
MINI-PROJET 6 – OPTIMISATION

MINES Paris–PSL
http://moodle.psl.eu *2024-2025*

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC (inscription sur Moodle), fera l'objet d'une soutenance orale, incluant la présentation des résultats obtenus et une séance de questions. La présentation comportera obligatoirement un Jupyter Notebook, comportant les réponses aux questions demandées dans le sujet, le code Python réalisé et les graphiques obtenus par des simulations sous Python. ***Ce Jupyter Notebook sera à déposer au plus tard le vendredi 18 avril à 9h*** *sur Moodle.*

Le code rendu devra être fonctionnel, et le notebook exécutable en direct durant la soutenance, dans l'ordre des cellules, avec un "Run All Cells". Tout code non-exécutable pourra donner lieu à une pénalisation sur la note obtenue. Il est également demandé à ce que les paramètres d'entrée du cas d'étude soient modifiables à la volée dans le code le jour de la soutenance. Il n'est pas nécessaire d'apporter un ordinateur le jour de la soutenance.

Harry Markowitz et les quarante portefeuilles

L'optimisation de portefeuille a pour objectif de définir un choix "optimal" d'investissement d'un capital dans un ensemble de m actifs. Pour ce faire, on note x_i l'investissement dans le i-ème actif, de sorte que le vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ décrit l'allocation globale du portefeuille à travers l'ensemble des actifs. Ceci génère un rendement r pour l'ensemble du portefeuille, incertain, dont on cherche à minimiser le risque.

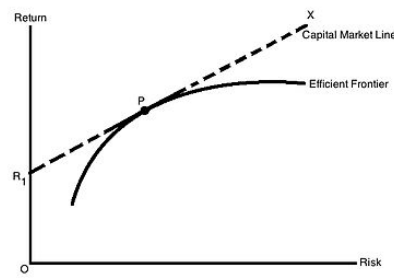

Fig.1 : Frontière efficiente et allocation optimale de capital.

On considère le vecteur $p \in \mathbb{R}^m$ de variation du prix des actifs sur le long terme, supposé gaussien, de moyenne $\bar{p}$ et de matrice de covariance Σ, semi-définie positive. Pour tenir compte du budget à investir, on a

$$\mathbf{1}^\top x = 1 \tag{1}$$

où $\mathbf{1}^\top$ désigne le vecteur ligne $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Par ailleurs, pour un rendement r donné, on sait que

$$\bar{p}^\top x = r \tag{2}$$

et que le risque associé à un investissement x peut s'exprimer comme sa variance

$$x^\top \Sigma x. \tag{3}$$

1 Etude de l'expression d'origine par Markowitz

1. Interpréter la signification du problème décrit ci-dessus.
2. Formuler le problème d'optimisation considéré sous la forme

$$\min_{c_{eq}(z)=0} f(z) \tag{4}$$

On précisera les variables de décision z, leur nombre n, les contraintes c_{eq} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

3. On considère également la possibilité de limiter les positions courtes/*short*, pour ne pas trop s'exposer. Ceci se traduit par la contrainte supplémentaire

$$\mathbf{1}^\top \max(-x, \mathbf{0}) \leq s_M \tag{5}$$

où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, le max s'entend composante par composante, cad $(\max(-x, \mathbf{0}))_i = \max(-x_i, 0)$, et $s_M \in \mathbb{R}$ est une constante. Interprétez la signification de cette contrainte. Quelle difficulté pose-t-elle dans le cadre d'un algorithme d'optimisation ?

4. Justifier que (5) peut être reformulée en introduisant $s \in \mathbb{R}^m$ comme suit

$$s \geq -x\,, \quad s \geq 0\,, \quad \mathbf{1}^\top s \leq s_M \tag{6}$$

et modifier la formulation du problème de la question 2 en conséquence.

2 Etude numérique du problème de Markowitz

On s'intéresse dans un premier temps au problème (4), correspondant à la formulation d'origine de la théorie du portefeuille due à Harry Markowitz.

5. De quel type de problème d'optimisation s'agit-il ? Quelles méthodes de résolution peuvent être envisagées dans ce cas ?
6. Résoudre numériquement le problème pour les valeurs numériques suivantes : $\bar{p}_1 = 5\%$, $\bar{p}_2 = 15\%$, $\bar{p}_3 = 30\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 30\%$, $\sigma_3 = 80\%$, $\rho = 0.1$, $r = 0.1$ et :

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

7. **Influence du paramètre ρ**
   (a) Que représente ρ et quelles valeurs peut-il prendre ?
   (b) Pour $\rho = 0.1$, $\rho = 0.5$ puis $\rho = -0.5$, représenter les valeurs $(\sqrt{x^\top \Sigma x}, \bar{p}^\top x)$ dans un plan 2D, pour $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ et $x_3 = 0$, sous la contrainte $\mathbf{1}^\top x = 1$. Représenter sur le même diagramme en changeant de couleurs/formes ces valeurs pour $x_1 \in [-2, 0]$, puis pour $x_2 \in [-2, 0]$. Comment interpréter l'effet de ρ ?
   (c) Réitérer la résolution de la Question 6 pour $\rho = 0.5$ puis $\rho = -0.5$. Comparer vos résultats d'optimisation avec l'analyse de la question précédente.
8. **Influence du rendement r**
   (a) Réitérer la résolution numérique de la Question 6 pour $r = 0.2$, puis $r = 0.15$ (pour la valeur $\rho = 0.1$). Commenter.
   (b) Comment la solution pour $r = 0.15$ se compare-t-elle à celles obtenues pour $r = 0.1$ et $r = 0.2$? Justifier le principe suivant : investir dans deux fonds optimaux suffit à les exprimer tous (Two-fund theorem).
   (c) Démontrer ce principe en résolvant analytiquement le problème (4).
9. Résoudre numériquement le problème formulé en Question 4, pour $r = 0.4$, $s_M = 0.5$ et les valeurs ci-dessus. Observez l'effet de la limitation des positions courtes par rapport au problème précédent.

3 Expression comme un problème bi-objectif

On cherche maintenant à minimiser le critère suivant

$$-\bar{p}^\top x + \mu x^\top \Sigma x \tag{7}$$

pour une constante $\mu > 0$, sous la contrainte (1).

10. Interpréter la signification du coût (7). Commenter le signe de $-\bar{p}^\top x$. Discuter du cas $\mu = 0$: quelle est alors la nature du problème d'optimisation ?
11. Si les x_i sont aussi contraints à être tous positifs, quelles sont selon vous les solutions pour $\mu = 0$ et $\mu \to +\infty$ et à quel type de comportement d'investisseur cela correspondrait-il ? Vérifiez ces comportements numériquement en simulation, pour les valeurs de la Question 6.
12. (a) Expliquer pourquoi il existe μ tel que ce problème a la même solution que (4). *Bonus :* Le démontrer.
    (b) Résoudre numériquement le problème pour cette valeur de μ (à déterminer numériquement ou analytiquement) et comparer en particulier aux résultats de la Question 6.