Jannis Jost, Konrad Pawlak Theoretische Informatik 2

Abgabe Bonusaufgabe 1

Tutorium: 1 Abgabeteam: 5 Sommersemester 2024

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter und zusammenhängender Graph.
Zu zeigen: G hat genau dann einen Eulerkreis, wenn für alle Knoten $v \in V$ gilt:

$d_G^-(v) = d_G^+(v)$ (also Eingangsgrad von v ist gleich dem Ausgangsgrad von v)

Beweis:

1. ($\Rightarrow$):
G hat einen Eulerkreis. Diesen wollen wir weiterführend mit K bezeichnen. K ist also nun ein Zyklus, der in Knoten $u \in V$ anfängt und endet und jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Da G zusammenhängend und gerichtet ist, wissen wir, dass in diesem Zyklus jeder Knoten vorkommen muss. Wir wollen nun zeigen, dass für alle $v \in V$ gilt, dass der Eingangsgrad von v gleich dem Ausgangsgrad von v ist. Dafür betrachten wir zunächst alle Knoten $x \in V \setminus \{u\}$, also alle Knoten x, die nicht unser Knoten u sind. Da jeder Knoten im Eulerkreis mindestens einmal vorkommen muss, wissen wir, dass x in K irgendwann vorkommt, vielleicht sogar auch öfter. Für jedes Vorkommen von x gilt nun, dass der Eingangsgrad von x um 1 wächst, da eine neue Kante zu x hinführt und auch, dass der Ausgangsgrad von x um 1 erhöht wird, da wir wieder bei unserm Knoten u landen müssen. Somit gilt für n-maliges Vorkommen in K (wobei $n > 0$) für Knoten x:
$d_G^+(x) = n = d_G^-(x)$. Somit gilt für x, dass der Eingangsgrad und Ausgangsgrad von x gleich ist und damit gilt für alle $x \in V \setminus \{u\}$, dass der Eingangsgrad und Ausgangsgrad gleich ist. Nun betrachten wir noch unseren Knoten u. Auch dieser kann beliebig oft in unserem Zyklus K vorkommen, wobei er das nicht muss, da wir bei diesem anfangen. Falls wir ihn aber zwischendurch entdecken (und noch nicht bei ihm enden), gilt wie vorher, dass der Eingangs- und Ausgangsgrad von u um 1 erhöht wird. Zusätzlich dazu geht von Knoten u noch eine Kante weg, da wir bei diesem den Zyklus beginnen, und es kommt eine Kante hin, da wir bei diesem den Zyklus enden. Damit kommen für u neben den n'-Begegnungen (wobei hier $n' \geq 0$) im Zyklus K auch noch jeweils 1 Eingangs- und Ausgangsgrad dazu. Somit gilt für Knoten u:
$d_G^+(u) = n' + 1 = 1 + n' = d_G^-(u)$. Also gilt auch für Knoten u, dass der Eingangs- und Ausgangsgrad gleich ist.
Damit ist gezeigt, dass für alle Knoten $v \in V$ gilt, dass der Eingangs- und Ausgangsgrad von v gleich sind, wenn G einen Eulerkreis enthält.

2. ($\Leftarrow$):
Für alle Knoten $v \in V$ gilt, dass der Eingangs- und Ausgangsgrad gleich ist. Insbesondere gilt dadurch, dass der Grad jedes Knotens in G gerade ist. Nun wollen wir zeigen, dass es einen Eulerkreis in G gibt. Dafür wollen wir zunächst den längsten Pfad in G betrachten, also den Pfad, der am meisten unterschiedliche Kanten enthält. Sei $s \in V$ der Knoten, bei dem dieser Pfad beginnt und sei $t \in V$ der Knoten, bei dem dieser Pfad endet. Wir wollen zunächst per Widerspruch zeigen, dass dieser Pfad ein Zyklus sein muss, also dass $s = t$ gilt.

Annahme: $s \neq t$, also der längste Pfad in G ist kein Zyklus.
Wir schauen uns ähnlich in wie bei 1. nun an, was für den Eingangs- und Ausgangsgrad für den Knoten t gilt. Einmal hat dieser mindestens einen Eingangsgrad von 1, da bei diesem unser Pfad endet. Zusätzlich dazu, kann t beliebig oft im Pfad vorkommen. Für jedes Vorkommen, wird der Eingangs- und Ausgangsgrad jeweils um 1 erhöht. Somit gilt bei n-maligem Vorkommen im Pfad für t:
$d^+_G(t) = 1 + n \neq n = d^-_G(t)$. Der Ausgangsgrad von t wäre nun um 1 kleiner, da wir eine eingehende Kante mehr dadurch haben, dass wir in t enden. Da t nicht unser Startknoten ist, haben wir keine zusätzliche ausgehende Kante am Anfang. Somit wäre allerdings der Eingangs- und Ausgangsgrad von t nicht gleich, was nicht sein kann, da dies für alle Knoten gilt. Somit muss unsere Annahme falsch sein und der längste Pfad in G ist ein Zyklus.
Wir wollen diesen Zyklus, der in Knoten s startet und endet, nun mit K bezeichnen. Wir wissen, dass K der längste Zyklus ist, also die meisten Kanten beinhaltet. Wir wollen nun per Widerspruch zeigen, dass K tatsächlich alle Kanten beinhaltet.

Annahme: K enthält nicht alle Kanten von G.
Das bedeutet, es gibt es mindestens einen Pfad, der in unserem Zyklus K nicht vorkommt. Da unser Graph zusammenhängend ist, wissen wir, dass es einen Knoten in unserem Zyklus geben muss, von dem dieser Pfad betreten werden kann, denn sonst wäre es unmöglich diese Knoten zu erreichen. Dieser Knoten, mit dem wir auf diesen Pfad gelangen, nennen wir nun u. Das heißt, dass u der Anfang dieses Pfades ist, der nicht in unserem Zyklus enthalten ist. Wenn wir nun zeigen können, dass dieser Pfad ein Zyklus ist, der in u beginnt und endet, dann haben wir einen Widerspruch erzeugt, da wir diesen Zyklus einfach mit in unserem Zyklus K aufnehmen hätten können.

Um zu zeigen, dass dieser Pfad, der bei u beginnt, ein Zyklus ist, kreieren wir uns zunächst einen neuen Graph G'. Dieser Graph G' besteht aus allen Kanten des Ursprungsgraphen G, außer denen, die in unserem Zyklus K enthalten sind. Das heißt, in G' sind alle Kanten, die nicht in unserem Zyklus K sind. Wir können nun folgende Beobachtung aufstellen:
Da wir aus G einen Zyklus entfernen, wird für jede eingehende Kante, die entfernt wird, auch eine ausgehende Kante entfernt. Das bedeutet, wir entfernen eine gerade Anzahl an Kanten von jedem Knoten. Da unsere Knoten davor alle geraden Grad gehabt haben und wir eine gerade Anzahl an Kanten von jedem Knoten entfernen in G', muss jeder Knoten in G' auch eine gerade Anzahl an Kanten haben. Wir wollen nun in G' den längsten Pfad betrachten, der bei dem Knoten u, den wir vorher ausgewählt haben, beginnt. Der Knoten, bei dem dieser Pfad

endet, bezeichnen wir mit t. Ähnlich wie vorher, können wir per Widerspruch zeigen, dass $u = t$ gelten muss. Denn wenn das nicht so wäre, dann würde das wie vorher bedeuten, dass der Eingsangsgrad von Knoten t um 1 höher wäre, als sein Ausgangsgrad. Somit wäre sein insgesamter Grad ungerade. Da wir aber bereits erläuter haben, dass jeder Knoten in G' einen geraden Grad haben muss, kann das nicht sein und damit muss $u = t$ gelten. Somit ist der längste Pfad in G', der bei u beginnt, ein Zyklus von u zu u. Dies ist allerdings wieder ein Widerspruch, denn diesen Zyklus hätten wir zu unserem Zyklus K einfach hinzufügen können und hatten dann einen längeren Zyklus, was nicht sein kann, da K der längste Zyklus in G ist. Somit muss unsere Annahme falsch sein und unser Zyklus K muss alle Kanten in G beinhalten.

Aus 1. und 2. folgt, dass ein gerichteter und zusammenhängender Graph G genau dann einen Eulerkreis hat, wenn für alle Knoten $v \in V$ gilt, dass der Eingangs- und Ausgangsgrad von v gleich ist.

Algorithmus der einen Eulerkreis berechet:

Eingabe: zusammenhängender gerichteter Graph $G = (V, E)$, der einen Eulerkreis hat

Ausgabe: Array A der Länge $|E| + 1$ von Knoten $v \in V$, das einen Eulerkreis in richtiger Reihenfolge enthält

Korrektheit: Die Knotenfolge in A ist ein Eulerkreis.

Algorithmusbeschreibung:
Der Algorithmus startet bei einem zufälligen Knoten v und folgt von diesem aus einem beliebigen Knotenpfad von ungenutzten Kanten und merkt sich diesen, bis dieser wieder bei v ankommt. Der Pfad wird in einer doppelt verketteten Liste gespeichert. Zusätzlich wird die Menge der ungenutzten Kanten für jeden Knoten und die Liste der Knoten auf dem momentanten Pfad, die noch ungenutzte ausgehende Kanten haben jeweils auch in einer doppelt verketteten Liste gespeichert. Der momentane Pfad ist nun ein Zyklus, aber enthält nicht zwingend alle Kanten. Falls dies der Fall ist, dann gibt unser Algorithmus direkt den aktuellen Pfad aus, weil dies ein Eulerkreis ist.
Ansonsten geht der Algorithmus rückwärts den aktuellen Zyklus durch, auf der Suche nach einem Knoten u der noch ungenutzte Kanten hat. Dann wird von diesem Knoten aus ein neuer Pfad gestartet, der auch wieder verfolgt wird, bis er bei u ankommt. Nun fügen wir die zwei Zyklen zusammen, in dem der Knoten u im aktuellen Pfad durch den Zyklus von u zu u ersetzt wird, wodurch wir einen großen zusammenhängenden Zyklus erhalten.
Der Algorithmus startet solange Zyklen mit ungenutzten Kanten und fügt die Zyklen zusammen, bis keine ungenutzten Kanten mehr übrig sind.
Dann wird der vollständige Pfad ausgegeben.

Korrektheit:
Bei dem Durchgehen von ungenutzten Kanten von u aus kann man nicht bei einem anderen Knoten als u stecken bleiben, weil wenn auf dem Pfad eine ungenutzte Kante zu einem anderen Knoten w führt durch den gleichen Ein- und Ausgangsgrad des Graphen auch noch eine ungenutzte Kante von w ausgehend existiert. Also wird garantiert irgendwann wieder u erreicht. Falls es noch ungenutzte Kanten gibt, gibt es dadurch, dass der Graph zusammenhängend ist, innerhalb des Zyklus von u zu u garantiert einen Knoten v mit ungenutzter ausgehender Kante, von der wir aus den nächsten Zyklus beginnen können. Da beide Zyklen v enthalten, können beide zu einem großen Zyklus zusammengeführt werden. In einem zusammenhängenden Graphen können wir diesen Schritt so oft wiederholen, bis wir einen Zyklus erhalten, der alle Kanten des Graphen enthält, einen Eulerkreis.

Laufzeit:
Durch die Nutzung von doppelt verketteten Listen braucht das Finden von ungenutzten ausgehenden Kanten pro Knoten, das Finden eines Knoten, von dem aus der nächste Zyklus gestartet werden kann und das Verbinden von zwei Zyklen, die sich einen Knoten teilen jeweils konstante Zeit. In jedem Schritt wird eine Kante

"genutzt", bis alle Kanten benutzt sind. Somit haben wir eine Laufzeit von $O(|E|)$ für das Finden des Eulerkreises. Die Ausgabe erfolgt auch in $O(|E|)$, was somit auch die insgesamte Laufzeit des Algorithmus ist.