EXTREMELE FUNCTIILOR DE MAI MULTE VARIABILE. PROBLEME PROPUSE

Lect. Dr. Costache Luminita

1. Să se scrie formula lui Taylor pentru:

   a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ în punctul $(-2, 1)$;

   b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ în punctul $(1, 1, 1)$.

2. Folosind polinomul Taylor de ordinul doi,să se calculeze valoarea aproximativă pentru: a) $(0,95)^{2,01}$, b) $1,02 \cdot 2,01^2 \cdot 3,03^3$.

   R: a) $f(0,95; 2,01) \approx 0,902$; b) $f(1,02; 2,01; 3,03) \approx 114,6159$

3. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:

   a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$;

   b) $f(x, y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}$;

   c) $f(x, y) = x^4 - 8^3 + 18x^2 - 8x + y^3 - 3y^2 - 3y$;

   d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   e) $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y), (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   f) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

   g) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$;

   h) $f(x, y) = (x + 1)^{2n} + (y - 2)^{2m}, n, m \in \mathbb{N}^*$

   i) $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$;

   j) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y), 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$;

   k) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y$;

   l) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x, y, z > 0$;

   m) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

   n) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), (x, y, z) \in (0, \pi) \times$ $\times (0, \pi) \times (0, \pi)$.

4. Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime locale şi nici un minim local.

5. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$ variabilele fiind legate prin condiţia $x + y = 1$.

   R: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e punct de minim

6. Să se găsească extremele funcţiei $f(x, y, z) = xy^2z^3$ cu legătura $x+$ $+2y + 3z = a, x, y, z, a > 0$.

   R: $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ e punct de maxim

7. Să se studieze extremele funcţiei $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ cu legăturile $-x + y + z = 1, x - z = 0$

   R: $(-1, 1, -1)$ e punct de minim

8. Se cere să se construiască cu o cantitate de material dată , o cisternă având forma unui paralelipiped drept deschis la suprafaţă . Să se determine dimensiunile cisternei în aşa fel încât capacitatea sa să fie maximă în ipoteza că nu se ţine seama de grosimea pereţilor şi că la construcţie nu avem pierderi de material.

   R: Fie x, y dimensiunile bazei şi z înălţimea. Aflăm valoarea maximă a funcţiei $V = xyz$ cu legătura $xy+2xz+2yz = a^2$. Obţinem $V_{\max} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$

9. Să se determine extremele globale ale funcţiilor următoare pe mulţimile K indicate:

   a) $f(x, y) = x^2 - y^2, K = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$;

   b) $f(x, y) = 4x - x^2 + 6y - y^2, K = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

   R: a) $\sup\limits_K f(x, y) = 4, \inf\limits_K f(x, y) = -4$

   b) $\sup\limits_K f(x, y) = 13, \inf\limits_K f(x, y) = -12$

10. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = x^p + y^p + z^p$ cu legătura $x^{p-1} + y^{p-1} + z^{p-1} = a^{p-1}, a > 0, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$.

    R: Pentru p par, $(3^{1-p}a, 3^{1-p}a, 3^{1-p}a)$ este punct de minim.

    Pentru p impar, $(-3^{1-p}a, -3^{1-p}a, -3^{1-p}a)$ e punct de maxim şi $(3^{1-p}a, 3^{1-p}a, 3^{1-p}a)$ e punct de minim.