INTEGRALE DUBLE. PROBLEME PROPUSE
Lect. Dr. Costache Luminiţa
Să se calculeze următoarele integrale duble:

1. $I = \int\int_D \ln(x+y)dxdy$, unde $D = \left\{0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\right\}$
   R: $I = \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

2. $I = \int\int_D xydxdy$, dacă D este domeniul limitat de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 2x+3$.
   R: $I = \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right)dx = 53 + \frac{1}{3}$

3. $I = \int\int_D ydxdy$, unde $D : y \le x, xy \ge 1, 1 \le x \le 2$
   R: $I = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} ydydx$ etc.

4. $I = \int\int_D (x^2+y)dxdy$, unde $D : 0 \le y \le 2, \frac{y^2}{2} \le x \le 4-y$

5. $I = \int\int_D \arcsin\sqrt{x+y}dxdy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x+y=0, x+y=1, y=-1, y=1$.
   R: $I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-y}^{1-y}\arcsin\sqrt{x+y}dx\right)dy = \frac{\pi}{4}$

   Să se calculeze în coordonate polare următoarele integrale duble:

6. $I = \int\int_D \arcsin\left[\frac{1}{2\pi}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]dxdy$, unde $D : \pi^2 \le x^2+y^2 \le (2\pi)^2$
   R: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\pi}^{2\pi}\left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right)\rho d\rho = \pi^3\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7. $I = \int\int_D x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, unde $D : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, -x \le y \le x$
   R: $I = \int_a^b \rho^2\mathrm{e}^{\rho}d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta = \sqrt{2}[\mathrm{e}^b(b^2-2b+2) - \mathrm{e}^a(a^2-2a+2)]$

8. $I = \int\int_D (x^2+y^2+xy-x-y)dxdy$, unde $D : 4 \le x^2+y^2 \le 9, y \ge x \ge 0$
   R: $I = \int_2^3 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\rho^3 + \rho^3\frac{\sin 2\theta}{2} - \rho^2\cos\theta - \rho^2\sin\theta)d\theta = \frac{65(\pi+1)}{16} - \frac{19}{3}$

9. Să se calculeze aria mulţimii $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + y^2 \ge 1, x \ge 0, y \ge \frac{x\sqrt{3}}{2}, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$.
   R: aria$(D) = \int_1^2 \int_{\frac{pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\rho d\theta d\rho$ etc.

10. Să se determine aria mulţimii plane D limitată de lemniscata lui Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.
    R: Tinând cont de simetria lemniscatei în raport cu cele două axe de coordonate, aria este $A = 4\int\int_{D_1} dxdy$, unde prin trecere la coordonate polare obţinem $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho d\rho\right)d\theta$ etc.

Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze următoarele integrale duble:

11. $I = \int\int_D (x+y)^4(x-y)^2 dxdy$, unde D : pătratul mărginit de dreptele $x+y=1, x+y=-1, x-y=-1, x-y=-3$.

    R: Fac transformarea $T : u = x+y, v = x-y$

12. Să se calculeze aria patrulaterului curbiliniu mărginit de parabolele $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = cx, y^2 = dx, 0 < a < b, 0 < c < d$.

    R: Fac transformarea $T : u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$

13. Presupunem că R e regiunea plană mărginită de hiperbolele $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4$. Găsiţi momentul de inerţie în raport cu originea al acestei regiuni.

    R: Fac transformarea $T : u = xy, v = x^2 - y^2$ şi obţinem $I_0 = 3$

14. Găsiţi volumul V al solidului ce se întinde sub suprafaţa $z = 1 + xy$ şi deasupra dreptunghiului $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ din planul xOy.

    R: $V = \int_0^2 \left(\int_0^1 (1+xy)dy \right) dx = 3$

15. Găsiţi volumul V al solidului mărginit inferior de planul xOy şi superior de paraboloidul $z = 25 - x^2 - y^2$.

    R: $V = 4\int_0^5 \left(\int_0^{\sqrt{25-x^2}} (25 - x^2 - y^2)dy \right) dx = \frac{625\pi}{2}$

16. Determinaţi volumul corpului

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y) \right\},$$

    unde $f : D \to [0, \infty)$ continuă , $D \subset \mathbb{R}^2$, $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq \right.$ $\left. \leq 2y \right\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

    R: $\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2}$