

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Цыбаков, В. А. Михайлов, Свободный синхронный доступ пакетов в широкополосный канал с обратной связью, *Пробл. передачи информ.*, 1978, том 14, выпуск 4, 32–59

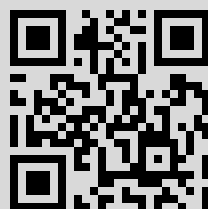
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 5.167.196.74

2 ноября 2021 г., 22:39:29



УДК 621.394.74

## СВОБОДНЫЙ СИНХРОННЫЙ ДОСТУП ПАКЕТОВ В ШИРОКОВЕЩАТЕЛЬНЫЙ КАНАЛ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Б. С. Цыбаков, В. А. Михайлов*

Предлагаются новые алгоритмы случайного синхронного доступа пакетов в широковещательный канал с обратной связью. Исследуется скорость передачи и задержка для одного из них. В отличие от известной системы АЛОХА исследуемый алгоритм является устойчивым и дает возможность вести передачу со скоростями, большими  $1/e$  при конечной задержке.

### § 1. Введение и алгоритмы доступа

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1. С ней часто приходится встречаться на практике. Она описывает передачу в многоточечной линии, радио- или спутниковом канале с многими пользователями, в волоконной оптической системе с «отражателем» в качестве коммутационного элемента и в других системах связи. Показанная схема описывает также некоторые системы массового обслуживания, в частности, такие, которые прихо-

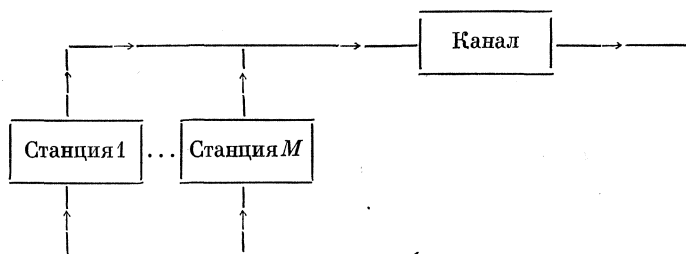


Рис. 1. Общая схема системы

дится рассматривать в сетях ЭВМ; в этом случае вместо канала в схеме стоит обслуживающий прибор, а вместо станций — пользователи. Наконец, схема описывает некоторые игровые ситуации; в этом случае канал — это игровой автомат, а станции — игроки. Здесь, однако, мы будем рассматривать ее в связи с задачами передачи информации и доступа.

Система, схема которой показана на рис. 1, содержит  $M$  станций и широковещательный канал. На каждой станции имеется источник пакетов. Генерируемые источником пакеты предназначаются для передачи по каналу к другой или другим станциям. Пакет наряду с полем данных содержит адресное поле, указывающее номера станций, к которым он направляется. Все пакеты на всех станциях имеют одинаковую длину, которая принимается за единицу времени.

Канал является единственным средством связи между станциями. Все время передачи по каналу разделено на равные длине пакета (единичные) интервалы, называемые окнами. Считается, что все станции точно знают моменты разделения окон  $t=0, 1, 2, \dots$  (синхронный доступ). Станциям разрешается начинать передачу пакета только в момент начала окна  $t$

и только в соответствии с *алгоритмом доступа* (АД), который заранее выбирается и известен всем станциям.

Рассматривается случай, когда флуктуационный шум в канале настолько мал, что канал считается бесшумным. Выход канала без задержки поступает на каждую из станций. Станция, принимая выход канала, безошибочно различает три возможные ситуации в окне: 1) пакет не передавался (*пустое окно*); 2) передавался один пакет (*успешная передача*); 3) одновременно передавались два или более пакетов и произошло их наложение (*конфликт*).

В случае успешной передачи все станции принимают пакет. Для станции, которая посылала пакет, это событие (*успешная передача*) является положительной квитанцией на передачу, и она сбрасывает копию успешно переданного пакета, считая, что его передача завершена. Станции, которым адресован этот пакет, записывают его в памяти и после обработки выводят его из системы. Остальные станции лишь фиксируют событие успешной передачи пакета в данном окне и сбрасывают пакет.

В случае конфликта станции, участвующие в нем (т. е. станции, пославшие пакет в этом окне), получают посредством обнаружения конфликта отрицательную квитанцию на передачу пакета. Копии пакетов не сбрасываются этими станциями, и пакеты передаются вновь в соответствии с АД. Остальные станции фиксируют событие конфликта в данном окне и также поступают в соответствии с АД.

В дальнейшем число станций, участвующих в данном конфликте, называется кратностью конфликта. Для единообразия терминологии иногда в дальнейшем успешная передача называется конфликтом кратности 1, а пустое окно — конфликтом кратности 0.

Перейдем теперь к описанию алгоритмов доступа. Известны два алгоритма свободного доступа: синхронная АЛОХА и АЛОХА с управлением.

**Синхронная АЛОХА.** Если к моменту начала окна  $t$  у станции имеется готовый для передачи пакет, который еще ни разу не передавался по каналу (*новый пакет*), то он передается в окне  $(t, t+1)$ . Если к моменту начала окна  $t$  у станции имеется пакет, который ранее уже передавался, но не проходил успешной передачи (*задолженный пакет*), то он передается в данном окне с вероятностью  $Q$  и не передается с вероятностью  $1-Q$  независимо от всех других случайных событий в системе.

**АЛОХА с управлением.** В этом алгоритме считается, что каждая станция знает число задолженных пакетов в системе  $n$  в любой момент времени  $t$ . При этом система действует как синхронная АЛОХА с той лишь разницей, что вероятность  $Q$  зависит от  $n$ , т. е.  $Q=Q(n)$ . Часто, например, при больших  $n$  считается, что  $Q(n)=an^{-1}$ , где  $a$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .

Известны также некоторые другие алгоритмы свободного доступа, существенно отличающиеся от указанных алгоритмов АЛОХА. К ним относится, например, синхронная АЛОХА, при котором для передачи задолженного пакета выбирается одно из следующих  $K$  окон и выбор производится случайно с вероятностью  $K^{-1}$  для каждого окна. Известно также множество алгоритмов фиксированного доступа, например, разделение времени, частотное разделение и др. Однако в данной статье мы интересуемся только алгоритмами свободного доступа. Наконец, известен АД АЛОХА с резервированием, который чередует свободный и фиксированный доступ. Подробный обзор всех известных АД можно найти в обзоре [1], а также в работах, включенных в обширную библиографию этого обзора, и работах [2, 3].

В этой статье предлагаются некоторые новые АД, к описанию которых мы переходим.

В предлагаемых АД считается, что канал может находиться в двух фазах: 1) *свободная фаза*; 2) *фаза разрешения конфликта*. В начальный момент работы системы  $t=0$  канал находится в свободной фазе. При описании алгоритмов будет указано, каким образом каждая станция определяет моменты смены фаз. Все новые пакеты, поступившие от источников во время фазы разрешения конфликта, не передаются и ждут окончания этой фазы. Эти пакеты передаются в первом окне свободной фазы, следующей за фазой разрешения конфликта, во время которой они появились.

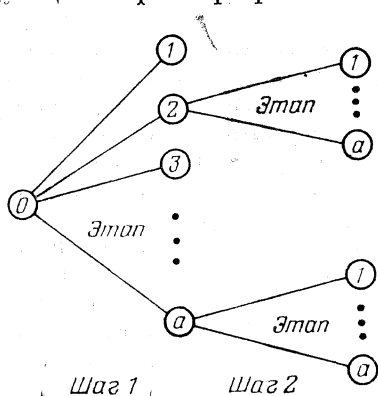


Рис. 2. Древовидный граф АРК. После первого шага новые узлы 2 и a оказались неконцевыми, узлы 1 и 3 — концевыми

окном канала, а вершины графа представляют конфликты. Концевые вершины дерева представляют конфликты кратности 0. Начальная вершина дерева представляет конфликт, имевший место в последнем окне предыдущей свободной фазы. Обозначим через  $k$  кратность этого конфликта. Этот конфликт будет разрешаться во время текущей фазы разрешения конфликта. Конфликт считается разрешенным, а фаза оконченной после (но быть может не сразу после) успешной передачи всех  $k$  конфликтующих пакетов. Обозначим через  $\lceil \tau/k \rceil$  число окон, которые потребуются для разрешения данного конфликта кратности  $k$ . Окна рассматриваемой фазы разрешения конфликта будем нумеровать по порядку числами  $1, 2, \dots, \lceil \tau/k \rceil$ .

*Этапом 1* АРК является следующая процедура. Этап начинается в начальной вершине, соответствующей конфликту кратности  $k$ . Из этой вершины исходит  $a$  ребер (см. рис. 2); ребро  $i$  ( $i=1, \dots, a$ ) соответствует окну  $i$ . Каждая из  $k$  конфликтующих станций, находящихся в начальном узле, независимо выбирает одно из  $a$  чисел  $0, 1, \dots, (a-1)$  с вероятностями  $q_0, q_1, \dots, q_{a-1}$ . Все станции (пусть их число  $l_i$ ), которым выпал 0, передают пакеты в окне 1. Если  $l_i \geq 2$ , то в окне 1 будет конфликт и все  $l_i$  станций перейдут в вершину 1, которая будет соответствовать конфликту кратности  $l_i$ . Если  $l_i=1$ , то в окне 1 будет успешная передача; станция, осуществившая эту передачу, выходит из конфликта; в вершину 1 не переходит ни одна из станций, и она считается концевой вершиной дерева. Если  $l_i=0$ , то окно 1 будет пустым; в вершину 1 не переходит ни одна из станций, и она также будет концевой. Аналогичное происходит с теми  $l_i$  станциями, которым выпало  $i$  ( $i=1, \dots, a-1$ ). Они передают в окне  $i$

Если в первом окне свободной фазы имело место одно из событий — пустое окно или успешная передача, то следующее окно считается вторым окном текущей свободной фазы. И так далее — свободная фаза продолжается до окна, в котором происходит конфликт. Это окно считается последним окном рассматриваемой свободной фазы и следующее за ним окно является первым окном фазы разрешения конфликта.

Опишем теперь поведение станций в фазе разрешения конфликта. Это поведение регламентируется *алгоритмом разрешения конфликта (АРК)*.

#### АРК со случайными паспортами.\*

А. Передача по этапам. АРК удобно представлять древовидным графом (см. рис. 2). Каждое ребро графа является

\* Название этого алгоритма станет ясным после приводимого ниже рассмотрения АРК с фиксированными паспортами.

и переходят в вершину  $i$ , если  $l_i \geq 2$ , и вершина  $i$  считается концевой, если  $l_i = 0$  или  $l_i = 1$ . На этом первый этап АРК заканчивается.

После первого этапа все вершины  $1, \dots, a$  могут оказаться концевыми, тогда фаза разрешения конфликта оканчивается передачей окна  $a$  и  $[\tau|k] = a$ . Все станции системы по наблюдению выхода канала могут определить этот момент окончания фазы.

Если после первого этапа некоторые из вершин  $1, \dots, a$  не будут концевыми, то эти неконцевые вершины (пусть их число  $b_1$ , а соответствующие им конфликты имеют кратности  $l_{i_1}, \dots, l_{i_{b_1}}$ ) упорядочиваются по номерам и АРК приступает ко второму шагу (первый шаг состоял из одного первого этапа). Во время второго шага, который длится  $ab_1$  окон, последовательно выполняются этапы  $2, \dots, (b_1+1)$ , аналогичные этапу 1. Так на этапе 2, которому соответствуют окна  $a+1, \dots, 2a$ , разрешается конфликт кратности  $l_{i_1}$ . Все участвующие в нем станции знают о своем участии в нем на основании знания момента начала фазы разрешения конфликта, наблюдения выхода канала с этого момента, своей истории (т. е. передач и непередач) с этого момента и знания АД. Все станции, не участвующие в конфликте, также знают о своем неучастии в нем на основе тех же данных. Каждая из конфликтующих на этом этапе  $l_{i_1}$  станций независимо (от всех случайных событий в системе) выбирает одно из чисел  $0, 1, \dots, (a-1)$  с вероятностями  $q_0, \dots, q_{a-1}$  и далее все происходит так, как в этапе 1.

Если после каждого из этапов  $2, \dots, (b_1+1)$  все  $a$  новых вершин будут концевыми, фаза разрешения конфликта оканчивается и  $[\tau|k] = a + ab_1$ . Если среди новых вершин после второго шага имеется какое-то число  $b_2 > 0$  неконцевых вершин, то они упорядочиваются по номерам и начинается третий шаг, который длится  $ab_2$  окон. Третий шаг выполняется аналогично второму и т. д. АРК заканчивается, когда после очередного шага все новые вершины окажутся концевыми. Этот момент могут определить все станции системы на основании знания момента начала фазы разрешения конфликта, наблюдения выхода канала с этого момента, своей истории с этого момента и знания АД.

**Б. Передача по пугам.** Этот АРК является небольшой модификацией АРК с передачей по этапам и для его представления также используется древовидный граф (см. рис. 2).

**Цуг** — это последовательность удаляющихся от начала дерева ребер; второе и последующие ребра в цуге (для цугов с длиной, т. е. числом ребер, большей чем 1) являются первыми ребрами для своих начальных вершин. Цуг начинается в неконцевой вершине и заканчивается в концевой вершине (это поясняется ниже).

После завершения  $i$ -го цуга (что это означает, станет ясным из дальнейшего) все входящие в него и в предыдущие цуги вершины делятся на две категории: открытые и закрытые. Открытыми называются такие вершины, которые имеют хотя бы одно ребро, не включенное ни в один из цугов с номерами  $1, \dots, i$ . Остальные неконцевые вершины называются закрытыми. В множестве открытых после  $i$ -го цуга вершин младшей называется вершина, которая дальше других отстоит (в числе ведущих к ней ребер) от нулевой вершины дерева. В открытом узле младшим называется исходящее из него и не включенное в цуги  $1, \dots, i$  ребро с самым малым номером (напомним, что ребра, исходящие из вершины, имеют номера  $1, \dots, a$ ).

Как и в АРК с передачей по этапам всегда, когда в конечную вершину какого-либо ребра приходят  $l > 1$  станций (это происходит в результате конфликта кратности  $l$  в окне, соответствующем этому ребру), они осуществляют случайный выбор; в результате выбора с вероятностями

$q_0, \dots, q_{a-1}$  станциям выпадают числа  $0, \dots, (a-1)$  или, что эквивалентно, выпадают ребра  $1, \dots, a$ , исходящие из этой вершины.

АРК начинается с первого цуга. Первый цуг начинается в нулевой вершине дерева и проходит через первое ребро, исходящее из этой вершины. В первом окне фазы разрешения конфликта передают станции, которым выпало первое ребро цуга. Если вершина, оканчивающая это ребро, неконцевая, то во втором окне передают станции, которым выпало второе ребро цуга, и так далее пока в цуге не появится концевая вершина. Эта концевая вершина заканчивает первый цуг.

Следующим окном начинается передача второго цуга. Второй цуг начинается вторым ребром последней неконцевой вершины первого цуга (т. е. младшим ребром младшей вершины). Второй цуг заканчивается с появлением в нем концевой вершины. И так далее, после завершения  $i$ -го цуга, если множество открытых вершин не пусто, то следующим окном начинается передача следующего цуга, который начинается младшим ребром младшей вершины. АРК заканчивается, когда множество открытых вершин становится пустым. Наступление этого события каждая станция, как и ранее, определяет по наблюдению выхода канала и своей истории.

**Обобщения АРК со случайными паспортами.** В АРК со случайными паспортами из каждой вершины, кроме концевых, исходит одно и то же число ребер  $a$ . Непосредственное обобщение этого АРК образуется, если допустить, что число исходящих ребер является известной станциям функцией от номера шага или номера этапа. Распределение вероятностей  $q_i$  также может зависеть от номера шага или этапа. Кроме того, можно ввести зависимость параметров АРК от длины предыдущей фазы разрешения конфликта или его кратности.

**Двоичный симметричный АРК.** Этот алгоритм является частным случаем АРК со случайными паспортами и состоит в том, что  $a=2$  и  $q_0=q_1=1/2$ .

**Улучшенный АРК.** При выполнении любого этапа АРК со случайными паспортами и передачей по этапам может оказаться, что первые  $(a-1)$  окон этапа являются пустыми. Это значит, что всем конфликтующим станциям начальной вершины этапа выпало  $(a-1)$  при случайном выборе. В этом случае нет необходимости в использовании следующего окна  $a$  этого этапа для наблюдения конфликта, и можно считать, что это следующее окно является первым окном следующего этапа. Таким образом, в улучшенном АРК, если первые  $(a-1)$  окон этапа являются пустыми, то этап оканчивается переходом всех конфликтующих станций этапа в конечную вершину ребра  $a$  этого этапа; окно  $a$  на этом этапе не используется и становится первым окном следующего этапа.

В случае передачи по цугам улучшение аналогично и состоит в следующем. Если в младшей открытой вершине младшее ребро является последним (т. е. имеет номер  $a$ ), а ребрам  $1, \dots, (a-1)$ , исходящим из этой вершины, соответствовали пустые окна, то следующий цуг начинается не рассматриваемым младшим ребром, а первым ребром, исходящим из его конечной вершины. Как и выше, станции, перешедшие в конечную вершину младшего ребра, вначале осуществляют случайный выбор, а младшая вершина становится закрытой.

**АРК с фиксированными паспортами.** Станции нумеруются числами от 1 до  $M$ . Номер станции, записанный в  $a$ -ичной системе, называется *паспортом* станции. Паспорт имеет длину не большую чем  $\log_a M + 1$ . Если какие-то  $k$  станций вошли в конфликт, то его разрешение происходит на древовидном графе этапами и шагами или цугами, аналогичными приведенным в АРК со случайными паспортами. Так при передаче по этапам

этап 1, как и выше, состоит из  $a$  окон. В окне  $i$  ( $i=1, \dots, a$ ) передают те из конфликтующих станций, которые имеют цифру  $i$  в паспорте на позиции первого (самого младшего) разряда. Если в окне  $i$  был конфликт, то участвующие в нем станции переходят в вершину, которой оканчивается ребро  $i$ . Если окно  $i$  было пустым или в нем произошла успешная передача, то вершина, оканчивающая ребро  $i$ , является концевой. Если после этапа 1 не все новые вершины являются концевыми, то начинается следующий этап, который является первым этапом второго шага. При проведении этого второго шага соответствующие конфликтующие станции смотрят на вторую цифру паспорта. Если после второго шага появятся новые неконцевые вершины, то проводится третий шаг, привлекающий третью цифру паспорта. Конфликт любой кратности при этом разрешается не более чем за  $\log_a M + 1$  шагов.

**Приоритетный АРК.** Этот алгоритм является разновидностью АРК с фиксированными паспортами. Станциям дают паспорта, которые являются кодовыми словами префиксного кода. Станциям, имеющим более высокий приоритет, дают более короткие паспорта. Если станция имеет паспорт длины  $n$ , то она гарантировано выходит из конфликта не позднее  $n$ -го шага АРК.

Улучшенный АРК с фиксированными паспортами и улучшенный приоритетный АРК определяются аналогично улучшенному АРК со случайными паспортами.

Предлагаемые здесь АД в ряде случаев оказываются лучше известных АД АЛОХА. Ниже для модели с бесконечным числом станций исследуется скорость передачи и задержка АД с улучшенным двоичным симметричным АРК (УДСА). Проводится сравнение этого АД с алгоритмом АЛОХА. В частности, показывается, что УДСА позволяет вести передачу со скоростью, большей  $1/e$ , и конечной средней задержкой. Для сравнения укажем что АД синхронная АЛОХА имеет максимальную скорость передачи  $1/e$  и неограниченную среднюю задержку [4, 5], а АД АЛОХА с управлением имеет конечную среднюю задержку лишь при скоростях, меньших  $1/e$  [5], но эта задержка оказывается большей или практически равной задержке в алгоритме УДСА, который не требует управления.

Рассмотрение УДСА в §§ 2–5, а также теоремы 6.2–6.5 из § 6 справедливы как для передачи по этапам, так и для передачи по дугам. Теоремы 6.1 и 6.6 относятся к передаче по дугам.

## § 2. Вероятностная модель поступления новых пакетов

В следующих параграфах мы будем рассматривать систему, показанную на рис. 1, с бесконечным числом станций ( $M=\infty$ ). Представим вероятностную модель поступления новых пакетов в системе.

Источник каждой станции в течение единичного интервала времени  $(t-1, t)$  может произвести один пакет или не произвести ни одного пакета. Если источник производит пакет на интервале  $(t-1, t)$ , то для определенности мы будем считать, что этот пакет становится готовым для передачи в момент  $t$ ; поэтому в наших рассуждениях часто удобно считать, что готовые для передачи пакеты производятся источником мгновенно в моменты  $t$ . Источник в момент  $t$  может произвести новый пакет лишь в случаях, когда либо источник ранее не произвел ни одного пакета, либо станция в окне  $(t-1, t)$  или ранее успешно передала предыдущий произведенный источником пакет, либо предыдущий пакет источника попал в конфликт, разрешение которого еще не завершилось к моменту  $t$ . Таким образом, на станции в любой момент времени  $t$  может находиться не более двух готовых для передачи пакетов, и если на станции имеются

два пакета, один из них обязательно участвует в разрешении конфликта, а другой ожидает момента окончания фазы разрешения конфликта.

Обозначим через  $\beta(t)$  суммарное число новых пакетов, произведенных источниками всех станций в момент  $t$  ( $t=0, 1, 2, \dots$ ). Функция  $\beta(t)$  представляет собой случайную последовательность. Будем считать, что  $\beta(t)$  обладает свойством независимости, состоящим в том, что случайные величины  $\beta(0), \beta(1), \dots$  являются независимыми в совокупности и что при заданном  $t$  величина  $\beta(t)$  не зависит от всех случайных событий в системе, происходивших до момента  $t$ . Кроме того, будем считать, что при заданном  $t$  вероятность события  $\beta(t)=m$  определяется равенством (пуассоновский закон)

$$\Pr \{ \beta(t)=m \} = \lambda^m e^{-\lambda} / m!, \quad m=0, 1, \dots,$$

где  $\lambda$  — параметр пуассоновского распределения, определяющий суммарную интенсивность всех источников. Из сделанных предположений следует, что  $V(m, s)$  — вероятность того, что число новых пакетов, произведенных источниками всех станций на интервале любой заданной длины  $s$  ( $s=1, 2, \dots$ ), равна

$$(2.1) \quad V(m, s) = (s\lambda)^m e^{-\lambda s} / m!$$

Приведенная вероятностная модель не является полной; в ней указаны лишь те характеристики, которые используются в дальнейшем. Эта модель используется, начиная с § 4. В § 5 вводится условие, что в системе (на какой-то станции) в момент  $t_0$  появился новый пакет. Это означает, что в приведенное определение вероятностной модели вносится следующее изменение: считается, что при  $t=t_0$  число появившихся новых пакетов  $\beta(t_0)$  распределено по закону  $V(k, 1) / [1 - V(0, 1)]$ ,  $k=1, 2, \dots$  и не зависит от  $\beta(t)$  с  $t \neq t_0$ , а также от всех других случайных событий в системе, происходящих до момента  $t_0$ . В § 5 все вероятности, которые определяются при указанном условии (в момент  $t_0$  появился новый пакет), обозначаются через  $\Pr_{t_0}$ , а математические ожидания через  $M_{t_0}$ .

Вероятностная модель может быть интерпретирована как предельный при  $M \rightarrow \infty$  случай модели с конечным числом станций  $M$ , если при переходе к пределу интенсивность источника каждой станции стремится к нулю, а суммарная интенсивность источников всех станций стремится к  $\lambda$ . Полученные ниже результаты допускают обобщение на случай произвольного (не обязательно пуассоновского) распределения.

### § 3. Время разрешения конфликта заданной кратности

В этом параграфе изучаются вероятностные характеристики времени разрешения конфликта кратности  $k$  в АД УДСА. Здесь считается, что кратность конфликта в узле 0 первого этапа задана и равна  $k$ . В следующих параграфах, однако, кратность конфликта в узле 0 будет рассматриваться как случайная величина  $\xi$ .

Для времени разрешения конфликта кратности  $k$  выше было принято обозначение  $[\tau|k]$ , которое более подробно записывается в виде  $[\tau|\xi=k]$  и означает случайную величину  $\tau$  (время разрешения конфликта кратности  $\xi$ ) при условии, что  $\xi=k$ .

Основные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.1.** 1°. Производящая функция  $G(k, z)$  ( $k \geq 0$ ,  $|z| \leq 1$ ) времени разрешения конфликта  $[\tau|k]$  удовлетворяет рекуррентному урав-



нению

$$(3.1) \quad G(k, z) = P_0 z G(k, z) + \sum_{l=1}^k P_l z^2 G(k-l, z) G(l, z), \quad k \geq 2$$

с начальным условием  $G(0, z) = G(1, z) = 1$ , где в (3.1) и ниже  $P_l = 2^{-k} C_k^l$ , а  $C_k^l$  — биномиальный коэффициент.

2°. Математическое ожидание  $T_k^{(1)} = M[\tau | k]$  при  $k \geq 2$  удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$(3.2) \quad T_k^{(1)} = P_0 (1 + T_k^{(1)}) + \sum_{l=1}^k P_l (2 + T_{k-l}^{(1)} + T_l^{(1)})$$

с начальным условием  $T_0^{(1)} = T_1^{(1)} = 0$ . Решение уравнения (3.2) для первых значений  $T_k^{(1)}$  дает

$$(3.3) \quad T_2^{(1)} = \frac{7}{2}; \quad T_3^{(1)} = 6; \quad T_4^{(1)} = \frac{121}{14}; \quad T_5^{(1)} \approx 11,31;$$

$$T_6^{(1)} \approx 13,98; \quad T_7^{(1)} \approx 16,65; \quad T_8^{(1)} \approx 19,31;$$

$$T_9^{(1)} \approx 21,98; \quad T_{10}^{(1)} \approx 24,64.$$

Для всех  $k \geq 3$

$$(3.4) \quad ck - 2 \leq T_k^{(1)} \leq Ck - 2,$$

где в (3.4) и ниже

$$(3.5) \quad C = \frac{8}{3}, \quad c = \frac{8}{3} - \frac{1}{168}.$$

3°. Второй момент  $T_k^{(2)} = M[\tau^2 | k]$  при  $k \geq 2$  удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$(3.6) \quad T_k^{(2)} = P_0 (1 + 2T_k^{(1)} + T_k^{(2)}) + \sum_{l=1}^k P_l (4 + 4T_{k-l}^{(1)} + 4T_l^{(1)} + 2T_{k-l}^{(1)} T_l^{(1)} + T_{k-l}^{(2)} + T_l^{(2)})$$

с начальным условием  $T_0^{(2)} = T_1^{(2)} = 0$ . Решение уравнения (3.6) для первых значений  $T_k^{(2)}$  дает

$$(3.7) \quad T_2^{(2)} = 17; \quad T_3^{(2)} = 41 \frac{5}{6}; \quad T_4^{(2)} \approx 82,8; \quad T_5^{(2)} \approx 139,5;$$

$$T_6^{(2)} \approx 201,5; \quad T_7^{(2)} \approx 289 \frac{8}{9}.$$

Для всех  $k \geq 3$

$$(3.8) \quad (T_k^{(1)})^2 \leq T_k^{(2)} \leq C^2 k(k-1).$$

Доказательство. 1°. Рассмотрим первый этап УДСА (см. рис. 3). Пусть в начальном узле 0 имеется конфликт кратности  $k \geq 2$ , в узле 1 после

первого этапа возникает конфликт кратности  $\nu$ , а в узле 2 — кратности  $k-\nu$ , где  $\nu$  — случайная величина, принимающая в соответствии с УДСА значения  $l=0, 1, \dots, k$  с вероятностями  $P_l=2^{-k}C_k^l$ .

Конфликт кратности  $k$  разрешается за случайное число окон, которое здесь обозначается через  $[\tau^{(0)}|\xi=k]$ , где верхний индекс указывает, что эта случайная величина относится к узлу 0. Введем также в рассмотрение случайные величины  $[\tau^{(1)}|\xi=k]$  и  $[\tau^{(2)}|\xi=k]$ , которые обозначают случайные числа окон, затрачиваемых, согласно УДСА, при движении станций по поддеревьям с начальными узлами 1 и 2 соответственно. Обозначим при заданном  $\nu$  через  $G^{(0)}(r, z)$ ,  $G^{(1)}(r, z)$  и  $G^{(2)}(r, z)$  (условные) порождающие функции случайных величин  $[\tau^{(0)}|\xi=r]$ ,  $[\tau^{(1)}|\xi=k, \nu=r]$  и  $[\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=k-r]$  соответственно.

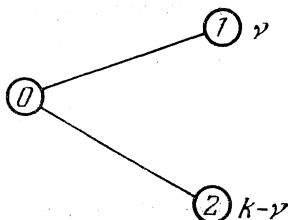


Рис. 3. Первый шаг и этап УДСА

В соответствии с УДСА при заданном  $\nu$  случайные величины  $[\tau^{(0)}|\xi=r]$ ,  $[\tau^{(1)}|\xi=k, \nu=r]$  и  $[\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=k-r]$  являются одинаково распределенными; их порождающая функция в дальнейшем обозначается просто как  $G(k, z)$  [ $G(k, z)=G^{(i)}(k, z)$ ,  $i=0, 1, 2$ ].

В соответствии с УДСА имеем

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad & [\tau^{(0)}|\xi=k, \nu=0]=[1+\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=0], \\
 & [\tau^{(0)}|\xi=k, \nu=1]=[2+\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=1], \\
 & [\tau^{(0)}|\xi=k, \nu=k-1]=[2+\tau^{(1)}|\xi=k, \nu=k-1], \\
 & [\tau^{(0)}|\xi=k, \nu=k]=[2+\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=k], \\
 & [\tau^{(0)}|\xi=k, \nu=l]=[2+\tau^{(1)}+\tau^{(2)}|\xi=k, \nu=l]; \quad l \neq 0, 1, k-1, k.
 \end{aligned}$$

Учитывая (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & \mathbf{M}[z^{\tau^{(0)}}|\xi=k]=P_0\mathbf{M}[z^{1+\tau^{(2)}}|\xi=k, \nu=0]+ \\
 & +P_1\mathbf{M}[z^{2+\tau^{(2)}}|\xi=k, \nu=1]+\sum_{l=2}^{k-2}P_l\mathbf{M}[z^{2+\tau^{(1)}+\tau^{(2)}}|\xi=k, \nu=l]+ \\
 & +P_{k-1}\mathbf{M}[z^{2+\tau^{(1)}}|\xi=k, \nu=k-1]+P_k\mathbf{M}[z^{2+\tau^{(2)}}|\xi=k, \nu=k].
 \end{aligned}$$

При заданном  $\nu=l$  ( $l=0, \dots, k$ ) случайные величины  $\tau^{(1)}$  и  $\tau^{(2)}$  независимы, поэтому, учитывая, что

$$\begin{aligned}
 G^{(0)}(k, z) &= G(k, z) = \mathbf{M}[z^{\tau^{(0)}}|\xi=k], \\
 G^{(1)}(l, z) &= G(l, z) = \mathbf{M}[z^{\tau^{(1)}}|\xi=k, \nu=l], \\
 G^{(2)}(k-l, z) &= G(k-l, z) = \mathbf{M}[z^{\tau^{(2)}}|\xi=k, \nu=l],
 \end{aligned}$$

из (3.10) получаем рекуррентное уравнение (3.1) для производящей функции  $G(k, z)$ .

2°. При  $k \geq 2$  имеет место равенство  $T_k^{(1)} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} G(k, z) \right]_{z=1}$ . Принимая его во внимание и дифференцируя уравнение (3.1), получаем, что  $T_k^{(1)}$  удовлетворяет (3.2).

Переноса  $T_k^{(1)}$  в левую часть уравнения (3.2) и принимая во внимание равенство  $P_l = P_{k-l}$ , представим (3.2) в виде:

$$(3.11) \quad T_k^{(1)} = 2 + \frac{3}{2}(2^{k-1}-1)^{-1} + (2^{k-1}-1)^{-1} \sum_{l=2}^{k-1} C_k^l T_l^{(1)}.$$

Рекуррентное вычисление  $T_k^{(1)}$ , начиная с  $k=2$ , дает результат (3.3).

Докажем теперь (3.4). Непосредственная проверка показывает, что границы (3.4) справедливы для  $3 \leq k \leq 10$ . Предположим, что верхняя граница в (3.4) справедлива до  $k-1$  и докажем, что она справедлива для  $k$ . В самом деле, используя (3.11), тождества

$$(3.12) \quad \sum_{l=0}^k l C_k^l = k 2^{k-1}, \quad \sum_{l=0}^k C_k^l = 2^k$$

и предположение индукции, имеем

$$(3.13) \quad T_k^{(1)} \leq 2 + (2^{k-1}-1)^{-1} \left[ \frac{3}{2} + C_k^2 T_2^{(1)} + C_k^4 \left( T_4^{(1)} - \frac{26}{3} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=3}^{k-1} C_k^l \left( \frac{8}{3} l - 2 \right) \right] = \\ = \frac{8}{3} k - 2 + \left\{ (2^{k-1}-1)^{-1} \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{3} k + \frac{1}{6} C_k^2 - \frac{1}{42} C_k^4 \right) \right\}.$$

Легко убедиться, что при всех  $k \geq 10$  выражение, стоящее в фигурных скобках в (3.13), отрицательно. Поэтому верхняя граница в (3.4) доказана.

Нижняя граница в (3.4) также доказывается по индукции. Предположим, что нижняя граница справедлива до  $k-1$  и докажем, что она справедлива для  $k$ . Из (3.11), (3.12) и предположения индукции следует, что

$$(3.14) \quad T_k^{(1)} \geq 2 + (2^{k-1}-1)^{-1} \left\{ \frac{3}{2} + C_k^2 T_2^{(1)} + C_k^3 T_3^{(1)} + \right. \\ \left. + C_k^5 (T_5^{(1)} - R) + \sum_{l=4}^{k-1} C_k^l \left[ \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{168} \right) l - 2 \right] \right\},$$

где  $R = \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{168} \right) 5 - 2$ . Легко убедиться, что при всех  $k \geq 10$  разность

правой части (3.14) и границы  $\left( \frac{8}{3} - \frac{1}{168} \right) k - 2$  неотрицательна. Это до-

казывает нижнюю границу из (3.4).

3°. При  $k \geq 2$  имеет место равенство

$$T_k^{(2)} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k, z) + \frac{\partial}{\partial z} G(k, z) \right]_{z=1}.$$

Используя это равенство и дифференцируя (3.1), получаем, что  $T_k^{(2)}$  удовлетворяет уравнению (3.6).

Переноса  $T_k^{(2)}$  в левую часть (3.6) и учитывая, что  $P_l = P_{k-l}$ , представим (3.6) в виде

$$(3.15) \quad T_k^{(2)} = 4 + (2^{k-1} - 1)^{-1} \left[ 2 \frac{1}{2} + 3T_k^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{k-1} C_k^{(l)} (T_l^{(2)} + T_l^{(1)} T_{k-l}^{(1)} + 4T_l^{(1)}) \right].$$

Рекуррентное решение уравнения (3.15), начиная с  $k=2$ , дает результаты (3.7).

Докажем теперь верхнюю границу из (3.8). Сначала, выполняя численное сравнение (3.7) с границей  $C^2 k(k-1)$ , можно убедиться, что верхняя граница из (3.8) справедлива для  $3 \leq k \leq 7$ . Для  $k \geq 8$  доказательство проведем по индукции. С этой целью заметим сначала, что из (3.15) и верхней границы из (3.4) следует, что

$$(3.16) \quad T_k^{(2)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{9} k(k-1) - 4 + (2^{k-1} - 1)^{-1} \left[ \frac{4}{9} k(k-1)(k-2) + \right. \\ \left. + 4 \cdot \frac{8}{3} k - \frac{17}{8} + \sum_{l=2}^{k-1} C_k^{(l)} T_l^{(2)} \right].$$

Теперь предположим, что верхняя граница из (3.8) справедлива до  $k-1$  и докажем, что она справедлива для  $k$ . Используя (3.16) и предположение индукции, имеем для  $k \geq 8$

$$T_k^{(2)} \leq \frac{64}{9} k(k-1) + \left\{ (2^{k-1} - 1)^{-1} \left[ \frac{4}{9} k(k-1)(k-2) + \right. \right. \\ \left. + \frac{89}{18} k(k-1) + \frac{160}{9} k + \sum_{l=3}^6 C_k^{(l)} \left( T_l^{(2)} - \frac{64}{9} l(l-1) \right) \right] - \\ \left. - \frac{21}{2} \right\} \leq \frac{64}{9} k(k-1),$$

где последнее неравенство выполняется в силу того, что, как можно проверить, выражение, стоящее в фигурных скобках, неположительно для всех  $k \geq 8$ .

Нижняя граница из (3.8) получается с помощью известного неравенства для моментов. ◀

#### § 4. Случайные процессы, описывающие систему, и их свойства

В этом параграфе рассматриваются случайные процессы, описывающие вероятностное поведение системы с УДСА. Приводимые здесь их свойства позволяют определить максимальную скорость передачи и задержку в системе.

Определим вначале случайную последовательность  $\eta_t$  ( $t=0, 1, \dots$ ), которая при любом  $t$  является кратностью конфликта, разрешаемого в момент  $t$ . При заданном  $t$  случайная величина  $\eta_t$  принимает значения из множества  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ;  $\eta_t=0$  означает пустое окно, а  $\eta_t=1$  — успешную передачу в момент  $t$ , т. е. на интервале  $(t, t+1)$ . Как вскоре выяснится, последовательность  $\eta_t$  является полумарковской.

Считая, что первый конфликт (он может быть любой кратности  $k=0, 1, \dots$ ) возникает в момент  $t=0$ , занумеруем конфликты по порядку по-

мерами  $1, 2, \dots$ . Пусть  $u$  обозначает порядковый номер конфликта,  $\xi_u$  — момент возникновения  $u$ -го конфликта,  $\xi_u$  — кратность  $u$ -го конфликта,  $\tau_u$  — время разрешения  $u$ -го конфликта, а  $\theta_u = 1 + \tau_u$  — длину  $u$ -го конфликта. Эти обозначения иллюстрируются на рис. 4 и в таблице.

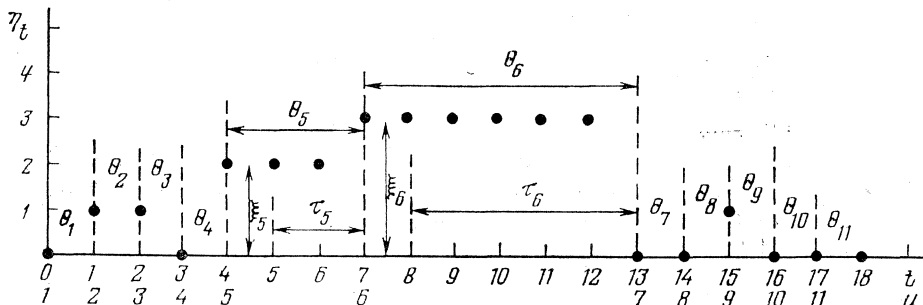


Рис. 4. Выборочная функция  $\eta_t$ . На оси абсцисс нанесен масштаб  $t$  и масштаб  $u$ . Значения  $\eta_t$  изображены темными кружками. На рисунке указаны некоторые параметры последовательности  $\eta_t$ ; их численные значения приведены в таблице

Номер конфликта $u$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Кратность $u$ -го конфликта $\xi_u$	0	1	1	0	2	3	0	0	1	0	0
Момент возникновения $u$ -го конфликта $\xi_u$	0	1	2	3	4	7	13	14	15	16	17
Время разрешения $u$ -го конфликта $\tau_u$	0	0	0	0	2	5	0	0	0	0	0
Длина $u$ -го конфликта $\theta_u$	1	1	1	1	3	6	1	1	1	1	1

Используя принятые обозначения, имеем

$$(4.1) \quad \tau_u = 0, \text{ если } \xi_u = 0 \text{ или } \xi_u = 1,$$

$$(4.2) \quad \xi_u = \sum_{i=1}^{u-1} \theta_i = \sum_{i=1}^{u-1} (1 + \tau_i) = u - 1 + \sum_{i=1}^{u-1} \tau_i,$$

$$(4.3) \quad \xi_u = \eta_{\xi_u}.$$

В силу свойства независимости процесса поступления новых пакетов  $\beta(t)$  при рассматриваемом УДСА последовательности  $\xi_u, \tau_u$  и  $\theta_u$  являются однородными цепями Маркова. При заданном  $u$  случайные величины  $\xi_u$  и  $\tau_u$  принимают значения из множества  $\{0, 1, \dots\}$ . Равенство (4.3) показывает, что  $\xi_u$  — вложенная цепь Маркова для  $\eta_t$ .

Последовательности  $\xi_u, \tau_u$  и  $\theta_u$  обладают следующими простыми свойствами. При любых  $u \geq 1, s \geq 1$  условная вероятность события  $\{\tau_u = s \mid \xi_u = k\}$  при условии, что заданы  $\tau_i$  и  $\xi_i$  с  $i < u$ , не зависит от  $u$  и заданных  $\tau_i$  и  $\xi_i$  (и обозначается  $p_\tau(s \mid k)$ ), т. е.

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Pr\{\tau_u = s \mid \xi_u = k; \tau_i: i < u; \xi_i: i < u\} = \\ = \Pr\{\tau_u = s \mid \xi_u = k\} = p_\tau(s \mid k). \end{aligned}$$

Распределение  $p_\tau(s|k)$  имеет производящую функцию  $G(k, z)$ , которая рассматривается в теореме 3.1 (п. 1°) и удовлетворяет уравнению (3.1). При замене  $\tau$  на  $\theta$  равенство (4.4) остается справедливым и определяет  $p_\theta(s|k)$ . Равенство (4.4) показывает, что последовательность  $\eta_i$  — полумарковская.

Далее, имеет место равенство

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Pr\{\xi_u=k | \tau_{u-1}=s; \tau_i:i < u-1; \xi_i:i < u\} = \\ = \Pr\{\xi_u=k | \tau_{u-1}=s\} = V(k, s+1), \end{aligned}$$

где  $V(m, s)$  определяется (2.1).

Представим теперь некоторые эргодические теоремы для рассматриваемых цепей Маркова. С этой целью обозначим через  $p_{km}$  переходные вероятности цепи  $\xi_u$ , т. е.  $p_{km} = \Pr\{\xi_u=m | \xi_{u-1}=k\}$ . Используя (4.5) и обозначение  $p_\theta(s|k)$ , имеем

$$(4.6) \quad \begin{aligned} p_{km} &= \sum_{s=1}^{\infty} \Pr\{\xi_u=m | \tau_{u-1}=s\} \Pr\{\tau_{u-1}=s | \xi_{u-1}=k\} = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} V(m, s) p_\theta(s|k). \end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то  $\xi_u$  — эргодическая цепь Маркова; ее стационарные вероятности  $\pi_k = \lim_{u \rightarrow \infty} \Pr\{\xi_u=k\}$  положительны и являются решением уравнений

$$(4.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{km} = \pi_m; \quad m=0, 1, \dots,$$

$$(4.8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1.$$

Теорема 4.1 является простым следствием теоремы 1.3 и следующей более общей теоремы.

**Теорема 4.2.** 1°. Если

$$(4.9) \quad \lambda < \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} k/T_k^{(1)}},$$

то  $\xi_u$  — эргодическая цепь.

2°. Если

$$(4.10) \quad \lambda \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} k/T_k^{(1)}},$$

то  $\xi_u$  — возвратная цепь.

3°. Если

$$(4.11) \quad \lambda > \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} k/T_k^{(1)}},$$

то  $\xi_u$  — невозвратная цепь.

Доказательство теоремы 4.2. Вначале заметим, что  $\xi_u$  — однородная неприводимая аperiodическая цепь Маркова, для которой согласно (2.1), (3.4) и (4.6)

$$M[\xi_{u+1} | \xi_u = n] = \lambda(1 + T_n^{(1)}) \leq \lambda \left( \frac{8}{3} n - 1 \right).$$

Дальнейшее доказательство основано на следующей теореме теории цепей Маркова.

**Теорема [6].** Пусть  $\xi_u$  ( $u=0, 1, \dots$ ) — однородная неприводимая апериодическая цепь Маркова, принимающая значения из множества  $\{0, 1, \dots\}$ .

1°. Если существуют такие числа  $\delta > 0$  и  $N > 0$ , что для всех  $n > N$  справедливо

$$(4.12) \quad M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n] \leq -\delta,$$

а для  $n \leq N$  справедливо  $M[\xi_{u+1} | \xi_u = n] < \infty$ , то  $\xi_u$  — эргодическая цепь.

2°. Если существует такое число  $N > 0$ , что для всех  $n > N$

$$(4.13) \quad M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n] \leq 0,$$

то  $\xi_u$  — возвратная цепь.

3°. Если существуют такие числа  $\delta > 0$  и  $N > 0$ , что для всех  $n > N$

$$(4.14) \quad M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n] \geq \delta,$$

то  $\xi_u$  — невозвратная цепь.

Пользуясь утверждением 1° теоремы из [6], докажем лишь утверждение 1° теоремы 4.2. Остальные утверждения теоремы 4.2 доказываются аналогично.

Введя обозначение  $\Delta_\xi$ , имеем

$$(4.15) \quad \Delta_\xi = M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n] = \sum_{s=1}^{\infty} M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n, \theta_u = s] p_\theta(s | n).$$

Так как за время  $s$  в систему поступает в среднем  $\lambda s$  новых пакетов, то  $M[\xi_{u+1} - \xi_u | \xi_u = n, \theta_u = s] = \lambda(s+1) - n$ . Принимая во внимание обозначение

$$T_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} s p_\tau(s | n), \text{ из (4.15) получаем}$$

$$(4.16) \quad \Delta_\xi = \lambda(T_n^{(1)} + 1) - n.$$

Докажем теперь, что если выполняется (4.9), то выполняется условие (4.12). Введем обозначения

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n / (T_n^{(1)} + 1); \quad \varepsilon = L - \lambda.$$

При соблюдении (4.9) имеем  $\varepsilon > 0$ . Кроме того, для любого  $\delta_1 > 0$  существует  $N$  такое, что для всех  $n > N$  имеем  $n / (T_n^{(1)} + 1) > L - \delta_1$ . Теперь для всех  $n > N$ , согласно (4.16), получаем  $\Delta_\xi < n \{ [\lambda / (L - \delta_1)] - 1 \}$ . Положив  $\delta_1 = \varepsilon / 2$ , будем иметь  $\Delta_\xi < -n\varepsilon / (2L - \varepsilon)$ . Так как  $\varepsilon / (2L - \varepsilon) > 0$ , то условие (4.12) очевидно выполняется. ◀

Правдоподобным является утверждение, что  $\lim$  и  $\overline{\lim}$  в неравенствах (4.9) — (4.11) совпадают, однако доказательства этого утверждения сейчас нет.

В соответствии с теоремой 3.1 утверждения теоремы 4.2 остаются справедливыми, если условия (4.9) и (4.10) заменить на  $\lambda < 3/8$  и  $\lambda \leq 3/8$  соответственно, а условие (4.11) — на условие  $\lambda > 1 / \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{168} \right) \approx \frac{3}{8} + 0,005$ .

**Теорема 4.3** Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то  $\tau_u$  — эргодическая цепь Маркова и

$$(4.17) \quad \overline{T^{(1)}} = \lim_{u \rightarrow \infty} M \tau_u = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(1)} \pi_k < \infty,$$

$$(4.18) \quad \overline{T^{(2)}} = \lim_{u \rightarrow \infty} M \tau_u^2 = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(2)} \pi_k < \infty.$$

где левые равенства в (4.17) и (4.18) являются определениями  $\overline{T^{(1)}}$  и  $\overline{T^{(2)}}$  соответственно.

**Доказательство.** Эргодичность  $\tau_u$  при  $\lambda C < 1$  можно доказать различными способами. Избранный здесь способ не самый простой, но он дает возможность попутно получить некоторые полезные для дальнейшего соотношения.

Для доказательства эргодичности  $\tau_u$  в соответствии с (4.12) покажем, что существуют такие  $\delta > 0$  и  $N > 0$ , что для всех  $n > N$  справедливо условие  $M[\tau_{u+1} - \tau_u | \tau_u = n] \leq -\delta$ . В самом деле, введя обозначение  $\Delta_\tau$ , имеем (4.19)

$$\Delta_\tau = M[\tau_{u+1} - \tau_u | \tau_u = n] = \sum_{k=0}^{\infty} M[\tau_{u+1} - \tau_u | \tau_u = n, \xi_{u+1} = k] \Pr\{\xi_{u+1} = k | \tau_u = n\}.$$

Учитывая (4.5) и равенство

$$M[\tau_{u+1} - \tau_u | \tau_u = n, \xi_{u+1} = k] = T_k^{(1)} - n,$$

из (4.19) получаем

$$(4.20) \quad \Delta_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (T_k^{(1)} - n) V(k, n+1),$$

где  $V(m, s)$  определяется (2.1).

Пользуясь значениями и верхней границей для  $T_k^{(1)}$  из теоремы 3.1 (п. 2°), а также равенствами

$$\sum_{k=0}^{\infty} V(k, n+1) = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k V(k, n+1) = \lambda(n+1),$$

из (4.20), получаем

$$\Delta_\tau \leq -nV(0, n+1) - nV(1, n+1) + \left(\frac{7}{2} - n\right) V(2, n+1) +$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} (Ck - 2 - n) V(k, n+1) =$$

$$= n(C\lambda - 1) + \lambda C - 2 + \left\{ e^{-\lambda(n+1)} \left( 2 - \frac{2}{3} \lambda(n+1) + \frac{\lambda^2(n+1)^2}{12} \right) \right\},$$

где  $C = 8/3$ . При  $\lambda > 0$  выражение, заключенное в фигурные скобки, как функция действительного переменного  $n$  имеет производную

$$\frac{1}{3} \lambda \left( -\frac{1}{4} \lambda^2 n^2 + \frac{5}{2} \lambda n - 8 \right) e^{-\lambda n}.$$

Эта производная отрицательна при всех  $n$ . Поэтому рассматриваемое выражение в фигурных скобках ма-



жорируется сверху значением, которое оно принимает при  $n=0$ . В результате получаем

$$(4.21) \quad \Delta_{\tau} \leq n(C\lambda - 1) + \left\{ \frac{8}{3}\lambda - 2 + e^{-\lambda} \left( 2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{\lambda^2}{12} \right) \right\}.$$

Используя границу  $e^{-\lambda} \leq 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2$ , имеем

$$(4.22) \quad \frac{8}{3}\lambda - 2 + e^{-\lambda} \left( 2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{\lambda^2}{12} \right) \leq \frac{7}{4}\lambda^2 - \frac{5}{12}\lambda^3 + \frac{\lambda^4}{24} \leq \frac{7}{4}\lambda^2,$$

где при получении последнего неравенства учтено, что  $\lambda < \frac{3}{8}$ . Из (4.21) и (4.22) следует, что

$$(4.23) \quad \Delta_{\tau} \leq n(C\lambda - 1) + \frac{7}{4}\lambda^2.$$

При  $\lambda C < 1$ , положив  $N$  равным наименьшему целому числу, большему  $1 + \frac{7}{4}\lambda^2(1 - C\lambda)^{-1}$ , и выбрав затем  $\delta = N(C\lambda - 1) + \frac{7}{4}\lambda^2$  (при этом имеем  $\delta < 0$ ), приходим к доказательству эргодичности.

Теперь установим, что  $\lim_{u \rightarrow \infty} M\tau_u < \infty$ . Действительно, усреднив обе части (4.23) по  $\tau_u$ , приходим к неравенству

$$(4.24) \quad M\tau_{u+1} \leq C\lambda M\tau_u + \frac{7}{4}\lambda^2.$$

Рекуррентное применение этого неравенства показывает, что

$$M\tau_u \leq (C\lambda)^{u-1} M\tau_1 + \frac{7}{4}\lambda^2 \sum_{i=1}^{u-2} (C\lambda)^i.$$

Таким образом, при  $\lambda C < 1$

$$(4.25) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} M\tau_u \leq \frac{7}{4}\lambda^2 / (1 - C\lambda) < \infty.$$

Используем теперь равенство

$$M\tau_u = \sum_{k=0}^{\infty} M[\tau_u | \xi_u = k] \Pr\{\xi_u = k\}.$$

С помощью неравенства Чебышева и (4.27) можно показать, что правая сумма сходится равномерно по  $u$ . В пределе при  $u \rightarrow \infty$  получаем (4.17).

Наконец, докажем справедливость (4.18). Имеем

$$(4.26) \quad \begin{aligned} M[\tau_{u+1}^2 | \tau_u = n] &= \sum_{k=0}^{\infty} M[\tau_{u+1}^2 | \xi_{u+1} = k, \tau_u = n] \Pr\{\xi_{u+1} = k | \tau_u = n\} = \\ &= \sum_{k=0} T_k^{(2)} V(k, n+1). \end{aligned}$$

Из теоремы 3.1 (п. 3°) следует граница  $T_k^{(2)} \leq C^2 k^2$ , которая для  $k=2$  проверяется непосредственно, а для  $k \geq 3$  является следствием (3.8). С по-

мощью этой границы и равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 V(k, n+1) = \lambda^2 (n+1)^2 + \lambda (n+1)$$

из (4.26) получаем

$$M[\tau_{u+1}^2 | \tau_u = n] \leq C^2 \lambda^2 (n+1)^2 + C^2 \lambda (n+1).$$

Усреднение обеих частей этого неравенства по  $\tau_u$  дает

$$(4.27) \quad M\tau_{u+1}^2 \leq C^2 \lambda^2 M\tau_u^2 + C^2 \lambda (2\lambda + 1) M\tau_u + C^2 \lambda (\lambda + 1).$$

Учитывая, что при  $u \rightarrow \infty$ , согласно (4.17),  $M\tau_u$  стремится к конечному пределу, и анализируя (4.27), аналогично неравенству (4.24), убеждаемся в существовании конечного предела для  $M\tau_{u+1}^2$ . Аналогично равенство

$$M\tau_u^2 = \sum_{k=0}^{\infty} M[\tau_u^2 | \xi_u = k] \Pr\{\xi_u = k\}$$

в пределе при  $u \rightarrow \infty$  доказывает (4.18). ◀

Теорема 4.4. 1°. Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(4.28) \quad \overline{k^{(1)}} = \lim_{u \rightarrow \infty} M\xi_u = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k < \infty,$$

и

$$(4.29) \quad \overline{k^{(1)}} = \lambda(1 + \overline{T^{(1)}}).$$

2°. Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(4.30) \quad \overline{k^{(2)}} = \lim_{u \rightarrow \infty} M\xi_u^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \pi_k < \infty$$

и

$$(4.31) \quad \overline{k^{(2)}} = \lambda^2 \overline{T^{(2)}} + (2\lambda^2 + \lambda) \overline{T^{(1)}} + \lambda^2 + \lambda.$$

Левые равенства в (4.28) и (4.30) являются определениями  $\overline{k^{(1)}}$  и  $\overline{k^{(2)}}$  соответственно.

Доказательство. Воспользуемся равенством  $M\xi_{u+1} = M_{\tau} M[\xi_{u+1} | \tau_u]$ , где  $M[\ ]$  — условное математическое ожидание  $\xi_{u+1}$  при заданном  $\tau_u$ , а  $M_{\tau}$  — усреднение по  $\tau_u$ .

При заданном  $\tau_u$  средняя кратность  $(u+1)$ -го конфликта равна среднему числу новых пакетов, появившихся на интервале длины  $\tau_u + 1$ , т. е. в соответствии с (2.1) равна  $\lambda(\tau_u + 1)$ . Следовательно,  $M\xi_{u+1} = M_{\tau} [\lambda(\tau_u + 1)] = \lambda + \lambda M\tau_u$ . Согласно теореме 4.3,  $M\tau_u$  при  $u \rightarrow \infty$  стремится к конечному пределу, поэтому  $\lim_{u \rightarrow \infty} M\xi_u = \lambda(1 + \overline{T^{(1)}}) < \infty$ . Кроме того,  $\lim_{u \rightarrow \infty} M\xi_u^2 = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum k \Pr\{\xi_u = k\} = \sum k \pi_k$ . Таким образом, утверждение 1° доказано.

Аналогично доказывается утверждение 2°. ◀

Для представления последней теоремы этого параграфа определим случайные величины  $\gamma_i^-$  и  $\gamma_i^+$  равенствами

$$(4.32) \quad \gamma_i^- = t - \max_u \{\xi_u : \xi_u \leq t\},$$

$$(4.33) \quad \gamma_i^+ = \min_u \{\xi_u : \xi_u > t\} - t.$$

Величина  $\gamma_i^-$  представляет собой время, прошедшее с момента возникновения конфликта, который разрешается в момент  $t$ , до момента  $t$ . Величина  $\gamma_i^-$  принимает значения из множества  $\{0, 1, \dots\}$ . Величина  $\gamma_i^+$  является временем, которое пройдет с момента  $t$  до момента окончания разрешения конфликта, который разрешается в момент  $t$ . Величина  $\gamma_i^+$  принимает значения из множества  $\{1, 2, \dots\}$ .

Пара  $(\eta_i, \gamma_i^-)$  является двумерным марковским процессом дискретного аргумента. Рассматривая эргодические свойства этого процесса, можно показать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.5.** Если  $\lambda C < 1$  ( $C = s/s$ ), то

$$(4.34) \quad p_{\gamma_i^-}(r, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{\gamma_i^- = r, \gamma_i^+ = s\} = (1 + \overline{T^{(1)}})^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_0(r+s|k)$$

и  $p_{\gamma_i^-}(r, s)$  имеет конечные моменты первого порядка. Левое равенство в (4.34) является определением  $p_{\gamma_i^-}(r, s)$ .

**Доказательство.** Теорема является простым следствием хорошо известного результата теории случайных процессов с дискретным вмешательством случая [7]. В самом деле, если  $\lambda C < 1$ , то, согласно теоремам 1.4 и 4.4, цепь Маркова  $\xi_u$  — эргодическая и ее стационарное распределение имеет конечные первый и второй моменты. Это значит, что при  $\lambda C < 1$  выполняются условия теоремы 2 из [7] (стр. 363). Утверждение доказываемой теоремы является следствием указанной теоремы 2 из [7]. ◀

Если обозначить  $\gamma_i = \gamma_i^- + \gamma_i^+$  и  $p_{\gamma}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{\gamma_i = s\}$ , то из (4.34) получаем

$$(4.35) \quad p_{\gamma}(s) = (1 + \overline{T^{(1)}})^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} s p_0(s|k) \pi_k.$$

Величина  $\gamma_i$  представляет собой длину конфликта, который разрешается в момент  $t$ . Заметим, что стационарное распределение для  $\gamma_i$  в общем не совпадает со стационарным распределением для длины  $u$ -го конфликта  $\theta_u$ , т. е. с пределом  $\lim \Pr\{\theta_u = s\}$ .

## § 5. Определение и общее выражение для задержки

Задержкой передачи пакета называется время от момента  $t$  его появления на станции как готового для передачи нового пакета до момента его успешной передачи. В этом параграфе дается определение и общее выражение для средней задержки пакета при работе системы в стационарном режиме.

Пусть в системе (на какой-то станции) в момент  $t_0$  появился новый пакет. Этот пакет мы назовем *меченым* и найдем для него среднюю задержку. (Заметим, что в момент  $t_0$  вместе с меченым пакетом в системе, быть может, появилось еще некоторое число других новых пакетов.)

Обозначим через  $\delta_{t_0}$  случайную задержку передачи меченого пакета и определим среднюю стационарную задержку передачи пакета (или просто среднюю задержку) равенством

$$(5.1) \quad D = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} M_{t_0} \delta_{t_0},$$

если указанный предел существует. Ниже будет показано, что при  $\lambda C < 1$  средняя задержка  $D$  существует и является конечной.

Задержка  $\delta_{t_0}$  складывается из двух частей:  $\delta_0^{(1)}$  — времени с момента  $t_0$  появления меченого пакета до момента освобождения системы от пакетов,

которые появились и начали передаваться до момента  $t_0$ , и  $\delta_{t_0}^{(2)}$  — времени с указанного момента освобождения (т. е. с момента первой передачи меченого пакета) до момента успешной передачи меченого пакета, т. е.

$$(5.2) \quad \delta_{t_0} = \delta_{t_0}^{(1)} + \delta_{t_0}^{(2)}.$$

Случайная величина  $\delta_{t_0}$  может быть выражена через случайные величины  $\gamma_{t_0}^-$  и  $\gamma_{t_0}^+$ , определенные равенствами (4.32) и (4.33) соответственно. Для этого заметим, что  $\delta_{t_0}^{(1)} = 0$  только тогда, когда меченый пакет появляется в момент возникновения конфликта любой кратности  $k$  ( $k=0, 1, \dots$ ), т. е. когда происходит событие  $\{\gamma_{t_0}^- = 0\} \cap \{\gamma_{t_0}^+ \neq 0\} = \{\gamma_{t_0}^- = 0\}$ . В остальных случаях  $\delta_{t_0}^{(1)} = s$  ( $s \geq 1$ ) и это эквивалентно событию  $\{\gamma_{t_0}^+ = s\} \cap \{\gamma_{t_0}^- \neq 0\}$ . При этом учитывается, что распределение случайной величины  $\delta_{t_0}^{(1)}$  не меняется при переходе от вероятностной меры  $\text{Pr}$  к  $\text{Pr}_{t_0}$  (см. определение  $\text{Pr}_{t_0}$  в § 2), так как случайный момент  $\min_u \{\xi_u: \xi_u \geq t_0\}$ , который, согласно (4.33), определяет  $\gamma_{t_0}^+$ , зависит лишь от пакетов, появившихся в системе в момент  $t_0 - \gamma_{t_0}^-$  и ранее.

Таким образом, для  $s \geq 1$  имеем

$$\text{Pr}\{\delta_t^{(1)} = s\} = \sum_{r=1}^{\infty} \text{Pr}\{\gamma_t^- = r, \gamma_t^+ = s\}.$$

В пределе получаем

$$(5.3) \quad D^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} M\delta_t^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r,s=1}^{\infty} s \text{Pr}\{\gamma_t^- = r, \gamma_t^+ = s\} = \sum_{r,s=1}^{\infty} s p_{r^+}(r, s).$$

Правый ряд в (5.3) сходится в силу теоремы 4.5 при  $\lambda C < 1$ . Используя выражение (4.34) для  $p_{r^+}(r, s)$ , получаем

$$(5.4) \quad D^{(1)} = \frac{1}{1 + \overline{T^{(1)}}} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s p_0(r+s|k) \pi_k.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$\sum_{s=1}^{\infty} s p_0(s|k) = T_k^{(1)} + 1; \quad \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p_0(s|k) = T_k^{(2)} + 2T_k^{(1)} + 1,$$

имеем

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s p_0(r+s|k) \pi_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s(s-1)}{2} p_0(s|k) \pi_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (T_k^{(2)} + T_k^{(1)}) \pi_k = \frac{1}{2} (\overline{T^{(2)}} + \overline{T^{(1)}}). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (5.4) и (5.5) дают

$$(5.6) \quad D^{(1)} = \frac{\overline{T^{(2)}} + \overline{T^{(1)}}}{2(1 + \overline{T^{(1)}})}.$$

Рассмотрим теперь случайную величину  $\delta_{t_0}^{(2)}$  и найдем  $M_{t_0}\delta_{t_0}^{(2)}$ . Обозначим через  $\tilde{\xi}_i$  кратность меченого конфликта, т. е. конфликта, на интервале решения которого меченый пакет получает успешную передачу. Пусть

$$\tilde{\gamma}_i^- = t - \max_u \{\xi_u : \xi_u < t\},$$

$$\tilde{\gamma}_i^+ = \min_u \{\xi_u : \xi_u \geq t\} - t.$$

Величина  $\tilde{\xi}_i$  равна числу новых пакетов, появившихся в системе вместе с меченым пакетом на интервале длины  $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i^- + \tilde{\gamma}_i^+$ .

Имеем

$$(5.7) \quad M_{t_0}\delta_{t_0}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \Pr_{t_0}\{\tilde{\xi}_{t_0}=k\},$$

где использовано обозначение

$$(5.8) \quad d_k = M_{t_0}[\delta_{t_0}^{(2)} | \tilde{\xi}_{t_0}=k]$$

и  $d_k$  является условным средним временем выхода меченого пакета из меченого конфликта при условии, что меченый конфликт имеет кратность  $k$ . *Время выхода* равно времени от момента возникновения меченого конфликта до момента успешной передачи меченого пакета. Заметим, что  $d_k$  не зависит от  $t_0$ . Зависимость  $d_k$  от  $k$  будет изучена в следующем параграфе, однако сейчас очевидно, что  $d_k \leq T_k^{(1)}$ .

Займемся вначале вероятностью  $\Pr_{t_0}\{\tilde{\xi}_{t_0}=k\}$ . При фиксированном  $\tilde{\gamma}_{t_0}=s$  обозначим через  $B_i$  событие  $\{t_0 \text{ является } i\text{-м моментом времени с начала интервала фиксированной длины } s\}$ . Имеем

$$(5.9) \quad \Pr_{t_0}\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | \tilde{\gamma}_{t_0}=s\} = \sum_{i=1}^s \Pr\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | B_i, \tilde{\gamma}_{t_0}=s\} \Pr\{B_i | \tilde{\gamma}_{t_0}=s\}.$$

Далее имеем

(5.10)

$$\Pr\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | B_i, \tilde{\gamma}_{t_0}=s\} = [1 - V(0, 1)]^{-1} \sum_{m=1}^k V(m, 1) V(k-m, s-1), \quad k \geq 1,$$

где  $V(m, s)$  определена (2.1). Заметим, что условная вероятность в (5.10) не зависит от  $i$  и  $t_0$ . Поэтому, учитывая, что  $B_i$  образуют полную систему событий, получаем

$$(5.11) \quad \Pr\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | B_i, \tilde{\gamma}_{t_0}=s\} = \Pr_{t_0}\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | \tilde{\gamma}_{t_0}=s\}.$$

Так как

$$\sum_{m=0}^k V(m, 1) V(k-m, s-1) = V(k, s),$$

то теперь из (5.10) и (5.11) получаем

$$(5.12) \quad \Pr_{t_0}\{\tilde{\xi}_{t_0}=k | \tilde{\gamma}_{t_0}=s\} = [1 - V(0, 1)]^{-1} [V(k, s) - V(0, 1) V(k, s-1)] = \\ = \lambda^k e^{-\lambda s} [s^k - (s-1)^k] [(1 - e^{-\lambda}) k!]^{-1}.$$

Распределение вероятностей для пары  $(\tilde{\gamma}_{t_0}^-, \tilde{\gamma}_{t_0}^+)$  зависит от  $t_0$ , но не меняется при замене  $\Pr$  на  $\Pr_{t_0}$ , потому что, как указывалось,  $\min_u \{\xi_u : \xi_u \geq t_0\}$  зависит лишь от пакетов, появившихся в момент  $t_0 - \tilde{\gamma}_i^-$  и ранее. Кроме того, нужно иметь в виду, что  $\tilde{\gamma}_i$  является длиной интервала

$(\xi_{u-1}+1, \xi_u)$ , а  $\gamma_t = \gamma_t^- + \gamma_t^+$  — интервала  $(\xi_{u-1}, \xi_u-1)$ , содержащих момент  $t$ . Поэтому, если  $\lambda C < 1$ , распределение вероятностей для  $\tilde{\gamma}_{t_0}$  в пределе при  $t_0 \rightarrow \infty$  является стационарным распределением длины интервала  $\xi_u - \xi_{u-1}$ , содержащего момент  $t_0$ , т. е. совпадает со стационарным распределением для  $\gamma_t$ . Таким образом, согласно (4.35)

$$(5.13) \quad p_{\tilde{\gamma}}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr \{ \tilde{\gamma}_t = s \} = (1 + \overline{T^{(1)}})^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} s p_0(s|k) \pi_k.$$

Вводя обозначение  $p_{\tilde{\xi}}(k) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \Pr_{t_0} \{ \tilde{\xi}_{t_0} = k \}$ , имеем

$$(5.14) \quad p_{\tilde{\xi}}(k) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} \Pr_{t_0} \{ \tilde{\xi}_{t_0} = k | \tilde{\gamma}_{t_0} = s \} \Pr \{ \tilde{\gamma}_{t_0} = s \}.$$

С учетом (5.12) — (5.14) получаем

$$(5.15) \quad p_{\tilde{\xi}}(k) = \frac{\lambda^k}{(1 - e^{-\lambda})(1 + \overline{T^{(1)}})k!} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{s=1}^{\infty} [s^{k+1} - s(s-1)^k] e^{-\lambda s} p_0(s|i).$$

Так как  $s(s-1)^k = s^{k+1} - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} C_k^j s^{k-j+1}$ , то из (5.15) и (4.7) получаем

$$(5.16) \quad p_{\tilde{\xi}}(k) = \frac{1}{(1 - e^{-\lambda})(1 + \overline{T^{(1)}})} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (k-j+1) \frac{\lambda^{j-1}}{j!} \pi_{k-j+1}.$$

Таким образом, учитывая, что  $d_k$  не зависит от  $t_0$ , из (5.7) и последних равенств получаем

$$(5.17) \quad D^{(2)} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} M_{t_0} \delta_{t_0}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k p_{\tilde{\xi}}(k),$$

где  $p_{\tilde{\xi}}(k)$  дается равенством (5.16). При  $\lambda C < 1$  ряд в (5.17) сходится к конечной величине. Это легко понять, если при  $s \geq 1$  и  $k \geq 1$  использовать неравенство  $(s-1)^k \geq s^k - k s^{k-1}$  и (5.15). В результате получаем

$$(5.18) \quad p_{\tilde{\xi}}(k) \leq k \pi_k [(1 - e^{-\lambda})(1 + \overline{T^{(1)}})]^{-1}.$$

Учитывая, что  $d_k \leq T_k^{(1)}$  и  $T_k^{(1)} < Ck$  при  $\lambda C < 1$ , получаем сходимость (5.17) как следствие теоремы 4.4 (п. 2°).

Сформулируем теперь полученный результат для  $D = D^{(1)} + D^{(2)}$  в виде теоремы.

**Теорема 5.1.** Если  $\lambda C < 1$  (где  $C = 8/3$ ), то

$$(5.19) \quad D = \frac{\overline{T^{(2)}} + \overline{T^{(1)}}}{2(1 + \overline{T^{(1)}})} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k p_{\tilde{\xi}}(k),$$

где  $p_{\tilde{\xi}}(k)$  дается равенством (5.16).

В следующем параграфе для задержки  $D$  будет найдена верхняя граница, представляющая собой явную функцию одного переменного  $\lambda$ .

## § 6. Верхняя граница для задержки

Равенство (5.19) по существу выражает  $D$  через стационарное распределение  $\pi_k$  и время выхода  $d_k$ . Интересно представить  $D$  как функцию одного переменного  $\lambda$ . В этом параграфе найдем верхнюю границу для  $D$ ,

которая является явной функцией  $\lambda$ . С этой целью вначале найдем границы для  $d_k$ ,  $T^{(1)}$ ,  $k^{(2)}$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , а затем используем их при построении границы для  $D$ .

Начнем с изучения времени выхода  $d_k$ . Можно показать, что  $d_k$  является нелинейной функцией  $k$ , однако ниже для оценки  $D^{(2)}$  мы используем линейную границу для  $d_k$ . Можно показать также, что при УДСА как с перерывами по этапам, так и по путям справедлива граница  $d_k \leq T_k^{(1)} - \frac{k-1}{2}$ .

В приводимой ниже теореме представлена более низкая граница, доказанная для передачи по путям.

**Теорема 6.1.** В УДСА с передачей по путям для времени выхода  $d_k$  справедливо равенство

$$(6.1) \quad d_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k=0,1, \\ 5/2 & \text{при } k=2, \\ 43/12 & \text{при } k=3, \\ 1 + \frac{1}{2^{k-1}-1} \left\{ \left[ \frac{3}{2}k + (k-1)(d_{k-1}-1) + \frac{1}{2}T_{k-1}^{(1)} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^{k-2} C_k^l \left[ \frac{l(d_l-1)}{k} + \frac{1}{2} \left( \frac{2k-l}{k} + \frac{k-l}{k} T_l^{(1)} \right) \right] \right\} & \text{при } k \geq 4. \end{cases}$$

Для первых значений  $k$  равенство (6.1) дает

$$(6.2) \quad d_4 = 5\frac{9}{14}; \quad d_5 \approx 7,16; \quad d_6 \approx 8,74; \quad d_7 \approx 10,09; \quad d_8 \approx 11,53; \quad d_9 \approx 12,95; \quad d_{10} \approx 14,36.$$

Для всех  $k \geq 1$  справедлива граница

$$(6.3) \quad d_k \leq \frac{13}{9}k.$$

**Доказательство.** Равенство  $d_1=0$  очевидно. Далее, для доказательства (6.1) рассмотрим отдельно случаи  $k=2$ ,  $k=3$ ,  $k \geq 4$ . Ниже используется обозначение  $\tilde{d}_k = d_k - 1$ .

**Случай  $k=2$ .** Рассмотрим УДСА с передачей по путям (см. рис. 3). Начальному узлу соответствует конфликт кратности 2, поэтому для этого узла среднее время выхода равно  $d_2$ . После случайного выбора могут произойти события  $A_1=\{v=0\}$ ,  $A_2=\{v=1\}$ ,  $A_3=\{v=2\}$  с вероятностями  $\Pr\{A_l\}=P_{l-1}$  ( $l=1, 2, 3$ ), где  $P_l=2^{-k}C_k^l$ . Для  $\tilde{d}_2$  справедливо уравнение

$$(6.4) \quad \tilde{d}_2 = \{P_0(1+\tilde{d}_2)\} + \left\{P_1\frac{1}{2}\right\} + \{P_2(1+\tilde{d}_2)\},$$

где члены, обязанные событиям  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , представлены выражениями в первой, второй и третьей фигурных скобках соответственно. Разрешая уравнение (6.4) относительно  $\tilde{d}_2$ , получаем

$$\tilde{d}_2 = \left( P_0 + \frac{1}{2}P_1 + P_2 \right) (1 - P_0 - P_2)^{-1} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,  $d_2=5/2$ .

**Случай  $k=3$ .** Аналогично случаю  $k=2$  для  $\tilde{d}_3$  справедливо уравнение

$$\tilde{d}_3 = \{P_0(1+\tilde{d}_3)\} + \left\{P_1\frac{2}{3}(2+\tilde{d}_3)\right\} +$$

$$+ \left\{ P_2 \left( \frac{2}{3} (1 + \tilde{d}_2) \right) + \frac{1}{3} (1 + T_2^{(1)}) \right\} + \{ P_3 (1 + \tilde{d}_3) \}.$$

Согласно (3.3),  $T_2^{(1)} = 7/2$ , поэтому после преобразований получаем

$$\tilde{d}_3 = \left[ P_0 + P_3 + P_1 \left( \frac{2}{3} (2 + \tilde{d}_2) \right) \right] + P_2 \left[ \frac{2}{3} (1 + \tilde{d}_2) + \frac{3}{2} \right] (1 - P_0 - P_3)^{-1} = \frac{37}{12}.$$

Следовательно,  $\tilde{d}_3 = 49/12$ .

**Случай  $k \geq 4$ .** Снова рассмотрим УДСА с передачей по цугам (см. рис. 3). В начальном узле время выхода равно  $d_k$ . После случайного выбора могут произойти события  $A_1 = \{v=0\}$ ,  $A_2 = \{v=1\}$ , ...,  $A_k = \{v=k-1\}$ ,  $A_{k+1} = \{v=k\}$  с вероятностями  $\Pr\{A_l\} = P_{l-1}$  ( $l=1, \dots, k+1$ ). Справедливо уравнение

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \tilde{d}_k = & \{ P_0 (1 + \tilde{d}_k) \} + \left\{ P_1 \frac{k-1}{k} (2 + \tilde{d}_{k-1}) \right\} + \\ & + \sum_{l=2}^{k-2} \left\{ P_l \left[ \frac{l}{k} (1 + \tilde{d}_l) + \frac{k-l}{k} (2 + T_l^{(1)} + \tilde{d}_{k-l}) \right] \right\} + \\ & + \left\{ P_{k-1} \left[ \frac{k-1}{k} (1 + \tilde{d}_{k-1}) + \frac{1}{k} (1 + T_{k-1}^{(1)}) \right] \right\} + \{ P_k (1 + \tilde{d}_k) \}, \end{aligned}$$

где выражение, обязанное событию  $A_l$ , заключено в фигурные скобки с множителем  $P_{l-1}$  слева. Учитывая, что  $P_l = 2^{-k} C_k^l$  и

$$\sum_{l=2}^{k-2} C_k^l \frac{l \tilde{d}_l}{k} = \sum_{l=2}^{k-2} C_k^l \frac{(k-l) \tilde{d}_{k-l}}{k},$$

с помощью алгебраических преобразований уравнение (6.5) можно привести к виду, представленному последней строкой равенства (6.1). Это заканчивает рассмотрение случая  $k \geq 4$  и доказывает (6.1).

Теперь докажем границу (6.3). Непосредственная проверка показывает, что граница (6.3) справедлива при  $1 \leq k \leq 10$ . Предположим, что граница (6.3) справедлива до  $(k-1)$ , и докажем, что она справедлива для  $k$ . Подставим в (6.1) границу сверху для  $T_k^{(1)}$  из (3.4). Используя предположение индукции и тождества

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{k-2} l C_k^l &= k (2^{k-1} - k - 1), \\ \sum_{l=2}^{k-2} l^2 C_k^l &= (2^{k-2} - 1) k (k+1) - k (k-1), \end{aligned}$$

из (6.1) получаем

$$\tilde{d}_k \leq \frac{25}{18} \cdot k - \frac{4}{9} + (2^{k-1} - 1)^{-1} \left\{ \frac{3}{72} k^2 - \frac{55}{72} k + \frac{1}{36} - \sum_{l=2}^8 C_k^l \frac{l}{k} \left( \frac{13}{9} l - \tilde{d}_l - 1 \right) \right\}.$$

Для всех  $k \geq 10$  выражение, стоящее в фигурных скобках, отрицательно, что доказывает границу (6.3) для всех  $k \geq 10$ . ◀

Теперь в теоремах 6.2–6.5 представим границы для  $\overline{T^{(1)}}$ ,  $\overline{k^{(2)}}$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_4$ .



Теорема 6.2. Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(6.6) \quad \overline{T^{(1)}} \leq \frac{7}{4} \lambda^2 (1 - \lambda C)^{-1}.$$

Доказательство границы (6.6) содержится в доказательстве теоремы 4.3 (см. (4.25)). ◀

Теорема 6.3. Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(6.7) \quad \overline{k^{(2)}} \leq \overline{k^{(1)}} + \frac{2\lambda(\overline{k^{(1)}} - \lambda) + \frac{25}{9} \lambda^2 \pi_2 + \lambda^2}{1 - \lambda^2 C^2}.$$

Доказательство. При  $\lambda C < 1$ , согласно теореме 4.3, справедливо равенство (4.18). Используя (4.18), а также верхнюю границу из (3.8) и значения  $T_0^{(2)} = T_1^{(2)} = 0$ ,  $T_2^{(2)} = 17$ , получаем

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \overline{T^{(2)}} &= \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(2)} \pi_k \leq 17 \pi_2 + \sum_{k=3}^{\infty} C^2 k(k-1) \pi_k = \\ &= C^2 \overline{k^{(2)}} - C^2 \overline{k^{(1)}} + \frac{25}{9} \pi_2. \end{aligned}$$

Теперь из (6.8) и (4.31) следует неравенство

$$\overline{k^{(2)}} \leq \lambda^2 C^2 \overline{k^{(2)}} - \lambda^2 C^2 \overline{k^{(1)}} + \frac{25}{9} \lambda^2 \pi_2 + (2\lambda^2 + \lambda) \overline{T^{(1)}} + \lambda^2 + \lambda.$$

Если учесть (4.29), то легко установить, что полученное неравенство является другой записью неравенства (6.7). ◀

Теорема 6.4. Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(6.9) \quad \pi_2 \leq \frac{(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})(4 - e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})^2 e^{3\lambda}}{8(1 + 3\lambda) - 2e^{-\lambda}(1 + 2\lambda) - 2e^{-2\lambda}(1 + \lambda)} \leq \frac{\lambda^2}{2} e^{3\lambda}.$$

Доказательство. При условии  $\lambda C < 1$  стационарные вероятности  $\pi_k$  являются решением уравнений (4.7), (4.8), где переходные вероятности  $p_{km}$  определяются равенством (4.6). Уравнения (4.7) при  $m=0$  и  $m=1$  дают

$$(6.10) \quad (\pi_0 + \pi_1) e^{-\lambda} + \pi_2 p_{20} \leq \pi_0,$$

$$(6.11) \quad (\pi_0 + \pi_1) \lambda e^{-\lambda} + \pi_2 p_{21} \leq \pi_1.$$

Из (6.11) имеем

$$(6.12) \quad \pi_1 \geq (1 - \lambda e^{-\lambda})^{-1} (\pi_0 \lambda e^{-\lambda} + \pi_2 p_{21}).$$

Используя в (6.10) вместо  $\pi_1$  нижнюю границу (6.12), получаем

$$(6.13) \quad \pi_2 [p_{20}(e^{\lambda} - \lambda) + p_{21}] \leq \pi_0 (e^{\lambda} - 1 - \lambda).$$

Из (4.8) следует, что  $\pi_0 \leq 1 - \pi_1$ , поэтому с учетом (6.12) получаем

$$(6.14) \quad \pi_0 \leq 1 - \lambda e^{-\lambda} - \pi_2 p_{21}.$$

Используя в (6.13) вместо  $\pi_0$  верхнюю границу (6.14), приходим к границе

$$(6.15) \quad \pi_2 \leq e^{-\lambda} (p_{20} + p_{21})^{-1} (e^{\lambda} - 1 - \lambda).$$

Переходные вероятности  $p_{20}$  и  $p_{21}$ , согласно (4.6), имеют вид:

$$(6.16) \quad p_{20} = \sum_{m=2}^{\infty} e^{-\lambda m} P_2(m); \quad p_{21} = \sum_{m=2}^{\infty} m \lambda e^{-\lambda m} P_2(m),$$

где  $P_2(m) = \Pr\{\theta_u = m \mid \xi_u = 2\}$ .

Сравнивая выражение (6.16) с производящей функцией  $G(k, z)$ , легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(6.17) \quad p_{20} = e^{-\lambda} G(2, e^{-\lambda}); \quad p_{21} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial z} z G(2, z) \big|_{z=e^{-\lambda}}.$$

Функцию  $G(2, z)$  можно найти, решая уравнение (3.1). В результате получаем

$$(6.18) \quad G(2, z) = 2z^2(4 - z - z^2)^{-1}.$$

Из (6.17) и (6.18) получаем

$$(6.19) \quad p_{20} = 2e^{-3\lambda}(4 - e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})^{-1},$$

$$(6.20) \quad p_{21} = (24\lambda e^{-3\lambda} - 4\lambda e^{-4\lambda} - 2\lambda e^{-5\lambda})(4 - e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})^{-2}.$$

Подставляя выражения (6.19) и (6.20) для  $p_{20}$  и  $p_{21}$  в (6.15), после простых алгебраических преобразований получаем левое из неравенств (6.9). Если использовать условие  $0 \leq \lambda < 3/8$ , а также верхние и нижние границы для функции  $e^{-\lambda}$ , которые образуются при отбрасывании хвоста ее разложения в степенной ряд по степеням  $\lambda$ , то после громоздких, но в идейном отношении простых преобразований получается правое из неравенств (6.9). ◀

**Теорема 6.5.** Если  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ), то

$$(6.21) \quad 1 - \frac{\pi_1}{k^{(1)}} \leq \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda - \lambda C}.$$

**Доказательство.** При  $\lambda C < 1$ , используя теоремы 4.2 и 4.3, а также верхнюю границу из (4.3), имеем

$$(6.22) \quad 1 + \overline{T^{(1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + T_k^{(1)}) \pi_k \leq \pi_0 + \pi_1 + \frac{9}{2} \pi_2 + \sum_{k=3}^{\infty} (Ck - 1) \pi_k = \\ = \pi_0 - (C - 1) \pi_1 + C \overline{k^{(1)}} + \left[ \pi_0 + \pi_1 + \frac{1}{6} \pi_2 - 1 \right].$$

В силу (4.8) выражение в квадратных скобках в (6.22) отрицательно, поэтому из (6.22) и (4.29) следует, что

$$(6.23) \quad (1 - \lambda C)(1 + \overline{T^{(1)}}) \leq \pi_0 - (C - 1) \pi_1.$$

Стационарные вероятности удовлетворяют неравенствам (6.10) и (6.11). Поэтому из (6.12) следует, что

$$(6.24) \quad \pi_0 \leq \lambda^{-1}(e^\lambda - \lambda) \pi_1.$$

Используя (6.24) совместно с (6.23), получаем

$$(6.25) \quad (1 - \lambda C)(1 + \overline{T^{(1)}}) \leq \lambda^{-1}(e^\lambda - \lambda C) \pi_1.$$

Неравенство (6.25) с учетом (4.29) просто приводится к виду (6.21). ◀

Наконец, мы используем полученные результаты, чтобы найти верхнюю границу для  $D$ .

Сначала найдем границу для  $D^{(1)}$ , исходя из (5.6). Используя равенства (4.29) и (4.31) совместно с (5.6), после преобразований получаем

$$(6.26) \quad D^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{k^{(2)}} - \overline{k^{(1)}}}{\lambda \overline{k^{(1)}}} - 1 \right).$$

С помощью алгебраических преобразований и неравенств (6.7) и (6.9) для  $D^{(1)}$  получим

$$(6.27) \quad D^{(1)} \leq R_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \lambda^2 C^2}{1 - \lambda^2 C^2} - \frac{1 - \frac{25}{18} \lambda^2 e^{3\lambda}}{\left(1 - \lambda C + \frac{7}{4} \lambda^2\right) (1 + \lambda C)} \right].$$

где  $R_1(\lambda)$  введено для обозначения правой части (6.27).

Теперь займемся  $D^{(2)}$ . Исходя из (5.17) и границы (5.18), имеем

$$(6.28) \quad D^{(2)} \leq [(1 - e^{-\lambda}) (1 + \overline{T^{(1)}})]^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k d_k \pi_k.$$

Используя значение  $d_2 = 5/2$  и границу (6.3) при  $k \geq 3$  для суммы в (6.28), получаем

$$(6.29) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k d_k \pi_k \leq 5\pi_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{13}{9} k^2 \pi_k = \frac{13}{9} \overline{k^{(2)}} - \frac{13}{9} \pi_1 - \frac{7}{9} \pi_2.$$

Неравенства (6.28), (6.21), (6.29) и (6.7) после громоздких, но в идейном отношении несложных преобразований дают

$$(6.30) \quad D^{(2)} \leq R_2(\lambda) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \left[ \frac{13}{9} \frac{e^{\lambda} - 1}{e^{\lambda} - \lambda C} + \frac{26\lambda}{9(1 - \lambda^2 C^2)} + R_3(\lambda) \right],$$

где  $R_2(\lambda)$  введено для обозначения правой части (6.30), а

$$(6.31) \quad R_3(\lambda) = [\lambda (1 - \lambda^2 C^2) (1 + \overline{T^{(1)}})]^{-1} \times \\ \times \left[ \frac{325}{81} \lambda^2 \pi_2 - \frac{7}{9} (1 - \lambda^2 C^2) \pi_2 - \frac{13}{9} \lambda^2 \right].$$

Как показывает непосредственный подсчет, в выражении  $R_3(\lambda)$  коэффициент при  $\pi_2$  является неположительным, если  $\lambda^2 > 63/773$ , и отрицательным, если  $\lambda^2 \leq 63/773$ . Поэтому, используя для  $\pi_2$  границы  $\pi_2 \geq 0$  (в области малых  $\lambda$ ) и (6.9), а для  $\overline{T^{(1)}}$  границу (6.6), после преобразований получаем

$$(6.32) \quad R_3(\lambda) \leq R_4(\lambda) = \begin{cases} -\frac{\frac{13}{9} \lambda}{(1 + \lambda C) \left(1 - \lambda C + \frac{7}{4} \lambda^2\right)} & \text{при } \lambda^2 \leq \frac{63}{773}, \\ -\frac{\frac{13}{9} \lambda \left(1 - \frac{25}{18} \lambda^2 e^{3\lambda}\right)}{(1 + \lambda C) \left(1 - \lambda C + \frac{7}{4} \lambda^2\right)} - \frac{\frac{7}{18} \lambda e^{3\lambda} (1 - \lambda C)}{1 - \lambda C + \frac{7}{4} \lambda^2} & \text{при } \lambda^2 > \frac{63}{773}, \end{cases}$$

где  $R_4(\lambda)$  введено для обозначения правой части (6.32). Итак, неравенство (6.30), где  $R_3(\lambda)$  нужно заменить на  $R_4(\lambda)$ , является искомой верхней границей для  $D^{(2)}$ . Эту границу мы обозначим через  $R_5(\lambda)$ .

Таким образом, доказан следующий результат, который во избежание громоздких выражений мы сформулируем в терминах функций  $R_i(\lambda)$ .

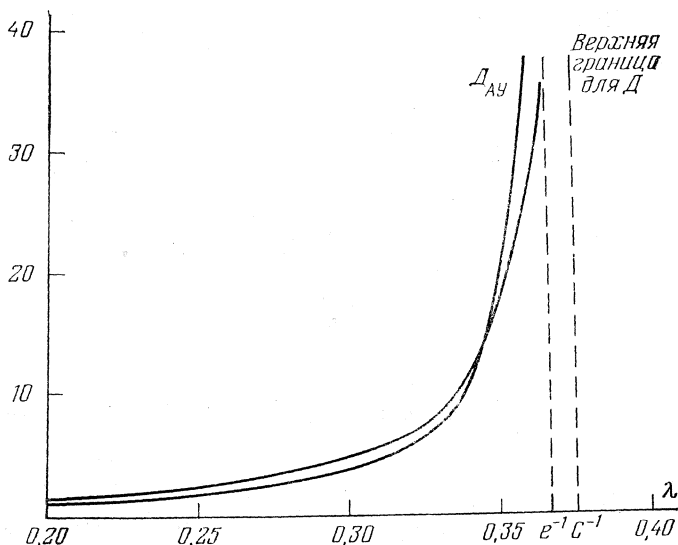


Рис. 5. Задержка в зависимости от скорости

**Теорема 6.6.** В УДСА с передачей по цугам при  $\lambda C < 1$  ( $C = 8/3$ ) для средней стационарной задержки пакета справедлива следующая граница:

$$(6.33) \quad D \leq R_1(\lambda) + R_5(\lambda),$$

где функция  $R_1(\lambda)$  определена равенством (6.27), а  $R_5(\lambda)$  равна выражению для  $R_2(\lambda)$  (см. (6.30)), в котором вместо  $R_3(\lambda)$  стоит  $R_4(\lambda)$ .

На рис. 5 верхняя граница (6.33) для задержки  $D$  изображена графически\*. Для сравнения на графике показана также  $D_{ay}$  (задержка, умноженная на  $\lambda$ ) для алгоритма АЛОХА с управлением [8]

$$D_{ay} = e\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) (1 - e\lambda)^{-1}.$$

На графике кривые идут близко друг к другу до скорости, приблизительно равной  $\lambda \approx 0,345$ . До этой скорости  $D_{ay}$  меньше границы (6.33). При малых  $\lambda$  имеем  $D_{ay} \sim e\lambda$ , а  $D \leq 2,89\lambda$ . При скоростях  $\lambda > 0,345$  граница (6.33) идет ниже  $D_{ay}$ . Главным является то, что алгоритм УДСА позволяет без использования управления вести передачу с конечной задержкой до скорости  $\frac{3}{8} = 0,375$ , а система АЛОХА имеет конечную задержку лишь при наличии управления и только для скоростей меньших  $e^{-1} \approx 0,368$  [5, 8].

\* Фактически расчеты велись с применением для  $\pi_2$  более точного левого неравенства из (6.9), а не границы  $\pi_2 \leq \frac{1}{2} \lambda^2 e^{3\lambda}$ , которая использована в (6.33).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цыбаков Б. С., Коган Я. А., Тафт В. В. Сети ЭВМ с использованием наземных радио- и спутниковых каналов связи. Зарубежная радиоэлектроника, 1978, 4, 39–65.
2. Мархасин А. Б. Уплотнение, концентрация и протоколы доступа в радиосетях оперативной передачи данных. 7-я Всесоюзн. конф. по теории кодирования и передачи информ., III, тезисы докл. Москва – Вильнюс, 1978, 91–98.
3. Ланин М. И. Оценка способов установления связи между блоками телеинформационной системы. Автоматика и телемеханика, 1964, 25, 9, 1344–1351.
4. Abramson N. The Throughput of Packet Broadcasting Channels. IEEE Trans. Commun., 1977, 25, 1, 117–127.
5. Kleinrock L. Queueing Systems, II: Computer Applications. New York, John Wiley, 1976.
6. Foster F. G. On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Problems. Ann. Math. Statist., 1953, 24, 355–360.
7. Гузман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, II. М., «Наука», 1973.
8. Ferguson M. J. On the Control, Stability, and Waiting Time in a Slotted ALOHA Random-Access System. IEEE Trans. Commun., 1975, 23, 11, 1306–1311.

Поступила в редакцию  
10 августа 1978 г.