UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais de primeira ordem

Prof. Adolfo Herbster
22 de Junho de 2021

Lição atual: Introdução ao curso

"Querer pouca coisa

Querer este pouco apesar de tudo"

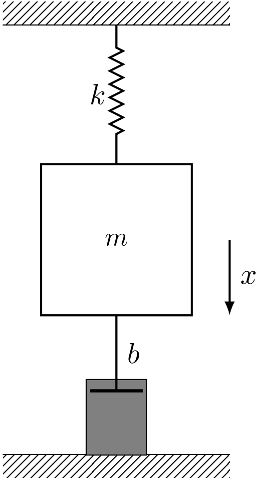
Por que estudar equações diferenciais?

Por que sempre que um modelo matemático envolve a taxa de mudança de uma variável com relação a outra, uma equação diferencial tende a aparecer (*Nagle 1.1 - pag. 2*). Exemplos:

- crescimento populacional;
- trajetórias ortogonais;
- sistema massa-mola;
- circuitos elétricos;
- equação da onda;
- modelo de dielétricos, condutores e plasmas.

Por que estudar equações diferenciais?

Sistema massa-mola



Equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \qquad (1)$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0, \qquad (2)$$

Solução da equação auxiliar:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \qquad (3)$$

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \qquad (4)$$

em que $\lambda = {}^{b}\!/_{2a}$ (constante de atenuação).

Por que estudar equações diferenciais?

Circuitos elétricos

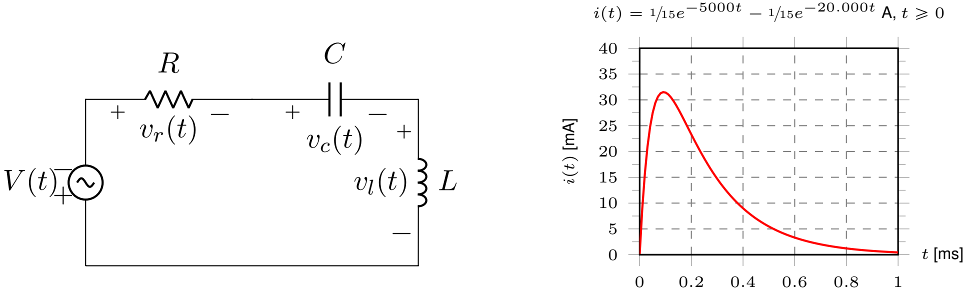


Figura 1: Circuito RLC em série (direita) e sua resposta superamortecida (esquerda).

Equação diferencial (como resolver?):

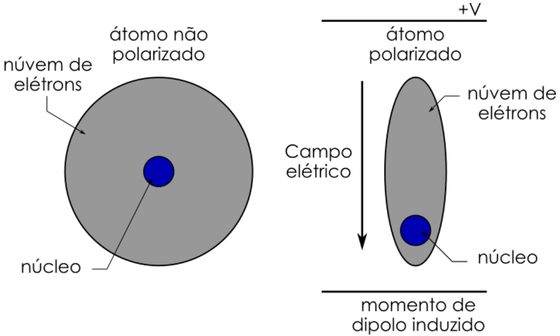
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{5}$$

Por que estudar equações diferenciais?

Modelo de dielétricos

Um modelo simples para estimar as propriedades dielétricas de um material considera o movimento de uma núvem de elétrons na presença de um campo elétrico. Um simples modelo da dinâmica da posição x da núvem de elétron é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}\mathcal{E}, \qquad (6)$$

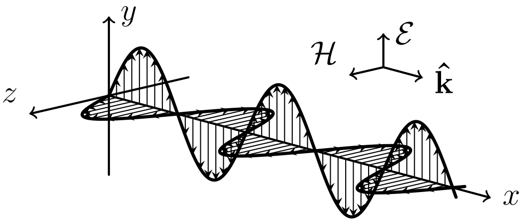


em que γ é a taxa de colisões (entre elétrons) por unidade de tempo, ω_0 a frequência natural de oscilação, e e m a carga e massa do eléctron respectivamente. Como resolver?

Por que estudar equações diferenciais?

Equação de onda

Partindo das equações de Maxwell para um meio dielétrico perfeito homogêneo, é possível obter a equação de onda[1] para o campo elétrico e magnético:



$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \quad (8)$$

em que μ_0 e ε_0 representam a permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente, no espaço livre e $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ representam, em ordem, o vetor intensidade de campo elétrico e magnético. Como resolver aquelas equações diferenciais parciais?

[1] A equação de onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem que descreve a propagação de uma onda em um meio específico. Sua forma geral é $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$.

Equações algébricas e diferenciais

Variáveis dependentes e independentes

Equações algébricas:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + x + 0,5 = 0$$

quais soluções ?

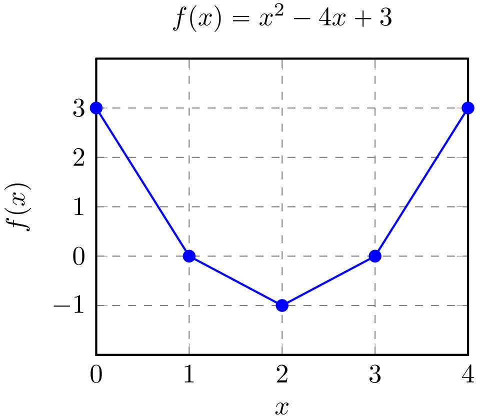
Equações diferenciais:

$$y'' + 2y' = 3y,$$
$$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 3y,$$

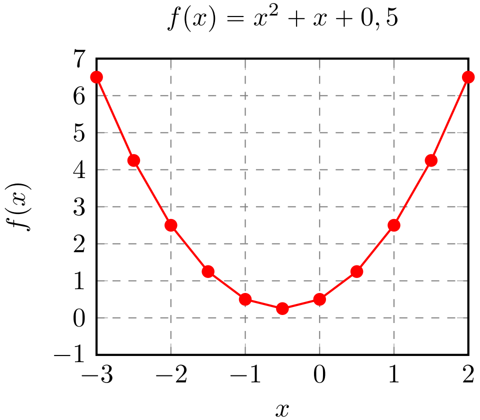
quais soluções ?

Equações algébricas

Solução



(a) Equação algébrica 01.



(b) Equação algébrica 02.

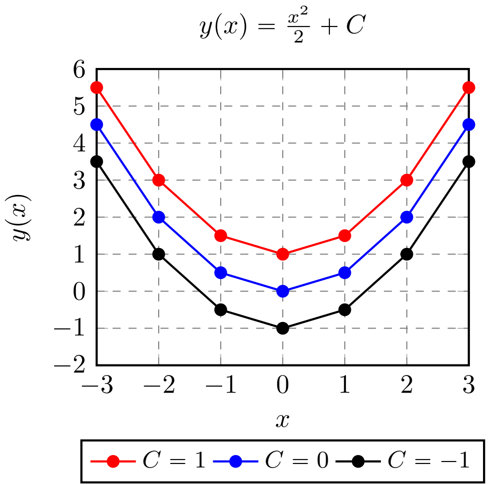
Equações diferenciais

Solução - integração direta

Exemplo 1:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Solução: $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, em que C é uma constante.



O que usar de cálculo diferencial e integral?

- Derivadas das funções:
  - x^n;
  - $\sin(x)$ e $\cos(x)$;
  - $\exp(x)$ e $\ln(x)$;
- Regras para derivadas de
  - $f(x) + g(x)$;
  - $f(x)g(x)$ e $f(x)/g(x)$;
  - $f(g(x))$;
- Teorema fundamental do cálculo:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

Exemplo 2: Qual a equação diferencial ordinária cuja solução é

$$y(x) = \int_0^x e^{x-s}q(s)\,ds \quad ? \tag{9}$$

Classificação das equações diferenciais

Zill 1.1, Boyce 1.3, Nagle 1.1

1. equações diferenciais ordinárias (ODE) e parciais (PDE);

$$\frac{dy(x)}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - ODE}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ - PDE},$$

2. ordem;

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - primeira ordem}, \quad a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \text{ - segunda ordem},$$

3. equações diferenciais lineares e não lineares;

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + g(x) \text{ - linear}, \quad \frac{dy}{dx} = f(y) \text{ - não linear } (f(y) = \sin(y)),$$

4. sistemas de equações diferenciais;

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}(x), \text{ com } \mathbf{y}(x) = [y_1(x)\, y_2(x)\, \ldots\, y_n(x)]^T \text{ e } \mathbf{A} \text{ uma matrix } n \times n.$$

Campos de direção

Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Para entender o comportamento de uma equação diferencial (suas soluções), não é necessário resolver esta equação. É possível determinar um campo de direções, calculando-se $f(x, y)$ para cado ponto (x, y):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{10}$$

Note que são calculados os coeficientes angulares. É possível verificar a estabilidade da solução a partir dos campos de direção[1].

[1] Maiores informações em *Differential Equations and Linear Algebra* - Strang

Campos de direção

Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

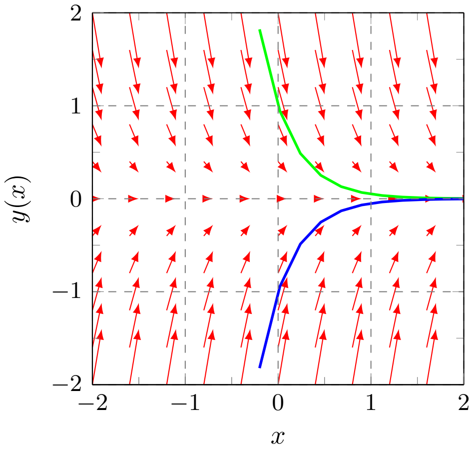
Exemplo 3:

$$y' = ay$$

Solução: $y(x) = Ce^{-ax}$

x	y	$f(x,y)$	θ

Campo de direções (a = -3)



Campos de direção

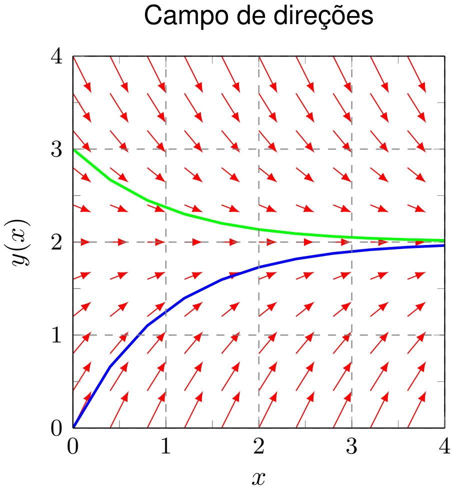
Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Exemplo 4:

$$y' = 2 - y$$

Solução: $y(x) = Ce^{-x} + 2$

x	y	$f(x,y)$	θ



Campos de direção

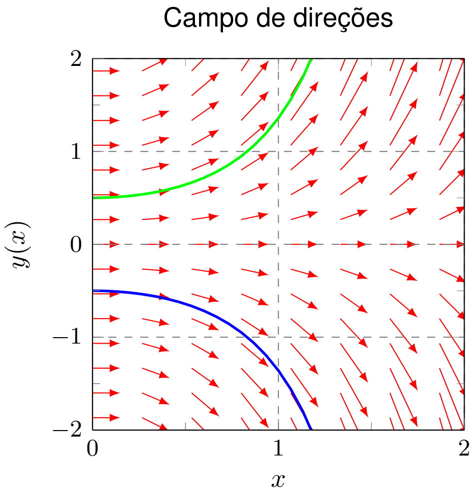
Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Exemplo 5:

$$y' = 2xy$$

Solução: $y(x) = Ce^{x^2}$

x	y	$f(x,y)$	θ



Campos de direção

Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

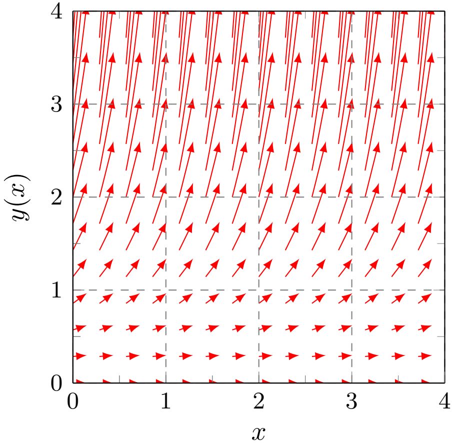
Exemplo 6:

$$y' = y^2$$

Solução: $y(x) = \frac{1}{C-x}$

x	y	$f(x,y)$	θ

Campo de direções



Campos de direção

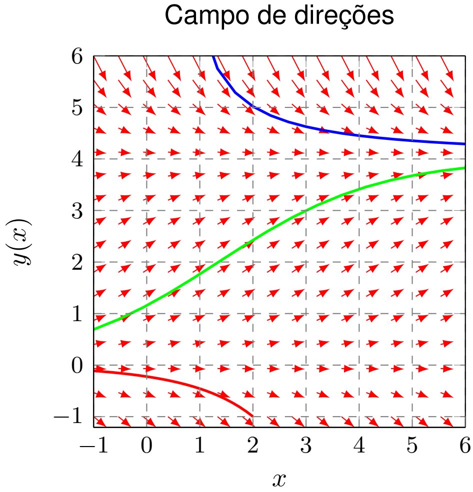
Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Exercício 1:

$$y' = \frac{y}{6}(4 - y)$$

Solução: $y(x) =$

x	y	$f(x,y)$	θ



Campos de direção

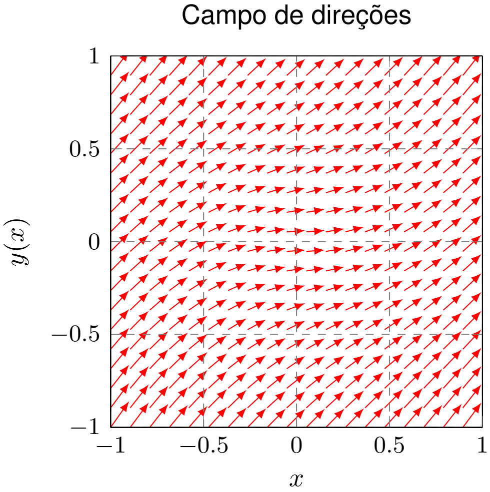
Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Exercício 2:

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solução: $y(x) =$

x	y	$f(x,y)$	θ



Campos de direção

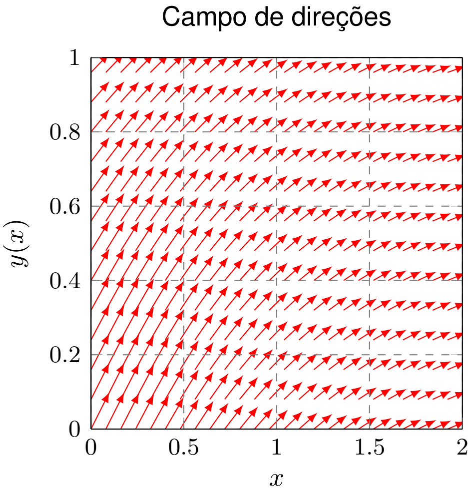
Zill 9.1, Boyce 1.1, Nagle 1.3

Exercício 3:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Solução: $y(x) =$

x	y	$f(x,y)$	θ



Próxima aula

- Equações separáveis;
- Equações exatas.

Lição atual: Equações separáveis e equações exatas

“Quaisquer que sejam as penas e dificuldades,

não te deixes dominar pela tristeza”

Introdução

Na aula anterior, foram apresentadas as equações diferenciais (classificação) e o campo de direções. A partir deste, é possível verificar algumas características da solução, como a estabilidade, sem, entretanto, determinar as soluções.
Nesta aula serão apresentadas (e solucionadas) duas famílias de equações diferenciais: equações separáveis e exatas.

Equações separáveis: introdução

Zill 2.2, Boyce 2.2, Nagle 2.2

Equações diferenciais de primeira ordem separáveis são definidas como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}. \tag{11}$$

Portanto, é possível determinar a solução da equação anterior a partir de

$$\int_{y(0)}^{y(x)} f(y)dy = \int_0^x g(s)ds. \tag{12}$$

Ou seja, determinar duas integrais.

Equações separáveis

Zill 2.2, Boyce 2.2, Nagle 2.2

Exemplo 7: Determine a solução das seguintes equações diferenciais:

- $y' = ay$ - (linear);
- $y' = 2 - y$ - (linear);
- $y' = 2xy$ - (linear);
- $y' = y^2$ - (não linear).

Equações separáveis

Zill 2.2, Boyce 2.2, Nagle 2.2

Exemplo 8: Determine a solução e ilustre o campo de direções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \tag{13}$$

O que falar sobre o problema de valor inicial $y(0) = 0$?

Exemplo 9: Resolva o problema de valor inicial

$$y' = \frac{y-1}{x+3}, \; y(-1) = 0. \tag{14}$$

Exemplo 10: Determine a solução e ilustre o campo de direções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2. \tag{15}$$

Equações exatas: derivadas parciais

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.4

Definição 01: Seja u uma função de duas variáveis. As derivadas parciais primeiras de u em relação a x e y são funções u_x e u_y tais que

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}. \tag{17}$$

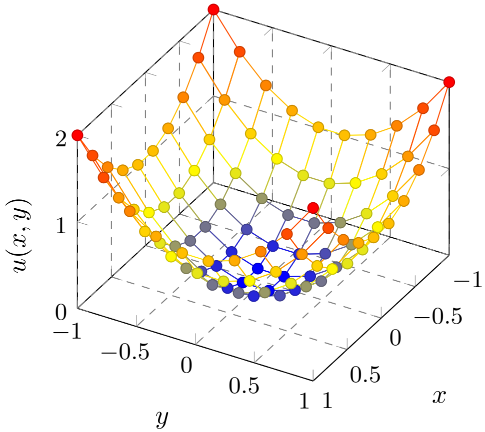
Equações exatas

Derivadas parciais

Exemplo 11:

$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

Como são definidas as derivadas parciais segundas ?



Equações exatas: introdução

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.4

Definição 02: Seja u uma função de duas variáveis. A diferencial total du da função $u(x, y)$ é definida como

$$du = u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{18}$$

Ao supor que $u(x, y) = C$, em que C é uma constante, dividindo a equação anterior por dx, tomando ${}^{dy}/_{dx} = y'$, teremos

$$u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \tag{19}$$

Então, existe um conjunto de equações diferenciais que podem ser escritas na forma de uma **diferencial exata** e, em seguida, integrá-la.

Equações exatas

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.4

Teorema 1

Seja u uma função de duas variáveis x e y. Se u, u_x, u_y, u_{xy} e u_{yx} são contínuas em uma região aberta R, então $u_{xy} = u_{yx}$ em toda R.

Teorema 2

Suponha que as primeiras derivadas parciais de $M(x, y)$ e $N(x, y)$ sejam contínuas em um retângulo R. Então

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{20}$$

é uma equação exata em R se e somente se a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{21}$$

for mantida para todo (x, y) em R.

Exemplo 12: Verifique se a equação diferencial abaixo é exata.

$$3x^2ydx + 4x^3dy = 0$$

Exemplo 13: Determine a solução da equação diferencial.

$$(1 + e^x y + xe^x y)\, dx + (xe^x + 2)dy = 0. \tag{22}$$

Exemplo 14: Determine a solução da equação diferencial.

$$(4x^3y^3 + 3x^2)dx + (3x^4y^2 + 6y^2)dy = 0$$

Exercícios

Exercício 4: Determine a solução das seguintes equações diferenciais e esboce suas soluções:

- $(1+x)dy - ydx = 0$;
- $y' = -\frac{x}{y}$, $y(4) = 3$;
- $y' = y^2 - 4$, $y(0) = -2$.

Exercício 5: A uma pequena mudança (pertubação) na condição inicial ou na própria equação, frequentemente corresponde uma mudança radical na solução de uma equação diferencial. Nos problemas a seguir, compare as soluções dos problemas de valor inicial dados.

- $y' = (y-1)^2$, $y(0) = 1$;
- $y' = (y-1)^2 + 0,01$, $y(0) = 1$;
- $y' = (y-1)^2$, $y(0) = 1,01$;
- $y' = (y-1)^2 - 0,01$, $y(0) = 1$.

Próxima aula

- Equações exatas;
- Fatores integrantes;
- Teorema da existência e unicidade.

Lição atual: Fatores integrantes, equações exatas e Teorema da existência e unicidade

“Um conselho: desconfia das grandes facilidades”

Introdução

Vimos na aula anterior, que a partir de uma função $f(x,y)$ definida em um intervalo R, por exemplo

$$f(x,y) = xy + e^x = C,\ (x,y) \in \Re, \tag{23}$$

podemos chegar a uma equação diferencial ordinária (EDO) ao determinar o diferencial total desta função. Logo:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \therefore \\ (y + e^x)\,dx + xdy &= 0 \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\right] \therefore \qquad (24) \\ \frac{dy}{dx} + \left(\frac{y + e^x}{x}\right) &= 0. \qquad (25) \end{aligned}$$

Portanto, considerando uma EDO de primeira ordem, é possível encontrar uma função $f(x,y) = C$ (Eq. 23) cujo diferencial total seja idêntico à EDO em análise (Eq. 25). A condição para que esta função exista é ${}^{\partial M}/_{\partial y} = {}^{\partial N}/_{\partial x}$. Neste caso, a EDO é chamada de **exata**.

Fatores integrantes: introdução

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.5

Em alguns problemas, a equação diferencial em análise não é exata. Por exemplo:

$$(3x + 2y^2)dx + 2xydy = 0, \tag{26}$$

não é exata, pois

$$M_y = 4y \neq N_x = 2y,$$

ou seja, ${}^{\partial M}/_{\partial y} \neq {}^{\partial N}/_{\partial x}$. Entretanto ao multiplicar a equação diferencial anterior por x, a equação resultante é exata. Mostre!

Fatores integrantes

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.5

Portanto, é possível transformar uma equação diferencial de primeira ordem não exata em uma forma exata multiplicando a equação diferencial por um **fator integrante** $\mu\,(x, y)$. Ou seja,

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0. \tag{27}$$

A condição para que a equação anterior seja exata é (mostre)

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y)^{2}. \tag{28}$$

Entretanto, determinar a solução da Eq. 27, em alguns casos, é tão difícil quanto da Eq. 24. Portanto, é necessário realizar algumas simplificações.

[2] É importante destacar que para uma função qualquer $u(x, y)$ considera-se as notações $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$.

Fatores integrantes

Zill 2.4, Boyce 2.6, Nagle 2.5

Simplificações:

1. O fator μ depende apenas de x. Neste caso, $(M_y - N_x)/N$ é independente de y

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}, \quad p(x) = \frac{M_y - N_x}{N}. \tag{29}$$

2. O fator μ depende apenas de y. Neste caso, $(N_x - M_y)/M$ é independente de x

$$\mu(y) = e^{\int q(y)dy}, \quad q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}. \tag{30}$$

Quando a equação diferencial for linear do tipo:

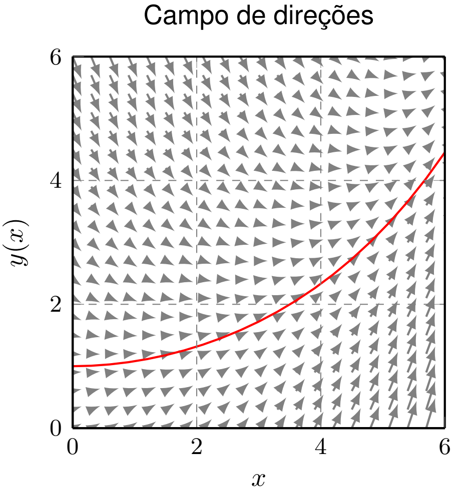
$$y' + P(x)y = f(x), \tag{31}$$

qual será o fator integrante? E a solução?

Fatores integrantes
Exemplos

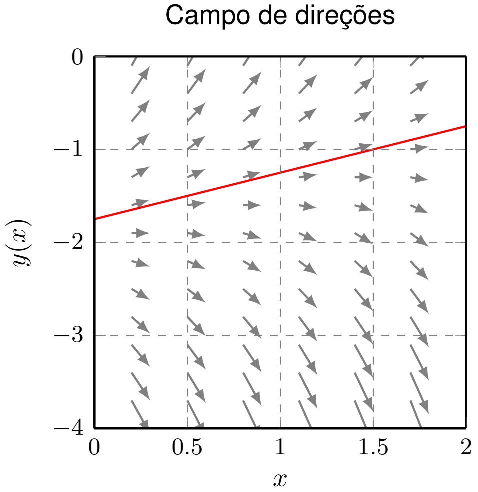
Exemplo 15:

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{x/3},\; y(0) = 1.$$



Exemplo 16:

$$y' - 2y = 4 - x,\ y(0) = -{}^{7}\!/_{4}.$$



Exemplo 17: Encontre a solução geral para

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x, \; x > 0.$$

Exemplo 18: Determine a solução da equação diferencial ordinária abaixo.

$$x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^6 e^x.$$

Exemplo 19: Determine a solução da equação diferencial abaixo

$$(x+y)dx + x\ln x dy = 0,$$

considerando $\mu(x,y) = \frac{1}{x}$ em (0, ∞).

Exercício 6: Nos problemas a seguir, verifique se a equação dada é exata. Caso afirmativo, resolva.

- $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$;
- $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$;
- $xy'=2xe^x-y+6x^2$;
- $(\tan x-\sin x\sin y)dx+\cos x\cos y dy=0$.

Exercício 7: Nos problemas a seguir, encontre o valor de k para que a equação diferencial dada seja exata.

- $(y^3+kxy^4-2x)dx+(3xy^2+20x^2y^3)dy=0$;
- $(2xy^2+ye^x)dx+(2x^2y+ke^x-1)dy=0$;
- $(6xy^3+\cos y)dx+(kx^2y^2-x\sin y)dy=0$.

Existência e unicidade

Zill 2.1, Boyce 2.4, Nagle 2.3

Todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução (e.g. problemas físicos)?

Teorema 3 (Teorema de Picard - existência)

Se $f(x,y)$ é uma função definida em uma região retangular do espaço

$$R : a < x < b, c < y < d, \tag{32}$$

que contém (x_0, y_0), então o problema de valor inicial

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{33}$$

*possui pelo menos uma solução em algum **subintervalo** aberto em (a,b) que contém x_0.*

Teorema 4 (Teorema de Picard - unicidade)

*Se ambas funções $f(x,y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em R, então a Eq. 33 apresenta apenas uma solução em algum **subintervalo** aberto em (a,b) que contém x_0.*

Existência e unicidade de soluções

Exemplo 20: Determine a solução da equação diferencial

$$y' = y^2, \quad y(1) = 1.$$

Exemplo 21: Determine a solução da equação diferencial

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Exemplo 22: Determine a solução da equação diferencial

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(0) = 0.$$

Exercício 8: Por inspeção, determine uma solução para a equação diferencial não-linear $y' = y^3$ que satisfaça $y(0) = 0$. A solução é única?

Exercício 9:

- Considere a equação diferencial

$$y' = 1 + y^2. \tag{34}$$

  Determine uma região do plano xy tal que a equação tenha uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) da região.
- Formalmente, mostre que $y = \tan x$ satisfaz a equação diferencial e a condição inicial $y(0) = 0$.
- Explique por que $y = \tan x$ não é uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0, \tag{35}$$

  no intervalo (-2, 2).

Próxima aula

Aplicações:

- dinâmica populacional;
- trajetórias ortogonais.

Lição atual: Aplicações I: Dinâmica populacional e trajetórias ortogonais

“O essencial para ti é compreender bem. Não te apresses.”

Introdução

Iniciamos o curso classificando as equações diferenciais a partir i) do número de variáveis, ii) da ordem das derivadas e iii) da linearidade em relação à variável dependente. Em seguida, estudamos dois tipos de equações diferenciais: i) as equações separáveis e ii) as equações exatas.

É importante destacar que outros métodos de resolução, como o método das equações homogêneas[3] ou o método do fator integrante, são, na verdade, casos particulares dos métodos já vistos.

Nas próximas duas aulas aplicaremos os métodos de resolução de equações diferenciais já vistos, para resolução de três tipos de problemas: 1) dinâmica populacional, 2) trajetórias ortogonais e 3) circuitos elétricos RC (resistor-capacitor) ou RL (resistor-indutor).

[3] Maiores detalhes ver *Zill 2.3 e Nagle 2.6*

Dinâmica populacional: introdução

Zill 3.3

As considerações são:

- Suposição inicial para dinâmica populacional - crescimento exponencial:

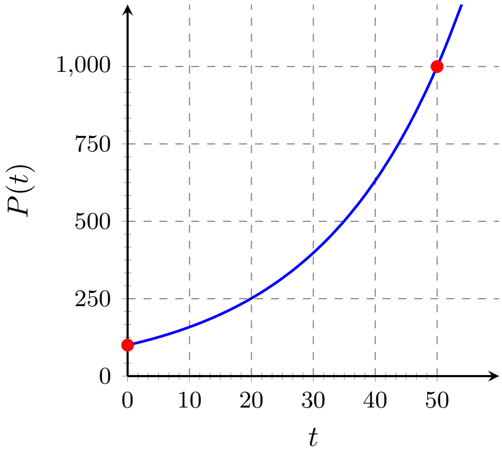
$$\frac{dP(t)}{dt} = kP \qquad (36)$$

- A solução é (equação separável):

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad (37)$$

- Supondo que $P(0) = 100$ e $P(50) = 1000$ (para t em dias):

$$P(t) = 100e^{\ln 10/50 t} \qquad (38)$$



Dinâmica populacional: equação de Verhulst

Zill 3.3

De acordo com o modelo de crescimento populacional elaborado por Verhulst[4] em 1838, as seguintes considerações são feitas:

- A população não pode crescer indefinidamente (e.g. limitada por competições);
- Quando a população é pequena, a taxa de variação é constante com o tamanho da população;
- A medida que a população aumenta, a taxa de variação tende a zero;
- É possível representar a nova equação como (crescimento com limiar):

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\left(1 - \frac{P(t)}{P_{sat}}\right)P(t), \tag{39}$$

  em que k é a taxa de crescimento e P_{sat} o nível de saturação.
- Análise da equação diferencial (soluções de equilíbrio, nível de saturação);

[4] Pierre-François Verhulst (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Corresp. Math. Phys. 10. [S.l.: s.n.] pp. 113–121.

Dinâmica populacional: equação de Verhulst

Zill 3.3

Solução da equação diferencial:

$$P(t) = \frac{P_0 P_{sat}}{P_0 + (P_{sat} - P_0)e^{-kt}}. \tag{40}$$

Exemplo 23: O modelo logístico foi aplicado á população de linguados gigantes em determinadas áreas do Oceano Pacífico. Sabendo que:

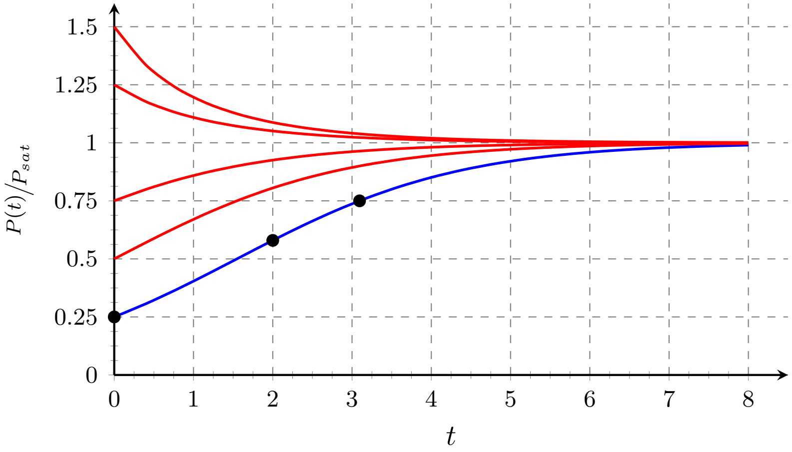
- $k = 0,71$/ano;
- P_{sat} = 80,5 $\times$ 10^6 kg;
- $P_0 = 0,25 P_{sat}$;

Determine:

- A biomassa 2 anos depois (0,5797);
- O instante τ para o qual $P(\tau) = 0,75 P_{sat}$ (3,095 anos).

Dinâmica populacional

Exemplo



Trajetórias ortogonais: introdução
Zill 3.1

Outro problema importante é determinar trajetórias ortogonais. Por exemplo, suponha que uma partícula de massa m descreve uma trajetória $y(x) = \sin(x)$. Qual a trajetória ortogonal à $y(x)$ em todo x?

- A equação que define um conjunto de curvas (para cada valor de C):

$$f(x, y, C) = 0. \tag{41}$$

- Para determinar, para cada curva, uma trajetória ortogonal, é necessário que o produto entre os coeficientes de inclinação seja igual a -1, ou seja:

$$m_{new} = -{}^{1}/_{m_{old}}. \tag{42}$$

Exemplo 24: Determine a trajetórtia ortogonal de

$$y = C\sin(x). \tag{43}$$

- Primeiro passo: diferenciar a equação em relação à variável x;

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \underbrace{C}_{y/\sin(x)}\cos(x) = y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = y\cot(x). \tag{44}$$

- Segundo passo: determinar a E.D. do novo conjunto de curvas:

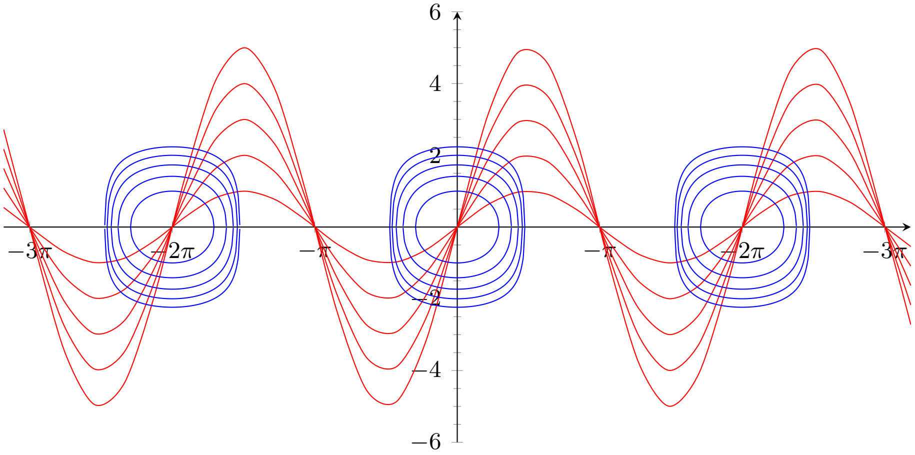
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{dy/dx} = -\frac{1}{y\cot(x)} = -\frac{\tan(x)}{y}. \tag{45}$$

- Terceiro passo: determinar as soluções da equação diferencial resultante (neste caso, equação separável):

$$y = \pm\sqrt{2\ln(|\cos(x)|) + C_1}. \tag{46}$$

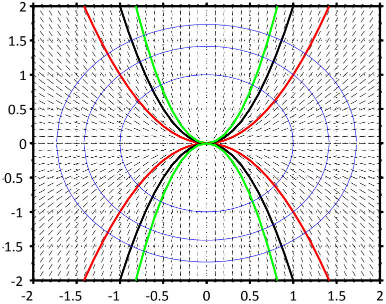
Trajetórias ortogonais

Exemplo - gráfico

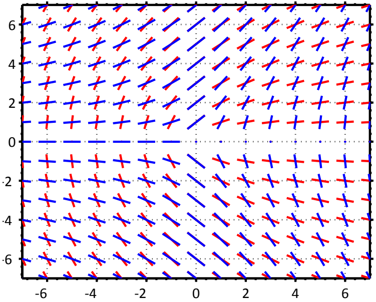


Exemplo 25: Determine a família de trajetórias ortogonais da família de curvas $y = Cx^2$.

Exemplo 26: Determine a família de trajetórias ortogonais da família de curvas $y^2 - 2Cx = C^2$.



(a) Exemplo 01: $y = Cx^2$



(b) Exemplo 02: $y^2 - 2Cx = C^2$

Exercício 10: Encontre e esboce as trajetŕias ortogonais da família de hipérboles

$$y = \frac{c_1}{x}. \tag{47}$$

Exercício 11: Vimos no cálculo que, para um gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$,

$$r\frac{d\theta}{dr} = \tan\phi, \tag{48}$$

em que ϕ é um ângulo positivo anti-horário entre a reta radial e a reta tangente. Mostre que duas cruvas polares $r = f_1(\theta)$ e $r = f_2(\theta)$ são ortogonais em um ponto de interseção se, e somente se,

$$(\tan\phi_1)(\tan\phi_2) = -1. \tag{49}$$

Exercício 12: Encontre as trajetórias ortogonais de

$$r = c_1\left(1 - \sin\theta\right). \tag{50}$$

Próxima aula

Circuitos elétricos RC e RL sem excitação.

Lição atual: Aplicações II: Circuitos elétricos

“Lembre-se da lebre e da tartaruga: aquela ocupa-se de tudo exceto de seu trabalho.”

Introdução

Na aula anterior aplicamos os conceitos de EDO (primeira ordem) estudados até aqui para resolver problemas de dinâmica populacional e trajetórias ortogonais. Nesta aula, iremos aplicar os mesmos conceitos no estudo de circuitos elétricos de primeira ordem, ou seja, circuitos resistivos e capacitivos (RC), ou circuitos resistivos e indutivos (RL).

A corrente em um capacitor (capacitância C) é

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}. \quad (51)$$

Considerando que $v(t) = v_r(t) + v_c(t)$ e que a corrente no resistor (resistência R) é igual à corrente no capacitor, a equação diferencial que descreve o circuito RC é:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v(t). \quad (52)$$

Há diferentes formas de excitação $v(t)$ (e.g. impulso, degrau, constante, senoidal e exponencial).

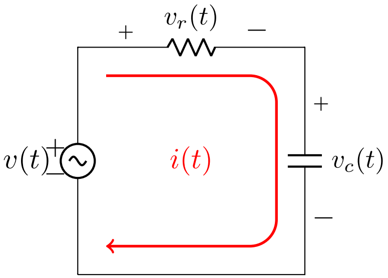


Figura 4: Circuito RC.

É importante observar que a Eq. 52 tem o formato

$$\frac{dy}{dt} - ay = f(t), \tag{53}$$

em que a é uma constante. Esta equação, como visto na aula 04[5], é uma equação linear. Neste caso, a solução da Eq. 53 é formada por duas outras soluções: uma solução associada à equação homogênea $[y_n(t)]$ e uma solução particular $[y_p(t)]$ devido à nova *entrada* $f(t)$. Neste caso, a função $f(t)$ permite novas entradas para $t > 0$.

A entrada $f(t)$ é uma **fonte** se somada, e um **sorvedouro** se subtraída da equação diferencial em análise. Por exemplo, em um banco monetário, $f(t)$ representa a taxa de novos depósitos ou retiradas ao longo do tempo, enquanto a a constante de crescimento (juros).

[5] Fatores integrantes, equações exatas e Teorema da existência e unicidade.

Circuito elétrico RC

Portanto, a solução da Eq. 53 é (substitua nesta equação!)

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t). \tag{54}$$

A solução da equação $dy/dt = ay$ (homogênea) é $y_n(t) = y(0)e^{at}$, que cresce de forma exponencial se $a > 0$ ou decresce da mesma forma se $a < 0$. Ao lembrar que a solução de uma equação linear é[6]

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_0^t \mu(s)f(s)ds + y(0)\right], \tag{55}$$

em que $y(0)$ é a condição no instante $t = 0$, e como $\mu(t) = e^{-at}$, a solução geral é

$$y(t) = \underbrace{y(0)e^{at}}_{y_n(t)} + \underbrace{e^{at}\int_0^t e^{-as}f(s)ds}_{y_p(t)} \tag{56}$$

[6] É utilizado o método do fator integrante.

Circuito elétrico RC

Formas de excitação

Quando a matemática é aplicada à ciência e engenharia, os problemas não envolvem qualquer função $f(t)$. Determinadas funções $f(t)$ são mais importantes. Estas funções são constantemente encontradas em matemática aplicada, por exemplo:

Função constante	$f(t) = q$
Função degrau em T	$f(t) = H(t-T)$
Função delta em T	$f(t) = \delta(t-T)$
Função exponencial	$f(t) = e^{at}$
Função senoidal	$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Nesta aula, as três primeiras funções serão consideradas como fonte de excitação em um circuito RC. Em seguida, na próxima aula, as duas últimas funções serão adotadas no mesmo problema (circuito RC), entretanto, utilizando um novo método de resolução.

Circuito elétrico RC

Tensão de excitação constante - $f(t) = q$

Quando a função $f(t)$ é constante (em um circuito RC, significa que a tensão de excitação é constante), a equação diferencial resultante é:

$$\frac{dy}{dt} - ay = q. \tag{57}$$

Neste caso, a solução é

$$y(t) = y(0)e^{at} + \frac{q}{a}\left(e^{at} - 1\right). \tag{58}$$

Ao aplicar estas equação em um circuito RC, cuja equação diferencial que define a tensão sobre o capacitor é a Eq. 52, com tensão de excitação constante $v(t) = v$ e tensão inicial v_0 [$y(0)$], a solução é

$$v_c(t) = v_0 e^{-t/RC} + v\left(1 - e^{-t/RC}\right). \tag{59}$$

A partir da Eq. 59, podemos observar que:

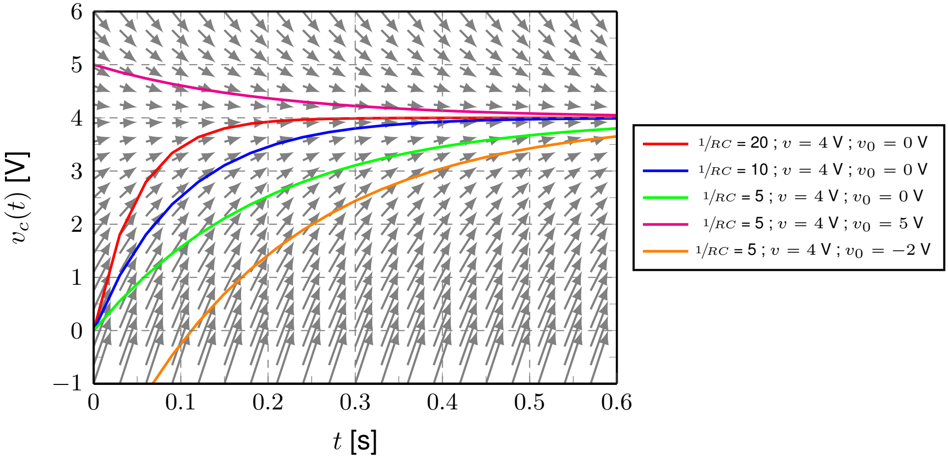
- Para $t = 0$, a tensão sobre o capacitor é $v_c(t) = v_0$;
- Quando $t \to \infty$, o primeiro termo, relacionado com a solução da equação homogênea associada tende à zero, por outro lado, o segundo termo (a solução particular) tende à tensão de excitação, ou seja, $v_c(t) = v$.

Estas observações são ilustradas no gráfico seguinte, a partir do campo de direções, para diferentes valores de excitação (v) e condição inicial (v_0).

Circuito elétrico RC

Tensão de excitação constante - $f(t) = q$

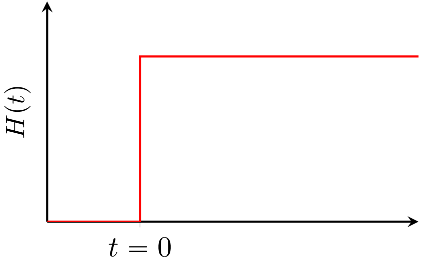
Campo de direções: $v_c(t)' = {}^1/_{RC}[v - v_c(t)]$.

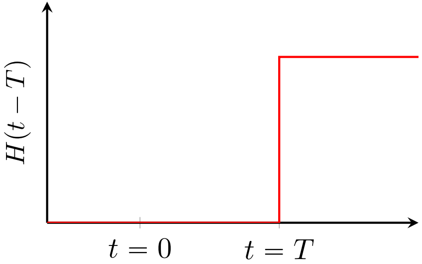


Circuito elétrico RC

Tensão de excitação degrau - $f(t) = H(t - T)$

A função degrau $H(t)$ “salta” de 0 para 1 em $t = 0$. O efeito desta função é semelhante à atuação de uma chave elétrica de liga-desliga. O segundo gráfico representa uma função degrau deslocada em T segundos, cujo valor é alterado de 0 para 1 em $t = T$.





Circuito elétrico RC

Tensão de excitação degrau - $f(t) = H(t-T)$

A tensão de excitação: $vH(t-T)$.

- Solução geral (mostre):

$$v_c(t) = \underbrace{ke^{-t/RC}}_{y_n(t)} + \underbrace{v}_{y_p(t)} \qquad (60)$$

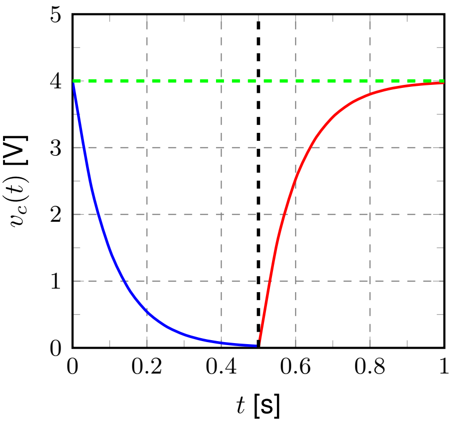
- Descarga $v = 0$ e $v_c(0) = v_0$:

$$v_c(t) = v_0 e^{-t/RC} \qquad (61)$$

- Carga $v = v_0$ e $v_c(0) = 0$:

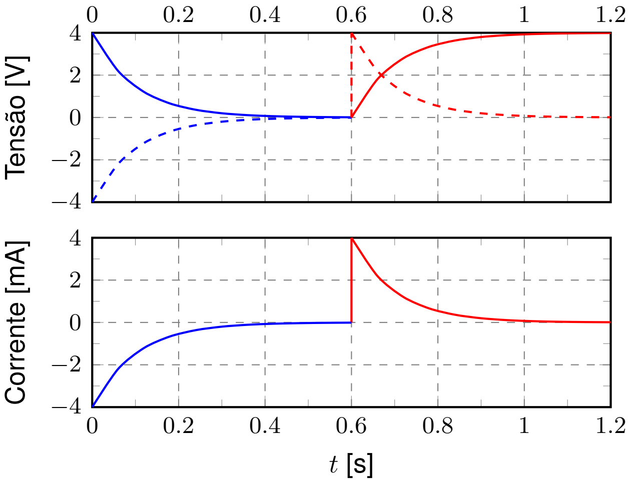
$$v_c(t) = v_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad (62)$$

$v = v_0 = 4$ V - RC = 0,1 - $T = 0.5$ s



Circuito elétrico RC

Tensão de excitação degrau - $f(t) = H(t-T)$



t [s]	t/RC	$v_c(t)/v_0$	$v_c(t)/v_0$
0	0	0	1
0,1	1	0,63	0,37
0,2	2	0,86	0,14
0,3	3	0,95	0,05
0,4	4	0,98	0,02
0,5	5	0,9933	0,0067
0,6	6	0,9975	0,0025

$v = v_0 = 4$ V - RC = 0,25 - $T = 0.6$ s

Circuito elétrico RC

Tensão de excitação delta - $f(t) = \delta(t - T)$

A função delta $\delta(t)$ é sempre nula, exceto em $t = 0$. Diferentemente da excitação degrau, que é contínua para $t \geqslant 0$, a excitação $\delta(t)$ é complemente concentrada em $t = 0$. Da mesma forma que para a função degrau em T, a função delta em T [$\delta(t - T)$] apresenta as mesmas característica que a função $\delta(t)$, entretanto em $t = T$.

O melhor entendimento desta função é por meio de suas integrais:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)F(t)dt = F(0), \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T)F(t)dt = F(T)$$

Circuito elétrico RC

Tensão de excitação delta - $f(t) = \delta(t - T)$

A tensão de excitação: $v\delta(t - T)$.

- Solução geral (mostre e ilustre o gráfico):

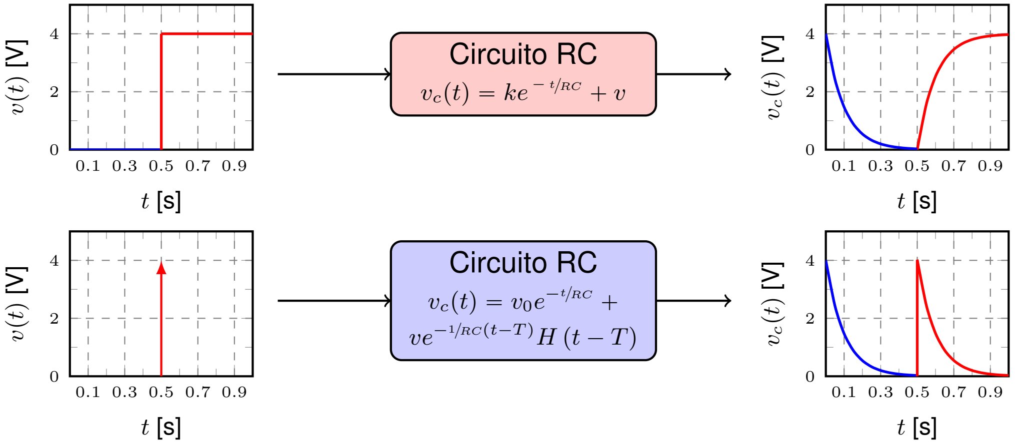
$$v_c(t) = ke^{-t/RC} + ve^{-1/RC(t-T)}H\left(t - T\right) \tag{63}$$

- Para $v_c(0) = v_0$:

$$v_c(t) = v_0e^{-t/RC} + ve^{-1/RC(t-T)}H\left(t - T\right) \tag{64}$$

Circuito elétrico RC

Visão do sistema - RC = 0,1 - $v_c(0) = 4$ V - $v = 4$ V - $T = 0.5$ s



Exercício 13: Determine a solução de equilíbrio da equação diferencial definida pela Eq. 60. Em seguida, determine o ponto (e o valor) de máxima variação da tensão no capacitor.

Exercício 14: Determine a equação diferencial que descreve a corrente de um indutor em um circuito RL. Para determinar a solução da equação diferencial, considere que a tensão da fonte é constante. Analise duas situações i) quando a tensão é constante e igual a v_0 e ii) quando a tensão é nula.

Próxima aula

Método dos coeficientes a determinar (equações diferenciais não homogêneas).

Lição atual: Método dos coeficientes a determinar

“A precipitação é um grave erro, pois idéias e opiniões são aceitas sem a necessária análise e reflexão.”

Método dos coeficientes a determinar

Zill 4.4, Nagle 4.4, Boyce 3.6

Vimos na aula anterior, que a solução tensão sobre um capacitor em um circuito RC é definida como:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v(t). \tag{65}$$

Esta equação é da forma

$$\frac{dy}{dt} - ay = f(t), \tag{66}$$

em que a é uma constante e $f(t)$ uma função contínua em R. Esta equação, como visto na Aula 04[7], é uma equação linear. Neste caso, a solução da Eq. 66 é formada por duas outras soluções: uma solução associada à equação homogênea $\left[y_n(t)\right]$ e uma solução particular $\left[y_p(t)\right]$ devido à nova *entrada* $f(t)$. Neste caso, a função $f(t)$ permite novas entradas para $t > 0$.

[7] Fatores integrantes, equações exatas e Teorema da existência e unicidade.

Método dos coeficientes a determinar
Funções admitidas

Vimos também que se a tensão de excitação for do tipo constante, degrau ou impulso, a solução é conhecida. Entretanto, se a excitação for do tipo senoidal ou exponencial? Por exemplo

$$(RC)\, v_c' + v_c = A \cos(\omega t), \tag{67}$$

como determinar a solução particular da Eq. 67? Neste caso aplicamos o método dos **coeficientes a determinar** (ou **coeficientes indeterminados**).

Este método de resolução consiste em admitir que a solução particular seja definida como

$$y_p(t) = Af(t), \tag{68}$$

em que A é o *coeficiente a determinar* a partir da substituição de y_p na equação diferencial não homogênea[8].

[8] Maiores detalhes serão abordados na Unidade 02.

Método dos coeficientes a determinar

Exemplos

Determine a solução geral das equações diferenciais abaixo por meio do método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 27:

$$y' - 2y = 3e^{t}. \tag{69}$$

Exemplo 28:

$$y' + 4y = 5\cos(t). \tag{70}$$

Neste caso, considere que a solução particular é do tipo $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Exemplo 29:

$$y' - 3y = e^{-3t}. \tag{71}$$

Exemplo 30:

$$y' - 3y = e^{3t}. \tag{72}$$

Neste último exemplo, o sistema resultante não apresenta solução para $y_p(t) = Ae^{3t}$. Considere que a solução particular é do tipo Ate^{3t}.

Aplicação III: circuito elétrico RC

Excitação senoidal

Considere o circuito elétrico ilustrado na figura ao lado. A tensão $v(t)$ é definida como:

$$v(t) = A\cos\left(\omega t\right). \tag{73}$$

A solução da equação diferencial que descreve o circuito RC é (atividade 01 - final da nota de aula)

$$\begin{aligned} v_c(t) &= k_1 e^{-\tau t} + v_{c,p}(t), \\ v_{c,p}(t) &= \frac{A\tau}{\omega^2+\tau^2}\left[\tau\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right], \\ v_{c,p}(t) &= \frac{A\tau}{\sqrt{\omega^2+\tau^2}}\cos\left[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\right]. \end{aligned} \tag{74}$$

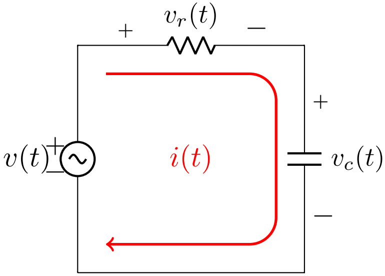


Figura 5: Circuito RC.

Portanto, a solução geral é

$$v_c(t) = k_1 e^{-\tau t} + \underbrace{\frac{A\tau}{\sqrt{\omega^2+\tau^2}}}_{G} \cos\left[\omega t - \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)}_{\alpha}\right]. \tag{75}$$

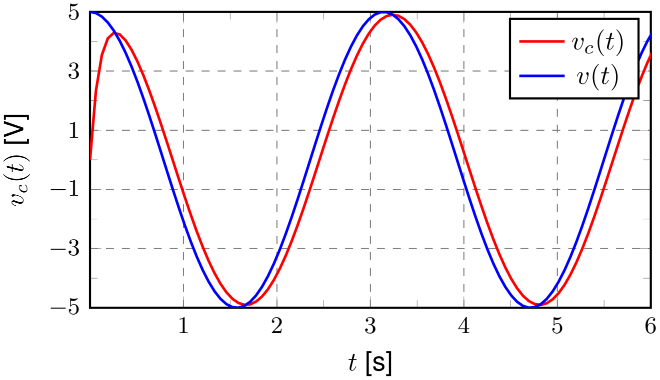
É importante observar que a solução da equação diferencial homogênea associada pode ser desprezada quando $t \approx {}^5\!/\!_\tau$. Portanto, para valores elevados de t, a solução particular descreve bem a tensão sobre o capacitor. Outras considerações são importantes:

- Para um valor constante de ω, quanto **maior** o valor de τ (menor valor de RC), **maior** a amplitude e **menor** a fase;
- Para um valor constante de τ, quanto **maior** a frequência angular da excitação, **menor** a amplitude de $v_c(t)$ e **maior** a fase.

Exemplo 31: Considere um circuito RC com $\tau = 10$ (RC = 0,1). A frequência do sinal de excitação senoidal é igual a 2 rad/s com tensão máxima de pico igual a 5 V. Determine a tensão sobre o capacitor. Considere que $y(0) = 0$.

Solução:

$$v(t) = 5\cos(2t)$$
$$G = 4,9$$



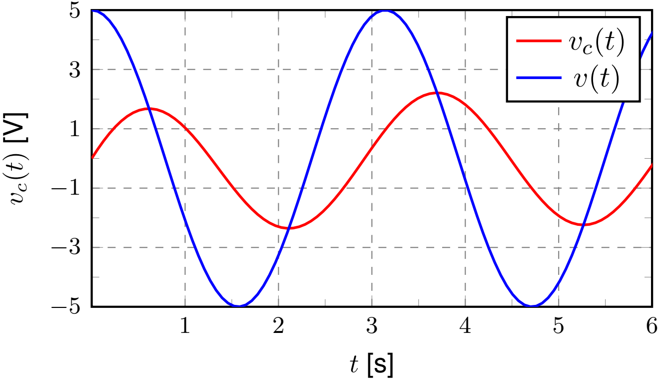
Circuitos elétricos

Excitação senoidal

Exemplo 32: Considere um circuito RC com $\tau = 1$ (RC = 1). A frequência do sinal de excitação senoidal é igual a 2 rad/s com tensão máxima de pico igual a 5 V. Determine a tensão sobre o capacitor. Considere que $y(0) = 0$.

Solução :

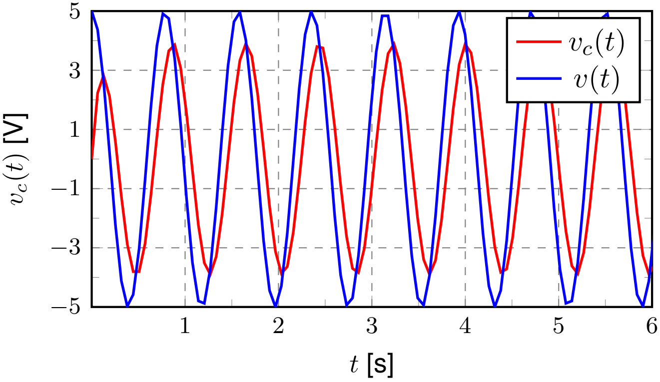
$$v(t) = 5\cos(2t)$$
$$G = 2,23$$



Exercício 15: Considere um circuito RC com $\tau = 10$ (RC = 0,1). A frequência do sinal de excitação senoidal é igual a 8 rad/s com tensão máxima de pico igual a 5 V. Determine a tensão sobre o capacitor. Considere que $y(0) = 0$.

Solução:

$$v(t) = 5\cos(8t)$$
$$G = 3,9$$



Atividades

Exercício 16: É possível expressar a função

$$y(t) = M\cos(\omega t) + N\sin(\omega t)\,, \tag{76}$$

como

$$y(t) = G\cos(\omega t - \alpha)\,. \tag{77}$$

Mostre que é possível esta transformação e determine a expressão para G e α.

Exercício 17: Determine a solução da seguinte equação diferencial:

$$y' + Ay = B + C\cos(\omega t)\,. \tag{78}$$

Exercício 18: Considere um circuito RC com $\tau = 10$ (RC = 0,1) e $v(t) = 4 + 0,25\cos(4t)$. Determine e esboce a tensão sobre o capacitor. Considere que $y(0) = 0$.

Próxima aula

Solução de equações diferenciais de primeira ordem não lineares:

- equação diferencial de Bernoulli;
- equação diferencial de Ricatti.

Lição atual: Equações de Bernoulli e Riccati

"Julgue a árvore pelos seus frutos."

Solução de equações não lineares

Vimos na aula passada o método dos coeficientes indeterminados (ou coeficientes a determinar), utilizado para solucionar determinadas equações diferenciais não homogêneas. Em seguida, aplicamos este método para solucionar a equação diferencial que descreve a tensão sobre o capacitor de um circuito RC, cuja tensão de excitação (tensão da fonte) é senoidal ou exponencial.

Nesta aula, estudaremos dois tipos de equações diferenciais: a equação diferencial de Bernoulli e de Riccati. Esta primeira surge, por exemplo, em problemas de dinâmica populacional, enquanto a segunda equação ocorre (também) em problemas de controle ótimo linear[9]. É importante destacar que ambas equações diferenciais são **não lineares**.

[9] Abou-Kandil, H. et al. Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory, Springer Science & Business Media, 2003.

Equação diferencial de Bernoulli

Zill 2.6; Kent 2.6

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{79}$$

em que n é um número inteiro, é chamada de equação diferencial de Bernoulli[10]. Se $y \neq 0$ e $n \neq 0$ e $n \neq 1$, podemos dividir a equação anterior por y^n:

$$\frac{dy}{dx}y^{-n} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{80}$$

Se $h(x) = y(x)^{1-n}$, implica que

$$\frac{dh}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dh}{dx}. \tag{81}$$

[10] http://mathworld.wolfram.com/BernoulliDifferentialEquation.html

Equação diferencial de Bernoulli

Zill 2.6; Kent 2.6

A equação resultante é expressa como

$$\frac{dh}{dx} + N(x)h = M(x), \tag{82}$$

com $N(x) = P(x)(1-n)$ e $M(x) = f(x)(1-n)$. Observe que buscamos **linearizar** a equação diferencial original (não linear). Esta prática (de tornar linear ou aproximar por uma função linear a função não linear original) é comum em engenharia.

Exemplo 33: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2.$$

Exemplo 34: Mostre que a equação

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\left(1 - \frac{P(t)}{P_{sat}}\right)P(t), \tag{83}$$

em que k é a taxa de crescimento e P_{sat} o nível de saturação[11], é uma equação diferencial de Bernoulli. Em seguida, determine sua solução.

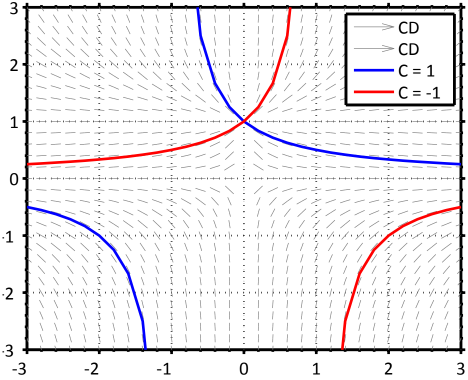
Exemplo 35: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}.$$

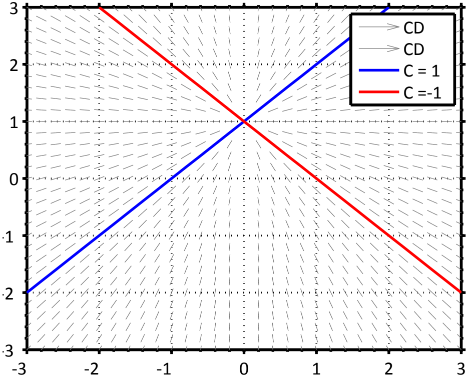
[11] Dinâmica populacional: equação de Verhulst

Equação diferencial de Bernoulli

Exemplos



(a) Exemplo 33: ${}^{dy}\!/_{dx} + {}^{y}\!/_{x} = {}^{y^2}\!/_{x}$.



(b) Exemplo 33: ${}^{dh}\!/_{dx} - {}^{1}\!/_{x}h = -{}^{1}\!/_{x}$.

Equação diferencial de Riccati

Zill 2.6; Kent 2.6

A equação diferencial não linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{84}$$

é conhecida como a equação diferencial de Riccati[12]. Suponha que haja uma **solução particular** da equação anterior representada por $y_p(x)$. A solução geral pode ser representada por

$$y(x) = y_p(x) + u(x). \tag{85}$$

Ao substituir a solução $y(x)$ na equação diferencial diferencial de Riccati, chegamos a equação diferencial de Bernoulli com $n = 2$ (mostre):

$$\frac{du}{dx} = [Q(x) + 2y_pR(x)]u + R(x)u^2. \tag{86}$$

em que $N(x) = -(Q(x) + 2y_pR(x))$ e $M(x) = R(x)$.

[12] http://mathworld.wolfram.com/RiccatiDifferentialEquation.html

Exemplo 36: Determine a solução da seguinte equação diferencial de Ricatti:

$$y' = 2 - 2xy + y^2. \qquad (87)$$

Exemplo 37: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$

com $y_p(x) = 2$.

Solução:

$$y(x) = 2 + \frac{1}{Ce^{-3x} - 1/3}.$$

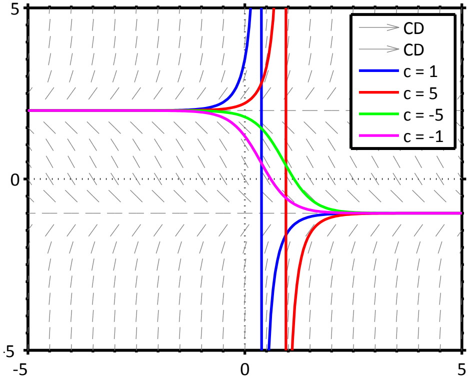


Figura 7: Exemplo 37: $dy/dx = -2 - y + y^2$.

Exercícios

Exercício 19: Determine a solução das equações diferenciais de Bernoulli dadas:

- $xy' + y = y^{-2}$;
- $y' = y\left(xy^3 - 1\right)$;
- $x^2y' + y^2 = xy$.

Exercício 20: Determine a solução das equações diferenciais de Ricatti dadas (y_1 é uma solução conhecida para a equação):

- $y' = -2 - y + y^2$, $y_1 = 2$;
- $y' = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$, $y_1 = -e^x$;
- $y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$, $y_1 = \frac{2}{x}$.

Próxima aula

Métodos iterativos:

- método de Picard;
- método de Euller.

Lição atual: Método da iteração de Picard e Método de Euller

Introdução

Nas aulas anteriores, estudamos as equações diferenciais lineares

$$y' + P(x)y = f(x), \tag{88}$$

cuja solução geral é

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} \mu(s)f(s)\,ds + y_0\right]. \tag{89}$$

Caso seja possível determinar, de forma analítica, o fator $\mu(x)$ e a integral da Eq. 89, a solução da Eq. 88 é conhecida. Da mesma forma estudamos as equações diferenciais não-lineares de Bernoulli e Riccati, apresentando o método geral de solução destas equações. Entretanto, como determinar a solução da equação diferencial não linear

$$y' + \sin y = x \text{ ?} \tag{90}$$

Nesta aula conheceremos dois métodos iterativos de solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Método de iteração de Picard

Zill 2.8

A solução de uma equação diferencial

$$y' = f(x, y), y(a) = b, \tag{91}$$

é (a partir do teorema fundamental do cálculo)

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(s, y(s))ds. \tag{92}$$

Então é possível determinar a solução tomando sucessivas substituições (método de iteração de Picard[13]).

[13]Este método é utilizado na demonstração do Teorema de Picard (Existência e Unicidade).

Método de iteração de Picard

Zill 2.8

Uma primeira aproximação de $y(x)$ pode ser obtida a partir de

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_0(x)\right) dx. \tag{93}$$

Quando repetimos o procedimento, uma outra função é definida por

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_1(x)\right) dx. \tag{94}$$

Dessa maneira, obtemos uma sequência de funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ em que o n-ésimo termo é definido por:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[x, y_{n-1}(x)\right] dx. \tag{95}$$

Exemplo 38: Determine a solução a equação diferencial

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

pelo método de interação de Picard.

Exemplo 39: Determine a solução a equação diferencial pelo método de interação de Picard da equação diferencial

$$y' = 2x(y+1), \quad y(0) = 0.$$

Exemplo 40: Use o método de Picard para encontrar as aproximações y_1, y_2, y_3 e y_4.

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

Exemplo 41: Use o método de Picard para encontrar as aproximações y_1, y_2, y_3 e y_4.

$$y' + \sin y = x, \quad y(0) = 0.$$

Método de iteração de Picard

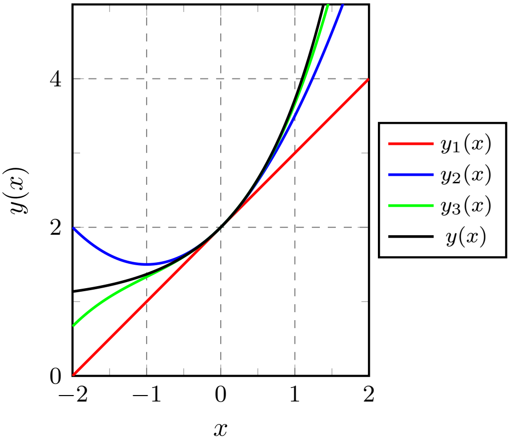
Exemplo 40

Solução:

$$y(x) = 1 + e^x \tag{96}$$

Aproximação:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 2 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots \\ &= 1 + 1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! \\ &= 1 + e^x. \end{aligned} \tag{97}$$



Método de iteração de Picard

Série de Taylor

A série de Taylor de uma função real ou complexa $f(x)$, infinitamente diferenciável em a (número real ou complexo) é definida como uma série de potências

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{98}$$

Série de Taylor de funções frequentemente utilizadas:

- Função exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{99}$$

- Função logaritmo natural:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots. \tag{100}$$

- Séries binomiais:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \ \text{com} \ \binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{101}$$

Método de iteração de Picard

Série de Taylor - funções trigonométricas

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{for all } x \tag{102}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \text{for all } x \tag{103}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \quad \text{for } |x| \leqslant 1 \tag{104}$$

$$\begin{aligned} \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \cdots \quad \text{for } |x| \leqslant 1 \end{aligned} \tag{105}$$

Método de iteração de Picard

Série de Taylor - funções hiperbólicas

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{for all } x \tag{106}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{for all } x \tag{107}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad \text{for } |x| \leqslant 1 \tag{108}$$

Mais informações: `https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series`

Exercício 21: Utilize o método de Picard para determinar y_1, y_2, y_3, e y_4 das equações diferenciais abaixo. Determine o limite da sequência $y_n(x)$ quando $n \to \infty$.

$$y' = -y,\ y(0) = 1 \tag{109}$$

$$y' = 2xy,\ y(0) = 1 \tag{110}$$

$$y' = -y^2,\ y(0) = 0. \tag{111}$$

Exercício 22: Utilize o método de Picard para encontrar y_1, y_2 e y_3 do problema

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0. \tag{112}$$

Em seguida resolva o problema de valor inicial por um dos métodos desta unidade e compare com o resultado obtido pelo método iterativo de Picard.

Método de Euller

Zill 9.2; Kent 1.4; Boyce 2.7

O método de Euller consiste em determinar a solução $y(x)$ em $x_0 + h$ a partir do problema de valor inicial

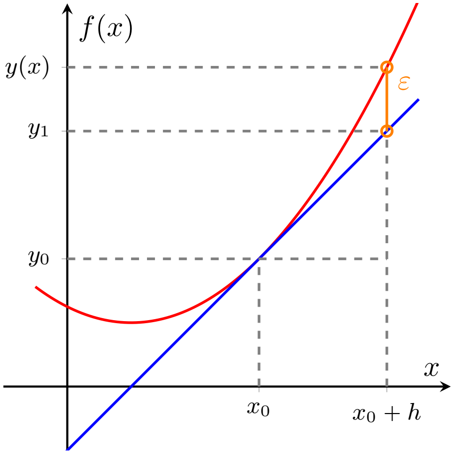
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\; y(x_0) = y_0. \qquad (113)$$

A partir do gráfico é possível estimar o valor de y_1 como

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right). \qquad (114)$$

Quanto menor h, menor o valor de $\varepsilon = |y(x) - y_1|$, ou seja, menor o erro da aproximação. De forma geral:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right),\; n = 0, 1, 2, \cdots. \qquad (115)$$



Método de Euller

Exemplo 42: Considere o problema de valor inicial:

$$y' + \frac{1}{2}y = 3 + e^{-x},\ y(0) = 1.$$

Determine i) a solução analítica, a solução numérica para ii) $h = 0,1$, iii) $h = 0,05$, iv) $h = 0,025$ e v) $h = 0,001$. Ilustre o resultado por meio de um gráfico e uma tabela. O intervalo de análise é $0 \leqslant x \leqslant 5$.

A solução analítica do problema de valor inicial é (mostre)

$$y(x) = -3e^{-0.5x} - 2e^{-x} + 6$$

A função de recorrência é definida como

$$y_{n+1} = y_n + h\left[3 + e^{-x_n} - 0.5y_n\right],$$

$$x_{n+1} = x_n + h = x_0 + h\,(n+1)\,.$$

Método de Euller

Exemplo

Para $h = 0,1$:

- $y(0)$ = 1,0000;
- $y(0,1) = y(0) + 0,1\left[3 + e^{-x_0} - 0.5y(0)\right] = 1,3500;$
- $y(0,2) = y(0,1) + 0,1\left[3 + e^{-x_1} - 0.5y(0,1)\right] = 1,6730;$
- $y(0,3) = y(0,2) + 0,1\left[3 + e^{-x_2} - 0.5y(0,2)\right] = 1,9712;$
- ...
- $y(0,9) = y(0,8) + 0,1\left[3 + e^{-x_8} - 0.5y(0,8)\right] = 3,3440;$
- $y(1,0) = y(0,9) + 0,1\left[3 + e^{-x_9} - 0.5y(0,9)\right] = 3,5175;$

Método de Euller
Exemplo

É importante destacar que para um passo de cálculo igual a 0,1, são necessárias 50 iterações para chegar ao limite superior de análise. Entretanto, para $h = 0,001$ são necessárias 5000 iterações!

x	$y(x)$	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,001$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	3,4446	3,5175	3,4805	3,4624	3,4517
2,0	4,6257	4,7017	4,6632	4,6443	4,6331
3,0	5,2310	5,2918	5,2612	5,2460	5,2370
4,0	5,5574	5,6014	5,5793	5,5683	5,5617
5,0	5,7403	5,7707	5,7555	5,7479	5,7433

Tabela 1: Resultado da aplicação do método de Euller para resolução numérica da EDO do Exemplo 42.

Método de Euller

Exemplo

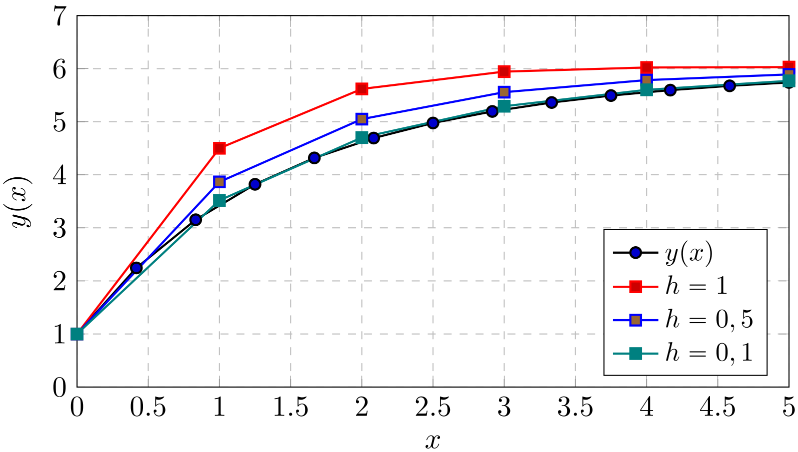


Figura 8: Método de Euller aplicado ao Ex. 42.

Nos próximos exercícios, utilize a linguagem Python ou MatLab para resolução numérica.

Exercício 23: Considere o problema de valor inicial

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1. \tag{116}$$

Use o método de Euller com $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e 0,01 para explorar a solução desse problema para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Qual a sua melhor estimativa para o valor da solução em $x = 0,8$? Em $x = 1$? Apresente o campo de direções da equação em análise.

Exercício 24: Considere o problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{3 + x^2},\ y(1) = 2. \tag{117}$$

Use o método de Euller com $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e 0,01 para explorar a solução desse problema para $1 \leqslant x \leqslant 3$. Qual a sua melhor estimativa para o valor da solução em $x = 2,5$? Em $x = 3$? Apresente o campo de direções da equação em análise.

Exercício 25: Considere o problema de valor inicial

$$y' + \sin y = x,\ y(0) = 0. \tag{118}$$

Use o método de Euller com $h = 0,1; 0,05; 0,025$ e 0,01 para explorar a solução desse problema para $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Qual a sua melhor estimativa para o valor da solução em $x = 0.5$? Em $x = 2$? Apresente o campo de direções da equação em análise.

Para maiores informações, sobre resolução numérica de EDO: http://blogs.mathworks.com/loren/2015/09/23/ode-solver-selection-in-matlab/?s_tid=srchtitle.