1.29 $D: x=0,\ y=1,\ y=-1,\ y=\log_{1/2}(x)$.

$y=\log_{1/2}(x) \Rightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$; при $y=1$ $x=\left(\frac{1}{2}\right)^y=\frac{1}{2}$, при $y=-1$ $x=\left(\frac{1}{2}\right)^y=2$.

а) $D: \begin{cases} 0\le x\le 1/2, & -1\le y\le 1; \\ 1/2\le x\le 2, & -1\le y\le \log_{1/2}(x). \end{cases}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{1/2}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)\,dy+\int_{1/2}^{2}dx\int_{-1}^{\log_{1/2}(x)}f(x,y)\,dy.$$

б) $D: -1\le y\le 1,\ 0\le x\le (1/2)^y$.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{(1/2)^y}f(x,y)\,dx.$$

2.29 а) $D: x=y^2,\ y^2=4-x$.

$x=y^2,\ y^2=4-x \Rightarrow x=2,\ y=-\sqrt{2}$ или $y=\sqrt{2}$; $y^2=4-x \Rightarrow x=4-y^2$;

$D: -\sqrt{2}\le y\le \sqrt{2},\quad y^2\le x\le 4-y^2$.

Площадь области D равна

$$A=\iint\limits_D dx\,dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{y^2}^{4-y^2}dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\cdot x\Big|_{x=y^2}^{x=4-y^2}=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-y^2-y^2)\,dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-2y^2)\,dy=\left(4y-\frac{2y^3}{3}\right)\Big|_{y=-\sqrt{2}}^{y=\sqrt{2}}=$$

$$=4(\sqrt{2}+\sqrt{2})-\frac{2(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

б) $D: x^2-4x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=-x/\sqrt{3},\ y=-\sqrt{3}\cdot x$.

Переходим к полярным координатам $x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow r=4\cos\varphi$; $x^2+y^2=6x \Rightarrow r=6\cos\varphi$;

$y=-\frac{x}{\sqrt{3}}\ (x\ge 0) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi=-\frac{\pi}{6}$;

$y=-\sqrt{3}\cdot x\ (x\ge 0) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3},\ \varphi=-\frac{\pi}{3}$;

$D: -\frac{\pi}{3}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6},\ 4\cos\varphi\le r\le 6\cos\varphi$.

Площадь области D равна

$$A=\iint\limits_D dx\,dy=\iint\limits_D r\cdot d\varphi\,dr=\int_{-\pi/3}^{-\pi/6}d\varphi\int_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}r\,dr=\int_{-\pi/3}^{-\pi/6}d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_{r=4\cos\varphi}^{r=6\cos\varphi}=\int_{-\pi/3}^{-\pi/6}(18\cos^2\varphi-8\cos^2\varphi)\,d\varphi=\int_{-\pi/3}^{-\pi/6}10\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=5\int_{-\pi/3}^{-\pi/6}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=5\left(\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}\right)\Big|_{\varphi=-\pi/3}^{\varphi=-\pi/6}=5\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}.$$

3.29 $D: y=x^2+1,\ x+y=3;\quad \mu(x,y)=4x+5y+2$.

$x+y=3 \Rightarrow y=3-x$;

$y=x^2+1,\ y=3-x \Rightarrow x=-2,\ y=5$ или $x=1,\ y=2$;

$D: -2\le x\le 1,\quad x^2+1\le y\le 3-x$.

Масса пластины D равна

$$m=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2+1}^{3-x}(4x+5y+2)\,dy=\int_{-2}^{1}dx\cdot\left(4xy+\frac{5y^2}{2}+2y\right)\Big|_{y=x^2+1}^{y=3-x}=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(12x-4x^2-4x^3-4x+\frac{5(9-6x+x^2-x^4-2x^2-1)}{2}+6-2x-2x^2-2\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(24-9x-\frac{17x^2}{2}-4x^3-\frac{5x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\left(24x-\frac{9x^2}{2}-\frac{17x^3}{6}-x^4-\frac{x^5}{2}\right)\Big|_{x=-2}^{x=1}=24(1+2)-\frac{9(1-4)}{2}-\frac{17(1+8)}{6}-1+16-\frac{1+32}{2}=\frac{117}{2}=58{,}5.$$

4.29 а) $\int\limits_{MN}(xy-y)dx+\frac{x^2}{2}dy$; $L: y=-2\sqrt{x}$, $M(0;0)$, $N(1;-2)$.

На линии L $y=-2\sqrt{x}$, $dy=-\frac{dx}{\sqrt{x}}$ при $0\le x\le 1$. Поэтому

$$\int\limits_{MN}(xy-y)dx+\frac{x^2}{2}dy=\int_0^1\left(-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\frac{x^2}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-\frac{5x\sqrt{x}}{2}\right)dx=\left(\frac{4x\sqrt{x}}{3}-x^2\sqrt{x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=$$
$$=\frac{4}{3}-1-0=\frac{1}{3}.$$

б) $\oint\limits_{\Gamma^+}(3x+2y)dx-x^2dy$; $A(-2;-6)$, $B(-2;2)$, $C(3;2)$.

На линии BA $x=-2$, $dx=0$ при $-6\le y\le 2$; на линии AC $y=y_A+\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}(x-x_A)=-6+\frac{2+6}{3+2}(x+2)=\frac{8x-14}{5}$, $dy=\frac{8}{5}dx$ при $-2\le x\le 3$; на линии CB $y=2$, $dy=0$ при $-2\le x\le 3$. Поэтому

$$\oint\limits_{\Gamma^+}(3x+2y)dx-x^2dy=\int\limits_{BA}-(-2)^2dy+\int\limits_{AC}\left(3x+\frac{16x-28}{5}-\frac{8}{5}x^2\right)dx+\int\limits_{CB}(3x+2\cdot 2)dx=-4\int_{y_B=2}^{y_A=-6}dy+\int_{x_A=-2}^{x_C=3}\left(-\frac{28}{5}+\frac{31x}{5}-\frac{8x^2}{5}\right)dx+$$
$$+\int_{x_C=3}^{x_B=-2}(3x+4)dx=-4y\Big|_{y=2}^{y=-6}+\left(-\frac{28x}{5}+\frac{31x^2}{10}-\frac{8x^3}{15}\right)\Big|_{x=-2}^{x=3}+\left(\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_{x=3}^{x=-2}=-4(-6-2)-\frac{28(3+2)}{5}+\frac{31(9-4)}{10}-$$
$$-\frac{8(27+8)}{15}+\frac{3(4-9)}{2}+4(-2-3)=-\frac{80}{3}.$$

Контур $\Gamma=ABCA$ ограничивает область D: $-2\le x\le 3$, $\frac{8x-14}{5}\le y\le 2$; то есть по формуле Грина

$$\oint\limits_{\Gamma^+}(3x+2y)dx-x^2dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(3x+2y)}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{D}(-2x-2)dxdy=\int_{-2}^{3}(-2x-2)dx\int_{(8x-14)/5}^{2}dy=$$
$$=\int_{-2}^{3}(-2x-2)dx\cdot y\Big|_{y=\frac{8x-14}{5}}^{y=2}=\int_{-2}^{3}(-2x-2)\left(2-\frac{8x-14}{5}\right)dx=\int_{-2}^{3}\left(\frac{16x^2}{5}-\frac{32x}{5}-\frac{48}{5}\right)dx=\frac{16}{5}\int_{-2}^{3}(x^2-2x-3)dx=$$
$$=\frac{16}{5}\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{x=-2}^{x=3}=\frac{16}{5}\left(9-9-9+\frac{8}{3}+4-6\right)=-\frac{80}{3}.$$

в) $\int\limits_{K}xdx+y^2dy-zdz$; $K: x=\sqrt{2}\cos t$, $y=2\sin t$, $z=\sqrt{2}\cos t$ при $0\le t\le 2\pi$.

$x(t=2\pi)=x(t=0)=\sqrt{2}$, $y(t=2\pi)=y(t=0)=0$, $z(t=2\pi)=z(t=0)=\sqrt{2}$. Поэтому

$$\int\limits_{K}xdx+y^2dy-zdz=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=0.$$

5.29 $z=2z_1\cdot z_2+3z_1/z_2$, $z_1=-3+2i$, $z_2=-5-i$, $n=3$, $z_3=-2-4i$.

а) В алгебраической форме

$$z=a+b\cdot i=2z_1\cdot z_2+3\frac{z_1}{z_2}=z_1\left(2z_2+\frac{3}{z_2}\right)=z_1\cdot\left(-10-2i-\frac{3}{5+i}\right)=z_1\cdot\left(-10-2i-\frac{3(5-i)}{25+1}\right)=z_1\cdot\frac{-260-52i-15+3i}{26}=$$
$$=(-3+2i)\cdot\frac{-275-49i}{26}=\frac{825+98-550i+147i}{26}=\frac{71}{2}-\frac{31}{2}i;\ (a>0,\ b<0,\ 4\text{-я четверть}).$$

б) В тригонометрической форме

$$z=|z|\cdot[\cos(\arg z)+i\cdot\sin(\arg z)]=\frac{\sqrt{6002}}{2}\cdot\left[\cos\left(-\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}\right)+i\cdot\sin\left(-\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}\right)\right],$$

где $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{71}{2}\right)^2+\left(-\frac{31}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6002}}{2}$,

$\arg z=\frac{b}{|b|}\cdot\arccos\frac{a}{|z|}=-\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}$.

в) В показательной форме

$$z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg z}=\frac{\sqrt{6002}}{2}\cdot e^{-i\cdot\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}}$$

г) $z^{n+10}=z^{13}=|z|^{13}\cdot[\cos(13\arg z)+i\cdot\sin(13\arg z)]=\left(\frac{\sqrt{6002}}{2}\right)^{13}\cdot\left[\cos\left(-13\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}\right)+\right.$
$\left.+i\cdot\sin\left(-13\arccos\frac{71}{\sqrt{6002}}\right)\right].$

д) $z_3=-2-4i$, $|z_3|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$, $\arg z_3=-\arccos\frac{-2}{\sqrt{20}}=-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Корни уравнения $w^3=z_3$ определяем по формуле

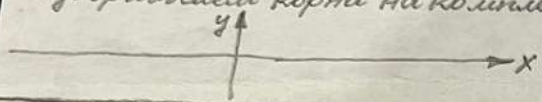
$W_K=\sqrt[3]{|Z_3|}\cdot\left(\cos\frac{\arg Z_3+2(K-1)\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\arg Z_3+2(K-1)\pi}{3}\right)$ при $K=1,2,3$:

$W_1=\sqrt[3]{|Z_3|}\cdot\left(\cos\frac{\arg Z_3}{3}+i\cdot\sin\frac{\arg Z_3}{3}\right)=\sqrt[6]{20}\cdot\left[\cos\left(-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)+i\cdot\sin\left(-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\right]\approx 1{,}537-i\cdot 0{,}594$;

$W_2=\sqrt[3]{|Z_3|}\cdot\left(\cos\frac{\arg Z_3+2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\arg Z_3+2\pi}{3}\right)\approx -0{,}254+i\cdot 1{,}628$;

$W_3=\sqrt[3]{|Z_3|}\cdot\left(\cos\frac{\arg Z_3+4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\arg Z_3+4\pi}{3}\right)\approx -1{,}283-i\cdot 1{,}034$.

Изображаем корни на комплексной плоскости $(z=x+i\cdot y)$:



6.29 $u(x,y)=-x^3+3xy^2-2x$, $f(0)=-3i$.

а) $\frac{\partial u}{\partial x}=(-x^3+3xy^2-2x)'_x=-3x^2+3y^2-2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(-x^3+3xy^2-2x)'_y=6xy$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-3x^2+3y^2-2)'_x+(6xy)'_y=-6x+6x=0$, то есть $u(x,y)$ является действительной частью аналитической функции $f(z=x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

б) $u(0;0)=0$, $f(0)=u(0;0)+i\cdot v(0;0)=i\cdot v(0;0)=-3i \Rightarrow v(0;0)=-3$;

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-3x^2+3y^2-2$;

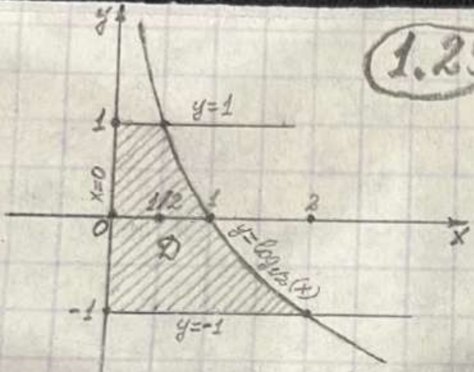
$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int(-3x^2+3y^2-2)dy=-3x^2y+y^3-2y+\varphi(x)$; $v(0;0)=\varphi(0)=-3$;

$\frac{\partial v}{\partial x}=(-3x^2y+y^3-2y+\varphi(x))'_x=-6xy+\varphi'(x)=-6xy \Rightarrow \varphi'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=\varphi(0)=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,y)=-3x^2y+y^3-2y+\varphi(x)=-3x^2y+y^3-2y-3$;

то есть $f(z=x+iy)=-x^3+3xy^2-2x+i\cdot(-3x^2y+y^3-2y-3)=-z^3-2z-3i$.

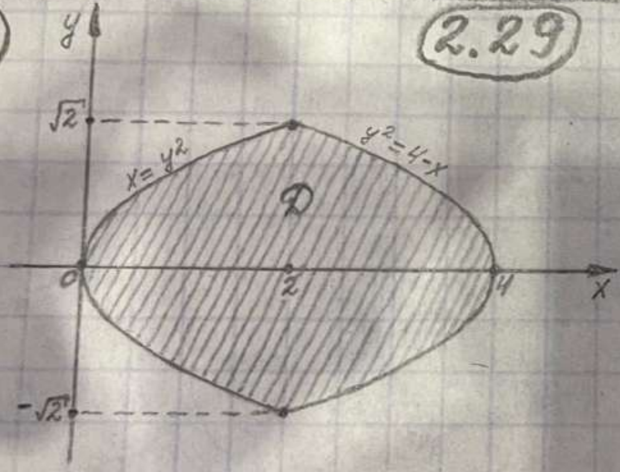
1.29



y
y=1
1
x=0
1/2
1
2
0
x
D
y=log_{1/2}(x)
-1
y=-1

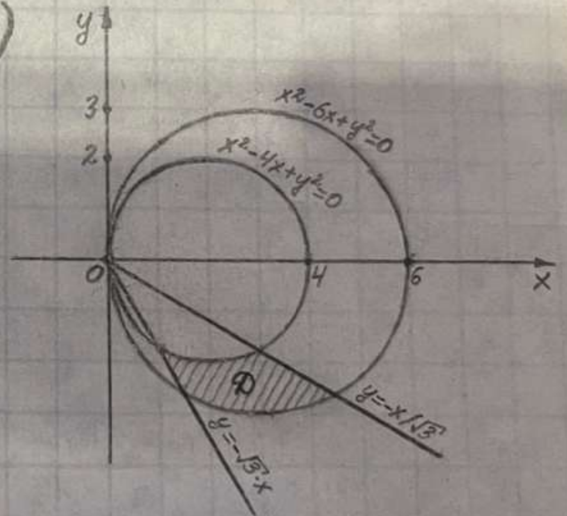
2.29

а)

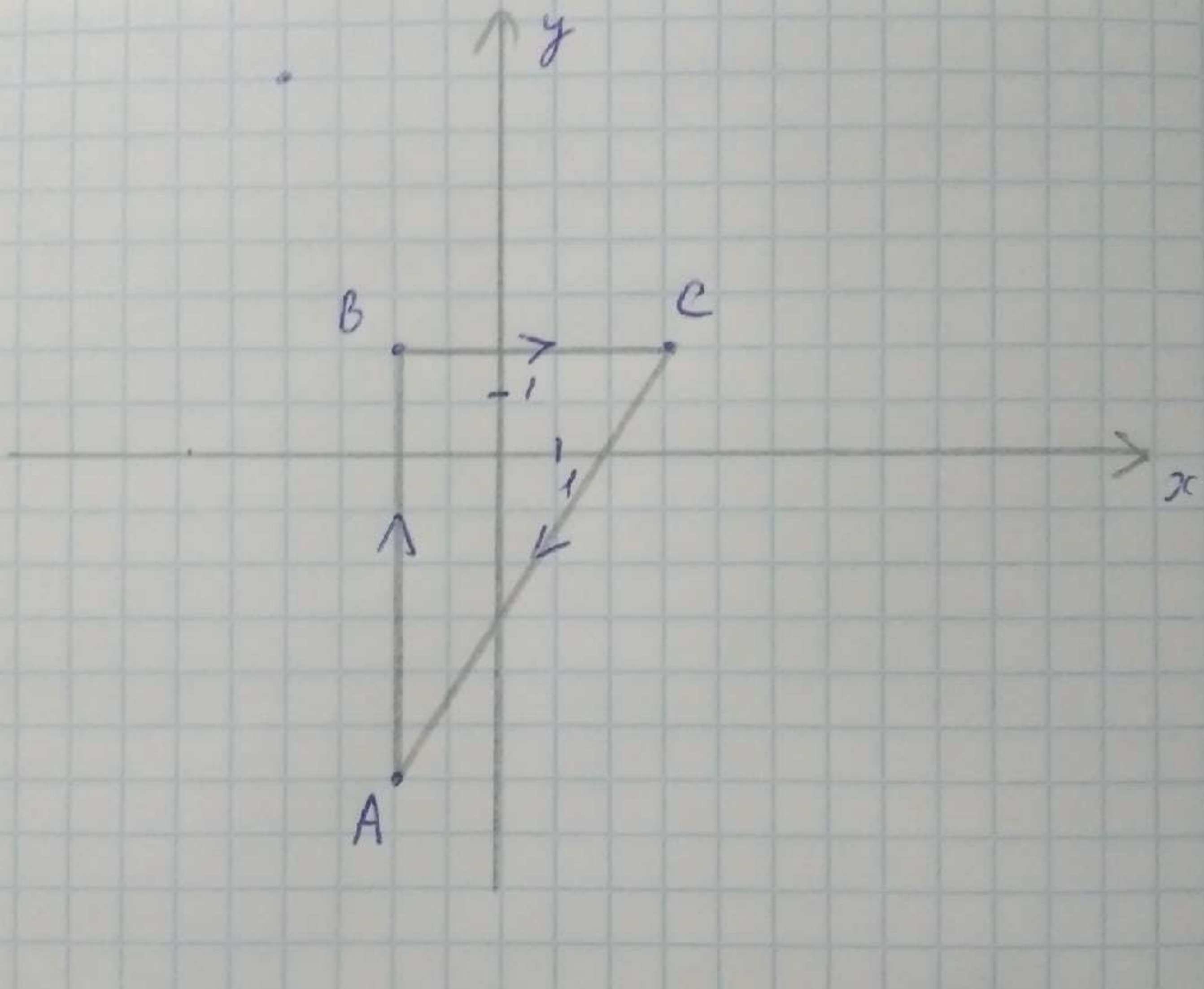


y
√2
x=y²
y²=4-x
D
0
2
4
x
-√2

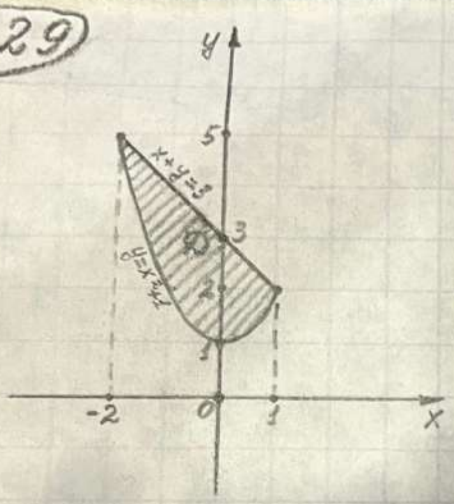
б)



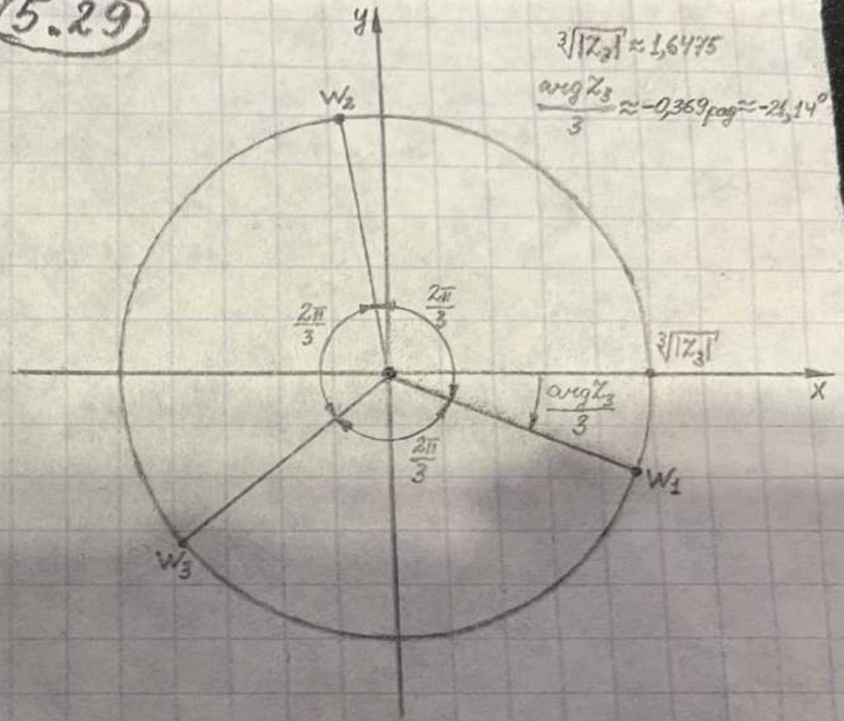
y
3
2
x²-6x+y²=0
x²-4x+y²=0
0
4
6
x
D
y=-x/√3
y=-√3·x


y
B
C
1
1
x
A

3.29


y
x
5
3
2
1
-2
0
1
x+y=3
y=x²+1

5.29


∛|Z₃| ≈ 1,6475
argZ₃/3 ≈ -0,369 рад ≈ -21,14°
y
x
W₁
W₂
W₃
2π/3
∛|Z₃|
argZ₃/3