MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA (CC)

Cursino B. Jacobina
Dept. de Eng. Elétrica - Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande - PB

Introdução à máquina CC

Máquina de corrente contínua (CC):

Prós:

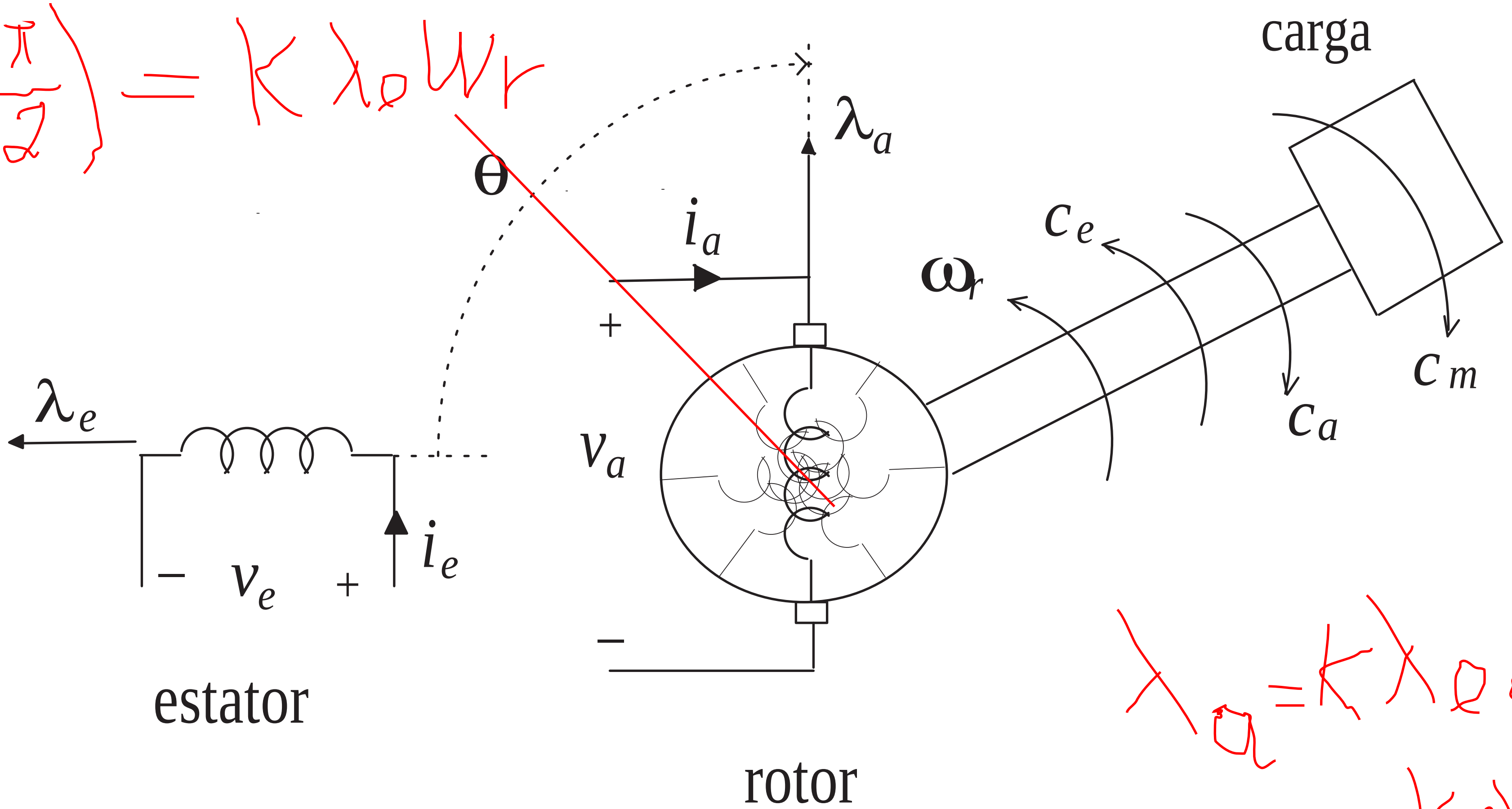
- características dinâmicas muito boas para acionamentos.
- existe um grande número destas máquinas já em operação
- processo físico de fácil compreensão
- modelo bastante simples e de forte apelo intuitivo
- importante para o entendimento dos sistemas CA.

Contras:

- limitações construtivas (comutador de corrente mecânico)
- custo alto de implantação e manutenção

Máquina de corrente contínua (CC)

$e_a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k\lambda_e \omega_r$



$\lambda_a = k\lambda_e \cos\theta$

$e_a = -k\omega\lambda_e sen$

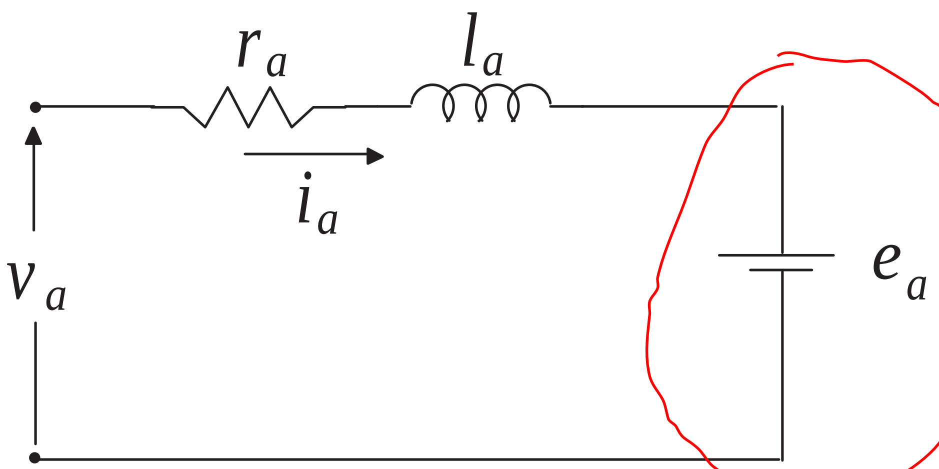
$\lambda_a^e = k\lambda_e \cos\theta$

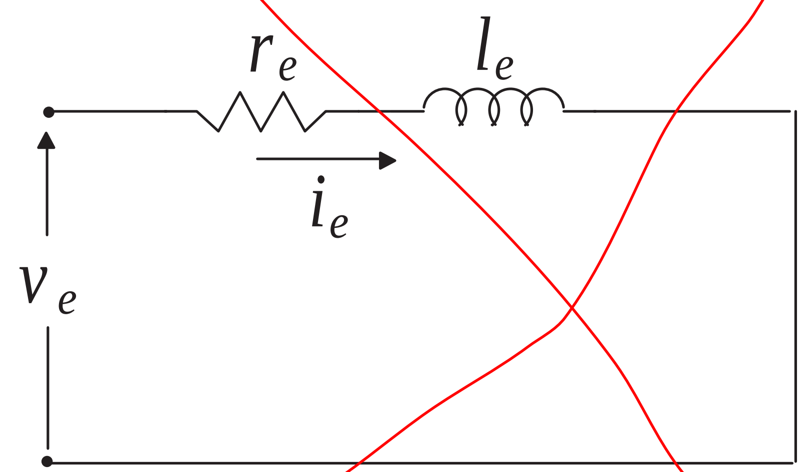
$$c_e = k\,|\lambda_a \times \lambda_e| = k\lambda_a\lambda_e sen(\theta) = k\lambda_a\lambda_e \quad (1)$$

$v_a^e = -wk\lambda_e sen\theta$

$v_a^e\left(-\frac{\pi}{2}\right) = wk\lambda_e$

Modelo elétrico e circuito equivalente





Rotor

$$v_a = r_a i_a + l_a \frac{di_a}{dt} + e_a$$

$$e_a = k_e \lambda_e \omega_r = k_e' i_e \omega_r$$

Estator

$$v_e = r_e i_e + l_e \frac{di_e}{dt}$$

Modelo mecânico de movimento

Segunda lei de Newton (força resultante = massa x aceleração)

$$c_e - c_m - F_m \omega_r = J_m \frac{d\omega_r}{dt} \tag{2}$$

$$c_e = k\lambda_e\lambda_a = k_e\lambda_e i_a \tag{3}$$

Modelo completo da máquina CC

Equações elétricas:

$$v_a = r_a i_a + l_a \frac{di_a}{dt} + e_a; \qquad e_a = k_e \lambda_e \omega_r \tag{4}$$

$$v_e = r_e i_e + l_e \frac{di_e}{dt} \tag{5}$$

Equação mecânica de movimento:

$$c_e - c_m - F_m \omega_r = J_m \frac{d\omega_r}{dt} \tag{6}$$

$$c_e = k_e \lambda_e i_a = k'_e i_e i_a \tag{7}$$

Modelo para excitação constante

Modelo de estado

$$\begin{bmatrix} di_a/dt \\ d\omega_r/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_a/l_a & -k_e\lambda_e/l_a \\ k_e\lambda_e/J_m & -F_m/J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l_a & 0 \\ 0 & -1/J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ c_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

Função de transferência

$$\begin{bmatrix} I_a(s) \\ \Omega_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ia}(s) & G_{im}(s) \\ G_a(s) & G_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a(s) \\ C_m(s) \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde

$$G_a(s) = \frac{K_a}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \qquad G_m(s) = -\frac{K_m (T_a s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$T_1 = -1/s_1$, $T_2 = -1/s_2$ $\quad T_a = -1/s_a$ (s_1 e s_2 são os pólos da máquina e s_a um zero)

Conceito de pólo (relação com resposta transitória)

Se aplicarmos um degrau de tensão unitário ($1/s$) no motor sem carga ($c_m = 0$) tem-se

$$\Omega_r(s) = G_a(s)\frac{1}{s} = \frac{K_a}{T_1 T_2 (s+s_1)(s+s_2)}\frac{1}{s}$$

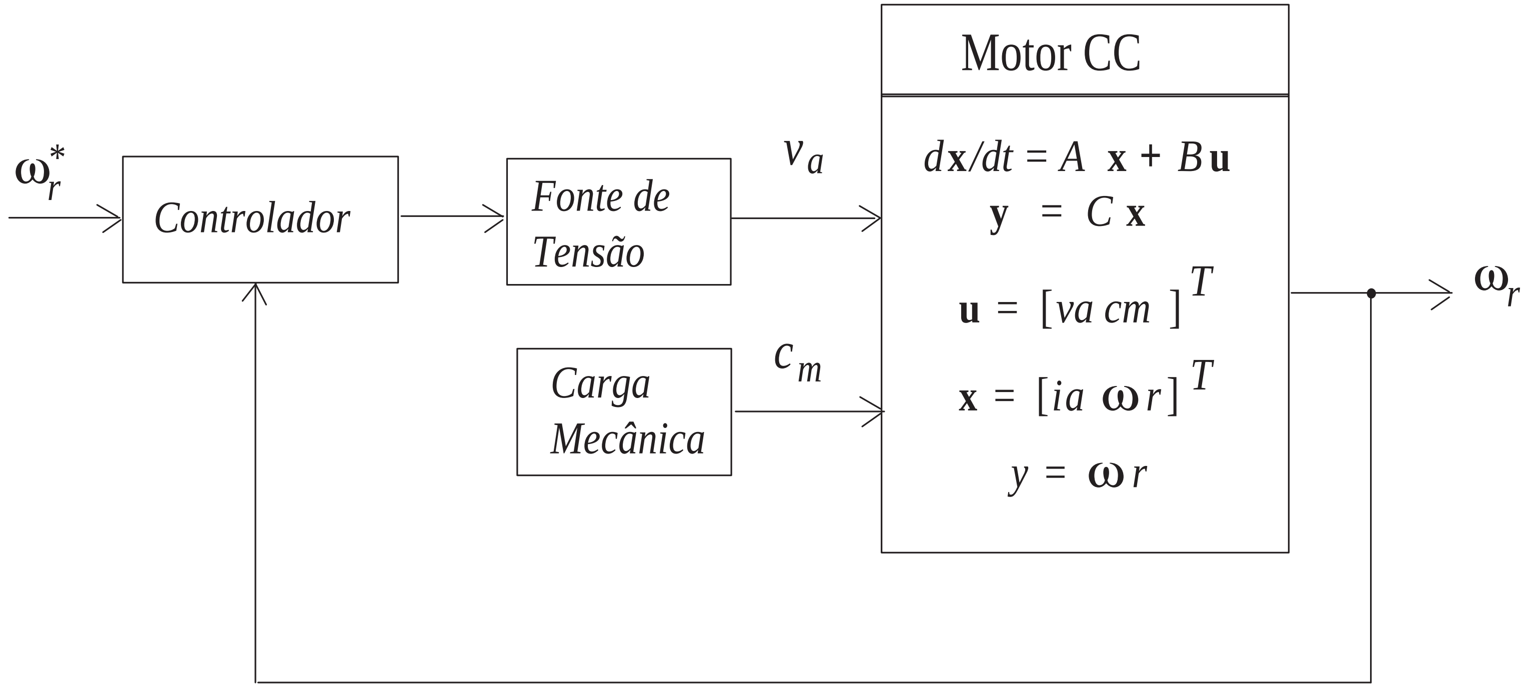
Utilizando a transformada inversa de Laplace, obtém-se no tempo

$$\omega(t) = \underbrace{k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}}_{\text{transitório}} + \omega_{regime} \quad (10)$$

$$\quad (11)$$

parte real de s_1 e s_2 positiva	$\Rightarrow$	sistema instável
parte real de s_1 e s_2 negativa	$\Rightarrow$	sistema estável
s_1 e s_2 complexos	$\Rightarrow$	resposta transitória oscilante

Controle do motor CC

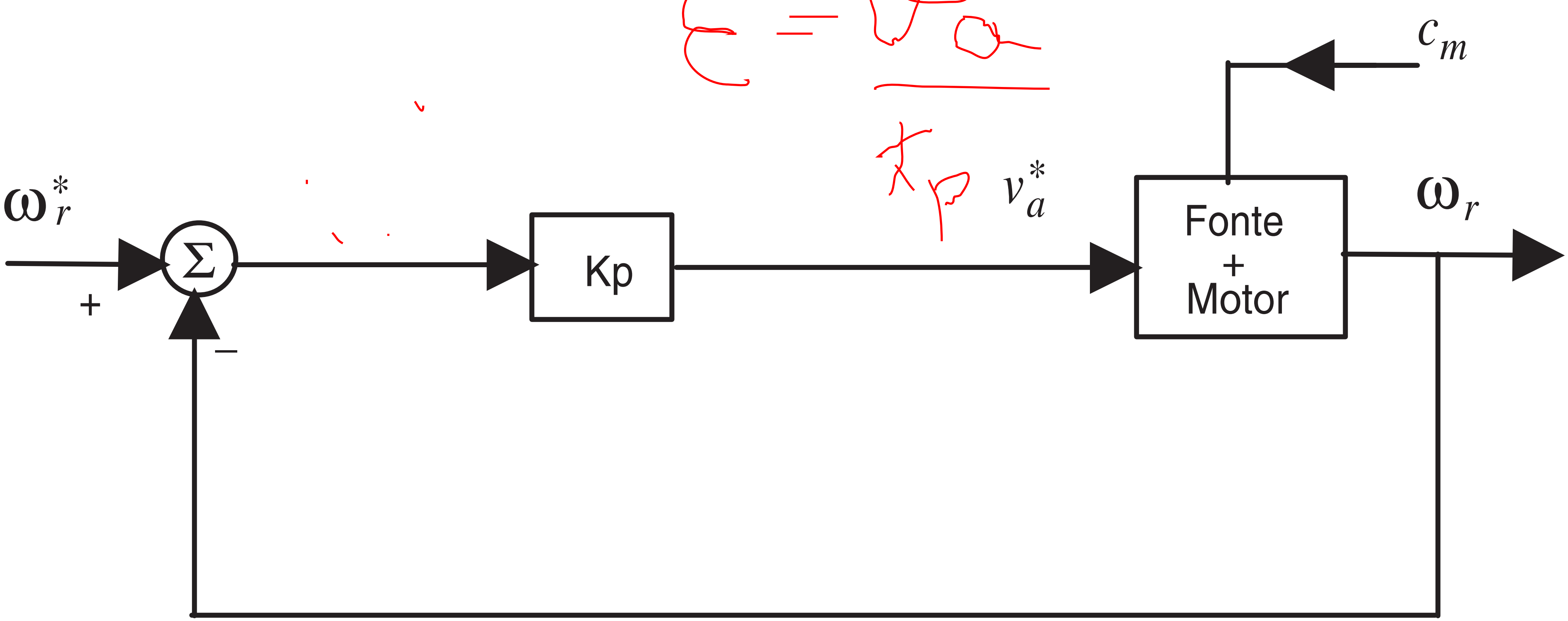


ω_r^* = *saída de referência* ω_r = *saída*

v_a = *comando* c_m = *perturbação*

Controle de velocidade P (ação direta na tensão)

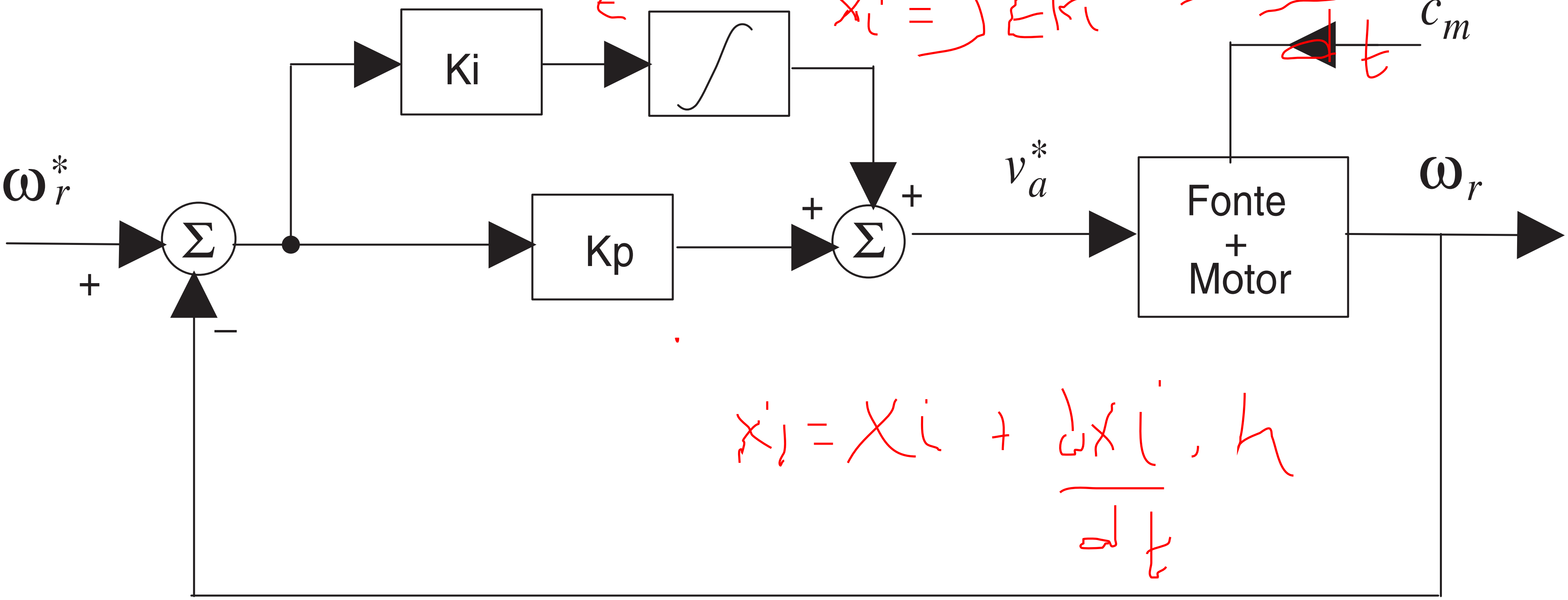
$E = \frac{v_a}{K_p}$



$$D(s) = K_p$$

Controle de velocidade PI (ação direta na tensão)

$x_i = \int E k_i \rightarrow \frac{dx_i}{dt} = k_i E$

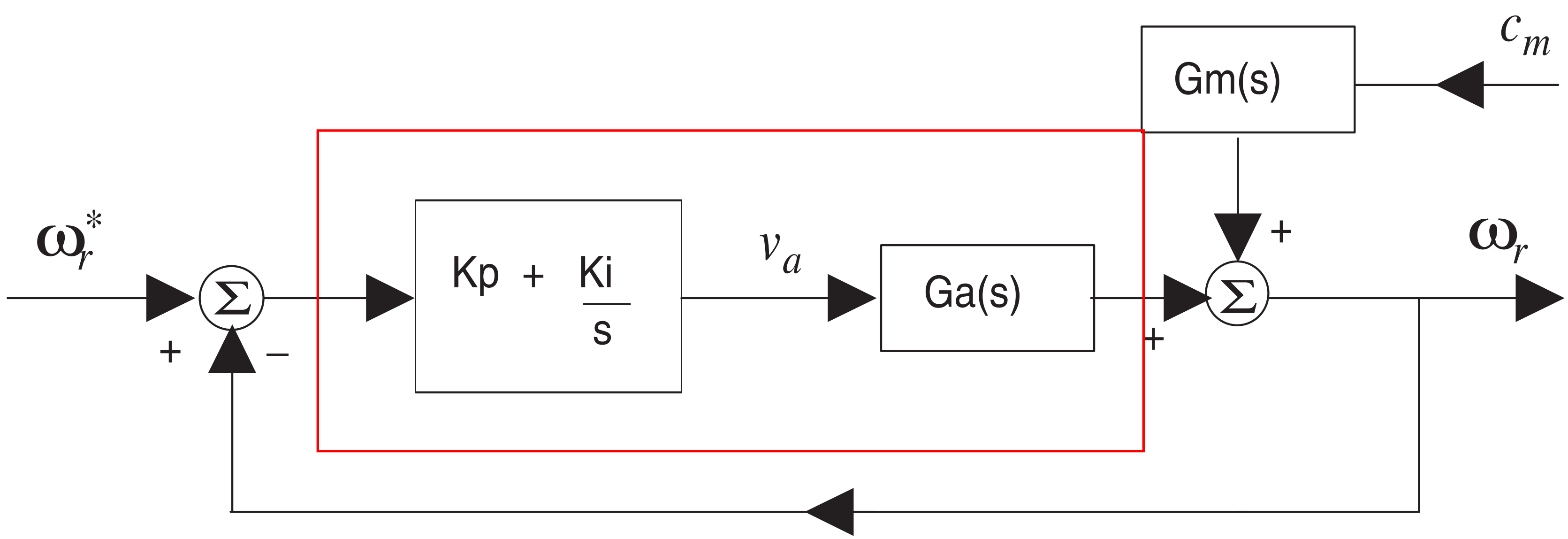


$x_i = x_i + \frac{dx_i}{dt} \cdot h$

$\frac{s}{s^2 + w^2}$

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{12}$$

Sistema com controlador PI



$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_i(sK_p/K_i + 1)}{s} \qquad (13)$$

Função de transferência de malha aberta com PI

Função de Transferência de malha aberta (3^a ordem)

$$\frac{\Omega_r(s)}{E_\omega(s)} = G_o(s) = D(s)G_a(s) = \frac{K_a}{\cancel{(sT_1+1)}(sT_2+1)}\frac{K_i\cancel{(sK_p/K_i+1)}}{s}$$

Função de Transferência de malha aberta com cancelamento de T_1 (2^a ordem):

$$G_o(s) = \frac{K_iK_a}{s\,(T_2s+1)} \tag{14}$$

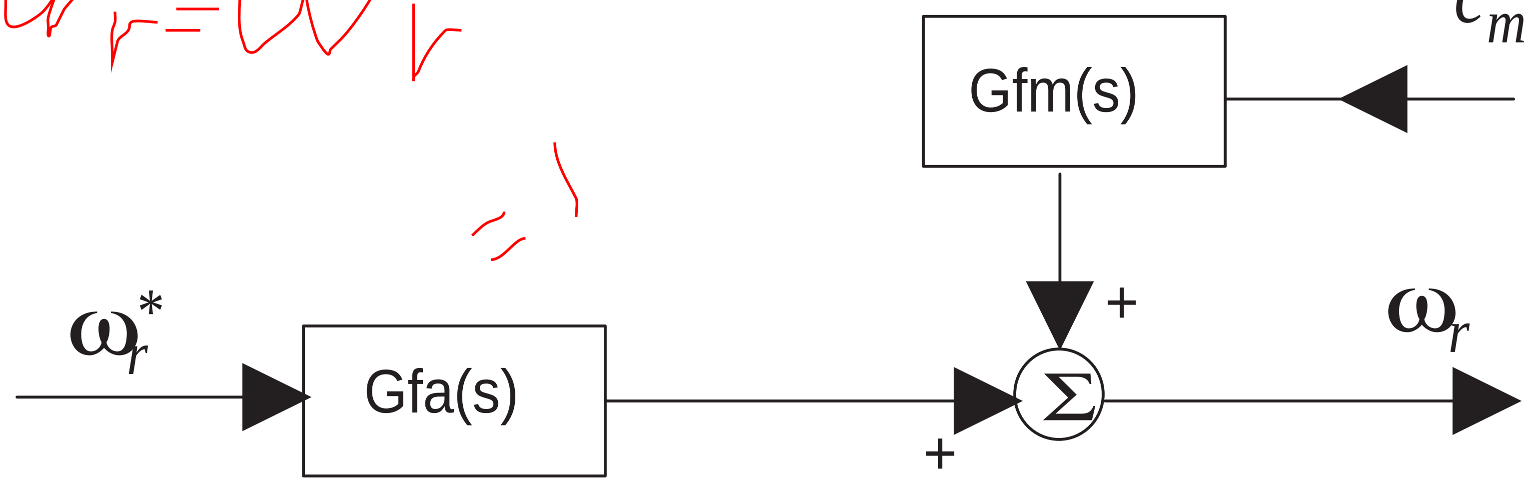
Condição de cancelamento:

$$K_p/K_i = T_1 \tag{15}$$

Função de transferência de malha fechada com PI

$\omega_r = \omega_r^*$

$= 0$



$$\frac{\Omega_r(s)}{\Omega_r^*(s)} = G_f(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{K_i K_a}{s\,(T_2 s+1)+K_i K_a} \tag{16}$$

$$\frac{\Omega_r(s)}{C_m(s)} = G_{fm}(s) = \frac{G_m(s)}{1+G_o(s)} = -\frac{K_m\,(T_a s+1)\,s}{(T_1 s+1)\,(s\,(T_2 s+1)+K_i K_a)} \tag{17}$$

Cálculo final dos parâmetros do controlador PI

Pólos de malha fechada reais idênticos s_f:

$$T_2 s^2 + s + K_i K_a = T_2 (s - s_f)^2 \longrightarrow K_i = \frac{1}{4 K_a T_2}$$

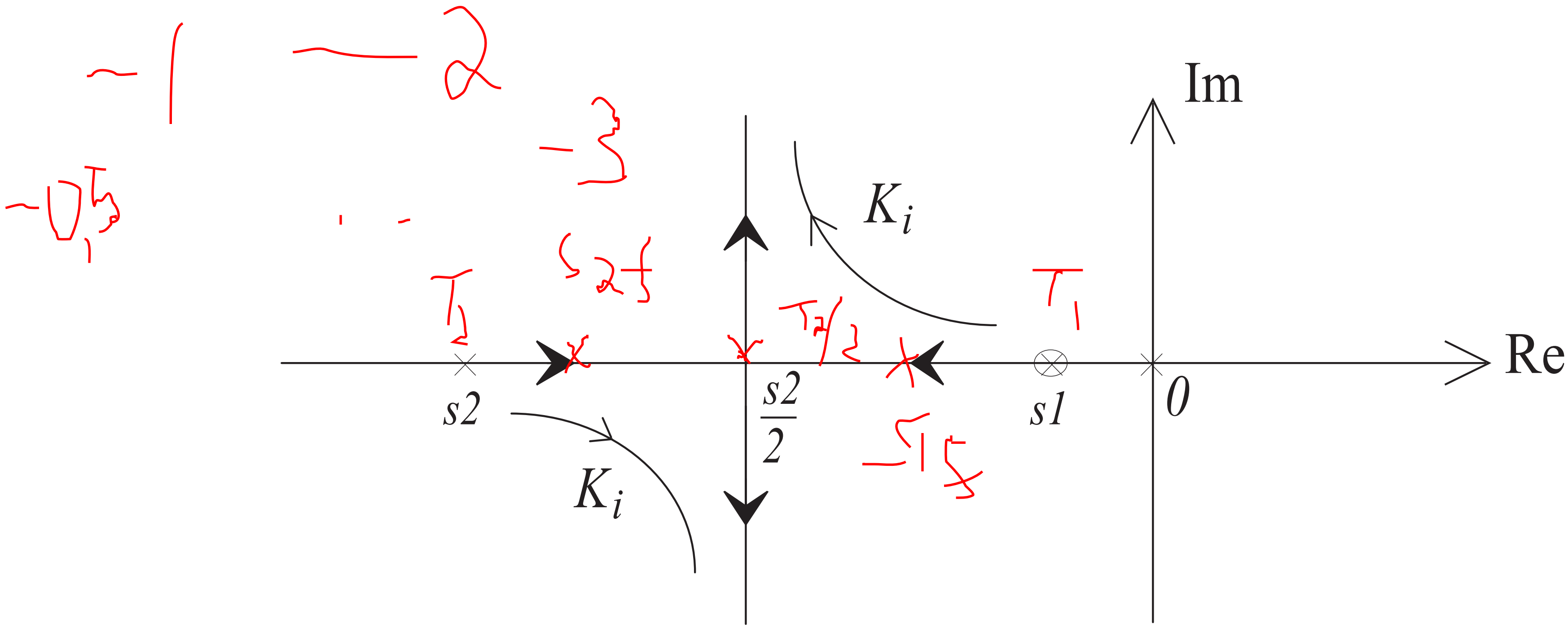
Resumo dos valores dos parâmetros do controlador:

$s_f = -1/(2T_2)$ (pólo de malha fechada s_f)

$K_i = \dfrac{1}{4 K_a T_d}$ (condição pólos reais idênticos)

$K_p = T_1 K_i$ (condição de cancelamento)

Lugar da raízes dos pólos de malha fechada com PI

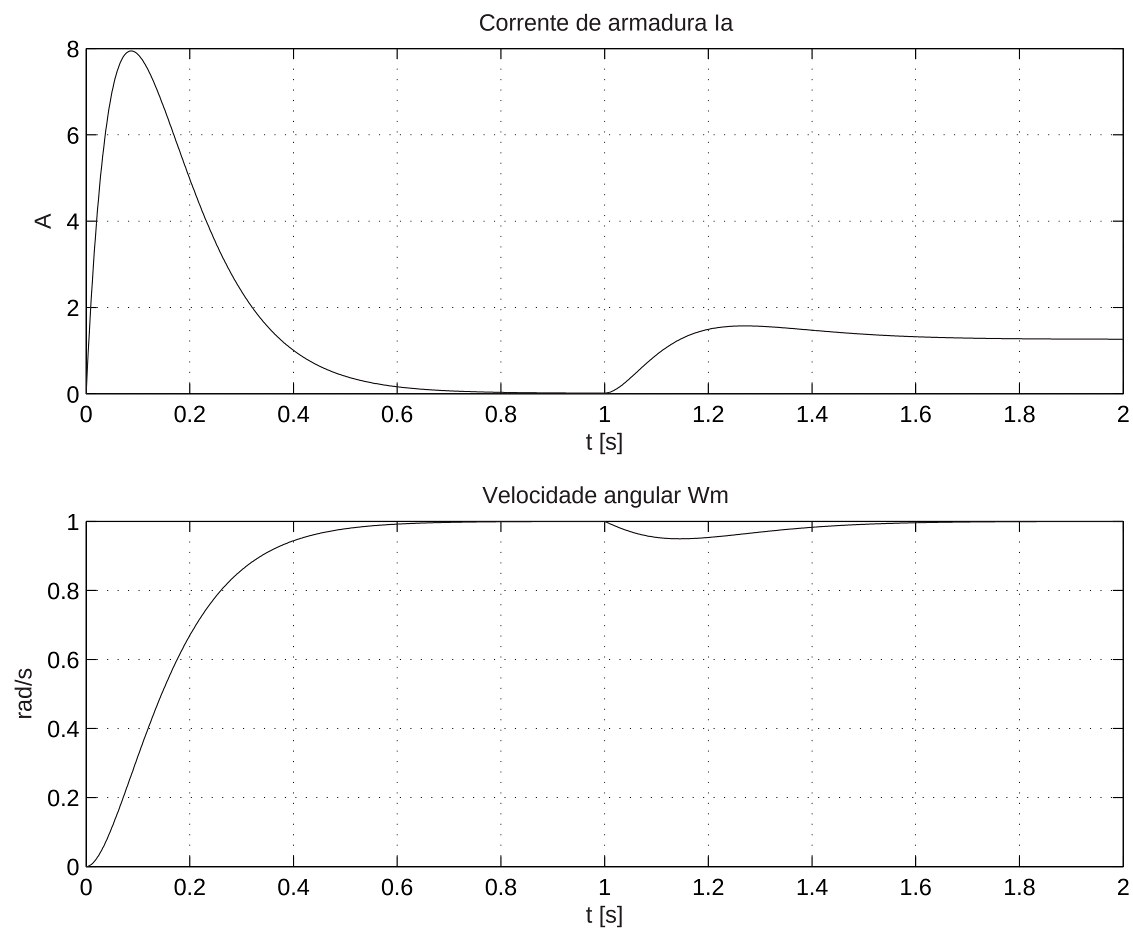


Evolução dos pólos com K_i crescente: malha aberta - reais idênticos - complexos.

Só é possível escolher pólos reais idênticos iguais $s_f = -1/(2T_2)$

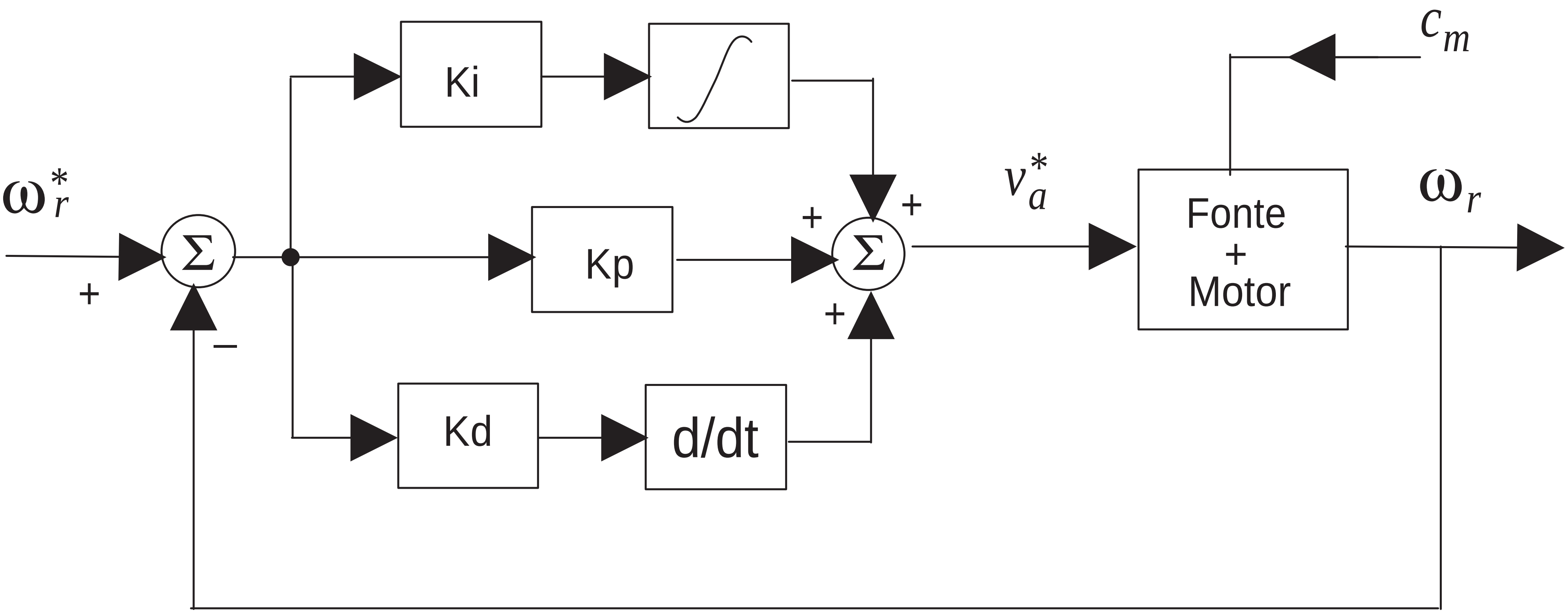
i.e. , os pólos de malha fechada dependem do pólo $1/T_2$ do motor.

Resposta no tempo - controlador PI



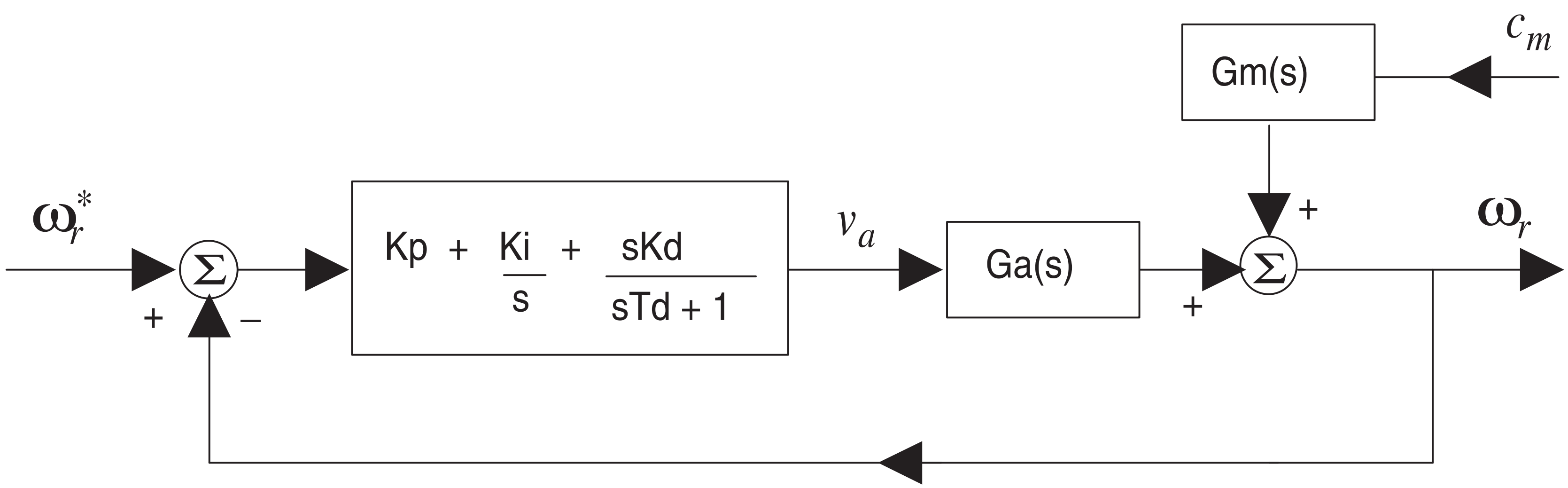
$$
\begin{aligned}
0 &< t < t_{max}/2 \longrightarrow \omega_r^* = 1, c_m = 0 \\
t_{max}/2 &< t < t_{max} \longrightarrow \omega_r^* = 1, c_m = 1
\end{aligned}
$$

Controle de velocidade PID (ação direta na tensão)



$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \qquad (18)$$

Sistema com controlador PID modificado



Função de transferência do controlador PID modificado:

$$D(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{sT_d + 1} \tag{19}$$

$$D(s) = \frac{K_i\{s^2(T_d K_p + K_d)/K_i + s(T_d K_i + K_p)/K_i + 1\}}{s(T_d s + 1)} \tag{20}$$

Função de transferência de malha aberta com PID

Função de Transferência de malha aberta (4^a ordem)

$$\frac{\Omega_r(s)}{E_\omega(s)} = G_o(s) = \frac{K_a}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}\frac{K_i\{s^2(T_dK_p+K_d)/K_i+s(T_dK_i+K_p)/K_i+1\}}{s(T_ds+1)}$$

Função de Transferência de malha aberta com cancelamento (2^a ordem):

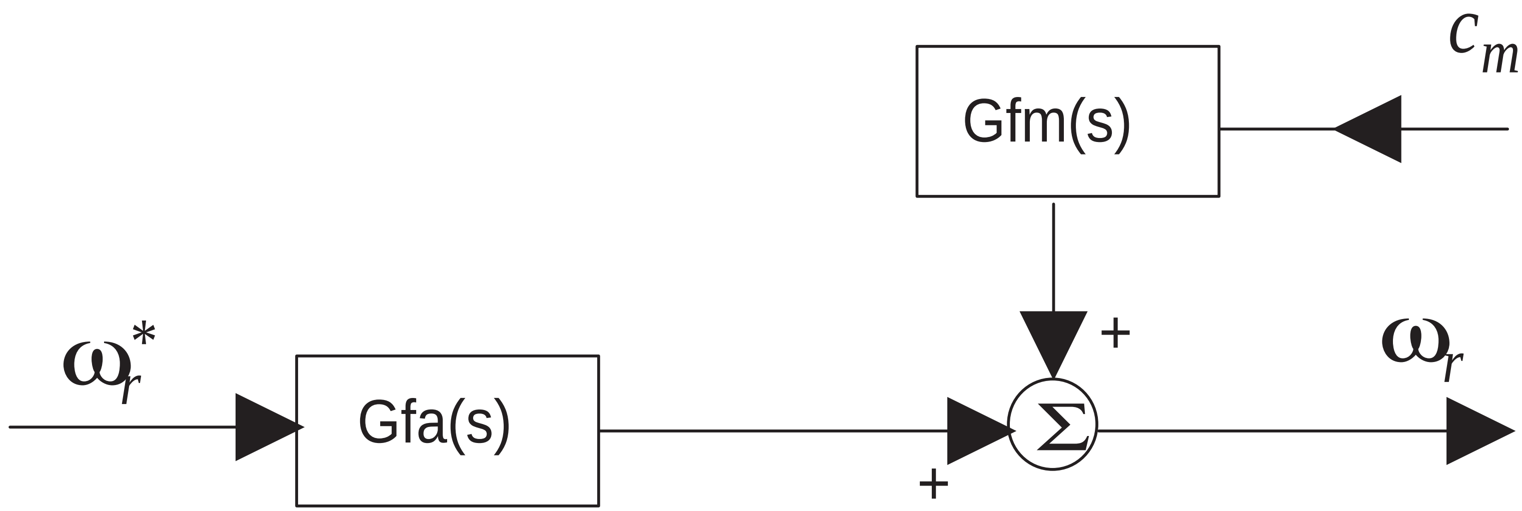
$$\frac{\Omega_r(s)}{E_\omega(s)} = G_o(s) = D(s)G_a(s) = \frac{K_iK_a}{s\,(T_ds+1)} \tag{21}$$

Condição de cancelamento:

$$(T_dK_p+K_d)/K_i = T_1T_2 \tag{22}$$

$$(T_dK_i+K_p)/K_i = (T_1+T_2) \tag{23}$$

Função de transferência de malha fechada com PID



$$\frac{\Omega_r(s)}{\Omega_r^*(s)} = G_f(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{K_i K_a}{s\left(T_d s+1\right)+K_i K_a} \tag{24}$$

$$\frac{\Omega_r(s)}{C_m(s)} = G_{fm}(s) = \frac{G_m(s)}{1+G_o(s)} = -\frac{K_m\left(T_a s+1\right)\left(T_d s+1\right)s}{\left(T_1 s+1\right)\left(T_2 s+1\right)\left(s\left(T_d s+1\right)+K_i K_a\right)} \tag{25}$$

Cálculo final dos parâmetros do controlador PID

Pólos de malha fechada reais idênticos ($s_f = -1/2T_d$):

$$T_d s^2 + s + K_i K_a = T_d (s - s_f)^2 \longrightarrow K_i = \frac{1}{4K_a T_d}$$

Resumo dos valores dos parâmetros do controlador:

$$T_d = -1/2s_f \qquad \text{(pólo de malha fechada } s_f\text{)}$$

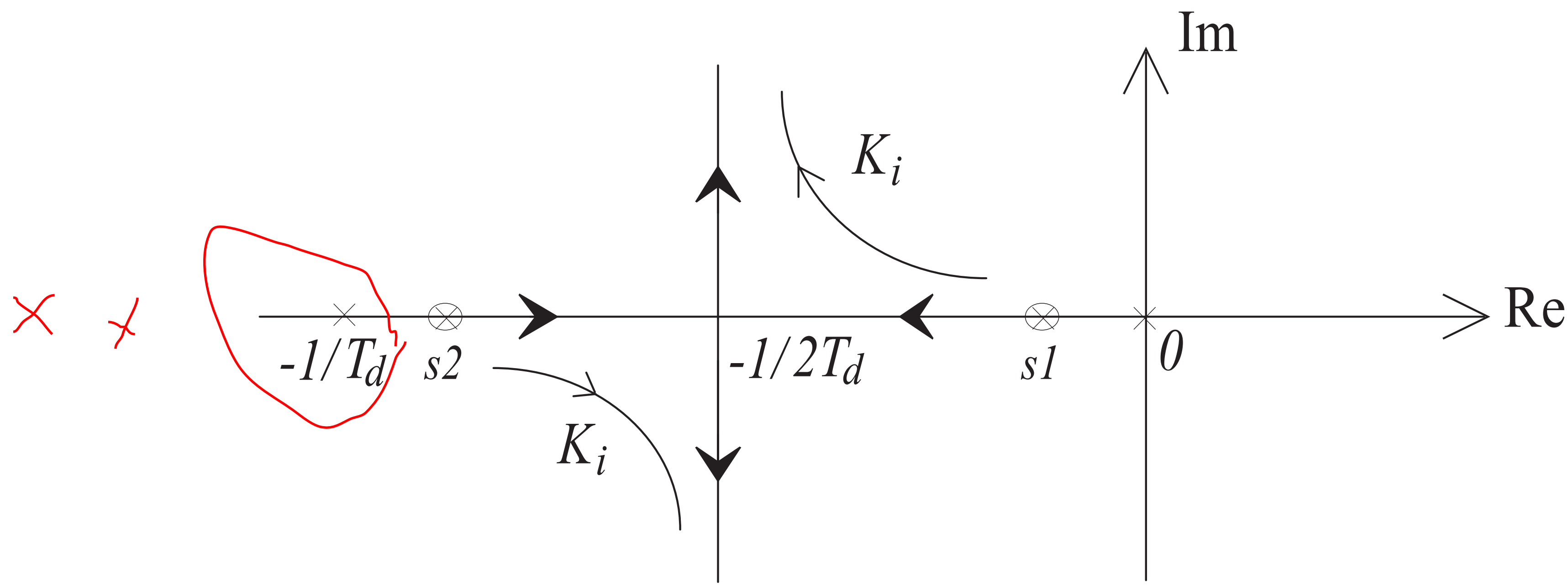
$$K_i = \frac{1}{4K_a T_d} \qquad \text{(condição pólos reais idênticos)}$$

$$K_p = (T_1 + T_2 - T_d)K_i$$

(condição de cancelamento)

$$K_d = [T_1 T_2 - (T_1 + T_2 - T_d)T_d]K_i$$

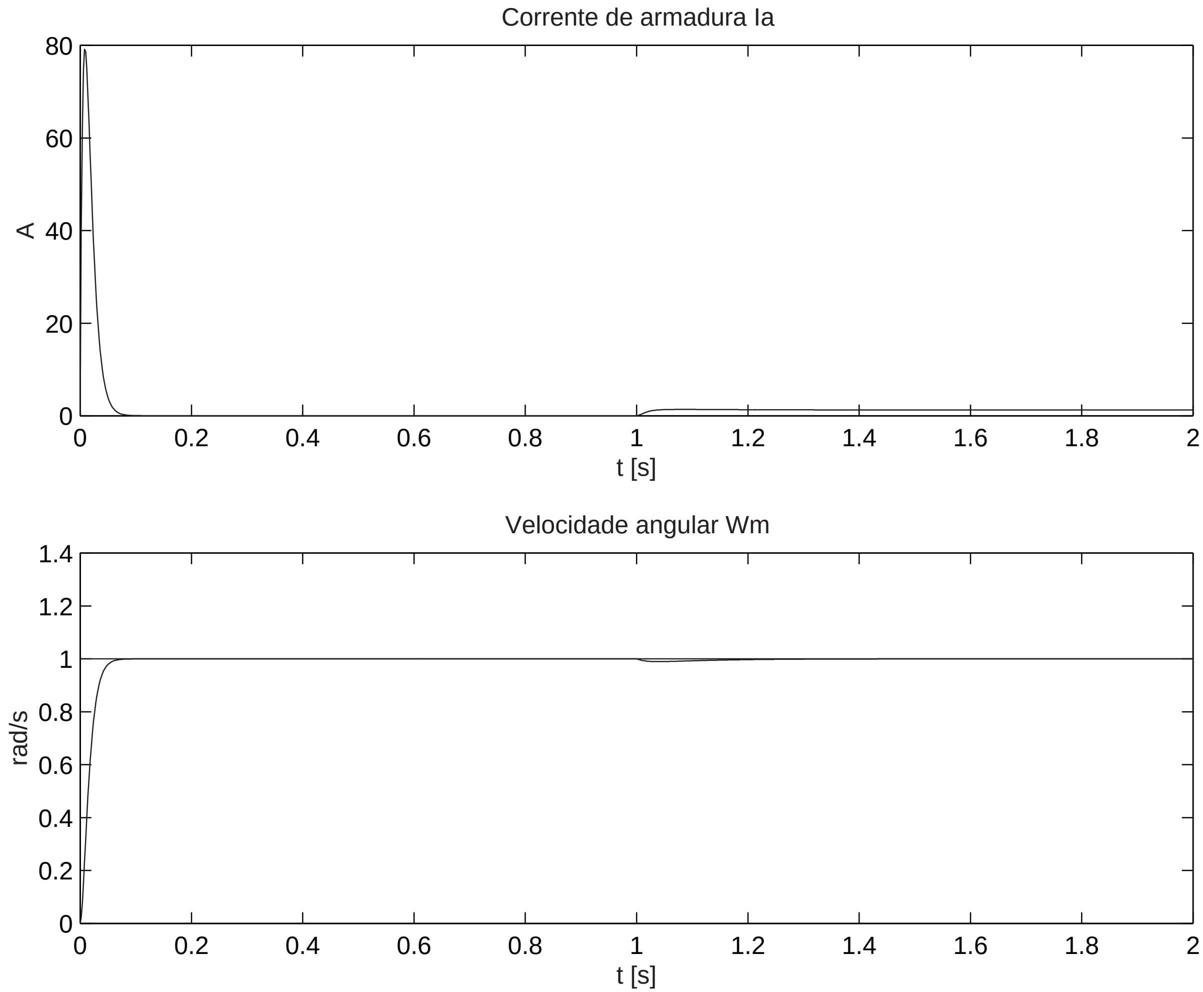
Lugar da raízes dos pólos de malha fechada com PID



Evolução dos pólos com K_i crescente: malha aberta - reais idênticos - complexos.

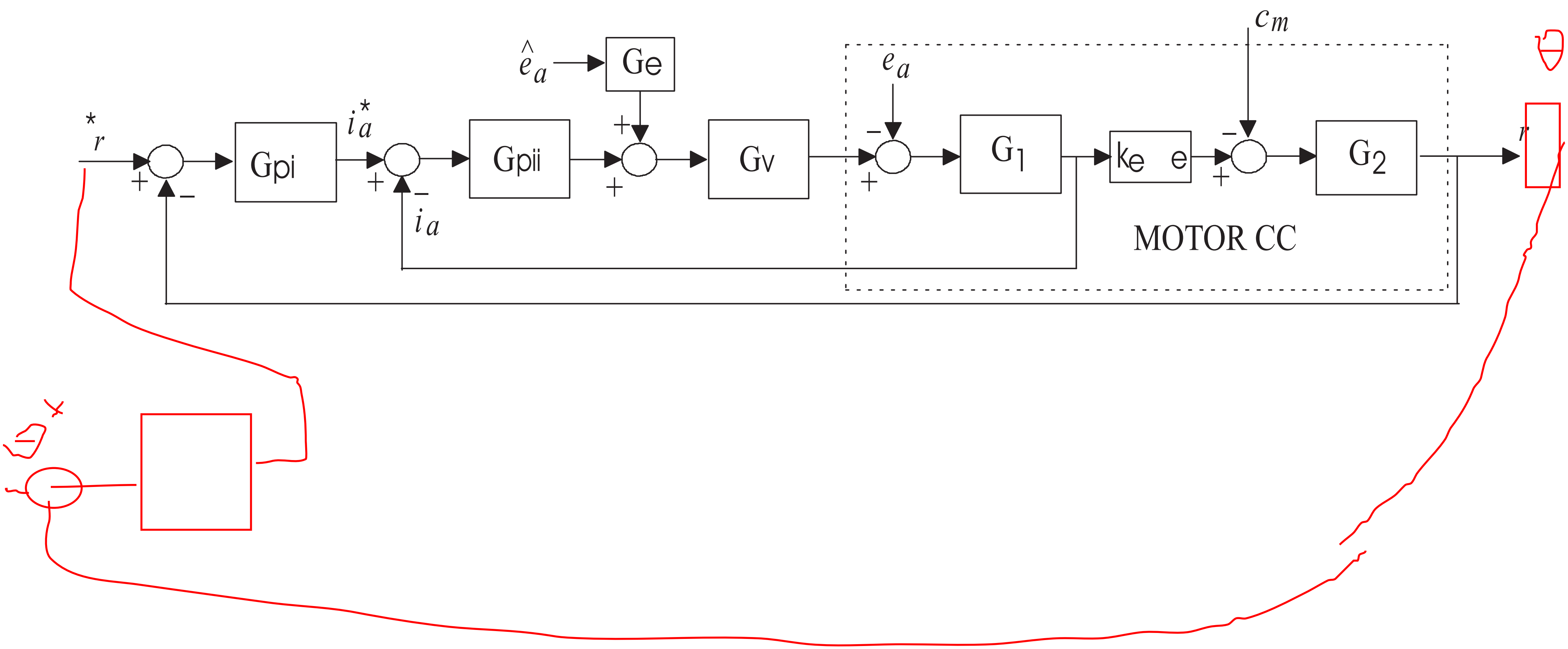
É possível alocar os pólos de malha fechada independente do motor.

Resposta no tempo - controlador PID

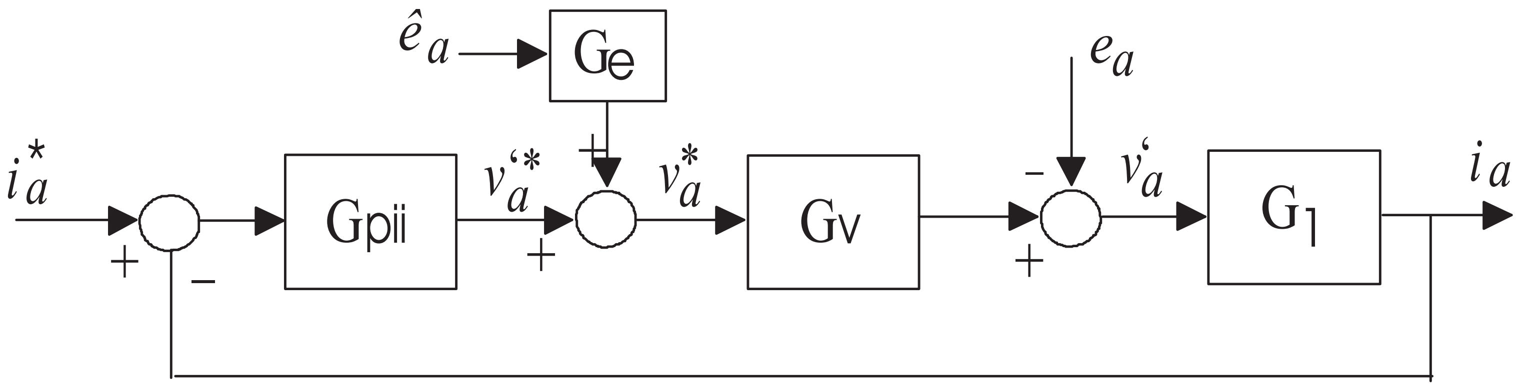


$$
\begin{aligned}
0 &< t < t_{max}/2 \longrightarrow \omega_r^* = 1, c_m = 0 \\
t_{max}/2 &< t < t_{max} \longrightarrow \omega_r^* = 1, c_m = 1
\end{aligned}
$$

Controle do Motor CC com Malha de Corrente Interna



Controlador de Corrente



Modelo Elétrico

Equação elétrica do motor CC

$$v_a = r_a i_a + l_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (26)$$

$$v'_a = r_a i_a + l_a \frac{di_a}{dt} \quad (27)$$

onde $v'_a = v_a - e_a$ ($e_a = k_e \lambda_e \omega_m$ perturbacão)

Função de transferência para a corrente do motor (1^a ordem)

$$I_a(s) = \frac{1/r_a}{T_a s + 1} V'_a(s) = G_1(s) V'_a(s) \quad (28)$$

Função de transferência da fonte de alimentação

$$V_a(s) = \frac{1}{T_v s + 1} V^*_a(s) = G_v(s) V^*_a(s) \quad (29)$$

Cálculo do Controlador de Corrente

Função de transferência saídas controlador/processo ($E_a = 0$):

$$I_a(s) = \frac{1/r_a}{(T_a s+1)(T_v s+1)} V_a'^*(s) = G_i(s) V_a'^*(s) \tag{30}$$

Função de transferência do PI (constante de tempo T_v muito pequena):

$$G_{pii}(s) = k_{pi} + \frac{k_{ii}}{s} = \frac{k_{ii}(s k_{pi}/k_{ii}+1)}{s} \tag{31}$$

Função de transferência de malha aberta do sistema:

$$G_{oi} = G_{pii}(s) G_i(s) = \frac{(k_{ii}/r_a)(s k_{pi}/k_{ii}+1)}{s(T_a s+1)(T_v s+1)} \tag{32}$$

Cancelando o pólo elétrico do motor com o zero do PI ($T_a = k_{pi}/k_{ii}$):

$$G_{oi}(s) = \frac{k_{ia}}{s(T_v s + 1)} \tag{33}$$

onde $k_{ia} = k_{ii}/r_a$.

Função de transferência de malha fechada G_{fi} é dada por:

$$G_{fi}(s) = \frac{k_{ia}}{s(T_v s + 1) + k_{ia}} = \frac{k_{ia}}{T_v s^2 + s + k_{ia}} \tag{34}$$

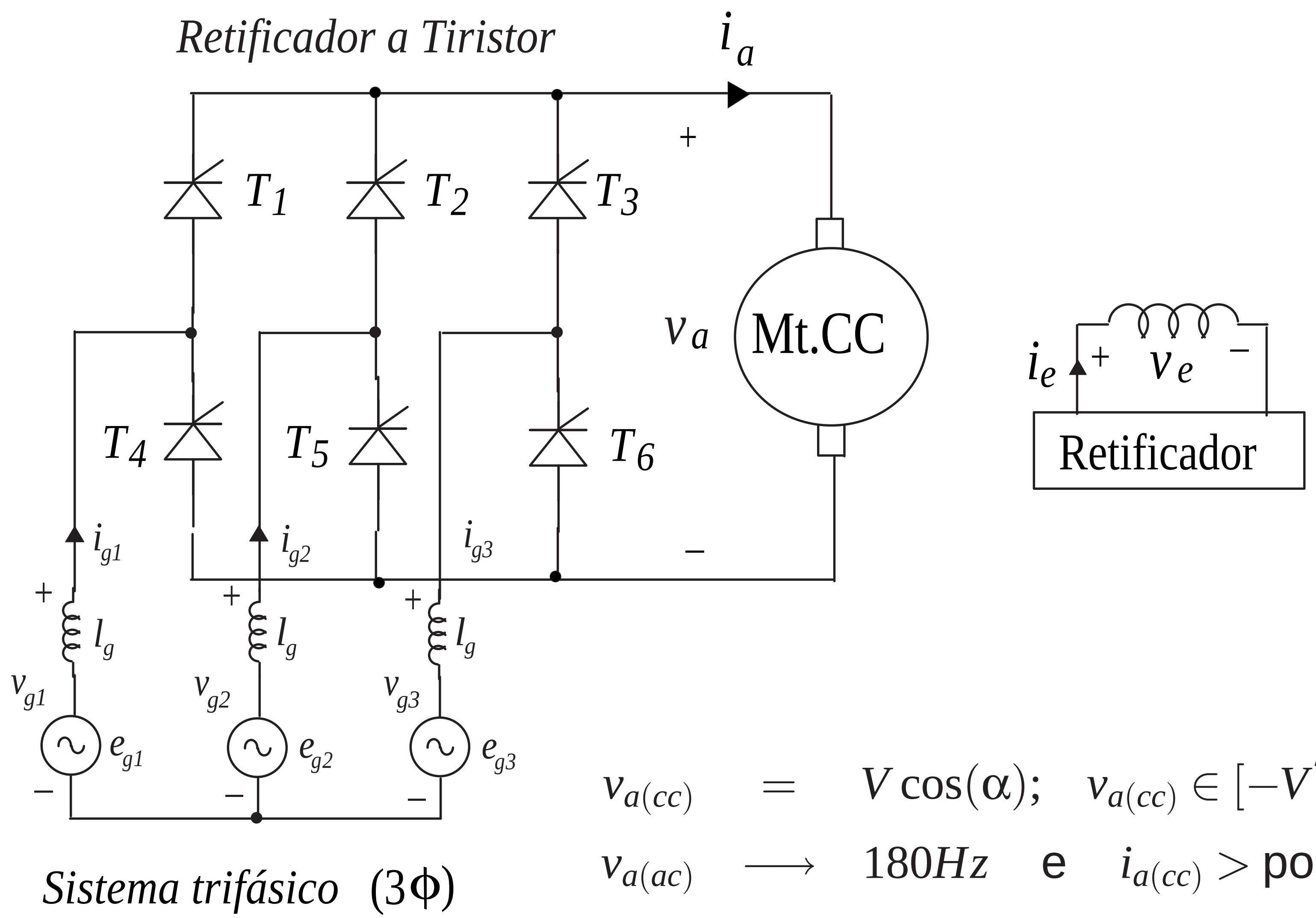
Pólos reais idênticos em malha fechada:

$$\begin{aligned} k_{ii} &= r_a/(4T_v) \\ T_a &= k_{pi}/k_{ii} \Rightarrow k_{pi} = r_a T_a/(4T_v) \end{aligned}$$

Função de transferência malha fechada resultante

$$I_a(s) = G_{fi}(s) I_a^*(s) = \frac{1}{(2T_v s + 1)^2} I_a^*(s) \cong \frac{1}{T_v' s + 1} I_a^*(s) \tag{35}$$

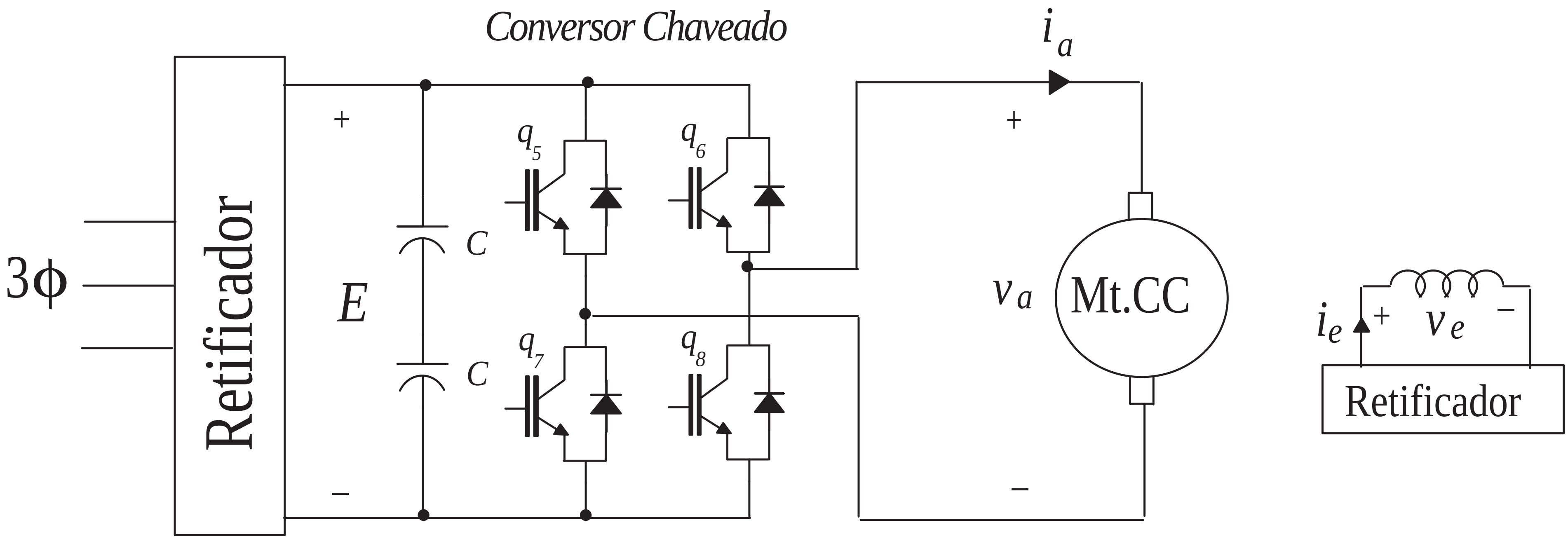
Fonte de tensão (retificador trifásico a tiristor)



$$v_{a(cc)} = V\cos(\alpha); \quad v_{a(cc)} \in [-V', V']$$

$$v_{a(ac)} \longrightarrow 180Hz \quad \text{e} \quad i_{a(cc)} > \text{positiva}$$

Fonte de tensão (conversor chaveado)



$$v_{a(cc)} = (\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2})E; \quad v_{a(cc)} \in [-E/2, E/2]$$

$v_{a(ac)} \longrightarrow 10kHz$ e $i_{a(cc)} >$ positiva ou negativa