Einführung in die Neuroinformatik - Blatt 6

Gruppe AC

June 17, 2019

Aufgabe 2

1.

a)

$\sum_{i=1}^{n} y_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{3} y_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{i}}}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_1}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} + \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_2}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} + \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_3}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_1}+e^{\mathrm{c}\cdot u_2}+e^{\mathrm{c}\cdot u_3}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{i}}}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = 1$

b)

$y_1 = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_1}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_1}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} \cdot \frac{e^{-\mathrm{c}\cdot u_1}}{e^{-\mathrm{c}\cdot u_1}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_1} \cdot e^{-\mathrm{c}\cdot u_1}}{e^{-\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{i}}} \cdot \sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot(u_1 - u_1)}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot(u_{\mathrm{j}} - u_1)}} = \frac{1}{1+e^{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}+e^{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}}$

$$y_{\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{i}}}}{\sum_{j=1}^{3} e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}} = \frac{\overbrace{e^{\mathrm{c}\cdot u_1}}^{>0}}{\sum_{j=1}^{3} \underbrace{e^{\mathrm{c}\cdot u_{\mathrm{j}}}}_{>0}} \geq 0$$

c)

i. $\mathrm{u}_1 > \mathrm{u}_2 > \mathrm{u}_3$

$\implies u_3 - u_1 < u_2 - u_1 < 0$

$\implies \lim_{c\to\infty} y_1 = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}+e^{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}_{\to-\infty}}+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}_{\to-\infty}}} =$

$\frac{1}{1+0+0} = 1$

ii. $\mathrm{u}_2 > \mathrm{u}_1 > \mathrm{u}_3$

$\implies u_2 - u_1 > 0 > u_3 - u_1$

$\implies \lim_{c\to\infty} y_1 = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}+e^{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}_{\to\infty}}+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}_{\to-\infty}}} =$

$\frac{1}{1+\infty+0} = 0$

iii. $\mathrm{u}_2 > \mathrm{u}_3 > \mathrm{u}_1$

$\implies u_2 - u_1 > u_3 - u_1 > 0$

$\implies \lim_{c\to\infty} y_1 = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}+e^{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{1+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_2 - u_1)}_{\to\infty}}+e^{\underbrace{\mathrm{c}\cdot(u_3 - u_1)}_{\to\infty}}} =$

$\frac{1}{1+\infty+\infty} = 0$

d)

i. $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ Für $\mathrm{c} < 0$ gehen die Ausgaben $\mathrm{y_i}$ gegen 0.

ii. $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ Für $\mathrm{c} = 0$ sind die Ausgaben $\mathrm{y_i}$ nahezu gleich verteilt 0.

iii. $\mathbf{c} < \mathbf{0}$ Für $\mathrm{c} > 0$ gehen die Ausgaben $\mathrm{y_i}$ gegen 0, bis auf einen Ausreißer.

2.

a)

$\frac{\partial E}{\partial y_1} = -t_1 \cdot \frac{1}{y_1}$

$\frac{\partial E}{\partial y_2} = -t_2 \cdot \frac{1}{y_2}$

b)

$\frac{\partial y_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} \cdot (\frac{e^{\mathrm{u}_1}}{e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3}}) = \frac{0-e^{\mathrm{u}_1}\cdot e^{\mathrm{u}_2}}{(e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3})^2} = -y_1 \cdot y_2$

$\frac{\partial y_2}{\partial u_2} = \frac{e^{\mathrm{u}_2}\cdot(e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3})-e^{\mathrm{u}_2}\cdot(e^{\mathrm{u}_2})}{(e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3})^2} = \frac{e^{\mathrm{u}_2}}{\sum_1^3 e^{\mathrm{u_i}}} \cdot (\frac{e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3}-e^{\mathrm{u}_2}}{e^{\mathrm{u}_1}+e^{\mathrm{u}_2}+e^{\mathrm{u}_3}}) = y_2 \cdot (1 - y_2)$

c)

$\frac{\partial u_2}{\partial w_2} = x$

d)

$\frac{\partial E}{\partial w_2} = \frac{\partial E}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial w_2} + \frac{\partial E}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial w_2} = (-t_1 \cdot \frac{1}{y_1}) \cdot (-y_1 \cdot y_2) \cdot (x) + (-t_2 \cdot \frac{1}{y_2}) \cdot (y_2 \cdot (1-y_2)) \cdot (x) = t_1 \cdot y_2 \cdot x + x \cdot (-t_2 + t_2 \cdot y_2) = x \cdot (\underbrace{t_1 \cdot y_2 + t_2 \cdot y_2}_{=y_2} - t_2) = (y_2 - t_2) \cdot x$

e)

Der Unterschied besteht im wesentlichen darin, dass wir E nur nach w differenzieren und nicht auch nach b.