

## Aufgabe 2 - Schwellwertneuronen

Gruppe AC

15. Mai 2019

1. Der Input ist gegeben durch  $x = (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3$ .

Die erste Schicht des Netzes aus Schwellwertneuronen besteht aus den folgenden Neuronen, die alle den Input  $x$  erhalten.

- Neuron 1: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_1 = (1, 0, 0)$  und der Schwellwert durch  $\theta_1 = 0.5$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_1(x) = \begin{cases} 1 & \langle x, w_1 \rangle \geq 0.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn das Wetter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% gut ist.

- Neuron 2: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_2 = (0, 1, 0)$  und der Schwellwert durch  $\theta_2 = 0.25$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_2(x) = \begin{cases} 1 & \langle x, w_2 \rangle \geq 0.25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 25% in Begleitung zu der Veranstaltung geht.

- Neuron 3: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_3 = (0, 0, 1)$  und der Schwellwert durch  $\theta_3 = 0.25$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_3(x) = \begin{cases} 1 & \langle x, w_3 \rangle \geq 0.25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 25% etwas zu essen gibt.

Im Gegensatz zu den bisherigen drei Neuronen, die direkt den externen Input  $x$  erhalten haben, erhält das vierte Neuron in einer zweiten Schicht die Ausgaben der vorherigen Neuronen und trifft auf Basis dieser Werte die Entscheidung, ob man zur Veranstaltung geht.

Der Input für dieses Neuron ist also  $y = (y_1(x), y_2(x), y_3(x)) \in \{0, 1\}^3$ .

- Neuron 4: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_4 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und der Schwellwert durch  $\theta_4 = 1.5$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_4(x) = \begin{cases} 1 & \langle y, w_4 \rangle \geq 1.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn das Wetter mindestens mit der Wahrscheinlichkeit 50% gut wird und man zu mindestens 25% nicht allein gehen muss oder es zu mindestens 25% etwas zu essen gibt. Ansonsten gibt es 0 zurück und man geht nicht zur Veranstaltung.

2. Es soll ein Netz aus Schwellwertneuronen konstruiert werden, welches

$$V(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

Dazu werden in der ersten Schicht des Netzes zwei Neuronen konstruiert, die überprüfen ob die gegebene Summe entweder kleiner gleich oder größer gleich 1 ist. Diese Neuronen erhalten den Input  $x = (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3$  und sind gegeben durch:

- Neuron 1: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_1 = (1, 1, 1)$  und der Schwellwert durch  $\theta_1 = 1$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_1(x) = \begin{cases} 1 & \langle x, w_1 \rangle \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn die Summe der Inputs mindestens 1 beträgt.

- Neuron 2: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_2 = (-1, -1, -1)$  und der Schwellwert durch  $\theta_2 = -1$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_2(x) = \begin{cases} 1 & \langle x, w_2 \rangle \geq -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Neuron gibt also 1 als Wert aus, wenn die Summe der Inputs höchstens 1 beträgt.

Die Outputs dieser beiden Neuronen werden nun von einem dritten Neuron verarbeitet, das genau dann 1 ausgibt, wenn die beiden Neuronen aus der vorherigen Schicht ebenfalls 1 ausgeben, wenn die Summe des Inputs also genau 1 entspricht (logisches AND). Das Neuron erhält als Input die Werte  $y = (y_1(x), y_2(x)) \in \{0, 1\}^2$ . Es ist gegeben durch:

- Neuron 3: Die Gewichte des Neurons sind gegeben durch  $w_3 = (1, 1)$  und der Schwellwert durch  $\theta_3 = 2$ . Der Output des Neurons ist somit

$$y_3(x) = \begin{cases} 1 & \langle y, w_3 \rangle \geq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit entspricht der Output dieses Neurons der Funktion  $V(x)$ .