UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais de segunda ordem

Prof. Adolfo Herbster
24 de Agosto de 2021

Lição atual: Equações diferenciais de segunda ordem: introdução e resolução de equações lineares homogêneas I

"Lembre-se da Lei da Semeadura e da Colheita."

Introdução às equações diferenciais de segunda ordem

Capítulo: Boyce 3, Zill 4, Nagle 4

Na unidade anterior, aprendemos métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem, em especial, os métodos das **equações separáveis** e **equações exatas**. Nesta unidade, buscaremos solucionar as equações diferenciais de segunda ordem, em especial, as EDOs lineares de coeficientes constantes[1].

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é definida como:

$$P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = f(t). \tag{1}$$

A equação é homogênea caso $f(t) = 0$. Caso contrário, a equação diferencial é não homogênea. Em problemas físicos, o termo d^2y/dt^2, ou seja, a derivada segunda da variável dependente $y(t)$ em relação à t, representa a aceleração: a taxa de variação da velocidade dy/dt.

[1] Estas equações serão utilizadas em disciplinas como Circuitos Elétricos II, Ondas e linhas e Eletrônica de Potência.

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.1, Zill 4.3, Nagle 4.2 e 4.3

Problema: Determinar a solução da equação

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Caso $a = 0$, a solução é conhecida e igual a $y(t) = Ce^{\tau t}$, em que C é uma constante qualquer e $\tau = -{}^{c}/_{b}$. Portanto, é suposto, inicialmente, que a solução da Eq. 2 seja do tipo $y(t) = Ce^{rt}$. Então, ao substituir esta solução na Eq. 2, é obtida a equação característica (ou auxiliar):

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.1 e 3.4, Zill 4.3, Nagle 4.2 e 4.3

Há três casos possíveis:

1. Raízes reais distintas (como determinar C_1 e C_2?):

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{4}$$

2. Raízes complexas (auxílio da fórmula de Euller[4]):

$$y(t) = e^{\alpha t} \left(C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \right) \tag{5}$$

3. Raízes idênticas (redução de ordem):

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} \tag{6}$$

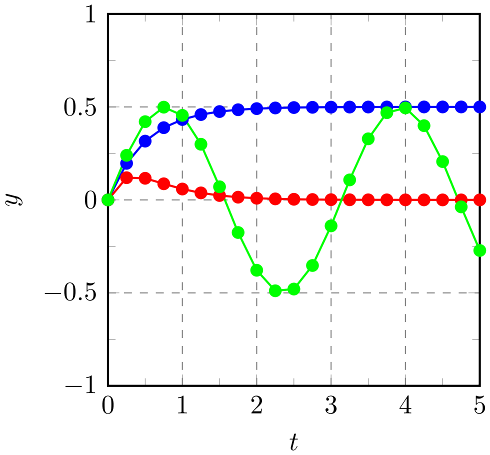
[4] $e^{-it} = \cos t - i \sin t$

Exemplos

Considere os exemplos:

- Exemplo 1: $y'' - 4y = 0$
- Exemplo 2: $y'' + 2y' = 0$
- Exemplo 3: $y'' + 6y' + 8y = 0$
- Exemplo 4: $y'' + 2y' + 2y = 0$
- Exemplo 5: $y'' - 4y' + 5y = 0$
- Exemplo 6: $y'' + 4y = 0$

Para todos os exemplos, as condições iniciais são: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ (resposta ao impulso).



Exemplo 7: Determine a solução geral da equação diferencial:

- $y'' + 2y' + 2y = 0$;
- $4y'' + 9y = 0$.

Exemplo 8: Determine e esboce o gráfico da solução da equação diferencial dada. Determine seu comportamento para valores elevados de t.

- $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;
- $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(\pi/4) = 2,\ y'(\pi/4) = -2$;

Exercício 1: Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$.

Exercício 2: Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t}$.

Exercício 3: Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y = 0,\ y(0) = 5/4,\ y'(0) = -3/4.$$

Faça o gráfico da solução $0 \leqslant t \leqslant 2$ e determine seu valor mínimo.

Exercício 4: Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$. Depois, encontre α de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Exercício 5: Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$. Depois, encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Próxima aula ...

Tópicos que serão abordados na próxima aula:

- método da redução de ordem;
- resolução de equações lineares homogêneas;
- equações de Cauchy-Euller.

Lição atual: Método da redução de ordem, resolução de equações lineares homogêneas II e equações de Cauchy-Euller

"Sem dúvida, se colocares pouco sobre pouco,

e o fizeres com frequência, logo o pouco se tornará muito."

Introdução

Na aula anterior, conhecemos as equações diferenciais de segunda ordem, em especial, com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{7}$$

Naquela oportunidade, vimos como encontrar a solução desta equação diferencial na forma

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

em que r_1 e r_2 são raízes do polinômio característico

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Naquele momento, então, estudamos o caso em que as raízes deste polinômio são distintas (reais ou complexas). E se as raízes forem idênticas?

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.5, Zill 4.3, Nagle 4.2

Dada uma equação diferencial homogênea de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{8}$$

a solução é

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \tag{9}$$

quando as raízes do polinômio característico são distintas, em que as constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir de (mostre)

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(r_2 - r_1)\, e^{(r_1+r_2)t}} \begin{pmatrix} r_2 e^{r_2 t} & -e^{r_2 t} \\ -r_1 e^{r_1 t} & e^{r_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Boyce 3.5, Zill 4.3, Nagle 4.2

Entretanto, quando as raízes do polinômio característico são iguais $(r_2 = r_1)$, não é possível determinar o valor das constantes C_1 e C_2 de acordo com a Eq. 10, pois $r_2 - r_1 = 0$ no denominador[2].

Por outro lado, como $y_1(t) = Ce^{r_1 t}$ é uma solução já conhecida, aplica-se o método da redução de ordem. Desta forma, a solução geral é:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} \tag{11}$$

[2]Maiores detalhes serão apresentados na próxima aula - dependência e independência linear.

Redução de ordem

Boyce 3.5, Zill 4.2, Nagle 4.7

Para determinar a solução da Eq. 7, utilizamos o método conhecido como **redução de ordem**. Podemos construir uma segunda solução a partir de uma solução conhecida $y_1(t)$. Uma forma para determinar a segunda solução consiste em reduzir a ordem da equação diferencial:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \Rightarrow y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{12}$$

A segunda solução é definida como:

$$y_2(t) = v(t)y_1(t). \tag{13}$$

Ao substituir $y_2(t)$ na equação diferencial (equação diferencial de primeira ordem para a função v') encontramos

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + py_1\right) v' = 0 \Rightarrow v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) v' = 0. \tag{14}$$

Exemplo 9: Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

- $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t;$
- $(t-1)y'' - ty' + y = 0, \quad t > 1; \quad y_1(t) = e^t;$

Exemplo 10: A partir do método da redução de ordem e considerando que a solução $y_1(t) = Ce^{r_1 t}$ já é conhecida, encontre a solução da equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{15}$$

quando as raízes da equação característica forem idênticas.

Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Exercício

Exercício 6: Resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução.

- $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$
  Solução: $y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$
- $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1;$
  Solução: $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

Exercício 7: Considere o problema de valor inicial $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

- Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico da solução;
- Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo.
- Mude a segunda condição inicial para $y'(0) - b > 0$ e encontre a solução em função de b.
- Encontre as coordenadas do ponto de máximo (t_M, y_M) em função de b. Descreva a dependência em b de t_M e de y_M quando b cresce.

Equações de Cauchy-Euller

Boyce 5.5, Zill 6.1, Nagle 4.7

Uma equação da forma

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0, \quad t > 0, \tag{16}$$

em que α e β são constantes reais, é chamada **equação de Cauchy-Euller.** A solução da equação de Cauchy-Euller é suposta $y(t) = t^m$ e, portanto, a equação auxiliar é

$$m^2 + (\alpha - 1)\, m + \beta = 0. \tag{17}$$

As soluções gerais da equação de Cauchy-Euller são

$$y(t) = C_1 t_1^m + C_2 t_2^m, \,\mathrm{se}\, m_1 \neq m_2 \tag{18}$$

$$y(t) = t_1^m (C_1 + C_2 \ln t), \,\mathrm{se}\, m_1 = m_2 \tag{19}$$

$$y(t) = t^\lambda [C_1 \cos(w \ln t) + C_2 \sin(w \ln t)], \,\mathrm{se}\, m_1 = m_2 = \lambda \pm \imath w \,\mathrm{com}\, w > 0. \tag{20}$$

Exemplo 11: Determine a solução geral das equações diferenciais abaixo:

- $t^2y'' - ty' - 8y = 0$ em $(0, \infty)$.
- $6t^2y'' + 5ty' - y = 0$ em $(0, \infty)$.

Exemplo 12: Dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução de

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \; t > 0,$$

encontre uma segunda solução linearmente independente.

Exercício 8: Determine a solução das seguintes equações diferenciais:

- $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$, $t > 0$.
- $t^2y'' + 2ty' + 1/4y = 0$, $t > 0$.

Próxima aula ...

Tópicos que serão abordados na próxima aula:

- dependência e independência linear;
- Wronskiano;
- existência e unicidade de soluções (equações homogêneas).

Lição atual: Dependência e independência linear, Wronskiano e existência e unicidade de soluções (equações homogêneas)

“As pessoas só amam verdadeiramente aquilo que fazem no momento em que lhe prestam importância.”

Introdução

Na aulas anteriores, buscamos determinar a solução da equação diferencial

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0, \tag{21}$$

em que $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ são funções definidas em um intervalo I. Neste caso, quando as funções $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ são constantes, determinamos a solução da EDO a partir das raízes do polinômio característico. Observamos que, neste caso, a solução é sempre composta por duas funções $y_1(t)$ e $y_21(t)$. Entretanto, quais as condições para a existência da solução da Eq. 21?

Podemos afirmar que são as únicas soluções? Para responder estas duas perguntas, devemos apresentar dois conceitos importantes: (in)dependecia linear de funções e wronskiano.

Dependência linear - Definição

Zill 4.1.2

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ é linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t) = 0, \tag{22}$$

para todo t no intervalo.

Exemplo 01: Mostre que as funções $f_1(t) = \sin(2t)$ e $f_2(t) = \sin(t)\cos(t)$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Independência linear - Definição

Zill 4.1.2

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ é linearmente independente em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo. Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t) = 0, \tag{23}$$

para todo t no intervalo, são $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Exemplo 02: Mostre que as funções $f_1(t) = \sin(2t)$ e $f_2(t) = \cos(t)$ são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Wronskiano - Definição

Zill 4.1.2, Nagle 4.2

Suponha que $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. O determinante

$$W(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{24}$$

é chamado de Wronskiano.

Determine o Wronskiano das soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, quando as raízes do polinômio característicos são i) reais e distintas, ii) reais e iguais e iii) complexas.

Wronskiano

Zill 4.1.2, Nagle 4.2

Teorema 1

Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo aberto I e se $W(f,g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I, então $W(f,g)(t) = 0$ para todo t em I.

É importante observar:

- o que o Teorema afirma:
  - se $W(f,g)(t_0) \neq 0$ então f e g são linearmente independentes (em algum ponto t_0 em I);
  - se f e g são linearmente dependentes em I, então $W(f,g)(t) = 0$ para todo t em I.
- o que o Teorema não afirma:
  - se f e g são linearmente independentes então $W(f,g)(t_0) \neq 0$ então (em algum ponto t_0 em I);
  - se $W(f,g)(t) = 0$ então f e g são linearmente dependentes em I, então para todo t em I.

Exercício 9: Determine se as funções abaixo são linearmente dependentes no intervalo (0,1).

- $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{-4t}$;
- $y_1(t) = te^{2t}$, $y_2(t) = e^{2t}$;
- $y_1(t) = t^2 \cos(\ln t)$, $y_2(t) = t^2 \sin(\ln(t))$;
- $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = e^t$.

Exercício 10: Para cada um dos seguintes itens, determine se as três funções dadas são linearmente dependentes ou independentes em $(\infty, -\infty)$.

- $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = t^2$;
- $y_1(t) = -3$, $y_2(t) = 5\sin^2(t)$, $y_3(t) = \cos^2(t)$;
- $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$, $y_3(t) = t^2e^t$;
- $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cosh(t)$.

Existência e unicidade de soluções

Zill 4.1

Teorema 2 (Critério para independência linear de soluções)

Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se e somente se $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo t no intervalo.

Teorema 3 (Princípio da superposição)

Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

em um intervalo I. Então a combinação linear $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ é também uma solução no intervalo, com C_1 e C_2 constantes arbitrárias.

Existência e unicidade de soluções

Zill 4.1

Teorema 4 (Existência e unicidade de um conjunto fundamental de soluções)

Existe um conjunto fundamental de soluções[4] *para a equação diferencial*

$$ay'' + by' + cy = 0, \text{ sujeita a } y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0$$

em um intervalo I. Se $t = t_0$ em algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(t)$ para o problema de valor inicial acima neste intervalo.

[4] Qualquer conjunto y_1 e y_2 de soluções linearmente independentes em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo.

Exercício 11: Nos problemas a seguir, verifique que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo indicado. Forme a solução geral.

- $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3t}, e^{4t}, $(-\infty, \infty)$;
- $y'' - 4y = 0$; $\cosh(2t)$, $\sinh(2t)$, $(-\infty, \infty)$;
- $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^{t}\cos(2t)$, $e^{t}\sin(2t)$, $(-\infty, \infty)$;
- $t^2y'' - 6ty' + 12y = 0$; t^3, t^4, $(0, \infty)$;
- $t^2y'' + ty' + y = 0$; $\cos(\ln t)$, $\sin(\ln t)$, $(0, \infty)$;
- $y^{(4)} + y'' = 0$; 1, t, $\cos(t)$, $\sin(t)$, $(-\infty, \infty)$;

Existência e unicidade de soluções

Zill exercício 47 4.1, Boyce 3.3

Teorema 5 (Teorema de Abel)

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, em que q e q são funções contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = C * \exp\left[-\int p(t)dt\right], \tag{25}$$

em que C é uma constante que depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é zero para todo t em I (se C = 0) ou nunca se anula em I (se $C \neq 0$).

Consequência do teorema de Abel: é possível determinar o wronskiano de qualquer conjunto fundamental de soluções sem resolver a equação diferencial.

Exemplos

Exemplo 13: Determine o wronskiano sem resolver a equação:

- $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0;$
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0;$

Exemplo 14: Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de

$$ty'' + 2y' + te^t y = 0$$

e se $W(y_1, y_2) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.

Wronskiano e existência e unicidade de soluções

Boyce 3.3

Teorema 6

Seja y_1 e y_2 soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, em que p e q são contínuas em um intervalo aberto I. Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I. De outro modo, y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula em I.

Exercícios

Exercício 12: Prove que, se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

Exercício 13: Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ é constante, o que isto implica sobre os coeficientes p e q ?

Exercício 14: Mostre que t e t^2 são linearmente independentes em $-1 < t < 1$; de fato, são linearmente independentes em qualquer intervalo. Mostre, também, que $W(t, t^2)$ é zero em $t = 0$. O que você pode concluir sobre a possibilidade de t e t^2 serem soluções de um equação diferencial da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$? Verifique que t e t^2 são soluções da equação $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$. Isso contradiz sua conclusão ? O comportamento do wronskiano de t e t^2 contradiz o Teorema 5?

Próxima aula ...

Na próxima aula iremos aplicar os conceitos aprendidos até aqui para analisar oscilações livre (sistema massa-mola) e circuitos RLC (sem excitação). Iremos verificar que estes sistemas podem ser representados por uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

Lição atual: Aplicações I: oscilações livres e circuito RLC I

“Saber aproveitar as ocasiões é um traço de talento raro. Quando estas se apresentam, somente aquele que está preparado sabe tirar-lhes proveito.”

Introdução

Nesta aula aplicaremos os conceitos até aqui aprendidos para descrever:

- o deslocamento vertical $x(t)$ de um bloco de massa m suspenso por uma mola de constante k com posição e velocidade iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$, respectivamente;
- o deslocamento vertical $x(t)$ de um bloco de massa m suspenso por uma mola de constante k com posição e velocidade inicials $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$, respectivamente, com amortecimento presente (constante b);
- a tensão (ou corrente) em algum componente de um circuito RLC (em série ou paralelo).

Como será observado, a equação que descreve essas variáveis é do tipo

$$ay'' + by' + cy = 0,\ y(0) = x_0,$$

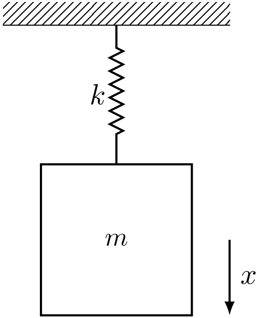
cuja solução

$$y(x) = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t},$$

em que r_1 e r_2 são raízes do polinômio característico $ar^2 + br + c = 0$.

Oscilações livres

Zill 5.1, Nagle 4.9, Boyce 3.8



Equação diferencial (com condição inicial):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0', \tag{26}$$

em que m é a massa do bloco, k a constante de Hooke. O deslocamento e velocidade inicial são, em ordem, x_0 e x_0'.

Solução:

$$x(t) = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt, \tag{27}$$

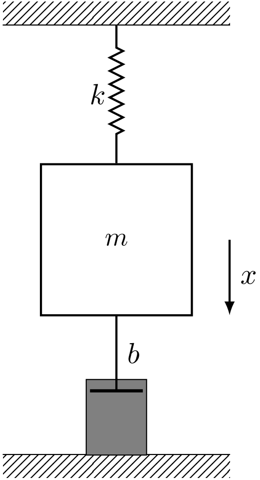
ou

$$x(t) = A \cos\left(wt + \phi\right), \tag{28}$$

com $w = \sqrt{k/m}$ (frequência natural de oscilação), $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e $\tan\phi = C_2/C_1$.

Oscilações livres com amortecimento

Zill 5.2, Nagle 4.9, Boyce 3.8



Equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{29}$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0, \tag{30}$$

Solução da equação auxiliar:

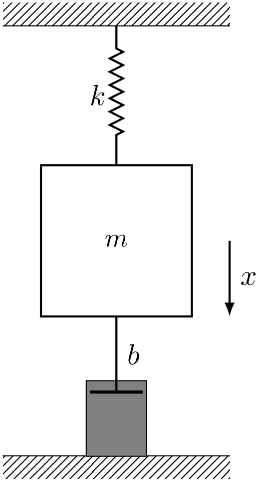
$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \tag{31}$$

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \tag{32}$$

em que $\lambda = {}^{b}\!/_{2a}$ (constante de atenuação).

Oscilações livres com amortecimento

Zill 5.2, Nagle 4.9, Boyce 3.8



Soluções:

- $\lambda^2 - w^2 > 0$: Superamortecido.

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - w^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - w^2}t}\right) \tag{33}$$

- $\lambda^2 - w^2 = 0$: Criticamente amortecido.

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 + C_2 t\right) \tag{34}$$

- $\lambda^2 - w^2 < 0$: Subamortecido.

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + C_2 \sin\sqrt{w^2 - \lambda^2}t\right) \tag{35}$$

ou

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + \phi\right), \tag{36}$$

com $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e $\tan\phi = {}^{C_2}/_{C_1}$.

Exemplo 15: Suponha um movimento de um sistema massa-mola governado por

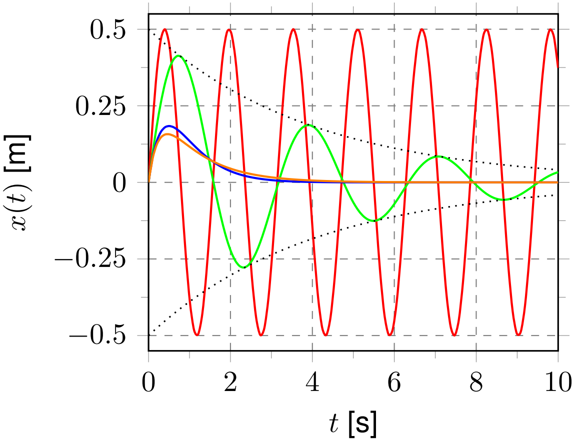
$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \qquad (37)$$

Determine a equação do movimento e esboce o gráfico para os casos em que i) $b = 0$, ii) $b = 0,5$, iii) $b = 4$ e iv) $b = 5$. Soluções:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \sin t \\ x(t) &= 0.5e^{-0,25t} \sin 1.98t \\ x(t) &= te^{-2t} \\ x(t) &= {}^{1}\!/_{3} \left(e^{-t} - e^{-4t}\right) \end{aligned}$$

Oscilações livres

Exemplo



Soluções:

$$x(t) = \cos t \sin t$$

$$x(t) = 0.5e^{-0,25t} \sin 1.98t$$

$$x(t) = te^{-2t}$$

$$x(t) = {}^{1}\!/_{3} \left(e^{-t} - e^{-4t}\right)$$

Circuito RLC em paralelo

Zill 5.4, Nagle 5.7

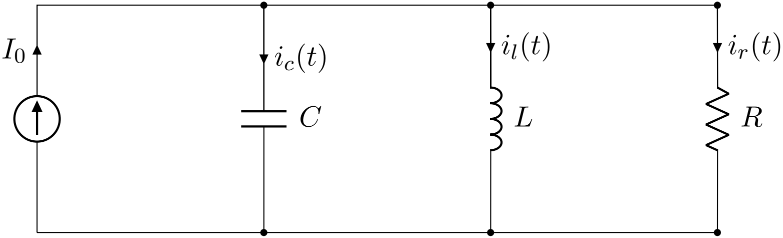


Figura 1: Circuito RLC em paralelo.

Equação diferencial:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{38}$$

Como calcular a corrente no indutor do circuito RCL em paralelo?

Circuito RLC em paralelo

Zill 5.4, Nagle 5.7

Equação característica:

$$r^2 + \frac{1}{RC}r + \frac{1}{LC} = 0 \tag{39}$$

Soluções:

$$r = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} - \frac{1}{LC}}$$

Fazendo:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \text{ (constante de atenuação)}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (frequência natural)}.$$

Teremos:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{40}$$

Circuito RLC em paralelo

Zill 5.4, Nagle 5.7

- Resposta **superamortecida**: raízes reais e diferentes ($\alpha > \omega_0$).

$$v(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{41}$$

- Resposta **subamortecida**: raízes complexas ($\alpha < \omega_0$).

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \right) \tag{42}$$

- Resposta **criticamente amortecida**: raízes idênticas ($\alpha = \omega_0$).

$$v(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 t e^{-\alpha t} \tag{43}$$

Exemplos - resposta superamortecida

R = 200 Ω
C = 0,2 μF
L = 50 mH
$v(0) = 12$ V
$i_L(0) = 30$ mA

$v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20.000t}$ V, $t \geqslant 0$

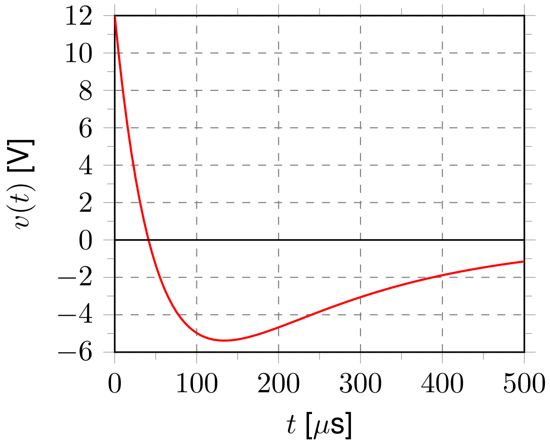


Figura 2: Resposta superamortecida - circuito RLC em paralelo.

Exemplos - resposta subamortecida

R = 20 kΩ
C = 0,125 μF
L = 8 H
$v(0) = 0$ V
$i_C(0) = 12,25$ mA

$v(t) = 100e^{-200t}\sin(979,80t)$ V, $t \geqslant 0$

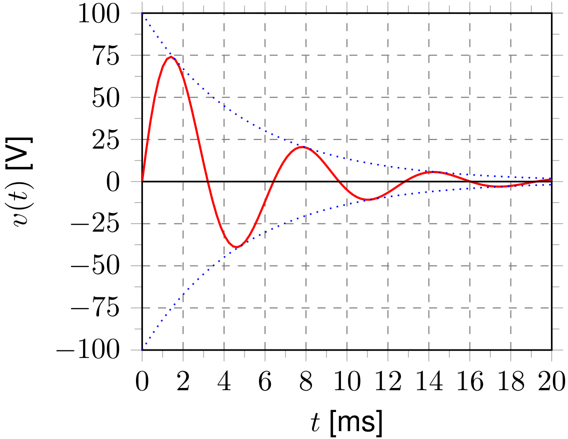


Figura 3: Resposta subamortecida - circuito RLC em paralelo.

Exemplos - criticamente amortecida

R = 4 kΩ
C = 0,125 μF
L = 8 H
$v(0) = 0$ V
$i_C(0) = 12,25$ mA

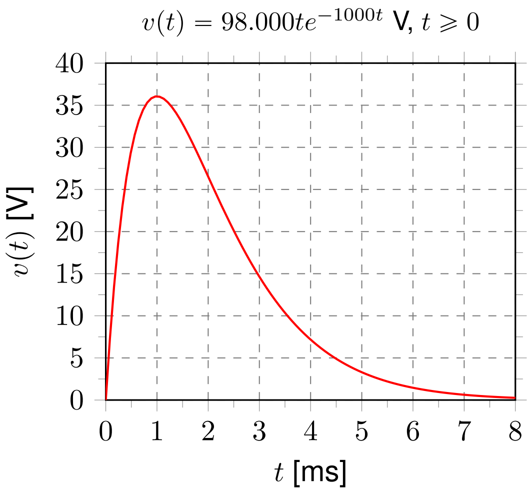


Figura 4: Resposta criticamente amortecida - circuito RLC em paralelo.

Circuito RLC em série

Zill 5.4, Nagle 5.7

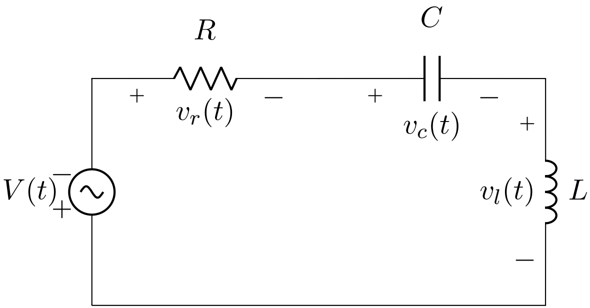


Figura 5: Circuito RLC em série.

Equação diferencial:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{44}$$

Como calcular a tensão no capacitor do circuito RLC em série?

Circuito RLC em série

Zill 5.4, Nagle 5.7

Equação característica:

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \tag{45}$$

Soluções:

$$r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{(2L)^2} - \frac{1}{LC}}$$

Fazendo:

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

Teremos:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{46}$$

Circuito RLC em série

Zill 5.4, Nagle 5.7

- Resposta **superamortecida**: raízes reais e diferentes.

$$v(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{47}$$

- Resposta **subamortecida**: raízes complexas.

$$v(t) = e^{\lambda t} \left(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\right) \tag{48}$$

- Resposta **criticamente amortecida**: raízes idênticas.

$$v(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \tag{49}$$

Exemplos - resposta superamortecida

R = 2,5 kΩ
C = 0,1 μF
L = 100 mH
$v_c(0) = 100$ V
$i_L(0) = 0$ A

$$i(t) = {}^1\!/\!_{15}e^{-5000t} - {}^1\!/\!_{15}e^{-20.000t} \text{ A},\ t \geqslant 0$$

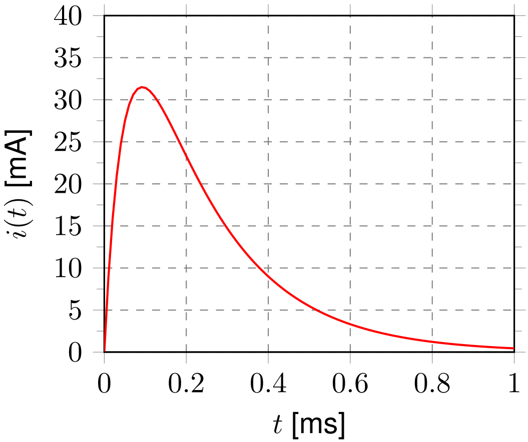


Figura 6: Resposta superamortecida - circuito RLC em série.

Exemplos - resposta subamortecida

R = 560 Ω
C = 0,1 μF
L = 100 mH
$v_C(0) = 100$ V
$i_L(0) = 0$ A

$i(t) = 0,1042e^{-2800t}\sin(9600t)$ A, $t \geqslant 0$

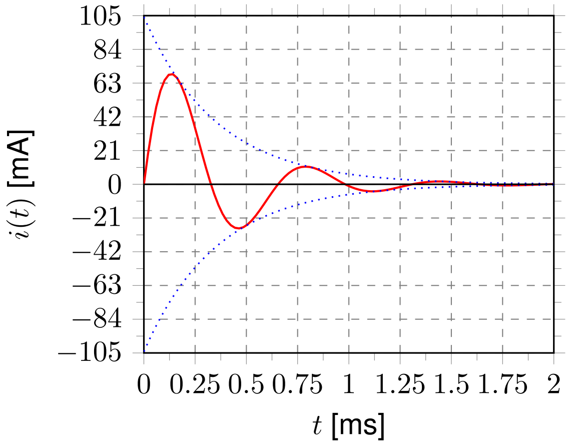


Figura 7: Resposta subamortecida - circuito RLC em série.

Exemplos - resposta criticamente amortecida

R = 2 kΩ
C = 0,1 μF
L = 100 mH
$v_C(0) = 100$ V
$i_L(0) = 0$ A

$i(t) = 1000te^{-10.000t}$ A, $t \geqslant 0$

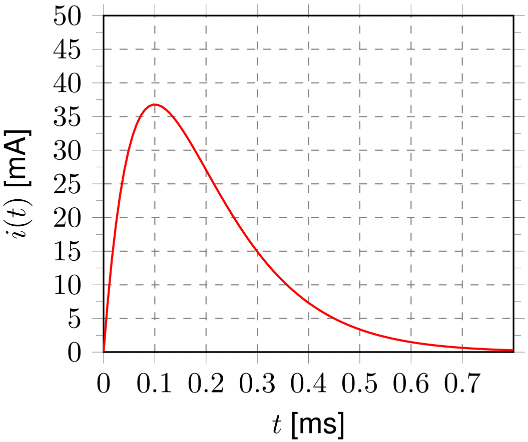


Figura 8: Resposta criticamente amortecida - circuito RLC em série.

Exercício 15: Como exercício, determine a solução de cada exemplo ilustrado nesta nota de aula (três exemplos de aplicação de um circuito RLC em paralelo e três exemplos de aplicação de um circuito RLC em série).

Na próxima aula ...

Na próxima aula iremos determinar a solução da equação diferencial não homogênea

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

em que $f(t)$ é uma função polinomial, exponencial, $\sin \beta t$, $\cos \beta t$, ou somas e produtos destas funções.

Lição atual: Equações não homogêneas: Método dos coeficientes a determinar

“Não são as ferramentas que fazem o operário,

é a engenhosidade, a habilidade, a perseverança.”

Introdução

Como apresentado na aula anterior, o deslocamento vertical de um bloco de massa m suspenso por uma mola de constante k, e amortecido (constante b), com posição e velocidade iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$, respectivamente, é descrita pela solução da EDO

$$mx'' + bx' + kx = 0. \tag{50}$$

Entretanto, quando há uma força externa $F(\gamma, t)$, a equação anterior é reescrita como

$$mx'' + bx' + kx = F(\gamma, t). \tag{51}$$

Neste caso, como determinar a nova solução da EDO?

Equações diferenciais não homogêneas

Zill 4.1, Nagle 4.4, Boyce 3.6

O problema inicial consiste em determinar a solução a equação diferencial não homogênea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{52}$$

em que p, q e f são funções contínuas dadas em um intervalo aberto I. Qualquer função y_p, independente de parâmetros, que satisfaça a Eq. 52 é chamada de **solução particular**. Para determinar a solução geral da equação diferencial anterior, fazemos uso do teorema a seguir.

Teorema 7

A solução geral da equação não homogênea (Eq. 52) pode ser escrita na forma:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t) = y_c(t) + y_p(t), \tag{53}$$

em que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada, C_1 e C_2 são constantes arbitrárias e y_p é solução particular da equação não homogênea (Eq. 52).

Equações diferenciais não homogêneas

Zill 4.1, Nagle 4.4, Boyce 3.6

A equação diferencial homogênea associada é expressa como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{54}$$

cuja solução é $y_c(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$[3]. Portanto, é necessário que:

$$y_c'' + p(t)y_c' + q(t)y_c = 0.$$

Ao considerar $p(t)$ e $q(t)$ constantes na Eq. 52, então

$$y_c(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t},$$

em que r_1 e r_2 são raízes do polinômio característico

$$r^2 + pr + q = 0.$$

[3] em $y_c(t)$, c representa “complementar”.

Método dos coeficientes indeterminados

Zill 4.4 - 4.5, Nagle 4.4 - 4.5, Boyce 3.6

O método requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $y_p(t)$, mas com os coeficientes não especificados. A expressão hipotética para $y_p(t)$ é substituída na Eq. 52 e tentamos determinar os coeficientes para satisfazer a solução. Caso não funcione, devemos alterar a forma da solução.
Buscaremos soluções do tipo:

- $y_p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} \ldots + a_1 t + a_0$;
- $y_p(t) = e^{alphat}$;
- $y_p(t) = a \cos wt + b \sin wt$;
- somas e produtos dessas funções.

Exemplo - caso 01

Exemplo 16: Determine a solução do problema de valor inicial abaixo.

- $y'' + y = 1$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 7$;
  Solução:

- $y'' - 2y' + y = t^2 - t - 3$, $y(0) = -2$ e $y'(0) = 1$;
  Solução:

- $t^2y'' + ty' - 4y = 2t^4$, em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$;
  Solução:

Exemplo - caso 02

Exemplo 17: Determine a solução geral das equação diferenciais abaixo.

- $y'' - 7y' + 12y = 4e^{2t}$;
- $y'' - 7y' + 12y = 5e^{4t}$;
- $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4t}$;
- $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}(t^2 + 2t - 1)$;
- $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}(12t^2 + 8t + 6)$;
- $4y'' + 4y' + y = e^{-t/2}(144t^2 + 48t - 8)$;

Exemplo - caso 03

Exemplo 18: Determine a solução geral das equações diferenciais abaixo.

- $y'' - 2y' + y = 5\cos 2t + 10\sin 2t$;
- $y'' + 4y = 8\cos 2t + 12\sin 2t$;
- $y'' + 3y' + 2y = (16 + 20t)\cos t + 10\sin t$;
- $y'' + y = (8 - 4t)\cos t - (8 + 8t)\sin t$;
- $y'' - 3y' + 2y = e^{-2t}\left[2\cos 3t - (34 - 105t)\sin 3t\right]$;
- $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\left[(6 - 16t)\cos 2t - (8 + 8t)\sin 2t\right]$;

Princípio da superposição

Teorema 8

Seja y_1 uma solução da equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = f_1(t),$$

e y_2 uma solução de

$$ay'' + by' + cy = f_2(t).$$

Então, para quaisquer constantes k_1 e k_2, a função $k_1y_1 + k_2y_2$ é uma solução da equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = k_1f_1(t) + k_2f_2(t).$$

Exemplo

Princípio da superposição

Exemplo 19: Se a função $y_p^1(t) = t^4/15$ é uma solução particular de

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 2t^4, \tag{55}$$

em $(-\infty, \infty)$ e $y_p^2(t) = t^2/3$ é uma solução particular de

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 4t^2, \tag{56}$$

em $(-\infty, \infty)$. Use o princípio da superposição para determinar a solução particular de

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 2t^4 + 4t^2, \tag{57}$$

em $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 20: Determine a solução particular para

- $y'' + 3y' + 2y = 3t + 10e^{3t}$;
- $y'' + 3y' + 2y = -9t + 20e^{3t}$;
- $y'' - y = 8te^t + 2e^t$.

Próxima aula ...

Na próxima aula será apresentado um método mais geral para resolução de equações diferenciais não homogêneas, denominado de método da variação de parâmetros.

Lição atual: Equações não homogêneas: Método da variação de parâmetros

"O sucesso é feito de muitos fiascos."

Introdução

Vimos qque o método dos coeficientes indeterminados é um procedimento simples para determinar uma solução particular quando a equação tem coeficientes constantes e o termo não homogêneo é de um tipo especial (função polinomial, exponencial, $\sin$ e $\cos$, e somas e produtos destas). Entretanto, como determinar a solução da EDO

$$y'' + y = \tan(t)\,?$$

Nesta seção será apresentado um método mais geral, chamado de variação de parâmetros, para encontrar uma solução particular.

Método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 4.6, Boyce 3.7

Considerando conhecidas as duas soluções $[y_1(t), y_2(t)]$ do conjunto fundamental da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{58}$$

então a solução particular $y_p(t)$ da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{59}$$

é definida como

$$y_p(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t) \tag{60}$$

em que u_1 e u_2 são duas funções que devem ser determinadas.

Método da variação de parâmetros

Boyce 3.7

Teorema 9

Se as funções p, q e f são contínuas em um intervalo aberto I e se as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada (Eq. 58) à equação não homogênea (Eq. 59),

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

então uma solução particular da Eq. 59 é

$$y_p(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t).$$

A solução geral é

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t). \tag{61}$$

Entretanto, com duas funções a determinar e apenas uma equação diferencial, é necessário definir uma outra relação para satisfazer a equação diferencial.

Método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 4.6, Boyce 3.7

- Deriva-se $y_p(t)$ (Eq. 60), obtendo-se

$$y_p'(t) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'. \tag{62}$$

- Considera-se que (primeira relação)

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{63}$$

- Deriva-se mais uma vez, obtendo-se

$$y_p''(t) = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''. \tag{64}$$

- Ao substituir $y_p(t)$, $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação diferencial não homogênea (Eq. 59), é obtida a segunda relação

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(t). \tag{65}$$

Método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 4.6, Boyce 3.7

Portanto, o método consiste em determinar a solução do seguinte sistema:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \tag{66}$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(t) \tag{67}$$

A solução do sistema é

$$u_1' = \frac{y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(t), \qquad u_2' = \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(t) \tag{68}$$

Ao integrar essas equações, finalmente obtemos:

$$u_1 = -\int \frac{y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(t) dt + C_1, \quad u_2 = \int \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} f(t) dt + C_2 \tag{69}$$

Exemplos

Exemplo 21: Determine a solução particular de

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2} \tag{70}$$

considerando que $y_1 = x$ e $y_2 = x^2$ são soluções da equação homogênea associada.

Exemplo 22: Determine a solução particular de

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 \tag{71}$$

considerando que $y_1 = x$ e $y_2 = e^x$ são soluções da equação homogênea associada.

Exemplo 23: Determine a solução particular de

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}. \tag{72}$$

Exercício

Exercício 16: Encontre uma solução geral em $[-\pi/2, \pi/2]$ para

$$y'' + y = \tan(t). \tag{73}$$

Exercício 17: Ache uma solução particular em $[-\pi/2, \pi/2]$ para

$$y'' + y = \tan(t) + 3t - 1. \tag{74}$$

Exercício 18: Solucione o problema de valor inicial

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{x+1}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -5 \tag{75}$$

considerando que $y_1 = {}^1\!/_{x-1}$ e $y_2 = {}^1\!/_{x+1}$ são soluções da equação homogênea associada.

Comparação entre os métodos

- **Método dos coeficientes indeterminados**: aplicado para equações diferenciais não homogêneas, cuja equação homogênea associada possui coeficientes constantes, em que a função $g(t)$ é um produto entre uma função polinomial e e^{rt} ou $e^{\lambda t} \cos \omega t$ ou $e^{\lambda t} \sin \omega t$.
- **Método da variação de parâmetros**: quando não aplicado o método dos coeficientes indeterminados e são conhecidas duas soluções particulares $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Exercícios

Exercício 19: Nos problemas a seguir, determine uma solução geral para a equação diferencial.

- $y'' + y = \tan^2(t)$;
- $y'' + y = \tan(t) + e^{3t} - 1$;
- $v'' + 4v = \sec^4(2t)$;
- $y'' + y = 3\sec(t) - t^2 + 1$;
- $y'' + 5y' + 6y = 18t^2$;
- $y'' - 6y' + 9y = t^{-3}e^{3t}$.

Próxima aula ...

Na próxima aula aplicaremos o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução das equações diferenciais não homogêneas que descrevem oscilações forçadas.

Lição atual: Aplicações II: oscilações forçadas e circuito RLC II

“Perdeu-se, entre o nascer e o pôr-do-sol,

Uma hora de ouro, com sessenta minutos de diamantes.

Não se oferece recompensa, porque está perdida para sempre.”

Oscilações forçadas

Zill 5.3, Nagle 4.10, Boyce 3.9

Suponha que uma força externa $F_0 \cos \gamma t$ [4] é aplicada em um sistema massa-mola com massa m [kg], constante de amortecimento b [N-s/m] e constante de mola k [N/m]. A equação que descreve o movimento da massa é

$$mx'' + bx' + kx = F_0 \cos \gamma t. \tag{76}$$

A solução dessa equação diferencial é

$$x(t) = x_a(t) + x_p(t), \tag{77}$$

em que $x_a(t)$ é a solução associada à equação diferencial homogênea com coeficientes constantes e $x_p(t)$ a solução particular.

[4] em que F_0 e γ são constantes positivas representando, respectivamente, a amplitude e a frequência da força.

Oscilações forçadas

Solução associada

Considerando que $0 < b^2 < 4mk$ (soluções subamortecidas), as raízes da equação auxiliar são:

$$\begin{aligned} r &= -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}, \\ &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \end{aligned} \tag{78}$$

em que $\lambda = {}^{b}/_{2m}$ e $w = \sqrt{{}^{k}/_{m}}$ é a frequência natural do sistema massa-mola. A solução associada é

$$\begin{aligned} x_a(t) &= e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + C_2 \sin\sqrt{w^2 - \lambda^2}t\right) \\ &= Ce^{-\lambda t} \sin\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + \theta\right), \end{aligned} \tag{79}$$

com $C = \sqrt{C_1 + C_2}$ e $\tan\theta = {}^{C_1}/_{C_2}$.

Oscilações forçadas

Solução particular

A forma da solução particular (método dos coeficientes indeterminados) é

$$x_p(t) = A\cos\gamma t + B\sin\gamma t = D\sin(\gamma t + \phi)\,, \tag{80}$$

com $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\tan\phi = {}^{A}/_{B}$. As constantes A e B são

$$A = (k - m\gamma^2)\frac{F_0}{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}, \quad B = b\gamma\frac{F_0}{(k - m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}, \tag{81}$$

e, portanto, a solução particular é escrita como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(w^2 - \gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}\sin(\gamma t + \phi), \tag{82}$$

com $\tan\phi = \frac{1}{2}\frac{w^2 - \gamma^2}{\lambda\gamma}$.

Solução geral:

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\sin\left(\sqrt{w^2-\lambda^2}t+\theta\right) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(w^2-\gamma^2)^2+b^2\gamma^2}}\sin(\gamma t+\phi) \quad (83)$$

É importante observar que:

- A solução apresenta duas partes: transiente (solução associada, pois $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}=0$) e em regime permanente (solução particular);
- A amplitude $[M(\gamma)]$e a fase $[\phi(\gamma)]$ da solução em regime permanente dependem da frequência da força externa. Estas funções são definidas por:

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{m^2(w^2-\gamma^2)^2+b^2\gamma^2}}, \quad \phi(\gamma) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{w^2-\gamma^2}{\lambda\gamma}\right]. \quad (84)$$

As constantes C_1 e C_2 (obtenha esta solução!) são determinadas a partir de:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha t_o & \sin\alpha t_o \\ -\sin\alpha t_o & \sin\alpha t_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^{-\lambda t_o} \begin{pmatrix} K_1 \\ \frac{K_2 - \lambda K_1}{\alpha}, \end{pmatrix} \tag{85}$$

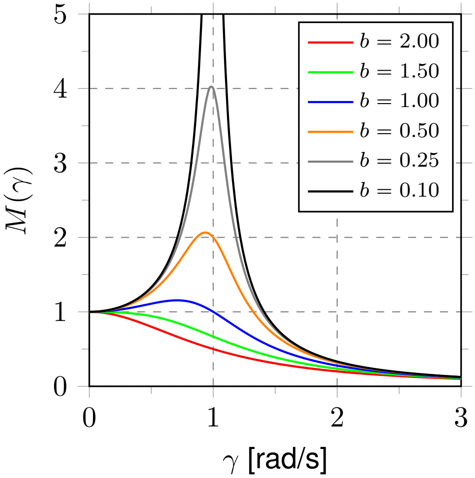
em que $\alpha = \sqrt{w^2 - \lambda^2}$ e

$$K_1 = x(t_o) - x_p(t_o), \tag{86}$$

$$K_2 = x'(t_o) - x'_p(t_o). \tag{87}$$

Oscilações forçadas

Curva de resposta de frequência



Tomando $m = 1$ e $w = 1$, a curva de resposta de frequência é

$$M(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \tag{88}$$

Frequência da força externa em que ocorre ressonância:

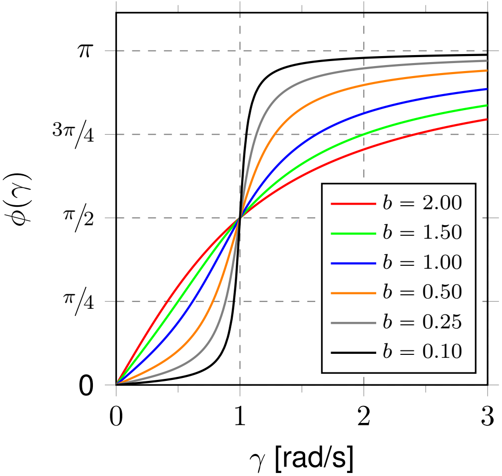
$$\gamma_r = \sqrt{w^2 - 2\lambda^2}, \tag{89}$$

com amplitude máxima

$$M(\gamma_r) = \frac{1/b}{\sqrt{w^2 - \lambda^2}} \tag{90}$$

Oscilações forçadas

Curva de resposta de fase



Ângulo de fase:

$$\phi(\gamma) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{w^2 - \gamma^2}{\lambda\gamma}\right]. \qquad (91)$$

O que ocorre com a oscilação i) $\gamma < w$, ii) $\gamma = w$ e iii) $\gamma \gg w$?

Exemplo 24: Uma força externa de amplitude 3 N e frequência igual a γ rad/s é aplicada em um sistema massa-mola, com massa igual a 1 Kg, constante elástica da mola igual a 1 N/m e fator de amortecimento b N-s/m. A equação que descreve este sistema é

$$x'' + bx' + x = 3\cos t, \tag{92}$$

considerando a condição inicial $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$. Para os seguintes valores de b, as soluções são:

- $b = 1,2$: $x(t) = 3,1250e^{-0,6t}\sin(0,8t + \pi) + 0,8333\sin(t)$;
- $b = 0,6$: $x(t) = 5,2414e^{-0,3t}\sin(0,9539t + \pi) + 1,6667\sin(t)$;
- $b = 0,1$: $x(t) = 30,0376e^{-0,05t}\sin(0,9987t + \pi) + 30\sin(t)$;

Oscilações forçadas

Solução $b = 1,2$

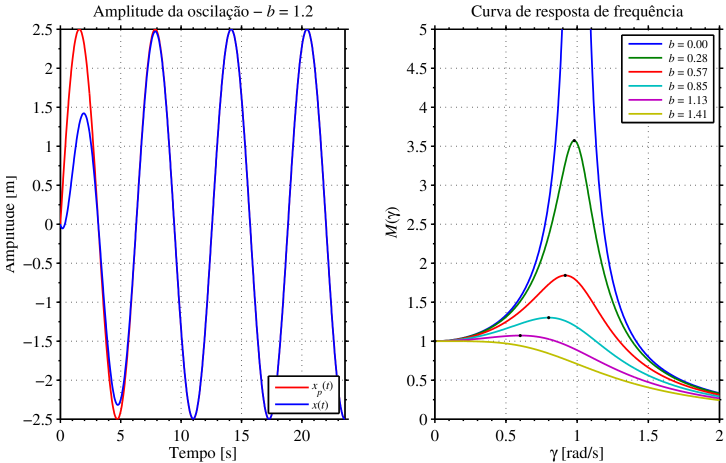


Figura 9: Resposta no tempo e na frequência da oscilação forçada.

Oscilações forçadas

Conjunto de soluções

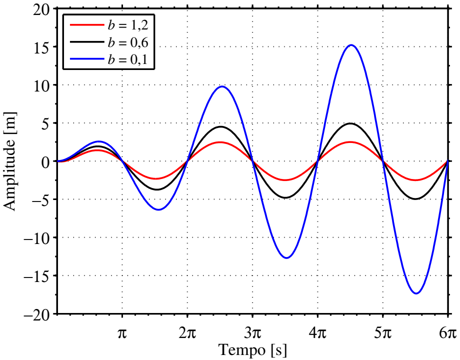


Figura 10: Resposta no tempo e na frequência da oscilação forçada para três coeficientes de amortecimento distintos.

Exercício 20: Determine a amplitude da oscilação de um sistema massa-mola sem amortecimento ($b = 0$) em função da frequência da força externa aplicada. Qual a solução particular quando a frequência natural do sistema w é igual à frequência da força externa γ? Esboce esta solução.

Exercício 21: Esboce a curva de resposta de frequência para o sistema em que $m = 2$, $k = 3$ e $b = 3$.

Exercício 22: Amortecedores em automóveis e aviões podem ser descritos como sistemas massa-mola *superamortecidos*. Derive uma expressão semelhante à Eq. 83 para solução geral da Eq. 76 quando $b^2 > 4mk$.

Exercício 23: Mostre que o período do movimento harmônico simples de uma massa pendurada de uma mola é $2\pi\sqrt{l/g}$, em que l indica o quanto (além de sua extensão natural) a mola é esticada quando a massa está em equilíbrio.

Circuito RLC com excitação

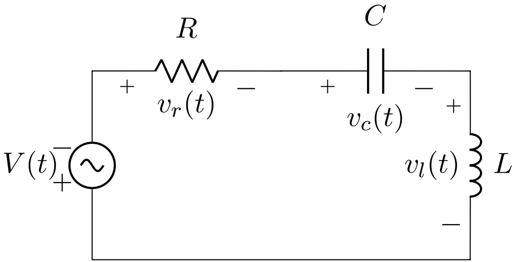


Figura 11: Circuito RLC em série.

Equação diferencial:

$$LCv_c'' + RCv_c' + v_c = V(t) \tag{93}$$

Qual a analogia há entre este equação e a equação que descreve a posição em função do tempo de um sistema massa-mola com força externa ?

A solução é dividida em duas partes: uma parcela associada à equação homogênea $v_{ca}(t)$ e uma à solução particular $v_{cp}(t)$:

$$v_c(t) = v_{ca}(t) + v_{cp}(t). \tag{94}$$

Considerando que $0 < R^2 < {}^{4L}\!/_{C}$ (soluções subamortecidas), as raízes da equação auxiliar são:

$$r = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \tag{95}$$

em que $\lambda = {}^{R}\!/_{2L}$ e $w = \sqrt{{}^{1}\!/_{LC}}$ é a frequência natural do circuito.

A solução $v_{ca}(t)$ é

$$
\begin{aligned}
v_{ca}(t) &= e^{-\lambda t}\left(D_1 \cos\sqrt{w^2-\lambda^2}t + D_2 \sin\sqrt{w^2-\lambda^2}t\right) \\
&= De^{-\lambda t}\sin\left(\sqrt{w^2-\lambda^2}t+\theta\right),
\end{aligned}
\tag{96}
$$

com $D = \sqrt{D_1 + D_2}$ e $\tan\theta = {}^{D_1}/_{D_2}$. Ao considerar que a tensão de excitação é $V_o \cos(\gamma t)$, a solução particular é:

$$
v_{cp}(t) = \frac{V_o}{C\sqrt{L^2(w^2-\gamma^2)^2 + R^2\gamma^2}} \sin\left(\gamma t + \phi\right), \tag{97}
$$

com $\tan\phi = \frac{1}{2}\frac{w^2-\gamma^2}{\lambda\gamma}$.

Solução geral:

$$v_c(t) = De^{-\lambda t}\sin\left(\sqrt{w^2-\lambda^2}\,t+\theta\right) + \frac{V_o}{C\sqrt{L^2(w^2-\gamma^2)^2+R^2\gamma^2}}\sin\left(\gamma t+\phi\right) \tag{98}$$

É importante observar que:

- A solução apresenta duas partes: transiente (solução associada, pois $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} = 0$) e em regime permanente (solução particular);
- A amplitude [$M(\gamma)$]e a fase [$\phi(\gamma)$] da solução em regime permanente depende da frequência da tensão de excitação. Estas funções são definidas por:

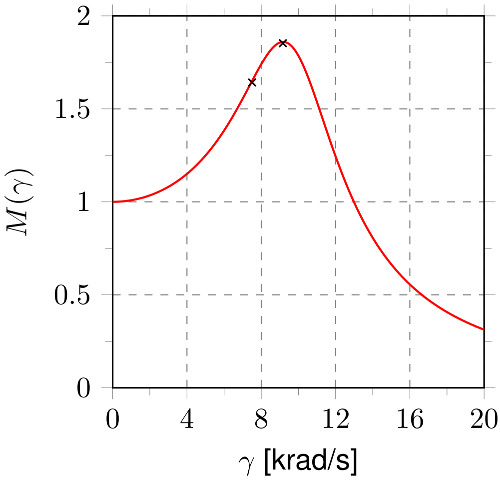
$$M(\gamma) = \frac{1}{C\sqrt{L^2(w^2-\gamma^2)^2+R^2\gamma^2}}, \quad \phi(\gamma) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{w^2-\gamma^2}{\lambda\gamma}\right]. \tag{99}$$

Oscilações forçadas

Curva de resposta em frequência

Exemplo 25:

- Circuito RLC em série com
  - R = 560 Ω
  - C = 0,1 μF
  - L = 100 mH
  - $v_c(0) = 0$ V
  - $v_c'(0) = 0$ V
  - $V(t) = 2\cos(\gamma t)$
- Amplitude em $\gamma = 7508$ [rad/s]: 1,642;
- Amplitude em $\gamma = 9165$ [rad/s]: 1,843; (amplitude máxima)



Exemplos - resposta subamortecida

$\gamma = 7500$ [rad/s]

R = 560 Ω
C = 0,1 μF
L = 100 mH
$v_c(0) = 0$ V
$v_c'(0) = 0$ V
$V(t) = 2\cos(7500t)$

$$v_c(t) = 3,4352e^{-2800t}\sin(9,6\times10^3t - 2,3766) + 3,2978\sin(7,5\times10^3t + 0,8058)\ \text{V},\ t \geqslant 0$$

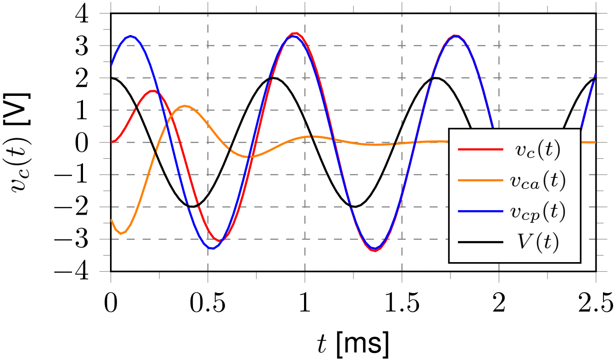


Figura 12: Resposta subamortecida - circuito RLC em série.

Exemplos - resposta subamortecida

$\gamma = 9165$ [rad/s]

R = 560 Ω
C = 0,1 μF
L = 100 mH
$v_c(0) = 0$ V
$v_c'(0) = 0$ V
$V(t) = 2\cos(9165t)$

$$v_c(t) = 3.8752e^{-2800t}\sin(9,6\times 10^3 t - 2,8518) + 3,7202\sin(9,165\times 10^3 t + 0,3022)\ \mathrm{V},\ t \geqslant 0$$

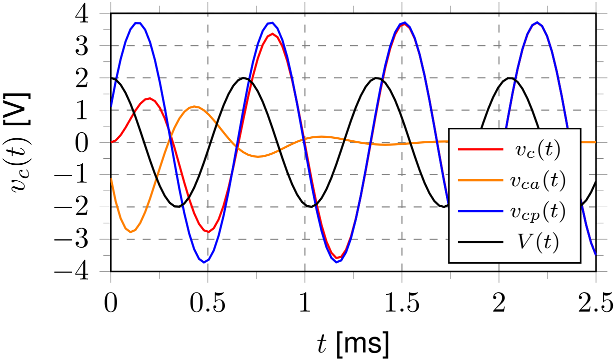


Figura 13: Resposta subamortecida - circuito RLC em série.

Próxima aula

Na próxima aula, os métodos aplicados às EDOs de segunda ordem serão generalizados para equações diferenciais ordinárias de ordem superior ($n > 2$).

Lição atual: Equações de ordem superior (n $>$ 2)

Equações diferenciais lineares de ordem superior

Zill 4.1, Nagle 6.1, Boyce 4.1

Considere uma equação diferencial ordinária linear e não homogênea de ordem n:

$$p_0(t)y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{(n-1)}y' + p_n y = f(t). \tag{100}$$

com as seguintes condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \tag{101}$$

Como determinar a solução dessa equação diferencial ordinária de ordem n?
Felizmente, a estrutura teórica e os métodos de resolução desenvolvidos para equações diferenciais de segunda ordem podem ser aplicados, diretamente, em equações diferenciais de ordem superiores.

Teorema da existência e unicidade

Boyce 4.1

Primeiramente, é importante verificar as condições de existência e unicidade para as equações diferenciais ordinárias conforme Eq. 100.

Teorema 10

Se as funções $p_0, p_1, \ldots, p_n$ e $f(t)$ são contínuas em I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ de Eq. 100 que também satisfaz as condições iniciais (Eq. 101). Esta solução existe em todo o intervalo I.

Teorema 11 (Equação diferencial homogênea)

Se as funções $p_0, p_1, \ldots, p_n$ e $f(t)$ são contínuas em um intervalo aberto I, se as funções $y_1, y_2, \ldots y_n$ são soluções da Eq. 100 com $f(t) = 0$, e se $W(y_1, y_2, \ldots y_n)(t) \neq 0$ para, pelo menos, um ponto t em I, então toda solução da Eq. 100 pode ser expressa como uma combinação linear das soluções $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Exemplos - equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Zill 4.3, Nagle 6.2, Boyce 4.2

Exemplo 26: Verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial e determine seu wronskiano.

- $y''' + y' = 0$, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos t$, $y_3(t) = \sin t$.
- $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$, $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = e^{-t}$, $y_4(t) = te^{-t}$.

Exemplo 27: Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

- $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
- $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.
- $y^{(4)} - 8y' = 0$.

Exemplos - método da redução de ordem

Zill 4.4 - 4.5, Nagle 6.3, Boyce 4.3

Nestes exercícios, será abordado o método da redução de ordem. Neste caso, é possível reduzir a ordem da equação diferencial até que a EDO resultante possua uma solução (ou forma) conhecida.

Exercício 24: Mostre que, se y_1 é uma solução de

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0 \tag{102}$$

então a substituição $y = y_1 v(t)$ nos leva à seguinte equação de segunda ordem para v'

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1)v' = 0. \tag{103}$$

Exercício 25: Determine a solução pelo método da redução de ordem da seguinte equação:

$$(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0,\ t < 2\,,\, y_1(t) = e^t \tag{104}$$

Exemplos - método dos coeficientes indeterminados

Zill 4.4 - 4.5, Nagle 6.3, Boyce 4.3

Nestes próximos exercícios, a EDO de ordem superior é não homogênea, cujo termo não homogêneo é uma função polinomial, exponencial, $\sin$ ou $\cos$, soma ou produto destas funções. Nesta situação, a metodologia de resolução é idêntica à apresentada para equações diferenciais de segunda ordem.

Exercício 26: Determine a solução da equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas:

- $x'' + w^2 x = F_0 \sin wt$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;
- $y''' + 8y = 2t - 5 + 8e^{-2t}$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -4$.

Exercício 27: Determine a solução particular das equações diferenciais:

- $y''' + 3y'' + 2y' - y = e^t(5t^3 + 28t^2 + 24t + 21)$;
- $y''' + y'' - 4y' - 4y = e^t[(5 - 5t)\cos t + (2 + 5t)\sin t]$.

Método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 6.4, Boyce 4.4

Este método consiste em determinar uma solução particular a partir do conjunto de soluções da equação diferencial associada. A forma geral da solução é

$$y_p = u_1 y_1 + \ldots u_n y_n. \tag{105}$$

As condições que devem ser satisfeitas são

$$u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0. \tag{106}$$

A condição que deve ser satisfeita a partir da equação diferencial não-homogênea é

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n' y_n^{(n-1)} = f(t). \tag{107}$$

Método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 6.4, Boyce 4.4

Portanto, o problema é resumido na seguinte equação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad (108)$$

Como o Wronskiano $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ é sempre diferente de zero, então é possível determinar a solução da equação matricial anterior ($\mathbf{W} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{B}$).

Exemplos - método da variação de parâmetros

Zill 4.7, Nagle 6.4, Boyce 4.4

Exemplo 28: Determine uma solução particular da seguinte forma:

$$y_p = u_1 t + u_2 e^t + u_3 e^{-t}. \tag{109}$$

Exemplo 29: Determine uma solução particular da equação diferencial:

$$t^4 y^{(4)} + 6t^3 y''' + 2t^2 y'' - 4ty' + 4y = 12t^2 \tag{110}$$

sabendo que $y_1 = t$, $y_2 = t^2$, $y_3 = 1/t$ e $y_4 = 1/t^2$ formam um conjunto de soluções fundamentais da equação associada. Determine a solução geral.