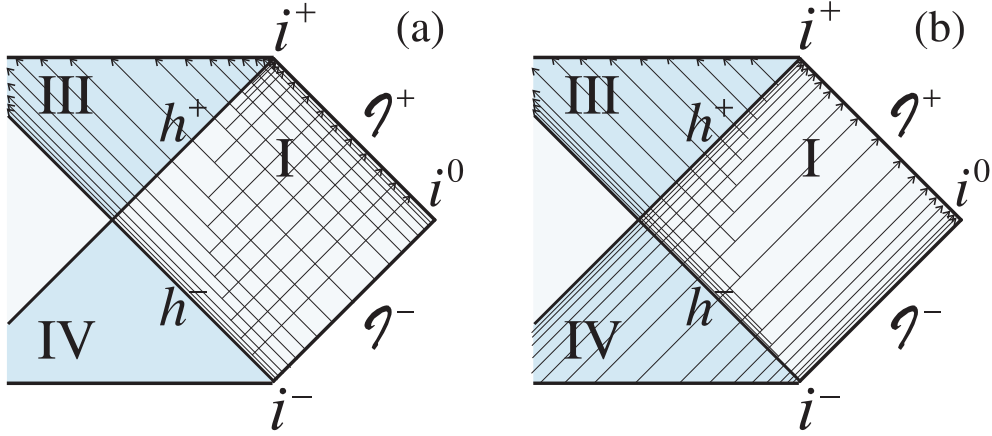


Figura 4.5: Soluzioni (a) *in-going* e (b) *out-going* sul *background* di un buco nero di Schwarzschild *eterno*

Sul diagramma di Penrose (vedi app. B) sono tracciate le linee di fase costante delle soluzioni, che ne indicano la direzione di propagazione. È evidente lo *scattering* sul potenziale “centrifugo” del buco nero. L’affollamento delle onde nei pressi di \mathcal{I}^- e \mathcal{I}^+ è solo apparente (è una conseguenza della “compressione” conforme del diagramma di Penrose); vicino agli orizzonti del buco nero, invece, le soluzioni hanno effettivamente un numero infinito di superfici di fase costante in una regione limitata. Questo accade perché negli esponenziali di eq. (4.74)-(4.75), compare il raggio “della tartaruga” r^* che tende a $-\infty$ per $r \rightarrow 2M$.

$V = (1 - 2M/r)(2M/r^3 + l(l+1)/r^2)$ gioca il ruolo di una “barriera centrifuga” (presente anche per $l = 0$, a differenza del potenziale “centrifugo” dello spazio piatto). Il passaggio alla coordinata radiale r^* ha l’effetto di far regredire a $r^* \rightarrow -\infty$ l’orizzonte degli eventi $r = 2M$; l’eq. (4.73) equivale perciò a un problema di *scattering* unidimensionale. Richiedendo che la dipendenza dal tempo sia data da $e^{-i\sigma t}$ (vogliamo soluzioni a *frequenza positiva*!), otteniamo due classi di soluzioni: quelle che chiameremo *in-going*, la cui dipendenza asintotica da r^* è

$$\underline{\chi}_{l,\sigma} = \begin{cases} \underline{B}_{l,\sigma} e^{-i\sigma r^*} & \text{per } r^* \rightarrow -\infty, \\ e^{-i\sigma r^*} + \underline{A}_{l,\sigma} e^{i\sigma r^*} & \text{per } r^* \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (4.74)$$

e la classe delle soluzioni *out-going*:

$$\overrightarrow{\chi}_{l,\sigma} = \begin{cases} e^{i\sigma r^*} + \overrightarrow{A}_{l,\sigma} e^{-i\sigma r^*} & \text{per } r^* \rightarrow -\infty, \\ \overrightarrow{B}_{l,\sigma} e^{i\sigma r^*} & \text{per } r^* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.75)$$

(la “e” sta per “eterno”). Come si può vedere in fig. 4.5, le soluzioni *in-going* rappresentano onde provenienti da \mathcal{I}^- e diffuse dalla barriera di potenziale V : la componente *trasmessa* attraversa con ampiezza $|\underline{B}_{l,\sigma}|$ l’orizzonte degli eventi, mentre la componente *riflessa* si dirige con ampiezza $|\underline{A}_{l,\sigma}|$ verso \mathcal{I}^+ . Le onde *out-going* provengono invece dalla singolarità di buco bianco (vedi app. B), e sono riflesse nel buco nero con un’ampiezza $|\underline{A}_{l,\sigma}|$ oppure trasmesse verso \mathcal{I}^+

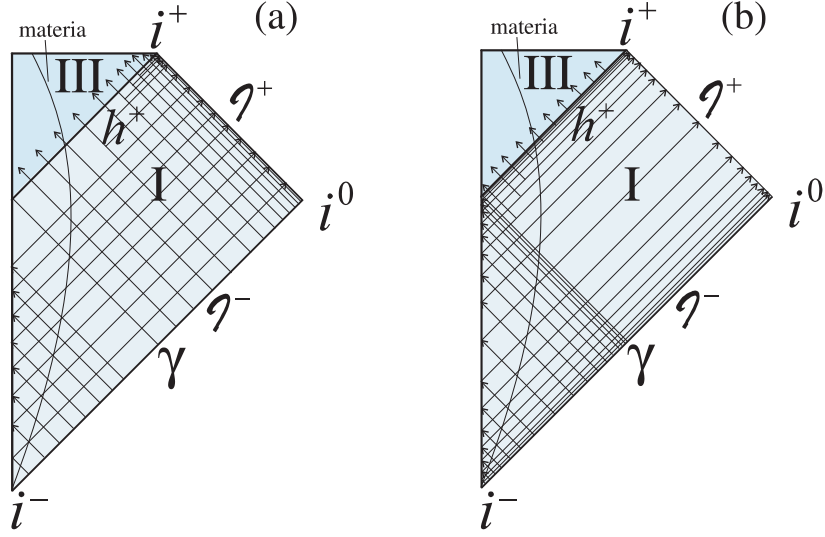


Figura 4.6: Soluzioni (a) *outgoing* e (b) *in-going* sul *background* di un buco nero formatosi per collasso gravitazionale

Il comportamento delle soluzioni è analogo a quello di fig. 4.5 per la regione esterna all'orizzonte degli eventi e alla distribuzione di materia, ma differisce altrove a causa dell'assenza della regione di buco bianco. Ne segue che tutte le onde devono avere origine nell'infinito passato nullo \mathcal{J}^- . Le onde *in-going* “tarde” che arrivano in prossimità di i^+ provengono direttamente da \mathcal{J}^- senza nessuna interazione con la materia (sono riflesse dalla barriera di potenziale in modo identico alle corrispondenti soluzioni su \mathcal{M} ; le onde *out-going* “tarde”, invece, attraversano la distribuzione di materia appena prima della formazione dell'orizzonte degli eventi, e provengono *tutte* da un intervallo finito della coordinata $t - r$ su \mathcal{J}^- .

con un'ampiezza $|B_{l,\sigma}|$. Complessivamente, le soluzioni si scrivono

$${}^e\chi_{l,m,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma r}} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} {}^e\chi_{l,\sigma}(r), \quad (4.76)$$

e si prestano a determinare completamente \mathbb{H}_{out} .

Bene, la costruzione *out* appena discussa può essere utilizzata anche in \mathcal{M} (sempre per la sola regione I). Qui la metrica di Schwarzschild è valida per tutta la regione I dopo la formazione dell'orizzonte degli eventi e, per tempi precedenti, al di fuori della distribuzione sferica di materia. Chiameremo $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$ e $\bar{\chi}_{l,m,\sigma}$ le soluzioni di \mathcal{M} che coincidono nella regione di spazio-tempo isometrica con le corrispondenti soluzioni di \mathcal{M} .

Non ci resta che esaminare il comportamento delle nuove soluzioni χ nella regione dove invece le metriche differiscono. Propagando le soluzioni all'indietro da \mathcal{J}^+ (fig. 4.6), dove ne conosciamo la forma, scopriamo che l'origine delle onde *in-going* $\underline{\chi}$ sarà ancora essenzialmente nella regione \mathcal{J}^- , tranne che per alcune onde che riescono ad attraversare la distribuzione di materia prima della formazione dell'orizzonte degli eventi. Queste, tuttavia, approdano a \mathcal{J}^+ lon-

tano da i^+ , e dunque l'origine delle onde che si possono incontrare per tempi sufficientemente tardi coincide con quella delle $\underline{\chi}$ corrispondenti.

Le cose sono diverse per i modi $\underline{\chi}$, che a differenza degli $\epsilon\chi$ non possono avere origine nella singolarità di buco bianco: proverranno invece da \mathcal{I}^- , e giungeranno in \mathcal{I}^+ dopo aver attraversato la distribuzione di materia prima della formazione dell'orizzonte degli eventi. In prossimità di h^+ , e della geodetica nulla γ che gli dà origine, si addensa un numero infinito di onde. Poiché queste vengono riflesse dalla barriera centrifuga solo *dopo* la formazione dell'orizzonte degli eventi, deve essere loro possibile attraversare la materia con ampiezza unitaria (come testimonia l'eq. (4.75)), sbucando fuori in prossimità di h^+ .

Fisicamente, questo processo si può comprendere considerando un pacchetto d'onde sferico *in-going*, che diminuendo progressivamente il proprio raggio raggiunge la superficie di una distribuzione sferica di materia in contrazione; mentre si avvicina, l'onda subisce un certo *blue-shift* gravitazionale (si veda la nota 4 a pag. 105). L'onda attraversa poi la distribuzione di materia fino a ridursi a un punto nell'origine e a cominciare a espandersi come onda *out-going*; nel momento in cui l'onda raggiunge nuovamente la superficie della materia, questa si è ulteriormente contratta, e pertanto in uscita l'onda subisce un *red-shift* che supera il *blue-shift* precedente. Il *red-shift* complessivo è un effetto molto importante negli attimi che precedono la formazione dell'orizzonte degli eventi, perché la scala di tempo di “restringimento” della materia diventa paragonabile al tempo che l'onda impiega per attraversarla.

Ritorniamo al nostro problema: vogliamo verificare il contenuto in “particelle” *out* dello stato di vuoto della *costruzione in*. Per fare questo dobbiamo ricavare la decomposizione dei modi “a frequenza positiva” di \mathbb{H}_{in} in funzione dei modi di \mathbb{H}_{out} e dei loro coniugati, verificando in particolare se vi sia un *mixing delle frequenze* e quindi un fenomeno di produzione di “particelle”.

Da questo punto di vista, non dobbiamo preoccuparci dei modi *in-going* $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$, che si possono esprimere su \mathcal{I}^- come combinazioni delle $\psi_{l,m,\omega}$ a frequenza positiva (la barriera di potenziale rimane a un raggio costante anche prima della formazione dell'orizzonte degli eventi, e la riflessione delle onde *in-going* avviene *elasticamente* senza alcun *red-shift* differenziale). Allora gli operatori di distruzione associati ai modi $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$ *annulleranno* lo stato di vuoto $|0_{\text{in}}\rangle$; in altre parole, $|0_{\text{in}}\rangle$ non contiene nessuna “particella” *in-going* della costruzione *out*: per tempi tardi, gli osservatori all'infinito non vedranno dunque nessuna “particella” provenire dalla direzione di \mathcal{I}^- .

Il discorso è molto diverso per i modi *out-going* $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$: il loro comportamento singolare vicino a γ mette in corrispondenza un intervallo infinito di tempo asintotico futuro (vicino a i^+) con un intervallo *solo finito* del tempo asintotico passato (su \mathcal{I}^-). Vicino a h^+ , le superfici di fase stazionaria delle $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$ sono date da $e^{i\sigma(r^*-t)}$; per frequenze molto alte questo è vero anche all'interno della distribuzione di materia (*approssimazione dell'ottica geometrica*). Consideriamo ora la *back-propagation* delle superfici di fase costante vicine a h^+ (vedi fig. 4.6b): dopo la riflessione nei pressi dell'origine, queste mantengono da γ una distanza corrispondente alla loro coordinata nulla V su γ , nel momento in cui l'intersecano.

Ora, la distanza delle superfici di fase costante da γ , che si mantiene costante

tornando indietro verso i tempi “antichi”, ci permette di ricavare la dipendenza delle $\chi_{l,m,\sigma}$ dal tempo asintotico della costruzione *in*. Ci serve quindi l’espressione delle $\chi_{l,m,\sigma}$ su γ in funzione di V : quest’ultima coinciderà con l’espressione delle χ in \mathcal{M} in funzione del parametro affine dell’orizzonte *passato* h^- . Non a caso, torna in gioco la relazione (eq. (3.121)) che sussiste sull’orizzonte tra il “tempo di Killing” e il parametro affine delle geodetiche nulle. Mettendo insieme tutte queste considerazioni, possiamo scrivere la forma di $\chi_{l,m,\sigma}$ nel limite di tempi antichi:

$$\chi_{l,\sigma}(r, t) = \theta(t_0 - r^* - t) e^{i\sigma \kappa \log D(t_0 - r^* - t)} + \underline{B}_{l,\sigma} e^{-i\sigma(t-r^*)} \quad \text{per } t - r^* \rightarrow -\infty, \quad (4.77)$$

dove t_0 è il tempo asintotico di formazione dell’orizzonte degli eventi, la θ rappresenta la riflessione delle superfici di fase costante e D è un fattore arbitrario che dipende dalla scelta del parametro affine V . Cerchiamo allora di ricavare i coefficienti di Bogoliubov $\alpha_{\omega,\sigma}$ e $\beta_{\omega,\sigma}$ che caratterizzano la sovrapposizione tra i modi *out-going* di \mathbb{H}_{out} e i modi $\bar{\text{in}}$ di \mathbb{H}_{in} . Nella metrica di Schwarzschild e nella \mathbb{H} -teoria “stazionaria” indotta dalla foliazione in superfici di Cauchy a t costante, il prodotto scalare di Klein-Gordon è dato da [DeWitt 1975]

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) &= \int_{2M}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^2 \sin \theta u_1^*(i\overleftrightarrow{\partial}_t) u_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dr^* \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta u_1^*(i\overleftrightarrow{\partial}_t) u_2. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Calcoleremo il prodotto scalare che ci interessa per tempi “antichi” per i quali è valida la forma asintotica (4.71) di $\psi_{l,m,\omega}$. Naturalmente nello spazio-tempo del collasso gravitazionale la forma (4.78) del prodotto scalare non è valida dappertutto perché dobbiamo tenere conto della diversa metrica all’interno della distribuzione di materia; tuttavia possiamo aggirare questa difficoltà sostituendo $\psi_{l,m,\omega}$ con un pacchetto d’onda “largo ma localizzato” al di fuori della materia. Allora,

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega,\sigma} &= (\chi_{l,m,\sigma}, \psi_{l',m',\omega}) = \\ &= \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{4\pi \sqrt{\sigma\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dr^* \chi_{l,m,\sigma}^*(r^*) i\overleftrightarrow{\partial}_t \psi_{l',m',\omega}(r^*) = \\ &= \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{4\pi \sqrt{\sigma\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dr^* \left\{ \theta(t_0 - r^* - t) [D(t_0 - r^* - t)]^{-i4M\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + \underline{B}_{l,\sigma} e^{-i\sigma(r^*-t)} \right\} (i\overleftrightarrow{\partial}_t) e^{-i\omega(t+r^*)} = \\ &= \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{4\pi \sqrt{\sigma\omega}} \left\{ \int_{-\infty}^0 dx D^{-i4M\sigma} [\omega e^{-i4M\sigma} + 4M\sigma x^{-i4M\sigma-1}] e^{i\omega t_0} e^{i\omega x} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} dr^* \underline{B}_{l,\sigma} (\omega + \sigma) e^{-i(\omega+\sigma)r^*} e^{-i\omega t + i\sigma t} \right\} = \\ &= \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{4\pi \sqrt{\sigma\omega}} D^{-i4M\sigma} e^{i\omega t_0} (-i\omega)^{i4M\sigma} [i\Gamma(-i4M\sigma + 1) + 4M\sigma \Gamma(-i4M\sigma)] = \\ &= i \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{2\pi \sqrt{\sigma\omega}} e^{2\pi M\sigma} D^{-i4M\sigma} e^{i\omega t_0} \omega^{i4M\sigma} \Gamma(-i4M\sigma + 1). \end{aligned} \quad (4.79)$$

tra la terza e la quarta riga abbiamo introdotto la variabile $x = t_0 - r^* - t$ e, per comodità, eliminato la θ valutando l'integrale in $t = t_0$; tra la quarta e la quinta riga abbiamo eliminato il secondo integrale (che è proporzionale a $(\omega + \sigma)\delta(\omega + \sigma)$ e quindi nullo) e sfruttato la definizione²⁷ della funzione Γ ; infine, prima dell'ultima riga abbiamo utilizzato la relazione $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ e scritto $(-i\omega)^{i4M\sigma}$ come $e^{i4M\sigma(\log \omega - i\pi/2)}$. $\beta_{\omega\sigma}$ si può trovare con un calcolo analogo oppure semplicemente sostituendo σ con $-\sigma$ e aggiungendo un segno meno complessivo, necessario perché $\chi_{l,m,\sigma}$ è uno stato a norma negativa:

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\sigma} &= (\chi_{l,m,\sigma}, \psi_{l',m',\omega}) = \\ &= -i \frac{\delta_{ll'} \delta_{mm'}}{2\pi \sqrt{\sigma\omega}} e^{-2\pi M\sigma} D^{i4M\sigma} e^{i\omega t_0} \omega^{-i4M\sigma} \Gamma(i4M\sigma + 1). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Possiamo utilizzare subito la formula (1.130) per verificare il contenuto in “particelle” $\chi_{l,m,\sigma}$ dello stato di vuoto relativo alle $\psi_{l,m,\omega}$:

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{in}} | c_{l,m,\sigma}^\dagger c_{l',m',\sigma'} | 0_{\text{in}} \rangle &= \\ &= \int_0^\infty d\omega \beta_{\omega\sigma}^* \beta_{\omega\sigma'} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\sigma'\sigma}} D^{-i4M(\sigma-\sigma')} e^{-2\pi M(\sigma+\sigma')} \Gamma^*(i4M\sigma + 1) \Gamma(i4M\sigma' + 1) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \omega^{i4M(\sigma-\sigma')} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\sigma'\sigma}} D^{-i4M(\sigma-\sigma')} e^{-2\pi M(\sigma+\sigma')} \Gamma^*(i4M\sigma + 1) \Gamma(i4M\sigma' + 1) \times \\ &\quad \times \frac{1}{4M} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i(\sigma-\sigma')\lambda} = \\ &= \frac{e^{-4\pi M\sigma}}{2 \sinh 4\pi M\sigma} \delta(\sigma - \sigma') = \frac{\delta(\sigma - \sigma')}{e^{8\pi M\sigma} - 1}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

dove $c_{l,m,\sigma}^\dagger$ e $c_{l,m,\sigma}$ sono gli operatori di costruzione e distruzione associati con i modi $\chi_{l,m,\sigma}$; tra la terza e la quarta riga si è introdotta la variabile di integrazione $\lambda = 4M \log \omega$ ottenendo così una rappresentazione di $\delta(\sigma - \sigma')$; tra la quarta e la quinta riga si è utilizzata la formula $|\Gamma(iz + 1)|^2 = z^2 |\Gamma(iz)|^2 = \pi z / \sinh \pi z$.

Il sorprendente risultato fisico è che per tempi sufficientemente tardi, lo stato di vuoto della costruzione *in* appare agli osservatori esterni come *un bagno termico di particelle provenienti dalla direzione del buco nero* (o meglio dalle vicinanze dell'evento che segna la formazione dell'orizzonte h^+). Il bagno termico è caratterizzato dalla temperatura (di Hawking) $T_H = \kappa/2\pi \equiv 1/8\pi M$, e prende il nome di *radiazione di Hawking*. Tenendo conto del fatto che le soluzioni

²⁷ $\Gamma(z)$ si definisce per $\text{Re } z > 0$ come

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt; \quad (4.80)$$

in (4.79) si ruota il contorno di integrazione nel piano complesso dopo aver posto $t = -ix$.

$\chi_{l,m,\sigma}$ rappresentano onde che vengono parzialmente riflesse nel buco nero, l'emissione termica effettivamente misurata risulta essere *filtrata* dalla probabilità di trasmissione $\underline{B}_{l,\sigma}$ dei modi *out-going* attraverso la barriera di potenziale del buco nero.

La presenza di una radiazione termica alla temperatura di Hawking risolve i dubbi sulla seconda legge generalizzata espressi in sez. 4.3.2, e *fissa la costante di proporzionalità tra l'area dell'orizzonte degli eventi e l'entropia del buco nero*. Nella prima legge infatti A compare insieme a κ nella combinazione $(\kappa/8\pi)dA$. Se la temperatura *termodinamica* del buco nero è $\kappa/2\pi$, allora deve valere la *formula di Bekenstein-Hawking*

$$\boxed{S_{\text{bh}} = \frac{A}{4}}. \quad (4.83)$$

4.3.4 La matrice di densità termica

Beatrice: wow! Allora i buchi neri sono *caldi*! Tutto dunque quadra nella termodinamica dei buchi neri! C'è ancora una cosa che non capisco, però: mi aspettavo che, come per l'effetto Unruh, il bagno termico fosse descritto da una matrice di densità; invece sembra che a $|0_{\text{in}}\rangle$ corrisponda un *vettore* (e quindi uno stato puro) di $\mathbb{H}_{\text{out}} \dots$

Axel: non correre! Se guardi bene...

...nella sezione precedente, ci siamo limitati a ricavare l'azione su $|0_{\text{in}}\rangle$ dell'operatore *numero* dei modi esterni *out-going*. Se vogliamo ottenere l'espressione formale di $|0_{\text{in}}\rangle$ come stato dello spazio di Fock *out*, non è più sufficiente limitarsi a una \mathbb{H}_{out} -teoria della sola regione I. Dopo la formazione dell'orizzonte degli eventi h^+ , ogni superficie di Cauchy Σ per l'intero spazio-tempo \mathcal{M} dovrà necessariamente intersecare h^+ , e la costruzione *out* dovrà per forza rappresentare anche i gradi di libertà che giacciono interamente in $\Sigma \cap \text{III}$ e sono pertanto inaccessibili agli osservatori esterni. Da un altro punto di vista, il motivo per cui non è possibile stabilire una corrispondenza tra la \mathbb{H}_{in} -teoria e la \mathbb{H}_{out} -teoria "incompleta" è che alcune soluzioni di \mathbb{H}_{in} rappresentano onde che vengono interamente "inghiottite" dal buco nero; le soluzioni con supporto in $\Sigma \cap \text{III}$ sono allora necessarie se si vuole dare una rappresentazione di $|0_{\text{in}}\rangle$ come stato puro.

Una volta espresso $|0_{\text{in}}\rangle$ come stato della \mathbb{H}_{out} -teoria "completa", potremo fare la traccia sui gradi di libertà di $\Sigma \cap \text{III}$, ottenendo una matrice di densità *effettiva* che descrive, per tempi sufficientemente tardi²⁸, la regione esterna I.

Per "immergere" $|0_{\text{in}}\rangle$ nello spazio di Fock della \mathbb{H}_{out} -teoria possiamo seguire un procedimento simile allo "schema di Unruh" di sez. 1.2.5. Dalle soluzioni ${}^e\chi_{l,m,\sigma}$ (sullo spazio-tempo di buco nero eterno) è possibile ottenere, per riflessione attraverso l'origine, delle soluzioni ${}^e\chi_{l,m,\sigma}^{\text{II}}$ che hanno supporto nella regione II di \mathcal{M} (vedi fig. 4.7); in particolare, le soluzioni ${}^e\chi_{l,m,\sigma}^{*\text{II}}$ *coniugate* descrivono onde che hanno origine nella singolarità di buco bianco e che vengono

²⁸La porzione esterna $\Sigma \cap \text{I}$ di una qualsiasi superficie di Cauchy *space-like* Σ vicina a \mathcal{I}^+ ha sempre una porzione di h^+ nel suo futuro causale: ne segue che la descrizione quantistica di $\Sigma \cap \text{III}$ non può prescindere dai modi "interni" di $\Sigma \cap \text{III}$. L'effetto di questa "coda", tuttavia, diventa trascurabile avvicinandosi a i^+ .

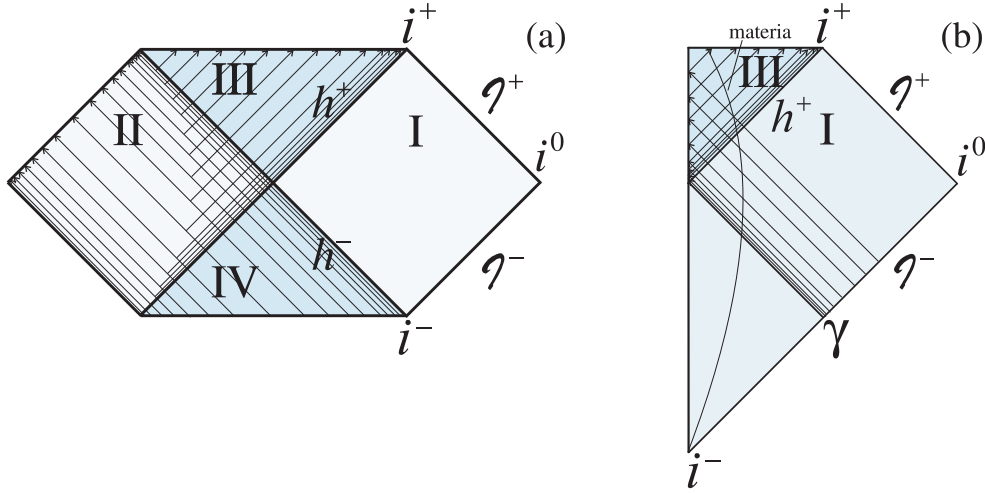


Figura 4.7: I modi *out-going* “riflessi” (a) $\underline{\chi}^{*\text{II}}$ per il buco nero eterno e (b) $\underline{\chi}^{\text{II}}$ per il buco nero incipiente

in parte riflesse nella regione di buco nero, in parte trasmesse all’infinito nullo futuro della regione II. In \mathcal{M} , le soluzioni con gli stessi dati di $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{*\text{II}}$ nella regione III (le chiameremo ovviamente $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{*\text{II}}$) rappresentano onde che si propagano da \mathcal{I}^- direttamente in h^+ . In particolare, queste onde si affollano vicino all’orizzonte h^+ (ma nella regione *interna*) e nei pressi della geodetica nulla γ (ma nel suo *futuro*). Ora, con lo stesso genere di argomenti che abbiamo usato per propagare all’indietro i modi $\underline{\chi}$, è facile convincersi²⁹ che

$$\underline{\alpha}_{\omega,\sigma}^{*\text{II}} = \underline{\alpha}_{\omega,\sigma}, \quad \underline{\beta}_{\omega,\sigma}^{*\text{II}} = \underline{\beta}_{\omega,\sigma}. \quad (4.84)$$

Utilizzando *insieme* i modi $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}$ e $\underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{\text{II}}$ tenendo conto del fatto che (a meno di fasi non importanti) $\underline{\beta}_{\omega,\sigma} = e^{-4\pi M\sigma} \underline{\alpha}_{\omega,\sigma}^*$, è possibile costruire, in modo analogo a quanto fatto in sez. 1.2.5, un *set* completo di modi a frequenza puramente positiva rispetto al tempo asintotico di \mathcal{I}^- , dati (a meno di un fattore di normalizzazione) da

$$\begin{cases} \tilde{\underline{\chi}}_{l,m,\sigma} &= \underline{\chi}_{l,m,\sigma} + e^{-4\pi M\sigma} \underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{*\text{II}}, \\ \tilde{\underline{\chi}}_{l,m,-|\sigma|} &= \underline{\chi}_{l,m,|\sigma|}^{\text{II}} + e^{-4\pi M|\sigma|} \underline{\chi}_{l,m,|\sigma|}^*; \end{cases} \quad (4.85)$$

da questi modi è facile ricavare come in sez. 3.3.4 l’azione dell’operatore $\mathcal{E} \equiv \overline{D}\overline{C}^{-1} : \mathbb{H}_{\text{out}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{out}}$,

$$\begin{cases} \mathcal{E} \underline{\chi}_{l,m,\sigma}^* = e^{-4\pi M\sigma} \underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{\text{II}}, \\ \mathcal{E} \underline{\chi}_{l,m,\sigma}^{*\text{II}} = e^{-4\pi M\sigma} \underline{\chi}_{l,m,\sigma}; \end{cases} \quad (4.86)$$

possiamo quindi utilizzare l’eq. (3.83) per ottenere la tanto desiderata espressione di $|0_{\text{in}}\rangle$ come stato di \mathbb{H}_{out} :

$$|\Psi\rangle = U|0_{\text{in}}\rangle = Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\oplus_{l,m,\sigma} e^{-n\pi\sigma/\kappa} |\underline{n}_{\sigma,l,m}\rangle \otimes |\underline{n}_{\sigma,l,m}, \text{II}\rangle \right). \quad (4.87)$$

²⁹Vedi comunque [Wald 1975, Wald 1994].

Questa derivazione mostra che le “particelle” *out-going* misurate in $|0_{\text{in}}\rangle$ dagli osservatori vicini a i^+ sono correlate con “particelle” che cadono nel buco nero appena dopo la formazione dell’orizzonte degli eventi. Solo in questo senso si può dare credito all’esposizione divulgativa abbastanza diffusa che spiega la radiazione di Hawking come dovuta alla creazione nello stato di vuoto del campo di una coppia di particelle virtuali, una delle quali cade nel buco nero mentre l’altra viaggia verso \mathcal{I}^+ come particella *reale*.

La matrice di densità ρ che descrive completamente lo stato del campo nella regione I di \mathcal{M} si ottiene facendo la traccia sugli stati $|\underline{n}_{\sigma,l,m}, \text{II}\rangle$ dopo aver formato la matrice di densità “pura” $|\Psi\rangle\langle\Psi|$:

$$\rho = \text{tr}_{\text{II}} |\Psi\rangle\langle\Psi| = Z^{-1} \otimes_{n=0}^{\infty} \left(\oplus_{l,m,\sigma} e^{-2\pi n\sigma/\kappa} |\underline{n}_{\sigma,l,m}\rangle\langle\underline{n}_{\sigma,l,m}| \right). \quad (4.88)$$

Il lettore attento può essersi preoccupato perché non abbiamo dato nessuna indicazione esplicita riguardo alla scelta delle soluzioni a frequenza positiva (e quindi dello spazio di Hilbert “a una particella” \mathbb{H}) su $\Sigma \cap \text{III}$; la nostra negligenza, tuttavia, è giustificata, visto che prima di tutto gli osservatori esterni non possono formulare nessuna definizione sensata di frequenza positiva relativamente a gradi di libertà a cui non hanno accesso, e in secondo luogo perché la matrice di densità $\rho = \text{tr}_{\text{II}} |\Psi\rangle\langle\Psi|$ è invariante rispetto alla scelta dei modi “interni”. Diverse scelte porterebbero infatti a stati $|\underline{n}_{\sigma,l,m}, \text{II}\rangle$ e $|\underline{n}'_{\sigma,l,m}, \text{II}\rangle$ legati da una trasformazione unitaria V_{II} ; ma per l’invarianza ciclica della traccia,

$$\text{tr}_{\text{II}} V_{\text{II}} |\Psi\rangle\langle\Psi| V_{\text{II}}^{-1} = \text{tr}_{\text{II}} |\Psi\rangle\langle\Psi| V_{\text{II}}^{-1} V_{\text{II}} = \rho. \quad (4.89)$$

4.3.5 Il processo di evaporazione dei buchi neri

Nelle due ultime sezioni ci siamo concentrati sulla derivazione matematica dell’effetto Hawking; è senza dubbio molto interessante, tuttavia, chiedersi se la radiazione termica dei buchi neri, oltre a completare il quadro concettuale della termodinamica dei buchi neri (torneremo su questo aspetto) abbia altresì effetti sperimentabili praticamente.

Come abbiamo già anticipato, rimettendo a posto le costanti in T_{H} si trova

$$T_{\text{H}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} = 6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) ^{\circ}\text{K}; \quad (4.90)$$

se si tiene presente la temperatura della *radiazione cosmica di fondo* ($\cong 3^{\circ}\text{K}$), risulta evidente che la radiazione di Hawking è trascurabile per i buchi neri che devono la propria origine a processi di collasso gravitazionale stellare (con $M > M_{\odot}$), ma può diventare importante per i buchi neri più piccoli che potrebbero essersi formati a causa delle fluttuazioni di densità dell’universo primitivo.

Per calcolare il *rate* di emissione di energia di un buco nero integriamo il valore di aspettazione $\langle 0_{\text{in}} | T_{ab} | 0_{\text{in}} \rangle$ del tensore di energia-impulso del campo su una superficie sferica che circonda il buco nero per un tempo t “tardo”. Possiamo sfuggire ai problemi di definizione di T_{ab} (che abbiamo incontrato in sez. 3.3.8) tenendo conto che per grandi raggi lo spazio-tempo è essenzialmente

piatto, ed è possibile rinormalizzare l'energia con un semplice *normal-ordering*. A partire dall'eq. (3.104) otteniamo, nel limite $r \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= - \int dS (\partial_t)^a (\partial_r)^b \langle 0_{\text{in}} | T_{ab} | 0_{\text{in}} \rangle = \\
 &= \int dS \langle 0_{\text{in}} | \nabla_t \phi(x) \nabla_r \phi(x) | 0_{\text{in}} \rangle = \\
 &= \int dS \sum_{l,m,l',m'} \int d\sigma d\sigma' (\nabla_t \chi_{l,m,\sigma}^* \nabla_r \chi_{l',m',\sigma'}) \langle 0_{\text{in}} | c_{l,m,\sigma}^\dagger c_{l',m',\sigma'} | 0_{\text{in}} \rangle = \\
 &= \sum_{l,m} \int d\sigma \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \frac{|\vec{B}_{l,\sigma}|^2}{e^{8\pi M\sigma} - 1},
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

dove tra la seconda e la terza riga abbiamo applicato la condizione di *normal-ordering*; tra la terza e la quarta riga abbiamo utilizzato la normalizzazione (4.76) delle soluzioni $\chi_{l',m',\sigma'}$ e la loro dipendenza asintotica, e integrato sulla superficie sferica sfruttando l'ortonormalità delle $Y_{l,m}(\theta, \phi)$; infine, abbiamo inserito il risultato (4.82) per il valore di aspettazione dell'operatore numero.

Per valutare l'emissione energetica del nostro buco nero è dunque necessario conoscere i coefficienti $\vec{B}_{l,\sigma}$ di trasmissione dei modi attraverso la barriera di potenziale V . Le tecniche necessarie a questo scopo, fortunatamente, sono state sviluppate nello studio delle perturbazioni *gravitazionali*³⁰ dei buchi neri. Per il buco nero incipiente “di Schwarzschild”, il calcolo è stato effettuato da [Page 1976a], che considera soltanto il caso dei campi *mass-less* conosciuti (questi dominano comunque l'emissione per temperature T_H minori di $m_e c^2/k$, dove m_e è la massa dell'elettrone). Come l'esistenza della “barriera centrifuga” poteva far supporre, la radiazione è emessa in modo preponderante (per oltre il 95%) in modi con momento angolare orbitale $l = 0$. Lo spettro totale di emissione ha un picco per $\sigma \cong 0.17M^{-1}$, e decade rapidamente (di un fattore 10^6) entro poche frazioni di M^{-1} . Le lunghezze d'onda dominanti superano pertanto il raggio del buco nero. La potenza totale radiata³¹ è

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = 1.24 \cdot 10^{-20} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \frac{\text{erg}}{\text{s}}, \tag{4.92}$$

(da confrontare, ad esempio, con la potenza solare $W_\odot = 3.83 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$). 87% della radiazione è emessa nei tre tipi di neutrini, 12% in fotoni e 1% in gravitoni.

Consideriamo ora nella regione stazionaria dello spazio-tempo del buco nero una superficie bidimensionale Θ formata da due superfici di Cauchy a t costante e da due superfici sferiche $r_\infty \gg 2M$ e $r_{\text{bh}} = 2M + \epsilon$. Poiché la densità di

³⁰Le perturbazioni della metrica, trattate con le equazioni di Einstein linearizzate, sono essenzialmente campi *mass-less* classici sul *background* di buco nero, e portano ad equazioni simili alla (4.73). Per la teoria generale si vedano [Chandrasekhar 1983, Piazza 1997]; per le *references* relative alle tecniche di calcolo numeriche si vedano invece [Page 1976a, Page 1976b].

³¹Abbiamo corretto i risultati di [Page 1976a] per tenere conto del neutrino τ , che non era noto nel 1976.

energia-momento $\langle T_{ab} \rangle$ del campo quantistico ha divergenza nulla, il flusso di energia attraverso Θ deve annullarsi; la presenza del campo di Killing $(\partial_t)^a$ ci permette di concludere ulteriormente che

$$\mathcal{L}_{(\partial_t)^c} \left\{ \langle T_{ab} \rangle (\partial_t)^b \right\} = 0; \quad (4.93)$$

ne segue che il flusso di energia attraverso le due superfici a t costante è complessivamente nullo. L'esistenza di un flusso costante di energia verso l'esterno, determinato in eq. (4.91), implica quindi che *un flusso di energia negativo della stessa grandezza dovrà fluire attraverso l'orizzonte degli eventi*. Se si assume strumentalmente la validità delle equazioni di Einstein semiclassiche,

$$G_{ab} = 8\pi \langle T_{ab} \rangle, \quad (4.94)$$

si può concludere che la *back-reaction* dell'energia dei campi quantistici sulla geometria dello spazio-tempo costringerà il buco nero a perdere una massa corrispondente all'energia radiata: questo fenomeno è noto come *evaporazione di Hawking*.

Purtroppo non è possibile ottenere una conferma di questi risultati risolvendo in modo consistente l'eq. (4.94), per i problemi legati alla definizione di T_{ab} in regioni curve dello spazio-tempo (vedi sez. 3.3.8, in particolare la nota 31), ma soprattutto perché l'eq. (4.94) è terribilmente difficile: $\langle T_{ab} \rangle$ contiene derivate del *quarto* ordine della metrica ed è in generale un funzionale altamente non-locale di g_{ab} . In questo senso la (4.94) è analoga all'equazione del moto di una carica puntiforme in elettrodinamica classica quando si include il termine di reazione di radiazione: compaiono delle soluzioni *spurie* divergenti che, nel caso gravitazionale, non è chiaro come separare dalle soluzioni fisicamente rappresentative.

In ogni modo, come ragiona [Wald 1994], su basi fisiche è logico aspettarsi che, per buchi neri di massa molto maggiore della massa di Planck gli effetti di *back-reaction* siano localmente piccoli e provochino una lenta e progressiva diminuzione di M . In questo caso lo spazio-tempo dovrebbe essere descritto abbastanza bene da una geometria quasi-stazionaria, data localmente dalla metrica di Schwarzschild con M che decresce “adiabaticamente”.

Naturalmente, alla diminuzione di M si accompagna un restringimento dell'area A dell'orizzonte degli eventi, dovuto al flusso di energia negativa del campo quantistico attraverso l'orizzonte (anche se $dA < 0$, il teorema dell'area di sez. 4.2.4 non viene violato proprio perché cade la *null energy condition*). Questa ipotesi risolve anche l'apparente paradosso per cui la radiazione che arriva all'infinito con potenza costante dovrebbe provenire *interamente* dalla regione di spazio-tempo vicina all'evento di formazione dell'orizzonte h^+ (il motivo è che lì si intersecano tutte le superfici di Cauchy a t costante). La radiazione di Hawking, invece, è *emessa durante tutta la fase stazionaria del buco nero dalla regione appena fuori dallo “shrinking event horizon”*.

Dato che la potenza di emissione è proporzionale a M^{-2} , il processo diventa sempre più rapido mentre M diminuisce. Estrapolando l'approssimazione quasi-stazionaria fino alle sue ultime conseguenze, si trova che un buco nero di massa

M dovrebbe evaporare completamente entro un tempo

$$\tau = \frac{c^2}{3} \left(M \frac{dE}{dt} \right)^{-1} = 1.61 \cdot 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{ y.} \quad (4.95)$$

Tuttavia, la debolezza intrinseca dell'emissione è tale che soltanto i buchi neri di massa più piccola (secondo [Page 1976a], dell'ordine³² di $5 \cdot 10^{14} \text{ g} \cong 2.5 \cdot 10^{-19} M_\odot$) hanno la possibilità di evaporare completamente entro il tempo stimato per la vita dell'universo (dell'ordine di 10^{10} y).

4.3.6 Altre particelle, altri buchi neri

Citando il risultato di [Page 1976a] sulla luminosità del buco incipiente di Schwarzschild, abbiamo implicitamente affermato che l'effetto Hawking è estendibile a tutte le particelle *mass-less* conosciute. In effetti, tutti i risultati ottenuti con il campo “giocattolo” di Beatrice sono validi anche per i campi *liberi* “fisici”³³, con poche modifiche:

1. per i fermioni, si sostituisce il fattore $(e^{2\pi\sigma/\kappa} - 1)^{-1}$ che compare in eq. (4.82) con la statistica di Fermi-Dirac $(e^{2\pi\sigma/\kappa} + 1)^{-1}$ [Hawking 1975, Unruh 1976];
2. per le particelle massive, bisogna tenere conto che non è più possibile assegnare i dati iniziali sulle superfici nulle \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- (tutte le particelle dotate di masse “hanno origine” in i^- e terminano in i^+); in questo caso σ deve inoltre comprendere la massa a riposo μ della particella, con il risultato che l'emissione è molto debole se $T_H < \mu$ [Hawking 1975, Hartle e Hawking 1976, Dimock 1985].

L'effetto Hawking si può inoltre estendere³⁴ a tutti i buchi neri incipienti la cui fase stazionaria è descritta da una soluzione della famiglia di Kerr-Newman. Il numero di particelle di carica e osservate in un modo di energia σ e momento angolare orbitale m nella direzione di rotazione del buco nero diventa allora

$$\frac{|B|^2}{e^{2\pi\kappa^{-1}(\sigma - m\Omega - e\Phi)} \mp 1}, \quad (4.96)$$

dove Ω e Φ sono la velocità angolare e il potenziale elettrostatico dell'orizzonte degli eventi. I nuovi termini indicano che le particelle sono emesse di preferenza con un momento angolare equiverso a J : ne segue che il processo di evaporazione *rallenta progressivamente* la rotazione dei buchi neri. Lo stesso vale per l'emissione di particelle cariche, che tenderà a *scaricarli*. Per $m\Omega + e\Phi > \sigma$ (e per i soli bosoni) il denominatore di eq. (4.96) diventa negativo; in questa

³²Per ottenere questa stima è necessario correggere la valutazione per l'emissione di particelle massive.

³³Naturalmente, nessun campo *libero* è *fisico*! Intendiamo piuttosto campi caratterizzati dalla massa e dallo spin (nonché, se è presente, la *gauge-invariance* dei campi del modello standard).

³⁴[Hawking 1975, Hartle e Hawking 1976].

condizione, però, anche $|B|^2$ diventa negativo: questo comportamento viene attribuito al fenomeno della *superradianza*.

Consideriamo, come in [Hawking 1975], la prima legge della termodinamica dei buchi neri per il processo in cui un pacchetto d'onde di un campo classico bosonico con energia σ , carica e e momento angolare m viene fatto incidere su un buco nero di Kerr-Newman:

$$dM = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ; \quad (4.97)$$

dato che dM è proporzionale a σ , e dJ e dQ (con la stessa costante di proporzionalità) a m ed e , si ottiene

$$dM(1 - m\sigma^{-1}\Omega - e\sigma^{-1}\Phi) = \frac{\kappa}{8\pi} dA. \quad (4.98)$$

Se $\sigma < m\Omega + e\Phi$, il teorema dell'area³⁵ richiede che dM sia negativo: *il buco nero cede energia al pacchetto d'onda, che viene diffuso con la stessa frequenza ma con un'ampiezza accresciuta*. Ne segue che il coefficiente classico di *trasmissione* verso il buco nero dei modi *in-going superradianti* (e dunque anche il coefficiente di trasmissione B nel senso inverso) deve necessariamente essere negativo per la conservazione della probabilità.

Quantisticamente, la superradianza assomiglia a un processo di *emissione stimolata*³⁶ a cui ci aspettiamo si accompagni una corrispondente emissione *spontanea*. Effettivamente, si trova che i buchi neri *stazionari* rotanti e/o carichi emettono costantemente nei modi superradianti (*effetto Starobinski-Unruh*³⁷). Sebbene l'eq. (4.96) predica correttamente l'emissione superradiante, tuttavia, questa costituisce un processo logicamente indipendente dall'effetto Hawking, in quanto non dipende dal collasso gravitazionale, e permane anche per $M \rightarrow \infty$, $T_H \rightarrow 0$.

4.3.7 Un Topo nello spazio

Beatrice: c'è un'altra cosa che non mi convince. Abbiamo derivato l'effetto Hawking con il metodo dei coefficienti di Bogoliubov; ma nel cap. 1 abbiamo imparato a non fidarci di questo tipo di considerazioni, legate al concetto *matematico* di “particella”! Mi piacerebbe proprio poter lanciare uno dei miei Topi nello spazio vicino a un buco nero, e vedere cosa misura! (fig. 4.8).

Axel: hai ragione, negli ultimi capitoli si è parlato di “particelle” un po' troppo liberamente! Ma dimmi un po', quale traiettoria programmeresti nel tuo Topo?

³⁵Per un campo bosonico, il pacchetto d'onda rispetta la condizione di energia necessaria per dimostrare la seconda legge. Questo non è vero per i campi fermionici.

³⁶Questo può darci un'idea del motivo per cui l'emissione superradiante non si estende ai fermioni, la cui emissione stimolata è proibita dal principio di esclusione

³⁷[Unruh 1974]: la derivazione precede la scoperta della radiazione di Hawking, e l'ha senza dubbio ispirata in parte.

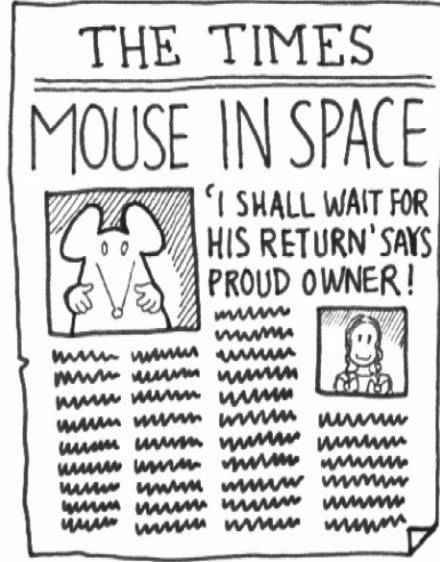


Figura 4.8: “Mi piacerebbe proprio poter lanciare uno dei miei Topi nello spazio vicino a un buco nero, e vedere cosa misura!”

Beatrice: dunque...penso che potrei fidarmi³⁸ solo di un Topo inerziale, che non dovrebbe essere disturbato dall'effetto Unruh! D'altronde, soltanto una traiettoria stazionaria potrebbe garantirmi delle probabilità di transizione indipendenti dal tempo!

Axel: un Topo inerziale e stazionario, allora!

Quando si enuncia l'effetto Hawking affermando che lo stato di vuoto *in* del campo è una matrice di densità termica nella regione stazionaria dello spazio-tempo di buco nero, si sottintendono, come abbiamo visto, tre condizioni:

1. $|0_{in}\rangle$ è una matrice di densità termica rispetto ai soli modi *out-going*, che appaiono provenire dall'orizzonte degli eventi;
2. il risultato diventa esatto soltanto nel limite di osservatori sufficientemente tardi³⁹ (“prima” vige un regime transitorio in cui la radiazione dipende dai dettagli del collasso gravitazionale) ...
3. ...e sufficientemente lontani dall'orizzonte degli eventi ($r \gg M$) perché il *tunnelling* dei modi attraverso la barriera di potenziale sia completo;
4. infine, il fattore di Boltzmann che compare nell'espressione della matrice di densità termica contiene l'energia misurata *rispetto al tempo di Schwarzschild* t .

³⁸Vedi cap. 1.

³⁹Il buco nero raggiunge il regime di corpo nero perfetto molto rapidamente, tipicamente per tempi all'infinito $\gg 10^{-5} M/M_{\odot}$ s dopo la formazione dell'orizzonte degli eventi [Wald 1976].

Dovrebbe essere chiaro, a questo punto, che la radiazione è implicitamente definita rispetto alla classe degli osservatori che si muovono *all'infinito, per tempi tardi*, lungo le orbite del campo di Killing $(\partial_t)^a$. Chiaramente, queste *world-lines non sono* geodetiche dello spazio-tempo di Minkowski, e non soddisfano il primo “desiderio” di Beatrice. Prendiamo comunque un Topo che segue la traiettoria

$$\begin{cases} t = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2} \tau, \\ r = r_0, \\ \theta = \theta_0, \\ \phi = \phi_0; \end{cases} \quad (4.99)$$

possiamo calcolare la probabilità di eccitazione del Topo con la seconda delle eq. (1.8), utilizzando l'eq. (4.87) per lo stato del campo⁴⁰ e decomponendo l'operatore di campo $\phi(x)$ sui modi $\chi_{l,m,\sigma}$. Per semplicità, tratteremo le soluzioni $\chi_{l,m,\sigma}$ come una base numerabile e indicheremo con α l'insieme degli indici l, m, σ ; allora,

$$\begin{aligned} R_+ &= \sum_{|\Xi\rangle} \left| \int d\tau e^{iE\tau} \langle \Xi | \phi(x(\tau)) | \Psi \rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{|\Xi\rangle} \left| \sqrt{1 - 2M/r_0} \int dt e^{iEt} \sqrt{1 - 2M/r_0} \langle \Xi | \cdot \left\{ \sum_{\alpha} \underline{\chi}_{\alpha} \underline{c}_{\alpha} + \underline{\chi}_{\alpha}^* \underline{c}_{\alpha}^{\dagger} \right\} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \oplus_{\alpha'} e^{-\pi n \sigma' / \kappa} |n_{\alpha'}\rangle |n_{\alpha'}^{\text{II}}\rangle \right\} \right|^2; \end{aligned} \quad (4.100)$$

utilizzando la forma asintotica di $\underline{\chi}_{\alpha}$,

$$\underline{\chi}_{\alpha} = \frac{\underline{B}_{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma r_0}} Y_{l,m}(\theta, \phi) e^{i\sigma r_0^*} e^{-i\sigma t}, \quad (4.101)$$

possiamo integrare su τ fissando il valore di $\sigma = E\sqrt{1 - 2M/r_0}$ e selezionando gli operatori di distruzione \underline{c}_{α} :

$$\begin{aligned} R_+ &= \sum_{|\Xi\rangle} \left| \sum_{l,m} \frac{\underline{B}_{\alpha} Y_{l,m}(\theta, \phi) e^{i\sigma r_0^*}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2E}r_0} \langle \Xi | \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ Z^{-1/2} \otimes_{n=0}^{\infty} \oplus_{\alpha'} e^{-\pi n \sigma' / \kappa} \delta_{\alpha\alpha'} \sqrt{n} |(n-1)_{\alpha'}\rangle |n_{\alpha'}^{\text{II}}\rangle \right\} \right|^2 = \\ &= \sum_{l,m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\underline{B}_{\alpha}|^2 |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2}{4\pi r_0^2 E} Z^{-1} n e^{-2\pi n \sigma / \kappa} = \\ &= \sum_{l,m} \frac{|\underline{B}_{\alpha}|^2 |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2}{4\pi r_0^2 E} Z^{-1} \left(1 - e^{-2\pi \sigma / \kappa}\right)^{-1} \left(e^{2\pi \sigma / \kappa} - 1\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

⁴⁰Visto che l'operatore di campo nella regione esterna lascia inalterati i vettori $|n^{\text{II}}\rangle$, il risultato del calcolo sarà lo stesso che se avessimo utilizzato la matrice di densità ρ .

Come si può vedere, R_+ contiene il fattore di Bose-Einstein e dipende dai due angoli θ e ϕ del *detector* in funzione della decomposizione in armoniche sferiche delle onde *out-going*; infine, si indebolisce come $1/4\pi r_0^2$ mentre i *detectors* si allontanano, come è logico aspettarsi visto che la radiazione deve “spargersi” su una superficie sferica di raggio r_0 . Il preciso significato statistico di R_+ , tuttavia, non è chiaro prima di averla confrontata con la probabilità di *diseccitazione*. Per ottenere R_- è sufficiente sostituire l'azione di $\underline{c}_\alpha^\dagger$ a quella di \underline{c}_α in eq. (4.102):

$$\begin{aligned} R_- &= \sum_{l,m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_\alpha|^2 |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2}{4\pi r_0^2 E} Z^{-1} (n+1) e^{-2\pi n \sigma / \kappa} = \\ &= \sum_{l,m} \frac{|B_\alpha|^2 |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2}{4\pi r_0^2 E} Z^{-1} \left(1 - e^{-2\pi \sigma / \kappa}\right)^{-1} \left[\left(e^{2\pi \sigma / \kappa} - 1\right)^{-1} + 1 \right]; \end{aligned} \quad (4.103)$$

per il rapporto R_+/R_- , che attraverso l'eq. (1.35) determina la distribuzione di un *ensemble* di Topi in equilibrio con il campo, si trova finalmente

$$\frac{R_+}{R_-} = e^{-2\pi \sigma / \kappa} = e^{-E \sqrt{1-2M/r_0}/T_H}, \quad (4.104)$$

come è appropriato per una distribuzione esattamente termica. Sorprendentemente, R_+/R_- è indipendente dai coefficienti di trasmissione B . Il motivo fisico è che, sebbene una parte della radiazione di Hawking venga riflessa verso l'interno del buco nero, è altrettanto vero che una parte della radiazione emessa dal *detector* viene riflessa dalla barriera di potenziale verso l'esterno. Al depauperamento della probabilità di eccitazione (evidente nel fattore proporzionale a $|B|$ dell'ultima delle (4.102)) si accompagna una corrispondente riduzione della probabilità di diseccitazione.

È poi importante notare il *blue-shift* della temperatura osservata dai *detectors*: per traiettorie a raggio costante r_0 ,

$$T_{\text{loc}} = \frac{T_H}{\sqrt{1-2M/r_0}}. \quad (4.105)$$

Ovviamente questo risultato non può essere estrapolato a raggi arbitrariamente piccoli, sia perché avvicinandosi alla barriera di potenziale non è più valida la forma asintotica di χ che abbiamo utilizzato, sia perché avvicinandosi all'orizzonte degli eventi le orbite stazionarie tangenti a $(\partial_t)^a$ implicano accelerazioni (rispetto alle geodetiche) insostenibili: l'eventuale temperatura infinita osservata nei pressi dell'orizzonte sarebbe pertanto da attribuire a una sorta di effetto Unruh. In [Hawking 1975] si dimostra invece che un osservatore in caduta libera attraverso l'orizzonte degli eventi *non* percepirebbe alcuna densità infinita di energia.

In questa derivazione abbiamo tuttavia trascurato un punto molto importante (in effetti, la prima condizione enunciata a inizio sezione): la decomposizione dell'operatore di campo avrebbe dovuto contenere anche i modi *in-going*

$\chi_{l,m,\sigma}$! Aggiungendo questi ultimi in (4.102) la probabilità di eccitazione R_+ rimane inalterata (perché $|\Psi\rangle$ è uno stato di vuoto rispetto alle soluzioni $\chi_{l,m,\sigma}$ e viene annullato dagli operatori $\underline{c}_{l,m,\sigma}$); R_- , tuttavia, ottiene un ulteriore contributo dall'emissione spontanea del *detector* nei modi *in-going*. L'eq. (4.104) è pertanto corretta soltanto per un *detector* che abbia una sensibilità *direzionale* limitata ai soli modi *out-going*. Se questo non è disponibile, nessun *ensemble* termico di Topi potrà trovarsi in equilibrio con il campo, “metà” del quale si trova alla temperatura di Hawking, “metà” invece allo zero assoluto. La presenza dei Topi accoppia i gradi di libertà *out-going* del campo con quelli *in-going*: si creerà pertanto un flusso di energia dai modi “caldi” a quelli “freddi”, mentre i Topi manterranno una “posizione”⁴¹ intermedia.

Vogliamo ora esaudire il desiderio di Beatrice, studiando il comportamento di un *detector* in moto su una traiettoria *sia stazionaria che inerziale*. Le *world-lines* che fanno al caso nostro sono le orbite circolari stabili introdotte in fig. 4.1, che possono essere costruite combinando i campi di Killing $(\partial_t)^a$ e $(\partial_\phi)^a$ dello spazio-tempo di Schwarzschild. Scrivendo la 4-velocità del *detector* come

$$u^a = N((\partial_t)^a + \omega(\partial_\phi)^a) \quad (4.106)$$

(dove $\omega = d\phi/dt$ è la *velocità angolare all'infinito* e N è il coefficiente di normalizzazione necessario per avere $u^a u_a = -1$), e utilizzando la condizione $\omega^2 r_0^3 = M$ valida per queste orbite, si trova la traiettoria

$$\begin{cases} t = N\tau, \\ r = r_0, \\ \theta = \theta_0, \\ \phi = N\omega\tau, \end{cases} \quad (4.107)$$

dove $N = (1 - M/r_0)^{-1/2}$. La derivazione di R_+ ed R_- procede in modo molto simile a quanto abbiamo appena visto. La parte di χ_α dipendente da τ non è più solo $e^{-i\sigma t}$ ma, attraverso $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, è data da

$$e^{im\phi(\tau)} e^{-i\sigma t(\tau)} = e^{imN\omega\tau} e^{-i\sigma N\tau}. \quad (4.108)$$

Ne segue che la δ di Dirac che si ottiene con l'integrazione su τ fissa $\sigma = E/N - m\omega$. La radiazione misurata dal *detector* subirà pertanto una sorta di *blue-shift generalizzato* dipendente, oltre che dal raggio dell'orbita, dalla sua velocità angolare e dal valore di m del modo che si considera. Visto però che la radiazione è limitata prevalentemente a valori di σ dell'ordine di M^{-1} e a numeri quantici l e m piccoli, e che per traiettorie sufficientemente lontane dal buco nero $\omega = \sqrt{M/r_0^3} \ll M^{-1}$, scopriamo che il nuovo Topo *stazionario e inerziale* è approssimato molto bene dal *detector* stazionario che abbiamo studiato esaurientemente.

Terminiamo le nostre considerazioni sui Topi riportando una recente derivazione dell'effetto Hawking, dovuta a [Fredenhagen e Haag 1990], in cui la

⁴¹Non si può dire “temperatura”, il che richiederebbe una distribuzione termica.

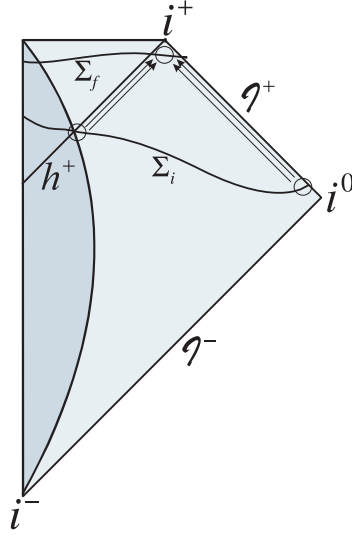


Figura 4.9: Propagazione delle soluzioni classiche per l'equazione d'onda del campo di Klein-Gordon *mass-less*

La propagazione del campo classico *mass-less* avviene lungo le geodetiche nulle (nel diagramma di Penrose, linee a 45°); è evidente (sebbene non facile da dimostrare analiticamente) come il valore di una soluzione vicino a i^+ dipenda soltanto dai suoi valori vicino all'orizzonte degli eventi e al *boundary* causale nullo.

probabilità di eccitazione R_+ di un *detector* che soddisfa alle condizioni riportate all'inizio della sezione viene calcolata utilizzando la *funzione di Wightman* del campo, alla base delle nostre analisi nel cap. 1. Il rivelatore utilizzato non è, a dire il vero, un *detector* di DeWitt (vedi sez. 1.3.2), perché l'accoppiamento con l'operatore di campo è *smeared* nello spazio-tempo con una funzione liscia $h(x)$. Non vediamo tuttavia nessun ostacolo, in linea di principio, a prendere il limite $h(x) \rightarrow \int d\tau \delta(x(\tau))$ ottenendo così uno dei nostri Topi.

Come è possibile, tuttavia, conoscere la forma di $W(x_1, x_2)$ in uno spazio-tempo complesso (e soprattutto *sottodeterminato*, se non si assegna la metrica interiore della materia) come quello che ci troviamo a trattare? L'ingegnosa risposta sta in una serie di considerazioni intorno al fatto che l'operatore di campo soddisfa l'equazione d'onda *classica* del campo. Consideriamo una foliazione dello spazio-tempo in superfici di Cauchy, e, per semplicità, supponiamo che lo *smearing* di $\phi(x)$ sia limitato a una sola superficie Σ_f (potremo sempre integrare su superfici successive per ottenere uno *smearing* spazio-temporale). Possiamo scrivere l'hamiltoniana di interazione $\int h(x)\phi(x) d^4x$ come il “prodotto scalare simplettico” (sez. 3.1.2) di $\phi(x)$ per una appropriata funzione $f(x)$ che sia soluzione dell'equazione d'onda con sorgente $h(x)$ in Σ_f :

$$H_I = \int_{\Sigma_f} \hat{\phi}(x) (i \overleftrightarrow{\partial}_{x^\mu}) f(x) d^3x^\mu; \quad (4.109)$$

dato però che il prodotto simplettico tra soluzioni è conservato nell'evoluzione dinamica del sistema, potremmo ottenere H_I anche da un integrale su una superficie di Cauchy “precedente”: diciamo la superficie Σ_i di fig. 4.9 che interseca l'orizzonte degli eventi nel momento in cui questo viene attraversato dalla distribuzione di materia. Ci servono allora due ingredienti: l'espressione di $\phi(x)$ e quella di $f(x)$ su Σ_i . Analizzando il problema della propagazione all'indietro di $f(x)$ da Σ_f in Σ_i (che è affrontabile con metodi analitici visto che conosciamo la forma esatta della metrica nella regione esterna stazionaria), ci si accorge subito che il valore di $f(x)$ in una regione vicina a i^+ è determinato *solamente* dal suo valore nei pressi delle intersezioni di Σ_i con h^+ e con \mathcal{I}^+ (fig. 4.9).

Ciò vuol dire che *nel limite di tempi tardi*, è possibile trovare il valore di H_I su $|0_{\text{in}}\rangle$ semplicemente conoscendo il comportamento di $\phi(x)$ nel limite di x tendente a $\Sigma_i \cap h^+$ e $\Sigma_i \cap \mathcal{I}^+$. In realtà, le probabilità di transizione contengono *due* operatori H_I affiancati, cosicché l'operatore di cui ci interessa conoscere il valore è proprio la funzione di Wightman W . Assumendo soltanto che nei due limiti questa *soddisfi alla condizione di Hadamard* (cioè che $\langle T_{ab} \rangle$ sia regolare: vedi sez. 3.3.8) e *che nel limite su \mathcal{I}^+ W descriva uno stato di vuoto*, è possibile dimostrare che *la probabilità di eccitazione dei detectors vicini a i^+ è proprio quella che abbiamo già calcolato in questa sezione*.

Questa derivazione è particolarmente interessante perché, oltre a ribadire che i particolari del processo di collasso gravitazionale sono irrilevanti ai fini della emissione termica “tarda” del buco nero, completa la dimostrazione “di matrice S ” evidenziandone i dati fisici fondamentali: l'assenza di radiazione *in-going* dall'infinito e la regolarità del tensore di energia-impulso nei pressi dell'orizzonte.

4.3.8 Il problema dell'*information loss*

Nel corso del nostro lavoro, abbiamo ripetutamente incontrato situazioni in cui agli osservatori in una regione dello spazio-tempo è preclusa qualsiasi misurazione sullo stato fisico di un'altra regione. Naturalmente questo è il caso degli osservatori *esterni* all'orizzonte degli eventi per gli spazio-tempo di buco nero, ma lo stesso accade agli osservatori uniformemente accelerati nello spazio-tempo di Minkowski (ampiamente discussi nel cap. 1).

In queste circostanze abbiamo sempre affermato che lo stato quantistico del campo è descritto per questi osservatori da una *matrice di densità* ottenuta facendo la traccia sui gradi di libertà non osservabili. L'ipotesi sottostante è che, in assenza di qualsiasi informazione su di essi, ogni loro configurazione sia ugualmente probabile (*principio di ignoranza*). Allora al carattere *intrinsecamente probabilistico* della meccanica quantistica si aggiunge un'ulteriore incertezza di carattere, questa volta, essenzialmente *statistico*.

In effetti, è possibile dare varie interpretazione al ruolo dell'*operatore densità* in meccanica quantistica. In questo lavoro aderiamo al punto di vista secondo il quale le probabilità di transizione ottenute lavorando su *stati puri* rappresentano la distribuzione degli esiti prevista per una serie di esperimenti in cui lo stato iniziale del sistema viene preparato sempre esattamente nello stesso modo; mentre le probabilità ottenute utilizzando il formalismo delle *matrici di densità*

descrivono la distribuzione degli esiti per serie di esperimenti le cui condizioni iniziali sono distribuite *statisticamente* (perché così si vuole fare o perché non è possibile determinarle con precisione assoluta).

La nostra procedura di traccia sembra fisicamente ragionevole, perché si può sempre pensare, prendendo come esempio lo spazio-tempo di un buco nero incipiente, che allo stato puro iniziale del campo su \mathcal{I}^- corrisponde uno stato puro nelle regioni I e III contemporaneamente, e che l'uso di una matrice di densità nella regione I riflette soltanto la nostra ignoranza sullo stato del campo in III. Cosa succede, però, se il processo di evaporazione di un buco nero prosegue sino a quando questo *scompare del tutto, insieme alla singolarità in $r = 0$, a tutta la regione III e a tutti i gradi di libertà che vi trovano supporto?* Sembra proprio che alla descrizione del campo quantistico come stato puro debba sostituirsi una matrice di densità! Non sarà più possibile, allora, stabilire una matrice S che leghi gli stati *in* e *out*, ma sarà necessario introdurre un più generale *operatore di superscattering* [Hawking 1976b].

Nell'articolo appena citato, S. Hawking giunge alla radicale conclusione che per dare coerenza in questa situazione alla meccanica quantistica è necessario abbandonare il “sacro” principio dell'evoluzione unitaria del vettore di stato. Tuttavia, non è affatto chiaro se è davvero possibile estrapolare il processo di evaporazione (fisicamente ragionevole finché la massa del buco nero diminuisce in modo “adiabatico”) fino alle sue ultime conseguenze. In effetti, ci sono almeno due proposte riguardo allo stato finale del buco nero che possono scongiurare l'“eresia” dell'evoluzione di uno stato puro in uno stato misto:

1. l'evaporazione cessa alla scala della lunghezza di Planck, lasciando un *black hole remnant* caratterizzato da un grandissimo numero di gradi di libertà interni: sembra però arduo pensare di poter comprimere un tale contenuto di informazioni in una regione di spazio così ristretta;
2. l'informazione riesce a lasciare la regione di buco nero attraverso sottili correlazioni nella radiazione (*pseudo-termica*, dobbiamo concludere) emessa durante tutta la fase di evaporazione. Questa soluzione sembra tuttavia implicare una violazione del principio di causalità: l'orizzonte degli eventi dovrebbe impedire *per definizione* questo tipo di comunicazione verso l'esterno del buco nero (si noti comunque che non è chiaro cosa accada alla geometria di h^+ durante il processo di evaporazione: si potrebbe immaginare che le fluttuazioni quantistiche della metrica permettano un certo *tunnelling* di informazioni).

Ci accontentiamo di questo breve accenno allo spinoso problema noto come *information loss paradox*, perché questo costituisce un argomento altrettanto vasto che la questione dell'interpretazione statistica dell'entropia (che esamineremo nel prossimo capitolo), nonché per l'intrinseca debolezza concettuale di tutta l'argomentazione. Si rimanda perciò il lettore all'ampia letteratura esistente (si vedano ad es. [Wald 1981, Wald 1984b, Bekenstein 1993]).

Capitolo 5

Sull'interpretazione statistica dell'entropia dei buchi neri

Dopo aver affrontato il problema della temperatura dei buchi neri con l'aiuto della meccanica quantistica, il tassello mancante nel mosaico della termodinamica dei buchi neri è costituito dalla loro entropia. Se infatti la termodinamica “fenomenologica” può accontentarsi di definire $dS_{\text{bh}} = dM/T_{\text{H}}$, sulla scorta della validità della seconda legge generalizzata, è naturale domandarsi se, come per l'entropia “comune”, all'entropia dei buchi neri si possa dare un'interpretazione *statistica*. Abbiamo già illustrato una proposta in questo senso, quella di [Bekenstein 1973] (vedi sez. 4.3.1): le limitazioni di questa impostazione, inizialmente adottata anche da Hawking [Hawking 1976a], sono però diventate ben presto chiare, e sono discusse in sez. 5.1.

Gli sforzi successivi sono accomunati dalla convinzione che l'entropia S_{bh} abbia un'origine *quantistica*. L'impostazione dell'*entanglement entropy*, rivista in sez. 5.2, deriva S_{bh} a partire dall'entropia informazionale dei campi quantistici *di materia* in presenza di un orizzonte degli eventi che limita le misurazioni possibili. Altri autori, invece, individuano l'origine di S_{bh} nella teoria quantistica *della gravitazione*, dove un grande numero di microstati distinti può dare luogo alla stessa configurazione classica del campo gravitazionale. Il calcolo a *path-integrals* di Hawking e Gibbons (sez. 5.3) fornisce in questo senso un risultato interessante, sebbene “misterioso” da molti punti di vista.

Gibbons e Hawking, infatti, ottengono S_{bh} direttamente dall'espressione come integrale funzionale della funzione di partizione del campo gravitazionale, con condizioni al contorno adatte per un buco nero. Sarebbe fisicamente più significativo, invece, *contare esplicitamente* gli stati dello spazio di Hilbert che corrispondono classicamente al buco nero. Il problema è, ovviamente, che al momento non c'è accordo generale su una particolare teoria della *quantum gravity*, e che lo status teorico delle singole teorie candidate è ancora, per così dire, preliminare. Poiché però lo sviluppo della *quantum gravity* è strutturalmente condizionato dall'assenza di effetti osservabili che possano fornire conferme (o smentite) sperimentali, la termodinamica dei buchi neri, per la bellezza e la compattezza dei suoi risultati, è diventata una sorta di banco di prova per ogni teoria candidata. Questa circostanza ha conferito un grande impulso ai tenta-

tivi di ottenere S_{bh} da un “conteggio degli stati”; la derivazione della formula di Bekenstein-Hawking,

$$S_{\text{bh}} = \frac{A}{4}, \quad (5.1)$$

è percepita come un sigillo irrinunciabile sulla consacrazione di una teoria significativa della *quantum gravity*. È inutile dire che quasi tutti i lavori pubblicati sull'argomento proclamano di avere raggiunto l'obiettivo. Tuttavia, a tutt'oggi non è stato presentato un procedimento completamente convincente. Alcune delle proposte più promettenti vengono dalle teorie di stringa, con idee che però non siamo in grado di valutare e che sono state perciò escluse dal presente lavoro, e dalle impostazioni che identificano gli stati *dell'orizzonte* come quelli significativi ai fini dell'entropia: in sez. 5.4 vedremo un interessante tentativo in questo senso. Come gran finale, presentiamo in sez. 5.5 alcuni recenti lavori nell'ambito della *loop quantum gravity* di Ashtekar, Smolin e Rovelli.

5.1 Ancora sull'entropia informazionale

In [Bekenstein 1973] si propone che, per un buco nero caratterizzato nella fase finale stazionaria da un certo insieme di parametri macroscopici, l'entropia sia data dalla formula di Planck

$$S_{\text{bh}} = \log N, \quad (5.2)$$

dove N è il numero di diversi processi di collasso gravitazionale con i quali potrebbe essersi formato quello stesso buco nero; o, equivalentemente, del numero di possibili configurazioni (per la metrica e per la materia) della sua regione interna. L'ipotesi implicita è che l'evoluzione congiunta del campo gravitazionale e dei campi di materia conservi su superfici di Cauchy successive lo stesso contenuto di informazione; nella fase finale, la regione esterna è caratterizzata da pochissimi parametri, e dunque l'intersezione di una superficie di Cauchy con la regione interna deve essere caratterizzata dallo stesso numero di gradi di libertà delle *intere* superfici di Cauchy per tempi “primitivi”. Poiché la regione interna è inaccessibile all'osservazione, questa molteplicità di stati *possibili* si configura come entropia informazionale.

Innanzitutto, non è per nulla chiaro che N debba essere finito. Si pensi ad esempio che la metrica di Schwarzschild può essere “incollata” con continuità, all'interno dell'orizzonte degli eventi, con la metrica che descrive un *universo di Friedmann*¹ di diametro arbitrariamente grande (sono le cosiddette *metriche di Oppenheimer-Snyder*, che costituiscono i modelli più semplici utilizzati per discutere i processi di collasso stellare: vedi [Misner et al. 1973]). [Zurek e Thorne 1985], comunque, danno una stima del numero di modi in cui un buco nero di Schwarzschild può essere “assemblato” accumulando particelle provenienti dall'infinito, e riescono a dare un valore finito a N supponendo che:

¹Definito come *isotropo, omogeneo e chiuso con la topologia di $\mathbb{R} \times S^3$* ; la metrica si può scrivere

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.3)$$

dove χ, θ, ϕ sono “angoli 4-dimensionali” e $a(t)$ è il raggio dell'universo (dipendente dal tempo *cosmico*!).

1. il buco nero sia costruito in un tempo inferiore al suo tempo di evaporazione di Hawking;
2. per le particelle sia richiesta un'energia minima, corrispondente a una lunghezza d'onda pari al diametro $2M$ del buco nero finale (particelle di lunghezza d'onda inferiori non potrebbero essere efficacemente localizzate all'interno dell'orizzonte degli eventi);
3. la vasta maggioranza dei processi di costruzione implichi aggiungere, una ad una, particelle di questa energia minima (in questo modo è massimizzato il numero di particelle utilizzate e così anche il numero delle loro possibili configurazioni iniziali).

Queste condizioni sono sufficienti a ottenere il corretto ordine di grandezza per S_{bh} attraverso l'eq. (5.2). Questa stima è poi raffinata nel seguito dell'articolo per tenere conto dell'“atmosfera” termica (di Hawking) del buco nero, e generalizzata a buchi neri rotanti e carichi. Tuttavia quanto abbiamo riportato rende bene l'idea della difficoltà e vaghezza nella definizione di questi calcoli: come in altri lavori e con altri approcci, l'introduzione di alcune ipotesi *ad hoc* è sufficiente a riprodurre l'entropia di Bekenstein-Hawking. Dopotutto, gli spazio-tempo dei buchi neri stazionari sono caratterizzati da così pochi parametri che la formula $S_{\text{bh}} = A/4l_{\text{P}}^2$, comunque si calcoli S_{bh} , è valida (a meno di un fattore di proporzionalità) essenzialmente per motivi dimensionali. Conoscendo in anticipo il risultato che si vuole ottenere, è difficile giudicare se un'ipotesi introdotta *ad hoc* è fisicamente giustificata o ha soltanto il pregio di far tornare i calcoli.

Ma il problema maggiore di questa impostazione è un altro. Se l'attribuzione al buco nero di un'entropia *informativa* dovuta all'inaccessibilità della configurazione interna della metrica è senza dubbio sensata, appare difficile che in questo modo si possa ottenere una entropia *termodinamica*. Questa infatti deve essere un'indice non degli stati meramente *possibili* per il sistema, ma di quelli *effettivamente occupati* nel corso della sua evoluzione dinamica.

Per i sistemi termodinamici “ordinari”, si postula a questo scopo l'*ipotesi ergodica*: una delle sue conseguenze è che la traiettoria nello spazio delle fasi di un sistema *C isolato* giace su una ipersuperficie Σ a energia E costante e trascorre in ogni regione $\Gamma \subset \Sigma$ un tempo proporzionale alla superficie di Γ . In altre parole, in ogni istante c'è uguale probabilità di trovare il sistema in uno qualsiasi degli stati possibili. Se poi è possibile dividere il sistema in due parti C_1 e C_2 *debolmente interagenti*, tali cioè che il numero totale N di stati accessibili al sistema C sia dato dal prodotto $N_1 \cdot N_2$ del numero di stati accessibili ai due sottosistemi, la condizione di massima entropia implica che

$$0 = \frac{\ln N}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln N_1}{\partial E_1} - \frac{\partial \ln N_2}{\partial E_2} \quad (5.4)$$

(si ricordi che l'energia totale è fissata: $E_2 = E - E_1$); ovvero, le *temperature* dei due sistemi sono uguali:

$$\beta_1 = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2} = \beta_2. \quad (5.5)$$

In queste condizioni, la probabilità di trovare C_1 in uno stato con energia $E'_1 = E_1 + \Delta E_1$ è proporzionale a

$$e^{S_1(E'_1)} = e^{S_2(E_2 - \Delta E_1)} \cong e^{S_2(E_2) - (\partial S_2 / \partial E_2) \Delta E_1} \propto e^{-\beta \Delta E_1} \propto e^{-\beta E'_1}, \quad (5.6)$$

dove $e^{\beta E'_1}$ è il *peso di Boltzmann*. Formalmente, si può dimostrare che nell'ipotesi che le probabilità dei singoli stati seguano la distribuzione di Boltzmann $p_i = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$, dove $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ è la *funzione di partizione* di un *ensemble canonico*, *l'entropia di Shannon coincide con l'entropia termodinamica*:

$$\begin{aligned} S_{\text{Sh}} &= - \sum_i p_i \ln p_i = \\ &= - \sum_i \left(Z^{-1} e^{-\beta E_i} \right) \ln \left(Z^{-1} e^{-\beta E_i} \right) = \\ &= \frac{\beta}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} + \frac{\ln Z}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} = \\ &= \beta \langle E \rangle + \ln Z. \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'interpretazione di [Bekenstein 1973] non realizza le condizioni più importanti che abbiamo posto: *soltanto uno* degli “stati” conteggiati in S_{bh} è effettivamente occupato dal buco nero, in quanto nel *coarse-graining* stiamo considerando *intermediate traiettorie* piuttosto che punti nello spazio delle fasi. Inoltre, il campo gravitazionale della regione interna del buco nero non è accoppiato in modo *debole e bidirezionale* con l'esterno, come sarebbe necessario per parlare di equilibrio termico, ma piuttosto, per la stessa natura dell'orizzonte degli eventi, in modo *forte e unidirezionale*.

Il lettore potrebbe osservare che stiamo sostanzialmente ripetendo l'argomento per il quale l'equilibrio termodinamico di un buco nero con l'esterno è impossibile, visto che la sua temperatura classica è 0. Non avevamo forse superato questo ostacolo con la scoperta della radiazione di Hawking? Il punto è che l'impostazione che abbiamo analizzato in questa sezione non spiega che legame c'è tra i gradi di libertà gravitazionali conteggiati nell'entropia e i gradi di libertà (dei campi di materia) effettivamente responsabili dell'emissione termica del buco nero. Le caratteristiche causali dell'orizzonte degli eventi, nonché il fatto che l'entropia di formula (5.2) ha un'origine prettamente classica e dunque “inconsapevole” della radiazione di Hawking, sembrano *escludere* una qualsiasi connessione.

5.2 Entanglement entropy

L'entropia “delle configurazioni gravitazionali interne” sembra pertanto incapace di spiegare il comportamento termodinamico dei buchi neri. La discussione dell'ultima sezione è però stata utile perché ci ha fornito alcune idee sul meccanismo che potrebbe generare S_{bh} :

1. è senza dubbio attraente attribuire un'entropia intrinseca alla struttura causale caratterizzata dalla presenza dell'orizzonte degli eventi, che genera

una limitazione dell'informazione massima che si può ottenere sullo spazio-tempo e sui campi di materia;

2. tuttavia non è chiaro come i gradi di libertà (gravitazionali o meno) interni al buco nero possano influenzare *causalmente*, e dunque anche *termodinamicamente*, la regione esterna;
3. inoltre, sembra necessario che i gradi di libertà responsabili dell'entropia siano gli stessi che danno origine alla radiazione di Hawking; dobbiamo pertanto concentrarci sui campi di materia.

L'impostazione dell'entropia di *entanglement* prende spunto da tutte queste osservazioni². Infatti, lo stato quantistico dei campi di materia su un *background* di buco nero è dato da una matrice di densità ρ ; tuttavia, i gradi di libertà *quantistici* localizzati nella regione di buco nero non sono accessibili alle misurazioni degli osservatori esterni. Dal punto di vista di questi ultimi, lo stato dei campi di materia può essere descritto da una matrice di densità *efficace* ρ_{eff} ottenuta da ρ facendo la traccia su tutti i gradi di libertà invisibili. S_{bh} sarà allora l'*entropia di von Neumann* di ρ_{eff} , ovvero

$$S_{\text{bh}} = -\text{tr } \rho_{\text{eff}} \ln \rho_{\text{eff}}, \quad (5.8)$$

(essenzialmente si tratta ancora dell'entropia di Shannon). Il problema dell'interazione causale (punto 2) è superato poiché, semplicemente, S_{bh} risiede nella regione *esterna* al buco nero.

Questa impostazione ha ricevuto un impulso iniziale da un articolo del 1986³, nel quale si prova che per un semplice modello di teoria di campo in \mathbb{R}^3 , l'introduzione artificiale di un *boundary* piano, con la conseguente *riduzione* della matrice di densità a una matrice di densità efficace per la regione esterna, genera un'entropia non nulla $-\text{tr } \rho_{\text{eff}} \ln \rho_{\text{eff}}$ per stati *puri* del campo per cui $-\text{tr } \rho \ln \rho = 0$. Inoltre, *questa entropia è proporzionale all'area della superficie di separazione*. In [Srednicki 1993] si dimostra che lo stesso risultato vale anche per un *boundary* sferico, sempre nello spazio piatto.

È facile vedere con un argomento euristico perché l'entropia di von Neumann debba essere proporzionale alla superficie di separazione: innanzitutto, vale il

Teorema (di simmetria): supponiamo di avere uno stato puro quantistico, descritto dalla matrice di densità $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, in uno spazio diviso in due regioni Γ_1 e Γ_2 ; allora *l'entropia di von Neumann è la stessa per la matrice di densità ridotta ρ_1 (ottenuta facendo la traccia sui gradi di libertà localizzati in Γ_1) e per ρ_2 (ottenuta facendo la traccia in Γ_2)*.

Dimostrazione: sia $|\Psi\rangle = \sum_{i,a} c_{ij} |i\rangle_1 |a\rangle_2$; allora $(\rho_1)_{ij} = (cc^\dagger)_{ij}$, $(\rho_2)_{ab} = (c^T c^*)_{ab}$, e per ogni intero positivo n , $\text{tr } \rho_1^n = \text{tr } \rho_2^n$; ne segue che $\text{tr } \rho_1 \ln \rho_1 = \text{tr } \rho_2 \ln \rho_2$.

²Uno dei principali proponenti dell'entropia di *entanglement* è J. Bekenstein, a dimostrazione del fatto che c'è effettivamente una contiguità ideale tra le due impostazioni; vedi [Bekenstein 1994].

³[Bombelli et al. 1986].

Se le due entropie devono essere uguali, allora non possono dipendere dal volume delle due regioni (come vale solitamente per le grandezze termodinamiche estensive), ma dovranno essere legate all'unica grandezza a loro comune: l'area della superficie di separazione. È chiaro come questi risultati siano rilevanti per i buchi neri, dove a impedire l'osservazione dei gradi di libertà quantistici interni non è un *boundary* imposto artificialmente, ma un *confine causale* (per cui l'evoluzione dinamica dei campi quantistici all'esterno del buco nero è effettivamente *indipendente* da ciò che accade all'interno, e a maggior ragione si presta a essere descritta da una matrice di densità ridotta). Una derivazione della formula di Bekenstein-Hawking basata su questo schema è data in [Frolov e Novikov 1993], dove la traccia della matrice di densità complessiva viene fatta sugli stati *esterni*, in modo che l'entropia risieda effettivamente nel buco nero (per il teorema di simmetria, comunque, il risultato finale per S_{bh} deve essere lo stesso).

Prima di entusiasinarsi per il successo di questa impostazione, però, è bene tenere presente vari problemi:

1. l'entropia di *entanglement* è formalmente infinita⁴, principalmente a causa delle correlazioni tra i modi ad alta frequenza che si affollano nei pressi della superficie di divisione, e va perciò *rinormalizzata o regolarizzata*. Con la prima procedura si cerca di eliminare la divergenza attraverso una rinormalizzazione di G e di altre costanti legate a termini di curvatura del secondo ordine; questi tentativi sono frustrati dalla mancanza di una teoria della *quantum gravity* (si vedano comunque [Susskind e Uglum 1994, Fursaev 1996]).

Con il secondo procedimento, invece, si impone al campo quantistico un *cut-off* ultravioletto dell'ordine dell'*energia di Planck*, giustificato dalla fluttuazione quantistica della superficie di separazione, per effetto della quale la correlazione⁵ del campo, tra un punto in una regione e uno nell'altra, è “sospesa” per distanze inferiori alla lunghezza di Planck.

Il valore esatto del *cut-off* è stimato in [Frolov e Novikov 1993] per lo spazio-tempo di Schwarzschild, considerando la precisione massima δM con cui è possibile misurare la massa M del buco nero (in presenza del processo di evaporazione di Hawking misurazioni ben definite dovranno svolgersi necessariamente in un tempo finito: la relazione di indeterminazione pone allora un limite alla loro precisione; si suppone poi che le fluttuazioni quantistiche della metrica siano causa di un'incertezza dello stesso ordine). Da δM si può stimare la fluttuazione quantistica della geo-

⁴D'altronde, come ragiona [Bekenstein 1994], l'entropia di *entanglement* non corrisponde direttamente a una prescrizione *operativa*: l'ignoranza sui campi di materia “al di là” del *boundary* non è mai totale, perché alcune informazioni vengono proprio dalla struttura del *boundary* e dello spazio-tempo circostante (ad esempio, se rimaniamo nel dominio della teoria dei campi su *background* curvo, è necessario che l'energia del campo non sia tale da avere effetti apprezzabili sulla curvatura dello spazio-tempo modificandone la struttura data *a priori*).

⁵Come abbiamo visto in 1.2.6, la funzione di correlazione a due punti di un campo quantistico non svanisce per punti separati da distanze *space-like*; anzi, *diverge* nel limite in cui i due punti si sovrappongono!

metria dell'orizzonte degli eventi. In questo modo si recupera la formula di Bekenstein-Hawking⁶;

2. *problema della molteplicità delle specie*: dato che ogni campo esistente in natura deve dare il suo contributo all'entropia di *entanglement*, l'entropia dei buchi neri dovrebbe essere proporzionale al numero ν delle "specie di campo" esistenti! Come è possibile che questo sia coerente con una formula di origine classica come $S_{\text{bh}} = A/4$? La soluzione più semplice è supporre che la fisica gravitazionale sia "intrinsecamente coerente" con il modello standard, cosicché le diverse specie presenti in natura danno ciascuna il proprio contributo e portano complessivamente proprio al risultato richiesto. C'è invece chi come [Jacobson 1994] ritiene che l'interazione gravitazionale sia essenzialmente dovuta ai termini "di Hilbert" compresi nelle azioni effettive di tutti i campi di materia (è la visione della *gravità effettiva* di Sakharov); in queste condizioni G^{-1} scala con ν correggendo la dipendenza dell'entropia di *entanglement*. Si veda [Bekenstein 1994] per una discussione e per alcuni riferimenti pertinenti;
3. *problema dell'information loss*: supponiamo che l'entropia dei buchi neri sia data davvero dalla sola *entanglement entropy*; allora per lo stato complessivamente puro dei campi quantistici in uno spazio-tempo di buco nero il teorema di simmetria implica che l'entropia S_{ext} della radiazione termica esterna di Hawking diminuisce insieme a $S_{\text{bh}} = A/4$ nel corso del processo di evaporazione del buco nero. Nel limite in cui il buco nero svanisce, S_{ext} si annulla; in altre parole, lo stato quantistico finale è puro! Questo "problema" è ovviamente visto come un *asset* da chi non accetta la tesi di Hawking sull'evoluzione non unitaria (sez. 4.3.8);
4. infine, ed è il problema di gran lunga più grave, se lo stesso *cut-off* è utilizzato per regolarizzare non solo l'entropia di *entanglement* ma anche l'energia *all'infinito* della radiazione di Hawking (come d'altronde è logico fare se le fluttuazioni quantistiche della geometria pongono effettivamente dei limiti alla struttura dei modi quantistici sul *background* di buco nero), si ottiene per questa⁷ un valore di $(3/8)M$: una frazione consistente, dunque, della massa del buco nero. Questo è un pessimo segnale per la stessa derivazione dell'effetto Hawking, nella quale si suppone che la *back-reaction* dei campi di materia sulla geometria si possa trascurare ai fini dello *scattering* dei modi classici!

⁶Vale anche qui, però, la critica che abbiamo rivolto, a pag. 151, alla derivazione di Zurek e Thorne.

⁷Se ne era già reso conto [t Hooft 1985] con il suo *brick-wall model*, essenzialmente un tentativo di dare una descrizione di un buco nero coerente con le proprietà della meccanica quantistica (prima fra tutte l'*unitarietà*). In questo modello le caratteristiche "termodinamiche" di un buco nero, visto come una sorta di "particella elementare", sono ascritte alla configurazione dei campi circostanti.

5.3 La formulazione a *path-integral* della termodinamica dei buchi neri

Vediamo ora una ambiziosa impostazione dovuta a S. W. Hawking e G. W. Gibbons, che parte dall'ipotesi che il sistema buco nero + campi di materia *sia effettivamente*, in senso statistico, un sistema termodinamico all'equilibrio: si postula cioè che i suoi microstati quantistici (del campo gravitazionale e insieme dei campi di materia) siano distribuiti secondo l'*ensemble* canonico. Un tale sistema si presta a essere trattato nel formalismo della quantizzazione a *path-integrals*.

Per quantizzare *funzionalmente* una teoria di campo, si postula che l'ampiezza di transizione per passare da una configurazione ϕ_1 del campo al tempo t_1 alla configurazione ϕ_2 al tempo t_2 sia data da

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] e^{iI[\phi]}, \quad (5.9)$$

dove $I[\phi]$ è l'*azione classica* della teoria e l'integrazione avviene su tutte le *storie* del campo che assumono i valori ϕ_1 e ϕ_2 ai tempi t_1 e t_2 . L'ampiezza di transizione si può però anche scrivere

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_2, t_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1, t_1 \rangle, \quad (5.10)$$

dove H è l'hamiltoniana della teoria. Se in quest'espressione si prende $t_2 - t_1 = -i\beta$ e $\phi_1 = \phi_2$, si ottiene [Feynman e Hibbs 1965]

$$\langle \phi_1, t_2 - i\beta | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_1, t_1 | e^{-\beta H} | \phi_1, t_1 \rangle, \quad (5.11)$$

ovvero il *peso di Boltzmann* per lo stato (di Schrödinger) $|\phi_1, t_1\rangle$ in un insieme canonico alla temperatura $\beta = 1/kT$. Sommando su tutti i ϕ_1 , si ha

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}'[\phi] e^{iI[\phi]}, \quad (5.12)$$

dove l'integrazione è estesa soltanto alle configurazioni del campo periodiche con periodo β nel tempo immaginario it . Come è noto, dalla funzione di partizione Z di un sistema statistico si può facilmente ricavare l'entropia termodinamica:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k \log Z + kT \frac{\partial \log Z}{\partial T} = k \log Z + \frac{E}{T} \quad (5.13)$$

(l'*energia libera di Helmholtz* F è definita da $Z = e^{-\beta F}$).

5.3.1 Il calcolo a *path-integrals* di Hawking e Gibbons

Cerchiamo ora di applicare questo formalismo al caso dei buchi neri; l'azione classica rilevante conterrà un termine gravitazionale e un termine relativo ai campi di materia, e sarà pertanto un funzionale $I[g, \psi]$ delle configurazioni classiche della metrica e dei campi di materia. Il contributo dominante per

Z verrà dalle soluzioni classiche (g_0, ψ_0) che estremizzano l'azione e hanno la corretta periodicità immaginaria. $I[g, \psi]$ pertanto si potrà scrivere come

$$I[g, \psi] = I[g_0, \psi_0] + I_2[\tilde{g}] + I_2[\tilde{\psi}] + \dots, \quad (5.14)$$

dove le prime correzioni sono quadratiche nelle fluttuazioni $\tilde{g} = g - g_0$, $\tilde{\psi} = \psi - \psi_0$. Nell'approssimazione più semplice, si può prendere come g_0 la metrica di Schwarzschild, e porre uguale a 0 il campo di materia classico ψ_0 . Funzione di partizione ed entropia saranno allora date da

$$\begin{aligned} Z &\cong e^{iI[g_0]}, \\ S_{\text{bh}} &\cong iI[g_0] + \frac{E}{T}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

dove I è ora la sola azione gravitazionale. Quanto vale I ? Sappiamo che la teoria della relatività generale può essere derivata da un principio variazionale a partire dall'azione di Hilbert⁸,

$$I = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x; \quad (5.16)$$

se limitiamo l'integrazione a una regione Y con *boundary* ∂Y , l'equazione di Einstein sarà soddisfatta dalle metriche g per cui I è un'estremo rispetto a variazioni di g nulle su ∂Y , a patto che si aggiunga all'azione un *termine di superficie*

$$I_{\partial Y} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial Y} \sqrt{-h} K d^3x, \quad (5.17)$$

dove K è la traccia della curvatura estrinseca del *boundary* ∂Y in Y , e h la metrica indotta da g su ∂Y .

Per calcolare il valore di $I + I_{\partial Y}$ sullo spazio-tempo di Schwarzschild, è utile esprimere la metrica nella *forma di Kruskal-Szekeres*

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{-r/2M} (-dy^2 + dz^2) + r^2 (d\theta^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.18)$$

dove le *coordinate di Kruskal* y e z sono definite per $r > 2M$ da

$$\begin{cases} y = 4M \sqrt{r/2M - 1} e^{r/4M} \sinh(t/4M), \\ z = 4M \sqrt{r/2M - 1} e^{r/4M} \cosh(t/4M); \end{cases} \quad (5.19)$$

e per $r < 2M$ da

$$\begin{cases} y = 4M \sqrt{1 - r/2M} e^{r/4M} \cosh(t/4M), \\ z = 4M \sqrt{1 - r/2M} e^{r/4M} \sinh(t/4M). \end{cases} \quad (5.20)$$

Le coordinate di Kruskal rendono evidente la periodicità immaginaria del campo gravitazionale (con $\beta = 8\pi M$, consistentemente con la temperatura del bagno

⁸Si veda [Wald 1984a], oppure [Misner et al. 1973].

termico di Hawking). La singolarità in $r = 0$, tuttavia, rende impossibile valutare I direttamente su questa metrica; non potendo rimuovere la singolarità, la aggiriamo, considerando la metrica euclidea ottenuta ponendo $\chi = iy$:

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{-r/2M} (d\chi^2 + dz^2) + r^2 (d\theta^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.21)$$

Valutiamo dunque l'azione $I + I_{\partial Y}$ su una regione Y delimitata da $r = r_0 \rightarrow \infty$ e da $it_0 \leq it \leq it_0 + i\beta$: la periodicità della metrica “incolla” le due superfici di it costante, per cui dobbiamo integrare su un *boundary* di topologia $S^1 \times S^2$. Lo scalare di curvatura R tende a 0 per $r \rightarrow \infty$, cosicché ci resta soltanto il termine di superficie

$$I_{\partial Y} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial Y} K d\Sigma; \quad (5.22)$$

ma [Misner et al. 1973]

$$\int K d\Sigma = \frac{\partial}{\partial n} \int d\Sigma, \quad (5.23)$$

dove con la derivata $\partial/\partial n$ intendiamo la variazione della superficie di ∂Y quando ogni suo punto è spostato della stessa distanza nella direzione normale (in questo caso, la direzione di r); allora

$$\begin{aligned} I_{\partial Y} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int d\Sigma = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[-\sqrt{1 - 2M/r} \frac{d}{dr} \right] \left[4\pi r^2 \cdot i\beta \sqrt{1 - 2M/r} \right] = \\ &= 4\pi i M^2 + O(r^{-1}); \end{aligned} \quad (5.24)$$

il primo fattore $(1 - 2M/r)^{1/2}$ è dovuto alla normalizzazione dell'operatore d/dn ; $i\beta\sqrt{1 - 2M/r}$ deriva invece dall'integrazione dell'elemento di linea dt . Possiamo ora far recedere il *boundary* verso l'infinito ($r \rightarrow +\infty$). L'entropia del buco nero è data allora da

$$S_{\text{bh}} = -4\pi M^2 + 8\pi M^2 = \frac{4\pi(2M)^2}{4} = \frac{A}{4}, \quad (5.25)$$

in accordo con la formula di Bekenstein-Hawking.

5.3.2 Sulla validità dell'approssimazione di punto a sella

Questo risultato è senza dubbio impressionante, ma non privo di problemi, incentrati per lo più sulla validità dello sviluppo di eq. (5.14). Il valore corretto dell'entropia di Bekenstein-Hawking ha infatti in questo calcolo un'*origine puramente classica* (il termine *a zero loop* dell'azione gravitazionale); ritorna la domanda che ci eravamo implicitamente posti criticando l'entropia “delle configurazioni interne”: come può la fisica gravitazionale classica “conoscere” la radiazione quantistica di Hawking?

Se il valore della temperatura di Hawking è davvero esatto, allora è necessario che siano trascurabili le correzioni successive al valore di S , dovute

all'entropia dei campi di materia e dei *gravitoni termici*⁹ che circondano il buco nero). Tuttavia, la prima correzione dovuta ai campi di materia,

$$S_{\text{bh}}^1 = \ln \int \mathcal{D}[\psi] e^{iI_2[\tilde{\psi}]} \quad (5.26)$$

è essenzialmente l'entropia di *entanglement* della materia nel *background* di Schwarzschild! Questo segue direttamente dal formalismo a *path-integral*, se si tiene conto che in $I_2[\tilde{\psi}]$ compare implicitamente la metrica g_0 di Schwarzschild. Se questa identificazione è corretta, allora non ha senso cercare di derivare *tutta* l'entropia di buco nero come entropia di *entanglement* (tutt'al più questa potrà fornire una correzione all'approssimazione *a zero loop*); secondo gli schemi di regolarizzazione proposti, però, S_{bh}^1 ha lo *stesso* ordine di grandezza del termine classico. Non è chiaro, a questo punto, se sia necessario emendare la procedura di regolarizzazione, l'approssimazione di punto a sella, o entrambe!

Un argomento indipendente porta a concludere che la derivazione di Hawking e Gibbons non può essere corretta: l'assunzione che i buchi neri siano descrivibili come *ensemble* canonici è messa in crisi dalla stessa espressione della temperatura di Hawking (confermata dal risultato finale per S_{bh}). Per un buco nero di Schwarzschild, ad esempio, $T = \kappa/2\pi = 1/8\pi M$; ma allora la sua *capacità termica*

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial (8\pi M)^{-1}} = -8\pi M^2 \quad (5.27)$$

risulta essere *negativa*! Questo è caratteristico di un sistema termodinamico *instabile*: consideriamo il buco nero di Schwarzschild in equilibrio con un bagno termico alla temperatura di Hawking; se una fluttuazione statistica fa assorbire al buco nero una piccola quantità di calore, la sua massa aumenterà e la sua temperatura diminuirà, facendogli assorbire sempre più calore dal bagno termico, mentre la massa cresce senza limiti; il processo di evaporazione di Hawking rappresenta l'altro aspetto di questa instabilità: una fluttuazione che porta il buco nero a perdere massa aumenta la sua temperatura e dunque la sua emissione termica, fino all'evaporazione completa.

Ne segue che l'integrale che esprime la funzione di partizione canonica per il buco nero non può convergere: se $\nu(E)$ è la densità degli stati quantistici,

$$Z = \int dE \nu(E) e^{-\beta E} = \int dE e^{-\beta E + \ln \nu(E)} = \int dE e^{-\beta E + S(E)}; \quad (5.28)$$

Z può essere valutato nell'approssimazione di punto a sella intorno al valore di E per cui

$$\frac{\partial}{\partial E} \left(-\beta + \frac{\partial S(E)}{\partial E} \right) = 0; \quad (5.29)$$

l'integrale, tuttavia, convergerà soltanto se l'esponente è una funzione *convessa* di E ; ovvero, se

$$0 < -\frac{\partial^2 S(E)}{\partial E^2} = -\frac{\partial \beta}{\partial E} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)^{-1}. \quad (5.30)$$

⁹Se sono abbastanza piccole, le fluttuazioni della metrica intorno alla geometria di Schwarzschild sono descritte dalle equazioni *linearizzate* di Einstein: in un opportuno *gauge*, queste coincidono con l'equazione d'onda per un campo *massless* sul *background* di Schwarzschild. È ovvio allora che valga la derivazione dell'effetto Hawking.

È necessario quindi *stabilizzare* il buco nero prima di poter applicare la descrizione statistica. Un modo di fare questo è imporre la condizione di temperatura costante su una superficie sferica *al finito*, invece che per $r \rightarrow \infty$. In questo caso grazie al *red-shift* gravitazionale la temperatura sul *boundary* non è più inversamente proporzionale all'energia M del buco nero. Ora, l'assorbimento di radiazione diminuisce la temperatura all'infinito, ma aumenta la temperatura sulle pareti della "scatola". Dunque il buco nero si riscalda e può restituire il calore in eccesso ritornando alla sua configurazione di equilibrio. Dal punto di vista fisico questa soluzione è problematica perché suppone l'esistenza di un bagno termico infinito, alla temperatura esatta richiesta, nella zona "esterna".

5.3.3 Energia quasi-locale ed *ensemble statistici*

[Brown e York 1993b] propongono invece di abbandonare la descrizione statistica *canonica* (dove si richiede la condizione di temperatura costante) per imporre un vincolo sull'*energia totale* del sistema composto dal campo gravitazionale e dai campi di materia, che saranno descritti dall'*ensemble microcanonico*. Sorprendentemente, grazie alla mediazione del campo metrico, è possibile esprimere questa condizione come un vincolo sul valore della metrica e delle sue derivate su un *boundary* bidimensionale, nel formalismo dell'*energia quasilocale* di [Brown e York 1993a], che ora presenteremo brevemente.

Dalla relatività generale compiamo un gran balzo all'indietro, fermandoci alla meccanica classica non relativistica: le equazioni del moto di un sistema caratterizzato da variabile coniugate (x, p) e dall'hamiltoniana H si possono ottenere dal principio variazionale

$$\delta I = \delta \int_{t'}^{t''} dt \left[p \frac{dx}{dt} - H(p, x, t) \right] = 0; \quad (5.31)$$

ovvero, in forma parametrica,

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \delta \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \left[p \frac{dx}{d\lambda} - \frac{dt}{d\lambda} H(p, x, t) \right] = \\ &= (\text{eq. moto}) + p \delta x|_{\lambda'}^{\lambda''} - H \delta t|_{\lambda'}^{\lambda''}; \end{aligned} \quad (5.32)$$

naturalmente, per ottenere le equazioni del moto è necessario che la variazione di x e t si annulli ai limiti di integrazione. Per variazioni tra diverse soluzioni delle equazioni del moto, sono valide le *equazioni di Hamilton-Jacobi*,

$$\begin{aligned} p|_{\lambda''} &= \frac{\delta I}{\delta x(\lambda'')}, \\ H|_{\lambda''} &= -\frac{\delta I}{\delta t(\lambda'')}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

L'*energia totale* è dunque data in λ'' dalla *variazione dell'azione classica corrispondente a un incremento $\delta t(\lambda'')$ del tempo finale di integrazione*. È possibile trasferire questo schema in relatività generale? Qui le cose, indubbiamente, si

complicano: non c'è un modo univoco di fissare condizioni al contorno corrispondenti a $\delta x = 0$, $\delta t = 0$ ai limiti di integrazione: per ottenere le equazioni di Einstein a partire da un principio variazionale limitato a una regione finita Y dello spazio-tempo è necessario aggiungere dei termini di superficie, la cui forma dipende dalle particolari condizioni al contorno che si fissano su ∂Y .

In [Brown e York 1993a] si considera una regione di spazio-tempo Y globalmente iperbolica (per cui possiamo almeno dare un senso allo “scorrere del tempo”); per il *teorema di Geroch* (pag. 80) possiamo scrivere Y come il prodotto di un 3-spazio euclideo Σ per un intervallo $(t', t'') \subset \mathbb{R}$. Chiameremo B il *boundary* di Σ , ${}^3B \equiv (t', t'') \times B$ il *boundary* di Y , e t' e t'' le due superfici Σ iniziale e finale. Se come condizioni al contorno fissiamo i valori delle 3-metriche h_{ij} e γ_{ij} indotte¹⁰ su t' , t'' e 3B , l'azione che riproduce le equazioni di Einstein, come abbiamo già visto in sez. 5.3.1, è

$$I = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x + \frac{1}{8\pi} \int_{t'}^{t''} \sqrt{-h} {}^3K d^3x - \frac{1}{8\pi} \int_{{}^3B} \sqrt{-\gamma} {}^3\Theta d^3x \quad (5.34)$$

(dove $\int_{t'}^{t''} d^3x$ denota un integrale su t'' meno un integrale su t' ; 3K e ${}^3\Theta$ sono le tracce delle curvature estrinseche delle 3-superfici del *boundary*). La variazione di I dà infatti

$$\delta I = (\text{eq. moto}) + \int_{t'}^{t''} \frac{p^{ij}}{16\pi} \delta h_{ij} d^3x + \int_{{}^3B} \frac{\pi^{ij}}{16\pi} \delta \gamma_{ij} d^3x, \quad (5.35)$$

dove p^{ij} e π^{ij} sono i momenti coniugati (vedi eq. (4.49)) delle 3-metriche h_{ij} e γ_{ij} . Ora, l'analogo delle equazioni di Hamilton-Jacobi conterrà le derivate funzionali di I rispetto a h_{ij} e γ_{ij} . La prima delle eq. (5.33) si riscrive

$$\left. \frac{p^{ij}}{16\pi} \right|_{t''} = \frac{\delta I}{\delta h_{ij}(t'')}; \quad (5.36)$$

la derivata funzionale di I rispetto a γ_{ij} , invece, dà un tensore a due indici che può essere interpretato come *tensore energia-impulso*¹¹:

$$\tau^{ij} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \pi^{ij} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta I}{\delta \gamma_{ij}}. \quad (5.37)$$

È interessante vedere che la forma di τ^{ij} è analoga alla consueta definizione di $T^{ab} = 2(-g)^{-1/2}(\delta S^m / \delta g_{ab})$; questo però tiene conto soltanto dei contributi “di materia”, mentre τ^{ij} è dovuto sia al campo gravitazionale che ai campi di materia (quando l'azione I comprende i termini corrispondenti). Per τ^{ij} vale l'equazione

$${}^3\nabla_i \tau^{ij} = -T^{nj}, \quad (5.38)$$

¹⁰Utilizzeremo gli indici latini i, j per i tensori su varietà tridimensionali. Si tenga però presente che la 3-metrica avrà segnatura riemanniana sulle superfici *space-like* Σ , lorentziana sulla superficie *time-like* 3B .

¹¹La generalizzazione dell'energia “scalare” al tensore di energia-impulso è d'altronde tipica della relatività generale.

(dove n indica la componente *normale* a 3B) che esprime l'esistenza di correnti conservate *con sorgente* T^{ij} . Proiettandolo nelle direzioni normale e tangente alle 2-superfici B , τ^{ij} può essere decomposto in *densità superficiali* di *energia*, *momento* e *stress spaziale*:

$$\begin{cases} \epsilon & \equiv u_i u_j \tau^{ij} & = \frac{-1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\delta I}{\delta N}, \\ j_\mu & \equiv -\sigma_{\mu i} u_j \tau^{ij} & = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\delta I}{\delta N^\mu}, \\ s^{\mu\nu} & \equiv \sigma_i^\mu \sigma_j^\nu \tau^{ij} & = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta I}{\delta \sigma_{\mu\nu}}, \end{cases} \quad (5.39)$$

dove $\sigma_{\mu\nu}$ è la 2-metrica¹² sulle superfici B , u^i è il vettore tangente a 3B e infine N , N^μ sono il *lapse* e lo *shift* della foliazione di 3B in superfici B (indotti, naturalmente, dalla decomposizione “hamiltoniana” di g_{ab}). ϵ può essere integrato per dare l'*energia totale quasi-locale*

$$E = - \int_B \frac{\delta I}{\delta N} d^2x, \quad (5.40)$$

che coincide¹³ con altre energie gravitazionali presenti in letteratura, quando queste sono definite: l'*energia totale hamiltoniana* di [Hawking e Horowitz 1996] e, per spazio-tempo asintoticamente piatti, l'*energia ADM*¹⁴. La caratteristica di gran lunga più importante di ϵ , j_μ ed $s^{\mu\nu}$ è di essere funzioni delle sole variabili canoniche γ_{ij} e π^{ij} definite su 3B ; pur “vivendo” sul *boundary*, tuttavia, τ^{ij} “conosce” grazie al campo gravitazionale il contenuto di *matter-energy* della regione interna.

Ritorniamo ora a pensare all'azione I dal punto di vista della meccanica statistica, e consideriamo integrali funzionali di forma simile a quello che esprime Z : l'integrando sia dato da una funzione di I , e il dominio di integrazione comprenda tutte le soluzioni delle equazioni di Einstein che soddisfano determinate condizioni al contorno. Bene, l'integrale sarà allora *un funzionale delle sole grandezze che vengono fissate come condizioni al contorno*, ovvero delle grandezze che compaiono variate in δI .

Concentriamoci in particolare sul contributo di 3B (in quanto considereremo soluzioni periodiche nel tempo reale o immaginario, identificando t' e t''). Per l'azione (5.34), le condizioni al contorno sono fissate una volta dato il valore di γ_{ij} su 3B , o equivalentemente di N , N^μ e $\sigma_{\mu\nu}$, come si può vedere introducendo la decomposizione di g_{ab} in eq. (5.35)

$$\delta I = \int_{{}^3B} \sqrt{\sigma} \left(-\epsilon \delta N + j_\mu \delta N^\mu + \frac{N}{2} s^{\mu\nu} \delta \sigma_{\mu\nu} \right) d^3x. \quad (5.41)$$

¹²Abbiamo utilizzato le lettere greche minuscole per denotare gli indici relativi a 2-varietà euclidee.

¹³A meno di costanti che possono essere scelte arbitrariamente: infatti all'azione I è possibile aggiungere, senza conseguenze sulle equazioni del moto, un qualsiasi funzionale I_0 delle grandezze fissate nelle condizioni al contorno.

¹⁴[Arnowitt et al. 1962].

La parte *gauge*-invariante di N e N^μ è data dagli integrali

$$\begin{aligned}\beta &= \int N|_B dt, \\ \omega^\mu &= \frac{\int N^\mu|_B dt}{\int N|_B dt},\end{aligned}\tag{5.42}$$

lungo le curve in 3B ortogonali alle *slices* B , che hanno l'interpretazione di *temperatura* e *potenziale termodinamico* del sistema gravitazionale (questi non sono più omogenei come per i sistemi termodinamici “ordinari”, ma possono variare spostandosi attraverso il *boundary*, a causa del *red-shift* gravitazionale). Infatti, la condizione “termica” di Feynman e Hibbs (che le “storie” su cui si integra per ottenere Z siano periodiche con un periodo immaginario β) equivale a richiedere che la *distanza propria* tra t' e t'' , misurata sulle curve in 3B ortogonali a B (ovvero¹⁵ il primo integrale di eq. (5.42)) valga β . Vogliamo sottolineare ancora il fatto che β non deve necessariamente essere omogeneo su B !

ω^μ è invece [Brown e York 1994] la *velocità propria del sistema fisico misurata dagli osservatori a riposo sul boundary* B . Se le condizioni al contorno sono assialmente simmetriche, l'unica componente non nulla di ω^μ è la velocità angolare del sistema, che entra come grandezza intensiva nella prima legge della termodinamica dei buchi neri.

Un sistema gravitazionale caratterizzato da valori fissati di β e ω^μ è aperto allo scambio di energia e momento con l'esterno, e l'integrale

$$Z[\beta, \omega^\mu, \sigma_{\mu\nu}] = \int \mathcal{D}[\phi]_{\beta, \omega^\mu, \sigma_{\mu\nu}} e^{iI[\phi]},\tag{5.43}$$

rappresenta la sua *funzione di partizione grancanonica* (il valore di $\sigma_{\mu\nu}$ entra come condizione supplementare a determinare la geometria spaziale sul *boundary*.)

Per definire l'*ensemble microcanonico gravitazionale*, che descrive un sistema chiuso agli scambi di energia e di momento, è sufficiente aggiungere all'azione un termine

$$I_{\text{mc}} = \int_{{}^3B} \sqrt{\sigma} (\epsilon N - j_\mu N^\mu) d^3x,\tag{5.44}$$

che ha l'effetto di scambiare in (5.41) i termini con la δ e quelli senza. Stiamo compiendo l'analogo di una trasformazione di Legendre; questo rafforza ulteriormente l'interpretazione di β come temperatura e ϵ come energia, visto che ne stabilisce una sorta di *coniugazione termodinamica* (lo stesso vale, ovviamente, per velocità e momento angolare). L'integrale funzionale rilevante per l'*ensemble microcanonico* è la *densità degli stati* di energia quasi-locale ϵ , momento j_μ e 2-geometria $\sigma_{\mu\nu}$ su B , dato da

$$\nu[\epsilon, j_\mu, \sigma_{\mu\nu}] = \int \mathcal{D}[\phi]_{\epsilon, j_\mu, \sigma_{\mu\nu}} e^{i(I+I_{\text{mc}})[\phi]},\tag{5.45}$$

¹⁵A parte un tedioso problema di ridefinizione del *lapse* come numero immaginario, di cui non ci preoccupiamo.

dove si richiede che le “storie” su cui si integra siano periodiche *nel tempo reale*, con un *qualsiasi periodo* [Brown e York 1994].

Infine, per il lettore che se lo chiedesse, la funzione di partizione *canonica* (che descrive sistemi aperti agli scambi di energia, ma non di momento) si ottiene con una sola *trasformazione di Legendre* tra β e ϵ .

5.3.4 Il buco nero nella scatola

Siamo finalmente attrezzati in modo sufficiente per studiare l'*ensemble microcanonico* che descrive il nostro buco nero di Schwarzschild. Il vincolo sull'energia garantisce proprietà di stabilità più robuste che nel caso canonico; l'immagine “fisica” che ci si può fare è quella di un buco nero “rinchiuso in una scatola” con pareti perfettamente adiabatiche (come per le condizioni al contorno canoniche, sono possibili obiezioni: in questo caso, non è chiaro come il concetto di “adiabaticità” si adatti a un'interazione a lungo raggio come quella gravitazionale).

Cerchiamo allora di valutare l'integrale (5.45) per dati sul contorno che corrispondono al buco nero di Schwarzschild. È naturale scegliere Y in modo da rispettare le simmetrie dello spazio-tempo: consideriamo allora la foliazione indotta dal campo di Killing ∂_t , e prendiamo superfici spaziali Σ limitate da una superficie sferica $r = \text{cost}$ (si noti che in questo modo è ricoperta soltanto la regione *esterna* del buco nero!). Come sappiamo, l'azione è estremizzata dalle soluzioni classiche delle equazioni di Einstein; l'approssimazione più rozza (a zero *loops*) consiste nel valutare ν su una sola di queste soluzioni.

Purtroppo la metrica di Schwarzschild, che ha fornito le condizioni al contorno, non può essere utilizzata a questo scopo perché non può essere messa su una varietà con un singolo *boundary* $\Sigma \times S^1$ (come è richiesto dalla condizione di periodicità reale). Si può però vedere [Brown e York 1994] che la metrica *euclidea* ottenuta dalla continuazione analitica per tempi immaginari della metrica di Schwarzschild è un estremo dell'azione microcanonica se si risolve un problema di regolarità nei pressi della *superficie di biforcazione* del buco nero, dove la foliazione indotta dal campo di Killing $(\partial_t)^a$ diventa degenere. Questo si può fare introducendo un *boundary interno* fittizio su cui si richiede che N e N^μ si annullino (è una conseguenza diretta della degenerazione).

Per calcolare l'azione dobbiamo allora tenere conto di tre contributi: quello che proviene dall'integrale di volume su $\Sigma \times S^1$, che però si annulla dato che lo stiamo valutando su una soluzione delle equazioni di Einstein; quello del *boundary* esterno $r = \text{cost}$ che coinciderebbe con il risultato di eq. (5.24) se il nuovo termine $\int_{\partial B} \sqrt{\sigma} \epsilon N$ dell'azione microcanonica non lo cancellasse esattamente; infine, il contributo del *boundary* interno, che è dato¹⁶, come si può vedere moltiplicando l'eq. (4.56) per il tempo di periodicità $2\pi/\kappa$ della metrica euclidea, da $-A/4$. Il logaritmo della densità degli stati, data in questa approssimazione da¹⁷ $\nu = e^{A/4}$, coincide esattamente con l'entropia di Bekenstein-Hawking.

¹⁶[Brown e York 1994].

¹⁷Il fattore i all'esponente scompare perché stiamo valutando l'azione su una metrica euclidea.

Anche nell'impostazione dell'*ensemble microcanonico*, tuttavia, l'entropia del buco nero appare avere un'origine essenzialmente classica che è difficile conciliare con il carattere quantistico della radiazione di Hawking. L'entropia, insomma, *precede* la radiazione termica da cui dovrebbe sorgere. La difficoltà è evidente se si nota che \hbar appare *al denominatore* di S_{bh} , e, invece, solo al *numeratore* della temperatura di Hawking.

Nel calcolo di Hawking e Gibbons e in quello di York, inoltre, l'entropia si deriva valutando l'azione su una metrica *complessa* (o, equivalentemente, *euclidea*) che non è dotata di nessuna delle caratteristiche pregnanti dei buchi neri: nessun orizzonte, nessuna regione interna e nessuna informazione su un processo di collasso gravitazionale. Questo ha spinto alcuni autori¹⁸ a scrivere che l'entropia dei buchi neri ha essenzialmente un'*origine topologica* (la domanda importante che ci si pone nel corso del calcolo è come trovare una metrica che estremizzi l'azione, soddisfacendo a determinate condizioni di topologia e regolarità, e tuttavia *rappresenti*, in qualche senso, la metrica lorentziana originale).

5.4 Welcome to Flatland

L'indagine sull'interpretazione statistica dell'entropia dei buchi neri ha avuto alcuni sviluppi interessanti nell'ambito della gravità $(2 + 1)$ -dimensionale. La teoria della relatività generale costruita su varietà tridimensionali è molto più semplice della teoria "fisica": il tensore di Riemann ha soltanto 6 componenti indipendenti ed è completamente determinato dal tensore di Ricci R_{ab} :

$$R_{abcd} = g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{bc}R_{ad} - g_{ad}R_{bc} - \frac{1}{2}R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (5.46)$$

L'unica soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0, \quad (5.47)$$

sarà pertanto $R_{ab} = 0$, con $R_{abcd} = 0$ e *curvatura dovunque nulla*. È un poco più interessante considerare le equazioni di Einstein con costante cosmologica,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 0, \quad (5.48)$$

che hanno come unica soluzione lo *spazio di Einstein a curvatura costante* caratterizzato da

$$R_{ab} = 2\Lambda g_{ab}. \quad (5.49)$$

Anche se l'espressione algebrica di queste soluzioni è unica, dobbiamo tenere conto che è possibile "ambientarle" su spazio-tempo con topologie diverse. In questo senso si dice che la teoria della relatività generale in $2 + 1$ dimensioni è *puramente topologica*.

¹⁸Si veda ad esempio [Liberati 1996].

5.4.1 La gravità $(2 + 1)$ -dimensionale come teoria di Chern-Simons

Il motivo alla base della semplicità della gravità $2+1$ sta nel fatto che è possibile riformularla come teoria classica di *Chern-Simons* [Achúcarro e Townsend 1986]. Questo si fa innanzitutto passando al *formalismo di triade*: mettiamo cioè in corrispondenza il *tangent bundle* TM dello spazio-tempo con il *principal fiber bundle* $F(\mathcal{M})$ dei sistemi di riferimento inerziali locali, con gruppo interno $SO(2, 1)$ (useremo gli indici romani $I, I, \dots = 0, 1, 2$ per i gradi di libertà *interni* di $F(\mathcal{M})$). A ogni vettore di $T_x\mathcal{M}$ può essere data una rappresentazione nel sistema di riferimento ortonormale in x una volta che si è definita una *triade* e_a^I , ovvero una base anolonomica ortonormale per la *fibra* di $F(\mathcal{M})$ in x :

$$v^I = e_a^I v^a; \quad (5.50)$$

si può allora esprimere il prodotto scalare tra i vettori $u^a, v^a \in T_p\mathcal{M}$ come

$$u^a v^b g_{ab} = u^a v^b e_a^I e_b^J \eta_{IJ} \Rightarrow g_{ab} = e_a^I e_b^J \eta_{IJ}, \quad (5.51)$$

dove η_{IJ} è la metrica di Lorentz. Analogamente, se si conosce la *connessione interna* di $F(\mathcal{M})$,

$$\hat{B}_a = B_a^K \hat{T}_K \quad (5.52)$$

(i \hat{T}_K sono i generatori della rappresentazione aggiunta dell'algebra $so(2, 1)$), si può ottenere la derivata covariante di un campo vettoriale $v^a \in TM$ portandolo su $F(\mathcal{M})$, ricavandone la derivata covariante *interna* e riportandolo infine su TM .

Prendendo la triade e la connessione interna come gradi di libertà indipendenti, e scrivendo la variazione dell'azione di Hilbert in loro funzione, si ottengono le equazioni di Einstein più altre equazioni che esprimono il vincolo di compatibilità con la metrica della connessione su TM ottenuta da \hat{B}_a (questo è il *formalismo di Palatini*).

Nel caso $(2 + 1)$ -dimensionale l'azione di Hilbert può essere scritta come

$$I_{\text{Hilb}} = I_{\text{CS}}(A^{(+)}) - I_{\text{CS}}(A^{(-)}), \quad (5.53)$$

dove $A^{(+)}$ e $A^{(-)}$ sono date, per costanti cosmologiche negative $\Lambda = -1/l^2$, da

$$A_a^{(\pm)K} = B_a^K \pm \frac{1}{l} e_a^K, \quad (5.54)$$

e I_{CS} è l'azione di Chern-Simons

$$I_{\text{CS}}(\hat{A}) = \frac{\sqrt{2}l}{32\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{tr} \left\{ \hat{A} \wedge d\hat{A} + \frac{2}{3} \hat{A} \wedge \hat{A} \wedge \hat{A} \right\} : \quad (5.55)$$

\hat{A} è una 1-forma a valori nella rappresentazione aggiunta dell'algebra $so(2, 1)$; d indica il differenziale esterno. La teoria classica di Chern-Simons è banale, perché le equazioni ottenute variando $I_{\text{CS}}(A)$ richiedono che la connessione B sia piatta (vedi ad es. [Baez 1994]). Si può allora provare che l'eq. (5.54) implica che lo spazio-tempo \mathcal{M} abbia una curvatura *metrica* costante.

L'azione di Chern-Simons l'azione $I_{\text{CS}}(\hat{A})$ è invariante per le trasformazioni di *gauge*

$$\hat{A}'_a = \hat{\gamma}^{-1} \hat{A}_a \hat{\gamma} + \hat{\gamma}^{-1} d_a \hat{\gamma}, \quad (5.56)$$

dove $\hat{\gamma}$ è una funzione su \mathcal{M} a valori nella rappresentazione aggiunta del gruppo $SO(2, 1)$ (nel caso del gruppo di *gauge* abeliano $U(1)$, la (5.56) riproduce la familiare trasformazione del potenziale elettromagnetico ${}^{\text{em}}A'_a = {}^{\text{em}}A_a + d_a \Lambda$). La *gauge*-invarianza della teoria di Chern-Simons rispecchia così in modo naturale l'invarianza per diffeomorfismi della teoria della relatività generale.

5.4.2 Il buco nero BTZ

Sebbene così semplice, la teoria 2 + 1 ammette per costanti cosmologiche negative $\Lambda = -1/l^2$ una soluzione di buco nero, scoperta solo recentemente e con grande sorpresa [Bañados, Teitelboim e Zanelli 1992]. In questa sezione riasumiamo (senza dimostrarle) le caratteristiche più interessanti del buco nero BTZ. Per una trattazione più dettagliata e una bibliografia completa si veda la rassegna di [Carlip 1995].

La metrica BTZ può essere scritta in coordinate “pseudo-Schwarzschild” (cfr. eq. (4.20)),

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2 \quad (5.57)$$

dove

$$N = \sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}}, \quad |J| \leq Ml. \quad (5.58)$$

Questa metrica è stazionaria e assialmente simmetrica, con campi di Killing $(\partial_t)^a$ e $(\partial_\phi)^a$; M e J sono effettivamente la massa e il momento angolare totali all'infinito (secondo la definizione standard ADM [Arnowitt et al. 1962], e anche secondo la formulazione *quasi-locale* di Brown e York vista in sez. 5.3.3). La metrica presenta due *coordinate singularities* in

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{Ml^2}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{J}{Ml} \right) \right]}; \quad (5.59)$$

$r = r_+$ marca l'*orizzonte degli eventi*, che è anche un *orizzonte di Killing biforcuto* con gravità superficiale costante

$$\kappa = \frac{(r_+^2 - r_-^2)}{l^2 r_+}; \quad (5.60)$$

$r = r_-$ è invece un *orizzonte di Cauchy* analogo a quello delle soluzioni di Kerr-Newman¹⁹. Infine, $r_{\text{st}} = M^{1/2}l$ segna il *limite statico* all'interno del quale si verifica il fenomeno di trascinamento dei sistemi di riferimento inerziali che è

¹⁹ Anche se non ne abbiamo parlato; si veda [Misner et al. 1973]. L'orizzonte di Cauchy ha questo nome perché ogni curva causale che interseca l'orizzonte degli eventi deve necessariamente attraversare anche $r = r_-$.

caratteristico dei buchi neri rotanti di Kerr e che abbiamo esaminato in sez. 4.2.3.

In $r = 0$ non c'è alcuna singolarità di curvatura, ma le geodetiche vi terminano con un tempo proprio finito (questo è il criterio principe di singolarità, come discutiamo in app. B). *Dulcis in fundo*, questa metrica può essere ricavata come fase finale del processo di collasso gravitazionale di una distribuzione di materia. Insomma, la soluzione BTZ ha tutte le caratteristiche che siamo soliti attribuire ai buchi neri in $3 + 1$ dimensioni. Come si comporta però dal punto di vista delle proprietà “termodinamiche”?

Benissimo. Infatti, *l'effetto Hawking è presente anche per il buco nero BTZ*, e la temperatura della radiazione termica trovata è esattamente $T_H = \kappa/2\pi$. Lo studio della teoria quantistica dei campi nel *background* BTZ è facilitato dal fatto che è possibile ricavare esplicitamente l'espressione analitica delle funzioni di Green; queste si rivelano *periodiche nel tempo immaginario* con periodo $2\pi/\kappa$, e in particolare, la funzione di Wightman $\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$ esibisce la proprietà (1.30). È chiaro che un *detector* stazionario rivelerà la presenza di una radiazione termica, che è ulteriormente confermata dall'analisi “di matrice S ”.

Inoltre, ci sono forti indicazioni che l'entropia del buco nero BTZ sia data, proprio come per i buchi neri $(3 + 1)$ -dimensionali, da *un quarto dell'area*²⁰ *dell'orizzonte degli eventi*; in particolare:

1. la prima legge della termodinamica si scrive

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} d(2\pi r_+) + \Omega dJ \quad (5.61)$$

(Ω è la velocità angolare dell'orizzonte degli eventi): dal valore $\kappa/2\pi$ per la temperatura del buco nero si ottiene $S = 2\pi r_+/4$;

2. la ripetizione del calcolo di Gibbons e Hawking (sez. 5.3.1) dà proprio $S = 2\pi r_+/4$; si può anche ricavare la prima correzione del valore a *zero-loop*:

$$S^{(0)} + S^{(1)} = \frac{2\pi r_+}{4} \left(1 + \frac{2}{l} \right). \quad (5.62)$$

La derivazione diventa addirittura più robusta, perché questa volta il buco nero si presta a essere descritto dall'insieme canonico, visto che la sua capacità termica è positiva (questo implica anche che l'evaporazione completa dovrebbe avvenire in un tempo infinito);

3. lo stesso risultato per S si ottiene anche nell'impostazione dell'insieme microcanonico di Brown e York.

5.4.3 I gradi di libertà dell'orizzonte

Si potrebbe pensare di sfruttare l'estrema semplicità della gravitazione $(2 + 1)$ -dimensionale per quantizzarla con agio e portare a termine il programma di

²⁰In questo caso la circonferenza!

ottenere S_{bh} *contando i microstati quantistici di buco nero*. Purtroppo, la teoria è *troppo* semplice per i nostri scopi, perché si può provare che è caratterizzata da un numero di gradi di libertà insufficiente per dare l'entropia di Bekenstein-Hawking.

Tuttavia si può ragionare sul fatto che ogni affermazione sui buchi neri nell'ambito di una teoria quantistica della gravità riguarda necessariamente delle probabilità *condizionate*: ad esempio, “nell'ipotesi che lo stato quantistico descriva uno spazio-tempo dotato di un orizzonte con certe caratteristiche, allora osserveremo la radiazione di Hawking”. Il problema, utilizzando il linguaggio della meccanica statistica, è perciò quello di selezionare la classe di microstati che corrisponde al macrostato (il buco nero) al quale sono riferiti i nostri ragionamenti. Ora, fare ciò esaminando uno ad uno i vettori dello spazio di Hilbert è in generale molto difficile, e *paradossale* nel caso particolare della gravità $2+1$ -dimensionale, dove, come abbiamo già detto, non vi sono *in partenza* abbastanza stati.

Possiamo però considerare un altro modo di selezionare gli stati “utili”: fissare delle *condizioni al contorno* “classiche” per la metrica e quantizzare la teoria così vincolata; è proprio quello che abbiamo fatto (con condizioni al contorno “termodinamiche”) nella formulazione a *path-integrals* di Brown e York (sez. 5.3.3).

Abbiamo capito allora che se si vogliono ottenere le equazioni del moto classiche a partire da un principio variazionale, è necessario in generale utilizzare azioni diverse a seconda delle condizioni al contorno che si impongono: queste determinano la forma dei nuovi termini di superficie che è necessario aggiungere all'azione “di volume”. Ora, l'azione di Einstein-Hilbert è *gauge*-invariante (rispetto al gruppo dei diffeomorfismi della varietà metrica), ma un generico termine di superficie I_Σ lo sarà soltanto per trasformazioni di *gauge* che si annullano sul *boundary*. Ne segue che *l'imposizione di condizioni al contorno rompe l'invarianza di gauge della teoria*, e i gradi di libertà “che erano *gauge*” del *boundary* diventano *vere e proprie variabili dinamiche* soggette a equazioni del moto dettate da I_Σ .

Se nella formulazione di Chern-Simons della gravità $2+1$ si sceglie di fissare il valore di $\hat{A}^{(\pm)}$ su un *boundary null-like* Σ , è necessario aggiungere all'azione il termine

$$I_\Sigma = \frac{\sqrt{2}l}{16\pi} \int_\Sigma \text{tr } \hat{A}_z \hat{A}_{\bar{z}} dz d\bar{z}, \quad (5.63)$$

dove si è scelta una struttura complessa z su Σ ; fissando una connessione “di base” ${}^0\hat{A}$ ed esprimendo esplicitamente la scelta di un *gauge* $\hat{\gamma}$ con l'eq. (5.56), si trova²¹

$$I_\Sigma = I_{\text{WZW}}[{}^0\hat{A}, \hat{\gamma}] = \frac{\sqrt{2}l}{16\pi} \int_\Sigma \text{tr} \left[\hat{\gamma}^{-1}(\partial_z \hat{\gamma}) \cdot \hat{\gamma}^{-1}(\partial_{\bar{z}} \hat{\gamma}) - 2\hat{\gamma}^{-1}(\partial_{\bar{z}} \hat{\gamma}) {}^0\hat{A} \right], \quad (5.64)$$

nota come *azione chirale di Wess-Zumino-Witten*²². Sorprendentemente, que-

²¹Trascuriamo un termine *topologico* proporzionale a 2π volte il *winding number* della trasformazione di *gauge*, che comunque non è significativa ai fini della quantizzazione a *path-integrals* (perché $e^{2\pi ni} = 1$).

²²Si veda [Witten 1989].

sta azione conduce a una teoria dei campi conforme *non banale*, e la sua quantizzazione porta a uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Intuitivamente ci saremmo aspettati che il carattere “banale” della teoria di Chern-Simons fosse soltanto *rafforzato* dall'imposizione di condizioni al contorno!

Possiamo allora ipotizzare che la degenerazione quantistica dello “stato di buco nero”, necessaria per dare un'interpretazione statistica a S_{bh} , si possa trovare negli stati della teoria WZW indotta dall'imposizione di condizioni al contorno su un *boundary* nullo dello spazio-tempo BTZ, che è naturale identificare con l'orizzonte degli eventi h [Carlip 1996]. Procediamo così:

1. dalla soluzione BTZ ricaviamo il valore di $A^{(+)}$ e $A^{(-)}$ sull'orizzonte degli eventi h ; l'azione WZW genera le equazioni del moto dei gradi di libertà “che erano di *gauge*” $\hat{\gamma}^{(+)}$ e $\hat{\gamma}^{(-)}$ (si noti che ora $\hat{\gamma}^{(\pm)}$ rappresenta una trasformazione di *gauge* sul *bundle* $F(\Sigma)$);
2. quantizziamo la teoria WZW (questo si può fare con i metodi standard della teoria dei campi conforme: vedi [Carlip 1997]). In questo modo, come abbiamo già detto, si ottiene uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale: troppi stati per dare un'entropia finita!
3. l'azione I_Σ , però, è invariante per i diffeomorfismi generati dai campi di Killing $(\partial_t)^a$ e $(\partial_\phi)^a$ della soluzione BTZ: i gradi di libertà associati rimangono pertanto “vero *gauge*” anche su h . Tecnicamente, si dimostra che è necessario restringere lo spazio di Hilbert della teoria quantistica WZW al *kernel* degli *operatori di Virasoro* associati alle rotazioni e alle traslazioni temporali [Carlip 1997];
4. contando gli stati rimanenti si trova allora

$$S_{\text{bh}} = \frac{2\pi r_+}{4} \left(1 + \frac{2}{l}\right) + \dots, \quad (5.65)$$

cioè la formula di Bekenstein-Hawking, con la correzione quantistica già trovata con il calcolo a *path-integrals*.

Questi risultati sono indubbiamente molto interessanti, ma purtroppo non possono essere trasportati con facilità nella teoria $3 + 1$ -dimensionale. Sebbene anche qui, infatti, l'imposizione di condizioni al contorno su un *boundary* dia origine a gradi di libertà dinamici “che erano *gauge*”²³, non si è ancora trovato un analogo della separazione “pulita” dei gradi di libertà fisici e “di *gauge*” che è invece possibile nella formulazione di Chern-Simons della gravità $2 + 1$. Quest'ultima sembra comunque indicare che i migliori candidati per i microstati quantistici “termodinamici” da conteggiare nell'entropia sono proprio gli stati dell'orizzonte degli eventi. Questa impostazione è condivisa da [Rovelli 1996] nel calcolo di S_{bh} in *loop quantum gravity*, che è l'argomento della prossima (e ultima!) sezione.

²³Si veda ad es. [Carlip 1996].

5.5 S_{bh} in loop gravity

Quando ci si pone il problema di quantizzare la teoria della relatività generale, si possono adottare due impostazioni distinte. Si può tentare di formulare una teoria *perturbativa*, in cui si quantizzano le fluttuazioni della metrica rispetto a una geometria di *background* piatta: l'ipotesi fisica implicita in tale impostazione è che lo spazio-tempo abbia una struttura naturale *minkowskiana* alla quale si sovrappongono le interazioni gravitazionali. Nelle teorie *non-perturbative*, invece, gli stati quantistici dovrebbero descrivere *in modo autonomo* la struttura metrica dello spazio-tempo.

La formulazione di una *quantum gravity* perturbativa²⁴ offre il vantaggio di poter essere trattata con il bagaglio di strumenti matematici e concettuali sviluppati per le teorie quantistiche dei campi *di materia*, ma incontra ben presto una difficoltà fondamentale: la *quantum gravity canonica perturbativa non è rinormalizzabile*²⁵. Per la relatività generale, la *costante di accoppiamento*, in serie della quale si sviluppano formalmente i prodotti degli “operatori di campo”, è data da l_{P}^2 ; al crescere dell'ordine, i termini dello sviluppo hanno pertanto la dimensione di una potenza sempre più grande di L^{-1} , e l'*indice di divergenza superficiale* dei *diagrammi di Feynman* cresce in modo corrispondente. Per cancellare i termini divergenti sarebbe perciò necessaria un'hamiltoniana con infiniti termini “nudi”. La serie perturbativa potrebbe ancora essere ben definita se i termini *di ogni ordine* convergessero separatamente: questo succede al primo ordine per la sola gravità *ma non per la gravità accoppiata ai campi di materia*.

Un altro aspetto problematico dell'impostazione perturbativa è che questa *tradisce lo stesso spirito della relatività generale*, il cui oggetto dinamico (la metrica) non *vive* nella geometria spazio-temporale, ma piuttosto è la geometria dello spazio-tempo. A ogni ordine dello sviluppo in serie, gli “operatori di campo” quantizzati perturbativamente obbediscono alla condizione di causalità valutata sulla geometria piatta di Minkowski e non sulla “vera metrica”; naturalmente è ancora possibile che la serie *nel suo complesso* soddisfi le corrette condizioni di causalità, ma è evidente il conflitto che sussiste tra la “concezione fisica” di Einstein e il procedimento perturbativo.

Passiamo ora alle teorie non-perturbative. In questo lavoro ne abbiamo incontrate già due: oltre alla *quantum-gravity* 2+1-dimensionale, che costituisce un caso del tutto particolare (per il carattere banale della teoria “piena” e la natura perlomeno *serendipitous* della teoria con *boundary*), abbiamo visto in sez. 5.3 l'impostazione a *path-integrals* di Hawking²⁶. Quest'ultima ci ha permesso di ricavare un interessante risultato per S_{bh} , ma soffre dei ben noti problemi di definizione della “misura sulle storie” $\mathcal{D}[g_{ab}]$ se non come sviluppo perturbativo (ancora!) intorno a una soluzione classica.

L'impostazione che considereremo da vicino si basa sulla *quantizzazione canonica non perturbativa* della relatività generale. Si parte dalla formulazione

²⁴Si veda ad es. [Deser et al. 1975].

²⁵Per un introduzione ai procedimenti di rinormalizzazione delle teorie quantistiche dei campi si vedano ad es. [Le Bellac 1991, Itzykson e Zuber 1985].

²⁶[Hawking 1979].

hamiltoniana della teoria classica (che abbiamo abbozzato in sez. 4.2.7), in cui lo spazio delle configurazioni è descritto dalla metrica h_{ab} di una iper-superficie di Cauchy spaziale Σ , che rappresenta il 3-spazio fisico.

A livello quantistico, l'operatore fondamentale della teoria è \hat{h}_{ab} , e gli stati sono funzionali $\Psi[h]$ della 3-geometria. Questi stati sono invarianti per i diffeomorfismi del 3-spazio e soddisfano la famosa (e terribile!) *equazione di Wheeler-DeWitt*,

$$-\hbar^2 \mathcal{G}_{abcd}(x) \frac{\delta^2 \Psi[h]}{\delta h_{ab}(x) \delta h_{cd}(x)} - \sqrt{h(x)} {}^3R(x) \Psi[h] = 0, \quad (5.66)$$

dove 3R è lo scalare di curvatura della 3-metrica, e

$$\mathcal{G}_{abcd}(x) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{h} \{ g_{ac}(x) g_{bd}(x) + g_{bc}(x) g_{ad}(x) - g_{ab}(x) g_{cd}(x) \}. \quad (5.67)$$

L'osservazione cruciale da farsi è che l'equazione di Wheeler-DeWitt non può essere interpretata direttamente come equazione di evoluzione dinamica, ma rappresenta invece un *vincolo* sui possibili valori delle variabili dinamiche. Infatti, la metrica h_{ab} ha sei componenti indipendenti, tre delle quali possono essere rimosse scegliendo un sistema di coordinate nel 3-spazio; questo lascierebbe tre modi dinamici in ogni punto dello spazio, mentre classicamente ce ne aspetteremmo solo due (corrispondenti a onde gravitazionali polarizzate circolarmente in modo destrorso e sinistrorso).

L'ulteriore grado di libertà è governato dall'equazione di Wheeler-DeWitt, e può essere in qualche modo identificato *con il tempo*, che in relatività generale non è un parametro “esterno” di evoluzione del sistema, ma deve essere specificato *internamente e relazionalmente* in termini del campo gravitazionale (ed eventualmente dei campi di materia) del sistema fisico. In effetti, la questione è molto sottile, e sebbene sia stata studiata intensamente rimane ancora elusiva e incerta (si veda ad es. [Isham 1993]).

5.5.1 Le “nuove variabili” e le osservabili di *loop*

La *loop quantum gravity* di Ashtekar, Rovelli e Smolin rappresenta un modo di quantizzare canonicamente la relatività generale nel quale, invece di quantizzare la variabile dinamica h_{ab} , si sceglie di operare con le “nuove variabili” di Ashtekar²⁷, seguendo un procedimento analogo (ma nel formalismo hamiltoniano) a quanto abbiamo fatto per riscrivere la gravità 2+1 come teoria di Chern-Simons. La nostra esposizione sarà necessariamente molto schematica: per maggiori dettagli si vedano, ad esempio, [Ashtekar et al. 1995, De Pietri e Rovelli 1996] e le bibliografie ivi contenute.

La teoria è definita su di una varietà tridimensionale Σ (che è il 3-spazio della formulazione canonica). Consideriamo su Σ due campi $A_a^i(x)$ and $\tilde{E}_i^a(x)$ a valori nell'algebra $so(3)$ (scriveremo $a, b, \dots = 1, 2, 3$ per indicare gli indici spaziali astratti e $i, j, \dots = 1, 2, 3$ per gli indici interni di $so(3)$). La relazione tra questi campi e le variabili metriche convenzionali è la seguente: $\tilde{E}_i^a(x)$ è

²⁷[Ashtekar 1986].

la *triade inversa* resa *densità*, legata alle variabili configurazionali $h_{ab}(x)$ dalla relazione

$$h h^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_i^b, \quad (5.68)$$

dove h è il determinante di h_{ab} ; mentre

$$A_a^i(x) = \Gamma_a^i(x) - k_a^i(x); \quad (5.69)$$

dove $\Gamma_a^i(x)$ è la *spin connection* (a valori nell'algebra $so(3)$) e $k_a^i(x)$ è la curvatura estrinseca di Σ . In queste nuove variabili, l'azione di Einstein viene riscritta come

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{G} \int d^4x \sqrt{g} R = \\ &= \frac{1}{G} \int dx^0 \int d^3x \left[-\dot{A}_a^i \tilde{E}_i^a + \dot{A}_0^i \tilde{C}_i + N^a \tilde{C}_a + N \tilde{W} \right], \end{aligned} \quad (5.70)$$

(dove ridefiniamo $G = 16\pi G_{\text{Newton}}/c^3$) e \tilde{C}_i , \tilde{C}_a e \tilde{W} sono i vincoli (di diffeomorfismo, di Gauss e Hamiltoniano) [Barbero 1995]. Ne segue che il momento canonicamente coniugato ad A_a^i è

$$p_i^a(x) = \frac{\delta I}{\delta \dot{A}_a^i(x)} = -\frac{1}{G} \tilde{E}_i^a, \quad (5.71)$$

e quindi le parentesi di Poisson fondamentali della teoria sono date da

$$\left\{ A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y) \right\} = G \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x, y). \quad (5.72)$$

La versione spinoriale delle variabili di Ashtekar si ottiene introducendo le matrici di Pauli σ_i , $i = 1, 2, 3$, o, in modo equivalente, i generatori dell'algebra $su(2)$ $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^a(x) &= -i \tilde{E}_i^a(x) \sigma_i = 2 \tilde{E}_i^a(x) \tau_i, \\ A_a(x) &= -\frac{i}{2} A_a^i(x) \sigma_i = A_a^i(x) \tau_i. \end{aligned} \quad (5.73)$$

$A_a(x)$ ed $\tilde{E}^a(x)$ sono matrici²⁸ complesse 2×2 . Utilizzeremo gli indici $A, B \dots = 1, 2$ per lo spazio spinoriale su cui agiscono le matrici di Pauli. In questo modo i componenti dei campi gravitazionali sono $A_{aA}{}^B(x)$ e $\tilde{E}^a{}_{A}{}^B(x)$.

Si noti che i campi A ed \tilde{E} non “vivono” su una varietà *metrica*, ma sulla varietà Σ che, al livello delle presenti considerazioni, è *soltanto differenziabile* dato che, nello spirito del processo di quantizzazione, i concetti metrici devono essere definiti attraverso gli stessi campi A ed \tilde{E} . Questa circostanza impone una profonda modifica della costruenda teoria di campo rispetto alle teorie special-relativistiche: occorre ora incorporare la *nozione relazionale di localizzazione*²⁹ implicita nell'invarianza per *diffeomorfismi attivi* della relatività generale³⁰.

²⁸Per alleggerire la notazione tralasciamo l'*hat* operatoriale su $A_a(x)$ ed $\tilde{E}^a(x)$.

²⁹Si veda [Rovelli 1996].

³⁰L'invarianza per i *diffeomorfismi attivi* della teoria della relatività generale implica che gli eventi dello spazio-tempo, visti come punti di una 4-varietà differenziabile, siano tutti equivalenti e privi di un'“identità fisica”; identità che viene costituita solo in termini del campo metrico gravitazionale, che agisce come *campo individuante*.

Un esempio tipico delle difficoltà che si incontrano, se si cerca di applicare direttamente lo schema di quantizzazione ereditato dalle teorie di campo special-relativistiche in una situazione in cui manca una struttura metrica assoluta, consiste nella circostanza che la promozione dei campi a operatori su uno spazio di Hilbert non può avvenire mediante l'usuale decomposizione in frequenze positive e negative associate a operatori di costruzione e distruzione (si veda il cap. 3): se la metrica si può ottenere solo *a posteriori* dai valori di aspettazione di A ed \tilde{E} , viene a mancare infatti il tempo rispetto al quale si dovrebbero valutare le frequenze.

Si sceglie allora di quantizzare delle osservabili diverse dagli operatori di campo, legate al *trasporto parallelo* (*olonomia*) sulla rappresentazione fondamentale dell'algebra: data una curva *analitica* $\alpha(\tau)$ in Σ , il *propagatore parallelo* U_α di A_a lungo $\alpha(\tau)$ è definito dall'equazione

$$\frac{d}{d\tau}U_\alpha(\tau, \tau_0) + \frac{d\alpha^a(\tau)}{d\tau}A_a(\alpha(\tau))U_\alpha(\tau, \tau_0) = 0, \quad (5.74)$$

con la condizione al contorno $U_\alpha(\tau_0, \tau_0)_A^B = \delta_A^B$. La soluzione formale è

$$U_\alpha(\tau, \tau_0) = \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \dot{\alpha}^a A_a(\alpha(\tau)) \right\}, \quad (5.75)$$

dove \mathcal{P} indica il *path-ordering* dell'esponenziale. Le osservabili che si quantizzano sono date dai *loops di Wilson*, cioè dalle tracce delle olonomie di A_a lungo curve *chiuse* α analitiche a tratti,

$$\mathcal{T}[\alpha] = -\text{tr}[U_\alpha], \quad (5.76)$$

e dalle *loop variables* di ordine superiore, ottenute inserendo l'elemento \tilde{E}^a dell'algebra in n punti (s_1, \dots, s_n) di α :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{a_1 \dots a_n}[\alpha](s_1, \dots, s_n) &= \\ &= -\text{tr}[U_\alpha(s_1, s_n)\tilde{E}^{a_n}(s_n)U_\alpha(s_n, s_{n-1}) \dots U_\alpha(s_2, s_1)\tilde{E}^{a_1}(s_1)]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Queste variabili “coordinatizzano” lo spazio delle fasi e hanno un'algebra di Poisson (vedi 3.1.3) chiusa, che per le *loop variables* di ordine più basso è data da

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}[\alpha], \mathcal{T}[\beta] \right\} &= 0, \\ \left\{ \mathcal{T}^a[\alpha], \mathcal{T}[\beta] \right\} &= -(G/2)\Delta^a[\beta, s] \left(\mathcal{T}[\alpha \#_s \beta] - \mathcal{T}[\alpha \#_s \beta^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (5.78)$$

dove

$$\Delta^a[\beta, s] = \int_{\beta} d\tau \dot{\beta}^a(\tau) \delta^3(\beta(\tau) - s), \quad (5.79)$$

e la parentesi $\mathcal{T}[\alpha \#_s \beta] - \mathcal{T}[\alpha \#_s \beta^{-1}]$ corrisponde all'operazione di *grasp* (fig. 5.1): per *loops* α e β che si intersecano in s , $\alpha \#_s \beta$ rappresenta il *loop* ottenuto percorrendo α fino a s , passando a β nel suo senso naturale di percorrenza, e ritornando infine ad α per chiudere il cammino; $\alpha \#_s \beta^{-1}$ identifica invece il *loop* ottenuto in modo analogo, ma percorrendo β in senso inverso.

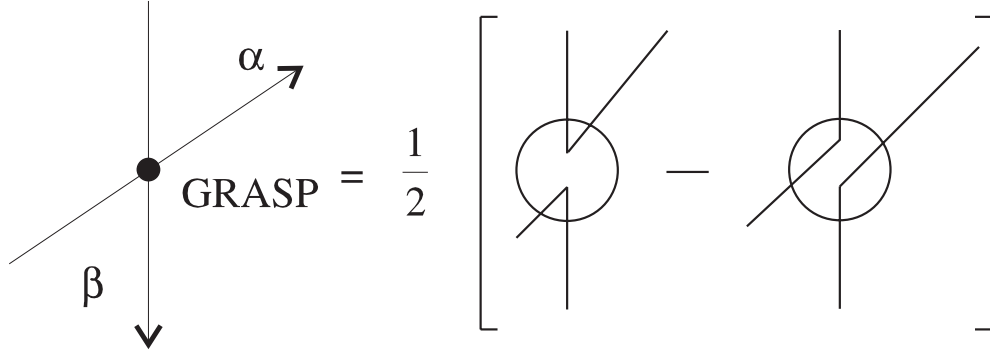


Figura 5.1: L'operazione di “grasp” sull'intersezione s tra due grafi α e β

5.5.2 Loop representation

Una rappresentazione della *loop algebra* può essere costruita a partire dallo spazio delle combinazioni lineari finite di *multiloops*, ovvero di prodotti *formali* di *loops*:

$$\Phi = c_0 + \sum_i c_i [\alpha_i] + \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} [\alpha_{i_1}] [\alpha_{i_2}] + \dots; \quad (5.80)$$

Lo spazio degli stati \mathcal{V} della *loop representation* è dato dall'insieme delle classi di equivalenza dei Φ sotto la *relazione di equivalenza di Mandelstam*:

$$\Phi \sim \Psi \text{ se } \mathcal{T}[\Phi] = \mathcal{T}[\Psi], \quad (5.81)$$

dove la forma delle *loop observables* su un *multiloop* è semplicemente

$$\mathcal{T}[\Phi] = c_0 + \sum_i c_i \mathcal{T}[\alpha_i] + \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} \mathcal{T}[\alpha_{i_1}] \mathcal{T}[\alpha_{i_2}] + \dots, \quad (5.82)$$

e l'uguaglianza tra *Wilson loops* va intesa nel senso di uguaglianza *per tutte* le connessioni lisce A_a su Σ . Il passo successivo consiste nel definire l'azione degli operatori lineari su \mathcal{V} corrispondenti alle osservabili di *loop*: l'operatore $\hat{\mathcal{T}}[\alpha]$ agisce semplicemente moltiplicando a destra ogni *multiloop* per $[\alpha]$ (per motivi “storici”, gli operatori di *loop* si applicano *da destra* ai “bra” di \mathcal{V}),

$$\begin{aligned} \left\langle c_0 + \sum_i c_i [\alpha_i] + \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} [\alpha_{i_1}] [\alpha_{i_2}] + \dots \right| \hat{\mathcal{T}}[\alpha] = \\ = \left\langle c_0 + \sum_i c_i [\alpha_i] [\alpha] + \sum_{i_1, i_2} c_{i_1 i_2} [\alpha_{i_1}] [\alpha_{i_2}] [\alpha] + \dots \right|. \end{aligned} \quad (5.83)$$

L'azione dell'operatore $\hat{\mathcal{T}}^a[\alpha](s)$ su uno stato costituito da un singolo *loop* è data da

$$\langle [\beta] | \hat{\mathcal{T}}^a[\alpha](s) = -\frac{i l_0^2}{2} \Delta^a[\beta, s] \left(\langle [\alpha \#_s \beta] | - \langle [\alpha \#_s \beta^{-1}] | \right), \quad (5.84)$$

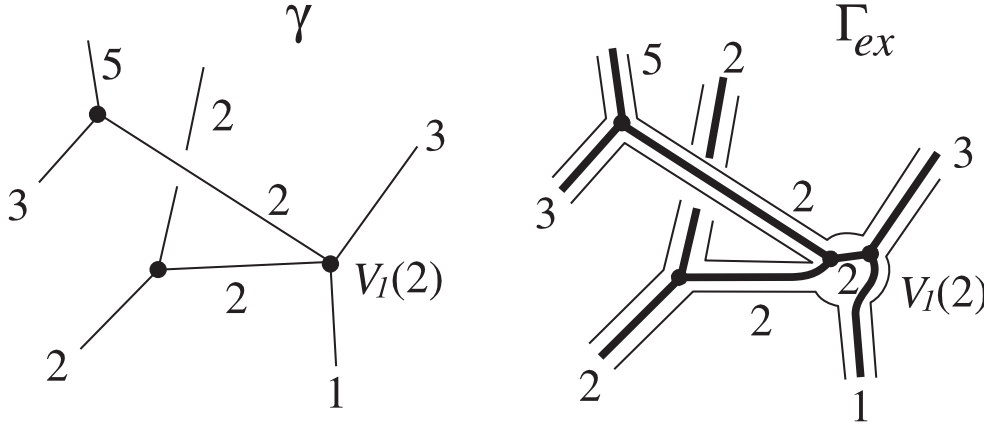


Figura 5.2: Un esempio di *spin network state* e della sua rappresentazione planare

dove abbiamo introdotto la lunghezza elementare $l_0^2 = \hbar G = 16\pi l_P^2$. Dato che $\hat{T}^a[\alpha](s)$ è un operatore di derivazione, la definizione si estende a tutto \mathcal{V} per linearità e per mezzo della regola di Leibniz. I due operatori lineari $\hat{T}[\alpha]$ e $\hat{T}^a[\alpha](s)$ commutano con le relazioni di Mandelstam e sono pertanto ben definiti su \mathcal{V} .

Ogni elemento $\Phi \in \mathcal{V}$ si può rappresentare nel modo seguente: prima di tutto, si considera il suo grafo γ , cioè l'unione in Σ dell'immagine di tutti i suoi *loops*. I punti in cui γ non è una sottovarietà di dimensione 1 di Σ (cioè sostanzialmente le intersezioni tra i *loops*) si dicono *vertici*; e le parti di *loop* comprese tra due vertici sono invece i *lati* del grafo. La *valenza* di un vertice è data dal numero di lati che vi si incontrano.

Il *grafo planare esteso* Γ_{ex} di Φ è per definizione la superficie bidimensionale ottenuta “dando uno spessore” ad ogni lato di γ . Chiaramente, Γ_{ex} sarà topologicamente non banale. A questo punto tutti i componenti del *multiloop* possono essere rappresentati dal loro disegno su Γ_{ex} (*tangle*). Le proprietà che i *tangles* ereditano dalle classi di equivalenza dei Φ permettono di utilizzare la *tangle-theoretic recoupling theory*³¹ per dimostrare che i *tangles* ammettono una base negli *spin networks* che vivono su Γ_{ex} [De Pietri e Rovelli 1996].

Uno *spin network* è dato dalla somma dei *tangles* corrispondenti ad un *grafo* trivalente con una colorazione³² “compatibile”, dove si è sostituito a ogni lato di colore p la somma antisimmetrica completa di p linee parallele, e si sono connesse in ogni vertice tutte le linee entranti nell'unico modo planare possibile. Quindi uno *stato di spin network* $\langle s | = (\gamma, \Gamma_{ex}, S)$, è definito come quell'elemento di \mathcal{V} determinato da γ , il suo grafico planare esteso Γ_{ex} , ed uno *spin-network* S su Γ_{ex} . Gli stati di *spin network* risultano pertanto caratterizzati da un *grafo* γ , dai numeri p_e che rappresentano quanti *loops* sono presenti in ogni lato di γ ,

³¹Si veda ad es. [Kauffman 1994]

³²A ogni lato di un grafo si può dare una “colorazione” associandovi un intero positivo p ; la colorazione si dice “compatibile” in un vertice se il colore di ogni lato entrante è minore della somma degli altri due (*condizione di Clebsch-Gordon*) e se la somma dei tre colori è pari.

e dal loro riaccoppiamento (nei termini di vertici virtuali³³) in ogni vertice di γ (vedi figura 5.2).

Su \mathcal{V} è possibile definire un prodotto scalare³⁴; infine, è necessario fattorizzare lo spazio di Hilbert così ottenuto in classi di stati equivalenti sotto i diffeomorfismi di Σ . Questa operazione si effettua con la tecnica della “media di gruppo”³⁵. Lo spazio di Hilbert “fisico” \mathbb{H}_{ph} così fattorizzato ha una base naturale negli *s-knots*, cioè nelle classi di equivalenza degli *spin networks* sotto diffeomorfismi. Un *s-knot* è caratterizzato da un “grafo astratto” in cui contano soltanto la disposizione *topologica* e la colorazione dei segmenti.

5.5.3 L'operatore d'area

In una teoria quantistica della gravità la metrica è dunque un operatore di campo quantistico, e conseguentemente l'area di una superficie $\Gamma \subset \Sigma$ deve essere descrivibile³⁶ in termini di un operatore quantistico $\hat{A}[\Gamma]$. Classicamente, l'area della superficie Γ può essere scritta come

$$A[\Gamma] = \int_{\Gamma} d^2x \sqrt{\det h^{\Gamma}} = \int_{\Gamma} \sqrt{n_a n_b \tilde{E}^{ai} \tilde{E}_i^b}, \quad (5.85)$$

dove h^{Γ} è il *pull-back* su Γ della metrica h_{ab} e n_a è l'1-forma normale a Γ . Dato che contiene prodotti di operatori, l'operatore quantistico $\hat{A}[\Gamma]$ che corrisponde ad $A[\Gamma]$ deve essere definito attraverso una procedura di regolarizzazione³⁷. Si trova che gli *spin networks* sono tutti autostati dell'operatore area, con autovalori completamente determinati dalle intersezioni dello *spin network* $\langle s |$ con Γ . Queste possono essere di due tipi: (a) un lato attraversa Γ ; (b) un vertice giace su Γ (fig. 5.3). Si ha allora che

$$\langle s | \hat{A}[\Gamma] = \left(\frac{l_0^2}{2} \sum_i \sqrt{\frac{1}{2} p_i^u (p_i^u + 2) + \frac{1}{2} p_i^d (p_i^d + 2) - \frac{1}{4} p_i^t (p_i^t + 2)} \right) \langle s |, \quad (5.86)$$

dove p^u e p^d denotano la colorazione dei lati che escono rispettivamente “sopra” e “sotto” la superficie, e p^t indica la colorazione dei lati *tangenti*. Nel caso ci siano soltanto intersezioni del tipo (a), si ottiene la formula più semplice

$$\langle s | \hat{A}[\Gamma] = \langle \Phi | \left(\frac{l_0^2}{2} \sum_i \sqrt{p_i (p_i + 2)} \right) \langle s |. \quad (5.87)$$

³³Si introduce il termine *virtuale* per distinguere i vertici trivalenti dello spin-network su Γ_{ex} dai vertici reali del grafo γ . Questa distinzione è importante perchè un vertice n -valente reale di γ è caratterizzato da $(n-2)$ -vertici trivalenti *virtuali* dello spin-network S su Γ_{ex}

³⁴Si vedano ad es. [Ashtekar et al. 1995, De Pietri 1997]

³⁵Si veda ancora [Ashtekar et al. 1995].

³⁶Per l'invarianza per *diffeomorfismi attivi* che la teoria quantistica eredita dalla relatività generale, è chiaro che la domanda “qual è l'area di Γ ?” non ha alcun senso a meno che Γ non sia *identificata*, in qualche modo, dalla “geometria quantistica” dello spazio-tempo oppure dal valore dei campi di materia presenti su Σ .

³⁷[Ashtekar e Lewandowski 1997].

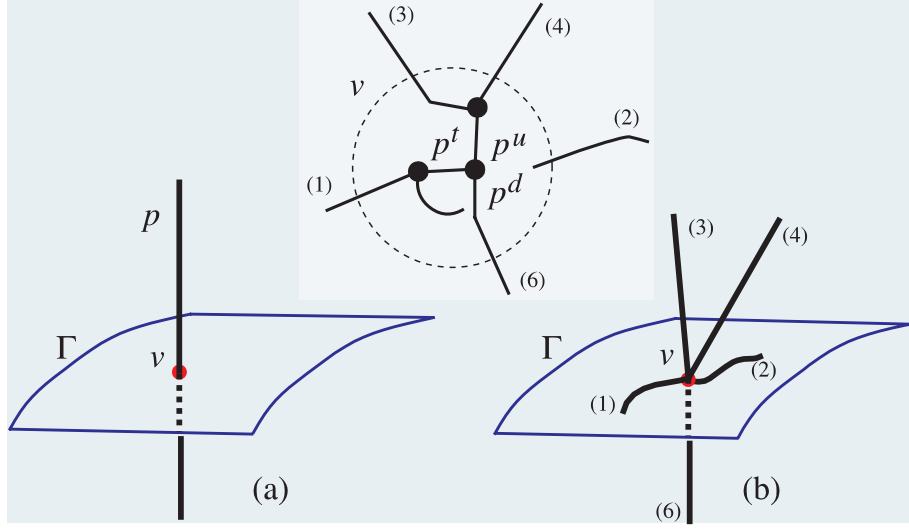


Figura 5.3: Intersezioni possibili tra uno *spin network* $\langle s |$ e una superficie bidimensionale Γ

- (a) un lato attraversa Γ ;
- (b) un vertice di $\langle s |$ giace su Γ : in questo caso (come mostrato nel riquadro) l'espansione del vertice in vertici virtuali trivalenti va fatta separando i lati che giacciono "sopra", "sotto" o tangenzialmente a Γ .

5.5.4 L'area dell'orizzonte degli eventi

Arriviamo finalmente al lavoro preliminare di [Rovelli 1996] sulla derivazione della formula di Bekenstein-Hawking in *loop quantum gravity*. Come sappiamo, l'interpretazione statistica dell'entropia termodinamica avviene con l'individuazione di un *ensemble* statistico, ovvero di un insieme di stati microscopici attraverso i quali il sistema si muove in modo ergodico, e che sono vincolati da una condizione al contorno (ad esempio un *boundary* adiabatico, oppure mantenuto a temperatura costante) che ne determina la distribuzione statistica.

Per i buchi neri, ci sono forti indicazioni che gli stati "termodinamici" responsabili dell'entropia vadano ricercati negli *stati dell'orizzonte degli eventi*: in questa direzione depongono i risultati ottenuti in gravità 2 + 1-dimensionale, oltre alla considerazione del fatto che l'unica parte della regione di buco nero che può effettivamente avere un'interazione causale con l'esterno è proprio l'orizzonte.

Fisicamente, questo equivale a dire che la sorgente dell'entropia termodinamica del buco nero sta nelle fluttuazioni microscopiche di origine quantistica che il suo orizzonte subisce interagendo con lo spazio esterno; questo non sarà mai perfettamente stazionario come prevedono le soluzioni classiche di Kerr-Newman. Come abbiamo visto in sez. 4.3.1, la grandezza tipica che governa lo scambio di energia tra un buco nero e la regione esterna è la sua *massa*

irriducibile

$$M_{\text{ir}} = \sqrt{\frac{A}{16\pi G_{\text{N}}^2}}. \quad (5.88)$$

Per il nostro buco nero, le naturali condizioni al contorno *microcanoniche* corrispondono a fissare M_{ir} , e dunque l'area dell'orizzonte degli eventi. L'obiettivo sarebbe pertanto quello di contare tutti gli stati quantistici che corrispondono classicamente a diversi spazio-tempo di buco nero caratterizzati da un orizzonte di area A . Purtroppo, i mezzi tecnici attualmente disponibili non permettono nemmeno di dare un senso definito all'affermazione che un dato stato quantistico *rappresenta corrispondenzialmente* un buco nero classico. Supponiamo tuttavia di essere riusciti a identificare una classe di "stati di buco nero", ciascuno dei quali determina completamente tutta la geometria dello spazio-tempo, e quindi anche l'orizzonte h . In *loop quantum gravity*, la condizione che h abbia un'area A fissata induce un vincolo sulla porzione di *spin network* che interseca le sezioni di h in Σ .

Questo ci permette di dare una prima grossolana valutazione di S_{bh} contando tutti i modi possibili di ottenere un'area A per una *generica* superficie bidimensionale $\Gamma \in \Sigma$. In questo modo, tuttavia, ci aspettiamo di sovrastimare grandemente il numero dei microstati, perchè non siamo in grado di imporre la condizione che lo stato rappresenti nel suo complesso un buco nero, né tantomeno che Γ abbia in qualche senso la geometria di un orizzonte degli eventi.

Se procediamo direttamente in questo modo e contiamo gli *spin networks* che intersecano la superficie in entrambi i modi rappresentati in fig. 5.3, le intersezioni di tipo (b) rendono infinito il numero di stati accettabili. È necessario pertanto ridursi alle sole intersezioni (a) (alla fine della sezione ritorneremo su questo punto fornendo un argomento che rende plausibile questa ipotesi).

Il problema consiste allora nell'individuare il numero N_M di diverse n -uple ordinate di interi (p_1, \dots, p_n) (con n arbitrario) tali che

$$8\pi \sum_i \sqrt{p_i(p_i + 2)} = A = 8\pi M. \quad (5.89)$$

(nelle unità adimensionali di Planck, dove M è un numero molto grande.) Un limite superiore N_M^+ per N_M si può ottenere approssimando sistematicamente le radici $\sqrt{p_i(p_i + 2)}$ con p_i ; dobbiamo allora trovare il numero di n -uple di interi tali che

$$\sum_i p_i = M. \quad (5.90)$$

Notiamo che se (p_1, \dots, p_n) è una partizione di M , allora $(p_1, \dots, p_n, 1)$ e $(p_1, \dots, p_n + 1)$ sono partizioni di $M + 1$. Si può pertanto scrivere la relazione di ricorrenza

$$N_{M+1}^+ = 2N_M^+ \Rightarrow N_M^+ = 2^{M-1}. \quad (5.91)$$

Un limite inferiore N_M^- si può invece trovare con l'approssimazione

$$\sqrt{p_i(p_i + 2)} \cong p_i + 1; \quad (5.92)$$

ora, il numero di n -uple ordinate che soddisfano

$$\sum_i (p_i + 1) = M, \quad (5.93)$$

coincide con il numero di diverse partizioni di M in interi ≥ 2 . In modo analogo a quanto abbiamo appena fatto, notiamo che se (p_1, \dots, p_n) è una tale partizione di M e (q_1, \dots, q_m) lo è di $M - 1$, allora $(p_1, \dots, p_n + 1)$ e (q_1, \dots, q_m) lo sono entrambe di $M + 1$. Si ha quindi

$$N_{M+1}^- = N_M^- + N_{M-1}^-; \quad (5.94)$$

questa stessa relazione di ricorrenza definisce la successione dei numeri di Fibonacci a_M ; come è noto, il rapporto a_{M+1}/a_M tende alla *sezione aurea* $(1 + \sqrt{5})/2$. Combinando questa informazione con la stima precedente, concludiamo che

$$\log N_M = dM = \frac{d}{8\pi} A, \quad (5.95)$$

dove d è un numero compreso tra 0.019 e 0.027, da confrontare con il fattore 0.25 della formula di Bekenstein-Hawking.

Come abbiamo detto, il risultato è preliminare. Innanzitutto abbiamo costruito un *ensemble* statistico per i soli stati dell'orizzonte fissando la geometria esterna dello spazio-tempo, mentre si potrebbe pensare di costruire (come in sez. 5.3.3) una meccanica statistica che comprenda esplicitamente gli stati della regione esterna. In [Krasnov 1996] si cerca di compiere un primo passo in questa direzione.

Sarebbe infine desiderabile dare una caratterizzazione diretta della superficie Γ come orizzonte degli eventi. Una possibile via di soluzione è la seguente. Ogni stato $|w\rangle$ che rappresenta un buco nero fisico può essere espanso sulla base degli *s-knots*. Supponiamo di poter trovare delle osservabili \hat{O}_i che rappresentino misurazioni effettuate all'infinito futuro nullo \mathcal{I}^+ : per ogni *s-knot* $|S\rangle$ si definirebbero allora come “interni” tutti i lati il cui colore non influisce sul valore di aspettazione delle \hat{O}_i . Una definizione simile si potrebbe dare anche per i vertici.

Orbene, l'orizzonte degli eventi potrebbe essere definito come l'insieme dei lati *esterni* (cioè non interni) collegati ad *almeno a un vertice o lato interno*. Si potrebbe allora pensare che questi lati identifichino l'orizzonte degli eventi come la superficie classica in Σ che li interseca tutti. Questo, tra l'altro, rimuoverebbe il problema delle intersezioni di tipo B, che sarebbero semplicemente assenti.

Per il momento non è però possibile proseguire su questa via perché, oltre a non essere affatto chiaro quando uno stato possa rappresentare un buco nero, non si conosce alcun modo di definire le osservabili \hat{O}_i .

Appendice A

Elementi di geometria differenziale: campi di Killing e congruenze di geodetiche

Presentiamo qui alcuni teoremi e definizioni particolarmente importanti per la formulazione e dimostrazione di alcuni dei risultati presentati in questa tesi. Dato che questo non vuole essere un trattato di geometria differenziale applicata alla relatività generale, nemmeno *in quarto*, rimandiamo il lettore agli ottimi testi disponibili [Anderson 1967, Misner et al. 1973, Wald 1984a, Baez 1994].

A.1 Derivata di Lie

La definizione di un'operazione *geometrica* di derivazione per un campo tensoriale definito su una varietà differenziabile \mathcal{M} implica la specificazione arbitraria del modo in cui i vettori devono essere trasportati attraverso la varietà (oppure, equivalentemente, di come gli spazi tangenti della varietà in punti diversi devono essere posti in corrispondenza). Questo problema può essere risolto in generale specificando una *connessione*.

C'è tuttavia un modo di definire la derivata di un campo tensoriale lungo le traiettorie di un gruppo a un parametro ϕ_t di diffeomorfismi della varietà senza far ricorso al trasporto parallelo. Infatti per ogni diffeomorfismo ϕ_t è definito in modo univoco (attraverso operazioni di *push-forward* e *pull-back*¹)

¹*Push-forward* di un campo vettoriale u^a attraverso il diffeomorfismo ϕ : per ogni funzione $f(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, è definito un campo vettoriale $\phi^* u^a$ la cui azione è data da

$$(\phi^* u^a) f(x) = u^a f(\phi(x)). \quad (\text{A.1})$$

Dalla nozione di *push-forward* per i vettori è possibile derivare la trasformazione corrispondente (di *pull-back*) per i covettori: per ogni campo vettoriale u^a ,

$$(\phi_* v_a) u^a = v_a (\phi^* u^a); \quad (\text{A.2})$$

procedendo ricorsivamente si può estendere l'operazione a tensori con indici covarianti e controvarianti multipli.

il tensore *carried-along* $\phi_t^* T^{a_1, a_k}_{b_1, b_l}$, che rappresenta T “spostato” da ϕ_t : se in particolare $\phi_t T = T$, ϕ_t è una *trasformazione di simmetria* per T .

La *derivata di Lie* $\mathcal{L}_{v^a} T$ (dove v^a è il campo vettoriale che *genera* ϕ_t) nasce dal confronto di T con il suo tensore *carried-along* lungo le traiettorie di ϕ_t :

$$\mathcal{L}_{v^a} T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t}^* T - T}{t}; \quad (\text{A.3})$$

quest’equazione definisce effettivamente un’operazione lineare che soddisfa la legge del prodotto di Leibniz (dunque, una *derivata*). Nella definizione abbiamo preso il *carried-along* per il parametro $-t$ perché vogliamo valutare la variazione del tensore *nella direzione delle traiettorie dei diffeomorfismi*. L’azione di \mathcal{L}_{v^a} su un campo vettoriale u^a è data da

$$\mathcal{L}_{v^a} u^b = [v, u]^b; \quad (\text{A.4})$$

l’azione di \mathcal{L}_{v^a} su una 1-forma può essere ricavata da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v^a} (w_b u^b) &= w_b \mathcal{L}_{v^a} u^b + u^b \mathcal{L}_{v^a} w_b = w_b (v^c \nabla_c u^b - u^c \nabla_c v^b) + u^b \mathcal{L}_{v^a} w_b = \\ &= v^a (w_b u^b) = w_b v^c \nabla_c u^b + u^b v^c \nabla_c w_b, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e quindi

$$\mathcal{L}_{v^a} w_b = v^a \nabla_a w_b + w_b \nabla_a v^b; \quad (\text{A.6})$$

in generale,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v^c} T^{a_1, a_k}_{b_1, b_l} &= \\ &= v^c \nabla_c T^{a_1, a_k}_{b_1, b_l} - \sum_i T^{a_1, \dots, c, \dots, a_k}_{b_1, b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_j T^{a_1, a_k}_{b_1, \dots, c, \dots, b_l} \nabla_{b_j} v^c. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Campi di Killing

Una *isometria* è un diffeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tale da *lasciare invariata la metrica*:

$$\phi^* g_{ab} = g_{ab}. \quad (\text{A.8})$$

Un campo vettoriale ξ^c che genera un gruppo a un parametro di isometrie ϕ_t è detto *campo di Killing*: è ovvio che la derivata di Lie della metrica lungo ξ^c dovrà annullarsi; pertanto, ξ^c è caratterizzato dall’*equazione di Killing*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi^c} g_{ab} &= \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c = \\ &= \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

dove ∇_c è la derivata covariante compatibile con la metrica ($\nabla_c g_{ab} = 0$). I campi di Killing ξ^a godono di alcune proprietà interessanti:

1. se u^a è il vettore tangente di una geodetica γ , allora il valore di $\xi_a u^a = g_{ab} \xi^a u^b$ è costante lungo tutta la geodetica:

$$\begin{aligned} u^b \nabla_b (\xi_a u^a) &= u^b (u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a \nabla_b u^a) = \\ &= \frac{1}{2} u^a u^b (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) + \xi_a (u^b \nabla_b u^a) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

dove il primo addendo dell'ultima riga è nullo per l'equazione di Killing, il secondo per l'equazione delle geodetiche;

2. con un calcolo analogo si può vedere che la derivata di Lie di $u^b \nabla_b u^a$ si annulla, e pertanto le isometrie infinitesime (e quindi tutte le isometrie) portano geodetiche in geodetiche.
3. applicando il tensore di Riemann a un campo di Killing e utilizzando l'equazione di Killing, si ottiene

$$R_{abc}{}^d \xi_d = \nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = \nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a; \quad (\text{A.11})$$

il nome degli indici non ha ovviamente alcuna importanza: l'equazione sarebbe stata ugualmente vera se l'avessimo scritta per gli indici (bca) o (cab) invece che (abc) ; consideriamo allora l'equazione ottenuta sommando termine a termine le equazioni “ (abc) ” e “ (bca) ” e sottraendo “ (cab) ”:

$$\nabla_b \nabla_c \xi_a = \frac{1}{2} (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d) \xi_d = -R_{cab}{}^d \xi_d; \quad (\text{A.12})$$

dove abbiamo sfruttato le proprietà di simmetria del tensore di Riemann. Da questa equazione segue che, su varietà differenziali connesse, ogni campo di Killing ξ^a è completamente determinato dal suo valore insieme a quello della sua derivata $\nabla_a \xi_b$ in un qualsiasi punto p della varietà. In particolare, allora, si trova che

4. se ξ^a e $\nabla_a \xi_b$ si annullano in un punto di una varietà connessa, allora sono nulli dappertutto;
5. su una varietà connessa di dimensione d ci sono al più $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ campi di Killing linearmente indipendenti (questa infatti è la dimensione dello spazio dei dati iniziali ξ^a e $\nabla_a \xi_b$ in un punto, considerato che $\nabla_a \xi_b$ è un tensore antisimmetrico per l'equazione di Killing).

A.3 Congruenze di geodetiche

Le geodetiche di una varietà metrica (\mathcal{M}, g_{ab}) sono le curve il cui vettore tangente soddisfa l'equazione del trasporto parallelo

$$u^a \nabla_a u^b = 0; \quad (\text{A.13})$$

scrivendo le geodetiche nella forma parametrica $x^\mu(\tau)$ in una base di coordinate, si ottiene

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.14})$$

dove i $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ sono i *simboli di Christoffel*. Dato un punto p e un vettore tangente t^a in p , esiste ed è unica (a meno di una *riparametrizzazione affine* $\tau' = c\tau + d$) la geodetica passante per p con tangente t^a .

Consideriamo ora una famiglia a un parametro $\gamma_s(\tau)$ di geodetiche *time-like*; in ogni punto del manifold 2-dimensionale $\{\gamma_s(\tau)\}$ è definito il *vettore di deviazione* $x^a \equiv (\partial_s)^a$; variando la parametrizzazione delle singole geodetiche, si può sempre fare in modo che x^a sia ortogonale a $u^a \equiv (\partial_\tau)^a$, e che $\partial_s(u^a u_a) = 0$. Allora x^a e u^a commutano:

$$[u, x]^a = u^b \nabla_b x^a - x^b \nabla_b u^a = 0. \quad (\text{A.15})$$

Lungo ogni geodetica, $v^a = t^b \nabla_b x^a$ descrive come varia il vettore x^a che permette di spostarsi su una geodetica infinitesimalmente vicina; $\dot{v}^a = t^b \nabla_b v^a$ è allora l'*accelerazione relativa di geodetiche infinitesimalmente vicine della stessa famiglia*. Per \dot{v} si ricava l'*equazione di deviazione geodetica*

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u^c \nabla_c (u^b \nabla_b x^a) = \\ &= u^c \nabla_c (x^b \nabla_b u^a) = \\ &= u^c \nabla_c x^b (\nabla_b u^a) + u^c x^b \nabla_c \nabla_b u^a = \\ &= (x^c \nabla_c u^b) (\nabla_b u^a) + u^c x^b \nabla_b \nabla_c u^a - R_{cbd}{}^a u^c x^b u^d = \\ &= x^c \nabla_c (u^b \nabla_b u^a) - R_{cbd}{}^a u^c x^b u^d = \\ &= -R_{cbd}{}^a x^b u^c u^d, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dove abbiamo sfruttato l'eq. (A.15), la definizione di tensore di Riemann, e l'eq. (A.13).

Una famiglia di geodetiche è una *congruenza* per $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ se per ogni $p \in \mathcal{O}$ ne passa esattamente una. I vettori tangenti u^a delle geodetiche formano allora un campo vettoriale continuo. Possiamo considerare una sottofamiglia a un parametro con vettore di deviazione x^a : dato che x^a e u^a commutano,

$$u^b \nabla_b x^a = x^b \nabla_b u^a = x^b B^a{}_b. \quad (\text{A.17})$$

Dunque $B_{ab} = \nabla_b u^a$ misura quanto x^a si discosta dall'essere trasportato parallelamente lungo u^a , ovvero il modo in cui le geodetiche infinitesimalmente vicine della congruenza tendono ad avvicinarsi o allontanarsi. Per questo motivo B_{ab} è definito naturalmente nel sottospazio ortogonale alla congruenza di geodetiche: l'operatore di proiezione $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ ortogonale a u^a ha azione idempotente su B_{ab} :

$$h_a{}^b B_{bc} = B_{ac}. \quad (\text{A.18})$$

Dal punto di vista geometrico è utile scomporre il tensore B_{ab} nella sua traccia, nella parte simmetrica *traceless* e nella parte antisimmetrica; si definiscono allora

$$\text{espansione : } \theta = B^{ab} h_{ab}, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{shear : } \sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{twist : } \omega_{ab} = B_{[ab]}; \quad (\text{A.21})$$

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta(g_{ab} + u_a u_b) + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \quad (\text{A.22})$$

Lungo una qualsiasi geodetica, θ rappresenta l'*espansione media* delle geodetiche infinitesimalmente vicine; ω_{ab} misura la loro rotazione; σ_{ab} descrive invece la distorsioni di sfere nello spazio tangente in ellissoidi. È semplice valutare la velocità di cambiamento di B_{ab} lungo le geodetiche:

$$u^c \nabla_c B_{ab} = -B^c{}_b B_{ac} - R_{bca}{}^d u^c u_d, \quad (\text{A.23})$$

dove abbiamo usato

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_b(u^c \nabla_c u_a) = \\ &= (\nabla_b u^c)(\nabla_c u_a) + u^c \nabla_b \nabla_c u_a = \\ &= (\nabla_b u^c)(\nabla_c u_a) + u^c \nabla_c \nabla_b u_a + u^c R_{bca}{}^d u_d. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Prendendo la traccia dell'eq. (A.23) si ottiene l'*equazione di Raychauduri* per la variazione di θ (su geodetiche *time-like*):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= g^{ab} u^c \nabla_c B_{ab} = u^c \nabla_c \theta = \\ &= -g^{ab} B^c{}_b B_{ac} - g^{ab} R_{acb}{}^d u^c u_d = \\ &= -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}u^c u^d. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Se invece di geodetiche *time-like* avessimo considerato geodetiche nulle, le corrispondenti grandezze caratteristiche sarebbero state definite su una *superficie bidimensionale*; una direzione nulla, infatti, è individuata univocamente da un sottospazio ortogonale bidimensionale *space-like*, grazie all'ulteriore vincolo di giacere su un cono di luce. Possiamo pertanto procedere in modo analogo a prima, tenendo presente che h_{ab} proietta su un sottospazio bidimensionale, e che lo *shear* è definito come

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta h_{ab}; \quad (\text{A.26})$$

l'*equazione di Raychauduri per geodetiche nulle* è pertanto

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}u^c u^d. \quad (\text{A.27})$$

Appendice B

Causalità e struttura conforme

Quando si vuole passare dall'analisi delle proprietà *locali* di una soluzione delle equazioni di Einstein (che si possono determinare esaminando la metrica, i tensori di curvatura, e così via) allo studio delle sue proprietà *globali*, viene spontaneo chiedersi *come la soluzione si comporti all'infinito*. La risposta però non può venire senza prima aver attribuito un significato preciso al concetto di “infinito”: visto infatti che in una teoria invariante per diffeomorfismi come la relatività generale le coordinate non hanno alcun senso fisico, i loro limiti non possono individuare l'infinito.

È necessaria invece un'indagine sulle caratteristiche *geometriche* dello spazio-tempo: un modo è quello di analizzare il comportamento di curve *time-like*, *space-like* o *null-like inestendibili*, tali cioè che non esista nessuna curva “più lunga” che le comprende interamente. Almeno alcune di queste curve saranno dirette “verso l'infinito”!

B.1 Punti all'infinito e punti singolari

Da questo punto di vista assume particolare importanza l'analisi della *struttura causale* dello spazio-tempo: si identifica il concetto di “infinito” con quello di *causal boundary*. Nella *frontiera causale* confluiscono però insieme ai *punti all'infinito* anche i *punti singolari*: in relatività generale uno spazio-tempo si dice *singolare* quando ammette delle curve causali inestendibili terminano con un valore finito del loro parametro affine. Il concetto di singolarità è quindi, in qualche modo, assimilabile a quello di *punto mancante* (questa è una peculiarità della teoria: i punti in cui il campo gravitazionale non è definito non sono neanche definiti geometricamente, ma sono *fuori* dallo spazio-tempo!).

Tra la fine degli anni '60 e l'inizio degli anni '70 sono stati fatti diversi tentativi di definire nel modo più naturale ed efficace possibile la frontiera causale di uno spazio-tempo dato¹. Si voleva trovare una regola generale per individuare un insieme $\partial\mathcal{M}$ che rappresentasse insieme i punti non singolari e i punti “all'infinito” di \mathcal{M} . $\partial\mathcal{M}$ doveva poter essere determinato unicamente da misurazioni compiute in punti non singolari, ovvero dalla struttura dello

¹Si veda [Hawking ed Ellis 1973].

spazio-tempo (\mathcal{M}, g_{ab}) . Occorreva inoltre fornire una topologia e una struttura causale opportune all'insieme $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$.

Tra i lavori usciti in quegli anni particolare rilievo merita l'articolo di Geroch, Kronheimer e Penrose [Geroch et al. 1972, Hawking e Penrose 1996], dove si mostra come “incollare” a un generico spazio-tempo i punti dell'*infinito temporale futuro e passato*, definiti con considerazioni squisitamente causali. Esaminiamo in dettaglio il loro modello. In uno spazio-tempo *fortemente causale* esiste una corrispondenza biunivoca tra ogni punto p e il suo passato cronologico $I^-(p)$. Inoltre $I^-(p)$ gode per ogni punto p delle seguenti proprietà:

1. $I^-(p)$ è aperto;
2. $I^-(p)$ è un *insieme passato*, cioè $I^-(I^-(p)) \subset I^-(p)$;
3. $I^-(p)$ non è esprimibile come unione di due insiemi disgiunti con le proprietà 1 e 2.

Generalizzando, chiameremo IP (*insieme passato indecomponibile*) un insieme con le proprietà 1, 2 e 3. Tra tutti gli IP definiamo PIP (*propri*) gli insiemi A per i quali esiste un punto p tale che $A = I^-(p)$ e TIP (*terminali*) tutti gli altri. Si può dimostrare che un insieme A è un TIP se e solo se esiste una curva *timelike* γ inestendibile nel futuro tale che $A = I^-(\gamma)$.

A ogni TIP si può dunque immaginare di associare un osservatore in moto sulla worldline γ che lo genera; il moto può continuare per valori arbitrariamente grandi del tempo proprio, oppure arrestarsi entro un suo valore finito quando la worldline termina in una singolarità. In entrambi i casi è evidente che i TIP sono degli ottimi candidati a rappresentare i punti *ideali* dell'infinito futuro. I PIP, a loro volta, rappresenteranno i punti *reali* dello spazio-tempo, ovvero i punti effettivamente raggiungibili per valori finiti del tempo proprio di una worldline; la loro struttura geometrica sarà, naturalmente, specificata dalla metrica g_{ab} .

All'insieme $\hat{\mathcal{M}}$ di tutti gli IP rimangono da assegnare una struttura causale e una topologia che estendano quelle di \mathcal{M} . La causalità è introdotta su $\hat{\mathcal{M}}$ in modo naturale: ad esempio diremo che l'IP A sta nel passato causale di B se $A \subset B$. L'assegnazione di una topologia all'insieme degli IP è invece una questione più delicata; rimandiamo al lavoro originale per un approfondimento dell'argomento.

Un discorso del tutto analogo vale per gli IF, ossia gli *insiemi futuro indecomponibili*; questi si suddividono in PIF e in TIF. I primi sono ancora in corrispondenza biunivoca con \mathcal{M} ; i secondi rappresentano i punti *ideali* dell'infinito passato. La frontiera $\partial\mathcal{M}$ è data dall'unione dei TIP e dei TIF. Si noti come Geroch, Kronheimer e Penrose non facciano alcuna distinzione tra i punti singolari e i punti all'infinito: la curva o le curve inestendibili γ associate, ad esempio, a un TIP $A = I^-(\gamma)$ possono essere, indifferentemente, di lunghezza finita o infinita nel futuro e rappresentare quindi l'osservatore che termina la sua esistenza in una singolarità come quello che continua indefinitamente il suo viaggio. Questa indistinguibilità è dovuta al fatto che il modello è costruito unicamente sulla base della struttura causale dello spazio-tempo.

B.2 Trasformazioni conformi e diagrammi di Penrose

Come è noto, in relatività generale la geometria lo spazio-tempo è descritto da una varietà differenziale metrica. Due varietà metriche con la stessa struttura causale rappresentano spazio-tempo diversi ma, per quanto abbiamo detto finora, sono accomunate da una stessa struttura dei punti all'infinito. Ci si può allora chiedere qual è la più generale trasformazione della metrica g_{ab} di uno spazio-tempo che ne lascia inalterate le proprietà causali: occorre senz'altro che in ogni punto la nuova metrica \tilde{g}_{ab} delinea lo stesso cono di luce, per non cambiare la natura *time-like*, *light-like* o *space-like* dei vettori tangenti. La trasformazione che cerchiamo sarà perciò della forma $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, dove Ω è una funzione scalare strettamente positiva che riscalda la norma dei vettori tangenti, lasciando quindi nulli (*light-like*) i vettori a norma nulla. Una trasformazione di questo tipo si dice *conforme*.

Due varietà metriche (\mathcal{M}, g_{ab}) e $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{ab})$ si dicono pertanto *conformemente isometriche* se esistono un diffeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ e una funzione scalare non nulla Ω tale che $\phi^* g_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab}$, dove ϕ^* denota il *pull-along* dei tensori definiti sulla varietà (vedi nota 1 di app. A).

Nel caso di spazio-tempo a simmetria sferica risulta particolarmente utile considerarne le sezioni bidimensionali a coordinate angolari θ e φ fissate. Si ottiene allora una varietà metrica bidimensionale di segnatura $(-1, 1)$, accomunata allo spazio-tempo originario da alcune importanti caratteristiche, come l'eventuale presenza di orizzonti e, nella maggior parte dei casi, di singolarità. A questo punto, per mezzo di un'opportuna trasformazione conforme, è possibile restringere questa superficie, in generale di area infinita, a una di area finita, e quindi rappresentarla graficamente. La figura così ottenuta viene detta *diagramma di Penrose*, e rappresenta una varietà metricamente diversa, ma *causalmente identica* alla sezione originale.

B.3 Lo spazio di Minkowski

Come primo esempio, studieremo la struttura conforme dello spazio di Minkowski e ne costruiremo il diagramma di Penrose. Questo è un caso particolarmente importante poiché, come vedremo, sulla sua conformazione all'infinito viene modellata la definizione di *spazio asintoticamente piatto*. In coordinate sferiche la metrica g_{ab} è data da

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \quad (\text{B.1})$$

per ogni punto (t, r) con $-\infty < t < +\infty$, $0 < r < +\infty$ c'è una superficie sferica di area $4\pi r^2$ descritta da θ e ϕ . Trascuriamola e concentriamoci invece sulle coordinate t e r : ci si aspetta che l'infinito causale dello spazio di Minkowski si possa suddividere nelle seguenti regioni (fig. B.1):

$$\begin{aligned} i^+ &= \{t \rightarrow +\infty \text{ per } r \text{ fissato}\} && \text{futuro infinito } \textit{time-like}, \\ i^- &= \{t \rightarrow -\infty \text{ per } r \text{ fissato}\} && \text{passato infinito } \textit{time-like}, \end{aligned}$$

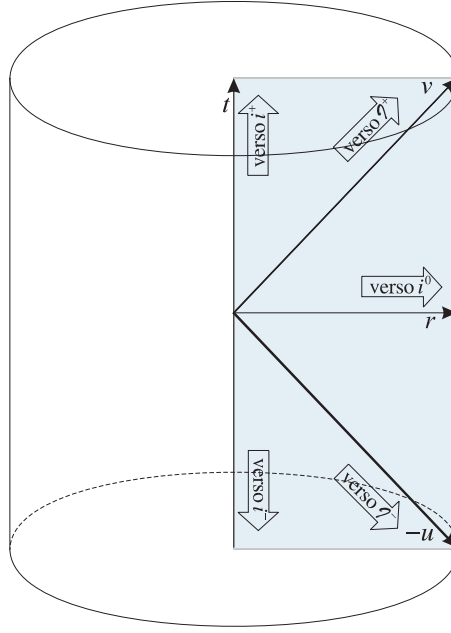


Figura B.1: Regioni asintotiche dello spazio-tempo di Minkowski

$$\begin{aligned}
 i^0 &= \{r \rightarrow +\infty \text{ per } t \text{ fissato}\} && \text{infinito } \textit{space-like}, \\
 \mathcal{I}^+ &= \{t + r \rightarrow +\infty \text{ per } t - r \text{ fissato}\} && \text{futuro infinito } \textit{null-like}, \\
 \mathcal{I}^- &= \{t - r \rightarrow -\infty \text{ per } t + r \text{ fissato}\} && \text{passato infinito } \textit{null-like}.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$u \equiv t - r$ e $v \equiv t + r$ vengono dette *coordinate nulle*², e ricoprono lo spazio-tempo di Minkowski con gli intervalli $-\infty < u, v < +\infty$, $v - u > 0$; la metrica prende la forma

$$ds^2 = -du dv. \tag{B.3}$$

Tutte le curve *time-like* inestendibili sono dirette nella regione i^+ e originano da i^- : tra queste sono comprese tutte le geodetiche *time-like* e dunque tutti gli osservatori; analogamente le curve *null-like* escono da \mathcal{I}^- per finire tutte in \mathcal{I}^+ . Per meglio identificare la natura topologica di queste regioni definiamo le nuove coordinate (η, ζ) con

$$\begin{cases} u \equiv t - r = \tan \frac{1}{2}(\eta - \zeta), \\ v \equiv t + r = \tan \frac{1}{2}(\eta + \zeta), \end{cases} \tag{B.4}$$

cosicch 

$$ds^2 = \Omega^2(\eta, \zeta)(-d\eta^2 + d\zeta^2), \tag{B.5}$$

dove

$$\Omega^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\eta + \zeta) \cos^2 \frac{1}{2}(\eta - \zeta)}. \tag{B.6}$$

²In quanto le curve $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ descrivono effettivamente geodetiche nulle.

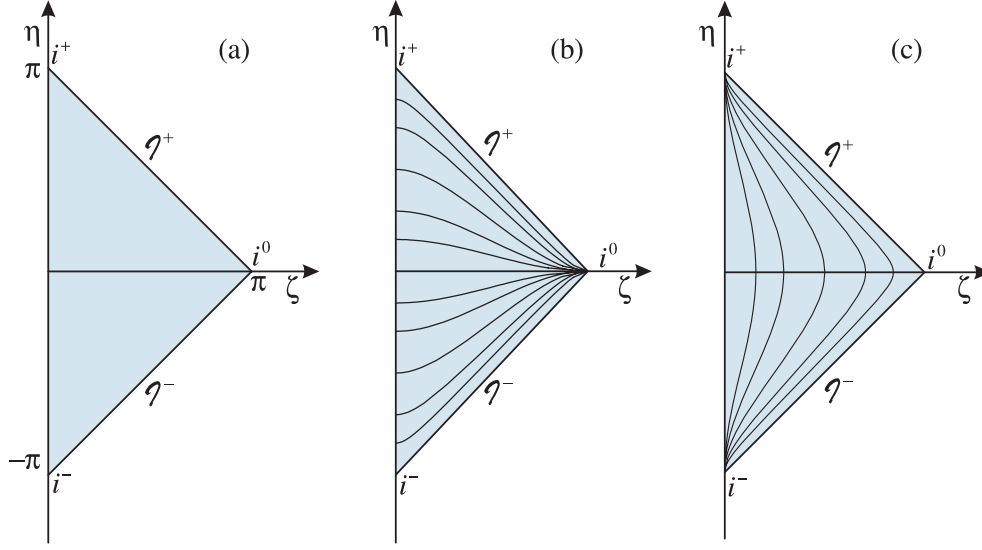


Figura B.2: (a) Diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski; (b) superfici a tempo t costante; (c) superfici a raggio r costante

- (a) Diagramma di Penrose: in ogni punto i coni di luce sono rappresentati da linee a 45° con la verticale, cosicché è immediato vedere, ad esempio, che tutto lo spazio-tempo di Minkowski sta nel futuro causale di i^- e \mathcal{I}^- , e nel passato causale di i^+ e \mathcal{I}^+ .
- (b) e (c) L'effetto della trasformazione conforme è di addensare infinite superfici a tempo costante e a raggio costante in un intorno finito di \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^- .

Dal momento che le nuove coordinate hanno un *range* finito ($\zeta \pm \eta < \pi$, $\zeta > 0$), la trasformazione conforme di cui abbiamo bisogno per “restringere” lo spazio-tempo che stiamo considerando ci è suggerita dall'equazione (B.5):

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^{-2} g_{ab}. \quad (\text{B.7})$$

La nuova metrica “non fisica” \tilde{g}_{ab} descrive uno spazio-tempo localmente identico a quello di Minkowski, in cui le coordinate t e r sono sostituite da η e ζ (fig. B.2). *Lo spazio-tempo* $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{ab})$ *ha la stessa struttura causale di* (\mathcal{M}, g_{ab}) , ma le distanze tra punti corrispondenti misurate con le due metriche possono differire per fattori anche infiniti: in effetti, $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{ab})$ si estende solo fino a valori finiti delle coordinate η e ζ , per cui ogni geodetica ha lunghezza finita e le regioni asintotiche di (\mathcal{M}, g_{ab}) corrispondono ai punti *al finito* della frontiera.

Abbiamo così costruito il *diagramma di Penrose* dello spazio di Minkowski. A questo punto l'analisi della struttura dell'infinito causale diventa immediata. In fig. B.2 (b) sono rappresentate alcune geodetiche *space-like* $t = \text{cost}$: tutte confluiscono in un punto i^0 della frontiera che rappresenta *l'infinito nella direzione spaziale*. Viceversa le geodetiche $r = \text{cost}$ hanno tutte origine nel punto i^- e termine nel punto i^+ , che rappresentano rispettivamente *l'infinito passato* e *futuro timelike*. L'infinito nullo futuro è rappresentato dal segmento \mathcal{I}^+ e

l'infinito nullo passato da \mathcal{J}^- . Riassumendo:

$$\begin{aligned} i^+ &\rightarrow (\zeta = 0, \eta = \pi); & \mathcal{J}^+ &\rightarrow \zeta + \eta = \pi; \\ i^- &\rightarrow (\zeta = 0, \eta = -\pi); & \mathcal{J}^- &\rightarrow \zeta - \eta = \pi. \\ i^0 &\rightarrow (\zeta = \pi, \eta = 0); \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La caratteristica principale dei diagrammi di Penrose è che le geodetiche nulle sono sempre rappresentate da linee a 45° , cosicché è immediato decidere se due punti (al finito o all'infinito!) sono in contatto causale (vedi ancora fig. B.2). Questo sarebbe stato vero anche se al posto della (B.7) avessimo compiuto un'altra trasformazione conforme; il diagramma sarebbe stato, in generale, diverso da quello rappresentato nella figura, ma i^+ , i^- e i^0 sarebbero rimasti comunque punti e \mathcal{J}^- , \mathcal{J}^+ dei segmenti di linea curva.

B.4 Lo spazio-tempo di Schwarzschild

Un altro esempio classico di diagramma di Penrose è quello che si ottiene per la geometria di Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \quad (\text{B.9})$$

questa metrica rappresenta uno spazio-tempo *asintoticamente piatto* (tale cioè che la metrica tende a quella di eq. (B.1) per $r \rightarrow +\infty$) e a simmetria sferica (per cui trascureremo da qui in poi le coordinate angolari). Per eliminare la singolarità apparente in $r = 2M$ è utile passare alle *coordinate nulle di Kruskal*

$$\begin{cases} \tilde{u} = -4Me^{-(t-r^*)/4M}, \\ \tilde{v} = 4Me^{(t+r^*)/4M}, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

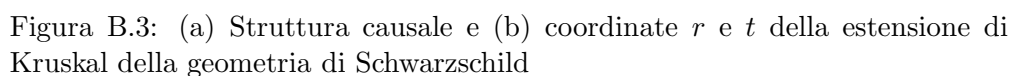
dove $r^* = r + 2M \log(r/2M - 1)$ è la *tortoise coordinate* di Regge-Wheeler, con *range* $-\infty < r^* < +\infty$ per $2M < r < +\infty$. La regione di spazio-tempo $r \geq 2M$, $-\infty < t < +\infty$ è ricoperta dagli intervalli *ranges* $-\infty < \tilde{u} < 0$ e $0 < \tilde{v} < +\infty$; la metrica si scrive

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} d\tilde{u} d\tilde{v}, \quad (\text{B.11})$$

è manifestamente regolare in $r = 2M$, e può essere estesa *analiticamente* a intervalli completi per \tilde{u} e \tilde{v} , ingrandendo così la varietà differenziale che rappresenta lo spazio-tempo³. Per comprendere cosa rappresentano fisicamente le nuove regioni dello spazio-tempo ottenute con questa estensione della geometria, si può ora compiere la trasformazione conforme

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tan \frac{1}{2}(\eta - \zeta), \\ \tilde{v} = \tan \frac{1}{2}(\eta + \zeta), \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

³Tuttavia r non sarà più definito implicitamente dalla eq. (B.10): questo problema è ancora una manifestazione delle patologie delle coordinate di Schwarzschild, e può essere risolto semplicemente cambiando i segni di fronte ai fattori $4M$.



È evidente come la regione III (di *bucco nero*) è esclusa dal passato causale dell'infinito futuro nullo \mathcal{I}^+ .

per la quale la metrica diventa

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} \frac{e^{-r/2M}(-d\eta^2 + d\zeta^2)}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\eta + \zeta) \cos^2 \frac{1}{2}(\eta - \zeta)} = \Omega^2(\eta, \zeta)(-d\eta^2 + d\zeta^2). \quad (\text{B.13})$$

La metrica conformalmente equivalente che otteniamo è uguale al caso dello spazio-tempo di Minkowski, ma cambiano i valori di η e ζ ammessi! La struttura causale dello spazio-tempo sarà pertanto diversa. Vediamo come.

La regione esterna del buco nero ($r > 2M$) è riprodotta dalla regione I di fig. B.3. Tutte le curve *time-like* o *null-like* che non raggiungono valori di r inferiori a $2M$ terminano nell'infinito futuro *time-like* i^+ o *null-like* \mathcal{I}^+ .

Se invece una curva causale si avventura nella regione III (corrispondente a $r < 2M$, e descritta da coordinate di Kruskal $\tilde{u}, \tilde{v} > 0$), l'inclinazione dei coni di luce gli precluderà la possibilità di tornare mai fuori, e la curva terminerà con un tempo proprio finito nella singolarità $r = 0$, dove la curvatura dello spazio-tempo diventa infinita. La superficie nulla h^+ ($r = 2M$) è pertanto un *orizzonte causale passato* per i^+ e \mathcal{J}^+ , perché delimita una regione di spazio-tempo esclusa dal passato causale di $i^+ \cup \mathcal{J}^+$. La regione III si dice allora *bucò nero* e h^+ *orizzonte degli eventi*.

La regione IV ($u, \tilde{v} < 0$) ha esattamente la proprietà opposta: ogni osservatore (e ogni fotone!) presente in IV deve essere stato in qualche modo originato dalla singolarità, ed è escluso dal *passato* cronologico di i^- e \mathcal{I}^- : dal punto di vista di tutte le *world-line* dello spazio esterno, tutti gli eventi di IV sono passati. La regione IV è chiamata *bucca bianco*.

La regione II ($\tilde{u} > 0, \tilde{v} < 0$), infine, rappresenta una regione di spazio-tempo asintoticamente piatto formalmente identica alla regione I, ma è da questa *causalmente isolata*.

B.5 *Asymptotic flatness*

Nell'ultima sezione abbiamo definito lo spazio-tempo di Schwarzschild come *asintoticamente piatto* in quanto approssima all'infinito la struttura dello spazio-tempo di Minkowski. In generale, tuttavia, decidere se un dato spazio-tempo possiede questa proprietà può essere un problema difficile e matematicamente delicato.

L'idea è appunto quella di verificare, tramite un'opportuna trasformazione conforme, se lo spazio-tempo che si vuole studiare presenta le stesse regioni asintotiche dello spazio di Minkowski. A seconda dell'uso che se ne vuole fare esistono però diverse definizioni di *asymptotic flatness*! Nello studio di sistemi astrofisici, ad esempio, è importante imporre delle condizioni di “appiattimento” nelle direzioni *nulle* e *space-like*: l'importante lavoro sul collasso gravitazionale e sui buchi neri svolto a cavallo degli anni '60 e '70 da Penrose, Hawking, Gibbons e Geroch parte dalla definizione di *spazio-tempo asintoticamente semplice* (ovvero asintoticamente piatto *nelle direzioni nulle*) data da Penrose. È possibile trovare una completa bibliografia, insieme a un'elegante trattazione generale dell'argomento, in [Hawking ed Ellis 1973].

Nel seguito ci riferiamo a una definizione più recente, data da Ashtekar nel 1980 [Ashtekar 1980]. Le condizioni imposte da Ashtekar risultano abbastanza complicate e piuttosto “tecniche”. La definizione che riportiamo, invece, non ha la pretesa di essere esaustiva (tralasciamo, ad esempio, le varie condizioni sufficienti sulla derivabilità delle funzioni che entrano in gioco), ma fornisce una chiara idea dello spirito e della linea generale che si vuole seguire.

Uno spazio-tempo vuoto (\mathcal{M}, g_{ab}) è detto *asintoticamente piatto all'infinito nullo e space-like* se esiste un'altro spazio-tempo $(\tilde{\mathcal{M}}, g_{ab})$ e un'isometria conforme $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \psi(\mathcal{M}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$ (con fattore conforme Ω) che soddisfano le seguenti condizioni:

1. esiste un punto $i^0 \in \tilde{\mathcal{M}}$ tale che $\overline{J^+(i^0)} \cup \overline{J^-(i^0)} = \tilde{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$;
2. la funzione Ω può essere estesa a tutto $\tilde{\mathcal{M}}$;
3. definendo due sottinsiemi \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^- di $\tilde{\mathcal{M}}$ con

$$\mathcal{J}^+ = J^+(i^0) - i^0, \quad \mathcal{J}^- = J^-(i^0) - i^0, \quad (\text{B.14})$$

si ha:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathcal{J}^+) &= 0, & \Omega(\mathcal{J}^-) &= 0, & \Omega(i^0) &= 0, \\ \tilde{\nabla}_a \Omega(\mathcal{J}^+) &\neq 0, & \tilde{\nabla}_a \Omega(\mathcal{J}^-) &\neq 0, & \tilde{\nabla}_a \Omega(i^0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

L'immersione di \mathcal{M} in una varietà più grande $\tilde{\mathcal{M}}$ permette di identificare come regioni asintotiche (esterne) di \mathcal{M} dei sottinsiemi che stanno propriamente in $\tilde{\mathcal{M}}$. Per come è definita, questa immersione è tale da fare coincidere l'infinito space-like di \mathcal{M} con un solo punto di $\tilde{\mathcal{M}}$. Questo significa che se si potesse considerare una opportuna sezione bidimensionale, $\tilde{\mathcal{M}}$ avrebbe le sembianze di un cilindro, e il trasformato conforme di \mathcal{M} sarebbe avvolto attorno a questo cilindro con le estremità che si toccano in i^0 . La condizione 1 identifica l'infinito

space-like di \mathcal{M} come quel punto di $\tilde{\mathcal{M}}$ che non ha relazioni causali con \mathcal{M} ma le ha con tutto il resto di $\tilde{\mathcal{M}}$. L'infinito passato e futuro *null* è invece identificato dalla condizione 3 come l'insieme nullo (\dot{J}^+ e \dot{J}^- sono infatti nulli) che divide \mathcal{M} dal resto di $\tilde{\mathcal{M}}$ ed è “attaccato” a i^0 (come vuole l'analogia con lo spazio di Minkowski). La condizione 2 assicura che Ω si comporti “sufficientemente bene” negli intorni dell'infinito, dove per la condizione 3 deve annullarsi, per restringere le regioni asintotiche illimitate dello spazio-tempo fisico \mathcal{M} a regioni compatte dello spazio-tempo non fisico $\tilde{\mathcal{M}}$.

Bibliografia

- [Achúcarro e Townsend 1986] Achúcarro, A., e Townsend, P., K. 1986, “A Chern-Simons Action for Three-Dimensional Anti-De Sitter Supergravity Theories”, *Phys. Lett.* **B180**, 89-92.
- [Anderson 1967] Anderson, J. L. 1967, *Principles of Relativity Physics* (New York: Academic Press).
- [Arnowitt et al. 1962] Arnowitt, R., Deser, S., e Misner, C. W. 1962, “The Dynamics of General Relativity”, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (New York: Wiley).
- [Ashtekar 1980] Ashtekar, A. 1980, “Asymptotic Structure of the Gravitational Field at Spatial Infinity”, in *General Relativity and Gravitation*, vol. 2, ed. A. Held (New York: Plenum).
- [Ashtekar 1986] Ashtekar, A. 1986, “New Variables for Classical and Quantum Gravity” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244-2247.
- [Ashtekar e Lewandowski 1997] Ashtekar, A., e Lewandowski, J. 1997, “Quantum Theory of Geometry I: Area Operators” *Class. Quant. Grav.* **14**, A55-A81.
- [Ashtekar e Magnon 1975] Ashtekar, A., e Magnon, A. 1975, “Quantum Fields in Curved Space-times”, *Proc. R. Soc. Lond.* **346**, 375-394.
- [Ashtekar et al. 1995] Ashtekar, A., Lewandowski, J., Marolf, D., e Thiemann, T. 1996, “Quantization of Diffeomorphism Invariant Theories of Connections with Local Degrees of Freedom” *J. Math. Phys.* **36**, 519.
- [Baez 1994] Baez, J., Muniain, J. P. 1994, *Gauge Fields, Knots and Gravity* (Singapore: World Scientific).
- [Bañados, Teitelboim e Zanelli 1992] Bañados, M., Teitelboim, C., e Zanelli, J. 1992, “Black Hole in Three-Dimensional Spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849-1851.
- [Barbero 1995] Barbero, J. F. 1995, “Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times”, *Phys. Rev.* **D51**, 5507-5510.
- [Bardeen et al. 1973] Bardeen, J. M., Carter, B., e Hawking, S. W. 1973, “The Four Laws of Black Hole Mechanics”, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161-170.

- [Bekenstein 1973] Bekenstein, J. D. 1973, “Black Holes and Entropy”, *Phys. Rev.* **D7**, 2333-2346.
- [Bekenstein 1993] Bekenstein, J. D. 1993, “How Fast Does Information Leak Out from a Black Hole?”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3680-3683.
- [Bekenstein 1994] Bekenstein, J. D. 1994, “Do We Understand Black Hole Entropy?”, talk given at the *Seventh Marcel Grossmann Meeting*, Stanford University, 1994; preprint gr-qc/9409015.
- [Birrell e Davies 1984] Birrell, N. D., e Davies, P. C. W. 1984, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [Bjorken e Drell 1965] Bjorken, J. D., e Drell, S. D. 1965, *Relativistic Quantum Fields* (New York: McGraw-Hill).
- [Bombelli et al. 1986] Bombelli, L., Koul, R. K., Lee, J. e Sorkin, R. D. 1986, “Quantum Source of Entropy for Black Holes”, *Phys. Rev.* **D34**, 373-383.
- [Brout et al. 1995] Brout, R., Massar, S., Parentani, P., e Spindel, Ph. 1995, “A Primer for Black Hole Quantum Physics”, *Phys. Rep.* **260**, 329-446.
- [Brown e York 1993a] Brown, J. D, e York, J. W. 1993, “Quasilocal Energy and Conserved Charges Derived from the Gravitational Action”, *Phys. Rev.* **D47**, 1407-1419.
- [Brown e York 1993b] Brown, J. D, e York, J. W. 1993, “The Microcanonical Functional Integral. I. The Gravitational Field”, *Phys. Rev.* **D47**, 1420-1431.
- [Brown e York 1994] Brown, J. D, e York, J. W. 1994, “The Path Integral Formulation of Gravitational Thermodynamics”, talk presented at the conference *The Black Hole 25 Years After*, Santiago, Cile, 1994; preprint gr-qc/9405024.
- [Brown et al. 1982] Brown, M. R., Ottewill, A. C., and Siklos S. T. C. 1982, “Comments on Conformal Killing Vector Fields and Quantum Field Theory”, *Phys. Rev.* **D26**, 1881-1899.
- [Carlip 1995] Carlip, S. 1995, “The (2 + 1)-Dimensional Black Hole”, *Class. Quant. Grav.* **12**, 2853-2880.
- [Carlip 1996] Carlip, S. 1996, “The Statistical Mechanics of Horizons and Black Hole Thermodynamics”, talk presented at the *Pacific Conference on Gravitation and Cosmology*, Seul, Corea, 1996; preprint gr-qc/9603049.
- [Carlip 1997] Carlip, S. 1997, “The Statistical Mechanics of the Three-Dimensional Euclidian Black Hole”, *Phys. Rev.* **D55**, 878-882.
- [Chandrasekhar 1983] Chandrasekhar, S. 1983, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford: Oxford University Press).

- [Christensen 1976] Christensen, S. M. 1976, “Vacuum Expectation Value of the Stress Tensor in an Arbitrary Curved Background: the Covariant Point-Separation Method”, *Phys. Rev.* **D14**, 2490-2501.
- [Ciufolini e Wheeler 1995] Ciufolini, I., e Wheeler, J. A. 1995, *Gravitation and Inertia* (Princeton: Princeton University Press).
- [Davies 1984] Davies, P. C. W. 1984, “Particles Do Not Exist”, in *Quantum Theory of Gravity: essays in honor of the 60th birthday of Bryce S. DeWitt*, ed. S. M. Christensen (Bristol: Adam Hilger).
- [Davies et al. 1996] Davies, P. C. W., Dray, T., e Manogue, C. A. 1996, “Detecting the Rotating Quantum Vacuum”, *Phys. Rev.* **D53**, 4382-4387.
- [De Pietri 1997] De Pietri, R. 1997, “On the Relation between the Connection and the Loop Representation of Quantum Gravity”, *Class. Quant. Grav.* **14**, 53-69.
- [De Pietri e Rovelli 1996] De Pietri, R., e Rovelli, C. 1996, “Geometry Eigenvalues and the Scalar Product from Recoupling Theory in Loop Quantum Gravity”, *Phys. Rev.* **D54**, 2664-2690.
- [Deser et al. 1975] Deser, S., van Nieuwenhuizen, P., e Boulware, D. 1975, “Uniqueness and Nonrenormalizability of Quantum Gravitation”, in *General Relativity and Gravitation*, ed. G. Shaviv e J. Rosen (New York: Wiley).
- [Deutsch 1981] Deutsch, D. 1981, “Particle and Non-Particle States in Quantum Field Theory”, in *Quantum Gravity 2: a Second Oxford Symposium*, ed. C. J. Isham, R. Penrose, and D. W. Sciama (Oxford: Clarendon Press).
- [DeWitt 1975] DeWitt, B. S. 1975, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, *Phys. Rep.* **19**, 295-357.
- [DeWitt 1979] DeWitt, B. S. 1979, “Quantum Gravity: the New Synthesis”, in *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press).
- [DeWitt e Brehme 1960] DeWitt, B. S., e Brehme, R. W. 1960, “Radiation Damping in a Gravitational Field”, *Ann. Phys.* **9**, 220-259.
- [Dimock 1985] Dimock, J. 1985, “Scattering for the Wave Equation on the Schwarzschild Metric”, *Gen. Rel. and Grav.* **17**, 353.
- [Dimock 1985] Dimock, J., and Kay, B. S. 1987, “Classical and Quantum Scattering Theory for Linear Scalar Fields on the Schwarzschild Metric. I”, *Ann. Phys.* **175**, 366.
- [Feynman e Hibbs 1965] Feynman, R. P., e Hibbs, A. R. 1965, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill).

- [Frolov e Novikov 1993] Frolov, V., e Novikov, I. 1993, “Dynamical Origin of the Entropy of a Black Hole”, *Phys. Rev.* **D48**, 4545-4551.
- [Fredenhagen e Haag 1990] Fredenhagen, K., e Haag, R. 1990, “On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole”, *Commun. Math. Phys.* **127**, 273-284.
- [Fulling 1972] Fulling, S. A. 1972, Ph. D. Dissertation (Princeton University); citato in [Hájíček 1976].
- [Fulling 1989] Fulling, S. A. 1989, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [Fulling et al. 1981] Fulling, S. A., Narcowich, F., e Wald, R. M. 1981, “Singularity Structure of the Two-Point Function in Quantum Field Theory in Curved Spacetime. II”, *Ann. Phys.* **136**, 243-272.
- [Fulling e Ruijsenaars 1987] Fulling, S. A., e Ruijsenaars, S. N. M. 1987, “Temperature, Periodicity and Horizons”, *Phys. Rep.* **152**, 135-176.
- [Fulton e Rohrlich 1960] Fulton, T., e Rohrlich, F. 1960, “Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge”, *Ann. Phys.* **9**, 499-517.
- [Fursaev 1996] Fursaev, D. V., e Solodukhin, S. N. 1996, “One One-Loop Renormalization of Black-Hole Entropy”, *Phys. Lett.* **B365**, 51-55.
- [Geroch 1970] Geroch, R. 1970, “Domain of Dependence”, *J. Math. Phys.* **11**, 437-449.
- [Geroch et al. 1972] Geroch, R., Kronheimer E. H., e Penrose R. 1972, “Ideal Points in Space-Time”, *Proc. Roy. Soc. London* **A347**, 545-567.
- [Goldstein 1950] Goldstein, H. 1950, *Classical Mechanics* (Reading: Addison-Wesley).
- [Grove e Ottewill 1983] Grove, P. G., e Ottewill, A. C. 1983, “Notes on ‘particle detectors’”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3905-3920.
- [Haag 1993] Haag, R. 1993, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras* (Berlin: Springer-Verlag).
- [Haag e Kastler 1964] Haag, R., e Kastler D. 1964, “An Algebraic Approach to Quantum Field Theory”, *J. Math. Phys.* **5**, 848-861.
- [Hájíček 1976] Hájíček, P. 1976, “On Quantum Field Theory in Curved Space-Time”, *Nuovo Cimento* **33B**, 597-611.
- [Hartle e Hawking 1976] Hartle, J. B., Hawking, S. W. 1976, “Path-Integral Derivation of Black-Hole Radiance”, *Phys. Rev.* **D13**, 2188-2203.
- [Hawking 1975] Hawking, S. W. 1975, “Particle Creation by Black Holes”, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220.

- [Hawking 1976a] Hawking, S. W. 1976, “Black Holes and Thermodynamics”, *Phys. Rev.* **D13**, 191-197.
- [Hawking 1976b] Hawking, S. W. 1976, “Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse”, *Phys. Rev.* **D14**, 2460-2473.
- [Hawking 1979] Hawking, S. W. 1979, “The Path-Integral Approach to Quantum Gravity”, in *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press).
- [Hawking ed Ellis 1973] Hawking, S. W., ed Ellis, G. F. R. 1973, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [Hawking e Gibbons 1977] Hawking, S. W., e Gibbons, G. W. 1977, “Action integrals and partition functions in quantum gravity”, *Phys. Rev.* **D15**, 2752-2756.
- [Hawking e Horowitz 1996] Hawking, S. W., e Horowitz, G. T. 1996, “The Gravitational Hamiltonian, Action, Entropy and Surface Terms”, *Class. Quant. Gravity* **13**, 1487-1498.
- [Hawking e Penrose 1996] Hawking, S. W., e Penrose, R. 1996, *The Nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press); ediz. it. 1996 *La Natura dello Spazio e del Tempo* (Milano: Sansoni).
- [Isham 1993] Isham, C. J. 1993, “Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time”, in *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theory*, eds. L. A. Ibort e M. A. Rodríguez (Amsterdam: Kluwer).
- [Israel 1986] Israel, W. 1986, “Third Law of Black-Hole Dynamics: a Formulation and Proof”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 397-399.
- [Itzykson e Zuber 1985] Itzykson, C., e Zuber J.-B. 1985, *Quantum Field Theory* (Singapore: McGraw-Hill).
- [Jacobson 1994] Jacobson, T. 1994, “Black Hole Entropy and Induced Gravity”, preprint gr-qc/9406037.
- [Kauffman 1994] Kauffman L. H., e Lins, L. S. 1994, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds* (Princeton: Princeton University Press).
- [Kay 1978] Kay, B. S. 1978, “Linear Spin-zero Quantum Fields in External Gravitational and Scalar Fields”, *Comm. Math. Phys.* **62**, 55-70.
- [Kay e Wald 1991] Kay, B. S., e Wald, R. M. 1978, “Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Spacetimes with a Bifurcate Killing Horizon”, *Phys. Rep.* **207**, 49-136.

- [Krasnov 1996] Krasnov, K. V. 1996, “On Statistical Mechanics of Schwarzschild Black Hole”, preprint gr-qc/9605047.
- [Le Bellac 1991] Le Bellac, M. 1991, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford: Clarendon Press).
- [Letaw 1981] Letaw, J. R. 1981, *Phys. Rev.* **D23**, 1709.
- [Letaw e Pfautsch 1981] Letaw, J. R., e Pfautsch, J. D. 1981, “Quantized Scalar Field in the Stationary Coordinate Systems of Flat Spacetime”, *Phys. Rev.* **D21** 1491-1498.
- [Letaw e Pfautsch 1982] Letaw, J. R., e Pfautsch, J. D. 1982, “The Stationary Coordinate Systems in Flat Spacetime”, *J. Math. Phys.* **23** 425-431.
- [Liberati 1996] Liberati, S. 1996, “Problems in Black Hole Entropy Interpretation”, talk given at the *Fourth Italian-Korean meeting on Relativistic Astrophysics*, Rome - Gran Sasso - Pescara, July 1995; preprint gr-qc/9601032.
- [Misner et al. 1973] Misner, C. W., Thorne, K. S., e Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation* (San Francisco: Freeman).
- [Narayan et al. 1997] Narayan, R., Garcia M. R., e McClintock, J. E. 1997, “Advection-Dominated Accretion and Black Hole Event Horizons”, submitted to *Astrophys. J. Lett.*; preprint astro-ph/9701139.
- [Onofri e Pauri 1972] Onofri, E. e Pauri, M. 1972, “Dynamical Quantization”, *J. Math. Phys.* **13**, 533-543.
- [Page 1976a] Page, D. N. 1976, “Particle Emission Rates from a Black Hole: Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole”, *Phys. Rev.* **D13**, 198-206.
- [Page 1976b] Page, D. N. 1976, “Particle Emission Rates from a Black Hole. II. Massless Particles from a Rotating Hole”, *Phys. Rev.* **D14**, 3260-3273.
- [Pauli 1921] Pauli, W. 1921, “Relativitätstheorie”, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. V19 (Leipzig: B. G. Teubner); 1981, “Theory of Relativity” (New York: Dover).
- [Penrose 1965] Penrose, R. 1965, “Gravitational Collapse and Space-Time Singularities”, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57-59.
- [Penrose 1994] Penrose, R. 1994, *Shadows of the Mind* (Oxford: Oxford University Press).
- [Penrose et al. 1986] Penrose, R., and Isham, C. J. (editors) 1986, *Quantum Concepts in Space and Time* (Oxford: Clarendon Press).
- [Piazza 1997] Piazza, F. 1997, Tesi di Laurea, *in preparazione* (Università di Parma).

- [Press et al. 1992] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. 1992, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [Rindler 1975] Rindler, W. 1975, "Kruskal Space and the Uniformly Accelerated Frame", *Am. J. Phys.* **34**, 1174-1178.
- [Rohrlich 1965] Rohrlich, F. 1965, *Classical Charged Particles: Foundations of Their Theory* (Reading: Addison-Wesley).
- [Rohrlich 1963] Rohrlich, F. 1963, "The Principle of Equivalence", *Ann. Phys.* **22**, 169-191.
- [Rovelli 1996] Rovelli, C. 1996, "Loop Quantum Gravity and Black Hole Physics", *Helv. Phys. Acta* **69**, 582-611; preprint gr-qc/9608032.
- [Rovelli 1996] Rovelli, C. 1996, "Localization in Quantum Field Theory: which Aspects of Quantum Field Theory are Compatible with what we know about Spacetime?", talk given at the *1996 Boston Colloquium for Philosophy of Science, "Reflections on the Foundations of Quantum Field Theory"*, Boston, 1996.
- [Rosen 1962] Rosen, N. 1962, "Field of a Particle in Uniform Motion and Uniform Acceleration", *Ann. Phys.* **17**, 269-275.
- [Sakurai 1985] Sakurai, J. J. 1985, *Modern Quantum Mechanics* (Benjamin/Cummings); ediz. it. 1990, *Meccanica Quantistica Moderna* (Bologna: Zanichelli).
- [Sanchez 1979] Sanchez, N. 1979, "Thermal and Nonthermal Particle Production without Event Horizons", *Phys. Lett.* **87B**, 212-214.
- [Schroedinger 1939] Schroedinger, E. 1939, "The Proper Vibrations of the Expanding Universe", *Physica (Utrecht)* **6**, 899-912.
- [Segré 1977] Segré, E. 1977, *Nuclei and Particles, Second Edition* (Benjamin); ediz. it. 1982 *Nuclei e Particelle, Seconda Edizione* (Bologna: Zanichelli).
- [Srednicki 1993] Srednicki, M. 1993, "Entropy and Area", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 666-669.
- [Sudarsky e Wald 1990] Sudarsky, D., e Wald, R. M. 1990, "Extrema of Mass, Stationarity, and Staticity, and Solutions to the Einstein-Yang-Mills Equations", *Phys. Rev.* **D46**, 1453-1474.
- [Susskind e Uglum 1994] Susskind, L., e Uglum, J. 1994, "Black Hole Entropy in Canonical Quantum Gravity and Superstring Theory", *Phys. Rev.* **D50**, 2700-2711.
- [Synge 1967] Synge, J. L. 1967, "Timelike Helices in Flat Spacetime", *Proc. Royal Irish Acad.* **65A**, 27-42.

- [Tagliavini 1991] Tagliavini, D. 1991, “Nuova Derivazione dell’Equazione di Dirac-Lorentz e Problemi di Simmetria Temporale in Elettrodinamica Classica”, Tesi di Laurea (Università di Parma).
- [’t Hooft 1985] ’t Hooft, G. 1985, “On the Quantum Structure of a Black Hole”, *Nuclear Physics* **B256**, 727-745.
- [Tipler et al. 1980] Tipler, F. J., Clarke, C. J. S., e Ellis, G. F. R. 1980, “Singularities and Horizons - A Review Article”, in *General Relativity and Gravitation: One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein*, vol. 2, (New York: Plenum Press).
- [Unruh 1974] Unruh, W. G. 1974, “Second Quantization in the Kerr Metric”, *Phys. Rev.* **D10**, 3194-3205.
- [Unruh 1976] Unruh, W. G. 1976, “Notes on Black Hole Evaporation”, *Phys. Rev.* **D14**, 870.
- [Unruh 1990] Unruh, W. G. 1990, “Particles and Fields”, in *Quantum Mechanics in Curved Space-Time*, ed. J. Audretsch and V. de Sabbata (New York: Plenum Press).
- [Unruh e Wald 1984] Unruh, W. G., e Wald, R. M. 1984, “What Happens When an Accelerating Observer Detects a Rindler Particle”, *Phys. Rev.* **D29**, 1047-1056.
- [Verch 1994] Verch, R. 1994, “Local Definiteness, Primarity, and Quasiequivalence of Quasi-free Hadamard Quantum States in Curved Spacetime”, *Comm. Math. Phys.* **160**, 507-536.
- [Wald 1975] Wald, R. M. 1975, “On Particle Creation by Black Holes”, *Comm. Math. Phys.* **45**, 9-34.
- [Wald 1976] Wald, R. M. 1976, “Stimulated Emission Effects in Particle Creation Near Black Holes”, *Phys. Rev.* **D13**, 3176.
- [Wald 1977] Wald, R. M. 1977, “The Back Reaction Effect in Particle Creation in Curved Spacetime”, *Phys. Rev.* **D17**, 1477-1484.
- [Wald 1981] Wald, R. M. 1981, “Black Holes, Thermodynamics, and Time-Reversibility”, in *Quantum Gravity 2: a Second Oxford Symposium*, ed. C. J. Isham, R. Penrose, and D. W. Sciama (Oxford: Clarendon Press).
- [Wald 1984a] Wald, R. M. 1984, *General Relativity* (Chicago: University of Chicago Press).
- [Wald 1984b] Wald, R. M. 1984, “Black Holes, Singularities and Predictability”, in *Quantum Theory of Gravity: essays in honor of the 60th birthday of Bryce S. DeWitt*, ed. S. M. Christensen (Bristol: Adam Hilger).

- [Wald 1986] Wald, R. M. 1986, “Correlations and Causality in Quantum Field Theory”, in *Quantum Concepts in Space and Time*, ed. R. Penrose e C. J. Isham (Oxford: Clarendon Press).
- [Wald 1993a] Wald, R. M. 1993, “The First Law of Black Hole Mechanics” in *Directions in General Relativity*, vol. 1, ed. B. L. Hu, M. P. Ryan e C. V. Vishveshwara (Cambridge: Cambridge University Press); preprint gr-qc/9305022.
- [Wald 1993b] Wald, R. M. 1993, “Black Hole Entropy is Noether Charge”, *Phys. Rev.* **D48**, R3427-R3431.
- [Wald 1994] Wald, R. M. 1994, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago: University of Chicago Press).
- [Witten 1989] , Witten, E. 1989, “2 + 1 Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System”, *Nucl. Phys.* **B311**, 46-78.
- [Zurek e Thorne 1985] Zurek, W. H., e Thorne, K. S. 1985, “Statistical Mechanical Origin of the Entropy of a Rotating, Charged Black Hole” *Phys. Rev. Lett* **54**, 2171-2175.