SERII DE PUTERI.PROBLEME PROPUSE
Lect. Dr. Costache Luminiţa

1. Găsiţi razele de convergenţă şi intervalele de convergenţă ale următoarelor serii:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n+1} x^n$
   R: a)$R = 2$; b) $R = 4$; c) $R = \mathrm{e}$

   Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$ **R:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$ **R:** $(-3, 3)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$ **R:** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1} \cdot 3^n} x^n$ **R:** $(-6, 6)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot n} x^n$ **R:** $(-2, 2)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} \cdot x^n$ **R:** $(-1, 1)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch} n}{\mathrm{sh}^2 n} \cdot x^n$ **R:** $(-\mathrm{e}, \mathrm{e})$ (în capete se aplică criteriul necesar)

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot x^n$ **R:** $\{0\}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} \cdot x^n, a > 0$
    R: dacă $a < 1$, mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$; dacă $a > 1$, mulţimea de convergenţă este $\{0\}$; dacă $a = 1$, mulţimea de convergenţă este $(-1, 1)$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!} x^n$ **R:** $(-1, 1)$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots(4n-1)}x^n$ **R:** [-1,1)

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}(x-2)^n$ **R:** [1,3)

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}\sqrt[n]{n}}{(n^2+1)^n}(x-3)^n$ **R:** $(2,4)$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{7n^2+8n+2}\cdot\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ **R:** $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,\infty)$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p-1}{n^q+2}\cdot x^n,\ \ p,q\in\mathbb{R}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+n+1}\cdot\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n(n+1)}(n+2)^{n\alpha}}(x-1)^n,\alpha\in\mathbb{R}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{(n^3+n^2+5)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\ln(n^2+1)}(x+2)^n,\alpha\in\mathbb{R}$

20. a) Discutaţi convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{\alpha}\frac{1}{n},\alpha\in\mathbb{R}$. b) Să se afle mulţimea de convergenţă a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot x^n$.

21. Fie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. a) Calculaţi raza de convergenţă a seriei; b) Precizaţi mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\beta=0$; c) Precizaţi mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\alpha=1$; d) Determinaţi forma funcţiei $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ şi precizaţi domeniul maxim de definiţie.

22. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei derivatelor termenilor seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n+1)^{\alpha}\sqrt{n^3+n+1}}$.

    R: dacă $\alpha>-\frac{1}{2}$, mulţimea de convergenţă $[-1,1]$; dacă $\alpha\leq-\frac{1}{2}$, mulţimea de convergenţă $(-1,1)$

23. Să se afle suma seriilor numerice cu ajutorul seriilor de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n^3-n^2+1}{n!}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cdot\frac{1}{5^n(2n+1)(2n+2)}$; d) $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{2020^n\cdot(n+1)!}$

R: a) Se scrie ca sumă de 3 serii şi se foloseşte dezvoltarea lui e^x în serie de puteri. Suma este 14e; b) $3e^{-1}-1$.

24. Să se determine $S(x)$ şi domeniul de convergenţă pentru :

a) $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n}}{2n}$; b) $S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

c) $S(x)=\sum_{n\geq 2}\frac{x^{2n}}{n}$; d) $S(x)=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$;

e) $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{n}$

Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor:

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

R: Mulţimea de convergenţă este (-1,1] şi suma $f(x)=\ln(1+x)$

26. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$

R: (-1,1), $f(x)=\frac{1-x}{(1+x)^3}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$

R: (-1,1), $f(x)=\frac{6}{(1-x)^4}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$

R: (-1,1), $f(x)=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

R: (-1,1), $f(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$

R: $\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}(\text{ch}x+\cos x)$

31. Să se demonstreze că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru $\forall x\in[-1,1]$, iar suma f a ei verifică ecuaţia $(1-x)f'(1-x)-xf'(x)=\ln\frac{1-x}{x}$, pentru $0<x<1$.

32. Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^n}{n}\cdot x^{2n}$. a) Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei şi să se calculeze suma ei. b) Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\ln(1+3x^2)dx$ şi să se arate că

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n(2n+1)}=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$$

33. Să se dezvolte în serie de puteri în jurul punctului $x=0$ funcţiile $f_1(x)=\sqrt{x+1}$, $f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Să se arate că funcţiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care ea este valabilă :

34. $f(x)=\ln(1-x+x^2), x\in\mathbb{R}$

R: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^{3n}-x^n), |x|\le 1$

35. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}, x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

R: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[3-3n-\frac{7}{2^{n+1}}\right]x^n, |x|<1$

36. $f(x)=(1+\mathrm{e}^x)^3, x\in\mathbb{R}$

R: $f(x)=8+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3+2^n+3^n)\frac{x^n}{n!}, -\infty<x<+\infty$

37. $f(x)=\sin^3 x, x\in\mathbb{R}$

R: $f(x)=\frac{3}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{9^n-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}, -\infty<x<+\infty$

38. $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt, x\in[-1,1]$

R: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, |x|\le 1$

39. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f(x)=\ln\sqrt[5]{(1-5x+6x^2)^x}$. Să se găsească intervalul de convergenţă a seriei de puteri obţinute.

40. Să se arate că funcţia $f(x)=\ln x, x>0$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conţine în interior punctul $x=2$ şi să se determine această dezvoltare, specificându-se intervalul pe care ea este valabilă .

R: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}, 0<x\le 4$

41. Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0, funcţia $\arcsin x$. Să se determine suma seriei $1+\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

42. Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0, funcţia $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Să se determine suma seriei $1+\displaystyle\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

43. Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile următoare, cu bazele indicate în paranteze:

a) $\frac{1}{x^2}\ (x+1)$

b) $\ln x\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

R: a) $\frac{1}{x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n, x\in(-2,0)$

b) $\ln x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n}\right]\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n, x\in(0,\infty)$

44. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} integralele:

a) $\int_0^{\frac12}\frac{\sin x}{x}dx$; b) $\int_0^{\frac13}\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}dx$; c) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$; d) $\int_0^{\frac12}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$

45. Să se determine polinoamele Taylor de ordinul 1 şi 2 pentru funcţiile $f(x)=1+x\ln x$ în punctul $a=1$, respectiv $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ în punctul $a=0$ şi să se calculeze cu ajutorul polinomului Taylor de ordinul 2 $\ln\frac{11}{10}$, respectiv $\mathrm{e}^{-0,1}$.

46. Să se găsească $\sin 1^\circ$ cu 5 zecimale exacte.

R: $0,01744$

Să se calculeze următoarele limite cu ajutorul dezvoltărilor limitate:

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ **R:** $\frac{1}{2}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{2x}-2}{x^2}$ **R:** 4

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{x^2}$ **R:** $-\frac{2}{9}$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}\sin x-x(1+x)}{x^3}$ **R:** $\frac{1}{3}$

51. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

    R: Facem schimbarea $x=\frac{1}{t}\longrightarrow 0$ şi obţinem rezultatul $\frac{1}{3}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^{20}x)-\sin^{20}x}{\mathrm{tg}^{40}x}$ **R:** $-\frac{1}{2}$

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}x+\frac{5x^2+12}{x^2-12}}{x^6}$ **R:** $-\frac{1}{480}$

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

    R: Scriem $(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ şi dezvoltăm în continuare funcţia $\ln(1+x)$, obţinând limita egală cu $\frac{1}{2}$.