

Algoritmos y Estructuras de Datos 2

Práctica 6: Divide & Conquer

1er cuatrimestre 2022

Índice

1. Ejercicio 1: más a la izquierda	2
2. Ejercicio 2: índice espejo	2
3. Ejercicio 3: potencia	3
4. Ejercicio 4	3
5. Ejercicio 5: suma de potencias	3
6. Ejercicio 6: máxima distancia entre nodos	3
7. Ejercicio 7	4
8. Ejercicio 8	4
9. Ejercicio 9: i-ésimo merge	4
10.Ejercicio 10	5
11.Ejercicio 11	5
12.Ejercicio 12	5

1. Ejercicio 1: más a la izquierda

MasALaIzquierda(in A: arreglo(nat)) → **out** res: bool

Pre $\equiv \{\text{tam}(A) = 2^k \text{ para algún } k: \text{nat}\}$

```
1: n ← tam(A)
2: m ← n div 2
3: izq ← SubArreglo(A, 1, m)
4: der ← SubArreglo(A, m + 1, n)
5: sumaIzq ← Sumar(izq)
6: sumaDer ← Sumar(der)
7: if sumaIzq > sumaDer then
8:   if n = 2 then
9:     res ← true
10:  else
11:    res ← MasALaIzquierda(izq) ∧ MasALaIzquierda(der)
12:  end if
13: else
14:   res ← false
15: end if
```

▷ $O(1)$
▷ $O(1)$
▷ $O(n/2)$
▷ $O(n/2)$

Complejidad:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$\text{Sea } a = 2, b = 2, f(n) = n$$

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^{\log_2(2)}) = \Theta(n)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log(n)) = \Theta(n \log(n))$$

2. Ejercicio 2: índice espejo

ÍndiceEspejo(in A: arreglo(nat), low: nat, high: nat) → **out** res: bool

Pre $\equiv \{\forall i : (1 \leq i < \text{tam}(A)) \Rightarrow a_i < a_{i+1} \wedge \text{low} = 0 \wedge \text{high} = \text{tam}(A)\}$

```
1: if low > high then
2:   res ← false
3: end if
4: mid ← (low + high) div 2
5: pivote ← A[mid]
6: if mid - pivote > 0 then
7:   res ← ÍndiceEspejo(A, mid+1, high)
8: end if
9: if mid - pivote < 0 then
10:  res ← ÍndiceEspejo(A, low, mid-1)
11: end if
12: if mid - pivote = 0 then
13:   res ← true
14: end if
```

▷ Nos pasamos y no encontramos nada
▷ $O(1)$
▷ $O(1)$
▷ Buscamos a la derecha
▷ Buscamos a la izquierda
▷ Encontramos una solución

Complejidad:

$$\text{Sea } n = \text{tam}(A), a = 1, b = 2, f(n) = cte \in \Theta(1)$$

$$T(n) = T(n/2) + cte$$

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^{\log_2(1)}) = \Theta(1)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log(n)) = \Theta(\log(n))$$

Implementación en Go: https://play.golang.org/p/DdY_WfUMLZD

3. Ejercicio 3: potencia

Potencia(in a: nat, in b: nat) → out res: nat

```
1: if b = 0 then
2:   res ← 1
3: else if b mod 2 = 0 then
4:   c ← Potencia(a, b / 2)
5:   res ← c * c
6: else
7:   c ← Potencia(a, (b - 1) / 2)
8:   res ← c * c * a
9: end if
```

Complejidad:

$$T(b) = T(b/2) + cte$$

Sea $a = 1$, $c = 2$, $f(b) = cte \in O(1)$

$$f(b) \in \Theta(n^{\log_c(a)}) = \Theta(n^{\log_2(1)}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$$

$$\Rightarrow T(b) = \Theta(n^{\log_c(a)} \log(b)) = \Theta(\log(b))$$

4. Ejercicio 4

Pendiente.

5. Ejercicio 5: suma de potencias

SumaDePotencias(in A: arreglo(arreglo(nat)), in n: nat) → out res: arreglo(arreglo(nat))

Pre $\equiv \{n = 2^k \text{ para algún } k: \text{nat} \geq 1\}$

```
1: if n = 1 then
2:   res ← A
3: else
4:   B ← SumaDePotencias(A, n / 2)
5:   res ← Potencia(A, n / 2) * B + B
6: end if
```

Complejidad:

$$T(n) = T(n/2) + cte$$

Sea $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = cte \in O(1)$

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^{\log_2(1)}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log(n)) = \Theta(\log(n))$$

Asumimos que la función Potencia = $O(1)$.

6. Ejercicio 6: máxima distancia entre nodos

ab es tupla $\langle \text{izq: ab, der: ab} \rangle$

mdr es tupla $\langle \text{maxDistancia: nat, altura: nat} \rangle$

MaxDistancia(in nodo: ab) → out res: nat

```
1: res ← MaxDistanciaAux(nodo).maxDistancia
```

Complejidad:

MaxDistanciaAux(in nodo: ab) → **out** res: mdr

```
1: if nodo = nil then
2:   res ← ⟨ maxDistancia: 0, altura: 0 ⟩
3: else
4:   resIzq ← MaxDistanciaAux(nodo.izq)
5:   resDer ← MaxDistanciaAux(nodo.der)
6:   res ← ⟨
7:     maxDistancia: max(resIzq.maxDistancia, resDer.maxDistancia, resIzq.altura + resDer.altura + 1),
8:     altura: max(resIzq.altura, resDer.altura) + 1
9:   ⟩
10: end if
```

Complejidad:

Revisar porque este algoritmo cuenta la cantidad de nodos en vez de ejes.

7. Ejercicio 7

Pendiente.

8. Ejercicio 8

Pendiente.

9. Ejercicio 9: i-ésimo merge

IesimoMerge(in A: arreglo(nat), in B: arreglo(nat), in i: nat) → **out** res: nat

```
1: izq ← 1
2: der ← tam(A)
3: res ← 0
4: while izq < der ∧ res = 0 do
5:   mid ← izq + floor((der - izq) / 2)
6:   posInsercion ← BuscarPosInsercion(B, A[mid])
7:   iMerge ← mid + posInsercion
8:   if iMerge = i then
9:     res ← mid
10:  else if iMerge < i then
11:    der ← mid - 1
12:  else
13:    izq ← mid + 1
14:  end if
15: end while
16: if res ≠ 0 then
17:   res ← A[res]
18: else
19:   res ← IesimoMerge(B, A, i)
20: end if
```

Complejidad:

BuscarPosInsercion(in A: arreglo(nat), in e: nat) \rightarrow out res: nat

```
1: izq  $\leftarrow$  1
2: der  $\leftarrow$  tam(A)
3: while izq < der do
4:   mid  $\leftarrow$  izq + floor((der - izq) / 2)
5:   if e < A[mid] then
6:     der  $\leftarrow$  mid - 1
7:   else
8:     izq  $\leftarrow$  mid + 1
9:   end if
10: end while
11: res  $\leftarrow$  izq
```

Complejidad:

Ejemplo de ejecución

```
IesimoMerge([1, 3, 5], [2, 4, 6], 5)
  M = Merge([1, 3, 5], [2, 4, 6]) = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
  M[5] = 5
IesimoMerge([1, 2, 3, 4, 5], [6, 7, 8, 9, 10], 2)
  M = Merge([1, 2, 3, 4, 5], [6, 7, 8, 9, 10]) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
  M[2] = 2
```

i = 5 [1, 2, 3, 4, 5] [6, 7, 8, 9, 10]

10. Ejercicio 10

Pendiente.

11. Ejercicio 11

Pendiente.

12. Ejercicio 12

Pendiente.