27 settembre 2010

Primi Elementi di Logica Modale

Le **logiche modali** vengono solitamente dette *logiche della necessità* e *logiche della possibilità*; il linguaggio modale (composto dal linguaggio proposizionale e del I ordine) infatti, è ottenuto aggiungendo i due operatori "*necessariamente*" e "*possibilmente*" al linguaggio della logica classica (rispettivamente proposizionale o predicativa).

Panoramica sulla Logica Proposizionale

Con il termine "*logica*" non si fa riferimento ad un'unica area di studio, ma esistono varie logiche, nate con l'obiettivo di rispondere alle varie esigenze.

I due linguaggi logici più importanti dal punto di vista matematico sono:

- La *logica proposizionale*
- La *logica del 1° ordine*

Il **linguaggio logico proposizionale** è molto semplice, dotato di buone proprietà e decidibile, ma risulta poco espressivo.

Passando al **linguaggio della logica del 1° ordine**, appena si provano ad inserire elementi tali da rappresentare l'aritmetica, si perde subito il concetto di *decidibilità*.

L'obiettivo, dunque, consiste nel trovare una logica che sia la via di messo tra la logica proposizionale e la logica del 1° ordine, ossia una logica che abbia un notevole potere espressivo, conservando però il concetto di decidibilità.

Per fare ciò, si andrà ad ampliare la *logica proposizionale:* il linguaggio della logica proposizionale è fondato su un **alfabeto** che è composto da:

- Insieme al più numerabile Φ di *formule atomiche* (dette anche lettere enunciative) A_i che sono sempre vere o false;
- *Connettivi logici:*
    - $\sim$ NOT;
    - $\wedge$ AND;
    - $\vee$ OR;
    - $\Longrightarrow$ $SE\ ALLORA$;
    - $\Longleftrightarrow$ $SE\ E\ SOLO\ SE$
- *Parentesi* ***(e)*** per capire come sono strutturate le frasi.

A partire da questo linguaggio, si andranno a costruire delle **formule ben formate (fbf)** caratterizzate da precise regole sintattiche di costruzione, ossia:

- Ogni lettera enunciativa è una formula ben formata;
- Se $\mathcal{A}$ è una formula ben formata, allora anche $\sim \mathcal{A}$ è una fbf;
- Se $\mathcal{A}\ e\ \mathcal{B}$ sono fbf, allora sono fbf anche:
    - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$,
    - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$,
    - $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$,
    - $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$,
- Nient'altro è una formula ben formata

Queste sono le regole utilizzate per costruire *formule ben formate* e sono state utilizzate lettere corsive ($\mathcal{A}\ e\ \mathcal{B}$) proprio per indicare che, a loro volta, queste possono essere sostituite da altre fbf costruite applicando sempre le medesime regole viste sopra.

Esempio

La formula $\left((\sim(A \wedge B)) \Leftrightarrow (A \Longrightarrow (B \vee A))\right)$ è una f.b.f, ma contiene troppe parentesi!!

per evitare di dover scrivere tutte queste parentesi, si fissano le **precedenze nell'uso dei connettivi**; se non altrimenti indicato dalle parentesi:

- $\sim precede \wedge che\ precede \vee che\ precede \Longrightarrow che\ precede\ a\ sua\ volta\ \Leftrightarrow$;
- $connettivi\ uguali\ si\ intendono\ associati\ a\ sinistra$

La fbf riportata nell'esempio sopra, dunque, può essere riscritta come: $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow A \Longrightarrow B \vee A$.

Questa formula è costruita mettendo insieme **sottoformule** che sono:

- $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow A \Longrightarrow B \vee A$,
- $\sim(A \wedge B)$,
- $A \Longrightarrow B \vee A$,
- $(A \wedge B)$,
- A,
- $B \vee A$,
- B.

In genere, data una formula $\mathcal{A}$, le **sottoformule di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{Stfm(\mathcal{A})}$**, sono così definite:

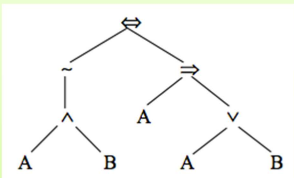
- Se $\mathcal{A}$ è una lettera enunciativa A, allora $Stfm(\mathcal{A}) = \{A\}$,
- Se $\mathcal{A}$ è $\sim \mathcal{B}$, allora $Stfm(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup Stfm(\mathcal{B})$,
- Se $\mathcal{A}$ è:
  - $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$,
  - $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$,
  - $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$,
  - $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$

  Allora $Stfm(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup Stfm(\mathcal{B}) \cup Stfm(\mathcal{C})$

Il modo in cui la formula è costruita e le sottoformule della formula stessa, sono ben evidenziate dalla *rappresentazione ad albero* della struttura della formula.

Esempio

Considerando la formula $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow A \Longrightarrow B \vee A$, il suo albero di struttura risulta:



Questo albero ha:

- come radice l'ultimo connettivo usato (*connettivo principale)*,
- come foglie le lettere enunciative,
- come nodi interni i vari connettivi.

Ogni nodo può essere visto come la radice di un *albero massimale*, ossia l'albero di struttura di una sottoformula e, viceversa, ogni sottoformula (che non sia una lettera enunciativa), ha come albero di struttura un sottoalbero massimale avente come radice un nodo etichettato con il connettivo principale della sottoformula considerata.

Per interpretare le formule, si ricorre ad una **valutazione** che, partendo dalle lettere enunciative, va all'insieme composto da 0 e 1 , ossia:

$$\boldsymbol{v}: \{\boldsymbol{A_i}\} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

e tale valutazione si estende utilizzando le classiche *tavole di verità* dei connettivi, ossia:

A	$\sim A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \Longrightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

le righe di una tavola di verità rappresentano tutte le possibili interpretazioni di una formula e le righe che restituiscono il valore 1 prendono il nome di **modelli della formula**; se esiste almeno una interpretazione v tale che $v(\mathcal{A}) = 1$, la fbf $\mathcal{A}$ viene detta **soddisfacibile**.

Una fbf $\mathcal{A}$ che non ammette modelli viene detta **insoddisfacibile.**

Una fbf $\mathcal{A}$ per cui ogni interpretazione è un modello, prende il nome di **tautologia** e viene indicata con il simbolo $\vDash$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**.**

I concetti di *modello, soddisfacibilità e insoddisfacibilità* si possono estendere ad un *insieme Γ di fbf*:

- un **modello** per Γ è un'interpretazione che sia modello pe ogni fbf di Γ,
- Γ è **soddisfacibile** se ammette un modello,
- Γ è **insoddisfacibile** se nessuna interpretazione è un modello per Γ

Una fbf $\mathcal{A}$ è una **conseguenza semantica** di un insieme Γ di fbf ($\boldsymbol{\Gamma \vDash \mathcal{A}}$) se ogni modello di Γ è un modello anche di $\mathcal{A}$; in particolare, $\mathcal{A}$ è $conseguenza\ semantica\ di\ \mathcal{B}$ se ogni modello di $\mathcal{B}$ è modello di $\mathcal{A}$.

Da questa osservazione si ottiene subito il seguente **teorema di deduzione semantica**:

$\mathcal{A}$ È UNA CONSEGUENZA SEMANTICA DI $\mathcal{B}$ SE E SOLO SE $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ È UNA TAUTOLOGIA

Che può essere espresso in forma più generale come segue:

SIA Γ UN INSIEME DI FBF; $\mathcal{A}$ È UNA CONSEGUENZA SEMANTICA DI $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}$ SE E SOLO SE $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ È UNA CONSEGUENZA SEMANTICA DI Γ

Il legame tra deduzione semantica e insoddisfacibilità è espresso anche dal seguente teorema:

$\mathcal{A}$ È UNA CONSEGUENZA SEMANTICA DI Γ SE E SOLO SE $\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\}$ È INSODDISFACIBILE

Due formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono **semanticamente equivalenti** ($\boldsymbol{\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}}$) se dall'insieme $\mathcal{A}$ si può dedurre semanticamente $\mathcal{B}$ ($\{\mathcal{A}\} \vDash \mathcal{B}$) e se dall'insieme $\mathcal{B}$ si può dedurre semanticamente $\mathcal{A}$ ($\{\mathcal{B}\} \vDash \mathcal{A}$), ossia se tutti e soli i modelli di $\mathcal{A}$ sono anche modelli di $\mathcal{B}$.

Si ricordi, a tale proposito, che :

$\mathcal{A}$ È SEMANTICAMENTE EQUIVALENTE A $\mathcal{B}$, SE E SOLO SE $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ È UNA TAUTOLOGIA

È importante, in generale, focalizzare l'attenzione sulle tautologie in quanto rappresentano ciò che è sempre vero e quindi ciò che si può utilizzare per effettuare il ragionamento.

In realtà, quindi, per insegnare ad una macchina a ragionare, bisogna far in modo che essa sappia riconoscere le tautologie e per fare ciò può ricorrere a dei metodi sintattici che possono essere di due tipi:

- *Metodi sintattici che si basano sugli assiomi;*
- *Metodi sintattici che agiscono per refutazione.*

Metodi sintattici basati sugli assiomi

Prima di introdurre tale categoria di metodi, è importante ricordare le **equivalenze fondamentali** dei connettivi:

$\sim(\sim A) \equiv A$	
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$	$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$
$A \Rightarrow B \equiv \sim A \vee B$	$A \Rightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$
$B \equiv (\sim A \wedge A) \vee B$	$B \equiv (\sim A \vee A) \wedge B$

Di cui si ricordi che le ultime due formule possono essere sostituite rispettivamente con:

- $\perp \equiv \sim A \wedge A$
- $T \equiv \sim A \vee A$
- $\perp \vee B \equiv B$
- $\perp \wedge B \equiv B$

ricorrendo all'uso dei due simboli speciali $\perp$ $(sempre\ falso)$ e T $(sempre\ vero)$

Ritornando ora ai metodi in esame, quello di riferimento prende il nome di **Teoria L**, la quale opera ricorrendo solo ai connettivi $\sim e \Longrightarrow$.

> **N.B.** Tale vincolo si connettivi utilizzati non rappresenta comunque una limitazione del potere espressivo, in quanto i connettivi $\wedge$, $\vee\ e \Leftrightarrow$ possono essere utilizzati pensando alle relative formule come abbreviazioni di una formula ad esse equivalente che usi solo $\sim e \Longrightarrow$

Tale teoria sceglie tra le fbf solo 3 tipi di assiomi:

- $A1$: $\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A})$;
- $A2$: $\big(\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C})\big)$;
- $A3$: $(\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \sim \mathcal{B}) \Longrightarrow ((\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{A})$

> **N.B** A1, A2 e A3 non sono 3 formule, ma 3 **schemi di formule**, perché al loro interno le sottoformule $\mathcal{A}, \mathcal{B}\ e\ \mathcal{C}$ sono qualsiasi.

Attraverso questi assiomi, la *teoria L* opera ricorrendo ad una **regola d'inferenza**, detta ***modus ponens (MP)***, secondo la quale:

DALLE DUE FORMULE $\boldsymbol{\mathcal{A}}\ e\ \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ SI PUÒ RISCRIVERE $\boldsymbol{\mathcal{B}}$

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$$

Basandosi su tale teoria, si può definire **teorema della teoria** ($\vdash_L \boldsymbol{\mathcal{A}}$) una qualsiasi formula che è l'ultima formula di una sequenza o di assiomi A1, A2 o A3, oppure ottenute da applicazione precedenti del *modus ponens.*

Esempio

Dimostrare che $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$ è un teorema della teoria $(\vdash_L \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A})$

Per dimostrarlo, bisogna trovare una dimostrazione in L che finisca con la formula $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$ e tale che le formule della sequenza o siano assiomi o siano ricavate da formule precedenti mediante MP.

1. Per lo schema di assiomi A1, dove la formula $\mathcal{B}$ è sostituita con $\mathcal{A}$, si ottiene:	$\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A})$
2. Per lo schema di assiomi A1, dove la formula $\mathcal{B}$ è sostituita con $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$, si ottiene:	$\mathcal{A} \Longrightarrow ((\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}) \Longrightarrow \mathcal{A})$
3. Per lo schema di assiomi A2, dove: a. la formula $\mathcal{B}$ è sostituita con $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$; b. la formula $\mathcal{C}$ è sostituita con $\mathcal{A}$ si ottiene:	$\big(\mathcal{A} \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A})\big) \Rightarrow \big((\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})\big)$
4. applicando MP tra le formule 2 e 3, si ottiene:	$\big(\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A})\big) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A})$
5. applicando MP tra le formule 1 e 4, si ottiene:	$(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A})$

Risulta dunque dimostrato che la formula data è un teorema della teoria.

La **teoria L** presentata, ha 3 importanti caratteristiche:

- È *corretta*, cioè tutti i suoi teoremi sono tautologie;
- È *completa*, cioè tutte le sue tautologie sono teoremi di L,
- È *decidibile*, cioè esiste una algoritmo (la tavola di verità) che con un numero finito di passi permette di decidere se una data formula è un teorema o non è un teorema della teoria.

L'importanza della teoria L, inoltre, risiede nel fatto che permette di enunciare il **teorema di correttezza e completezza**, secondo cui:

$\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI L SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È UNA TAUTOLOGIA

$$\vdash_L \boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Tale teorema è importante in quanto permette di trascrivere un concetto puramente semantico (quello di *tautologia*) in un concetto prettamente sintattico, in quanto risulta così sufficiente applicare gli assiomi e ridurre mediante MP per identificare se un formula è o meno una tautologia; permette dunque di passare dall'analisi di un significato ad una elaborazione.

Scegliere l'ordine delle operazioni da compiere (assiomi o MP) non è semplice; tuttavia ciò che interessa ora è, data una formula, stabilire se essa sia o meno una tautologia, indipendentemente da quanto costoso sia l'algoritmo da applicare.

Indipendentemente dal costo dell'algoritmo, infatti, esso può essere eseguito e ciò permette di affermare che *la teoria L è decidibile*.

Metodi sintattici che agiscono per refutazione

Tali metodi si basano sulla seguente affermazione:

$\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI L SE E SOLTANTO SE $\sim \mathcal{A}$ È INSODDISFACIBILE, OSSIA È UNA FBF CHE NON AMMETTE MODELLI

Si procede, dunque, cercando di costruire, con tecniche di tipo puramente sintattico, dei conseguenti di un'affermazione che è noto sin dalla partenza essere insoddisfacibile.

Elementi di Logica Modale

Il principale obiettivo che ci si propone, consiste nell'arricchire il linguaggio descritto nel paragrafo precedente, al fine di renderlo più potente pur mantenendo invariate le proprietà in esso intrinseche.

Per fare ciò si vanno ad introdurre due nuove connettivi:

- □ (**box**)
- ◊ (**diamond**)

$\Box\mathcal{A}$ si legge "*necessariamente* $\mathcal{A}$", ma può assumere diversi significati a seconda del contesto in cui si vuole usare il linguaggio modale, ad esempio:

- È necessariamente vero che $\mathcal{A}$,
- Per ogni $\mathcal{A}$ $(\forall\mathcal{A})$
- Deve essere $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ è obbligatorio,
- È noto che $\mathcal{A}$,
- Si crede che $\mathcal{A}$,
- Si conosce $\mathcal{A}$,
- Si può dimostrare che $\mathcal{A}$,
- Da un certo punto in poi $\mathcal{A}$, riferendosi quindi a qualcosa che si evolve nel tempo

$\Diamond\mathcal{A}$, invece, si legge "*possibilmente* $\mathcal{A}$ " ed a sua volta può assumere diversi significati. Normalmente, tuttavia, si usa la convenzione di pensare a "possibilmente $\mathcal{A}$" come ad un'abbreviazione di "non necessariamente non $\mathcal{A}$" e quindi i significati che si danno a $\Diamond\mathcal{A}$ sono strettamente legati a quelli dati a $\Box\mathcal{A}$. In particolare, alcuni dei significati dati a $\Box\mathcal{A}$ sono:

- Esiste $\mathcal{A}$ $(\exists\mathcal{A})$
- In qualche istante è successo $\mathcal{A}$.

Questi operatori prendono il nome di **connettivi modali:** sono connettivi unari che si aggiungono a quelli visti in precedenza e, ovviamente, arricchiscono l'alfabeto così come le fbf.

Le fbf della logica modale sono dunque le formule aventi le caratteristiche viste per la logica proposizionale , con in aggiunta alcune caratteristiche legate ai connettivi modali, ossia:

- Ogni lettera enunciativa è una formula ben formata;
- Se $\mathcal{A}$ è una formula ben formata, allora anche $(\sim\mathcal{A})$, $(\Box\mathcal{A})$ e $(\Diamond\mathcal{A})$ sono fbf;
- Se $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ sono fbf, allora sono fbf anche:
  - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$,
  - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$,
  - $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$,
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$,
- Nient'altro è una formula ben formata

Anche in questo caso, per evitare l'introduzione di un numero eccessivo si parentesi, si stabilisce il seguente ordine di priorità nell'applicazione dei connettivi:

$$\left.\begin{array}{l}\sim\\ \Box\\ \Diamond\end{array}\right\}\text{ nell'ordine in cui si trovano }\;, \wedge,\quad \vee,\quad \Rightarrow,\quad \Leftrightarrow$$

E si utilizzano le parentesi solo per indicare una priorità diversa e/o per rendere una fbf più leggibile, tenendo conto che, se non diversamente indicato dalle parentesi, i connettivi con egual nome s'intendono associati a sinistra.

Per ogni fbf $\mathcal{A}$, si indica con $\boldsymbol{Stfm(\mathcal{A})}$ l'insieme delle sue **sottoformule**, definito come visto per la logica proposizionale, a meno di qualche piccola variazione, ossia:

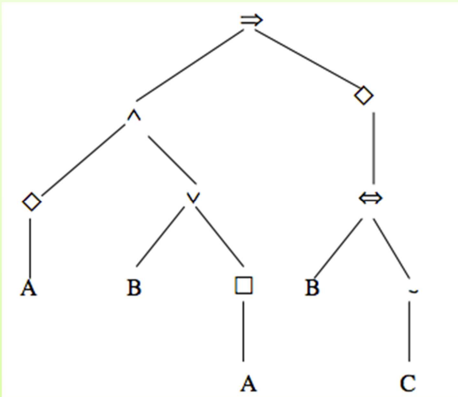
- $Stfm(\mathcal{A}) = \{A\}$ per ogni formula atomica A,
- $Stfm(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup Stfm(\mathcal{B})$ se $\mathcal{A}$ è del tipo $\bullet\mathcal{B}$ con $\bullet \in \{\sim, \Box, \Diamond\}$
- Se $\mathcal{A}$ è:
    - $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$,
    - $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$,
    - $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$,
    - $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$

  Allora $Stfm(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\} \cup Stfm(\mathcal{B}) \cup Stfm(\mathcal{C})$

Utilizzando l'albero di struttura di una fbf, si leggono facilmente le sue sottoformule.

Esempio

Data la formula $\Diamond \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \vee \Box\mathbf{A}) \Rightarrow \Diamond (\mathbf{B} \Leftrightarrow \sim \mathbf{C})$, il relativo albero di struttura risulta essere:



Si userà la parole **schema** per indicare un insieme di formule che hanno la stessa struttura sintattica.

La semantica di un linguaggio logico di questo tipo non può essere data da funzioni di verità, almeno di ridurre $\Box$ e $\Diamond$ a connettivi esprimibili in termini dei connettivi logici della logica classica.

Tentando di usare una logica a tre valori 0 (falso), 1 (vero) e ½ (possibile), ed utilizzando la convenzione secondo cui $\Box A \equiv \sim\Diamond\sim A$ (che equivale alla convenzione di interpretare $\Diamond A \equiv \sim \Box \sim A$), si ottiene che sono sempre vere alcune formule intuitivamente non accettabili. Inoltre in questo modo non si riesce a catturare l'espressività permessa dal linguaggio modale.

La semantica più adatta a catturare tale espressività è la **semantica dei mondi possibili**, introdotta da Kripke.

La *semantica dei mondi possibili* su basa sul concetto di **frame:** un *frame* $\mathcal{F}$ è una coppia $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ costituita da un insieme non vuoto $\mathcal{S}$ (detto *insieme dei mondi*) finito o infinito e da una relazione binaria $\mathcal{R}$ su $\mathcal{S}$ $(\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S})$ detta *relazione di accessibilità* o *raggiungibilità* (se $(\alpha, \beta) \epsilon\, \mathcal{R}$, si dice infatti che β è accessibile o raggiungibile da α).

Se si ragiona un attimo sul concetto di *frame*, dunque, si può affermare che esso non è sostanzialmente altro che un grafo orientato, in quanto si possono vedere:

- Gli elementi di $\mathcal{S}$ come punti;
- Le coppie di $\mathcal{R}$ come archi.

Attraverso un frame, dunque, si possono rappresentare gli stati di un processo dai quali è possibile muoversi mediante gli archi e quindi risulta chiaro quali stati siano raggiungibili partendo da uno stato noto.

Noto il concetto di *frame,* l'obiettivo diventa quello di determinare se una formula è vero su un frame: invece di avere un solo mondo, ossia un solo istante con certe regole, li si guardano ora tutti e si va a vedere come ci si muove: si potranno dunque avere delle formule che sono vere in un mondo, oppure che sono vere in tutti i mondi del frame, etc.

Per valutare effettivamente una formula, non è sufficiente il concetto di *frame*, ma bisogna arricchire il frame con il concetto di **modello**: un *modello* su un frame $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ è una terna $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$, dove $\mathcal{V}$ è una funzione $\boldsymbol{\mathcal{V}}: \boldsymbol{\Phi} \rightarrow \wp(\boldsymbol{\mathcal{S}})$ detta *funzione di valutazione.* Il modello $\mathcal{M}$ si dice *costruito sul frame* $\mathcal{F}$.

La *funzione di valutazione* parte sempre dall'insieme delle formule atomiche (detto Φ) ma non va più nell'insieme $\{0,1\}$, bensì va nell'insieme delle parti di $\mathcal{S}$ $(\wp(\mathcal{S}))$[1].

Ad ogni formula atomica, dunque, viene associato un insieme di mondi che sono quei mondi in cui tali formule atomiche sono considerate vere.

Poiché si è a metà tra la logica proposizionale e la logica del 1° ordine, per dire che una formula è valida in un frame sarà necessario, come nella logica del 1° ordine, affermare che una formula è vera in un modello che è valido in un frame. Ovviamente, dato un frame, su di esso di possono costruire più modelli diversi (infatti ci sono varie possibili funzioni $\mathcal{V}: \Phi \rightarrow \wp(\mathcal{S})$), mentre, dato un modello, è unico il frame su cui il modello è costruito.

All'interno dei modelli, inoltre, varrà il concetto di **verità in un mondo**: una fbf $\mathcal{A}$ si dice *vera in un mondo* α *del modello* $\mathcal{M}$ ($\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}}$) in base alle seguenti relazioni:

se $\mathcal{A}$ è una formula atomica ($\mathcal{A}: A$)	A è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se α appartiene alla valutazione di A: ($\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha A\ sse\ \alpha \in V(A)}$) Quindi la funzione di valutazione associa ad una formula atomica l'insieme di tutti e soli i mondi in cui la formula è vera
Se $\mathcal{A}: \sim\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se in quel mondo, su quel modello, non è vera $\mathcal{B}$. ($\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B}}$)
Se $\mathcal{A}: \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se in α è vera $\mathcal{B}$ e in α è vera $\mathcal{C}$ ($\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{B}\ e\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C}}$)
Se $\mathcal{A}: \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{B}\ o\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C}}$
Se $\mathcal{A}: \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$	$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B}\ o\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C}}$
Se $\mathcal{A}: \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ (\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{B}\ e\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C})\ o\ (\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B}\ e\ \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{C})}$

Fin'ora non si è fatto nulla di particolare, in quanto è come se, una volta fissatisi su un mondo, si fosse assegnato un valore di verità alle lettere enunciative e poi partendo da quel valore di verità si andasse ad ottenere le varie relazioni ricorrendo alle classiche tavole di verità.

È dunque come se la funzione di valutazione desse un assegnamento, mondo per mondo, alle lettere enunciative e poi si ottenessero i vari risultato partendo da questo assegnamento.

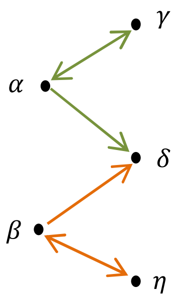
Il problema nasce con le formule di verità del tipo $\boldsymbol{\mathcal{A}}: \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{A}}: \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}}$, in quanto non sono affrontabili, come già detto in precedenza, mediante le tavole di verità, ma bisogna analizzarle in maniera diversa, andando ad utilizzare la relazione R della terna del mondo $\mathcal{M}$.

In particolare, si afferma che:

Se $\mathcal{A}: \Box\mathcal{B}$	$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ sse\ \forall\beta \in \mathcal{S} \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}}$

[1] L'insieme delle parti di un insieme è l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Ad esempio:
$$S = \{a, b, c\} \Longrightarrow \wp(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Per comprendere tale condizione, si ipotizzi d'avere un insieme di mondi così strutturato:



si supponga che la formula in esame sia del tipo $\mathcal{A}: \Box\mathcal{B}$ e si prenda come valutazione di $\mathcal{B}$ la relazione $V(\mathcal{B}) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$.

Nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da α è possibile raggiungere sia γ che δ, quindi in tutti i mondi raggiungibili da α, $\mathcal{B}$ è vera, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}$

Nel mondo β del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da β è possibile raggiungere δ e η; in δ $\mathcal{B}$ è vera, ma in η no; la relazione data sopra, però, afferma che $\mathcal{B}$ deve essere vera in tutti i mondi raggiungibili dal mondo di partenza (in questo caso β), quindi in questo caso si può affermare che: $\mathcal{M} \nvDash_\beta \mathcal{A}$

Nel mondo γ del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da γ è possibile raggiungere semplicemente α, ma $\mathcal{B}$ è vera in α, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A}$

Nel mondo δ del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da δ non è possibile raggiungere alcun mondo, quindi $\mathcal{B}$ è vera in quanto l'insieme vuoto appartiene all'insieme delle parti di $\mathcal{S}$, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\delta \mathcal{A}$

Si osservi che se si cambiasse la relazione tra la coppia (β, δ) con una relazione bidirezionale, $\mathcal{A}$ non sarebbe più vera, in quanto l'unico mondo raggiungibile da δ sarebbe β, ma $\mathcal{B}$ non è vera in β e quindi si otterrebbe che $\mathcal{M} \nvDash_\delta \mathcal{A}$.

Nel mondo η del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da η si può raggiungere solo β, ma $\mathcal{B}$ non è vera in β, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \nvDash_\eta \mathcal{A}$

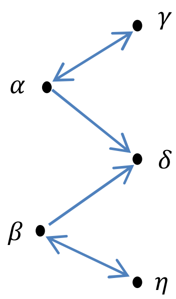
Si può passare ora all'analisi della formula $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: $\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}}$: ci si limiterà a considerare logiche dati per cui:

Se $\mathcal{A}$: $\Diamond\,\mathcal{B}$	$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}}$ ***sse*** $\boldsymbol{\exists \beta \in \mathcal{S} \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}}$

Dando questa valutazione del "*possibilmente*", ci si ritrova nuovamente nella condizione in base alle quale $\Diamond\, \mathrm{A} \equiv \sim \Box \sim \mathrm{A}$ e questo, ad esempio in alcune logiche dell'ingegneria della conoscenza in cui il connettivo $\Box$ è inteso come "*l'agente sa*" e il connettivo $\Diamond$ è inteso come "*l'agente crede*", è una supposizione troppo forte e non del tutto corretta.

Tuttavia, le logiche più comuni (ad esempio quelle temporali) si basano su questa definizione.

Come nel caso precedente, si procede ora con un esempio per dimostrare, in pratica, il significato della formula sopra descritta:



si supponga che la formula in esame sia del tipo $\mathcal{A}$: $\Diamond\,\mathcal{B}$ e si prenda come valutazione di $\mathcal{B}$ la relazione precedente $V(\mathcal{B}) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$.

Nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da α è possibile raggiungere sia γ che δ, quindi in tutti i mondi raggiungibili da α, $\mathcal{B}$ è vera, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}$

Nel mondo β del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da β è possibile raggiungere sia δ che η, in questo caso, però, $\mathcal{B}$ è vera in β , in quanto esiste un mondo raggiungibile da β in cui la formula è vera. Si può dunque affermare che $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A}$

Nel mondo γ del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da γ è possibile raggiungere semplicemente α, ma $\mathcal{B}$ è vera in α, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A}$

Nel mondo δ del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$? Da δ non è possibile raggiungere alcun mondo, quindi $\mathcal{B}$ non è vera, perché non esiste nemmeno un mondo raggiungibile, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \nvDash_\delta \mathcal{A}$.

Si osservi che, pur avendo il medesimo frame di riferimento, nel mondo δ è vero il "*necessariamente*", ma non il "*possibilmente*".

<u>Nel mondo η del modello $\mathcal{M}$ è vera $\mathcal{A}$?</u> Da η si può raggiungere solo β, ma $\mathcal{B}$ non è vera in β, quindi si può affermare che $\mathcal{M} \nvDash_{\eta} \mathcal{A}$

Avendo ben definito tali relazioni, si possono ora enunciare le seguenti osservazioni:

- Non considerando i connettivi modali, tutti gli altri elementi si comportano come se si avesse associato alle formule atomiche, per ogni mondo, una funzione di valutazione
- Dette **semiatomiche** le formule atomiche o le formule che iniziano con un connettivo modale, ogni valutazione delle formule semiatomiche in un mondo si estende facilmente ad una valutazione di tutte le formule in quel mondo; quindi dare la relazione di $\mathcal{R}$, corrisponde con il dare una valutazione di tutte le formule semiatomiche in tutti i mondi del modello.

L'importanza della relazione $\mathcal{R}$ nell'interpretazione di "*necessariamente*" e "*possibilmente*" risulta ancora più evidente nella seguente equivalenza:

IN UN QUALSIASI MODELLO $\mathcal{M}$ DEL MONDO α È VERA LA FORMULA $\Box\mathcal{A}$ SE E SOLTANTO SE NEL MODELLO $\mathcal{M}$ DEL MONDO α È VERA LA FORMULA $\sim \Diamond \sim\mathcal{A}$

$[\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \Box\mathcal{A} \;\; sse \;\; \mathcal{M} \vDash_{\alpha} \sim \Diamond \sim\mathcal{A}]$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

<u>Si considerino</u>:

- ***Hp:*** $\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \Box\mathcal{A}$
- ***Ts:*** $\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \sim \Diamond \sim\mathcal{A}$

Partendo dall'ipotesi, si deduce che, per qualsiasi mondo β tale che dal mondo α si possa raggiungere β mediante la relazione $\mathcal{R}$, in β è vera $\mathcal{A}$, per come è stata definita la funzione di validazione del connettivo $\Box$.

$$\forall\beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M} \vDash_{\beta} \mathcal{A}$$

Quindi, in β deve essere falsa $\sim\mathcal{A}$, ossia:

$$\mathcal{M} \nvDash_{\beta} \sim \mathcal{A}$$

ma allora, siccome non in tutti i β raggiungibili da α è vera $\sim \mathcal{A}$, in α sarà falsa "*possibilmente non* $\mathcal{A}$", infatti non vi sono altri mondi raggiungibili da α in cui la formula $\sim \mathcal{A}$ sia vera, sempre per la definizione data della funzione di validazione.

$$\mathcal{M} \nvDash_{\alpha} \Diamond \sim \mathcal{A}$$

Quindi, in α sarà sicuramente vera "*non possibilmente non* $\mathcal{A}$ ", ossia:

$$\mathcal{M} \nvDash_{\alpha} \sim\Diamond \sim \mathcal{A}$$

<u>viceversa, si considerino ora:</u>

- ***Hp:*** $\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \sim \Diamond \sim\mathcal{A}$
- ***Ts:*** $\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \Box\mathcal{A}$

Partendo dall'ipotesi, si deduce che in α risulterà falsa "*possibilmente non* $\mathcal{A}$ "

$$\mathcal{M} \nvDash_{\alpha} \Diamond \sim \mathcal{A}$$

Ma allora non esiste un mondo γ tale che sia raggiungibile da α con una relazione $\mathcal{R}$ e tale che in γ sia vera la formula $\sim \mathcal{A}$; in quanto se esistesse tale formula, allora in α la formula del passaggio precedente sarebbe vera. Quindi:

$$\nexists\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M} \vDash_{\gamma} \sim \mathcal{A}$$

Il che significa che per ogni γ tale che sia raggiungibile da α con una relazione $\mathcal{R}$, accade che è vera $\mathcal{A}$, ossia:

$$\forall\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R}, \quad \mathcal{M} \vDash_{\gamma} \mathcal{A}$$

Ma questa non è altro che la definizione della funzione di validazione del connettivo $\Box$ quindi si ottiene che:

$$\mathcal{M} \vDash_{\alpha} \Box\mathcal{A}$$

Attraverso queste formule si è dunque definito il concetto di una *formula vera in un modello di un mondo*, ma a questo punto si vuole sviluppare il concetto di **formula vera in un modello**:

UNA FORMULA $\mathcal{A}$ SI DICE **VERA IN UN MODELLO** $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ (INDICANDOLO COME $\mathcal{M} \vDash \mathcal{A}$) SE È VERA IN TUTTI I MONDI DI $\mathcal{M}$, OSSIA:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash \mathcal{A} \ \ se \ \ \mathcal{M} \vDash_{\alpha} \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathcal{S}}$$

Ricordando che $\mathcal{S}$ è l'insieme dei mondi di un modello.

Si vuole sviluppare, inoltre il concetto di **formula valida in un frame:**

UNA FORMULA $\mathcal{A}$ SI DICE **VALIDA IN UN FRAME** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (INDICANDOLO COME $\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}$) SE È VERA IN TUTTI I MODELLI $\mathcal{M}$ COSTRUITI SU $\mathcal{F}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F} \vDash \mathcal{A} \ \ se \ \ \mathcal{M} \vDash \mathcal{A}, \ \forall \mathcal{M} \ costruito\, su \ \ \mathcal{F}}$$

Su un frame, infatti, si possono costruite tanti modelli, in quanto sono svariate le funzioni di valutazione che si possono considerare.

Dato il frame, composto da un insieme di mondi e da una relazione, dunque, si può aggiungere la funzione di valutazione e per ogni funzione di valutazione bisogna valutare la formula.

Un'importante caratteristica dei frame è data dal fatto che <u>*esistono delle formule valide su ogni frame*</u>; in particolare:

- la **tautologie** proprie della logica proposizionale, sono formule valide su ogni frame,
- sono valide su ogni frame anche quelle **formule ottenute dalle tautologie del calcolo proposizionale**, tramite sostituzione uniforme di sottoformule atomiche con formule modali

<u>Esempio</u>

Si consideri la formula $\boldsymbol{\square \mathcal{B} \Longrightarrow ((\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \square \mathcal{B})}$; questa formula è un tautologia, in quanto ottenuta dalla formula tautologica $\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A})$, sostituendo:

- $\mathcal{A}$ con $\square \mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ con $\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}$

Questa, dunque, è una formula valida su ogni frame, in quanto per valutarla è necessario valutare:

- Prima $\square \mathcal{B}$,
- Poi $(\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \square \mathcal{B}$
- E poi unire i risultati con il connettivo $\Longrightarrow$

Ma per valutare $(\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \square \mathcal{B}$ è necessario a sua volta valutare:

- Prima $\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}$,
- Poi $\square \mathcal{B}$
- E poi unire i risultati con il connettivo $\Longrightarrow$

Quindi, qualsiasi valore vengano poi ad assumere $\square \mathcal{B}$ e $\lozenge\, \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{B}$ mondo per mondo, alla fine il risultato finale sarà sempre pari a 1.

- Ricordando che uno **schema** si dice vero in un modello (valido in un frame) se ogni istanza dello schema è vera nel modello (valida nel frame), si va a definire la seguente caratteristica:

LO **SCHEMA K:** $\boldsymbol{\square(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\square \mathcal{A} \Longrightarrow \square \mathcal{B})}$ È VALIDO IN OGNI FRAME

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Si supponga per assurdo che K non sia valido in ogni frame, ossia che: $\boldsymbol{\mathcal{F} \nvDash K}$

ma allora esisterà un modello $\mathcal{M}$ in cui K non è vero, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash K}$

e quindi ci sarà un mondo α del modello $\mathcal{M}$ tale che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_{\alpha} \square(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\square \mathcal{A} \Longrightarrow \square \mathcal{B})}$

per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ " si ha quindi che la formula sopra è falsa se e solo se: $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B})$ **e** $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$

Si analizzano ora separatamente le due parti sopra evidenziate, ottenendo:

- $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B})$
  Per la funzione di valutazione del connettivo $\Box$ è noto che: $\forall\beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$
- $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$
  Per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ " si ha che: $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{B}$

  ma per la funzione di valutazione del connettivo $\Box$, si ottiene che: $\forall\beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A}$

  $\exists\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \nvDash_\gamma \mathcal{B}$

ma se $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B})$ ed $\exists\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R}$, allora necessariamente varrà anche che: $\forall\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$

così come da $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$ si otterrà che: $\forall\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A}$

ma se $\mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ e se $\mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{A}$, allora, per *modus ponens*, si può affermare che $\forall\gamma \mid (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{B}$

si presenta dunque una contraddizione tra i risultati ottenuti (evidenziati) e ciò permette di affermare che K è valido in ogni frame

Si osservi che K non è un ulteriore esempio di una qualche tautologia, ma è proprio una formula che risulta vera in ogni frame per sua costruzione;

- Un'altra formula che è vera in ogni frame è: $\Box\mathcal{T}$, dove con $\mathcal{T}$ si indica una qualsiasi tautologia, come ad esempio $\Box(\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A})$; qualunque modello e qualunque mondo si consideri, infatti, $\Box\mathcal{T}$ sarà sempre vera, ossia $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{T}, \quad \forall\, \mathcal{M}, \alpha$, in quanto la tautologia $\mathcal{T}$ sarà vera in tutti i mondi raggiungibili da α.
- Un'altra formula vera in ogni frame è la seguente: $\Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B})$:

DIMOSTRAZIONE

Si supponga per assurdo che lo schema non sia valido in ogni frame, ossia che: $\mathcal{F} \nvDash K$

ma allora esisterà un modello $\mathcal{M}$ in cui lo schema non è vero, ossia: $\mathcal{M} \nvDash K$

e quindi ci sarà un mondo α del modello $\mathcal{M}$ tale che: $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B})$

ma per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ ", si ottiene di conseguenza che: $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ **e** $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B}$

Analizzando ora separatamente le due formule ottenute, si può osservare che:

- $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
  Per la funzione di valutazione del connettivo $\Box$ è noto che: $\forall\beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

  Da cui si ottiene che: $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A}$ *e* $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$

ma poiché $\mathcal{A}$ è vera nel modello $\mathcal{M}$ del mondo β raggiungibile da α, allora nel mondo α sarà vera $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$, ossia:

$\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$

- $\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$
  Dal passaggio precedente si è ottenuto che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{A}$, ma allora affinchè la relazione in analisi sia verificata, deve valere:

  $\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

  tuttavia, se dall'analisi precedente si è ottenuto che $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$, allora, come per il caso di $\mathcal{A}$, varrà la relazione:

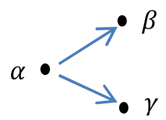
  $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

ecco dunque lo svilupparsi della contraddizione, infatti, affinché l'ipotesi iniziale risulti veritiera, in un modello di un mondo $\Box\mathcal{B}$ dovrebbe essere sia vera che falsa, il che non è ammissibile. Si può quindi affermare che lo schema in analisi è effettivamente valido su tutti i frame!

Ovviamente ci sono *numerosi schemi che non sono validi su tutti i frame*; si osservino i seguenti esempi:

- $\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \vee \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Longrightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \vee \Box\boldsymbol{\mathcal{B}})$
  Per far vedere che una formula non è valida in ogni frame, è sufficiente andare a costruire un frame particolare in cui la formula non sia valida.

Per il caso in analisi si consideri il seguente frame:



per rendere l'analisi più semplice, si consideri lo schema proposto ricorrendo a lettere enunciative, ossia: $\Box(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Longrightarrow (\Box\mathbf{A} \vee \Box\mathbf{B})$.

Su questo semplice frame si procede costruendo un modello in base al quale:
- $V(A) = \beta$, ossia A è vera solo in β
- $V(B) = \alpha$, ossia B è vera solo in α

È noto che, sia dove è vera A sia dove è vera B, sarà vera anche $A \vee B$ (infatti il connettivo " ∨ " è vero se è vero almeno uno dei due elementi) , quindi in α sarà vero $\Box(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$, visto che in tutti i mondi raggiungibili da α risulta vero $A \vee B$.
Ovviamente, però, $\Box$A non è vera in α, in quanto nel mondo γ raggiungibile da α non è vera A; allo stesso modo, non sarà vera in α $\Box$B, in quanto nel mondo β raggiungibile da α non è vera B.
Quindi non può essere vera in α $(\Box\mathrm{A} \vee \Box\mathrm{B})$.

- Tra gli esempi di formule non vere in tutti i frame, ve ne sono alcune che introducono delle **proprietà** molto importanti. In particolare, *un frame gode di una proprietà (ad esempio: seriale, riflessiva, transitiva, etc) quando la sua relazione $\mathcal{R}$ gode della medesima proprietà*. Si osservino i seguenti schemi:

  - $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Questa formula non è valida in generale su ogni frame, infatti si consideri il seguente frame:

si prenda, per semplicità, la formula composta da sole lettere enunciative: $\Box\mathbf{A} \Longrightarrow \Diamond\, \mathbf{A}$ e si consideri, ad esempio, come valutazione di A il mondo α, ossia: $(V(A) = \alpha)$.

Se si va ad analizzare il mondo β , in esso sarà vero $\Box$A $(\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathrm{A})$, in quanto non ci sono mondi raggiungibili da β; tuttavia in β è falso $\Diamond$ A $(\mathcal{M} \nvDash_\beta \Diamond\, \mathrm{A})$, in quanto, perché sia vera $\Diamond$ A, deve esistere almeno un mondo raggiungibile da β in cui A è vera, ma, come già detto, da β non vi sono mondi raggiungibili.
Poiché $\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathrm{A}$, ma $\mathcal{M} \nvDash_\beta \Diamond\, \mathrm{A}$, non può essere valida in ogni frame $\Box\mathrm{A} \Longrightarrow \Diamond\, \mathrm{A}$.

Questo stesso schema, però, è valido in tutti i **frame seriali**:

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **SERIALE** SE $\forall\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}, \exists\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

Ossia se esiste sempre qualcosa (un mondo, nella semantica di Kripke) che si può raggiungere partendo da α.

Allora si può affermare che:

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S},\mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **SERIALE** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Si supponga per assurdo che la formula non sia vera, si avrebbe quindi che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma allora, per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ ", si ha che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \ \mathbf{e}\ \boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma se $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{A}$, allora

$$\forall\boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \quad \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\beta \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

l'ipotesi di serialità afferma che almeno un β raggiungibile da α esiste e poiché si è trovato un mondo raggiungibile da α (β per l'appunto) in cui è vera $\mathcal{A}$, allora in α è vera anche $\Diamond\, \mathcal{A}$, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma le due relazioni evidenziate sono in contraddizione e quindi l'ipotesi iniziale è falsa e lo schema è effettivamente valido in un frame seriale.

Interpretando il "*necessariamente*" come una descrizione del tempo, supponendo di descrivere un tempo infinito ed immaginando di dover esprimere la relazione "*dopo*", è chiaro che si sta lavorando con una relazione seriale; quindi risulta noto che, quando ci si trova in tal contesto applicativo, sarà valido lo schema $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$, quindi lo si può usare come formula che vale sempre.

Questo schema, inoltre, caratterizza proprio i frame seriali, infatti se si opera con un frame che non è seriale, di sicuro si ha un esempio di questo schema che non risulta valido.

- $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Questo schema risulta valido in tutti e soli i **frame riflessivi:**

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **RIFLESSIVA** SE $\forall\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{S}},\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S},\mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **RIFLESSIVA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Si ipotizzi $\mathcal{F}$ un frame riflessivo, si vuole dimostrare che in $\mathcal{F}$ è valida la formula $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$.

Si supponga per assurdo che la formula non sia vera, si avrebbe quindi che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma allora, per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ ", si avrà che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \mathbf{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma per la relazione riflessiva $(\alpha,\alpha) \in \mathcal{R}$ e dalla relazione $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{A}$ verrebbe da dire che non in tutti i mondi raggiungibili da α è vera $\mathcal{A}$, ma quindi risulterebbe assurdo affermare che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{A}$, in quanto ciò è in contraddizione con la funzione di valutazione del connettivo modale "$\Box$".

Se il frame è riflessivo, dunque, questo schema risulta essere sempre valido.

Quando enunciato dal lemma precedente è vero anche nella versione al contrario, ossia:

SE LO SCHEMA $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$ È VALIDO, ALLORA SICURAMENTE IL FRAME IN ANALISI È RIFLESSIVO

Infatti, indipendentemente dal numero di mondi contenuti nell'insieme $\mathcal{S}$ del frame, si avrà sicuramente almeno un mondo α in cui è presente l'autoanello dato dalla relazione $(\alpha,\alpha) \in \mathcal{R}$.

Per provare che questo schema non è valido su ogni frame, basta esibire un frame su cui un'istanza delle schema non sia valida.

Si consideri, ad esempio, il frame avente $\mathcal{S} = \{\alpha,\beta\}$ e $R = \{(\alpha,\beta)\}$ e la seguente istanza dello schema:

$$\Box\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{A}$$

e si consideri la seguente funzione di valutazione di A:

$$\mathbf{V(A)} = \{\boldsymbol{\beta} | (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R}\}$$

per la funzione di valutazione di A definita e per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ ", si avrà che:

$$\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathbf{A} \quad e \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathbf{A}$$

pertanto si è trovato che l'istanza $\Box A \Longrightarrow A$ dello schema non è vera in un mondo di un modello costruito sul frame e perciò non è valida nel frame.

- $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

Questo schema risulta valido in tutti e soli i **frame transitivi:**

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **TRANSITIVA** SE $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R}$ $\boldsymbol{e}$ $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathcal{R}$ $\boldsymbol{implicano}$ $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathcal{R}$

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S},\mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **TRANSITIVA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

DIMOSTRAZIONE

Si ipotizzi $\mathcal{F}$ un frame transitivo, si vuole dimostrare che in $\mathcal{F}$ è valido lo schema $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

Se ciò non fosse vero, ci sarebbe un modello di questo frame in un mondo in cui lo schema non è vero, ossia:

$$\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$$

ma allora per la funzione di valutazione del connettivo " $\Longrightarrow$ ", si avrebbe che:

$$\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{A} \quad \mathbf{e} \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\Box\mathcal{A}$$

la seconda relazione ottenuta ($\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\Box\mathcal{A}$) indica che:

$$\exists\boldsymbol{\beta} \mid (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R} \qquad \mathcal{M} \nvDash_\beta \Box\mathcal{A}$$

ma allora esiste un mondo γ raggiungibile da β, in cui $\mathcal{A}$ è falsa, ossia:

$$\exists\boldsymbol{\gamma} \mid (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathcal{R} \qquad \mathcal{M} \nvDash_\gamma \mathcal{A}$$

ma per la proprietà transitiva di cui è dotato il frame, il mondo γ deve essere anche direttamente raggiungibile da α $\big((\alpha,\gamma) \in \mathcal{R}\big)$, quindi si è trovato un mondo γ raggiungibile da α in cui $\mathcal{A}$ è falso.

Questo porterebbe però ad affermare che:

$$\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\mathcal{A}$$

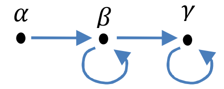
Le due relazioni evidenziate sono in contraddizione, quindi si può affermare che se il frame è transitivo, questo schema risulta essere sempre valido.

Viceversa, si può affermare che:

SE LO SCHEMA $\Box\mathcal{A} \implies \Box\Box\mathcal{A}$ È VALIDO, ALLORA SICURAMENTE IL FRAME IN ANALISI È TRANSITIVO

Si procede ora dimostrando che lo schema è valido <u>solo</u> se il frame è transitivo; infatti:

Si consideri, ad esempio, il seguente frame:



la seguente istanza dello schema :

$$\Box\mathbf{A} \implies \Box\Box\mathbf{A}$$

e la seguente funzione di valutazione:

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\beta} | (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R}\}$$

risulta quindi evidente che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathrm{A}$ e che $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathrm{A}$, ma $\mathcal{M} \nvDash_\gamma \mathrm{A}$, in quanto non esiste un arco diretto da α a γ.

Ma se $\mathcal{M} \nvDash_\gamma \mathrm{A}$, allora $\mathcal{M} \nvDash_\beta \Box\mathrm{A}$, così come $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\Box\mathrm{A}$, quindi lo schema non è valido nel frame in analisi, infatti non è un frame transitivo.

Per come era stata vista nel frame transitivo, invece, $\mathcal{A}$ era vera in tutti i mondi raggiungibili da α.

Tutte le proprietà viste fino ad ora sono legate al concetto di ***tempo***, ma esistono anche proprietà che permettono di rappresentare contesti del tipo "*se il robot A vede il robot B, allora il robot B vede il robot A*", infatti:

- $\mathcal{A} \implies \Box \Diamond \mathcal{A}$

Questo schema risulta valido in tutti e soli i **frame simmetrici:**

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **SIMMETRICA** SE $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R}$ ***implica*** $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{R}$

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **SIMMETRICA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\mathcal{A} \implies \Box \Diamond \mathcal{A}$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Si ipotizzi $\mathcal{F}$ un frame simmetrico, si vuole dimostrare che in $\mathcal{F}$ è valido lo schema $\mathcal{A} \implies \Box \Diamond \mathcal{A}$

Per assurdo, se ciò non fosse vero, ci sarebbe un modello di questo frame in un mondo in cui lo schema non è vero, ossia:

$$\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{A} \implies \Box \Diamond \mathcal{A}$$

ma allora per la funzione di valutazione del connettivo " $\implies$ ", si avrebbe che:

$$\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad \mathbf{e} \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box\Diamond \mathcal{A}$$

se da α non fosse possibile raggiungere alcun mondo, la formula $\Box\Diamond \mathcal{A}$ sarebbe vera, per la funzione di verità del connettivo $\Box$, ma allora ci sarà almeno un mondo raggiungibile da α.

Inoltre, vale la relazione simmetrica, quindi ogni arco che collega due mondi ha la doppia freccia; in tutti i mondi raggiungibili da α, dunque, è vera $\Diamond \mathcal{A}$, ossia:

$$\forall \boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{R} \quad \mathcal{M} \vDash_{\boldsymbol{\beta}} \Diamond \mathcal{A}$$

ma allora in α è vera $\Box\Diamond \mathcal{A}$, ossia:

$$\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\Diamond \mathcal{A}$$

le due relazioni evidenziate sono in contraddizione, quindi si può affermare che se il frame è simmetrico, questo schema risulta essere sempre valido.

Se la relazione non fosse simmetrica, si può dimostrare che questo schema è falso, infatti:

Si consideri, ad esempio, il seguente frame:

$$\overset{\alpha}{\bullet} \longrightarrow \overset{\beta}{\bullet}$$

la seguente istanza dello schema :

$$\mathbf{A} \Longrightarrow \Box \Diamond \mathbf{A}$$

e la seguente funzione di valutazione:

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\alpha}\}$$

se in α è vera A, poiché da β non è possibile tornare in α, si ha che:

$$\mathcal{M} \nvDash_{\boldsymbol{\beta}} \Diamond \mathbf{A}$$

ma allora in α sarà falso $\Box \Diamond \mathbf{A}$, falsificando così l'intero schema.

Ricorrendo a queste, ed altre, proprietà, è possibile esprimere l'utilità della logica: attraverso la logica, infatti, è possibile descrivere il comportamento di un certo sistema.

Per descrivere un sistema, infatti, sono normalmente note le caratteristiche che il sistema deve avere o sono note le caratteristiche topologiche del sistema (ad esempio, si sa che ci si può muovere da uno stato all'altro soddisfacendo certe proprietà).

La logica viene utilizzata per verificare che le specifiche o caratteristiche date garantiscano altre proprietà formali se, di fatto, il sistema deve avere e gli schemi come quelli sopra elencati, permettono proprio di verificare subito all'interno del sistema il rispetto di tali proprietà.

4 ottobre 2010

Sistemi di Logica Modale

Si è osservato nella lezione precedente come con il termine **linguaggio proposizionale della logica modale** s'intendesse il linguaggio classico della logica proposizionale arricchito dei due connettivi modali "□ *necessariamente*" e "◊ *possibilmente*" che si è visto essere sostanzialmente non del tutto indipendenti tra di loro, in quanto è possibile ottenere l'uno dall'altro mediante le seguenti proprietà:

- $\Diamond \mathcal{A} \equiv \sim\Box \sim \mathcal{A}$
- $\Box\mathcal{A} \equiv \sim\Diamond\sim \mathcal{A}$

Una volta definito questo linguaggio, ove i connettivi sopra definiti hanno la stessa priorità del connettivo $\sim$; si è cercato di definire una *semantica* per le formule ben formate che si potevano costruire a partire da questo linguaggio; questa semantica è stata definita attraverso il concetto di **frame** , detto anche ***frame standard***, dove un frame è definito come $\boldsymbol{\mathcal{F}} =< \boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathcal{R}} >$, ossia una coppia $\mathcal{S}, \mathcal{R}$, dove $\mathcal{S}$ è un insieme non vuoto dei mondi, mentre $\mathcal{R}$ è una relazione binaria tra gli elementi di $\mathcal{S}$ $(\mathcal{S}\times\mathcal{S})$ detta anche *relazione di raggiungibilità*. Sostanzialmente, dunque, la coppia $< \boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathcal{R}} >$ può essere vista come un grafo orientato, dove $\mathcal{S}$ rappresenta i vertici ed $\mathcal{R}$ rappresenta l'arco che collega i due vertici.

Per dare un significato alla validità, si è in seguito arricchito il frame con una *funzione di validazione*, costruendo i cosiddetti **modelli**, ossia una terna $\boldsymbol{\mathcal{M}} =< \boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}, \boldsymbol{\mathcal{V}} >$, dove $\mathcal{S}\ ed\ \mathcal{R}$ sono i medesimi elementi che compongono il frame, mentre $\mathcal{V}$ è una funzione $\boldsymbol{\mathcal{V}}: \boldsymbol{\Phi} \rightarrow \wp(\boldsymbol{\mathcal{S}})$, ossia una funzione che va dall'insieme delle lettere enunciative (o formule atomiche) Φ all'insieme delle parti dei mondi $\wp(\boldsymbol{\mathcal{S}})$ ed associa quindi ad ogni formula atomica un insieme di mondi.

Avendo questi oggetti, si è stati in grado di definire quando una formula $\mathcal{A}$ è vera in un mondo α di un modello $\mathcal{M}$; per fare ciò si era ricorsi a:

- Un <u>caso base</u> secondo il quale, quando $\mathcal{A}$ è una formula atomica A: $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{A\ sse\ \alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$, ossia nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ A è vera se e soltanto se α appartiene alla valutazione di A.
  La valutazione di A, dunque, può essere vista, dal punto di vista concreto, come la funzione che associa ad ogni formula atomica, l'insieme dei mondi in cui quella formula atomica è vera.
- Tutte le varie definizioni per le formule classiche della logica proposizionale (ad esempio $\mathcal{A}{:}\sim\mathcal{B}$, $\mathcal{A}{:}\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$, $\mathcal{A}{:}\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$, etc.).
  Queste definizioni permettono di affermare che, se si è all'interno di un mondo e si valutano le formule è come se si stesse facendo uso delle tavole di verità dei vari connettivi.
- Definizione di quando una formula del tipo $\Box\mathcal{A}$ o $\Diamond \mathcal{B}$ è vera in un modello $\mathcal{M}$ ed e proprio solo per questo aspetto che è necessario definire più mondi. In particolare, si è ottenuto che:
  - Per la formula $\mathcal{A}{:}\Box\mathcal{B}$: $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \forall\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}},\ \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\beta} \boldsymbol{\mathcal{B}},$ ossia la formula $\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se, per ogni mondo β raggiungibile da α, nel mondo β è vera $\mathcal{B}$.
  - Per la formula $\mathcal{A}$: $\Diamond \mathcal{B}$: $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \exists\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}},\ \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\gamma} \boldsymbol{\mathcal{B}}$, ossia la formula $\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se esiste un mondo γ raggiungibile da α, in cui $\mathcal{B}$ è vera.

A seguito delle definizioni di validità date sopra, è possibile affermare che:

- Una formula è valida in un modello se è vera in tutti i mondi del modello;
- Una formula è valida in un frame se è vera in tutti i modelli costruiti su quel frame.

Una volta definito ciò, si è passati ad analizzare quelle formule valide su tutti i frame; in particolare è importante ricordare la validità su tutti i frame dello **schema K**, ossia $\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Longrightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}})$.

L'ultimo aspetto analizzato nella lezione precedente riguardava quelle formule non valide per tutti i frame, andando ad osservare che vi sono alcune proprietà algebriche della relazione di validità che, in un certo senso, corrispondono alla validità di schemi.

In particolare, si vanno ora a riassumere le proprietà già viste in precedenza:

PROPRIETA'	DEFINIZIONE DELLA RELAZIONE	SCHEMA DEL FRAME
Seriale	$\forall \alpha \in \mathcal{S}, \exists \beta \in \mathcal{S} \mid (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}$ Ossia da ogni mondo α è possibile raggiungere un qualche altro mondo.	$\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Diamond\, \mathcal{A}$
Riflessiva	$\forall \alpha \in \mathcal{S}, \quad (\alpha,\alpha) \in \mathcal{R}$ Ossia l'autoanello sul mondo appartiene alla relazione $\mathcal{R}$ per ogni mondo α	$\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$
Simmetrica	$(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}\ \ implica\ (\beta,\alpha) \in \mathcal{R}$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\,\Diamond\,\mathcal{A}$
Transitiva	$(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}\ e\ (\beta,\gamma) \in \mathcal{R}\, implicano\ (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R}$	$\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

Tutte queste proprietà hanno un certo risvolto concreto, in quanto:

- La *serialità* permette di descrivere l'evoluzione infinita di un sistema;
- La *riflessività* è utile quando si vuole uno stato del sistema in cui è possibile rimanere;
- La *simmetria* serve, ad esempio, nell'ingegneria della conoscenza nel caso cui si vuole esprimere la relazione "$se\ A\ vede\ B\ allora\ B\ vede\ A$" o simil;
- La *transitività* serve ogni qual volta si vuole interpretare il "*necessariamente*" come espressione del futuro, infatti se β è nel futuro di α e γ è nel futuro di β, allora γ è nel futuro di α.

Tuttavia esistono anche altre proprietà di un certo interesse, come le seguenti:

- **proprietà *euclidea***:

  UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **EUCLIDEA** SE $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \boldsymbol{e}\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \boldsymbol{implicano}\ (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ E QUINDI OVVIAMENTE ANCHE $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}, (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ E $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

  Questa proprietà è meno semplice da vedere come proprietà che ha immediatamente un risvolto applicativo, ma si può osservare che, ogni qualvolta si utilizzano la proprietà simmetrica e la proprietà transitiva, si sta utilizzando automaticamente anche la proprietà euclidea e viceversa.

  Questa proprietà, dunque, risulta automaticamente soddisfatta ogni volta che si considera una *relazione di equivalenza*, quindi può essere interessante sapere quale sia lo schema di assiomi che vi corrisponde.

  PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S},\mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **EUCLIDEA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\, \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$

  è possibile osservare come lo schema della simmetria e della transitività insieme diano proprio lo schema sopra citato.

- ***Funzione parziale***:

  UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **FUNZIONE PARZIALE** SE $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \boldsymbol{e}\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \boldsymbol{implicano}\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$

  Ossia non è detto che ad ogni mondo sia associato ad un altro mondo, ma se ad un mondo è associato un altro mondo, allora quest'ultimo mondo è l'unico ad esservi associato.

  Questa proprietà ha senso nel caso in cui si hanno degli stati in cui si vuole descrivere esattamente cosa si avrà subito dopo, in quanto questa definisce un solo successore possibile di uno stato (o non ci si muove da uno stato o sia ha un unico percorso possibile).

  PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S},\mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **FUNZIONE PARZIALE** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$

DIMOSTRAZIONE

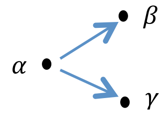
Si supponga che in un mondo α di un modello $\mathcal{M}$ sia vero $\Diamond\,\boldsymbol{\mathcal{A}}$; questo significa che esiste almeno un mondo dopo α in cui è vera $\mathcal{A}$, ossia:

ma il fatto che $\mathcal{R}$ sia una *funzione parziale* implica che il mondo β è l'unico raggiungibile da α, ma se in β è vera $\mathcal{A}$ allora per forza in α è vera anche $\Box\mathcal{A}$, ottenendo quindi in α esattamente lo schema:

$$\Diamond\,\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Come per le proprietà procedenti, anche in questo caso lo schema risulterà falso nel caso in cui il frame non sia funzione parziale, infatti:

supponiamo che la relazione $\mathcal{R}$ di $\mathcal{F}$ non sia una relazione parziale, allora ci sarà un mondo α da cui si raggiungono almeno due mondi.



E si supponga di considerare la seguente funzione di valutazione della formula atomica A:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{\beta}\}$$

allora, ovviamente in α è vera $\Diamond\,\mathcal{A}$, in quanto c'è un mondo raggiungibile da α in cui A è vera (β), ma non è vera $\Box\mathcal{A}$, in quanto $\mathcal{A}$ non è vera in γ è quindi non può essere valida la *necessitazione*.

- ***Funzione***:

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **FUNZIONE** SE $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}, \exists!\, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

Una relazione di questo tipo è contemporaneamente seriale e funzione parziale.

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **FUNZIONE** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Diamond\,\boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$

Si può osservare come lo schema per questo tipo di frame unisca lo schema dei frame seriali con lo schema dei frame aventi come relazione $\mathcal{R}$ una funzione parziale.

- **Proprietà di *densità debole***:
questa proprietà viene utilizzata per indicare il concetto di "*sempre nel futuro*", ossia viene utilizzata per descrivere un tempo in tra due istanti esiste sempre un istante intermedio.

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **DEBOLMENTE DENSA** SE $\forall\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}, \exists \boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \mathbf{e}\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

Ossia esiste sempre uno stato intermedio tra due stati che da uno permette di raggiungere l'altro.

Questo tipo di funzione permette di descrivere un tempo che non sia discreto e quindi corrisponde alla *densità debole* uno schema di assiomi del tipo:

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **DEBOLMENTE DENSA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA $\Diamond\,\boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \Diamond\Diamond\,\boldsymbol{\mathcal{A}}$

- **Proprietà di *debole connessione***:

UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **DEBOLMENTE CONNESSA** SE $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \mathbf{e}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\ \boldsymbol{allora}$:

$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ OPPURE

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$ OPPURE

$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

Questa proprietà, in termini di grafo, indica che se da α si va a β e da α si va a γ e i due stati raggiunti sono diversi tra loro, allora o β è associata a γ o γ è associata a β.

Essa, dunque, permette di esprimere una relazione di *ordine parziale* ed anch'essa corrisponde ad un particolare schema di assiomi:

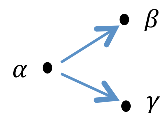
PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **DEBOLMENTE CONNESSA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA
$$\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \vee \Box(\boldsymbol{\mathcal{B}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

- **Proprietà *diretta***:

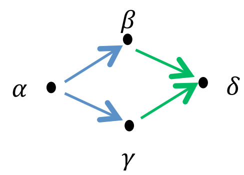
UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU UN INSIEME $\mathcal{S}$ SI DICE **DIRETTA** SE $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ **e** $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ **implicano che** $\exists \boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ **tale che** $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ **e** $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

Per comprendere tale proprietà, si consideri il seguente esempio:

si supponga di essere in uno stato α di un sistema e si hanno due possibili scelte per proseguire nel sistema, come rappresentato a fianco:



questa proprietà garantisce che, qualsiasi sia la strada che si sceglie di percorrere, si raggiungerà sempre un particolare stato (δ). Il sistema di riferimento può dunque essere rappresentato come quello riportato a lato:



Anche a questa proprietà corrisponde un particolare schema di assiomi, ossia:

PER OGNI FRAME $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$ LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ È **DIRETTA** SE E SOLO SE È VALIDO IN $\mathcal{F}$ LO SCHEMA
$$\Diamond \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box \Diamond \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Si sono dunque ottenute delle proprietà (con le relative relazioni) che corrispondono a degli schemi di assiomi; tutte queste proprietà sono esprimibili in logica del primo ordine, ma si ricorre alla logica modale in modo da garantirne la *decidibilità* e ricorrendo, quando possibile, a formule anche maggiormente espressive.

I Sistemi di Logica Modale (Normale)

A questo punto, si vuole anche introdurre un'ampia famiglia di logiche modali dal punto di vista puramente sintattico. Poiché non è detto che ogni logica sia assiomatizzabile in modo efficiente (ovvero con un insieme finito di schemi come assiomi) si ricorrerà al concetto di **teoria logica.**

UNA **TEORIA LOGICA** È UN INSIEME DI FORMULE BEN FORMATE CHE ABBIANO LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

- CONTENGANO TUTTE LE TAUTOLOGIE;
- SIANO CHIUSE RISPETTO AL **MODUS PONENS** $\left(\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\right)$
- SIANO CHIUSE RISPETTO ALLA **SOSTITUZIONE UNIFORME** (CIOÈ SE $\mathcal{A}$ APPARTIENE ALL'INSIEME, ANCHE OGNI FORMULA $\mathcal{A}'$, OTTENUTA DA $\mathcal{A}$ SOSTITUENDO UNIFORMEMENTE CON UNA STESSA FORMULA TUTTE LE OCCORRENZE DI UNA STESSA SOTTOFORMULA ATOMICA DI $\mathcal{A}$, APPARTIENE ALL'INSIEME

Esempio di Sostituzione Uniforme

Se si sa che la formula $\Box \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ è la formula della teoria, dove $\boldsymbol{A}$ è una lettera enunciativa, si può sostituire tale lettera con qualsiasi formula, passando da una formula ad uno schema.

All'interno di questa definizione di *teoria logica* è possibile ritrovare:

- La definizione di logica proposizionale
- La definizione di logica di primo ordine
- Altri insiemi di logica, non maggiormente specificati (ad esempio la *logicaK*, la *logica estensione di K*, etc. che si analizzeranno in seguito)

OGNI ELEMENTO DELLA *TEORIA LOGICA* Λ SI DICE **TEOREMA DELLA TEORIA LOGICA $\boldsymbol{\Lambda}$.**

SI SCRIVERÀ $\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}}$ PER INDICARE CHE $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DA Λ

In realtà, infatti, si vuole arrivare ad affermare che tutte le formule che si possono dimostrare nella teoria, e che ovviamente devono contenere le tautologie, sono teoremi della teoria.

Ciò non è molto diverso da quanto visto in merito alla *Teoria L* ed in particolare è come se si affermasse come "*La Teoria L è l'insieme dei teoremi della teoria*", ossia l'insieme di tutte le tautologie.

Si vuole anche introdurre il concetto di **deducibilità di un formula $\boldsymbol{\mathcal{A}}$** da un insieme di formule Γ nella teoria:

UNA FORMULA $\mathcal{A}$ SI DICE $\boldsymbol{\Lambda - deducibile}$ DA UN INSIEME DI FBF Γ (E SI SCRIVE $\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}$) SE ESISTE UN INSIEME FINITO, EVENTUALMENTE VUOTO, $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$ DI FORMULE DI Γ TALE CHE:

$$\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

(SE N=0, LA FORMULA $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$ È LA FORMULA $\mathcal{A}$)

Ciò non è molto diverso da quando si affermava che da un insieme di formule Γ della teoria L, di poteva dedurre una formula, in quanto, da un certo numero di ipotesi da Γ, unendole tra loro in AND, era possibile ottenere una nuova formula.

La logica su cui si focalizzerà l'attenzione d'ora in avanti è quella che prende il nome di **logica normale:**

UNA LOGICA SI DICE **NORMALE** SE È UNA TEORIA LOGICA MODALE CHE MANIFESTA LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

- CONTIENE LO SCHEMA K ($\boldsymbol{K}$: $\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}})$)
- È CHIUSA RISPETTO ALLA **REGOLA DI NECESSITAZIONE:** $\boldsymbol{RN}$: $\frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}}{\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}}$

La *regola di necessitazione*, in pratica, afferma quanto segue: "*ogni volta che si ha la formula $\mathcal{A}$, la si può riscrivere come $\Box\mathcal{A}$*"; si osservi, inoltre, che interpretando il connettivo "$\Box$" come un "*per ogni*", questa non è altro che la regola di generalizzazione della logica del primo ordine.

Una **logica normale**, dunque, è un insieme di fbf che contiene tutte le tautologie e lo schema K ed è chiusa rispetto:

- Modus Ponens (MP);
- Regola di necessitazione (RN);
- Sostituzioni uniformi,

Considerando quindi due logiche normali, cioè due insiemi caratterizzati come specificato sopra, la loro **intersezione** mantiene queste proprietà, e quindi risulta a sua volta una logica normale.

Pertanto, intersecando tutte le logiche normali, si ottiene una logica normale che è la più piccola di tutte; si può quindi affermare che: *esiste sempre una minima logica normale che è l'intersezione di tutte le logiche normali.* Verrà indicata in seguito tale logica con **K** (in quanto risulta molto simile allo schema omonimo).

La **minima logica normale K** è una logica assiomatizzabile come segue:

- Ha come assiomi gli schemi:
  - $A1$: $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
  - $A2$: $\big(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow \big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})\big)$
  - $A3$: $(\sim \mathcal{A} \Rightarrow \sim \mathcal{B}) \Rightarrow \big((\sim \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}\big)$
  - K: $\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B})$
- Ha come regole di inferenza:
  - Modus ponens (MP),
  - Regola di necessitazione (RN)

Se si considera una teoria logica che ha questi schemi di assiomi e che ha come regole d'inferenza MP e RN, allora si ha una teoria logica normale che è la più piccola logica normale, infatti:

- La presenza dei 3 schemi A1, A2 e A3, insieme al MP, garantisce che tutti i teoremi della teoria siano tautologie e tutte le tautologie sono teoremi della teoria; la teoria logica normale K, dunque, contiene sicuramente tutte le tautologie;
- La teoria logica normale è sicuramente chiusa rispetto al MP, in quanto, date due formule, è sempre possibile utilizzare la regola di riscrittura $\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\mathcal{B}}$;
- La teoria logica normale è sicuramente chiusa rispetto alle sostituzioni uniformi, in quanto risulta implicitamente espressa nell'aver scritto tutti gli schemi di assiomi utilizzando le formule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ che non sono formule particolari, ma sono una qualsiasi fbf;
- La teoria logica normale contiene lo schema K, perché esplicitamente espresso dalla definizione di "*teoria logica normale*"
- La teoria logica normale è chiusa rispetto a RN perché anch'esso è esplicitamente espresso dalla definizione.

La *minima logica normale K*, quindi, ha tutte le caratteristiche richieste da una *logica normale*; lo **logica K**, può dunque essere vista come una logica ben assiomatizzata che rientra nella classe in analisi e, come conseguenza, tutte le logiche normali vengono dette "**logiche estensioni-di-K**"

Ora si vorrebbe generare, per le logiche normali, un meccanismo che permetta di affermare "*tutti e soli i teoremi delle logiche estensioni-di-K sono formule vere in un modello particolare*"; bisognerà dunque costruirsi questo modello particolare, in modo da aggiungere a questa descrizione -puramente sintattica- una descrizione semantica, ossia un modello particolare della teoria che sarà un *modello standard*.

Per costruire un modello standard bisogna definire l'insieme dei mondi, la relazione di raggiungibilità e la funzione di valutazione, il tutto a partire semplicemente da formule.

Il Modello Canonico

È noto che un <u>*mondo*</u> sia un punto del grafo, ma in un mondo ci sono un insieme di formule che sono vere, quindi un mondo può essere assimilato ad un insieme di formule, ossia l'insieme di formule che sono vere in quel mondo.

Si può dunque pensare di costruire un modello i cui mondi sono sottoinsiemi di tutte le formule vere del linguaggio; tuttavia non tutti i sottoinsiemi di formule vere in un punto sono corretti come mondo, in quanto le formule vere in mondo hanno qualche proprietà particolare.

Si può, ad esempio, notare che se si hanno le formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ vere in un punto, allor anche $\mathcal{B}$ è vera in quel punto ed esistono molte altre proprietà simili a questa.

Si necessita, dunque, di andare un po' a caratterizzare l'entità "*mondo*" fornendo alcune importanti *definizioni:*

> DATA LA TEORIA LOGICA Λ, UN INSIEME DI FORMULE Γ SI DICE **Λ-CONSISTENTE** SE $\boldsymbol{\Gamma} \nvdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \perp$,
> DOVE $\perp$È UN'ABBREVIAZIONE DI $\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{A}$ ($\perp$ INDICA QUINDI UNA FORMULA SEMPRE FALSA).
> UNA LOGICA SI DICE CONSISTENTE SE $\perp$ NON È UN TEOREMA DELLA TEORIA DI Λ

In pratica, dunque, si può affermare che un sottoinsieme Γ di fbf è $\Lambda - consistente$ se, all'interno della teoria Λ, partendo da un elemento di Γ non è possibile ricavare il falso, ossia:
se non è possibile ricavare il falso da Γ $(\boldsymbol{\Gamma} \nvdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \perp)$, significa che non esistono in Γ delle formule $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}_3}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{B}_n}$ tali per cui sia un teorema di Λ $\boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_3} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_n} \Longrightarrow \perp$. In formula:

$$\boldsymbol{\Gamma} \nvdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \perp \quad \boldsymbol{sse} \quad \nexists\ \boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}_3}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{B}_n} \in \boldsymbol{\Gamma} \mid \vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_3} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_n} \Longrightarrow \perp$$

<u>La consistenza di un insieme di formule dipende dalla logica Λ in cui si lavora</u>.

<u>**Esempio**</u>

Si consideri la logica contenente i 3 assiomi A1, A2 E A3 e che abbia come regola d'inferenza MP; questa è una *teoria logica.*

Si consideri il seguente insieme di formule $\Gamma: \{\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}), \Box\mathcal{A}, \sim \Box\mathcal{B}\}$.

Questo insieme è consistente nella teoria definita inizialmente, tant'è che è possibile combinare le formule tra loro senza ottenere possibili valori falsi

Lo stesso insieme Γ, però, non è più consistente nella logica K, in quanto si ha in K la seguente deduzione di $\Box\mathcal{B}$ da Γ:

1. $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B})$ perché appartiene a Γ;
2. $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B})$ è lo schema K;
3. $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$ applicando MP tra 1. e 2.
4. $\Box\mathcal{A}$ perché appartiene a Γ;
5. $\Box\mathcal{B}$ applicando MP tra 3. e 4.

Ma $\Box\mathcal{B}$ con la formula $\sim \Box\mathcal{B}$ presente in Γ porta alla non consistenza di Γ stesso.

Si è dunque dimostrato che un insieme varia la propria consistenza in base alla logica di riferimento; per questo motivo si parla di $\Lambda - consistenza$, in quanto serve obbligatoriamente un contesto di riferimento e se questo viene cambiato, ciò che prima era consistente potrebbe perdere la sua consistenza.

> DATA LA TEORIA LOGICA Λ, UN INSIEME DI FORMULE Δ SI DICE **Λ-MASSIMALE** SE:
> - È $\Lambda - consistente;$
> - $\forall\mathcal{A},\ \mathcal{A}\ o\ \sim \mathcal{A}$ (ED UNA SOLA DI LORO) APPARTIENE A Δ

Si dice che l'insieme Δ è $\Lambda - massimale$, in quanto, se ci si aggiungesse una qualche formula, indipendentemente da quale essa sia, si andrebbe a perdere la consistenza; prendendo la formula $\mathcal{B}$ non appartenente a Δ ed aggiungendola a quest'ultimo, infatti, poiché se $\mathcal{B} \notin \Delta$ allora $\sim \mathcal{B} \in \Delta$, Δ non sarebbe più consistente.

L'insieme Δ risulta quindi *massimale* rispetto alla consistenza.

Ritornando all'elaborazione del modello standard, dunque, si possono fare le seguenti osservazioni:

- Gli insiemi associati al punto (inteso come mondo) possono essere identificati come un insieme di formule ben formate che è $\Lambda - massimale$, infatti:
    - Per definizione, il falso non può appartenere ad un punto;
    - Il falso non è ottenibile dalle formule appartenenti al punto, perché si è detto che questo è chiuso rispetto al MP
    - Dalle due precedenti si può affermare con certezza che l'insieme di formule associate al punto è $\Lambda - consistente$
    - Qualunque formula si consideri, o questa è vera nel punto, oppure è vera la sua negazione.

  Partendo dalla teoria, dunque, si vuole andare a costruire un modello della teoria e per costruirlo è possibile prendere gli insiemi $\Lambda - massimali$ e chiamarli "*mondi del modello*". Questi insiemi, infatti, risultano dei buoni candidati per la costruzione del modello.

  > **N.B.** la $\Lambda - massimalità$ implica la $\Lambda - consistenza$, ma la $\Lambda - consistenza$ non implica la $\Lambda - massimalità$

- Definiti gli insiemi $\Lambda - massimali$ come buoni candidati a diventare *mondi* del modello in costruzione, viene ora da chiedersi se effettivamente esistono degli insiemi $\Lambda - massimali$, per ogni possibile logica Λ.
  Data una qualunque logica Λ che sia consistente (ossia il falso non dev'essere teorema della teoria [$\nvdash_{\Lambda} \bot$]), quindi, si vuole dimostrare che esistono degli insiemi $\Lambda - massimali$, al fine di poter affermare che sia effettivamente possibile costruire un modello avente come mondi degli insiemi $\Lambda - massimali$.

  Per poter dimostrare ciò, è necessario enunciare una serie di **proprietà** degli insiemi $\boldsymbol{\Lambda - consistenti}$:
    - *Se $\mathcal{A}$ è una formula deducibile da Γ e Γ è un sottoinsieme dell'insieme Δ, allora $\mathcal{A}$ è deducibile da Δ*

      $$\boldsymbol{se \quad \Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A} \ e \quad \Gamma \subseteq \Delta \quad allora \quad \Delta \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}}$$

      Infatti è noto che $\boldsymbol{\Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}}$ se esistono alcune formule $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \in \Gamma$ tali che $\vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ (ossia $\boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ è un teorema della teoria Λ).
      Ma se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \in \Gamma$, a maggior ragione si può affermare che $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \in \Delta$ e quindi si è ottenuto un insieme di formule di Δ da cui si può partire.

    - *Se una logica Λ' è un'estensione di una logica Λ, allora tutto ciò che si può dedurre da Γ in Λ, lo si può anche dedurre da Γ in Λ'*

      $$\boldsymbol{se \ \Lambda' \supseteq \Lambda \ allora \quad \Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A} \ implica \quad \Gamma \vdash_{\Lambda'} \mathcal{A}}$$

      Infatti dire $\boldsymbol{\Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}}$ significa che $\mathcal{A}$ è raggiungibile da Λ, ma poiché Λ' è più grande, allora $\mathcal{A}$ è anche un teorema di Λ' ($\boldsymbol{\Gamma \vdash_{\Lambda'} \mathcal{A}}$).

    - *Se $\mathcal{A}$ appartiene a Γ, allora, qualsiasi sia la logica Λ, in Λ si può dedurre $\mathcal{A}$ da Γ.*

      $$\boldsymbol{se \quad \mathcal{A} \in \Gamma \quad \text{allora} \quad \Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}\,, \ \forall \Lambda}$$

    - *L'insieme delle formule $\mathcal{A}$ tale che da Γ è possibile dedurre in Λ $\mathcal{A}$, è la minima logica che contiene $\Gamma \cup \Lambda$.*

      $$\{\boldsymbol{\mathcal{A}} \mid \boldsymbol{\Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}}\} \text{ è } \boldsymbol{la\ minima\ logica\ contenente\ \Gamma \cup \Lambda}$$

$\Gamma \cup \Lambda$, infatti, è un insieme di fbf e quindi se si considera la minima logica (ossia il minimo insieme di teoremi) chiuso rispetto a MP e rispetto alla sostituzione uniforme, che contenga tutte le tautologie e tutte le formule di $\Gamma \cup \Lambda$, allora si trovano esattamente tutte le formule che sono deducibili in Λ da Γ.

- Γ *è* $\Lambda - consistente$ *se e solo se esiste una formula* $\mathcal{B}$ *tale che da* Γ *non è deducibile in* Λ

$$\boldsymbol{\Gamma \text{ è } \Lambda - consistente\ sse\ \exists \mathcal{B} \mid \Gamma \nvdash_{\Lambda} \mathcal{B}}$$

Se Γ è $\Lambda - consistente$, questa formula $\mathcal{B}$ esiste sempre, infatti è $\perp$, che non può essere mai deducibile da un insieme di formule $\Lambda - consistente$.
Viceversa, se esiste una formula che non è deducibile in Λ da Γ, allora Γ è $\Lambda - consistente$.

DIMOSTRAZIONE

Si considerino:

- ***Hp:*** $\exists \mathcal{B} \mid \Gamma \nvdash_{\Lambda} \mathcal{B}$
- ***Ts:*** $\boldsymbol{\Gamma} \nvdash_{\Lambda} \perp$

Procedendo per assurdo, si supponga che il falso sia deducibile da Γ in Λ

$$\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{\Lambda} \perp$$

esistono delle formule $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ appartenenti a Γ, tali per cui $\boldsymbol{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_m} \Rightarrow \perp$ è un teorema di Λ

$$\exists\, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \in \Gamma \ \ tali\ che$$
$$\vdash_{\Lambda} \ \boldsymbol{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_m} \Rightarrow \perp$$

Ma se $\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{\Lambda} \perp$ allora $\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una tautologia ed essendo una tautologia, è anche un teorema di Λ, ossia:

$$\vdash_{\Lambda} \ \perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Definendo ora $\boldsymbol{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_m = \mathcal{C}}$, si può affermare che anche la seguente formula è una tautologia:

$$\vDash \ (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \perp) \Rightarrow \big((\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})\big)$$

per non essere una tautologia dovrebbe valere 0 in qualche occasione, in particolare dovrebbe valere 1 l'antecedente $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \perp)$ e 0 il conseguente $\big((\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})\big)$:

- Perché $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \perp)$ valga 1, $\mathcal{C}$ deve per forza valere 0 (visto che $\perp$ è sempre 0);
- Perché $\big((\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})\big)$ valga 0, l'antecedente $(\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$ deve valere 1 ed il conseguente $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$ deve valere 0, ma è già stato definito che $\mathcal{C}$ vale 0, quindi $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$ non può mai valere 0;

dunque la formula iniziale è necessariamente una tautologia.

essendo la relazione di prima una tautologia, allora si può affermare che sia teorema di Λ:

$$\vdash_{\Lambda} \ (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \perp) \Rightarrow \big((\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})\big)$$

si è già osservato che $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \perp)$ è un teorema di Λ ($\vdash_{\Lambda} \ \boldsymbol{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_m} \Rightarrow \perp$), ma allora, poiché Λ è chiuso rispetto al MP, si può affermare che anche il conseguente è teorema di Λ :

$$\vdash_{\Lambda} \ (\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$$

allo stesso modo, è già stato detto in precedenza che $(\perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$ è un teorema di Λ ($\vdash_{\Lambda} \ \perp \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$) e, sempre poiché Λ è chiuso rispetto al MP, si può affermare che anche $(\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$ è teorema di Λ:

$$\vdash_{\Lambda} \ (\boldsymbol{\mathcal{C}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}})$$

è noto che $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$, quindi si è ottenuto un insieme finito di formule di Γ, tale che:

$$\vdash_\Lambda \ (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \Rightarrow \mathcal{B})$$

ossia si è dedotto $\mathcal{B}$ da Γ, contro l'ipotesi iniziale.

- *Da un insieme Γ si deduce $\mathcal{A}$ in una qualsiasi logica Λ se e soltanto se $\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\}$ non è $\Lambda - consistente$*

$$\boldsymbol{\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A} \ \ sse \ \ \Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\}\ non\ è\ \Lambda - consistente}$$

DIMOSTRAZIONE

Si considerino:

- ***Hp:*** $\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$
- ***Ts:*** $\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\} \vdash_\Lambda \perp$ *(non è consistente)*

Procedendo per assurdo, si supponga che:

$$\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\} \vdash_\Lambda \mathcal{A}$$

Ma da un insieme è possibile ricavare qualsiasi delle sue formule, quindi si può affermare che:

$$\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\} \vdash_\Lambda \sim \mathcal{A}$$

ma deducendo sia $\mathcal{A}$ che $\sim \mathcal{A}$ si deduce il falso, andando quindi contro la definizione di $\Lambda - consistenza$.

(Ci sarebbe anche la dimostrazione con Hp e Ts invertite…ma non è chiaro! ☹)

Ritornando allo studio degli insiemi $\boldsymbol{\Lambda - massimali}$, si possono enunciare le seguenti proprietà:

- *Se Δ è $\Lambda - massimale$ e da Δ, in Λ, si deduce formula $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}$ appartiene a Δ.*

$$\boldsymbol{Dato\ \Delta\ ,\ \ \Lambda - massimale, se\ \Delta \vdash_\Lambda \mathcal{A}, allora\ \mathcal{A} \in \Delta}$$

DIMOSTRAZIONE

Si supponga, per assurdo, che:

$$\mathcal{A} \notin \Delta$$

ma, per definizione di insieme $\Lambda - massimale$, si può affermare che:

$$\sim \mathcal{A} \in \Delta$$

e quindi da Δ, in Λ, è possibile dedurre $\sim \mathcal{A}$, ossia:

$$\Delta \vdash_\Lambda \sim \mathcal{A}$$

ma, poichè per ipotesi si ha che $\boldsymbol{\Delta \vdash_\Lambda \mathcal{A}}$, si ha allora che da Δ, in Λ, si può dedurre sia $\mathcal{A}$ che $\sim \mathcal{A}$, ossia:

$$\Delta \ \vdash_\Lambda \ \perp$$

ma ciò va contro l'ipotesi della consistenza insita nella definizione di insiemi $\Lambda - massimali$.

L'insieme $\Lambda - massimale$ risulta quindi chiuso rispetto alle deduzione, in quanto contiene tutte la formule da esso deducibili.

- *Se Δ è $\Lambda - massimale$ allora la logica Λ è contenuta in ogni suo insieme $\Lambda - massimale$*

Dato $\boldsymbol{\Delta}$, $\quad \boldsymbol{\Lambda - massimale}$, $\quad \boldsymbol{\Lambda \subseteq \Delta}$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{A} \in \Lambda$, ossia $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ, quindi: $\qquad \vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

essendo un teorema di Λ, $\mathcal{A}$ è deducibile da Δ in Λ, ossia: $\qquad \boldsymbol{\Delta \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}}$

e quindi $\mathcal{A}$ appartiene anche a Δ: $\qquad \boldsymbol{\mathcal{A} \in \Delta}$

quindi ogni formula che appartiene a Λ appartiene anche a Δ.

Gli insiemi $\Lambda - massimali$, dunque, sono dei sovrainsiemi della logica, cioè non contengono solo i teoremi, ma anche qualche altro elemento.

Ricorrendo alle proprietà degli insiemi $\Lambda - consistenti$ e $\Lambda - massimali$ elencate sopra, è ora possibile andare a dimostrare un importante lemma, detto **lemma di Lindenbaum**

SE L'INSIEME Γ È $\Lambda - consistente$, ALLORA ESISTE UN Δ, $\Lambda - massimale$, TALE CHE Γ È CONTENUTO IN Δ

$\boldsymbol{Se\ \Gamma}$ È $\boldsymbol{\Lambda - consistente, allora\ \exists \Delta, \Lambda - \mathbf{massimale},\ tale\ che\ \Gamma \subseteq \Delta}$

Ricordando che l'obiettivo che ci si era proposti inizialmente consiste nel dimostrare che esiste almeno un insieme $\Lambda - massimale$ per ogni logica Λ, questo teorema permette di affermare ciò in base al seguente ragionamento:
poiché un insieme $\Lambda - consistente$esiste (basta considerare una singola lettera enunciativa in una logica consistente), allora è possibile arricchirlo facendolo diventare $\Lambda - massimale$, quindi esiste anche un insieme $\Lambda - massimale$.

Formalmente…

DIMOSTRAZIONE

Si sa che Γ è, per ipotesi, $\Lambda - consistente$ e si definisce un mondo Δ_0 pari a Γ $\qquad \boldsymbol{\Gamma}$ è $\boldsymbol{\Lambda - consistente} \qquad \boldsymbol{\Delta_0 = \Gamma}$

Si prendono tutte le formule del linguaggio, di infinità numerabile, e le si elencano, ottenendo: $\qquad \boldsymbol{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n}$

si definisce ora Δ_1 come segue:

$$\boldsymbol{\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_0 \cup \{\mathcal{B}_1\} & se \quad \Delta_0 \vdash_{\Lambda} \mathcal{B}_1 \\ \Delta_0 \cup \{\sim \mathcal{B}_1\} & altrimenti \end{cases}}$$

per come definito, si può affermare che Δ_1 è a sua volta $\Lambda - consistente$; infatti:

si supponga che Δ_1 non sia $\Lambda - consistente$, allora, nel caso in cui $\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\mathcal{B}_1\}$, per quanto visto in precedenza, è noto che un insieme Γ unito ad una formula $\mathcal{A}$ ($\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$) non è $\Lambda - consistente$ se e soltanto se da Γ è possibile ricavare la negazione della formula ($\Gamma \vdash_{\Lambda} \sim \mathcal{A}$), quindi, nel caso in analisi, Δ_1 sarebbe inconsistente solo se da Δ_0 fosse deducibile $\sim \mathcal{B}_1$, ma allora si potrebbe prendere direttamente $\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\sim \mathcal{B}_1\}$

Viceversa, nel caso in cui $\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\sim \mathcal{B}_1\}$, Δ_1 sarebbe inconsistente solo se da Δ_0 fosse deducibile $\mathcal{B}_1$, ma allora si prenderebbe direttamente $\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\mathcal{B}_1\}$.

Quindi, ricorrendo a questa definizione, Δ_1 sarà sempre $\Lambda - consistente$.

In generale, quindi, reiterando il procedimento mostrato sopra, si può affermare che:

$$\boldsymbol{\Delta_i} = \begin{cases} \boldsymbol{\Delta_{i-1}} \cup \{\boldsymbol{\mathcal{B}_i}\} & \boldsymbol{se} \;\; \boldsymbol{\Delta_{i-1}} \vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{B}_i} \\ \boldsymbol{\Delta_{i-1}} \cup \{\sim \boldsymbol{\mathcal{B}_i}\} & \boldsymbol{altrimenti} \end{cases}$$

Per la stessa ragione mostrata sopra, così facendo si costruiscono un'infinità di mondi che sono tutti $\Lambda - consistenti$ e si considera come Δ l'insieme dato dall'unione di tutti i Δ_i ($\boldsymbol{\Delta} = \bigcup \boldsymbol{\Delta_i}$).

L'insieme ottenuto Δ è tale per cui, per ogni formula, contiene o la formula stessa o la sua negazione (per costruzione) ed è a sua volta $\Lambda - consistente$, perché se così non fosse significherebbe che da Δ sarebbe possibile ricavare il falso, ossia esisterebbero delle formule $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ da cui è possibile, in Λ, ricavare il falso.

Ma queste formule appartengono ancora all'insieme di partenza $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_2}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{B}_n}$, in quanto si era detto che esso rappresentava tutte le formule del linguaggio e quindi ammettere l'esistenza di $\vdash_\Lambda \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$, significherebbe affermare che esiste un qualche Δ_h inconsistente.

Ma questo è assurdo, in quanto è stato dimostrato sopra che ogni Δ_i è $\Lambda - consistente$, quindi necessariamente si può affermare che l'insieme $\boldsymbol{\Delta} = \bigcup \boldsymbol{\Delta_i}$ **è** $\boldsymbol{\Lambda - consistente}$.

L'insieme Δ, inoltre, per ogni formula, contiene la formula stessa o la sua negazione, quindi è anche $\Lambda - \boldsymbol{massimale.}$

Per come è stata costruita la dimostrazione, sembrerebbe che per un dato Γ esista un solo $\Lambda - massimale$ che lo contiene; in realtà non è così, in quanto è sufficiente cambiare l'enumerazione delle formule per ottenere dei diversi insiemi $\Lambda - massimali$.

Si è quindi riusciti a dimostrare che esistono degli insiemi $\Lambda - massimali$, per ogni possibile logica Λ, ossia è possibile che i migliori candidati ad essere mondi del modello esistono.

E' dunque possibile pensare, per ogni logica Λ, di costruire un **modello canonico** così definito:

SIA Λ UNA LOGICA NORMALE (CONSISTENTE); SI DICE **MODELLO CANONICO** DI Λ UN MODELLO $\mathcal{M}^\Lambda$ COSÌ COSTRUITO:

$$\mathcal{M}^\Lambda = (\mathcal{S}^\Lambda, \mathcal{R}^\Lambda, \mathcal{V}^\Lambda)$$

DOVE:

- $\mathcal{S}^\Lambda = \{\alpha \mid \alpha \text{ è } \Lambda - massimale\}$;
- $\mathcal{R}^\Lambda : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^\Lambda \; sse \; \{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A} \in \alpha\} \subseteq \beta$
- $\mathcal{V}^\Lambda(A) = \{\alpha \in \mathcal{S}^\Lambda \mid A \in \alpha\} \; per\ ogni\ formula\ atomica\ A$

In particolare, si può osservare che:

- $\mathcal{S}^\Lambda$ è l'insieme dei mondi composti da tutti gli α tali che α è un insieme $\Lambda - massimale$;
- Due insieme di formule α e β appartengono a $\mathcal{R}^\Lambda$ se e solo se l'insieme di tutte le formule $\mathcal{A}$, tale che $\Box\mathcal{A}$ appartiene ad α, appartiene a β.
  Benchè possa sembrare una definizione particolare di *relazione di raggiungibilità*, rispetto a quella data fino ad ora, in realtà non v'è molta differenza rispetto a quella usata in precedenza, infatti:
  l'obiettivo è quello di costruire un modello in cui ogni mondo è composto dalle formule vere in quel mondo; affermando che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$ è come affermare che $\Box\mathcal{A}$ è vera nel mondo α.
  È noto però che, per definizione del connettivo modale "$\Box$", $\Box\mathcal{A}$ è vera in un mondo α se e solo se $\mathcal{A}$ è vera in tutti i mondi raggiungibili da α, ossia se appartiene a tutti i mondi raggiungibili da α.
  Ma questo è esattamente quanto espresso dalla definizione di $\mathcal{R}^\Lambda$: un mondo β è raggiungibile da un mondo α (quindi $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^\Lambda$) se e solo se, dato un insieme di formule $\mathcal{A}$ per cui $\Box\mathcal{A}$ è vera in α, allora $\mathcal{A}$ è vera in β.
- $\mathcal{V}^\Lambda(A)$ è la funzione di valutazione; come nei casi precedenti, essa è esprimibile come $\boldsymbol{\mathcal{V}^\Lambda} : \boldsymbol{\Phi} \rightarrow \wp(\boldsymbol{\mathcal{S}^\Lambda})$, ossia una funzione che va dall'insieme delle formule atomiche all'insieme delle parti dei mondi. Si può quindi affermare che un mondo α appartiene alla valutazione di una formula atomica A $\left(\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{V}^\Lambda}(\boldsymbol{A})\right)$ se e solo se la formula atomica A appartiene al mondo α $(\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\alpha})$.

Ecco dunque il modello che ci si era preposti di costruire in partenza; quello che ora si vuole andare a dimostrare è che il modello così costruito è davvero un "*modello*" vero e proprio della logica modale, ossia che un teorema della logica modale normale è tale se e soltanto se la formula è vera nel modello canonico della logica in analisi.

Per prima cosa, si può osservare che la funzione di verità non è valutabile nel modello costruito sopra, in quanto ci sono infiniti possibili insiemi $\Lambda - massimali$, piuttosto che infinite formule impossibili da elencare; il modello così ottenuto, quindi, è corretto da un punto di vista puramente teorico, ma sarà necessario cercare un accomodamento per il suo utilizzo in pratica.

Per poter proseguire con la dimostrazione di quanto espresso sopra, però, è necessario andare ad introdurre un altro **teorema** che si serve di una definizione equivalente di *logica normale*. In particolare, fino ad ora si è detto che:

Una logica Λ è una logica normale se:
- *È una logica,*
- *Contiene lo schema K*
- *È chiusa rispetto alla regola di necessitazione (RN)*

Il teorema che si va ad enunciare, invece, dichiara quanto segue:

SIA Λ UNA LOGICA, ALLORA SONO EQUIVALENTI LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

1. Λ È NORMALE;
2. SE È UN TEOREMA DI Λ $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$, ALLORA È UN TEOREMA DI Λ ANCHE $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$
   (**SE** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ **ALLORA** $\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \ldots \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$)
3. VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:
   a. NECESSARIAMENTE IL VERO È UN TEOREMA DI Λ
      ($\vdash_\Lambda \boldsymbol{T}$);
   b. LO SCHEMA $\Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B} \Longrightarrow \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ È UN TEOREMA DI Λ
      ($\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}})$);
   c. SE $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ È UN TEOREMA DI Λ, ALLORA È UN TEOREMA DI Λ ANCHE $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$
      (**SE** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ **ALLORA** $\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$)

Quanto scritto sopra sono tutte definizioni equivalenti di *logica normale* e per dimostrare che un teorema della logica modale normale è tale se e soltanto se la formula è vera nel modello canonico della logica in analisi sarà importante riuscire a passare da una definizione all'altra.

DIMOSTRAZIONE

1. implica 2.

Si procede per induzione su n:

Caso Base: $n = 0$

Se $n = 0$, allora $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ $\qquad \vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Ma se $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ, per la RN (proprietà insita nel fatto che Λ è normale per ipotesi), allora si può affermare che anche $\Box\mathcal{A}$ è teorema di Λ $\qquad \vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$

E quindi si è dimostrato il teorema nel caso base

Ipotesi di induzione: si supponga che il teorema valga per $n-1$ e che sia $\vdash_\Lambda \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$

$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$ è equivalente a $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \Longrightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A})$, ma questa formula è una tautologia, quindi si può affermare che:

$$\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \Longrightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A})}$$

<u>Dimostrazione del fatto che la formula sopra sia una tautologia:</u>

per valere 0 la formula deve succedere che:

- $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{n-1}$ vale 1
- $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$ vale 0

Ma perché il conseguente valga 0 deve succedere che:

- $\mathcal{A}_n$ vale 1
- $\mathcal{A}$ vale 0

Ma se $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{n-1}$ vale 1 ed anche $\mathcal{A}_n$ vale 1, per ipotesi le ipotesi d'induzione è impossibile che $\mathcal{A}$ valga 0

Per ipotesi d'induzione, è noto che il teorema vale per $n-1$ e la formula ottenuta ha come antecedente l'AND di $n-1$ formule, quindi si può affermare che:

$$\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_{n-1}} \Longrightarrow \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

ma la logica Λ è, per ipotesi, normale, quindi contiene lo schema K che può essere qui espresso come:

$$\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}) \Longrightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}})$$

ma è noto che una formula del tipo $(\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \Longrightarrow ((\mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{D}) \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{D}))$ è una tautologia, quindi è un teorema di Λ, e che $se \left.\begin{matrix}\vdash_\Lambda \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \\ \vdash_\Lambda \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}\end{matrix}\right\} allora \vdash_\Lambda \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{D}$, quindi nel caso in analisi si può dedurre che:

DEFINENDO:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}: \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_{n-1}}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}: \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}: \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ALLORA :

$$\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_{n-1}} \Longrightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}})$$

ma $\Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \Box\mathcal{A}_{n-1} \Longrightarrow (\Box\mathcal{A}_n \Longrightarrow \Box\mathcal{A})$ è equivalente a $\Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \Box\mathcal{A}_{n-1} \wedge \Box\mathcal{A}_n \Longrightarrow \Box\mathcal{A}$, la quale è a sua volta una tautologia, quindi si ottiene che:

$$\vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

risulta quindi dimostrato che 1. Implica 2.

<u>2. implica 1.</u>

Si procede sempre per induzione su n.

Caso Base: $n = 0$

Se $n = 0$, allora la logica è chiusa rispetto alla RN, infatti si ottiene:

$$\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Ipotesi di induzione: si consideri la formula $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ che è una tautologia e quindi teorema di Λ ($\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}}$ $(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$).

La formula dell'ipotesi di induzione, può essere espressa con la definizione 2. con $n = 2$, dove:

- $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$
- $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

E quindi per la proprietà 2. Si ottiene:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

ma questo equivale a dire che:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}})$$

ma quanto ottenuto è esattamente lo schema K, quindi risulta dimostrato che Λ è normale.

<u>1. implica 3.</u>

1° proprietà:

Supponendo che sia valida la 1. Si ha ovviamente che:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{T} \ perch\grave{e}\ \Lambda\ contiene\ tutte\ le\ tautologie$$
$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \Box\boldsymbol{T}\ perch\grave{e}\ \Lambda\ \grave{e}\ normale\ e\ quindi\ chiusa\ rispetto\ RN$$

la 1° proprietà risulta quindi dimostrata.

2° proprietà:

poiché è già stato dimostrato che 1. implica 2. , la seconda proprietà si deduce direttamente dal fatto che:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$perch\grave{e}\ \grave{e}\ una\ tautologia$$

allora, utilizzando la proprietà 2 con $n = 2$ ed indicando come:

- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

Si ottiene:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}_2} \Rightarrow \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}})$$

e questa è già stata dimostrata in 1. Implica 2.

3° proprietà:

si ricava direttamente dalla 2° proprietà, prendendo n=1, infatti definendo:

- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Si ottiene:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}\ \boldsymbol{implica}\ \ \vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

<u>3. implica 1.</u>

Per dimostrare, partendo dalla 3., che è valida la 1. bisogna riuscire a dimostrare che Λ è chiusa rispetto ad RN e contiene lo schema K.

Chiusura rispetto ad RN

È noto che la formula $\mathcal{A} \Rightarrow (T \Rightarrow \mathcal{A})$ è un teorema di Λ in quanto è una tautologia, quindi:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow (\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

supponendo di sapere che $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ ($\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\mathcal{A}}$), per MP si può ottenere dalla formula sopra che:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} (\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

ma per la 3° proprietà della 3., essendo questa un teorema di Λ, si può affermare che è anche teorema di Λ $\Box\boldsymbol{T} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$$\vdash_{\boldsymbol{\Lambda}} (\Box\boldsymbol{T} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}})$$

Usando ora la 1° proprietà della 3., si ottiene che: $\vdash_{\Lambda} \Box \boldsymbol{T}$

Ma allora, per la chiusura di Λ rispetto al MP, si ottiene che anche $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è teorema di Λ: $\vdash_{\Lambda} \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$

Si è dunque ottenuto che se $\vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}$, allora anche $\vdash_{\Lambda} \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e quindi si è riusciti a dimostrare la logica Λ è chiusa rispetto alla regola di necessitazione.

Presenza in Λ dello schema di assiomi K

È noto che la formula $(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ è un teorema di Λ in quanto è una tautologia, quindi: $\vdash_{\Lambda} (\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$

ma per la 2° proprietà della 3., allora, si ottiene che è un teorema di Λ anche $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \wedge \Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$: $\vdash_{\Lambda} \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

ma questa formula è equivalente alla formula $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B})$ che è a sua volta un teorema di Λ. $\vdash_{\Lambda} \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Longrightarrow (\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{B}})$

Ma quanto ottenuto non è altro che lo schema K, quindi risulta dimostrata anche questa proprietà.

11 ottobre 2010

Il Modello Canonico

Nella lezione precedente si è enunciato e dimostrata la validità del seguente teorema:

SIA Λ UNA LOGICA, ALLORA SONO EQUIVALENTI LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

1. Λ È NORMALE;
2. SE È UN TEOREMA DI Λ $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$, ALLORA È UN TEOREMA DI Λ ANCHE $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}$
   (**SE** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}}$ **ALLORA** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \Box\mathcal{A}_n \Longrightarrow \Box\mathcal{A}}$)
3. VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:
   a. NECESSARIAMENTE IL VERO È UN TEOREMA DI Λ
      ($\vdash_\Lambda \boldsymbol{T}$);
   b. LO SCHEMA $\Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B} \Longrightarrow \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ È UN TEOREMA DI Λ
      ($\vdash_\Lambda \boldsymbol{\Box\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{B} \Longrightarrow \Box(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}$);
   c. SE $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ È UN TEOREMA DI Λ, ALLORA È UN TEOREMA DI Λ ANCHE $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}$
      (**SE** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}}$ **ALLORA** $\vdash_\Lambda \boldsymbol{\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B}}$)

Partendo dagli schemi evidenziati si otterranno in seguito delle considerazioni sul fatto che la *semantica dei mondi possibili* non sempre è adatta, benchè vada molto spesso bene. Essa, infatti, rappresenta molte realtà che si vogliono descrivere, ma non è sempre corretta, in quanto nella clausola "necessariamente ($\Box$) " si vogliono spesso avere svariati significati.

Si supponga ad esempio di interpretare $\Box$ come "*è dimostrabile*": il 1° schema, valido per tutte le logiche modali, andrebbe ad affermare che "*è dimostrabile il vero*", contro il *teorema di incompletezza di Gödel*; infatti è noto già dalla logica del 1° ordine che esistono, purchè il linguaggio sia sufficientemente espressivo da contenere l'aritmentica, degli enunciati veri, ma non dimostrabili.

Leggendo il $\Box$ come "*posso vedere*", invece, il 2° schema non risulta più valido, infatti un robot può vedere distintamente due oggetti, ma non è sempre vero che possa vederli contemporaneamente.

Questi due schemi, quindi, nell'ingegneria della conoscenza, pur essendo teoremi di tutte le logiche normali, non sono adatti e ciò richiederà, in certi contesti, di introdurre un altro tipo di semantica per la logica modale in cui questi schemi non risulteranno sempre validi.

Principalmente però si ci focalizzerà, per ora, sull'equivalenza tra 1. e 2., grazie alla quale si può affermare che:

SE DA UN INSIEME DI FORMULE $\mathcal{A} \in \Gamma$ SI PUÒ DEDURRE IN UNA LOGICA NORMALE Λ UNA FORMULA $\mathcal{B}$, ALLORA SI ANCHE CHE DALLE FORMULE $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ TALI CHE $\mathcal{A} \in \Gamma$, SI PUÒ DEDURRE IN Λ $\Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$. FORMALMENTE:

SE $\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{B}}$ **ALLORA** $\{\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} | \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_\Lambda \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

Dire che dalle formule in Γ si può dedurre in Λ $\mathcal{B}$, infatti, vuol dire che ci sono $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \mathcal{A}_n$ formule prese nell'insieme tali per cui $\mathcal{B}$ è un teorema di Λ, ma, poiché si è in una logica normale, è noto che anche $\Box\mathcal{B}$ è teorema di Λ, allora si può considerare anche il $\Box$ nelle formule di Γ.

Detto ciò, si può ritornare all'analisi del **modello canonico**, andando a ricordare la sua definizione ed alcune sue proprietà fondamentali:

SIA Λ UNA LOGICA NORMALE (CONSISTENTE); SI DICE **MODELLO CANONICO** DI Λ UN MODELLO $\mathcal{M}^\Lambda$ COSÌ COSTRUITO:

$$\mathcal{M}^\Lambda = (\mathcal{S}^\Lambda, \mathcal{R}^\Lambda, \mathcal{V}^\Lambda)$$

DOVE:

- $\mathcal{S}^\Lambda = \{\alpha \mid \alpha \text{ è } \Lambda - massimale\}$;
- $\mathcal{R}^\Lambda: (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^\Lambda \; sse \; \{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A} \in \alpha\} \subseteq \beta$
- $\mathcal{V}^\Lambda(A) = \{\alpha \in \mathcal{S}^\Lambda \mid A \in \alpha\} \; per \; ogni \; formula \; atomica \; A$

Ciò che si vuole andare a dimostrare ora è il seguente **teorema:**

SE Λ È UNA LOGICA NORMALE, LA FORMULA $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI Λ SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VERA SUL MODELLO CANONICO DI Λ.
FORMALMENTE: $\vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \boldsymbol{sse}\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{\Lambda} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Risulta dunque un teorema di correttezza e completezza rispetto al modello che si ha definito.

Prima di arrivare a dimostrare questo teorema, però, è necessario ricordare alcune **proprietà:**

- La relazione data dall'equivalenza tra 1. e 2., ossia:
  $$\textbf{Se } \{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{B}} \textbf{ allora } \{\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} | \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_{\Lambda} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$$
- Una formula $\mathcal{A}$ è deducibile in Λ da un insieme di formule Γ se e soltanto se $\mathcal{A}$ appartiene a Δ, per ogni Δ $\Lambda - massimale$ contenente Γ. Formalmente:
  $$\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\Delta}, \qquad \forall \boldsymbol{\Delta}\ \ \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{max}\ \ \supseteq \boldsymbol{\Gamma}$$
- $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ se e soltanto se $\mathcal{A}$ appartiene ad α, per ogni α che sia $\Lambda - massimale$. Formalmente:
  $$\vdash_{\Lambda} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha}\ \ \boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{massimale}$$

Tenuto conto di queste proprietà, per andare a dimostrare il teorema enunciato sopra, sarà sufficiente dimostrare ciò che viene detto **lemma di verità**, secondo cui

LEMMA DI VERITÀ: SE Λ È UNA LOGICA NORMALE, $\mathcal{A}$ È UNA FORMULA VERA NEL MONDO α DEL MODELLO $\mathcal{M}^{\Lambda}$ SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ APPARTIENE AD α. FORMALMENTE:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

Il lemma di verità è chiaramente legato al teorema enunciato sopra, infatti:

- Se $\mathcal{A}$ è teorema di Λ allora $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni α $\Lambda - massimale$
- Ma allora $\mathcal{A}$ è vero in ogni mondo del modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$.
- Se $\mathcal{A}$ è vera in $\mathcal{M}^{\Lambda}$, allora è vera in ogni mondo α del modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$
- quindi, per il lemma di verità, $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni α che sia $\Lambda - massimale$ e quindi è un teorema di Λ.

Visto lo stretto legame tra il lemma ed il teorema, quello che si va a dimostrare, in effetti, è il *lemma di verità*:

DIMOSTRAZIONE

Si supponga di aver scritto tutte le formule facendo uso soltanto dei connettivi *non* ($\sim$), *se allora* ($\Longrightarrow$) *e necessariamente* ($\Box$) , in quanto tutti gli altri connettivi sono riconducibili a questi.

Si procede con la dimostrazione per induzione sul numero n di connettivi (logici e modali) di $\mathcal{A}$.

Caso Base

Si supponga che $\mathcal{A}$ abbia $n = 0$ connettivi.

Una formula priva di connettivi è necessariamente una formula atomica del tipo A.

Ma in un modello di un mondo una formula atomica è vera solo se il mondo appartiene alla valutazione della formula, per definizione di verità, ossia se:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})$$

ma per definizione di funzione di valutazione, α appartiene alla valutazione canonica di A se e soltanto se A appartiene al α, ossia:

$$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}^{\Lambda}(\boldsymbol{A}) \quad \boldsymbol{sse} \quad \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\alpha}$$

il caso base, dunque, è proprio immediata conseguenza della definizione di *verità in un mondo* di un modello qualsiasi e della particolare funzione di valutazione che si è scelta del modello canonico.

Ipotesi di induzione

Il passo induttivo consiste nell'andare a dimostrare che il teorema vale per ogni formula caratterizzata da $m < n$ connettivi.

In pratica, ciò che si vuole fare ora è dimostrare il teorema applicandolo ad una formula dotata di m connettivi.

Poiché si sta ragionando solo su 3 connettivi, la formula con m connnettivi potrebbe essere:

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \sim \mathcal{B} \\ \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C} \\ \Box \mathcal{B} \end{cases}$$

1) $\mathcal{A} = \sim \mathcal{B}$

In questo caso, $\mathcal{B}$ avrà $m - 1$ connettivi.

La formula $\mathcal{A}$ sarà vera nel mondo α del modello Λ se e soltanto se la formula $\mathcal{B}$ è falsa nel mondo α del modello Λ, ossia:

$$\mathcal{M}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \mathcal{A} \;\; sse \;\; \mathcal{M}^{\Lambda} \nvDash_{\alpha} \mathcal{B}$$

Ma questo succede se e soltanto se $\mathcal{B}$ non appartiene ad α:

$$\mathcal{M}^{\Lambda} \nvDash_{\alpha} \mathcal{B} \;\; sse \;\; \mathcal{B} \notin \alpha$$

ma a sua volta questo è vero se e soltanto se $\sim \mathcal{B}$ appartiene ad α

$$\mathcal{B} \notin \alpha \;\; sse \;\; \sim \mathcal{B} \in \alpha$$

infatti α è massimale e quindi deve contenere $\mathcal{B}$ o $\sim \mathcal{B}$; in questo caso si è dunque dimostrato che:

$$\mathcal{M}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \mathcal{A}, con\, \mathcal{A} = \sim \mathcal{B} \;\; sse \;\; \sim \mathcal{B} \in \alpha$$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$

In questo caso, unendo i connettivi di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, si avranno in totale $m - 1$ connettivi, quindi entrambe le formule $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ avranno un numero di connettivi strettamente minore di n (infatti, al massimo, si avrà una formula con $m - 1$ connettivi e l'altra con 0).

La formula $\mathcal{A}$ sarà vera nel mondo α del modello Λ se e soltanto se:

- o la formula $\mathcal{B}$ è falsa nel mondo α del modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$;
- oppure la formula $\mathcal{C}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$

$$\mathcal{M}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \mathcal{A} \;\; sse \;\; \begin{cases} \mathcal{M}^{\Lambda} \nvDash_{\alpha} \mathcal{B} \\ \mathcal{M}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \mathcal{C} \end{cases}$$

analizzando separatamente i due casi possibili:

- $\mathcal{M}^{\Lambda} \vDash_{\alpha} \mathcal{A} \;\; sse \;\; \mathcal{M}^{\Lambda} \nvDash_{\alpha} \mathcal{B}$

  Per ipotesi d'induzione, questo succede se e soltanto se $\mathcal{B}$ non appartiene ad α

  $$\mathcal{M}^{\Lambda} \nvDash_{\alpha} \mathcal{B} \;\; sse \;\; \mathcal{B} \notin \alpha$$

  Ma α è massimale, quindi ciò può succedere se e soltanto se $\sim \mathcal{B}$ appartiene ad α

  $$\mathcal{B} \notin \alpha \;\; sse \;\; \sim \mathcal{B} \notin \alpha$$

  Ma la formula $\sim \mathcal{B} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})$ è una tautologia e poiché ogni insieme $\Lambda - massimale$ contiene tutte le tautologie, si può affermare che

  $$\sim \mathcal{B} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$$

  Quindi dall'insieme di formule α, in cui è contenuto $\sim \mathcal{B}$ e la formula $\sim \mathcal{B} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})$, si può dedurre $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$, ossia:

  $$\alpha \vdash_{\Lambda} (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})$$

  siccome α, essendo $\Lambda - massimale$, è chiuso rispetto alla deduzione (cioè tutto ciò che si può dedurre appartiene ad α), questo porta ad affermare che:

  $$(\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$$

- $\mathcal{M}^\Lambda \vDash_\alpha \mathcal{A}$ *sse* $\mathcal{M}^\Lambda \vDash_\alpha \mathcal{C}$

  Nel caso in cui non si fosse verificato il caso precedente e quindi $\mathcal{B}$ fosse risultato vero, necessariamente sarebbe stato vero anche $\mathcal{C}$ e quindi si sarebbe verificato questo secondo caso.

  Anche per $\mathcal{C}$ vale l'ipotesi d'induzione, quindi $\mathcal{C}$ sarà vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}^\Lambda$ se soltanto se $\mathcal{C}$ appartiene ad α.

  $$\mathcal{M}^\Lambda \vDash_\alpha \mathcal{C} \quad sse \quad \mathcal{C} \in \alpha$$

  Ma la formula $\mathcal{C} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})$ è una tautologia (infatti è lo schema di assiomi A1), quindi, per le medesime motivazioni mostrate nel caso precedente, si può affermare che:

  $$\mathcal{C} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$$

  e da questo si ottiene che:

  $$(\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$$

3) $\mathcal{A} = \Box\mathcal{B}$

Anche in questo caso, $\mathcal{B}$ avrà $m-1$ connettivi.

Non è qui possibile fare delle osservazioni "invertibili", ma è necessario specificare la direzione del ragionamento, andando ad invertire ipotesi e tesi.

- $\boldsymbol{Hp}$: $\mathcal{M}^\Lambda \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}$
  $\boldsymbol{Ts}$: $\Box\mathcal{B} \in \alpha$

  Per ipotesi, si può affermare che per ogni β tale che da α si raggiunga β mediante la relazione R^Λ, nel mondo β del modello $\mathcal{M}^\Lambda$ è vera $\mathcal{B}$, ossia:

  $$\forall\beta, \qquad (\alpha,\beta) \in R^\Lambda, \qquad \mathcal{M}^\Lambda \vDash_\beta \mathcal{B}$$

  siccome $\mathcal{B}$ ha $m-1$ connettivi e β è un generico mondo del modello canonico, per ipotesi d'induzione, si può affermare che $\mathcal{B}$ appartiene a β, ossia:

  $$\mathcal{B} \in \beta \qquad \forall\beta, (\alpha,\beta) \in R^\Lambda$$

  Per come è definita R^Λ, l'affermazione "$\mathcal{B} \in \beta$" significa che $\mathcal{B}$ appartiene a tutti gli insiemi $\Lambda - massimali$ che contengono l'insieme $\boldsymbol{\Gamma} = \{\mathcal{C} \mid \Box\mathcal{C} \in \boldsymbol{\alpha}\}$

  È noto, tuttavia, che è possibile dedurre una formula da un insieme di formule Γ se e soltanto se tale formula appartiene ad ogni insieme $\Lambda - massimale$ che contiene Γ (dalla proprietà $\boldsymbol{\Gamma} \vdash_\Lambda \mathcal{A}$ *sse* $\mathcal{A} \in \boldsymbol{\Delta}$, $\forall\boldsymbol{\Delta}$ $\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{max} \supseteq \boldsymbol{\Gamma}$) quindi, per questa proprietà si ottiene:

  $$\boldsymbol{\Gamma}: \{\mathcal{C} \mid \Box\mathcal{C} \in \boldsymbol{\alpha}\} \quad \vdash_\Lambda \mathcal{B}$$

  Si ricorda, inoltre, la proprietà secondo cui **se** $\{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_\Lambda \mathcal{B}$ **allora** $\{\Box\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \vdash_\Lambda \Box\mathcal{B}$, quindi si può dedurre $\Box\mathcal{B}$ dalle formule $\Box\mathcal{C}$ tali che $\mathcal{C} \in \Gamma$, ossia:

  $$\{\Box\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \in \boldsymbol{\Gamma}\} \quad \vdash_\Lambda \Box\mathcal{B}$$

  ma le formule $\mathcal{C} \in \Gamma$ sono quelle formule tali per cui $\Box\mathcal{C} \in \boldsymbol{\alpha}$ quindi la relazione sopra si può riscrivere come:

  $$\{\Box\mathcal{C} \mid \Box\mathcal{C} \in \boldsymbol{\alpha}\} \quad \vdash_\Lambda \Box\mathcal{B}$$

  Ma allora si deduce $\Box\mathcal{B}$ da un insieme di formule di α e, poiché α è $\Lambda - massimale$, è chiuso rispetto alla deduzione e quindi si può affermare che:

  $$\Box\mathcal{B} \in \alpha$$

- $\boldsymbol{Hp}$: $\Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$
  $\boldsymbol{Ts}$: $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\boldsymbol{\Lambda}} \vDash_{\alpha} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

  Per ipotesi, si può affermare che per ogni β tale che da α si raggiunga β mediante la relazione R^{Λ}, l'insieme delle formule $\mathcal{B}$ la cui necessità sta in α, è contenuta in β, ossia:

  $$\forall\boldsymbol{\beta}, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Lambda}}, \quad \{\boldsymbol{\mathcal{B}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$$

  in particolare, dunque, la formula $\mathcal{B}$ che si sta considerando sta in ogni β e quindi da questo si può ricavare che $\mathcal{B}$ appartiene a β, per ogni β tali che $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$, ossia:

  $$\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\beta}, \quad \forall\boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\Lambda}}$$

  ma $\mathcal{B}$ ha $m-1$ connettivi quindi se $\mathcal{B} \in \beta$, allora $\mathcal{B}$ è vero nel modno β del modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$, ossia:

  $$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\boldsymbol{\Lambda}} \vDash_{\beta} \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

  ma se $\mathcal{B}$ è vera in β, per ogni β raggiungibile da α, necessariamente si ottiene che $\Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$ sarà vera in α, per la definizione stessa del connettivo **$\Box$.**

  $$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{\boldsymbol{\Lambda}} \vDash_{\alpha} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Per capire l'utilità del *modello canonico* è necessario andare a recuperare il concetto di **logica normale minima (logica K).**

Il Modello Canonico di Logiche Normali

In particolare, per quanto detto fino ad ora, si ricorda che la **minima logica normale K** è una logica assiomatizzabile come segue:

- Ha come assiomi gli schemi:
  - $A1$: $\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A})$
  - $A2$: $\big(\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C})\big)$
  - $A3$: $(\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \sim \mathcal{B}) \Longrightarrow \big((\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{A}\big)$
  - K: $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B})$
- Ha come regole di inferenza:
  - Modus ponens (MP),
  - Regola di necessitazione (RN)

Con l'introduzione del *modello canonico*, inoltre, si può ora affermare che:

UNA FORMULA $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI K SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VERA SU UN MODELLO CANONICO $\mathcal{M}^{\mathrm{K}}$. FORMALMENTE:

$$\vdash_{K} \boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \boldsymbol{sse} \quad \boldsymbol{\mathcal{M}}^{\mathbf{K}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

L'obiettivo finale, dunque, era quello di ottenere un metodo per decidere se una formula fosse o meno un teorema di K. In realtà, anche con questo nuovo strumento, tale decisione non può essere presa del tutto, in quanto risulta fattibile solo se si riesce a dimostrare che la formula è vera sul modello canonico, ma il modello canonico non è sempre costruibile ed, in aggiunta, se anche si riuscisse a costruire sarebbe un modello infinito, quindi non è possibile verificare se una formula è vera sul modello canonico.

Focalizzando per il momento l'attenzione sul fatto che non si è sempre costruibile, risulta immediata la necessità di usare il concetto di "*modello canonico*" solo come step intermedio, senza dover ricorrere ad esso per definire la verità di una formula.

Ma dalla proprietà enunciata sopra si può anche affermare che:

UNA FORMULA $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DELLA LOGICA K SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VALIDA SU OGNI FRAME STANDARD DEL TIPO $\boldsymbol{\mathcal{F}} = <\boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathcal{R}}>$.
FORMALMENTE:
$\vdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}} \;\; \boldsymbol{sse} \;\; \boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Ma questo è un vero e proprio **teorema di correttezza e completezza rispetto alla classe di tutti i frame**.

DIMOSTRAZIONE

$\boldsymbol{Hp}$: $\vdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}}$
$\boldsymbol{Ts}$: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Gli schemi A1, A2 e A3 sono tutte tautologie e quindi, come tale, sono valide su tutti i frame;

Lo schema K, inoltre, si è visto essere valido a sua volta su tutti i frame, quindi si può affermare che tutti gli assiomi di parte sono validi su ogni frame.

Il *modus ponens* permette di passare da formule valide a formule valide, infatti:
- Se $\mathcal{A}$ è valido su ogni frame
- Se $(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B})$ è valido su ogni frame
- Allora $\mathcal{B}$ è valido a sua volta su ogni frame

Anche la *regola di necessitazione* permette di passare da formule valide a formule valide, infatti:
- Se $\mathcal{A}$ è valido su ogni frame, significa che è vera in ogni mondo di ogni modello costruito su quel frame;
- Quindi anche $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è vero su ogni mondo di ogni modello costruito su quel frame, perché da ogni mondo è possibile considerare ogni mondo raggiungibile in cui $\mathcal{A}$ è vera e quindi anche $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è vera nel mondo di partenza

Quindi: gli assiomi sono validi su ogni frame, le regole di inferenza fanno passare da formule valide a formule valide e quindi si può tranquillamente affermare che $\mathcal{A}$è valido su ogni frame.

$\boldsymbol{Hp}$: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$
$\boldsymbol{Ts}$: $\vdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Si supponga per assurdo che $\mathcal{A}$ non sia un teorema di K, ossia: $\nvdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}}$

allora dal teorema di correttezza e completezza rispetto al modello canonico si sa che $\mathcal{A}$ non sarà vera nel modello canonico di K, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}}^K \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma il modello canonico sarà costruito su qualche frame $\langle S^K, R^K \rangle$ che è un frame esistente (benchè non ne sia nota la costruzione), quindi, si avrà un frame su cui $\mathcal{A}$ non è più valida, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma questo va contro l'ipotesi secondo cui $\mathcal{A}$ doveva essere valida su ogni frame; risulta quindi assurdo aver supposto che $\mathcal{A}$ non sia un teorema di K.

Si è dunque riusciti ad aggirare il problema legato alla costruzione del modello canonico, tuttavia si è generato il problema circa il verificare una formula su ogni frame.

Tale problema verrà risolto in seguito, applicando un'altra tecnica che si baserà comunque a sua volta proprio sulla proprietà per cui $\vdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}} \;\; \boldsymbol{sse} \;\; \boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Basi per la tecnica della Filtrazione

L'obiettivo principale dunque consiste nel, data una formula ben formata $\mathcal{A}$, trovare un algoritmo che permetta di dire se $\mathcal{A}$ è un teorema di K.

Ciò se si è ottenuto fino ad ora, per la logica normale minima, è il teorema visto sopra, secondo cui $\vdash_K \boldsymbol{\mathcal{A}}$ $\boldsymbol{sse}$ $\boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$, ma non è possibile valutare tutti i frame, quindi tale teorema non porta ad un algoritmo applicabile.

Per raggiungere l'obiettivo prefissato si ricorrerà ad una tecnica che prende il nome di **filtrazione** e che porterà ad affermare che:

> $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI K SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VERA SU TUTTI I FRAME IL CUI INSIEME DEI MONDI HA UNA CARDINALITÀ MINORE O UGUALE A 2^n DOVE n È IL NUMERO D'ORDINE DELL'INSIEME DI FORMULE CUI APPARTIENE $\mathcal{A}$ $(|\Gamma| = n)$.

Tale affermazione è dimostrabile, benchè sia una dimostrazione molto complessa; per tale ragione, nell'introdurre questa tecnica, si potrebbe pensare di operare su uno specifico frame dotato di particolari caratteristiche in funzione di ciò che si vuole descrivere.

Si osservi, ad esempio, la logica corretta e completa rispetto alla classe dei frame transitivi.

È noto che su ogni frame transitivo è valido il seguente schema, detto *schema 4*:

$$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

questo schema, come visto nelle prime lezioni, è valido in un frame $\mathcal{F}$ se e soltanto se $\mathcal{F}$ è transitivo.

Allora viene immediato pensare che se si desidera un logica che sia corretta rispetto alla classe dei frame transitivi, bisogna aggiungere tra gli assiomi proprio lo schema 4.

In generale, viene detta **K+[nome dell'assioma d'interesse]**, ad esempio nel caso visto sopra K4, la minima logica normale K arricchita con lo schema d'interesse.

Ciò che si vorrebbe arrivare ad affermare è, ad esempio nel caso visto sopra:

> $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DELLA LOGICA K4 SE E SOLTANTO SE È VERA SU TUTTI I FRAME TRANSITIVI. FORMALMENTE:
> $$\vdash_{K4} \boldsymbol{\mathcal{A}} \;\; \boldsymbol{sse} \;\; \boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\ \boldsymbol{transitivi}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$\boldsymbol{Hp}$: $\vdash_{4K} \boldsymbol{\mathcal{A}}$
$\boldsymbol{Ts}$: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\ \boldsymbol{transitivi}$

In questa direzione, il teorema espresso sopra risulta facile da dimostrare, infatti:

la logica K4 è assomatizzata come segue:

- Ha come assiomi gli schemi:
  - $A1$: $\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A})$
  - $A2$: $\big(\mathcal{A} \Longrightarrow (\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C})\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C})\big)$
  - $A3$: $(\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \sim \mathcal{B}) \Longrightarrow \big((\sim \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{A}\big)$
  - K: $\Box(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{B})$
  - 4: $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$
- Ha come regole di inferenza:
  - Modus ponens (MP),
  - Regola di necessitazione (RN)

Allora se $\mathcal{A}$ è un teorema di K ed è l'ultima formula di una sequenza finita di formule tutte contenute in K4 o perché sono degli assiomi, o perché ottenuta dalle regole precedenti mediante MP o RN, si può dedurre che:

- La prima formula sarà un assioma e quindi sarà valido per ogni frame
- La seconda formula sarà ancora un assioma e quindi ancora valido in ogni frame transitivo oppure può essere ottenuta dalla regola precedente mediante RN e quindi rimane comunque valida
- E così via.

In questa direzione risulta quindi facilmente dimostrato che il teorema è vero.

$\boldsymbol{Hp}: \mathcal{F} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall\, \mathcal{F}\ \boldsymbol{transitivi}$
$\boldsymbol{Ts}:\ \vdash_{4K} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

In questo caso, la dimostrazione risulta leggermente più complessa e la chiave consiste nel fare vedere che la presenza dello schema di assiomi 4 costringe la funzione di raggiungibilità R^{Λ} ad essere transitiva.

Si vuole dunque andar a far vedere che R^{K4} è transitiva; in particolare:

Si considerino 3 mondi (α, β, γ) qualunque tali che (α, β) appartenga a R^{K4} e (β, γ) appartenga a R^{K4}; si vuole dimostrare che anche $(\alpha, \gamma) \in R^{K4}$.

Il fatto che $(\alpha, \beta) \in R^{K4}$ porta ad affermare che l'insieme delle formule $\mathcal{A}$ tali che $\Box\mathcal{A}$ appartiene ad α, sono contenute in β, ossia:

$$\textbf{se } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{K4}} \textbf{ allora } \{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$$

allora stesso modo, il fatto che $(\beta, \gamma) \in R^{K4}$ porta ad affermare che l'insieme delle formule $\mathcal{B}$ tali che $\Box\mathcal{B}$ appartiene ad β, sono contenute in γ, ossia:

$$\textbf{se } (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{K4}} \textbf{ allora } \{\boldsymbol{\mathcal{B}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\beta}\} \subseteq \boldsymbol{\gamma}$$

si vuole dimostrare che le formule $\mathcal{A}$, tali che $\Box\mathcal{A}$ appartiene ad α, sono anche contenute in γ, ossia:

$$\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\gamma}$$

Siccome si ha lo schema di assiomi 4, se $\Box\mathcal{A}$ appartiene ad α, per lo schema 4 si avrà che all'interno della logica anche

$$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

Infatti α è un insieme K4-massimale che contiene tutti gli assiomi.

Contenendo sia $\Box\mathcal{A}$ che $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \Box\Box\mathcal{A}$, ed essendo α chiuso rispetto alla derivabilità, allora si può affermare anche che:

$$\Box\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

quindi ogni volta che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$, si avrà anche che $\Box\Box\mathcal{A} \in \alpha$ e ciò permette di affermare che le formule $\Box\mathcal{A}$ tali che $\Box\mathcal{A}$ appartiene ad α, sono anche contenute in β, ossia:

$$\{\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$$

infatti in β si hanno tutte le formule la cui necessità sta in α e poiché $\Box\Box\mathcal{A} \in \alpha$, si può affermare che $\Box\mathcal{A} \in \beta$.

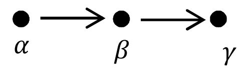
Ma allora le formule la cui necessità sta in β sono contenute in γ, ossia:

$$\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\gamma}$$

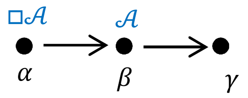
e quindi il teorema risulta dimostrato.

La 2° parte della dimostrazione vista sopra, può anche essere espressa per via grafica, infatti:

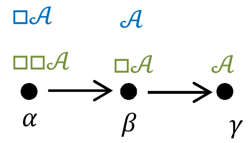
Si considerino 3 mondi (α, β, γ) qualunque tali che $(\alpha, \beta) \in R^{K4}$ e $(\beta, \gamma) \in R^{K4}$



Poiché in α è vero $\Box\mathcal{A}$, si può affermare che in β è vera $\mathcal{A}$



Ma se in α è vera $\Box\mathcal{A}$, allora è vera anche $\Box\Box\mathcal{A}$, in quanto è valido lo schema 4, quindi, in β sarà vero $\Box\mathcal{A}$ e di conseguenza in γ sarà vero $\mathcal{A}$.



Quindi tutte le formule $\mathcal{A}$ la cui necessità sta in α sono contenute in γ; da α dunque si può raggiungere γ e la relazione è effettivamente transitiva.

A questo punto, dunque, è nota la logica determinata dai frame transitivi: è la logica K4, infatti *la logica K4 è corretta e completa rispetto alla classe dei frame transitivi.*

Questa caratteristica, però, non è legata solo alla logica K4 ma a tutte le logiche contenenti assiomi noti; ossia:

Se Λ è una logica normale che contiene lo schema		**Allora il modello canonico $\mathcal{M}^{\Lambda}$ ha**
NOME	SCHEMA	CARATTERISTICA
D	$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} seriale
T	$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} riflessiva
B	$\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\,\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} simmetrica
4	$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} transitiva
5	$\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\,\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} euclidea
	$\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} funzione parziale
	$\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} funzione
	$\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \Diamond\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} debolmente densa
	$\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \vee \Box(\boldsymbol{\mathcal{B}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$	R^{Λ} debolmente connessa
	$\Diamond\,\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\,\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$	R^{Λ} diretta

Questo porta ad affermare che se si considera la logica K e la si arricchisce con un numero qualsiasi di questi schemi, si ottiene una logica che è corretta e completa rispetto alla classe dei frame con le proprietà elencate nella colonna a destra.

Esempio 1

La logica KDB4 sarà la logica corretta e completa rispetto alla classe dei frame seriali, simmetrici e transitivi, quindi rispetto ai frame in cui la relazione di raggiungibilità è una relazione d'equivalenza.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETA' TRANSITIVA

Data una logica Λ cui appartiene lo schema $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$, si vuole andare a dimostrare che R^{Λ} è seriale, ossia si vuole far vedere che:

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^{\Lambda}\ (\textit{ossia per ogni insieme } \boldsymbol{\Lambda} - \textit{massimale}), \exists \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}\text{^}\boldsymbol{\Lambda} | (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\Lambda}$$

β , se esiste, deve contenere tutte le formule $\mathcal{A}$ tali che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$.

Se l'insieme $\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A} \in \alpha\}$ è consistente, per il lemma di Lindenbaum, si sa che $\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A} \in \alpha\}$ è contenuto in un insieme $\Lambda - massimale$, ossia β.

Quindi per dimostrare che esiste β occorrerà dimostrare che $\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A} \in \alpha\}$ è $\Lambda - consistente$.

Si supponga, per assurdo, che questo insieme non sia $\Lambda - consistente$, ossia che da questo insieme, in Λ sia possibile dedurre il falso, cioè:

$$\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A} \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} \bot$$

ciò significa che esistono $n+1$ formule $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}$ tutte appartenenti all'insieme di partenza, tali che dalla loro connessione in AND si possa dedurre in $\Lambda \sim \mathcal{A}_{n+1}$, ossia:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1} \mid \{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n\} \vdash_{\Lambda} \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

dire che da un insieme di formule si può dedurre il falso, significa che all'interno dell'insieme ci sono un certo numero di formule che sono contraddittorie (in questo caso, infatti, si ha $\mathcal{A}_{n+1}$ ma anche $\sim \mathcal{A}_{n+1}$). Infatti dire che si deduce il falso significa che:

$$\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \mathcal{A}_{n+1} \Rightarrow \bot$$
$$e$$
$$\{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n\} \vdash_{\Lambda} \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

Ma queste due formule sono equivalenti (infatti ogni volta che è vera la 1° è vera anche la 2° e viceversa).

Ma poiché Λ è una logica normale, dire che $\{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n\} \vdash_{\Lambda} \sim \mathcal{A}_{n+1}$ porta ad affermare anche che:

$$\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

ma per la definizione di logica normale, si può dire anche che:

$$\vdash_{\Lambda} \Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \Box\mathcal{A}_n \Rightarrow \Box \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

ma nella logica Λ di riferimento è presente lo schema D, da cui si può ottenere che:

$$\vdash_{\Lambda} \Box \sim \mathcal{A}_{n+1} \Rightarrow \Diamond \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

In generale, in ogni logica si sa che **se** $\begin{matrix} \vdash_{\Lambda} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \\ \vdash_{\Lambda} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \end{matrix}$ **allora** $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ ma allora si può affermare che:

$$\vdash_{\Lambda} \Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \Box\mathcal{A}_n \Rightarrow \Diamond \sim \mathcal{A}_{n+1}$$

Ma le formule $\Box\mathcal{A}_1, \Box\mathcal{A}_2, \dots, \Box\mathcal{A}_n$ dell'antecedente stanno in α, così come tutta la formula sta in α (infatti α è $\Lambda - massimale$) e quindi sta in α anche $\Diamond \sim \mathcal{A}_{n+1}$(per MP).

Per le relazioni di equivalenza tra il connettivo $\Box$ ed il connettivo $\Diamond$, si può inoltre dire che:

$$\Diamond \sim \mathcal{A}_{n+1} = \sim \Box\mathcal{A}_{n+1} \in \alpha$$

ma anche $\Box\mathcal{A}_{n+1} \in \alpha$, ma se α contiene la formula ed il suo opposto allora non è più $\Lambda - consistente$, il che va contro l'ipotesi secondo cui i mondi sono $\Lambda - massimali$.

Risulta quindi assurdo aver supposto che l'insieme $\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A} \in \alpha\}$ fosse non consistente.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETA' RIFLESSIVA

Data una logica Λ cui appartiene lo schema $\Box\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}$, si vuole andare a dimostrare che R^{Λ} è riflessiva, ossia si vuole far vedere che:

$$\forall\alpha \in \mathcal{S}^{\Lambda}\ (ossia\ per\ ogni\ insieme\ \Lambda - massimale), (\alpha, \alpha) \in \mathcal{R}^{\Lambda}$$

Si consideri l'insieme delle formule $\mathcal{A}$ tali che $\Box\mathcal{A}$ appartiene alle formule di α, ossia: $\{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A} \in \alpha\}$

risulta così noto che $\begin{matrix}\Box\mathcal{A} \in \alpha \\ \mathcal{A} \Longrightarrow \Box\mathcal{A} \in \alpha\end{matrix}$, quindi per la chiusura rispetto a MP, si ottiene che: $\mathcal{A} \in \alpha$

quindi si può affermare che: $\{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A} \in \alpha\} \subseteq \alpha$

per definizione di $\mathcal{R}^{\Lambda}$ si può quindi affermare che: $(\alpha, \alpha) \in \mathcal{R}^{\Lambda}$

DIMOSTRAZIONE PROPRIETA' SIMMETRICA

Data una logica Λ cui appartiene lo schema $\mathcal{A} \Longrightarrow \Box \lozenge \mathcal{A}$, si vuole andare a dimostrare che R^{Λ} è simmetrica.

In questo caso, per dimostrare tale proprietà, è necessario dare una diversa definizione di $\mathcal{R}^{\Lambda}$, del tutto equivalente alla precedente ma da un punto di vista differente.

(α, β) APPARTIENE A $\mathcal{R}^{\Lambda}$ SE E SOLTANTO SE LE FORMULE $\lozenge \mathcal{B}$ TALI CHE $\mathcal{B}$ STIA IN β SONO CONTENUTE IN α. FORMALMENTE:

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^{\Lambda}\ sse\ \{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\} \subseteq \alpha$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostrare tale teorema, significa andare a far vedere che se per ogni formula $\mathcal{A}$ tale che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$ si ha che $\mathcal{A} \in \beta$, allora vale la relazione secondo cui $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^{\Lambda}\ sse\ \{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\} \subseteq \alpha$.

Hp: $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^{\Lambda}$

Ts: $\{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\} \subseteq \alpha$

Supponiamo che ci sia una formula $\mathcal{B} \in \beta$ tale che $\lozenge \mathcal{B}$ non appartenga ad α, ossia: $\exists\mathcal{B} \in \beta | \lozenge \mathcal{B} \notin \alpha$

ma allora, essendo $\alpha\ \Lambda - massimale$, si può affermare che: $\sim\lozenge \mathcal{B} \in \alpha$

e, per l'equivalenza tra i connettivi modali, si ottiene che: $\Box \sim \mathcal{B} \in \alpha$

ma allora per la relazione detta sopra $(\forall\mathcal{A}|\Box\mathcal{A} \in \alpha, \mathcal{A} \in \beta)$, si può affermare che: $\sim \mathcal{B} \in \beta$

ma quanto ottenuto è un assurdo, in quanto β diventerebbe inconsistente, visto che si è ottenuto che sia $\mathcal{B}$ che $\sim \mathcal{B}$ vi appartengono.

Hp: $\{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\} \subseteq \alpha$

Ts: $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^{\Lambda}$

Si vuole dunque far vedere che $\{\mathcal{A}|\Box\mathcal{A} \in \alpha\} \subseteq \beta$.

Si supponga che vi sia una formula tale per cui: $\Box\mathcal{A} \in \alpha \quad \text{con } \mathcal{A} \notin \beta$

ma se $\mathcal{A} \notin \beta$, essendo $\beta\ \Lambda - massimale$, significa che: $\sim \mathcal{A} \in \beta$

e quindi per ipotesi si ottiene che:

$$\Diamond\sim \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

ma questo corrisponde a dire che:

$$\sim \Box\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

ma di nuovo si ottiene un assurdo, in quanto in α risultano valide sia $\Box\mathcal{A}$ che $\sim \Box\,\mathcal{A}$.

Si è dunque riusciti così a dimostrare che la relazione $\mathcal{R}^\Lambda$ la si può esprimere in due modi differenti ossia:

- $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda$ ***sse*** $\{\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} | \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\beta}\} \subseteq \boldsymbol{\alpha}$
- $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda$ ***sse*** $\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$

Usando queste due definizione di $\mathcal{R}^\Lambda$ si può finalmente andare a dimostrare che se una logica Λ contiene lo schema $\boldsymbol{\mathcal{A}} \Longrightarrow \Box\, \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$, allora R^Λ è simmetrica, ossia si vuole fa vedere che, in tali condizioni:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda \;\; \textbf{\textit{implica}} \;\; (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda$$

In particolare, si andrà a dimostrare che:

$\boldsymbol{Hp}$: $\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$
$\boldsymbol{Ts}$: $\{\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} | \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$

Si supponga che $\mathcal{B}$ sia una qualsiasi formula appartenente a α, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

poiché $\boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow \Box\, \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}}$ è uno schema della logica, allora appartiene ad un insieme $\Lambda - massimale$ ed in particolare apparterrà ad α, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow \Box\, \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

e quindi, in particolare si otterrà che:

$$\Box\, \Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

ma per ipotesi si sa che:

$$\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\beta}$$

si è quindi dimostrato che l'insieme delle formule $\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}}$ tali che $\mathcal{B} \in \alpha$, sono contenute in β, ossia:

$$\{\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} | \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \boldsymbol{\beta}$$

e quindi, in virtù della definizione di $\mathcal{R}^\Lambda$ data sopra, si ottiene che:

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda$$

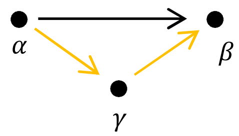
DIMOSTRAZIONE PROPRIETA' DEBOLMENTE DENSA

Data una logica Λ cui appartiene lo schema $\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow \Diamond\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{A}}$, si vuole andare a dimostrare che R^Λ è debolmente densa, ossia si vuole far vedere che:

$$\forall (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda \;, \exists\, \boldsymbol{\gamma} \,\Big|\; \begin{matrix} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\Lambda \end{matrix}$$

Anche in questo è necessario capire come sarà composto γ.

È noto che da α si va in β e poi si vuole costruire γ in modo tale che da α si vda in γ e da γ si vada in β, ossia:



allora, ricorrendo alla prima definizione di $\mathcal{R}^\Lambda$, γ deve contenere tutte le formule $\mathcal{A}$ la cui necessità sta in α, ma allo stesso tempo, siccome dev'essere un insieme da cui si può raggiungere β, usando la seconda definizione di $\mathcal{R}^\Lambda$, γ dovrà anche contenere tutte le formule di $\Diamond\, \mathcal{B}$, tali che $\mathcal{B}$ stia in β.

Si parte dunque dall'insieme di formule $\{\boldsymbol{\mathcal{A}} | \Box\, \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\alpha}\} \cup \{\Diamond\, \boldsymbol{\mathcal{B}} | \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\beta}\}$ e si andrà a far vedere che tale insieme è $\Lambda - consistente$; se questo è $\Lambda - consistente$, infatti, allora ci sarà un insieme $\Lambda - massimale$ che lo contiene che è proprio l'insieme γ cercato.

Si osservi ora la dimostrazione nel dettaglio:

si consideri l'insieme $\gamma_0 = \{\mathcal{A} | \Box \mathcal{A} \in \alpha\} \cup \{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\}$ e si supponga per assurdo che esso non sia consistente.

Se γ_0 non è consistente allora esisteranno $\mathcal{A}_1, \dots \mathcal{A}_n$ in $\{\mathcal{A} | \Box \mathcal{A} \in \alpha\}$ e $\lozenge \mathcal{B}_1, \dots, \lozenge \mathcal{B}_m$ in $\{\lozenge \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \beta\}$ tali che:

$$\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \dots \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_m} \Longrightarrow \perp$$

ma quanto espresso sopra è riscrivibile anche come:

$$\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \sim (\lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \dots \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_m})$$

si indichi ora per brevità con $\mathcal{B}$ la fbf $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$; sapendo che **in ogni logica modale $\boldsymbol{\Lambda}$ si ha che $\vdash_\Lambda \lozenge (\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{B}}) \Longrightarrow \lozenge \boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}$**, si può affermare che:

$$\vdash_\Lambda \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow (\lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \dots \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_m})$$

e quindi anche che:

$$\vdash_\Lambda \sim (\lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \wedge \dots \wedge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}_m}) \Longrightarrow \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

per cui dalla 2° relazione indicata si ottiene che:

$$\vdash_\Lambda \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

applicando la necessità sia all'antecedente che al conseguente si ottiene quindi che:

$$\vdash_\Lambda \Box \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \Box \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

essendo $\alpha\ \Lambda - massimale$, si ottiene quindi che:

$$(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \Box \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \Longrightarrow \Box \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}) \in \boldsymbol{\alpha}$$

per ipotesi è noto che $(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \wedge \dots \wedge \Box \boldsymbol{\mathcal{A}_n}) \in \alpha$, quindi per MP si può affermare che:

$$\Box \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

da cui, per equivalenza tra i connettivi modali, si ottiene che:

$$\Box \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} = \sim \lozenge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

ma anche $\sim \lozenge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \Longrightarrow \sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$, essendoequivalente all'istanza $\lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \lozenge \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}}$ dello schema che si sta considerando, e quindi si ottiene che:

$$\sim \lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

Ma essendo $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^\Lambda$, poiché $\mathcal{B} \in \beta$, si ricava che:

$$\lozenge \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\alpha}$$

ma questo è un assurdo rispetto all'ipotesi di consistenza di α, quindi l'insieme γ_0 preso inizialmente è necessariamente consistente.

Tutte queste dimostrazioni permettono dunque di affermare che effettivamente, se si arricchisce K con gli schemi di assiomi noti, è possibile dimostrare che la logica $K + [nome\ dello\ schema]$ è corretta e completa rispetto alla classe di frame che hanno le proprietà dettate dall'assioma aggiunto.

Per tutte le classi di logiche ottenute da K arricchendole con questi schemi, dunque, si è ottenuto un teorema di correttezza e completezza rispetto alla classe di frame in analisi.

Tali osservazioni, però, non dicono nulla dal punto di vista della *decidibilità* e per analizzare tale punto di vista bisogna ricorrere alle **tecniche di filtrazione**.

Sostanzialmente, fino ad ora, si è affermato che per decidere se la formula $\mathcal{A}$ è un teorema di una certa logica normale Λ, che sia corretta e completa rispetto ad una classe di frame, bisogna andare a vedere se $\mathcal{A}$ è valido su ogni frame oppure se $\mathcal{A}$ è vero sul modello canonico.

Ma il modello canonico è definito in modo non costruttivo ed inoltre è "troppo grande" per le necessità.

Tuttavia, per conoscere il valore di verità di una formula $\mathcal{A}$ in un mondo di un modello, è sufficiente conoscere i valori di verità delle sue sottoformule in quello stesso mondo di quello stesso modello. È possibile allora identificare i mondi in cui le sottoformule di $\mathcal{A}$ assumono lo stesso valore di verità e tale procedimento prende proprio il nome di **filtrazione.**

L'idea che si ha, dunque, nel cercare di creare il numero dei mondi del modello canonico (o comunque di un modello della logica normale) è dunque quella di considerare un *insieme quoziente* dei mondi che sia avevano inizialmente, all'interno del quale si indentificano i *mondi* che si comportano, rispetto alla scopo dell'analisi, nello stesso modo.

In generale, dunque, si è nella situazione così caratterizzata:

- Si ha una logica Λ
- Si una un modello $\mathcal{M}^{\Lambda}$ della logica (che sarà poi il modello canonico)
- Si può affermare che: $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}\ \ sse\ \ \mathcal{F} \vDash \mathcal{A}\,,\ \forall \mathcal{F}\ con\ un\ numero\ di\ mondi\ \mathcal{S}\ minore\ o\ uguale\ \mathbb{Z}_n$ **(proprietà di frame finito)**

Per poter introdurre il concetto di *filtrazione*, però, è necessario introdurre in primis un importante **concetto**:

> DATO UN INSIEME Φ DI FORMULE ATOMICHE, UN INSIEME $\Gamma \subseteq Fma(\Phi)$ DI FBF SI DICE **CHIUSO RISPETTO ALLE SOTTOFORMULE** SE
> $\mathcal{A} \in \Gamma$ IMPLICA SFMA($\mathcal{A}$)$\subseteq \Gamma$

L'obiettivo, infatti, consiste nel valutare le formule di Γ.

Si va quindi ad introdurre l'elemento Γ_α rappresentante l'insieme di tutte le formule $\mathcal{C}$ che appartengono a Γ e tali che, nel mondo α del modello di riferimento sia vera $\mathcal{C}$, ossia:

$$\boldsymbol{\Gamma_\alpha = \{\mathcal{C} \in \Gamma | \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C}\}}$$

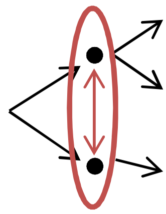
Si va, inoltre, a considerare la seguente relazione binaria su $\mathcal{S}$ (ricordando che $\mathcal{M} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{V}\rangle$): $\sim_\Gamma \subseteq \boldsymbol{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ ed in particolare essa risulta così definita:

$$\boldsymbol{(\alpha, \beta) \in\ \sim_\Gamma \quad sse \quad \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta}$$

In parole povere, tale relazione lascia intendere che i due mondi α e β si comportano allo stesso modo a proposito della verità o della falsità delle formule di Γ; le formule di Γ dunque, sono vere su α se e soltanto se sono vera su β.

Ma allora risulta facile verificare che $\sim_\Gamma$ è un *relazione d'equivalenza*, in quanto è basata sull'uguaglianza di insiemi.

Essendo una relazione d'equivalenza, è possibile considerare l'**insieme quoziente** $\boldsymbol{\mathcal{S}}/_{\sim_\Gamma}$ che prende il nome di $\boldsymbol{\mathcal{S}_\Gamma}$ e questo è il nuovo insieme dei mondi i cui elementi sono delle classi di equivalenza, indicati con $[\alpha]$, definite come segue:
$[\boldsymbol{\alpha}] = \{\boldsymbol{\beta} |\ \boldsymbol{\alpha}\ \ \sim_\Gamma\ \ \boldsymbol{\beta}\}$



Si vanno a considerare dunque più mondi, che si comportano in modo uguale, come se fossero un unico mondo; tuttavia i vari mondi raggruppati potevano inizialmente raggiungere mondi diversi, quindi bisogna introdurre in questo insieme una nuova *relazione di raggiungibilità*

In particolare, si vuole passare dal modello $\mathcal{M}$ al modello $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{S}', \mathcal{R}', \mathcal{V}'\rangle$ in cui:

- $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_\Gamma$,
- $\mathcal{R}'$, detta anche $\boldsymbol{\Gamma - filtrazione\ di\ \mathcal{R}}$, è una qualunque relazione definita su $\mathcal{S}_\Gamma$ ($\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{S}_\Gamma \times \mathcal{S}_\Gamma$) che soddisfi le seguenti proprietà:
  - $(F1)$: $se\ \ (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}\ \ \ allora\ \ ([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}'$
  - $(F2)$: $se\ \ ([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}'\ allora\ per\ ogni\ \mathcal{B} \in \Gamma,\ \ se\ \ \begin{cases} \Box\mathcal{B} \in \Gamma \\ e \\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B} \end{cases}\ \ allora\ \ \mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$
- $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_\Gamma$ è l'applicazione da Φ_Γ all'insieme delle parti di $\mathcal{S}_\Gamma$ definita come segue:

$$\mathcal{V}_\Gamma\text{:}\ \boldsymbol{\Phi_\Gamma} \to \wp(\mathcal{S}_\Gamma)\ \ |\ \ \ [\boldsymbol{\alpha}] \in \mathcal{V}_\Gamma(\boldsymbol{A})\ \ \boldsymbol{se\ e\ solo\ se}\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{V}(\boldsymbol{A})\ \ \boldsymbol{con}\ \ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\Phi_\Gamma}$$

Il modello che si va ad ottenere, dunque, sarà molto più piccolo rispetto a quello di partenza; ciò che si vuole andare a dimostrare è che una formula $\mathcal{B} \in \Gamma$ è vera nel mondo α di un modello $\mathcal{M}$ se e soltanto se, per ogni filtrazione $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{M}$, ossia per ogni $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{S}_\Gamma, \mathcal{R}', \mathcal{V}_\Gamma\rangle$, succede che nella classe α del modello $\mathcal{M}'$ è vera $\mathcal{B}$ in α. Formalmente dunque:

$$\boldsymbol{Sia\ \ \mathcal{B} \in \Gamma, \qquad \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{B}\ \text{sse}\ \mathcal{M}' \vDash_\alpha \mathcal{B} \qquad \forall\ \text{filtrazione}\ \mathcal{M}'\text{di}\ \mathcal{M}}$$

Filtrazione e Decidibilità

Nella lezione precedente si è visto come i modelli canonici abbiano determinate proprietà che permettono loro di contenere i *teoremi di correttezza e completezza* per molte logiche modali.

Poiché però l'obiettivo è quello di trovare in qualche modo un risultato in relazione alle decidibilità, è stato necessario introdurre il concetto di **filtrazione**, ossia uno strumento che permette di esprimere il teorema di correttezza e completezza (fino ad ora visto rispetto ad una classe di frame) per frame più piccoli.

Per introdurre il concetto di *filtrazione* è necessario considerare un insieme Γ di formule che deve avere la seguente proprietà: *L'insieme Γ deve essere chiuso rispetto alle sottoformule*, ricordando che:

DATO UN INSIEME Γ ESSO È **CHIUSO RISPETTO ALLE SOTTOFORMULE** SE $\forall \mathcal{A} \in \Gamma \Longrightarrow \; Sfma(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma$

Si parlerà di **filtrazione** rispetto a tale insieme Γ .

Partendo da una logica Λ e da un suo modello (ad esempio il modello canonico), l'idea è quella di passare da tale modello ad uno più piccolo.

La costruzione dell'insieme dei mondi $\mathcal{S}'$

Il modello di partenza è noto essere una terna del tipo $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$ e si vuole passare ad un modello diverso da questo, dove l'insieme di mondi sarà un insieme quoziente dei quello appartenente al modello di partenza. L'insieme quoziente, se elaborato in modo efficiente, porta ad avere un'elevata probabilità di avere un insieme molto più piccolo di quello di partenza.

Si vuole dunque introdurre su $\mathcal{S}$ una **relazione d'equivalenza** $(\sim_{\Gamma})$ così strutturata:

- Si introduce $\boldsymbol{\Gamma_\alpha}$, ossia l'insieme delle formule $\mathcal{B}$ appartenenti all'insieme Γ e che sono vera nel mondo α del modello. Formalmente: $\boldsymbol{\Gamma_\alpha = \{\mathcal{B} \in \Gamma | \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{B}\}}$
- Si decide che due mondi α e β sono associati nella relazione $\sim_\Gamma$ se e soltanto se Γ_α è uguale a Γ_β. Formalmente: $\boldsymbol{(\alpha, \beta) \in \sim_\Gamma \quad [\alpha \sim_\Gamma \beta] \quad sse \;\; \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta}$

Che tale relazione sia una relazione d'equivalenza è ovvio, tant'è che è basata su un uguaglianza tra insiemi, quindi ovviamente è riflessiva, simmetrica e transitiva, infatti:

- α è sempre associato a se stesso
- Se α è associato a β, allora $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$ e allora si può affermare anche che β è associato ad α
- Se α è associato a β e β è associato a δ, ovviamente anche α sarà associato a δ in quanto si avrà che $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta = \Gamma_\delta$

Essendo tale relazione una relazione di equivalenza, è possibile costruire l'**insieme quoziente** ${}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}/_{\boldsymbol{\sim_\Gamma}}$ (detto $\mathcal{S}_\Gamma$) i cui elementi sono le classi di equivalenza e saranno indicati come: $\boldsymbol{[\alpha] \in \mathcal{S}_\Gamma}$; si osservi che la classe α sarà l'insieme di tutti i mondi β tali per cui α e β sono associati nella relazione $\sim_\Gamma$. Formalmente: $\boldsymbol{[\alpha] = \{\beta | \; \alpha \sim_\Gamma \beta\}}$.

Dalle definizioni appena fornite, si può fare la seguente osservazione:

SE Γ È FINITO ED HA ORDINE n, ALLORA $\mathcal{S}_\Gamma$ HA CARDINALITÀ MINORE O UGUALE DI 2^n. FORMALMENTE:

$$Se |\Gamma| = n \; allora \; |\mathcal{S}_\Gamma| \leq 2^n$$

Questo dunque conferma ciò che si voleva in partenza: un insieme di mondi finiti.

DIMOSTRAZIONE

È possibile definire una corrispondenza che va da $\mathcal{S}$ all'insieme delle parti di Γ, ossia:

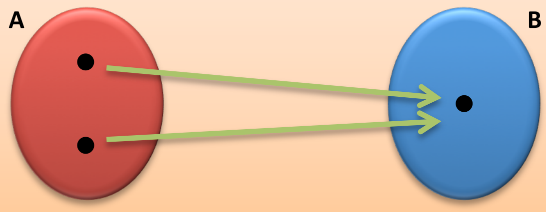
$$f\colon \mathcal{S} \to \wp(\Gamma)$$

in particolare tale corrispondenza permette di associare ad ogni mondo α di f il mondo Γ_α, ossia:

$$f(\alpha) \to \Gamma_\alpha$$

Ma Γ_α è un insieme di formule di Γ, quindi tale corrispondenza permette di associare ad ogni mondo uno ed un solo sottoinsieme di Γ. Viene dunque da chiedersi quale sia il suo *kernel*.

N.B. Si ricorda che il *kernel di una filtrazione* $(\ker(f))$ è quella relazione binaria su $\mathcal{S}$ che associa due elementi di $\mathcal{S}$ se e solo se questi hanno la stessa immagine, ossia graficamente:



data una mappa della relazione tra A e B ed f è una relazione che va da A a B, il ker (f) è quello che associa due coppie di elementi di A ad un unico elemento di B.

Due mondi α e β appartengono a ker (f) se e soltanto se $f(\alpha) = f(\beta)$, ossia:

$$(\alpha, \beta) \in ker(f) \;\; sse \;\; f(\alpha) = f(\beta)$$

Ma $f(\alpha)$ per definizione non è altro che Γ_α, così come $f(\beta)$ non è altro che Γ_β, quindi la relazione di prima può essere riscritta come:

$$(\alpha, \beta) \in ker(f) \;\; sse \;\; \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$$

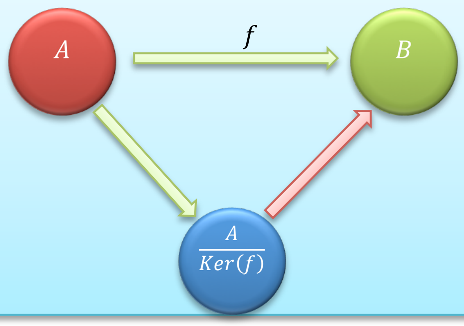
ma allora, per la definizione della relazione d'equivalenza $\sim_\Gamma$, si può affermare che:

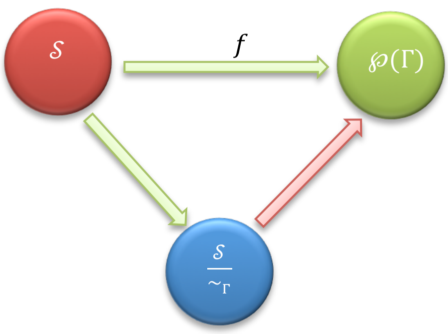
$$(\alpha, \beta) \in ker(f) \;\; sse \;\; \alpha \sim_\Gamma \beta$$

Esiste poi un teorema, il **teorema di fattorizzazione delle applicazioni**, secondo cui:

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE DELLE APPLICAZIONI: SE ESISTE UNA MAPPA f TRA A E B E SI CONSIDERA L'INSIEME QUOZIENTE ${}^{A}/_{Ker(f)}$, INSIEME ALL'APPLICAZIONE NATURALE CHE VA DA A A ${}^{A}/_{Ker(f)}$, ALLORA ESISTE UN'APPLICAZIONE INIETTIVA TRA ${}^{A}/_{Ker(f)}$ E B.

GRAFICAMENTE:





L'applicazione del teorema sopra enunciato al sistema qui in analisi, porta ad affermare quanto segue:

- A corrisponde a $\mathcal{S}$
- B corrisponde all'insieme delle parti di Γ
- $\frac{A}{Ker(f)}$ diventa $\frac{\mathcal{S}}{\ker(f)}$, ma inoltre si è osservato in precedenza che $\ker(f) = \sim_\Gamma$, quindi si ottiene l'insieme quoziente $\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}$.
- Dal teorema sopra, si può quindi affermare che esiste un'applicazione iniettiva g che va da $\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}$ a $\wp(\Gamma)$.

Il fatto che esista questa applicazione iniettiva, permette di affermare che, al peggio, l'insieme $\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}$ avrà tanti elementi tanti quanti sono gli elementi di $\wp(\Gamma)$ (infatti ogni elemento di $\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}$ deve avere una ed una sola immagine in $\wp(\Gamma)$).

Risulta noto, però, che $\wp(\Gamma)$ ha cardinalità 2^n, quindi anche $\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}$ avrà al massimo cardinalità 2^n $\left(\left|\frac{\mathcal{S}}{\sim_\Gamma}\right| \leq 2^n\right)$.

Si è dunque riusciti a dimostrare che è possibile ricavare da un insieme dei mondi un nuovo insieme dei mondi *finito*; ora bisogna proseguire con la costruzione effettiva del modello con questo nuovo insieme dei mondi.

La costruzione della relazione di accessibilità $\mathcal{R}'$

Si consideri, dunque, il modello $\mathcal{M}'$ composto come segue:

- L'insieme dei mondi $\mathcal{S}_\Gamma$ che si è visto essere finito con un limite di cardinalità dato in funzione della cardinalità di Γ e quindi facilmente calcolabile
- Si vuole definire una relazione $\mathcal{R}'$ che però non sia del tutto fissata perché sarà utile in seguito poterla un po' modificare. In particolare $\mathcal{R}'$ dovrà essere una relazione binaria su $\mathcal{S}_\Gamma$ che gode di due **proprietà**:
    - **F1:** se α e β sono due mondi di f associati mediante la relazione $\mathcal{R}$, allora la classe α è associata mediante la relazione $\mathcal{R}'$ alla classe β. Formalmente: $\boldsymbol{Se \quad \alpha\, \mathcal{R}\, \beta \quad allora \quad [\alpha]\mathcal{R}'[\beta]}$
    - **F2:** se la classe α e associata alla classe β mediante la relazione $\mathcal{R}'$ implica che per ogni formula $\mathcal{B}$ la cui necessità sta in Γ, se $\Box\mathcal{B}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$, allora $\mathcal{B}$ è vera nel mondo β del modello di partenza $\mathcal{M}$. Formalmente: $\boldsymbol{[\alpha]\mathcal{R}'[\beta] \implies \forall\mathcal{B} \mid \Box\mathcal{B} \in \Gamma \quad se\, \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\; allora\; \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}}$

Ogni relazione che si va a cercare, dunque, deve rispettare entrambe tali proprietà, ma può essere definita in tanti modi diversi.

La prima domanda che viene da porsi in merito a tali relazioni è la seguente: ma ne esiste almeno una di relazione che rispetti tali proprietà?

Un esempio di relazione che verifica tali proprietà è la seguente:

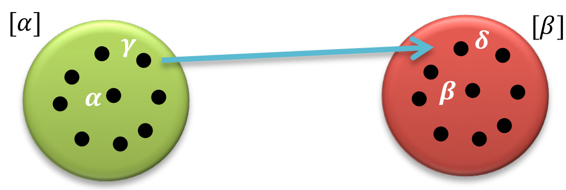
$$\boldsymbol{R^\sigma : [\alpha]\, R^\sigma\, [\beta] \;\; sse \;\; \exists \gamma \in [\alpha]\,, \delta \in [\beta] \quad tali\, che \quad \gamma\, \mathcal{R}\, \delta}$$

La classe α è in realtà un insieme di mondi; in particolare contiene tutti i mondi fatti in maniera tale che si comportino alla stessa maniera rispetto alle formule di Γ. Le formule di Γ, infatti, se sono vere in un mondo sono vere in ognuno di questi mondi e viceversa.

Per la classe β vale la stessa caratteristica; graficamente, dunque, si è nella situazione rappresentata a lato:

All'interno della classe $[\alpha]$ sarà contenuto un mondo α , così come la classe $[\beta]$ conterrà il mondo β.

Ciò che si vuole ottenere è il poter affermare che tutta la classe $[\alpha]$, vista come un unico oggetto, è in relazione con tutta la classe $[\beta]$ (anch'essa vista come un unico oggetto), se esiste nel modello di partenza in $\gamma \in [\alpha]$ ed un $\delta \in [\beta]$ associati tra loro.



Ossia se esistono due mondi associati nella relazione di partenza, allora le sue classi si possono ritenere associate.

La relazione $\mathcal{R}^\sigma$ così definita soddisfa le proprietà F1 ed F2, infatti:

- F1: poiché $\alpha \in [\alpha]$ e poiché $\beta \in [\beta]$, viene immediata la verifica che se $\alpha\ R\ \beta \quad allora\ [\alpha]\ \mathcal{R}'\ [\beta]$

- F2: si parte dal fatto che la classe $[\alpha]$ è in relazione σ con la classe $[\beta]$ quindi è noto che esiste un γ ed un δ tale che $\gamma\ R\ \delta$.
  Si sa inoltre, che, proprio nel mondo α del modello di partenza è vera $\square\mathcal{B}$; a priori, tuttavia, questo non dice nulla sulla verità di $\mathcal{B}$ in β,perché non è detto che via esattamente la relazione tra γ in cui è vero $\square\mathcal{B}$ e δ. Si può fare tuttavia il seguente ragionamento:
  - È noto che $\square\mathcal{B}$ appartiene a Γ_α per definizione, infatti Γ_α è l'insieme di tutte le formule di Γ che sono vera nel mondo α.
  - Ma è anche noto che $\Gamma_\alpha = \Gamma_\gamma$ e, per definizione, questo vuole dire che nel mondo γ del modello è vera $\mathcal{B}$
  - Ma nella relazione $\mathcal{R}$ si ha che γ è associato a δ $(\gamma\,\mathcal{R}\,\delta)$ nel modello iniziale e quindi questo permette di affermare che, essendo $(\gamma,\delta) \in \mathcal{R}$, nel mondo δ del modello iniziale è vera $\mathcal{B}$
  - Ma è noto che $\mathcal{B}$ appartenga a Γ ed in particolare, essendo vera in δ, è possibile affermare che $\mathcal{B} \in \Gamma_\delta$.
  - Ma Γ_δ appartiene alla classe di β, quindi si può affermare che $\Gamma_\delta = \Gamma_\beta$ e quindi, per la definizione di Γ_β, si può affermare che $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$

  Anche la proprietà F2 risulta dunque dimostrata.

Si è dunque dimostrato che almeno una relazione $\mathcal{R}'$ esiste; in particolare, quanto appena visto potrebbe essere un modo di prendere la relazione $\mathcal{R}'$; come si vedrà, infatti, non andrà sempre bene considerarla così definita e questa è la ragione per cui invece di scegliere una relazione ben definita si è andati a definire solo le proprietà che essa deve rispettare.

In questo modo, infatti, è possibile avere uno strumento applicabile ai differenti casi che permetta di variare la relazione purché soddisfi tali proprietà.

La costruzione della funzione di valutazione del modello $\mathcal{M}'$

Bisogna ora andare a costruire una funzione di valutazione V_Γ che, come tutte le funzioni di valutazione, deve andare da un insieme di formule ad un insieme delle parti dei mondi, ossia:

$$\boldsymbol{V_\Gamma = \phi \cap \Gamma \rightarrow \wp(\mathcal{S}_\Gamma)}$$

In questo caso, dunque, la funzione di valutazione viene usata solo per valutare le formule atomiche che appartengono anche a Γ, in quanto, in realtà, usando la *filtrazione su Γ* si vuole andare a ragionare solo sulle formule che vi appartengono.

Tale funzione di valutazione sarà così definita:

UNA CLASSE α APPARTIENE ALLA VALUTAZIONE DELLA FORMULA ATOMICA A (APPARTENENTE A $\phi \cap \Gamma$) SE E SOLO SE α APPARTIENE ALLA VALUTAZIONE DI A. FORMALMENTE:

$$\mathbf{V_\Gamma}: [\boldsymbol{\alpha}] \in \boldsymbol{V(A)}\ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\alpha}\ \in\ \boldsymbol{V(A)}$$

Il *Lemma di Filtrazione*

Fissate tutte le ipotesi precedentemente mostrare, si può finalmente definire il cosiddetto **lemma di filtrazione**

- SIA Λ UNA LOGICA NORMALE
- SIA $\mathcal{M}$ UN MODELLO DI Λ
- SIA Γ UN INSIEME DI FORMULE BEN FORMATE, CHIUSO RISPETTO ALLE SOTTOFORMULE
- SIA $\mathcal{A}$ UNA FORMULA APPARTENENTE A Γ $(\mathcal{A} \in \Gamma)$

$\mathcal{A}$ È VERA NEL MONDO α DEL MODELLO $\mathcal{M}$ SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VERA NELLA CLASSE α DEL MODELLO FILTRATO, PER OGNI MODELLO FILTRATO. FORMALMENTE:

$$\boldsymbol{se\,\mathcal{A} \in \Gamma, allora\ per\ ogni\ \alpha \in \mathcal{S}, si\ ha\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}\ se\ e\ solo\ se\ \mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{A}}$$

(DOVE $\mathcal{M}'$ È UN'ARBITRARIA Γ-FILTRAZIONE DI $\mathcal{M}$)

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è per induzione sul numero di connettivi della formula $\mathcal{A}$ (che è una formula di Γ).

<u>Caso base:</u> $\mathcal{A}$ non ha connettivi

Se $\mathcal{A}$ non ha connettivi, allora è una formula atomica e quindi appartiene a Γ per ipotesi, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = A \quad e \quad A \in \phi \cap \Gamma}$$

Ma A è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$, per definizione, se e soltanto se $\alpha \in V(A)$, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha A \quad sse \quad \alpha \in V(A)}$$

ma $\alpha \in V(A)$ se e soltanto se la classe α appartiene $V_\Gamma(A)$, per come si è definita la funzione di validità $V_\Gamma(A)$, quindi:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha A \quad sse \quad [\alpha] \in V_\Gamma(A)}$$

ma per la definizione di $V_\Gamma(A)$, si può affermare che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha A \quad sse \quad \mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} A}$$

<u>Ipotesi d'induzione:</u> il teorema vale per ogni formula $\mathcal{C}$ che contenga $m < n$ connettivi

Si ricordi che, in tale dimostrazione, si assume – per semplicità di dimostrazione - che i connettivi di cui si sta parlando siano solo $\sim, \Rightarrow, \square$,in quanto i restanti è noto che sono sempre riconducibili a questi.

<u>Passo induttivo:</u> se $\mathcal{A}$ ha n connettivi, allora può essere uno dei seguenti 3 tipi:

1. $\mathcal{A} = \sim \mathcal{B}$
2. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$
3. $\mathcal{A} = \square \mathcal{B}$

Dove nel 1° e nel 3° caso, se $\mathcal{A}$ ha n connettivi, allorea $\mathcal{B}$ ha n-1 connettivi, mentre nel2° caso $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ insieme hanno $n-1$ connettivi, quindi sia $\mathcal{B}$ che $\mathcal{C}$ hanno meno di n connettivi.

Andiamo ora ad analizzare separatamente i vari casi:

<u>$\boldsymbol{\mathcal{A} = \sim \mathcal{B}}$</u>

In tale contesto è noto che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad sse \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B}}$$

ma poiché $\mathcal{B}$ ha un numero di connettivi inferiore ad n, allora si può affermare che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B} \quad sse \quad \mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{B}}$$

ma ancora si può quindi affermare che:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{B} \quad sse \quad \mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{A}}$$

$\underline{\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}$

In tela contesto, è noto che: $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad sse \quad \begin{cases} \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B} \\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C} \end{cases}$

andiamo dunque ad analizzare la prima affermazione:

$\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad sse \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B}$

Come già annunciato, $\mathcal{B}$ avrà un numero di connettivi strettamente inferiore ad n, vale quindi l'ipotesi di induzione per $\mathcal{B}$ e si può di conseguenza affermare che: $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{B} \quad sse \quad \mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{B}$

riconducendosi quindi al caso sopra riportato

$\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad sse \quad \mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C}$

Anche $\mathcal{C}$ ha un numero di connettivi minore di n, quindi si può affermare che: $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{C} \quad sse \quad \mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{C}$

Ma allora $\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ se e solo se è vera una delle seguenti situazioni:

- $\mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{B}$
- $\mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{C}$

Ma se risulta vera una di queste situazioni, significa che nel modello $\mathcal{M}'$, nel mondo classe di α ($[\alpha]$), è vero $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, ossia: $\mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Anche questo secondo caso risulta dunque dimostrato.

$\underline{\mathcal{A} = \Box\mathcal{B}}$

Supponiamo in questo caso di sapere, per ipotesi, che nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ sia vera $\mathcal{A}$ ($\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}$); si vuole quindi andare a dimostrare che nel mondo classe di α del modello $\mathcal{M}'$ sia vera $\mathcal{A}$ ($\mathcal{M}' \vDash_{[\alpha]} \mathcal{A}$). Si vuole quindi dimostrare che per ogni classe β tale che α sia associata mediante a R' a β, nel mondo β del modello $\mathcal{M}'$ sia vera $\mathcal{B}$ ($\forall[\beta]: [\alpha]R'[\beta],\ \mathcal{M}' \vDash_{[\beta]} \Box\mathcal{B}$). Riassumendo:

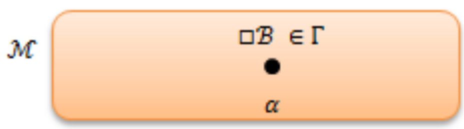
- *Ipotesi:* $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}$
- *Tesi:* $\forall[\beta]: [\alpha]R'[\beta],\ \mathcal{M}' \vDash_{[\beta]} \Box\mathcal{B}$

Ricordando che la proprietà F2 afferma che: $[\alpha]\mathcal{R}'[\beta] \Longrightarrow \forall\mathcal{B} \mid \Box\mathcal{B} \in \Gamma \ \ \text{se}\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\ allora\ \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$

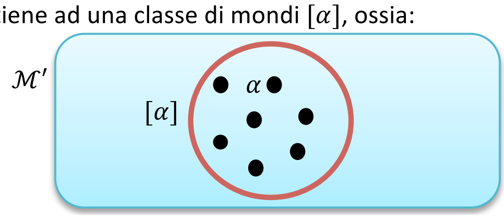
sapendo che $\mathcal{B}$ ha $n-1$ connettivi, si può andare ad utilizzare l'ipotesi di induzione, ottenendo che: $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B} \quad sse \quad \mathcal{M}' \vDash_{[\beta]} \mathcal{B}$

Rappresentando graficamente quanto appena affermato:

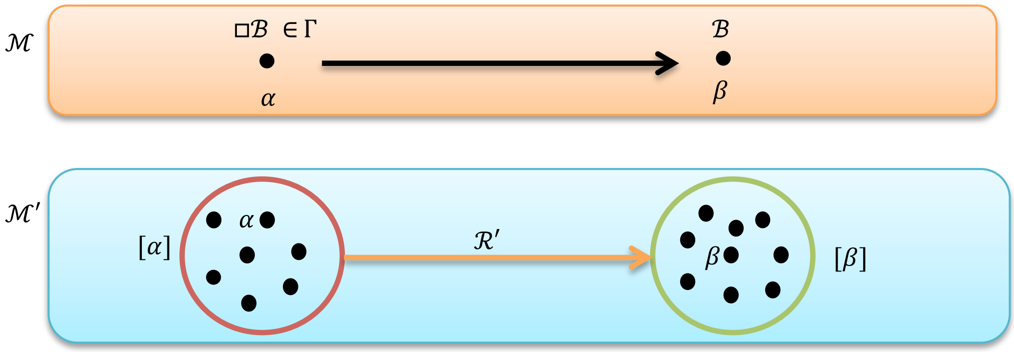
è noto, per ipotesi, che nel mondo α del modello $\mathcal{M}$ è vera $\Box\mathcal{B}$, ossia:



in $\mathcal{M}'$ il mondo α appartiene ad una classe di mondi $[\alpha]$, ossia:



Ciò che si vuole dimostrare è che, con la definizione di verità data, $\Box\mathcal{B}$ sia vero anche nella classe $[\alpha]$; si vuole quindi dimostrare che in qualsiasi mondo raggiungibile da $[\alpha]$ mediante R' è vera $\mathcal{B}$, ossia:



Si consideri quindi un qualsiasi mondo della classe di β ($[\beta]$), composta ovviamente da tanti mondi tra cui β stesso, che sia raggiungibile da $[\alpha]$ mediante $\mathcal{R}'$.

Per far vedere che nel mondo appartenente a $[\beta]$ è vera $\mathcal{B}$, bisogna ricorrere alla proprietà F2, secondo cui $[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}'[\boldsymbol{\beta}] \implies \forall \boldsymbol{\mathcal{B}} \mid \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\Gamma}$ **se** $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\boldsymbol{\alpha}} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ***allora*** $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Risulta dunque direttamente dimostrato che $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$.

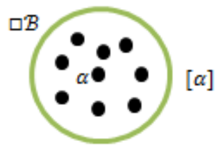
Ma poiché $\mathcal{B}$ ha un numero di connettivi minori di $\mathcal{A}$, per ipotesi di induzione si può affermare anche che $\mathcal{M}' \vDash_{[\beta]} \mathcal{B}$, ossia è vera in un qualsiasi mondo di S^Γ raggiungibile da α. Quindi poiché $\mathcal{B}$ è vera in un qualsiasi mondo di S^Γ raggiungibile da α, allora $\Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è vera nella classe α, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}}' \vDash_{[\alpha]} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ***ossia*** $\boldsymbol{\mathcal{M}}' \vDash_{[\alpha]} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Per completare la dimostrazione, bisogna ora andare ad invertire ipotesi e tesi, ossia:

- *Ipotesi:* $\forall[\beta]: [\alpha]R'[\beta],\ \mathcal{M}' \vDash_{[\beta]} \Box\mathcal{B}$
- *Tesi:* $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A}$

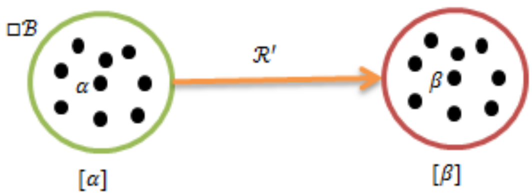
In questa direzione si andrà ad utilizzare la proprietà F1, secondo cui ***se*** $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\mathcal{R}}\,\boldsymbol{\beta}$ ***allora*** $[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}'[\boldsymbol{\beta}]$.

Si vuole dimostrare in questo caso che da ogni β tale per cui da α si può raggiungere β, in β sarà vero $\mathcal{B}$.

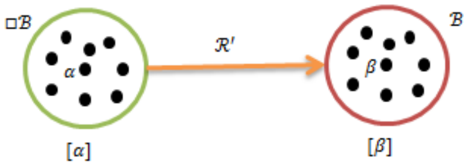


Si consideri la classe α ($[\alpha]$) in cui, per ipotesi, sappiamo essere vera $\Box\mathcal{B}$, ossia:

se ora si va a considerare la classe β ($[\beta]$), la proprietà F1 afferma che, poiché da α si raggiunge β, mediante $\mathcal{R}$, allora mediante $\mathcal{R}'$ si potrà raggiungere dalla classe α la classe β, ossia:



Ma poiché si sa che $\Box\mathcal{B}$ è vera in $[\alpha]$, allora per definizione di verità nel modello canonico, si sa che $\mathcal{B}$ è vera in $[\beta]$, ossia:



Ma $\mathcal{B}$ ha n-1 connettivi, quindi essendo vera in $[\beta]$, per ipotesi di induzione è vera anche in β (ossia $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}$).

Quindi in qualsiasi mondo raggiungibile da α è vera $\mathcal{B}$ e quindi, di conseguenza, in α sarà vera $\Box\mathcal{B}$ (ossia $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}$.

Si è dunque riusciti a dimostrare che il teorema enunciato sopra è valido; tale teorema, però, permette di affermare quanto segue:

LA MINIMA LOGICA NORMALE K È DECIDIBILE

Per dimostrare che K è decidibile bisogna considerare le seguenti affermazioni:

- È noto che K è corretta e completa rispetto alla classe di tutti i frame, ovvero è noto che una formula $\mathcal{A}$ è un teorema di K se e soltanto se $\mathcal{A}$ è valida su ogni frame $\mathcal{F}$. Formalmente: $\vdash_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{\mathcal{A}}$ ***sse*** $\boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Tuttavia non è possibile verificare che $\mathcal{A}$ sia valida su tutti i frame
- Se $\mathcal{A}$ è una fbf con n sottoformule, allora $\mathcal{A}$ è un teorema di K se e soltanto se $\mathcal{A}$ è valida su ogni frame $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$) con cardinalità di $\mathcal{S}$ è minore uguale a 2^n ($|\mathcal{S}| \leq 2^n$). In questo caso si ha a che fare con un numero finito di frame, quindi è possibile verificare quanto affermato.

DIMOSTRAZIONE

In generale, se $\mathcal{A}$ è un teorema di K, allora sarà valido su ogni frame e di conseguenza sarà valido anche su un frame più piccolo, caratterizzato da un numero di mondi limitato. Si può quindi affermare che:

- *Ipotesi:* $\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}\ dove\ \mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})\ con\ |\mathcal{S}| \leq 2^n$
- *Tesi:* $\vdash_K \mathcal{A}$

Per assurdo si supponga che $\mathcal{A}$ non sia un teorema di K, ossia: $\nvdash_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma allora $\mathcal{A}$ sarà falsa sul modello canonico, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

considerando ora:

- $\mathcal{M}^k$ come modello canonico ($\mathcal{M} = \mathcal{M}^k$)
- L'insieme Γ come l'insieme formato dalle sottoformule di $\mathcal{A}$ $(\Gamma = Stfma(\mathcal{A}))$
- Il modello $\mathcal{M}'$ avente:
  - $\mathcal{S}_\Gamma$ come insieme di mondi, di cui è noto che è caratterizzato da una cardinalità $\leq 2^n$
  - $\mathcal{R}^\sigma$ come relazione
  - V_Γ come funzione di valutazione

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}' = (\boldsymbol{\mathcal{S}}_\Gamma, \boldsymbol{\mathcal{R}}^\sigma, \boldsymbol{V}_\Gamma)$$

Il modello così ottenuto è un particolare modello filtrato di $\mathcal{M}$ ed in particolare, avendo definito che $\mathcal{A}$ è falsa nel modello canonico, di sicuro essa dovrà essere falsa in un qualsiasi mondo, ed in particolare si può affermare che $\mathcal{A}$ sarà falsa nel mondo classe di α nel modello filtrato, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}}' \nvDash_{[\alpha]} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

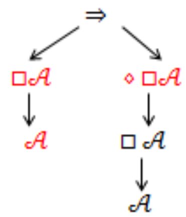
ma se $\mathcal{A}$ è falsa sul modello filtrato, sarà falsa anche sul frame di questo modello, che è il frame definito come l'insieme di mondi di cardinalità minore di 2^n, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{F}} \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma questo è un assurdo, in quanto va contro l'ipotesi secondo cui $\mathcal{A}$ sia valida in tutti i frame ($\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}$).

Si è dunque riusciti a dimostrare che la minima logica normale K è decidibile

Si consideri, ad esempio, la seguente formula: $\Box\boldsymbol{A} \Rightarrow \diamond\, \Box\boldsymbol{A}$ si vuole definire se sia o meno un teorema di K.

Per prima cosa si va determinare il numero di sottoformule della formula data, ricorrendo all'albero di struttura:



le sottoformule dunque sono:

- $\mathcal{A}$
- $\Box\mathcal{A}$
- $\diamond\, \Box\mathcal{A}$
- $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\, \Box\mathcal{A}$

Si vanno dunque a costruire tutti i modelli con al più $2^n = 2^4 = 16$ mondi: analizzando di volta involta i vari modelli e le varie relazioni possibili tra i mondi che li compongono, se si trova un falso si può affermare direttamente che la formula non è teorema di K, altrimenti si procede al passo successivo.
Ovviamente il procedimento è doppiamente esponenziale in quanto bisogna considerare tutti i mondi fino a 2^n e poi tutte le relazioni su tutti gli insiemi con 2^n mondi, tuttavia è noto quando si deve finire e non proseguirà all'infinito.

Se invece di avere solo la logica K si considerasse, ad esempio, la logica KD (dove lo schema D è lo schema così definito: $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\, \mathcal{A}$), verrebbe da chiedersi se, a sua volta, la logica KD sia decidibile.

È noto che KD è corretta e completa rispetto alla classe di frame seriali, ossia è noto che $\mathcal{A}$ è un teorema di KD se e soltanto se $\mathcal{A}$ è valida in ogni frame $\mathcal{F}$, dove $\mathcal{F}$ è un frame seriale. ($\vdash_{KD} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{con\, \mathcal{F}\, seriale}$)

Inoltre si può enunciare il seguente teorema:

SE $\mathcal{A}$ È UN FBF CON n SOTTOFORMULE, $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI KD SE E SOLTANTO SE $\mathcal{A}$ È VALIDA SU OGNI FRAME $\mathcal{F}$ CON $\mathcal{F}$ SERIALE E CON UN INSIEME DI MONDI MINORE O UGUALE A 2^n. FORMALMENTE:

$$\vdash_{KD} \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \ \boldsymbol{sse}\ \ \boldsymbol{\mathcal{F}} \vDash \boldsymbol{\mathcal{A}}, \forall \boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathcal{R}})\ \ \boldsymbol{con}\ \ \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{F}\ \ seriale} \\ |\boldsymbol{\mathcal{S}}| \leq \boldsymbol{2^n} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

- *Ipotesi:*
  - $\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}$
  - $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})\ \ seriale$
  - $|\mathcal{S}| \leq 2^n$
- *Tesi:* $\vdash_{KD} \mathcal{A}$

Procedendo per assurdo, si va a fissare che $\mathcal{A}$ non sia un teorema di KD, ossia:

$$\nvdash_{KD} \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma allora $\mathcal{A}$ sarà falsa sul modello canonico $\mathcal{M}^{KD}$, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}^{KD}} \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

ma ciò significa che c'è un mondo del modello in cui $\mathcal{A}$ è falsa, ossia:

si va ora ad applicare la filtrazione sul modello di partenza, ossia:

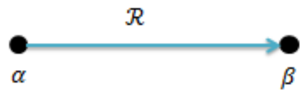
- $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{KD}$
- Si considera come Γ l'insieme delle sottoformule di $\mathcal{A}$, quindi: $\Gamma = Stfma(\mathcal{A})$

Ottenendo quindi il corrispettivo modello filtrato:

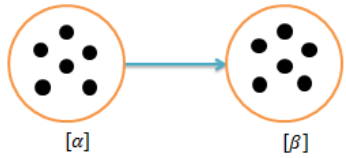
$$\boldsymbol{\mathcal{M}'} = (\boldsymbol{\mathcal{S}_\Gamma}, \boldsymbol{\mathcal{R}^\sigma}, \boldsymbol{V_\Gamma})$$

È noto che $\mathcal{R}$ del modello di partenza è seriale, ma allora anche $\mathcal{R}^{\sigma}$ è seriale, infatti è sufficiente verificare che, dato un qualsiasi mondo $\alpha \in \mathcal{S}_{\Gamma}$, esiste un β tale che esiste $\alpha\ \mathcal{R}^{\sigma}\ \beta$.

Preso α, la relazione $\mathcal{R}$ associa questo α ad un qualche β, ossia:



tale β, però, individuerà una classe, quindi se α è in relazione con β allora la classe $[\alpha]$ sarà in relazione con la classe $[\beta]$



quindi, poiché il modello iniziale è seriale, anche il modello filtrato sarà seriale ed il lemma di filtrazione afferma che la formula $\mathcal{A}$ sarà falsa sul modello filtrato, ossia:

$$\mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{A}$$

ma allora la formula non è valida sul frame seriale su cui è stato costruito il modello, ossia:

$$\mathcal{F} \nvDash \quad \mathcal{A}$$

ma questo va in opposizione a quanto definito per ipotesi.

La tecnica utilizzata in questo caso risulta corretta anche se si considera T, ossia la logica KT, dove T è lo schema $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ che corrisponde alla riflessività.

È corretta anche se si considera lo schema B, ossia lo schema $\mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$ che corrisponde alla proprietà simmetrica, infatti anche in questo caso se $\mathcal{R}$ è simmetrico anche $\mathcal{R}^{\sigma}$ sarà simmetrico.

Si procede ora andando ad analizzare se tale tecnica risulta corretta anche considerando lo schema 4, ossia lo schema $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$ che corrisponde alla proprietà transitiva; in particolare si vuole definire quanto segue: K4 è decidibile? La risposta è sì, tuttavia se si opera con $\mathcal{R}^{\sigma}$ può benissimo succedere che $\mathcal{R}$ sia transitivo, mentre $\mathcal{R}^{\sigma}$ non lo sia, dovendo di conseguenza cambiare la $\mathcal{R}$. Questo è anche il motivo per cui non si è considerata una relazione particolare, ma se ne è considerata una generale (caratterizzata mediante le proprietà) in modo tale che adesso è sufficiente cambiare la relazione, mostrando che è una relazione che conserva le proprietà F1 e F2 e che se la nuova $\mathcal{R}$ è transitiva, anche $\mathcal{R}^{\sigma}$ sarà transitiva, per poter utilizzare il medesimo schema di dimostrazione.

In particolare, per provare la decidibilità di K4 usando il procedimento utilizzato sopra, bisogna trovare una relazione che sia una $\Gamma - filtrazione$ della relazione del modello canonico e sia transitiva. A tal proposito, si può osservare che:

DATA UN RELAZIONE $\mathcal{R}$ TRANSITIVA SULL'INSIEME $\mathcal{S}$ DEI MONDI DI UN MODELLO $\mathcal{M}$ E CONSIDERATO UN INSIEME Γ CHIUSO RISPETTO ALLE SOTTOFORMULE, LA RELAZIONE $\mathcal{R}^{\tau}$ SU $\mathcal{S}^{\Gamma}$ DEFINITA DA

$$([\boldsymbol{\alpha}],[\boldsymbol{\beta}]) \in \boldsymbol{\mathcal{R}^{\tau}} \ \ \boldsymbol{se\,e\,solo\,se\ \ per\,ogni\,fbf\ \mathcal{B},\ \ \Box\mathcal{B} \in \Gamma\ e\ \ \mathcal{M} \vDash_{\alpha} \Box\mathcal{B}\ implicano\ \ \mathcal{M} \vDash_{\beta} \Box\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}}$$

È UNA $\Gamma - filtrazione$ TRANSITIVA

DIMOSTRAZIONE

Verifichiamo da prima che $\mathcal{R}^\tau$ sia una $\Gamma - filtrazione$

$\mathcal{R}^\tau$ soddisfa immediatamente la condizione F2:

infatti la condizione F2 afferma che $[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}^\tau[\boldsymbol{\beta}] \implies \forall \boldsymbol{\mathcal{B}} \mid \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\Gamma}$ $\boldsymbol{se\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\ allora\ \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}}$

Si supponga ora che:

- $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$
- $\Box\mathcal{B} \in \Gamma$
- $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}$

poiché $\mathcal{R}$ è transitiva e lo schema 4 è valido su ogni frame transitivo, si ha anche che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{B}}$

poiché è noto che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}$, dalla precedente si ottiene che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\Box\mathcal{B}}$

Ora, da $\begin{cases}(\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\end{cases}$ segue che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B}}$

allo stesso modo, da $\begin{cases}(\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\Box\mathcal{B}\end{cases}$ segue che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B}}$

quindi se $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ si ha che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\ implica\ \ \mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}}$

ovvero $([\alpha],[\beta]) \in \mathcal{R}^\tau$, pertanto la relazione soddisfa anche la condizione F1, dimostrando così di essere effettivamente una $\Gamma - filtrazione$.

Verifichiamo ora che $\mathcal{R}^\tau$ sia transitiva:

si supponga ora che:

- $([\alpha],[\beta]) \in \mathcal{R}^\tau$
- $([\beta],[\gamma]) \in \mathcal{R}^\tau$

l'ipotesi $([\alpha],[\beta]) \in \mathcal{R}^\tau$ implica che: $\boldsymbol{per\ ogni\ fbf\ \mathcal{B}, da \begin{cases}\Box\mathcal{B} \in \Gamma \\ \mathcal{M} \vDash_\alpha \Box\mathcal{B}\end{cases} segue\ \mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}}$

e da questa si deduce che $\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$ ed essendo $([\beta],[\gamma]) \in \mathcal{R}^\tau$ segue che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\gamma \Box\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}}$

ma allora, per definizione di $\mathcal{R}^\tau$ si può dire che $([\alpha],[\gamma]) \in \mathcal{R}^\tau$, dimostrando così che la relazione è transitiva.

Avendo dimostrato l'osservazione precedente, ora è possibile dimostrare in modo del tutto analogo a quanto fatto precedentemente il seguente teorema:

LA MINIMA LOGICA NORMALE K4 È DETERMINATA DALLA CLASSE DI TUTTI I FRAME TRANSITIVI FINITI. INOLTRE SE $\mathcal{A}$ HA n SOTTOFORMULE, $\mathcal{A}$ È UN TEOREMA DI K4 SE E SOLO SE $\mathcal{A}$ È VALIDO IN TUTTI I FRAME TRANSITIVI CON MENO DI 2^n MONDI, DUNQUE K4 È DECIDIBILE.

DIMOSTRAZIONE

È noto che K4 è corretta e completa rispetto alla classe di tutti i frame transitivi e si vuole andare a dimostrare che $\mathcal{A}$ è un teorema di K4 se e soltanto se è valido su tutti i frame transitivi con un insieme di mondi minore di 2^n. Dunque:

- *Ipotesi:* $\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}$ con $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R})\ transitivi$
- *Tesi:* $\vdash_{K4} \mathcal{A}$

Si supponga per assurdo che: $\nvdash_{K4} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma allora $\mathcal{A}$ non sarà vero sul modello canonico di K4, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}^{K4}} \nvDash \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ed in particolare ci sarà in mondo α in cui $\mathcal{A}$ non è vero, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M}^{K4}} \nvDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

si procede ora con il processo di filtrazione applicato anche nelle precedenti dimostrazioni, ottenendo:

- $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{K4}$
- $\Gamma = Stfma(\mathcal{A})$
- Costruisco il modello $\mathcal{M}'$ pari a $\mathcal{M}' = (\mathcal{S}_\Gamma, \mathcal{R}^\tau, V_\Gamma)$ che corrisponde al modello transitivo filtrato del modello precedente
  - Si osservi che se si considerasse anche in questo caso $\mathcal{R}^\sigma$ si otterrebbe che $\mathcal{A}$ non è vera sul mondo classe α di $\mathcal{M}'$ ($\mathcal{M}' \nvDash_{[\alpha]} \mathcal{A}$), ma poi non permetterebbe di dedurre null'altro in quanto non è detto che $\mathcal{R}^\sigma$ non è detto che sia transitiva

Per il lemma di filtrazione si può di conseguenza affermare che: $\boldsymbol{\mathcal{M}'} \nvDash_{[\alpha]} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

quindi risulta che $\mathcal{A}$ non è valida su tutti i frame, ma questo è un assurdo rispetto all'ipotesi secondo cui $\mathcal{F} \vDash \mathcal{A}$

La tecnica utilizzata per provare la decibilità di queste logiche può essere utilizzata per provare la decidibilità di una qualsiasi logica Λ, basandosi su:

- esistenza di un **modello canonico**
- il fatto che la logica sia determinata da una classe di frame

In particolare, il modello canonico deve essere costruito su uno dei frame della classe di riferimento ed inoltre, quando si procede con la $\Gamma - filtrazione$ del modello canonico, è necessario conservare la proprietà della relazione di partenza.

18 ottobre 2010

I Tableaux

Lo sviluppo di un algoritmo sulla base delle dimostrazioni e dei ragionamenti presentati sopra risulterebbe essere un'operazione a dir poco complessa; in generale, per decidere se un formula è un teorema di una generica logica normale si può utilizzare una tecnica particolare detta **metodo dei tableaux**.

I tableaux sono stati introdotti per diversi tipi di logiche, nel seguito cercheremo di dare le principali caratteristiche comuni dei tebleaux, pur usando come filo conduttore il caso dei tableaux della logica proposizionale.

Caratteristiche principali dei tableaux sono:

- i tableaux agiscono per refutazione su fbf del linguaggio che stiamo considerando
  - in altre parole se si vuole decidere se $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ, si va a verificare che $\sim \mathcal{A}$ non può essere vera su un modello di Λ
- i tableaux agiscono costruendo degli alberi di prova i cui nodi sono etichettati con formule, per successive espansioni di nodi dell'albero
- un tableaux iniziale per una formula $\mathcal{A}$ è un albero T_0 con un solo nodo etichettato come $\sim \mathcal{A}$
- le espansioni degli alberi avvengono utilizzando **regole di espansione** costruite opportunamente per la logica che si sta considerando.
  - Ad esempio i *tableaux per la logica proposizionale* utilizzano le seguenti regole di espansione:

regola $\sim$	$\dfrac{\sim\sim \mathcal{A}}{\mathcal{A}}$		
Regola $\boldsymbol{\alpha}$	$\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$	$\dfrac{\sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{\sim \mathcal{A}, \sim \mathcal{B}}$	$\dfrac{\sim (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})}{\mathcal{A}, \sim \mathcal{B}}$
Regola $\boldsymbol{\beta}$	$\dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{A} \mid \mathcal{B}}$	$\dfrac{\sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}{\sim \mathcal{A} \mid \sim \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\sim \mathcal{A} \mid \mathcal{B}}$
Regola $\Leftrightarrow$	$\dfrac{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A}, \mathcal{B} \mid \ \sim \mathcal{A}, \sim \mathcal{B}}$		$\dfrac{\sim (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})}{\mathcal{A}, \sim \mathcal{B} \mid \sim \mathcal{A}, \mathcal{B}}$

- Dati un tableau T, un suo ramo δ ed il nodo foglia f di δ, sia n un nodo di δ etichettato dalla formula $\mathcal{C}$.
  Fra le regole di espansione sopra elencate ce ne sarà una in cui la formula che figura sopra la riga della regola ha la struttura di $\mathcal{C}$.
  - Un albero T' ottenuto da T attaccando ad f uno o due rami (a seconda che sotto la riga della regola non figuri o figuri il simbolo |) contenenti nuovi nodi etichettati con le formule che compaiono separate da un virgola (e dalla stessa parte dell'eventuale |) sotto la riga della regola di espansione usata, si dice ottenuto da T con un passo di espansione.
- Un tableau T' è un'**espansione coerente** di T se esiste un nodo n di T tale che T' è stato ottenuto da T tramite un numero finito di passi di espansione ciascuno dei quali ha espanso la formula che etichetta n su tutte le foglie del sottoalbero di T che ha radice n
- Un tableau T è ben **costruito** se è stato ottenuto per espansioni coerenti dal tableau radice e nessun nodo è stato oggetto di più di un'espansione coerente
- Un tableau è **completo** se è ben costruito e non può essere oggetto di espansioni coerenti
- Un ramo di un tableau T è **chiuso** se ci sono due nodi sul ramo etichettati rispettivamente con $\mathcal{D}$ e $\sim \mathcal{D}$, per qualche formula $\mathcal{D}$.
- Il tableau T è **chiuso** se tutti i suoi rami sono chiusi
- Una formula $\mathcal{A}$ è vera sulla classe dei modelli che determinano Λ (quindi è un teorema di Λ) se e solo se esiste un tableau chiuso espansione del suo tableau iniziale (che, ricordo, è costituito da un solo nodo etichettato $\sim \mathcal{A}$)

Più un generale, dato un insieme di fbf Γ, $\Gamma \vdash_{\Lambda} \mathcal{A}$ se e solo se esiste un tableau chiuso espansione del tableau costituito da un solo nodo etichettato $(\wedge_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{C}) \wedge \sim \mathcal{A}$.

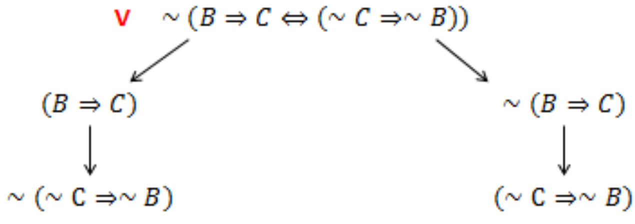
ESEMPIO 1

Verificare che la formula $B \Rightarrow C \Leftrightarrow (\sim C \;\Rightarrow \sim B\;)$ è una tautologia

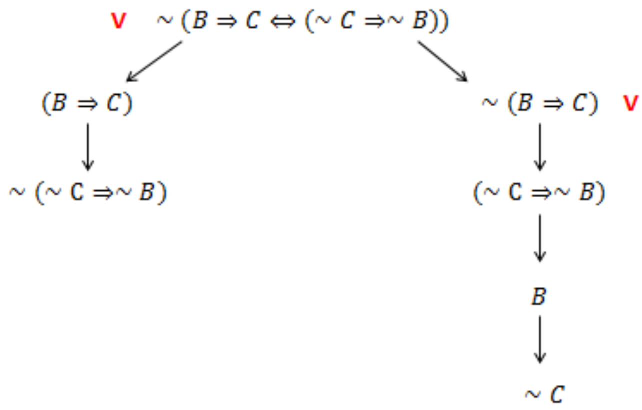
Per applicare il metodo dei tableaux, si va a considerare la negazione della formula data, ossia:

$$\sim \big(B \Rightarrow C \Leftrightarrow (\sim C \;\Rightarrow \sim B\;)\big)$$

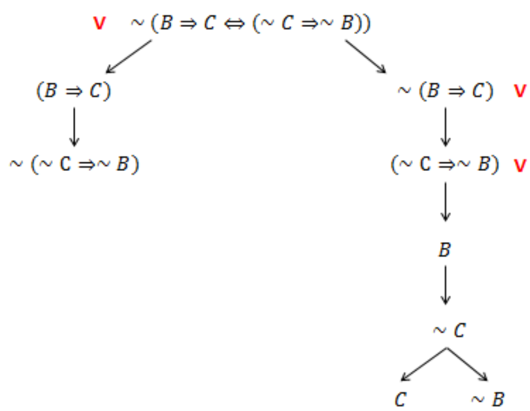
la formula ivi ottenuta è evidentemente riconducibile alla seconda regola ⇔ attraverso la quale è possibile ottenere il primo passo di espansione, ossia:
(indichiamo con una V le formule a cui viene applicata l'espansione)



ora si potrebbero espandere indifferentemente le formule $B \Rightarrow C$ o $\sim (B \Rightarrow C)$; per la prima bisognerebbe ricorrere ad una regola β, mentre per la prima ad una regola α. Per convenzione, si tendono a sviluppare per prime le formule riconducibili alle regole α, pertanto si procede espandendo la formula $\sim (B \Rightarrow C)$ ottenendo:

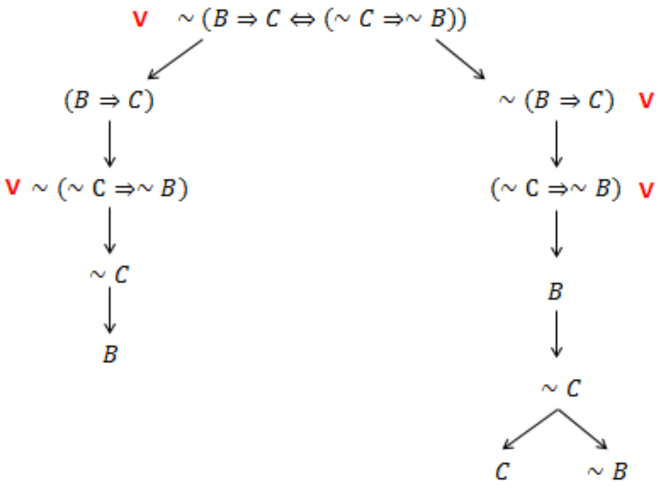


Procedendo per il medesimo ramo, si va ora ad espandere la formula $\sim C \Rightarrow \sim B$, riconducibile alla 3° regola β, dalla quale si ottiene:

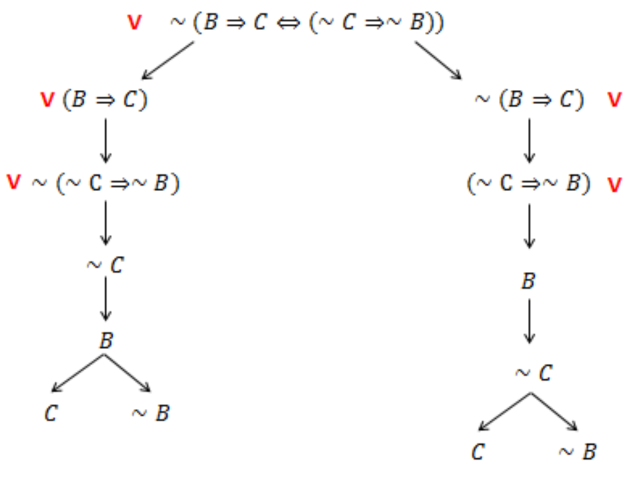


Come si può osservare, il ramo sinistro è *chiuso*, infatti sono presenti sia B che $\sim B$ così come troviamo sia C che $\sim C$.

Si può ora procedere con l'espansione del ramo sinistro, anche in questo caso, la scelta di quale tra le due formule presenti espandere è del tutto arbitraria, ma si preferisce sempre dare maggiore priorità a quelle riconducibili alle regole α, ossia in questo caso $\sim (\sim C \Rightarrow \sim B)$, ottenendo:



si procede ora con l'ultima formula rimasta $(B \Rightarrow C)$ osservando che è riconducibile alla 3° regola β ed ottenendo quindi:



Come si può osservare, anche l'ultimo ramo sviluppato è chiuso e, poiché entrambi i rami sono chiusi, si può affermare che l'albero stesso è chiuso, pertanto si può concludere che:

- la formula usata come radice è *insoddisfacibile*
- la formula iniziale fornita dall'esercizio è una *tautologia*

N.B. Per convenzione, quando si hanno più formule suscettibili ad espansione, si parte da quella a cui si può applicare una regola di tipo α.

ESEMPIO 2

Verificare che la formula $A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C))$ è una tautologia

si va a considerare la negazione della formula data, ossia:

$$\sim (A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)))$$

tale formula è espandibile ricorrendo alla 3° regola α, ottenendo:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V} & \sim (A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C))) \\ & \downarrow \\ & A \\ & \downarrow \\ & \sim (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)) \end{array}$$

l'unica formula espandibile è a sua volta ancora riconducibile alla 3° regola α, ottenendo:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V} & \sim (A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C))) \\ & \downarrow \\ & A \\ & \downarrow \\ \mathbf{V} & \sim (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)) \\ & \downarrow \\ & \sim A \wedge B \\ & \downarrow \\ & \sim (B \vee C) \end{array}$$

per la convenzione sulla scelta delle formule da espandere, si procedere ora con l'espansione della formula $\sim (B \vee C)$, ottenendo:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V} & \sim (A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C))) \\ & \downarrow \\ & A \\ & \downarrow \\ \mathbf{V} & \sim (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)) \\ & \downarrow \\ & \sim A \wedge B \\ & \downarrow \\ \mathbf{V} & \sim (B \vee C) \\ & \downarrow \\ & \sim B \\ & \downarrow \\ & \sim C \end{array}$$

sviluppando infine l'ultima formula rimasta secondo la 2° regola β si ottiene:

$$
\begin{array}{lc}
\text{V} & \sim(A \Rightarrow (\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C))) \\
 & \downarrow \\
 & A \\
 & \downarrow \\
\text{V} & \sim(\sim A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)) \\
 & \downarrow \\
\text{V} & \sim A \wedge B \\
 & \downarrow \\
\text{V} & \sim(B \vee C) \\
 & \downarrow \\
 & \sim B \\
 & \downarrow \\
 & \sim C \\
 & \swarrow \quad \searrow \\
 & \sim A \qquad \sim B
\end{array}
$$

anche in questo caso il ramo (e quindi l’albero) è *chiuso* in quanto è presente sia A che $\sim A$, quindi la formula posta come radice è insoddisfacibile, mentre la formula iniziale è una *tautologia.*

I Tableaux per le logiche modali

Nella lezione si sono i visti i tableaux per la logica proposizionale; si vanno ora ad introdurre i tableaux per la logica modale.

Poiché l'obiettivo dei tableaux si è visto essere quello di costruire un controesempio, in riferimento alla logica modale, la cui correttezza e completezza è definita dalla semantica di Kripke attraverso il modello standard, è necessario rappresentare in qualche modo i mondi dei modelli.

Benchè dunque il procedimento sia lo stesso, in questo caso per espandere i nodi è necessario codificare i mondi e la relazione di raggiungibilità.

In particolare, si andranno a codificare i mondi mediante una σ che rappresenta una sequenza di numero naturali ($\sigma = \{1,2,3,\ldots\}$) e si partirà con l'espansione di un tableau iniziale pari a $\mathbf{1} \sim \boldsymbol{\mathcal{A}}$ ricorrendo a delle regole di espansione simili a quelle viste precedentemente, salvo la necessità di dover espandere anche gli operatori $\Box$ e $\diamond$ e di dover tener conto dei mondi.

Le regole di espansione sono dunque le seguenti:

Regole $\sim$	$\dfrac{\sigma \sim\sim \mathcal{A}}{\sigma\mathcal{A}}$		
Regole $\boldsymbol{\alpha}$	$\dfrac{\sigma\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A}, \sigma\mathcal{B}}$	$\dfrac{\sigma \sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{\sigma \sim \mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$	$\dfrac{\sigma \sim (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})}{\sigma\mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$
Regole $\boldsymbol{\beta}$	$\dfrac{\sigma\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A} \vert \sigma\mathcal{B}}$	$\dfrac{\sigma \sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}{\sigma \sim \mathcal{A} \vert \sigma \sim \mathcal{B}}$	$\dfrac{\sigma\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\sigma \sim \mathcal{A} \vert \sigma\mathcal{B}}$
Regole $\Leftrightarrow$	$\dfrac{\sigma\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A}, \sigma\mathcal{B} \mid \sigma \sim \mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$		$\dfrac{\sigma \sim (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})}{\sigma\mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B} \vert \sigma \sim \mathcal{A}, \sigma\mathcal{B}}$

Per enunciare le regole di espansione per gli operatori $\Box$ e $\diamond$ è necessario introdurre i seguenti concetti:

- ***prefisso disponibile:*** un prefisso si dice *disponibile* se è presente sul ramo
- ***prefisso non ristretto:*** un prefisso σ si dice *non ristretto* su un ramo se σ non è il segmento iniziale di prefissi che occorrono su quel ramo, ossia non esiste alcun σ' nella forma $\sigma' = \sigma\sigma''$ come prefisso della formula su quel ramo
- ***relazione di raggiungibilità:*** se da un mondo α, codificato con la sequenza σ, è raggiungibile il mondo β, β sarà codificato con la sequenza σn (ottenuta concatenando alla sequenza σ un intero positivo n)

Definiti tali concetti, si possono ora enunciare le regole di espansione $\Box$ e $\diamond$ relative unicamente alla logica K:

Regole $\Box$	$\dfrac{\sigma\Box\mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$	$\dfrac{\sigma \sim\diamond \mathcal{A}}{\sigma n \sim \mathcal{A}}$	$per\ ogni\ \sigma n\ disponibile$
Regole $\diamond$	$\dfrac{\sigma \diamond \mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$	$\dfrac{\sigma \sim \Box\mathcal{A}}{\sigma n \sim \mathcal{A}}$	$per\ ogni\ \sigma n\ non\ ristretto$

Tutto il resto funziona come nel caso nei tableaux della logica preposizionale, tenendo conto che un ramo si chiude se in esso ci sono due nodi etichettati con $\sigma\mathcal{D}$ ed $\sigma \sim \mathcal{D}$ per qualche formula $\mathcal{D}$ e qualche prefisso σ

ESEMPIO 1

Applicare il metodo dei Tableaux per verificare che lo schema $(\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B))$ è un teorema di K.

Come detto sopra, la radice sarà così strutturata:

$$1 \ \sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B))$$

a questa formula, è possibile applicare la 3° regola di tipo α, ottenendo:

$$\begin{array}{lc} \text{V} & 1 \ \sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ & 1 \ \diamond (A \Rightarrow B)) \\ & \downarrow \\ & 1 \sim (\square A \Rightarrow \diamond B)) \end{array}$$

si va ora ad espandere la formula $\diamond (A \Rightarrow B)$ ricorrendo alla prima regola $\diamond$, ottenendo quindi:

$$\begin{array}{lc} \text{V} & 1 \ \sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \ \diamond (A \Rightarrow B)) \\ & \downarrow \\ & 1 \sim (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ & 11 \ A \Rightarrow B \end{array}$$

si osservi l'aggiunta dell'interno 1 al prefisso iniziale, al fine di indicare il nuovo mondo di riferimento.

Andando ora ad espandere il 3° nodo, riconducibile alle 3° regola α, si ottiene:

$$\begin{array}{lc} \text{V} & 1 \ \sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \ \diamond (A \Rightarrow B)) \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \sim (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ & 11 \ A \Rightarrow B \\ & \downarrow \\ & 1 \ \square A \\ & \downarrow \\ & 1 \ \sim \diamond B \end{array}$$

tra le formule rimaste, quella al nodo 4 richiederà una regola β, pertanto si passa alla successiva che richiede, invece, l'applicazione della prima regola $\square$(applicabile in quanto è già presente un prefisso 11 disponibile) , ottenendo:

$$\begin{array}{lc} \text{V} & 1 \ \sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \ \diamond (A \Rightarrow B)) \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \sim (\square A \Rightarrow \diamond B)) \\ & \downarrow \\ & 11 \ A \Rightarrow B \\ & \downarrow \\ \text{V} & 1 \ \square A \\ & \downarrow \\ & 1 \ \sim \diamond B \\ & \downarrow \\ & 11 \ A \end{array}$$

passando ora al nodo successivo, si va ad utilizzare la 2° regola □, ottenendo:

$$
\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \;\sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim (\Box A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
11 \;\; A \Rightarrow B \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\; \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\; \sim \diamond B \\
\downarrow \\
11 \; A \\
\downarrow \\
11 \sim B
\end{array}
$$

l'ultima formula da espandere risulta essere $A \Rightarrow B$, da cui si ottiene:

$$
\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \;\sim (\diamond (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim (\Box A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 11 \;\; A \Rightarrow B \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\; \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \;\; \sim \diamond B \\
\downarrow \\
11 \; A \\
\downarrow \\
11 \sim B \\
\swarrow \quad \searrow \\
11 \sim A \quad 11 \; B
\end{array}
$$

A questo punto entrambi i rami ottenuti sono chiusi, infatti si ha:

- $11 \sim A$ e $11 \;\; A$
- $11 \sim B$ e $11 \; B$

Questa è dunque la dimostrazione con i tableaux che la formula iniziale è un teorema della logica K

25 ottobre 2010

ESEMPIO 2

Applicare il metodo dei Tableaux per verificare se lo schema K $(\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B))$ è un teorema di K.

La radice iniziale dell'albero sarà pari a:

$$1 \quad \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B))$$

applicando la 3° regola α, si ottiene:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B))
\end{array}$$

la formula presente al 2° nodo non è al momento espandibile, in quanto richiede l'utilizzo di una regola $\Box$, ma non vi sono prefissi $1n$ disponibili, quindi si procede con l'espansione della formula successiva, riconducibile ancora alla 3° regola α che porta ad ottenere:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1 \;\; \Box A \\
\downarrow \\
1 \;\; \sim \Box B
\end{array}$$

anche in questo caso, la formula $\Box A$ non è espandibile, mentre la formula $\sim \Box$B è espandibile ricorrendo alla 2° regola $\diamond$, ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1 \;\; \Box A \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim \Box B \\
\downarrow \\
11 \;\; \sim B
\end{array}$$

essendo ora disponibile il prefisso 11, è possibile andare ad espandere la formula $\Box(A \Rightarrow B)$ ricorrendo alla prima regola $\Box$, dalla quale si ottiene:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
1 \;\; \Box A \\
\downarrow \\
\text{v} \;\; 1 \;\; \sim \Box B \\
\downarrow \\
11 \;\; \sim B \\
\downarrow \\
11\ A \Rightarrow B
\end{array}$$

Si può ora espandere anche la formula $\Box$A sempre ricorrendo alla 1° regola $\Box$, ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1\ \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim \Box B \\
\downarrow \\
11 \sim B \\
\downarrow \\
11\ A \Rightarrow B \\
\downarrow \\
11\ A
\end{array}$$

si procede ora espandendo l'ultima formula espandibile, riconducibile alla 3° regola β che porta ad ottenere:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \sim (\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1\ \Box(A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim (\Box A \Rightarrow \Box B)) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1\ \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \sim \Box B \\
\downarrow \\
11 \sim B \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 11\ A \Rightarrow B \\
\downarrow \\
11\ A \\
\swarrow \quad \searrow \\
11 \sim A \qquad 11\ B
\end{array}$$

entrambi i rami sono chiusi, pertanto si è fornita la dimostrazione mediante tableaux che effettivamente lo schema K è un teorema della logica K.

ESEMPIO 3

Applicare il metodo dei Tableaux per verificare se lo schema $(\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B))$ è un teorema di K.

La radice iniziale dell'albero sarà pari a:

$$1 \quad \sim (\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B))$$

andando anche in questo caso ad applicare la 3° regola α si ottiene:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \quad 1 \ \sim (\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
1 \diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B))
\end{array}$$

andando ad espandere la formula al 2° nodo, ricorrendo alla 1° regola $\diamond$ si ottiene:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \quad 1 \ \sim (\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
11 \ (A \Rightarrow B))
\end{array}$$

ora si può procedere espandendo la formula al 3° nodo, ricorrendo ancora alla 3° regola α, e si ottiene:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \quad 1 \ \sim (\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
11 \ (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
1 \diamond A \\
\downarrow \\
1 \ \sim\diamond B
\end{array}$$

la formula al 4° nodo richiederebbe una regola β, pertanto si passa alla formula successiva, espandibile secondo la 1° regola $\diamond$, osservando che il prefisso 11 è già presente e bisognerà quindi ricorrere al prefisso 12. Si ottiene dunque:

$$\begin{array}{c}
\text{v} \quad 1 \ \sim (\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \diamond (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B)) \\
\downarrow \\
11 \ (A \Rightarrow B)) \\
\downarrow \\
\text{v} \quad 1 \diamond A \\
\downarrow \\
1 \ \sim\diamond B \\
\downarrow \\
12 \ A
\end{array}$$

si può ora espandere la formula successiva, ricorrendo alla 2° regola □ ed ottenendo:

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{V}\quad 1\ \sim(\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \diamond(A \Rightarrow B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B))\\
\downarrow\\
11\ \ (A \Rightarrow B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \diamond A\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \sim\diamond B\\
\downarrow\\
12\ A\\
\downarrow\\
11\ \sim B
\end{array}
$$

si può ora espandere l'unica formula rimasta, che richiede l'utilizzo della 3° regola β, ottenendo:

$$
\begin{array}{c}
\mathsf{V}\quad 1\ \sim(\diamond(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\diamond A \Rightarrow \diamond B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \diamond(A \Rightarrow B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1 \sim (\diamond A \Rightarrow \diamond B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 11\ \ (A \Rightarrow B))\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \diamond A\\
\downarrow\\
\mathsf{V}\quad 1\ \sim\diamond B\\
\downarrow\\
12\ A\\
\downarrow\\
11\ \sim B\\
\swarrow \qquad \searrow\\
11 \sim A \qquad\quad 11\ B
\end{array}
$$

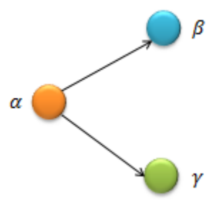
Non vi sono formule ulteriormente espandibili e dall'albero ottenuto si può notare che:

- il ramo destro è chiuso, infatti è presente su di esso $11\ B \quad e \quad 11 \sim B$
- il ramo sinistro non è chiuso, in quanto gli elementi A e $\sim A$ non appartengono al medesimo mondo, infatti si ha $12\ A$ e $11 \ \sim A$

Si è dunque dimostrato che la formula iniziale non è un teorema di K ed inoltre si è ottenuto il modello su cui questa formula non è verificata. In particolare, questo modello è composto da 3 mondi:

- $1 \ \rightarrow \ \alpha$
- $11 \rightarrow \ \beta$
- $12 \rightarrow \ \gamma$

e tali 3 mondi sono strutturati come rappresentato a fianco:



Poiché tra il prefisso 11 ed il prefisso 12 non v'è alcun collegamento, è evidente che tra i mondi β e γ non vi è alcuna correlazione ed in particolare risulta evidente che A sarà vera in β (infatti è il ramo che si chiude), ma non è vera in γ; di conseguenza la formula iniziale sarà falsa in α, infatti :

- nel mondo 1 è vera $\diamond A$
- nel mondo 1 non è vero $\diamond B$, quindi il conseguente della formula iniziale è falso
- nel mondo 1 è vero $\diamond(A \Rightarrow B)$ e quindi, per le tavole di verità dell'implicazione, si sa che se è vero l'antecedente e falso il conseguente, la formula iniziale è falsa e quindi non è uno schema di K

ESEMPIO 4

Applicare il metodo dei Tableaux per verificare che lo schema 4 ($\Box A \Rightarrow \Box\Box A$) non è un teorema di K.

La radice iniziale dell'albero sarà pari a:

$$1 \quad \sim (\Box A \Rightarrow \Box\Box A)$$

si procede ora applicando la 3° regola α, ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \ \sim (\Box A \Rightarrow \Box\Box A) \\
\downarrow \\
1 \ \Box A \\
\downarrow \\
1 \ \sim \Box\Box A
\end{array}$$

la formula al 2° nodo non è espandibile in quanto non vi sono prefissi disponibili, si procede dunque espandendo la formula al 3° nodo, riconducibile alla 2° regola $\diamond$ ed ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \ \sim (\Box A \Rightarrow \Box\Box A) \\
\downarrow \\
1 \ \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \ \sim \Box\Box A \\
\downarrow \\
11 \ \sim \Box A
\end{array}$$

avendo ora un prefisso disponibile, è possibile espandere la regola al 2° nodo mediante la 1° regola $\Box$ ed ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \ \sim (\Box A \Rightarrow \Box\Box A) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \ \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \ \sim \Box\Box A \\
\downarrow \\
11 \ \sim \Box A \\
\downarrow \\
11 \ A
\end{array}$$

si procede ora con l'espansione della formula al 4° nodo mediante la 2° regola $\diamond$, ottenendo:

$$\begin{array}{c}
\text{V} \quad 1 \ \sim (\Box A \Rightarrow \Box\Box A) \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \ \Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 1 \ \sim \Box\Box A \\
\downarrow \\
\text{V} \quad 11 \ \sim \Box A \\
\downarrow \\
11 \ A \\
\downarrow \\
12 \ \sim A
\end{array}$$

non vi sono ulteriori formule espandibili, l'albero è completo, ma non è chiuso a dimostrazione del fatto che lo schema 4 non è un teorema della logica K.

Classificazione delle logiche modali

Le logiche normali più comuni sono quelle che si ottengono da K, per estensione, tramite un sottoinsieme dei seguenti schemi di assiomi:

Nome	Schema	Logica ottenuta
D	$\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\mathcal{A}$	K_D corretta e completa su tutti i frame seriali
T	$\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	K_T corretta e completa su tutti i frame riflessivi
4	$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$	K_4 corretta e completa su tutti i frame transitivi
B	$\mathcal{A} \Rightarrow \Box\diamond\mathcal{A}$	K_B corretta e completa su tutti i frame simmetrici
5	$\diamond\mathcal{A} \Rightarrow \Box\diamond\mathcal{A}$	K_5 corretta e completa su tutti i frame euclidei

In particolare, viene detta $K_{[nome\ dell'assioma]}$ la minima logica modale che contiene gli schemi corrispondenti al nome dell'assioma indicato.

Si vuole ora vedere come queste logiche possono esser collegate tra loro, infatti, dati i 5 insiemi di assiomi sopra elencati, si possono ottenere 2^5 combinazioni di logiche modali diverse.

Per poter eseguire questo tipo di analisi, è necessario introdurre le seguenti *definizioni:*

- **Modalità:** si dice *modalità* ogni parola dell'alfabeto $\{\diamond, \Box\}^*$, ovvero ogni sequenza finita (anche vuota) di tali simboli
- **Modalità duale:** i due simboli $\diamond, \Box$ si dicono uno duale dell'altro. Data una modalità $M = s_1 s_2 \dots s_r$ con $s_i \in \{\diamond, \Box\}$, si chiama *modalità duale* di M la modalità $M' = s_r' \dots s_2' s_1'$ dove s_i' è il simbolo duale si s_i

Esempio

Data la modalità $A = \Box\Box\diamond$, la sua modalità duale sarà: $A' = \diamond\diamond\Box$

1° Osservazione

se nella logica vale lo schema $M\mathcal{A} \Rightarrow N\mathcal{B}$, dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due formule qualsiasi, mentre M ed N sono due modalità, allora nella logica vale anche lo schema: $\boldsymbol{N'\mathcal{B} \Rightarrow M'\mathcal{A}}$ dove N' e M' rappresentano le modalità duali rispetto a quelle dello schema iniziale

DIMOSTRAZIONE

Se vale lo schema $M\mathcal{A} \Rightarrow N\mathcal{B}$, essendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due formule qualsiasi, allora varrà anche il seguente schema composto dalle loro negazioni, ossia:

$$M \sim \mathcal{A} \Rightarrow N \sim \mathcal{B}$$

ma è noto che lo schema $(M \sim \mathcal{A} \Rightarrow N \sim \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\sim N \sim \mathcal{B} \Rightarrow \sim M \sim \mathcal{A})$ è una tautologia, infatti se si rinomina:

- $M \sim \mathcal{A} = \mathcal{C}$
- $N \sim \mathcal{B} = \mathcal{D}$

la relazione sopra diventa riscrivibile come $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \Leftrightarrow (\sim \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C})$ e queste è risaputo essere una tautologia e quindi è un teorema della logica

ma anche l'antecedente $M \sim \mathcal{A} \Rightarrow N \sim \mathcal{B}$ è definito come teorema della logica, quindi anche il conseguente dovrà essere uno schema della logica ed in particolare, sostituendo la negazione delle modalità con le rispettive modalità duali, il conseguente risulta essere pari a:

$$N' \sim\sim \mathcal{B} \Rightarrow M' \sim\sim \mathcal{A}$$
$$=$$
$$\boldsymbol{N'\mathcal{B} \Rightarrow M'\mathcal{A}}$$

si è dunque effettivamente lo schema duale a quello di partenza.

A seguito di quanto osservato sopra, si può dunque enunciare la seguente proprietà:

IN UNA LOGICA Λ VALE UNO SCHEMA DI ASSIOMI SE E SOLO SE VALE IL SUO DUALE

Lo schema duale di uno schema noto è indicato con il nome dello schema seguito da $\diamond$; si avrà dunque che:

nome schema	schema
$D\diamond$	D
$T\diamond$	$\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\mathcal{A}$
$4\diamond$	$\diamond\diamond\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\mathcal{A}$
$B\diamond$	$\diamond\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$
$5\diamond$	$\diamond\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A}$

Definita tale proprietà, si procede ora mostrando alcune caratteristiche delle logiche.

OGNI LOGICA KT È ANCHE KD

DIMOSTRAZIONE

Tale proprietà è abbastanza ovvia, in quanto è logica che una relazione riflessiva sia anche seriale, procediamo però mostrando la dimostrazione formale.

In KT sappiamo essere valido lo schema T , ossia:

$$T : \Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

ma per quanto osservato sopra, è noto essere valido anche il suo duale, ossia:

$$T\diamond : \mathcal{A} \Rightarrow \diamond\mathcal{A}$$

ma se nella logica sono validi questi due assiomi, allora sarà valido anche lo schema:

$$\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\mathcal{A}$$

ma quanto ottenuto é proprio lo schema D, quindi si può affermare che nella logica KT è valido anche lo schema D e, di conseguenza, tutti i teoremi di KD sono anche teoremi si KT.

KB4 COINCIDE CON KB5

Tale affermazione indica che se si sa che in una logica normale sono validi gli schemi 4 e B, si può dire che in quella logica è valido anche lo schema 5; così come se si sa che in una logica sono validi gli schemi B e 5, si può affermare che nella medesima logica è valido anche lo schema 4.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo in primis che <u>nella logica KB4 vale anche lo schema 5</u> :

la logica KB4 è valida in tutti i frame che sono contemporaneamente simmetrici e transitivi, ma se si ha la proprietà simmetrica e transitiva si ha anche la proprietà euclidea e quindi vale anche lo schema 5.

Formalmente:

è necessario prima di tutto evidenziare il seguente **lemma**:

SE IN UN SISTEMA DI LOGICA NORMALE ABBIAMO LO SCHEMA B E SE $\diamond\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ APPARTIENE ALLA NOSTRA LOGICA, ALLORA ANCHE $\mathcal{C} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$ APPARTIENE ALLA LOGICA CHE STIAMO CONSIDERANDO

DIMOSTRAZIONE

Partendo dallo schema $\diamond \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$, si può ricorrere alla regola di necessitazione, ottenendo: $\square(\diamond \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$

Ricorrendo ora allo schema K, la formula sopra può essere riscritta come: $\square(\diamond \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\square \diamond \mathcal{C} \Rightarrow \square\mathcal{B})$

Per *modus ponens* dalle due formule scritte sopra si ottiene: $\square \diamond \mathcal{C} \Rightarrow \square\mathcal{B}$

Ma sappiamo essere valido anche lo schema B, ossia: $\mathcal{C} \Rightarrow \square \diamond \mathcal{C}$

Per la proprietà della logica proposizionale secondo cui se valgono $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ allora vale anche $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$, individuando rispetto alle formule sopra:

- $\mathcal{A} = \mathcal{C}$
- $\mathcal{B} = \square \diamond \mathcal{C}$
- $\mathcal{C} = \square\mathcal{B}$

si ottiene proprio la formula cercata, ossia: $\mathcal{C} \Rightarrow \square\mathcal{B}$

definendo tale lemma è ora possibile dimostrare che se valgono gli schemi B e 4, allora vale anche lo schema 5.

È noto che lo schema B è così costituito: $\mathcal{A} \Rightarrow \square \diamond \mathcal{A}$

così come lo schema 4 è così definito: $\square A \Rightarrow \square\square A$

bisogna far vedere che da queste è possibile ottenere lo schema 5, ossia $\diamond \mathcal{A} \Rightarrow \square \diamond \mathcal{A}$

Invece di ricorrere allo schema 4, si ricorre al suo duale $(4 \diamond)$ che si è visto essere pari a: $\diamond\diamond \mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$

ricorrendo ora al lemma precedentemente illustrato, dove:

- $\mathcal{C} = \diamond \mathcal{A}$
- $\mathcal{B} = \diamond \mathcal{A}$

abbiamo che lo schema $4 \diamond$ può essere riscritto come: $\diamond \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$

ma per il suddetto lemma, sappiamo che se vale lo schema B e vale lo schema sopra ottenuto, allora vale anche: $\mathcal{C} \Rightarrow \square\mathcal{B}$

che, riscritto in termini di $\mathcal{A}$ risulta essere: $\diamond \mathcal{A} \Rightarrow \square \diamond \mathcal{A}$

ossia esattamente lo schema 5 e quindi si può affermare che tutti i teoremi di KB5 si possono ritrovare nella logica KB4.

Si procede ora dimostrando che <u>nella logica KB5 vale anche lo schema 4:</u>

la logica KB5 è valida in tutti i frame che sono contemporaneamente riflessivi ed euclidei, ma se si ha sia la proprietà riflessiva che quella euclidea, allora necessariamente vale anche la proprietà transitiva e quindi si può affermare che vale lo schema 4.

Formalmente:

anche il questo caso, è noto valere lo schema B che è pari a: $\mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$

così come è valido lo schema 5, di cui si andrà a considerare anche in questo caso il duale 5 ⋄, ossia: $\diamond \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A}$

ricorrendo ora al lemma e fissando:

- $\mathcal{C} = \Box\mathcal{A}$
- $\mathcal{B} = \Box\mathcal{A}$

abbiamo che lo schema 5 ⋄ può essere riscritto come: $\diamond \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$

ma per il suddetto lemma, sappiamo che se vale lo schema B e vale lo schema sopra ottenuto, allora vale anche: $\mathcal{C} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$

che, riscritto in termini di $\mathcal{A}$ risulta essere: $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

ossia esattamente lo schema 4 e quindi si può affermare che tutti i teoremi di KB5 si possono ritrovare nella logica KB4.

Il fatto che la logica KB4 coincida con la logica KB5 porta a poter affermare che entrambe corrispondo alla logica KB45, ossia la logica che contiene tutti e 3 gli schemi presi in considerazione.

Allo stesso modo, per quanto detto in relazione alla prima caratteristica, è possibile affermare che:

LA LOGICA KT COINCIDE CON LA LOGICA KD

Detto ciò, è possibile andare a dimostrare l'ultima uguaglianza tra le logiche, ossia:

KD4B = KT4B = KD5B = KT5

DIMOSTRAZIONE

L'uguaglianza tra le logiche KD4B e KD5B è banale:

si è infatti detto che la logica K4B è uguale alla logica K5B, quindi aggiungendo la logica D ad entrambe si ottiene ancora la stessa logica.

Poiché si sa che ogni logica KT è anche KD, si può affermare che la logica KT4B contiene la logica KD4B, ossia: $KT4B \supseteq KD4B$

si può inoltre affermare che la logica KT4B contiene la logica KT5, in quanto si è visto che le logiche 4 e B insieme determinano la logica 5, dunque: $KT4B \supseteq KT5$

per dimostrare l'uguaglianza, dunque, sarà necessario dimostrare che:

- D+4B portano alla logica T
- T+5 portano alla logica B

Si procede dimostrando in primis che $\underline{D + 4B \Rightarrow T}$

Lo schema D sappiamo essere pari a: $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$

fissando $\mathcal{A} = \diamond \mathcal{A}$, si può riscrivere lo schema precedente come: $\mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$

si procede ora considerando lo schema B, che è noto essere pari a: $\mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$

Unendo le due formule enunciate sopra si ottiene quindi che: $\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\diamond \mathcal{A}$

considerando ora lo schema $4 \diamond$ che sappiamo essere pari a: $\diamond\diamond \mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$

ed unendo queste ultime formule si ottiene: $\mathcal{A} \Rightarrow \diamond\diamond \mathcal{A}$

ma questo è esattamente lo schema $T \diamond$, e se vale lo schema duale sappiamo che vale anche lo schema T.

Risulta dunque dimostrata l'uguaglianza $KT4B = KD4B$

Si procede ora andando a dimostrare che $\underline{T + 5 \Rightarrow B}$

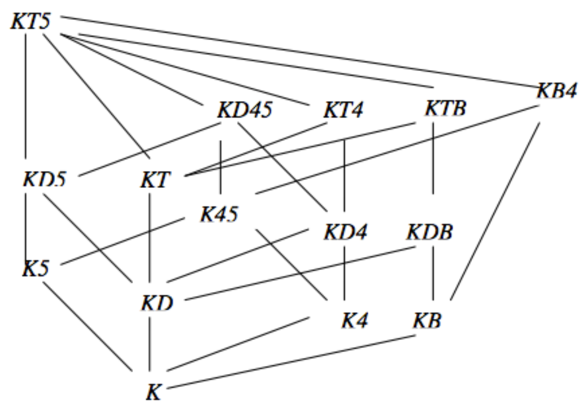
Si considerino gli schemi T e 5, ossia: $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ $\quad \diamond \mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$

Lo schema T può anche essere riscritto nella sua formula duale, ossia: $\mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$

ma a questo punto, unendo lo schema $T \diamond$ con lo schema 5, si ottiene: $\mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$

ma quanto ottenuto é esattamente lo schema B, quindi risulta dimostrata anche l'uguaglianza $KT4B = KT5$

Le logiche modali ottenibili dagli schemi base, dunque, sono in realtà meno di 2^5 e si possono tutte rappresentare nel seguente schema:



si parte (dal basso) dalla logica K che è la più piccola logica normale, dalla quale si ottengono tutte le altre logiche ottenute da K aggiungendo un solo schema, ossia la logica KB, la logica K4, la logica KD e la logica K5.

La logica KT non è inserita a questo livello in quanto essa contiene al suo interno la logica KD e quindi può considerarsi ottenuta aggiungendo due schemi (KTD).

Al livello successivo si trovano le logiche ottenute aggiungendo alla logica K 2 schemi ed in particolare vi si trovano le seguenti logiche: KT, KD4, KDB, KD5 e K45.

Non si ottengono altre logiche, in quanto qualsiasi altra combinazione riporterebbe ad una di queste 5 logiche.

Al livello successivo, andando ad aggiungere un altro schema alle logiche enunciate al livello precedente si ottengono: KT4, KTB, KB45, KB4.

Tutte queste logiche si riuniscono infine al livello successivo in KT5.

Le logiche rappresentate in questo grafo sono dunque tutte le possibili logiche modali ed in particolare sono le più importanti logiche modali.

Potrebbe venire il dubbio che alcune di queste possano coincidere; per controllare ciò è necessario costruire 6 particolari modelli che vadano a controllare gli insiemi di logiche che rispettano determinate proprietà, ottenendo comunque come risultato che tutte le logiche rappresentate nel reticolo sono distinte.

Le logiche normali KT4 e KT5 (introdotte da Lewis) vengono usualmente chiamate anche S4 e S5 rispettivamente. S5 è la logica modale più nota, è detta la *logica della necessità logica* in quanto descrive il fatto che un mondo diverso dall'attuale dovrebbe soddisfare tutte le nostre leggi logiche ed ha trovato recentemente applicazione nell'ingegneria della conoscenza in quanto è una logica adatta a rappresentare l'autocoscienza degli agenti.

Tra gli schemi di S5 ci sono infatti i seguenti: $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ e $\sim \Box A \Rightarrow \Box \sim \Box A$. Interpretando $\Box A$ come "l'agente conosce A", gli schemi dicono che se l'agente conosce qualcosa, esso sa di conoscerla, mentre se non la conosce sa di non conoscerla.

In conclusione, si è fino a qui introdotta una grande famiglia di logiche, dette **logiche K** e, per queste logiche, è stata sviluppata una tecnica di dimostrazione di decidibilità che si basa sul concetto di *correttezza e completezza rispetto ad una classe di frame*, sul concetto di *modello canonico* e sulla proprietà di *frame finito*. Si è visto, infatti, che una formula è vera in tali logiche se e solo se è vera in una classe di frame, rispetto a cui la logica è corretta e completa, caratterizzata da un limite superiore dato dalla complessità della formula.

Benchè questo sia un metodo teorico molto buono, esso è risultato essere praticamente impossibile da usare in quanto la complessità dell'algoritmo di riferimento è doppiamente esponenziale.

Strumento in generale più corretto da usare (sebbene non sempre ottimo) è l'algoritmo dei Tableaux che permette, in modo più semplice, cosa sia o non sia un teorema di queste logiche.

In virtù del fatto che questa tecnica di provare la decidibilità è molto generale, è stato per lungo dibattuto il problema sul fatto che questa tecnica funzionasse o meno su ogni logica normale. In effetti sono stati individuati due schemi particolari:

- $GL : \Box(\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \Box\mathcal{A}$
- $H: \Box(\Box\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \Box\mathcal{A}$

In particolare, è stato dimostrato che:

- la logica KGL è corretta e completa rispetto ad una classe di frame, ma tale classe di frame non è un frame su cui è costruito il modello canonico;
- la logica KH non è corretta e completa per nessuna classe di frame.

25 ottobre 2010

Introduzione alla Logica Temporale

Si vogliono ora andare a costruire delle logiche aventi una chiara **interpretazione temporale**.

Uno dei più semplici frame con una spiccata interpretazione temporale è, per esempio, l'insieme dei numeri naturali con la relazione di raggiungibilità pari a $\leq$.

In particolare, si vuole definire se esiste una qualche logica corretta e completa rispetto ad un frame avente queste caratteristiche (detto *omega-minore* ($\omega_<$)). L'obiettivo è dunque proprio quello di trovare una logica che sia corretta e completa rispetto a $\omega_<$ e che sia, di conseguenza, una logica temporale quando si interpreta il frame come un tempo discreto con origine e senza fine (si osservi la somiglianza con lo sviluppo di un sistema, il quale è avviato in un determinato istante, ma si evolve infinitamente).

Una logica che rispetta tali caratteristiche è la logica **K4DLZ** dove:

- $L: \Box(\mathcal{A} \wedge \Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee \Box(\mathcal{B} \wedge \Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ corrispondente alla *debole connessione*
- $Z: \Box(\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\diamond \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A})$

L'obiettivo consiste proprio nel dimostrare che la logica $\Omega = K4DLZ$ è corretta e completa rispetto al frame $\omega_<$ potendo quindi affermare che essa sia, in un certo senso, un esempio di logica modale temporale Ovviamente questa non sarà sufficiente come logica temporale in quanto, nelle applicazioni, si avrà bisogno di predicare sullo stato successivo a quello in cui si è e non su tutti i successivi, così come si potrebbe aver bisogno di predicare sul passato e quindi di arricchire un qualche modo la logica.

Per dimostrare che la logica Ω è corretta e completa rispetto ad una classe di frame $\omega_<$ è necessario però introdurre alcuni concetti utili:

- **sottomodello generato da α**
- **p-morfismo**

Il sottomodello generato da α

Definizione:

Siano $M = (S, R, V)$ un modello ed $\alpha \in S$, indichiamo con R^* la chiusura riflessiva e transitiva di R e poniamo:

- $S^\alpha = \{\beta \in S \mid \alpha\, R^*\, \beta\}$
- $R^\alpha = R \cap (S^\alpha \times S^\alpha)$
- $V^\alpha(P) = V(P) \cap S^\alpha$

il modello $M^\alpha = (S^\alpha, R^\alpha, V^\alpha)$ si dice **sottomodello di M generato da α**

Tale concetto è utile in quanto, dato un modello standard del tipo $M = \{S, R, V\}$ e sapendo che $\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{A}$, per valutare se $\mathcal{A}$ sia vera o falsa nel modello non sarà necessario considerare tutto il modello, bensì:

- se $\mathcal{A}$ non contiene connettivi modali, sarà sufficiente ragionare su α
- se $\mathcal{A}$ contenesse dei connettivi modali, bisognerà ragionare su mondi raggiungibili da α e successivamente sui mondi raggiungibili da questi ultimi e così via.

Non si ha dunque bisogno di analizzare tutto il modello, ma sarà sufficiente considerare la *componente connessa* che contiene α.

In relazione al concetto di *sottomodello generato da α*, inoltre, si può enunciare il seguente lemma:

> SIANO $\mathcal{M}$ UN MODELLO, $\mathcal{M}^\alpha$ IL SUO SOTTOMODELLO GENERATO DA α ED $\mathcal{A}$ UNA FBF, ALLORA, PER OGNI MONDO $\beta \in S^\alpha$:
>
> $$\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A} \quad se\ e\ solo\ se \quad \mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A}$$

Tale teorema va dunque a dimostrare formalmente la possibilità di considerare solo l'insieme connesso di α.

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è per induzione sul numero di connettivi e quindi la formula $\mathcal{A}$ può assumere le seguenti forme:

- A
- $\sim \mathcal{B}$
- $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$
- $\Box\mathcal{B}$

Per ognuna di queste forme bisognerà dunque dimostrare che il teorema vale.

Caso Base: $\boldsymbol{\mathcal{A} = A}$

se la formula A non ha connettivi, è una formula atomica A e dunque $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta A \text{ se e solo se } \beta \in V^\alpha(A)$

ma in tali condizioni $\beta \in V^\alpha(A) = \beta \in V(A)$

pertanto si ottiene che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta A \text{ se e solo se } \mathcal{M} \vDash_\beta A$

che è esattamente quanto enunciato dal teorema

Ipotesi di induzione: supponiamo che il teorema sia vero per ogni formula contenente m<n connettivi

$\boldsymbol{\mathcal{A} =\sim \mathcal{B}}$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ contiene n-1 connettivi quindi per essa sappiamo che il teorema vale.

Per definizione si ha dunque che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A} \text{ se e solo se } \mathcal{M}^\alpha \nvDash_\beta \mathcal{B}$

ma per ipotesi di induzione si ha che: $\mathcal{M}^\alpha \nvDash_\beta \mathcal{B} \text{ se e soltanto se } \mathcal{M} \nvDash_\beta \mathcal{B}$

ma se nel mondo β del modello $\mathcal{M}$ è falsa $\mathcal{B}$, allora dovrà essere vera $\sim \mathcal{B}$, ottenendo quindi che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A} \text{ se e soltanto se } \mathcal{M} \vDash_\beta \sim \mathcal{B}$

ma $\sim \mathcal{B} = \mathcal{A}$ quindi si ottiene anche in questo caso esattamente l'enunciato del teorema, infatti: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A} \text{ se e soltanto se } \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A}$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}$

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ contengono m<n connettivi quindi anche per questi è noto, per ipotesi di induzione, che il teorema vale.

Per definizione si ha che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A} \text{ se e solo se} \begin{cases} \mathcal{M}^\alpha \nvDash_\beta \mathcal{B} \\ \mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{C} \end{cases}$

ma per ipotesi di induzione si può affermare che:

$$\mathcal{M}^\alpha \nvDash_\beta \mathcal{B} \text{ se e solo se } \mathcal{M} \nvDash_\beta \mathcal{B}$$
$$\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{C} \text{ se e solo se } \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{C}$$

ma una delle due relazioni ottenute, non esclusive, vale se e soltanto se $\mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$

e ricordando che $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, si ottiene anche in questo caso l'enunciato del teorema, infatti: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \mathcal{A} \text{ se e solo se } \mathcal{M} \vDash_\beta \mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \Box\mathcal{B}$

Ipotesi: supponiamo di sapere che $\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$
Tesi: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$

Per dimostrare la tesi, è necessario far vedere che: $\forall\gamma \,|(\beta,\gamma) \in \mathcal{R}^\alpha, \mathcal{M}^\alpha \vDash_\gamma \mathcal{B}$

ma è noto, per definizione, che $\mathcal{R}^\alpha$ è contenuta in $\mathcal{R}$, infatti $R^\alpha = R \cap (\mathcal{S}^\alpha \times \mathcal{S}^\alpha)$, ma allora il fatto che $(\beta,\gamma) \in \mathcal{R}^\alpha$ indica che: $(\beta,\gamma) \in \mathcal{R}$

ma poiché $\mathcal{R}^\alpha$ è data dall'intersezione tra $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}^\alpha \times \mathcal{S}^\alpha$, si può anche affermare che: $(\beta,\gamma) \in \mathcal{S}^\alpha$

ma con queste osservazioni, si può direttamente affermare che: $\mathcal{M} \vDash_\gamma \mathcal{B}$

poiché γ è un mondo di $\mathcal{S}^\alpha$ e poiché $\mathcal{B}$ ha n-1 connettivi rispetto ad $\mathcal{A}$, per ipotesi di induzione si ottiene che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\gamma \mathcal{B}$

da cui deriva che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$

che è esattamente quanto affermato da teorema.

Ipotesi: supponiamo di sapere che $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$
Tesi: $\mathcal{M} \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$

Per dimostrare la tesi, è necessario far vedere che: $\forall\delta \,|(\beta,\delta) \in \mathcal{R}, \mathcal{M} \vDash_\delta \mathcal{B}$

Per ipotesi, in questo caso risulta noto che: $\beta \in \mathcal{S}^\alpha$

quindi è noto che da α si può raggiungere β con un qualche cammino in $\mathcal{R}$, infatti si sa che i mondi in $\mathcal{S}^\alpha$ sono tutti i mondi raggiungibili da α mediante $\mathcal{R}^*$.

Ora da β bisogna andare in δ con $\mathcal{R}$, quindi il fatto che $\beta \in \mathcal{S}^\alpha$ e che da β si possa raggiungere δ porta ad affermare che: $\delta \in \mathcal{S}^\alpha$

ma se sia β che δ appartengono a $\mathcal{S}^\alpha$, allora si può anche affermare che: $(\beta,\delta) \in \mathcal{S}^\alpha$

inoltre, per ipotesi, si sa che in β è vera $\Box\mathcal{B}$ ($\mathcal{M}^\alpha \vDash_\beta \Box\mathcal{B}$) e questo porta ad affermare che: $\mathcal{M}^\alpha \vDash_\delta \mathcal{B}$

e, per ipotesi di induzione, questo porta ad affermare che: $\mathcal{M} \vDash_\delta \mathcal{B}$

ossia quanto affermato dal teorema.

Per vedere un'applicazione di questo teorema, si consideri la logica S5 che è noto essere pari a KT5=KT4B=… ; tutte le uguaglianze rispetto alla logica S5 portano ad affermare che:

- la logica S5 è corretta e completa rispetto alla classe dei frame riflessivi
- la logica S5 è corretta e completa rispetto alla classe dei frame transitivi
- la logica S5 è corretta e completa rispetto alla classe dei frame simmetrici

ossia la logica S5 è corretta e completa rispetto alla classe di frame detti **di equivalenza**.

Risulta inoltre abbastanza facilmente dimostrabile che la logica S5 è corretta e completa rispetto ai **frame universali**, dove con "*frame universali*" s'intende i frame in cui la relazione è la *relazione universale*.

Ovviamente, una logica corretta e completa nei frame d'equivalenza è anche corretta nella classe dei frame universali, ma non si sa se sia completa. Si potrebbe infatti avere un teorema valido in tutti i frame universali, ma potrebbe non essere valido in tutti i frame di equivalenza (infatti ci possono essere dei frame d'equivalenza che non sono universali).

Andiamo dunque a controllare se questo aspetto possa arrecare dei problemi; in particolare, data una formula $\mathcal{A}$ che sia valida su ogni frame universale ($\mathcal{F}_{univ} \vDash \mathcal{A}$), si vuole verificare se essa sia valida anche in ogni frame di equivalenza.

Dato il frame di equivalenza $\mathcal{F}_1$, si supponga che la formula $\mathcal{A}$ non sia valida in questo frame, pur essendo valida su tutti i frame universali, ossia:

$$\mathcal{F}_1 \nvDash \mathcal{A}$$

questo, però, significa che in un mondo del modello derivato da $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{A}$ è falsa, ossia:

$$\mathcal{M}_1 \nvDash_\alpha \mathcal{A}$$

si ricordi che la relazione $\mathcal{R}_1$, appartenendo ad un frame d'equivalenza, sarà simmetrica, riflessiva e transitiva

ma se $\mathcal{A}$ è falsa qui, allora $\mathcal{A}$ è falsa anche nel sottomodello generato da α, ossia:

$$\mathcal{M}_1^\alpha \nvDash_\alpha \mathcal{A}$$

ma il sottomodella generato da α ($\mathcal{M}_1^\alpha$) , poichè $\mathcal{R}_1$ è riflessiva e transitiva, contiene tutti e soli i mondi raggiungibili da α mediante $\mathcal{R}$, quindi contiene la classe di equivalenza di α e nella classe d'equivalenza di α la relazione $\mathcal{R}$ diventa la relazione universale (ogni relazione di equivalenza, infatti, ristretta sulla classe di equivalenza stessa diventa relazione universale).

Si è dunque ottenuto un frame universale su cui $\mathcal{A}$ non è vera.

Nonostante possa sembrare contraddittorio affermare che una logica corretta e completa rispetto alla classe di frame universali non sia altrettanto completa per la classe di frame equivalenti, si è dunque dimostrato con un controesempio l'effettiva validità di tale affermazione, in virtù delle proprietà del sottomodello generato.

Esiste inoltre un'ulteriore **proprietà** che afferma quanto segue:

DATI DUE FRAME $\mathcal{F}_1$ E $\mathcal{F}_2$, VIENE DETTA **SOMMA DIRETTA** $(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ IL FRAME $\mathcal{F}$ I CUI MONDI SONO OTTENUTI COME $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, ED IN CUI LA RELAZIONE È DATA DA $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. FORMALMENTE DUNQUE:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\boldsymbol{\mathcal{S}_1} \cup \boldsymbol{\mathcal{S}_2}, \boldsymbol{\mathcal{R}_1} \cup \boldsymbol{\mathcal{R}_2})$$

Il $p(seudo) - morfismo$

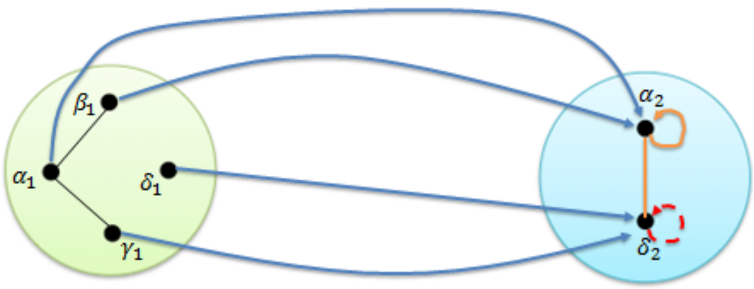
Definizione:

Siano $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{S}_1, \mathcal{R}_1)$ e $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{S}_2, \mathcal{R}_2)$ due frame, un'applicazione f di $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ si dice **p(seudo)-morfismo** di $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ se:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}_1 \quad \alpha \mathcal{R}_1 \beta \ \ implica \ \ f(\alpha) \mathcal{R}_2 f(\beta)$
- $\forall\ \alpha \in \mathcal{S}_1, \forall \delta \in \mathcal{S}_2 \quad f(\alpha)\mathcal{R}_2\delta \ \ implica\ che\ esiste\ un\ \beta \in \mathcal{S}_1\ tale\ che\ \alpha\mathcal{R}_1\beta \ \ e\ che\ \ \delta = f(\beta)$

Graficamente:

Si supponga di avere il primo frame composto da $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\ e\ \delta_1$, mentre il secondo frame è composto da α_2 e δ_2; si supponga, inoltre, che l'applicazione f porti α_1 e β_1 in α_2, mentre γ_1 e δ_1 in δ_2. L'applicazione f va dunque a creare una mappa tra i due frame.



Tale rappresentazione porta ad affermare che, affinchè vi sia un p-morfismo sarà necessario:

- avere un auto-anello su α_2, infatti poiché $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathcal{R}_1$, l'immagine di α_1 e l'immagine di α_2 devono appartenere a $\mathcal{R}_2$, quindi bisognerà tracciare un auto-anello
- avere un arco tra α_2 e δ_2, infatti si ha che $(\alpha_1, \gamma_1) \in \mathcal{R}_1$ e quindi $f(\alpha_1) = \alpha_2$ ed $f(\gamma_1) = \delta_2$ devono appartenere ad $\mathcal{R}_2$
- non definire un auto-anello su δ_2, infatti non vi sono controimmagini di δ_2 (che in questo caso sarebbero δ_1 e γ_1) che appartengano alla relazione $\mathcal{R}_1$, quindi l'auto-anello porterebbe alla perdita del p-morfismo.

Da questo esempio grafico, si ottiene la seguente **proprietà**:

SE SUL FRAME $\mathcal{F}_1$ COSTRUISCO IL MODELLO $\mathcal{M}_1$ E SUL FRAME $\mathcal{F}_2$ COSTRUISCO IL MODELLO $\mathcal{M}_2$, IL P-MORFISMO f È ANCHE UN **P-MORFISMO DEI MODELLI** SE SI SODDISFA LA CONDIZIONE:

$$\boldsymbol{\alpha \in V_1(A)\ se\ e\ solo\ se\ f(\alpha) \in V_2(A)}$$

Dunque si è visto il *p-morfismo* dei frame e, per aggiunta, succede che presa una qualunque formula atomica A nel mondo α, α appartiene a $V_1(A)$ se e soltanto se $f(\alpha)$ appartiene a $V_2(A)$.

Si può dimostrare inoltre che, <u>presi due modelli $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$, se f è un p-morfismo suriettivo di $\mathcal{M}_1$ su $\mathcal{M}_2$</u> (dove con **p-morfismo suriettivo** s'intende che l'applicazione f è suriettiva) <u>allora la formula $\mathcal{A}$ è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}_1$ se e soltanto se la formula $\mathcal{A}$ è vera nel mondo $f(\alpha)$ del modello $\mathcal{M}_2$</u> (valido anche senza suriettività) <u>e $\mathcal{A}$ è vera nel modello $\mathcal{M}_1$ se e soltanto se $\mathcal{A}$ è vera nel modello $\mathcal{M}_2$.</u> Formalmente:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_1 \vDash_\alpha \mathcal{A}\ \ sse\ \ \mathcal{M}_2 \vDash_{f(\alpha)} \mathcal{A} \qquad e \qquad \mathcal{M}_1 \vDash \mathcal{A}\ \ sse\ \ \mathcal{M}_2 \vDash \mathcal{A}}$$

C'è bisogno della suriettività, in quanto, ovviamente, se non ci fosse, non è detto che preso un mondo del modello $\mathcal{M}_2$ sia possibile ritornare al modello $\mathcal{M}_1$, in quanto potrebbe non avere una contro-immagine.

Inoltre, <u>se si ha un p-morfismo dal frame $\mathcal{F}_1$ al frame $\mathcal{F}_2$, se $\mathcal{A}$ è valida su $\mathcal{F}_1$ allora sarà valida anche su $\mathcal{F}_2$.</u>

I concetti di *sottomodello generato* e di *p-morfismo* sono strumenti utili per ridurre ulteriormente i modelli, in quanto:

- con il sottomodello generato si passa da un modello grande ad una componente di quel modello che potrebbe essere fortemente più piccola;
- infatti le applicazioni di cui si è discusso in relazione al p-morfismo possono portare da modelli infiniti a modelli finiti, quindi possono essere un ulteriore strumento utile per ridurre la dimensione dei modelli, permettendo così di disquisire sulla decidibilità.

Le Logiche Temporali

Nella lezione precedente si è formulata un'ulteriore logica modale, ottenuta arricchendo la logica K con gli schemi 4, D, L e Z, ossia:

$$\boldsymbol{K4DLZ}: \begin{cases} \boldsymbol{4}: \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box\Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ \boldsymbol{D}: \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \diamond \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ \boldsymbol{L}: \Box(\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}) \vee \Box(\boldsymbol{\mathcal{B}}\Box \vee \boldsymbol{\mathcal{B}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}) \\ \boldsymbol{Z}: \Box(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow (\diamond \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box \boldsymbol{\mathcal{A}}) \end{cases}$$

Di cui lo schema L è legato alla *debole connessione*, mentre lo schema Z non si utilizza mai da solo in quanto, pur essendo significativo dal punto di vista dei frame, è significativo solo quando già esistono alcune proprietà della relazione di raggiungibilità, ossia quando il frame dispone già di alcune caratteristiche particolari.

Si vuole ora andare a dimostrare che:

LA LOGICA K4DLZ È CORRETTA E COMPLETA RISPETTO AL FRAME $\omega_<$

Dove il **frame $\boldsymbol{\omega_<}$** è il frame temporale ordinato discreto, ossia il frame composto dall'insieme dei mondi ω (che è l'insieme dei numeri naturali) e dalla relazione <, definita come la relazione < nei numeri naturali. Quindi il frame $\omega_<$ è esattamente il classico **frame temporale**.

K4DLZ è dunque un primo esempio di logica temporale, benchè non sia la più caratteristica delle logiche temporale, in quanto si ha soltanto la relazione di raggiungibilità che permette, ad ogni istante, di raggiungere istanti successivi.

DIMOSTRAZIONE

In primis, si vuole andare a dimostrare che la logica è **corretta** rispetto al frame $\omega_<$.

Si vuole dunque andare a dimostrare che ogni teorema della logica e valido sul frame $\omega_<$.

Tale dimostrazione risulta abbastanza semplice, infatti:

- gli schemi A1, A2, A3 e K sono validi su tutti i frame e quindi saranno validi anche sul frame $\omega_<$
- lo schema 4 è valido su $\omega_<$ in quanto il frame $\omega_<$ è transitivo ed è noto che lo schema 4 è valido su tutti i frame transitivi (quindi anche $\omega_<$).
- Lo schema D è valido su $\omega_<$, in quanto $\omega_<$ è un frame seriale ed è noto che lo schema D è valido su tutti i frame seriali
- Lo schema L è legato alla *debole connessione*, secondo la quale un frame è *debolmente connesso* quando:

$$(\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \quad e \quad (\alpha,\gamma) \in \mathcal{R} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma & oppure \\ (\beta,\gamma) \in \mathcal{R} & oppure \\ (\gamma,\beta) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

  ma questa proprietà è banalmente soddisfatta da $\omega_<$, infatti se $\alpha < \beta$ e $\alpha < \gamma$, allora o $\beta = \gamma$, oppure $\beta < \gamma$, oppure $\gamma < \beta$. Quindi si può affermare che vale anche lo schema L, in quanto l'insieme di riferimento è debolmente connesso
- Bisogna ora andare a dimostrare che su $\omega_<$ è valido anche lo schema Z:

  Supponiamo, per assurdo, che Z non sia valido in $\omega_<$, ossia che esista un modello costruito su $\omega_<$ ed un mondo α di questo modello in cui lo schema Z non è vera; formalmente:

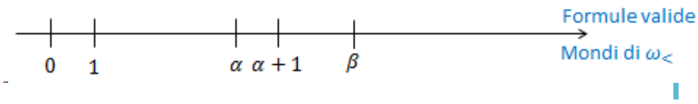
  $$\mathcal{M} \nvDash_\alpha \Box(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow (\diamond \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

  Affinchè lo schema Z non è vero, ovviamente è necessario che o sia falso il conseguente dello schema $(\diamond \Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \Box \boldsymbol{\mathcal{A}})$, oppure che sia falso il conseguente del conseguente $(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}})$, quindi partiamo dall'ipotesi che siano vere le restanti parti:

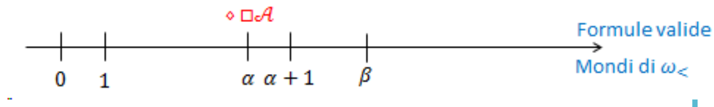
  $$\mathcal{M} \vDash_\alpha \Box(\Box \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}) \qquad \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \diamond \Box \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Ciò che si vuole dimostrare è che, se sono vere queste formule, allora non può capitare che $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sia falso e quindi non può succedere l'ipotesi fatta per assurdo.

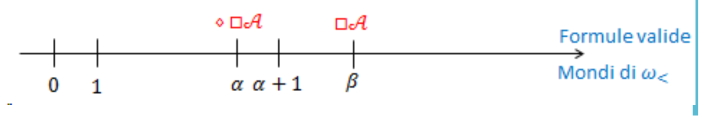
Il frame $\omega_<$ può essere rappresentato come mostrato a lato:



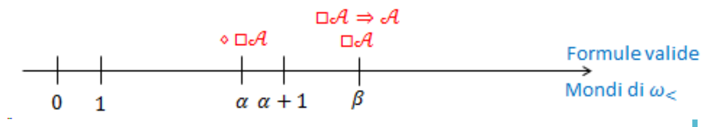
poiché si è detto che $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_\alpha \diamond \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$, di sicuro si può affermare che $\diamond \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sia vera in α, ossia:



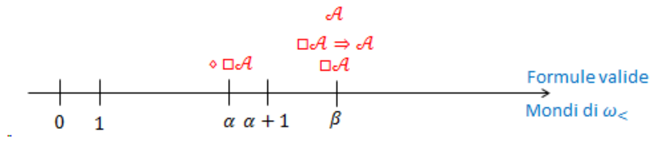
ma allora esiste un mondo successivo (ad esempio β) in cui è vera $\Box\mathcal{A}$, ossia:



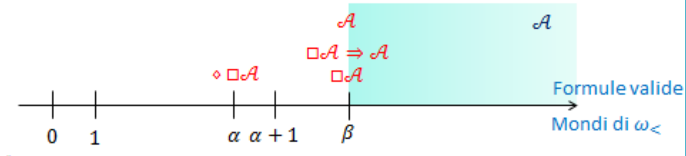
ma è noto che in α è vero anche $\Box(\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$, quindi in β sarà vero anche $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$, ossia:



Per definizione di verità dell'operatore $\Rightarrow$, però, si può anche affermare che in β sia vera anche $\mathcal{A}$, ossia:



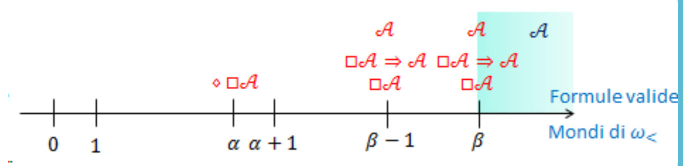
poiché in β è vera $\Box\mathcal{A}$, inoltre, si può dire anche, per la definizione del connettivo $\Box$, che $\mathcal{A}$ sarà vera in tutti i mondi successivi a β, ossia:



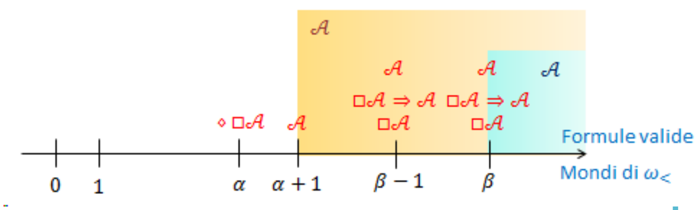
Avendo definito le verità in β, si può passare ad analizzare $\beta - 1$, in relazione alla quale sapremo che sarà vera:

- $\Box\mathcal{A}$, in quanto sappiamo che da β in poi è valida $\mathcal{A}$;
- $\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$, in quanto in α è vera per ipotesi $\Box(\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}})$
- $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ per la definizione del connettivo $\Rightarrow$

Graficamente:



Procedendo a ritroso, con il metodo appena visto per $\beta - 1$, fino al mondo $\alpha + 1$, si ottiene che in tutti i mondi da β a $\alpha + 1$, la formula $\mathcal{A}$ sarà sempre vera, ossia:



Ma se in $\alpha + 1$ è vera $\mathcal{A}$, allora in α deve essere vera $\Box\mathcal{A}$, contro l'ipotesi secondo cui .

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \nvDash_\alpha \Box\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Risulta quindi dimostrato che lo schema Z è valido su $\omega_<$

In particolare, per effettuare quest'ultima dimostrazione si è sfruttata la proprietà dell'insieme di mondi ω per cui tra ogni coppia di mondi è presente solo un numero finito di mondi legati tra loro in base alla relazione $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n$.

Si è dunque visto che anche Z è valido su $\omega_<$ e poiché ogni teorema della logica è un assioma, oppure è ottenuto da formule precedenti mediante *modus ponens* o *regola di necessitazione*, allora $\mathcal{A}$ è una formula valida.

La correttezza, dunque, è stata dimostrata; si prosegue ora andando a dimostrare che la logica $K4DLZ = \Omega$ è **completa** rispetto al frame $\omega_<$

In particolare, si vuole andare a dimostrare che se $\mathcal{A}$ è una formula valida sul frame $\omega_<$ (indicabile anche come $(\omega, <)$), allora $\mathcal{A}$ è un teorema della logica Ω. Definiamo quindi:

- *Ipotesi:* $(\omega, <) \vDash \mathcal{A}$
- *Tesi:* $\vdash_\Omega \mathcal{A}$

Si supponga per assurdo che $\mathcal{A}$ non sia un teorema di Ω: $\nvdash_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\mathcal{A}}$

ma Ω è una logica normale ed essendo tale potremmo definirne il modello canonico $\mathcal{M}^\Omega$ (1° modello della dimostrazione e indicabile anche con $\mathcal{M}_1$). Sapendo che $\mathcal{A}$ non è un teorema della logica Ω, allora $\mathcal{A}$ non sarà vera nemmeno sul modello canonico, quindi non sarà vera in un mondo α del modello canonico, ossia:

$$\boldsymbol{se\ \ \nvdash_{\Omega} \mathcal{A}\ \ allora\ \mathcal{M}_1 \nvDash_\alpha \mathcal{A}}$$

Ma il modello canonico $\mathcal{M}_1$ è caratterizzato come segue:

- siccome la logica Ω contiene lo schema 4, allora $\mathcal{M}_1$ sarà transitivo;
- siccome la logica Ω contiene lo schema D, allora $\mathcal{M}_1$ sarà seriale;
- siccome la logica Ω contiene lo schema L, allora $\mathcal{M}_1$ sarà debolmente connesso.

La prima operazione da fare sul modello in uso consiste nell'**eliminare la debole connessione, rendendola *connessione*,** ovvero far sì che, per ogni α e β sia abbia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ oppure $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}$.

Per fare ciò, è necessario considerare come secondo modello della dimostrazione $\mathcal{M}_2$, il sottomodello di $\mathcal{M}_1$ generato da α ($\mathcal{M}_1^\alpha = \mathcal{M}_2$), ricordando che il sottomodello generato da α non è altro che la componente connessa con α del grafo dei mondi del modello $\mathcal{M}_1$ e che se una formula non è vera non è vera nel mondo α del modello $\mathcal{M}_1$, allora non è vera nemmeno nel mondo α del modello $\mathcal{M}_2$, ossia:

$$\boldsymbol{Se\ \ \mathcal{M}_1 \nvDash_\alpha \mathcal{A}\ \ allora\ \mathcal{M}_2 \nvDash_\alpha \mathcal{A}}$$

Il vantaggio di considerare il modello $\mathcal{M}_2$ consiste nel fatto che esso mantiene tutte le proprietà del modello $\mathcal{M}_1$, ed in particolare:

- poiché $\mathcal{M}_1$ era transitivo, anche $\mathcal{M}_2$ sarà transitivo,
- poiché $\mathcal{M}_1$ era seriale, anche $\mathcal{M}_2$ sarà seriale,
- $\mathcal{M}_2$ sarà *connesso*, in quanto $\forall \beta, \gamma \in \mathcal{S}_2$ (connessi ad α per definizione di sottomodello generato) si avrà che o $(\beta, \gamma) \in \mathcal{R}_2$ oppure $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}_2$

Si è dunque ottenuto un modello molto simile ad $\mathcal{M}_1$.

Si procede ora andando a **filtrare**: tale passaggio è un po' particolare in quanto sappiamo che $(\omega, <)$ è infinito, mentre con una $\Gamma - filtrazione$ si ottiene un modello finito. In realtà, si ricorrerà poi al p-morfismo di $(\omega, <)$ sul modello ottenuto dalla filtrazione e quindi si potrà affermare che se la formula non è valida sul frame finito non sarà valida nemmeno su $(\omega, <)$.

Si va dunque a considerare $\Gamma = Stfma(\mathcal{A})$ e si va a costruire la $\Gamma - filtrazione$ transitiva di $\mathcal{M}_2$. Tale operazione porterà ad avere un modello $\mathcal{M}_3$ avente le seguenti caratteristiche:

- finito;
- transitivo;
- seriale (infatti $\mathcal{R}^\tau \supseteq \mathcal{R}^\sigma$);

- $\mathcal{R}^{\tau}$ è connessa

Si ricorda che $\mathcal{R}^{\tau}$ è definita come segue:

$$[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{\tau}}[\boldsymbol{\beta}] : \ \forall \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\Gamma} | \Box\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\Gamma} \quad \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\alpha}} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}\ \boldsymbol{allora}\ \boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\mathcal{B}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Si può dimostrare che $\mathcal{R}^{\tau} \supseteq \mathcal{R}^{\sigma}$ e che $\mathcal{R}^{\tau}$ è connessa

$\underline{DIMOSTRAZIONE\ \ \mathcal{R}^{\tau} \supseteq \mathcal{R}^{\sigma}}$

Ricordiamo che $\mathcal{R}^{\sigma}$ è definita come segue:

$$[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{\beta}]\ \ \boldsymbol{sse}\ \exists \begin{matrix} \boldsymbol{\eta} \in [\boldsymbol{\alpha}] \\ \boldsymbol{\delta} \in [\boldsymbol{\beta}] \end{matrix}\ \boldsymbol{tale\ che}\ (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\delta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_2}$$

si vuole dunque andare a far vedere che se $(\eta, \delta) \in \mathcal{R}^{\sigma}$ allora $(\eta, \delta) \in \mathcal{R}^{\tau}$

Dalla definizione di $\mathcal{R}^{\tau}$ è noto che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\alpha}} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

ma poiché α ed η appartengono alla stessa classe, si può anche affermare che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\eta}} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

ma poiché sappiamo che $(\eta, \delta) \in \mathcal{R}_2$, si può anche affermare che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\mathcal{B}}$

Poiché sappiamo che in $\mathcal{M}_2$ è valido lo schema 4, è noto che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\eta}} \Box\Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

e quindi ne deriva che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\delta}} \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

si è dunque ottenuto che nel mondo δ del modello $\mathcal{M}_2$ è vera $\mathcal{B}$ e $\Box\mathcal{B}$, quindi si può dire che: $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} \vDash_{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\mathcal{B}} \wedge \Box\boldsymbol{\mathcal{B}}$

poiché si è ottenuto che $\mathcal{M}_2 \vDash_{\eta} \Box\mathcal{B}$ e $\mathcal{M}_2 \vDash_{\delta} \mathcal{B} \wedge \Box\mathcal{B}$, si può quindi dire che: $[\boldsymbol{\alpha}]\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{\tau}}[\boldsymbol{\beta}]$

quindi si può affermare che ogni volta che $([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}^{\sigma}$ si ha anche che $([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}^{\tau}$, quindi è dimostrato che $\mathcal{R}^{\sigma} \subseteq \mathcal{R}^{\tau}$

si va ora a verificare che <u>$\mathcal{R}^{\tau}$ è connessa</u>.

$\underline{DIMOSTRAZIONE\ \ \mathcal{R}^{\tau} è\ connessa}$

Per qualsiasi classi $[\alpha]$ e $[\beta]$, contenenti rispettivamente i mondi α e β, si verifica uno dei seguenti casi:

- $\alpha\ \mathcal{R}_2\ \beta$
- $\beta\ \mathcal{R}_2\ \alpha$

Per la proprietà F1, soddisfatta dalla $\mathcal{R}_2^{\tau}$, si ottiene quindi, rispettivamente che:

- se $\alpha\ \mathcal{R}_2\ \beta$ allora $[\alpha]\mathcal{R}_2^{\tau}\ [\beta]$
- se $\beta\ \mathcal{R}_2\ \alpha$ allora $[\beta]\mathcal{R}_2^{\tau}\ [\alpha]$

quindi comunque si prendano due classi, la relazione risulta connessa.

Si è dunque dimostrato che il modello $\mathcal{M}_3$ è:

- transitivo
- seriale
- connesso
- finito

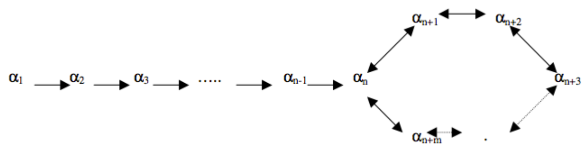
Quest'ultima proprietà, però, non rappresenta in pieno il frame $(\omega, <)$, per tale ragione si va ad introdurre un 4° modello, detto **modello a palloncino** così strutturato:

- ha un insieme di mondi finiti $\{0,1,2, \dots, m, m+1, m+2, \dots, m+n\}$
- la relazione di raggiungibilità è la relazione "*strettamente minore*" (<) a cui però, da un certo punto in poi, si aggiunge la relazione universale, ossia $\boldsymbol{\mathcal{R}_4 = \{i, j | (i < j)\} \cup \{(h, k) | h, k \geq m+1\}}$.

Tale relazione porta la rappresentazione dell'insieme dei mondi ad essere simile ad un "palloncino", infatti se si va a rappresentare la relazione si avrà:

- 0 che va in 1
- 1 che va in 2
- 2 che va in 3
- etc…fino ad arrivare a $m+1$
- da $m+1$ si va in $m+2$ ma si può anche tornare indietro,
- da $m+2$ si va in $m+3$ ma si può anche tornare indietro,
- da $m+3$ si va in $m+4$ ma si può anche tornare indietro,
- etc ..
- alla fine da $m+n$ si va in $m+1$ e si può tornare indietro

ottenendo così la rappresentazione riportata a lato.



Ciò che si vuole andare a dimostrare, dunque, è che esiste un palloncino, modello di Ω, il cui insieme di mondi ha cardinalità minore o uguale a $2^{|Sfma(\mathcal{A})|}$ in cui $\mathcal{A}$ non è vera.

DIMOSTRAZIONE $\mathcal{M}_4 \nvDash \mathcal{A}$

Il modello a palloncino $\mathcal{M}_4$ assomiglia al modello di partenza $\mathcal{M}_3$, infatti è:

- transitivo
- seriale
- connesso
- finito

E' possibile, dunque, ricondurre $\mathcal{M}_3$ sul modello a palloncino $\mathcal{M}_4$; in particolare:

è noto che il modello $\mathcal{M}_3$ è così costituito:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_3 = (\mathcal{S}_3, \mathcal{R}_3, \mathcal{V}_3)}$$

si va ora ad introdurre la relazione ≈ (doppio tilde) così definita:

$$\boldsymbol{[\alpha] \approx [\beta] \ \ sse \ \begin{cases} [\alpha] = [\beta] \quad oppure \\ ([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}_3 \ \ e \ ([\beta], [\alpha]) \in \mathcal{R}_3 \end{cases}}$$

tale relazione, dunque, date due classi di mondi di $\mathcal{S}_3$ è così rappresentabile:

Da questa rappresentazione, si può affermare che ≈ è una **relazione di equivalenza** su $\mathcal{S}_3$, infatti:

- è *riflessiva* per costruzione
- è *simmetrica* per costruzione
- è *transitiva* : infatti

  si considerino le 3 classi di mondi $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ e si supponga che:

  $$\boldsymbol{[\alpha] \approx [\beta] \quad e \quad [\beta] \approx [\gamma]}$$

  ma se $[\alpha] \approx [\beta]$, allora:

  $$\boldsymbol{([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{R}_3 \quad e \quad ([\beta], [\alpha]) \in \mathcal{R}_3}$$

  così come se $[\beta] \approx [\gamma]$ allora:

  $$\boldsymbol{([\beta], [\gamma]) \in \mathcal{R}_3 \quad e \quad ([\gamma], [\beta]) \in \mathcal{R}_3}$$

ma $\mathcal{R}_3$ è una relazione transitiva, quindi dalle precedenti si ottiene che:

$$\left.\begin{matrix}([\alpha],[\beta]) \in \mathcal{R}_3 \\ ([\beta],[\gamma]) \in \mathcal{R}_3\end{matrix}\right\} \Rightarrow ([\alpha],[\gamma]) \in \mathcal{R}_3$$

$$\left.\begin{matrix}([\gamma],[\beta]) \in \mathcal{R}_3 \\ ([\beta],[\alpha]) \in \mathcal{R}_3\end{matrix}\right\} \Rightarrow ([\gamma],[\alpha]) \in \mathcal{R}_3$$

da cui si ottiene quindi che:

$$[\alpha] \approx [\gamma]$$

Si è dunque dimostrato che $\approx$ è una relazione di equivalenza su $\mathcal{S}_3$.

Si può dunque andare a definire $\mathcal{S}_3$ su questa relazione di equivalenza, ottenendo $\mathcal{S}_4$ i cui elementi sono classi di equivalenza di $\mathcal{S}_3$, prendono il nome di **R-cluster** e vengono indicati come:

$$\mathcal{S}_3/_{\approx} = \mathcal{S}_4 = \{C_{[\alpha]} | [\alpha] \in \mathcal{S}_3\}$$

Su $\mathcal{S}_4$ si va ad introdurre la relazione $\mathcal{R}_4$, detta *relazione* $\leq$, definita come segue:

$$\mathcal{R}_4: C_{[\alpha]} \leq C_{[\beta]} \quad se \begin{cases}[\alpha] = [\beta] \ oppure \\ [\alpha]\mathcal{R}_3[\beta]\end{cases}$$

Tale relazione viene ristretta ulteriormente, chiamandola *relazione* $<$ e definendola come segue:

$$\mathcal{R}_4: C_{[\alpha]} < C_{[\beta]} \quad se \begin{cases}C_{[\alpha]} \leq C_{[\beta]} \quad e \\ C_{[\alpha]} \neq C_{[\beta]}\end{cases}$$

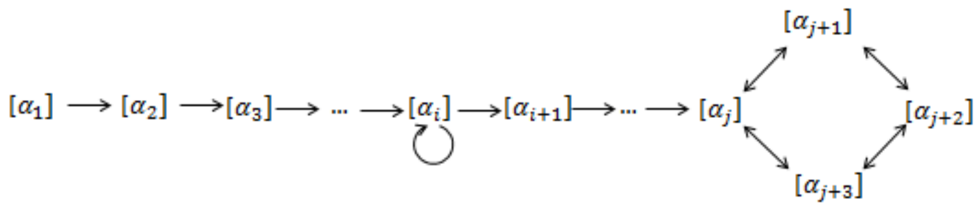
Tra gli R-cluster ce ne sarà qualcuno tale per cui $C_{[\alpha]} \leq C_{[\alpha]}$ (ossia minore di se stesso), ma per essere minore o uguale di se stesso deve succedere che:

$$[\alpha]\mathcal{R}_3[\alpha]$$

Quindi o deve essere presente un autoanello su $[\alpha]$ oppure che deve esserci un R-cluster che permetta di tornare ad $[\alpha]$.

Gli R-cluster che non permettono tale "*ritorno*" prendono il nome di **R-cluster non degeneri**, mentre quelli che lo permettono vengono detti **R-cluster degeneri**.

Se si vanno ora a considerare i cluster su $\mathcal{S}_4$, si otterrà la seguente rappresentazione:



- i cluster $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono tutti non degeneri,
- il cluster α_i potrebbe essere degenere a causa della presenza di un autoanello dato dalla $\mathcal{R}_3$
- dal cluster α_j si sviluppa la struttura "a palloncino" che va a comporre un R-cluster degenere.

Così facendo si è dunque ottenuto un modello simile a quello del palloncino, infatti si è ottenuta una struttura del tipo:

Vi saranno dunque alcuni cluster (come C_1, C_2 e C_3) composti da un mondo solo, altri cluster (come C_i) composti da tanti mondi che si raggiungono tra di loro ed infine ci sarà l'ultimo cluster composto ancora da tanti mondi che si raggiungono tra di loro.

Della struttura ottenuta, ciò che crea problemi è la presenza di alcuni cluster non degeneri prima dell'ultimo, all'interno dei quali può essere presente un solo mondo dotato di autoanello, oppure più mondi collegati tra di loro come nel cluster finale, ossia mediante una relazione universale.

Per ottenere il reale modello a palloncino, è necessario modificare la relazione $\mathcal{R}_3$ in modo che sia più debole (ed ottenendo quindi $\mathcal{R}_4$) e che permetta di "aprire" tutti gli R-cluster non degeneri intermedi.

In particolare, si andrà a costruire un modello così definito:

- avrà esattamente i mondi di $\mathcal{S}_3$
- avrà una relazione $\mathcal{R}'$ contenuta in $\mathcal{R}_3$
- avrà la medesima funzione di valutazione $\mathcal{V}_3$

ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_4 = (\mathcal{S}_3, \mathcal{R}_4 = \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}_3, \mathcal{V}_3)}$$

Tale relazione $\mathcal{R}'$ è definita come segue:

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}' = \begin{cases} \forall \gamma, \delta \text{ che } \notin \text{ allo stesso cluster} & (\gamma,\delta) \in \mathcal{R}' \text{ sse } (\gamma,\delta) \in \mathcal{R}_3 \\ \forall \gamma, \delta \text{ che } \in \text{ all'ultimo cluster} & (\gamma,\delta) \in \mathcal{R}' \\ \forall \gamma_i, \gamma_j \in \text{cluster (non ultimo)} & (\gamma_i, \gamma_j) \in \mathcal{R}' \text{ sse } i < j \end{cases}$$

Per comprendere fino in fondo tale definizione, si consideri il seguente esempio: si supponga che i cluster in analisi siano così strutturati:

$$\begin{tikzcd}
& & & {[\alpha_6]} \arrow[r] & {[\alpha_7]} \arrow[loop right] \\
{[\alpha_1]} \arrow[r] & {[\alpha_2]} \arrow[r] & {[\alpha_3]} \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & {[\alpha_5]} \arrow[d, leftrightarrow] \\
& & & {[\alpha_4]}
\end{tikzcd}$$

Per ottenere il modello a palloncino, si va a considerare la relazione $\mathcal{R}'$ e si ottiene:

- $[\alpha_1]$ andrà in $[\alpha_2]$ per la prima caratteristica della relazione;
- $[\alpha_2]$ andrà in $[\alpha_3], [\alpha_4]$ o $[\alpha_5]$ a scelta, in quanto quest'ultimi appartengono al medesimo cluster; supponiamo, ad esempio, che vada in $[\alpha_5]$.
- Poiché i restanti $[\alpha_3]$ e $[\alpha_4]$ sono tutti successivi ad $[\alpha_2]$ e precedenti $[\alpha_6]$, possono essere ordinati a piacimento; si può quindi supporre che $[\alpha_5]$ vada in $[\alpha_3]$ e che $[\alpha_3]$ vada in $[\alpha_4]$
- Poiché tutti i cluster prima di $[\alpha_6]$ sono già stati ordinati, si può ora far sì che $[\alpha_4]$ vada in $[\alpha_6]$ che, a sua volta, andrà nel cluster finale $[\alpha_7]$.

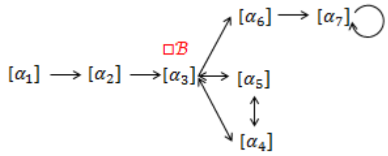
In definitiva, il modello ottenuto con la relazione $\mathcal{R}'$ può essere rappresentato come segue:

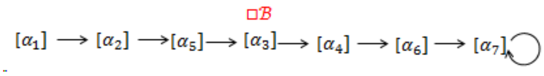
$$\begin{tikzcd}
{[\alpha_1]} \arrow[r] & {[\alpha_2]} \arrow[r] & {[\alpha_5]} \arrow[r] & {[\alpha_3]} \arrow[r] & {[\alpha_4]} \arrow[r] & {[\alpha_6]} \arrow[r] & {[\alpha_7]} \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Si è dunque ottenuto a tutti gli effetti un palloncino, andando ad indebolire la relazione e "disfando" i nodi presenti sulla corda del palloncino.

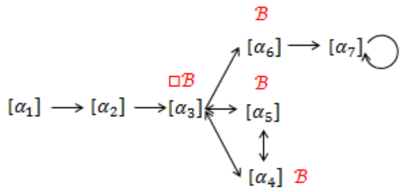
Ciò che si sta cercando di dimostrare, è che tutte e sole le formule vere in $\mathcal{M}_3$ sono vere anche nel palloncino e viceversa; è chiaro che, in assenza di vincoli di tipo "*necessariamente*" non vi sono problemi in quanto tutte le formule sarebbero valide localmente; il problema dunque può nascere con le formule che si presentano con una struttura del tipo $\Box\mathcal{B}$.

E' abbastanza chiaro, riprendendo l'esempio precedente, che se una formula $\Box\mathcal{B}$ è vera in $[\alpha_3]$ nel modello iniziale $\mathcal{M}_3$, allora sarà vera anche in $\mathcal{M}_4$, ossia:





Ma è altrettanto vero che se in $[\alpha_3]$ è vera $\Box\mathcal{B}$, allora in $\mathcal{M}_3$, la formula $\mathcal{B}$ sarà vera indistintamente in $[\alpha_6], [\alpha_5]\ e\ [\alpha_4]$, ossia in tutti i mondi raggiungibili da $[\alpha_3]$.



Tuttavia tale caratteristica non è mantenuta nel modello a palloncino $\mathcal{M}_4$ ottenuto, in quanto se nel primo modello $[\alpha_5]$ è raggiungibile da $[\alpha_3]$, ciò non si verifica nel modello $\mathcal{M}_4$ elaborato.

Questo indebolire la relazione, dunque, potrebbe portare a modificare le validità nei vari cluster; per ovviare a questo problema si ricorre allo schema Z. La presenza dello schema Z, infatti, garantirà, attraverso quello che viene detto **Z-lemma** che non si potrà mai verificare una discontinuità del genere; in particolare esso afferma quanto segue:

Z-LEMMA: SIA $\mathcal{M}$ UN MODELLO COSTRUITO SU UN FRAME $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ SERIALE, RIFLESSIVO E CONNESSO SU CUI È VERO LO SCHEMA Z. SE UNA FORMULA $\Box\mathcal{B}$ NON È VERA IN UN MONDO α DI UN R-CLUSTER C_α CHE NON SIA L'ULTIMO, ALLORA ESISTE UN MONDO β APPARTENENTE AD UN R-CLUSTER C_β TALE CHE $C_\alpha < C_\beta$ IN CUI $\mathcal{B}$ NON È VERA.

Si vuole dunque andare a dimostrare che una formula $\mathcal{C}$ è vera in un mondo α di $\mathcal{M}_3$ se e solo se è vera nel mondo α di $\mathcal{M}_4$; in particolare supponiamo che $\mathcal{C} = \Box\mathcal{B}$; poiché $\mathcal{R}_4 \subseteq \mathcal{R}_3$, allora si può affermare che:

$$\boldsymbol{se\ \mathcal{M}_3 \vDash_\beta \mathcal{C}\ \ allora\ \ \mathcal{M}_4 \vDash_\beta \mathcal{C}}$$

Sia allora $\mathcal{C}$ vera in un mondo β di $\mathcal{M}_4$ e supponiamo che $\mathcal{C}$ non sia vera nel mondo β di $\mathcal{M}_3$.

Se $\mathcal{M}_3 \nvDash_\beta \mathcal{C}$, allora $\mathcal{B}$ dovrà risultare falsa in un mondo γ tale che: $\begin{cases}(\beta,\gamma) \in \mathcal{R}_3 \\ (\beta,\gamma) \notin \mathcal{R}_4\end{cases}$

Per la definizione della relazione $\mathcal{R}_4$ si ha però che: $\left.\begin{matrix}(\beta,\gamma) \in \mathcal{R}_3 \\ (\beta,\gamma) \notin \mathcal{R}_4\end{matrix}\right\}$ $solo\ se\ \beta,\gamma \in allo\ stesso\ R - cluster\ (non\ ultimo)$

Si può allora far uso dello Z-lemma che garantisce l'esistenza di un mondo δ in un R-cluster C_δ tale che $C_\beta < C_\delta$ in cui $\mathcal{B}$ non è vera.

Ma $C_\beta < C_\delta$ implica $(\beta,\delta) \in \mathcal{R}_4$ e dunque $\mathcal{C}$ non sarebbe vera nel mondo β del modelo $\mathcal{M}_4$, contro quanto supposto inizialmente.

Si è dunque dimostrato che ogni formula vera in $\mathcal{M}_3$ è vera anche nel modello a palloncino $\mathcal{M}_4$.

Per completezza, si va ora a mostrare anche l'opposto, ossia:

<u>DIMOSTRAZIONE che $\forall \mathcal{A}\ vera\ in\ \mathcal{M}_4, \mathcal{A}$ è $vera\ anche\ in\ \mathcal{M}_3$</u>

Supponiamo per assurdo che $\Box\mathcal{B}$ sia falsa in qualche mondo α di $\mathcal{M}_3$, ossia:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_3 \nvDash_{[\alpha]} \Box\mathcal{B}}$$

Ma allora si verifica che, presi $[\alpha]$e $[\beta]$ nello stesso R-cluster: $\boldsymbol{\mathcal{M}_3 \nvDash_{[\beta]} \mathcal{B}\quad con\ [\alpha] \approx [\beta]}$

Questo potrebbe creare dei problemi, in quanto, nello "srotolare" il palloncino $[\alpha$ e $[\beta]$ potrebbero non essere più collegati; tuttavia lo Z-lemma afferma che:

$$\exists \boldsymbol{\gamma} \mid ([\boldsymbol{\alpha}], [\boldsymbol{\gamma}]) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_3} \text{ e } [\boldsymbol{\gamma}] \notin \boldsymbol{C}_{[\alpha]} \text{ in cui } \boldsymbol{\mathcal{M}_3} \nvDash_{[\gamma]} \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Ma se $[\alpha]$ e $[\gamma]$ non appartengono allo stesso R-cluster, allora da $[\alpha]$ si può andare a $[\gamma]$ mediante $\mathcal{R}_4$ e quindi $\Box\mathcal{B}$ è falsa anche nel palloncino.

Dunque, avendo dimostrato in precedenza che:

- $\mathcal{M}_2 \nvDash_\alpha \mathcal{A}$;
- $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_3$,
- $se\ \mathcal{M}_3 \vDash_\beta \mathcal{C} \quad allora\ \ \mathcal{M}_4 \vDash_\beta \mathcal{C}$ (con $\mathcal{M}_4$ pari al modello a palloncino

si può affermare che $\mathcal{M}_4 \nvDash_\alpha \mathcal{A}$, e quindi che $\mathcal{A}$ non è valida su ogni palloncino.

A questo punto, dunque, è possibile mappare il frame $(\omega, <)$ sul modello a palloncino $\mathcal{M}_4$ mediante un **<u>p-morfismo</u>**. Infatti:

Supponiamo che il palloncino sia composto da un certo numero di mondi nell'intervallo [0 .. n+1] in cui I mondi sono collegati tra loro con una relazione normale (sequenziale) e poi abbia altri mondi tutti collegati tra loro in modo bidirezionale (formando quindi un ciclo).

Per mappare il frame $(\omega, <)$ sul palloncino é necessario applicare le seguenti operazioni:

- fintanto che si stanno analizzando I primi n+1 mondi, è sufficiente fissare una corrispondenza 1:1 tra I mondi di $(\omega, <)$ e quelli del palloncino
- quando si superano gli n+1 mondi, si prosegue con corrispondenza 1:1 fino all'n+m-esimo mondo; quando si dovrà mappare il n+m+1-esimo mondo di $(\omega, <)$, invece, si fisserà la corrispondenza con il mondo n+1 del palloncino e da quel momento in poi sarà sufficiente contare in modulo m, ripetendo quindi più volte il ciclo del palloncino.

Si è dunque ottenuta un'applicazione del frame $(\omega, <)$ sul palloncino e vi è anche un p-morfismo suriettivo, in quanto se una formula non è valida nel mondo a palloncino, non sarà valida nemmeno in $(\omega, <)$, contro l'ipotesi iniziale $(\omega, <) \vDash \mathcal{A}$, pertanto $\mathcal{A}$ deve essere un teorema di Ω.

Si osservi, inoltre, che a causa del limite superiore sulla dimensione dei palloncini, si può affermare anche che *<u>la logica Ω è decidibile</u>*, infatti grazie alla filtrazione si dispone di un numero finito di mondi e quindi è sufficiente verificare che la formula sia valida su tutti i mondi per definire se tale formula sia o meno un teorema della logica.

Per eseguire la dimostrazione precedente, è stato necessario introdurre lo **Z-lemma**; si procede ora analizzandolo nel dettaglio:

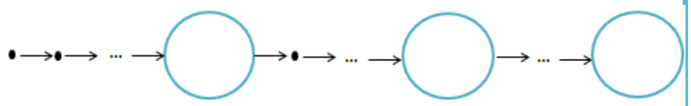
Z-LEMMA: SIA $\mathcal{M}$ UN MODELLO COSTRUITO SU UN FRAME $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ SERIALE, RIFLESSIVO E CONNESSO SU CUI È VERO LO SCHEMA Z. SE UNA FORMULA $\Box\mathcal{B}$ NON È VERA IN UN MONDO α DI UN R-CLUSTER C_α CHE NON SIA L'ULTIMO, ALLORA ESISTE UN MONDO β APPARTENENTE AD UN R-CLUSTER C_β TALE CHE $C_\alpha < C_\beta$ IN CUI $\mathcal{B}$ NON È VERA.

DIMOSTRAZIONE

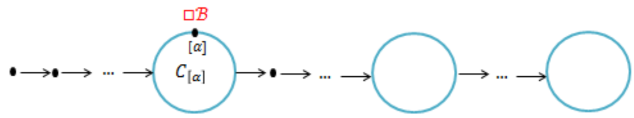
Si vuole andare a dimostrare che se si ha un modello costruito su un frame che è seriale, transitivo, finito e connesso, se si ha un formula $\Box\mathcal{B}$ che è falsa in un mondo $[\alpha]$ appartente ad un R-cluster $C_{[\alpha]}$ (che non sia l'ultimo) e se lo schema Z è valido nel modello di riferimento, allora esisterà un mondo $[\beta]$ appartenente ad un R-cluster successivo a $C_{[\alpha]}$ in cui $\mathcal{B}$ è falsa. Formalmente:

- *Ipotesi:*
  - $\mathcal{M} \nvDash_{[\alpha]} \Box\mathcal{B}$ con $[\alpha] \in C_{[\alpha]}$ e $C_{[\alpha]} \neq ultimo\ R - cluster$
  - $\mathcal{M} \vDash schema\ Z$ dove Z: $\Box(\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\diamond\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A})$
- *Tesi:* $\exists[\beta] \in R - cluster\ successivo\ a\ C_{[\alpha]}$ in cui $\mathcal{M} \nvDash_{[\beta]} \mathcal{B}$

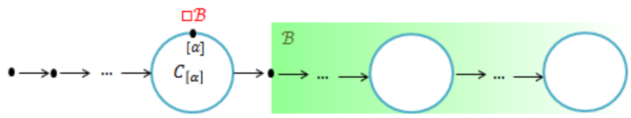
Si ha dunque un frame così rappresentabile:



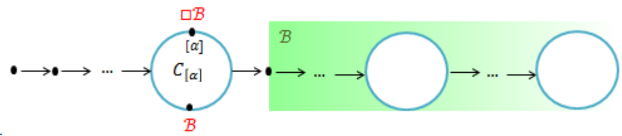
Supponiamo ora che $\Box\mathcal{B}$ sia falsa in un mondo α di un R-cluster $C_{[\alpha]}$ che non sia l'ultimo, ossia:



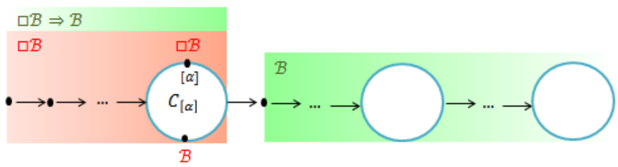
supponiamo inoltre, per assurdo, che dal mondo successivo a $C_{[\alpha]}$ $\mathcal{B}$ sia vera, ossia:



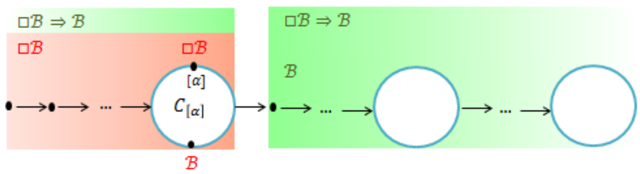
È ovvio che $\mathcal{B}$ non sarà vera in qualche mondo di $C_{[\alpha]}$, ossia:



Di conseguenza, in ogni mondo di un cluster $C_{[\beta]} \leq C_{[\alpha]}$ non è vera $\Box\mathcal{B}$ e dunque è vera $\Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, in quanto falsi sia antecedente che conseguente.



Per quanto riguarda tutti i mondi dei cluster successivi a $C_{[\alpha]}$, è sicuramente vera $\Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, in quanto si è ipotizzato vero in conseguente, ossia:



Poiché in ogni mondo del modello è vera la formula $\Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, si può affermare anche che in ogni mondo del modello è vera la formula $\Box(\Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Essendo vero lo schema Z, inoltre, è vera anche la formula $\diamond\Box\mathcal{B} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$.

Ma poiché in tutti i mondi successivi ad $[\alpha]$ è vera $\Box\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$, e quindi anche $\Box\mathcal{B}$, in $[\alpha]$ (come in qualsiasi altro mondo) deve essere vera $\diamond\Box\mathcal{B}$.

Ma se in $[\alpha]$ è vera $\diamond\Box\mathcal{B} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$ ed è vera anche $\diamond\Box\mathcal{B}$, allora necessariamente deve essere vera anche $\Box\mathcal{B}$, contro l'ipotesi di partenza.

Pertanto non può mai accadere che $\Box\mathcal{B}$ non sia vera in un mondo α di un R-cluster $C_{[\alpha]}$ che non sia l'ultimo, e che invece $\mathcal{B}$ sia vera in tutti i mondi γ di R-cluster successivi a $C_{[\alpha]}$.

Si è dunque sviluppata una completa logica temporale, molto utile in quanto tipicamente si ricorre al tempo discreto ed al campionamento. L'unico aspetto negativo del modello elaborato in relazione alle sue possibili applicazioni è legato al fatto che, per descrivere un sistema, sia necessario descrivere nel dettaglio lo stato successivo rispetto allo stato in cui ci si trova, aspetto non analizzato dal modello appena visto, dove invece, in un certo senso, si considerano tutti gli stati successivi. Inoltre ci si potrebbe trovare in condizioni tali da dover predicare su uno stato precedente, aspetto anche questo non considerato dal modello sopra.

La Logica Multimodale

La logica modale non sembrerebbe più sufficiente per raggiungere alcuni obiettivi delle logiche temporali, per tale motivo si andranno ad introdurre nuovi connettivi.

In particolare, si passerà dalla logica con un solo operatore modale alla logica con più operatori modali, detta **logica multimodale**, ossia una logica in cui si ha un numero al più numerabile di operatori modali.

Dal punto di vista sintattico si parte da un linguaggio costituito da:

- un insieme (al più numerabile) Φ di formule atomiche
- i soliti connettivi logici
- parentesi, come simboli ausiliari
- un insieme $\{[i] | i \in I\}$ di connettivi modali, ognuno dei quali è trattato come precedentemente era stato trattato $\Box$.
    - Per ognuno di essi viene anche introdotto il connettivo duale $< i >$, definito come $\sim [i] \sim$, da trattare come nella logica (uni)modale era trattato $\diamond$.

Analogamente al caso (uni)modale si chiamano **formule ben formate** su questo alfabeto tutte e sole le formule ottenute mediante il solito procedimento:

- ogni formula atomica è una fbf;
- se $\mathcal{A}$ è una fbf, allora anche:
    - $\sim \mathcal{A}$
    - $[i]\mathcal{A}$
    - $< i > \mathcal{A}$

  per ogni $i \in I$ è una fbf
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf, allora anche:
    - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
    - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
    - $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
    - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

  sono fbf
- niente altro è una fbf

L'insieme delle fbf costruite su Φ come sopra indicato utilizzando i connettivi $\{[i] | i \in I\}$ si indica con $Fma_I(\Phi)$.

Analogamente a quanto avevamo visto nel caso (uni) modale, si definisce una *priorità* nell'uso degli operatori, secondo la quale:

- il connettivo $\sim$ e gli operatori modali hanno la stessa priorità ed hanno proprità maggiore di tutti gli altri connettivi;
- tutti gli altri connettivi seguono le usuali regole di priorità fra connettivi logici.

La formula $[i]\mathcal{A}$ si legge "*necessariamente in i $\mathcal{A}$*" e può avere diversi significati a seconda del contesto:

- se I è un insieme di agenti, può avere il significato "l'agente i conosce $\mathcal{A}$",
- se $I = \{F, P\}$ dove F indica il futuro e P il passato, $[F]\mathcal{A}$ significa "in ogni istante del futuro vale $\mathcal{A}$", mentre $[P]\mathcal{A}$ significa "in ogni istante del passato vale $\mathcal{A}$".

Dal punto di vista semantico, si può fare ancora uso dei concetti di *frame* e *modelli*:

- Un **frame** è costituito da un insieme di mondi $\mathcal{S}$ e da una collezione $\{\mathcal{R}_i \mid i \in I\}$ di relazioni binarie su $\mathcal{S}$ (cioè un frame ha una relazione di raggiungibilità per ogni operatore modale). Formalmente: $\boldsymbol{\mathcal{F}} =< \boldsymbol{\mathcal{S}}, \{\boldsymbol{\mathcal{R}_i} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{S}} \times \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\} >$
- Aggiungendo ad un frame una funzione $\boldsymbol{V}: \boldsymbol{\Phi} \to \wp(\boldsymbol{\mathcal{S}})$, con $\wp(\mathcal{S})$insieme delle parti di $\mathcal{S}$, si ottiene un **modello**. Formalmente: $\boldsymbol{\mathcal{M}} =< \boldsymbol{\mathcal{S}},\ \{\boldsymbol{\mathcal{R}_i} \mid \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}\}, \boldsymbol{V} > \quad \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{V}: \boldsymbol{\Phi} \to \wp(\boldsymbol{\mathcal{S}})$

La verità di una formula in un mondo α di un modello è definita ne solito modo, ossia $\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{A\ sse\ \alpha} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\alpha})$, ricorrendo però, nell'interpretazione di una formula $[i]\mathcal{A}$, alla relazione $\mathcal{R}_i$ associata all'operatore $[i]$; dunque:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} [\boldsymbol{i}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \boldsymbol{sse} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \mid\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}_i} \quad \boldsymbol{si\ ha}\ \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\beta} \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Una **logica multimodale**, con un insieme I di operatori modali e sull'insieme di formule atomiche Φ, si definisce come <u>sottoinsieme di $Fma_I(\Phi)$ contenente le tautologie e chiuso rispetto al Modus Ponens ed alle sostituzioni uniformi</u>.

Una **logica multimodale** si dice **normale** se:
- contiene lo *schema* K_i : $[i](\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ([i]\mathcal{A} \Rightarrow [i]\mathcal{B}) \qquad \forall [i]$
- è chiusa rispetto alla *regola di necessitazione* : $\frac{\mathcal{A}}{[i]\mathcal{A}} \qquad \forall [i]$

Anche in questo caso si avrà a che fare con una *minima logica normale*, rispetto ad un dato insieme di operatori modali, che prenderà il nome di K_I e ripetendo in modo ovvio quanto fatto per le logiche (uni)modale normali, si possono ottenere le definizione di *modello canonico, sottomodello generato* e *filtrazione*.

La logica temporale

Tra le logiche multimodali, sono di particolare interesse quelle riferite al tempo naturale, caratterizzate da due connettivi modali ($[\boldsymbol{P}], [\boldsymbol{F}]$) da leggere come "*necessariamente nel passato*" e "*necessariamente nel futuro*", che permettono di predicare su quello che accadrà e di dire ciò che è successo.

In generale questi due operatori modali porteranno ad avere 2 relazioni di raggiungibilità: una nel passato ($\mathcal{R}_P$) ed una nel futuro ($\mathcal{R}_F$). Queste due relazioni, però, non sono così slegate l'una dall'altra, infatti se domani è nel futuro di oggi, oggi è nel passato di domani e viceversa, quindi queste due relazioni sono di fatto una sola relazione che permette di definirle esplicitamente entrambe, in quanto tra le due relazione si può affermare che vale il seguente legame:

$$\boldsymbol{R_P} = \boldsymbol{R_F^{-1}}$$

Tale caratteristica è uno degli aspetti più importanti che bisognerà mantenere nei vari studi successivi; tale legame tra le relazioni, inoltre, ovviamente andrà a legare anche gli operatori modali nel passato con gli operatori modali nel futuro. In particolare, si dimostra facilmente che in un frame $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}_P, \mathcal{R}_F)$ la relazione $R_P = R_F^{-1}$ vale se e soltanto se sono validi i seguenti schemi:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{P}] < \boldsymbol{F} > \boldsymbol{\mathcal{A}} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{F}] < \boldsymbol{P} > \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Formalmente:

DATO UN FRAME MULTIMODALE $\mathcal{F} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}_P, \mathcal{R}_F)$, $\mathcal{R}_P = \mathcal{R}_F^{-1}$, SE E SOLTANTO SE IN OGNI MODELLO $\mathcal{M}$ COSTRUITO SUL FRAME $\mathcal{F}$ VALGONO LE FORMULE $\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{P}] < \boldsymbol{F} > \boldsymbol{\mathcal{A}}$ E $\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{F}] < \boldsymbol{P} > \boldsymbol{\mathcal{A}}$

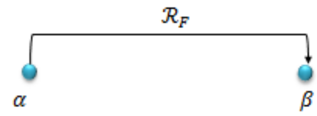
DIMOSTRAZIONE

- *Ipotesi:* $R_P = R_F^{-1}$
- Tesi: $\mathcal{A} \Rightarrow [P] < F > \mathcal{A}$ $\quad e \quad$ $\mathcal{A} \Rightarrow [F] < P > \mathcal{A}$

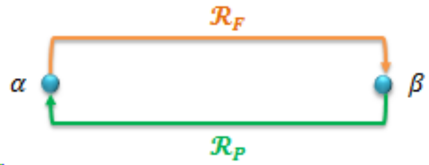
Supponiamo per assurdo che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_\alpha \mathcal{A} \Rightarrow [F] < P > \mathcal{A}}$

Il che significa che: $\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \quad e \quad \mathcal{M} \nvDash_\alpha [F] < P > \mathcal{A}}$

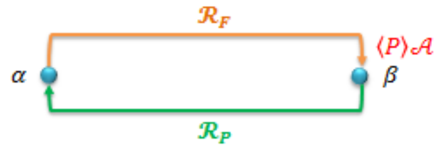
ma se $\mathcal{A}$ vale nel mondo α di $\mathcal{M}$, allora da α deve essere possibile raggiungere nel futuro almeno un β, ossia:



ma poiché la relazione del passato è l'inversa della relazione nel futuro, comunque si prenda un β collegato ad α mediante la relazione nel futuro, da β sarà possibile raggiungere α mediante la relazione nel passato, ossia:



siccome in α è vera $\mathcal{A}$, in β sarà necessariamente vero $< P > \mathcal{A}$, infatti esiste almeno un mondo raggiungibile da β in cui nel passato è vera $\mathcal{A}$:



ma allora in α è vera $[F]\langle P \rangle \mathcal{A}$, infatti da α è possibile raggiungere un mondo β in cui è vera $\langle P \rangle \mathcal{A}$:

ma allora in α sono valida sia $\mathcal{A}$ che $[F]\langle P \rangle \mathcal{A}$, in contraddizione con quanto affermato inizialmente. Risulta quindi dimostrato che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \Rightarrow [F]\langle P \rangle \mathcal{A}$.

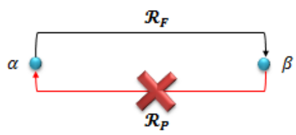
Lo stesso ragionamento può essere sviluppato per ottenere che $\mathcal{M} \vDash_\alpha \mathcal{A} \Rightarrow [P]\langle F \rangle \mathcal{A}$.

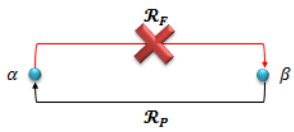
- *Ipotesi:* $\mathcal{A} \Rightarrow [P]\langle F \rangle \mathcal{A}$ $\quad e \quad$ $\mathcal{A} \Rightarrow [F]\langle P \rangle \mathcal{A}$
- Tesi: $R_P = R_F^{-1}$

Supponiamo per assurdo che: $\boldsymbol{R_P \neq R_F^{-1}}$

questo significa che potrebbe succedere che:

- un α vada in β nel futuro, ma da β non sia possibile andare in α nel passato
- un β vada in α nel passato, ma da α non sia possibile andare in β nel futuro





in qualsiasi di questi due casi, però, è possibile falsificare un'istanza degli schemi dati validi per ipotesi.

Si consideri, ad esempio, una formula atomica A e si supponga che la valutazione di A sia α, ossia: $\boldsymbol{V(A) = \{\alpha\}}$

in β, allora, non è vera $\langle P \rangle A$, perché l'unico mondo in cui è vera A è α ed α non è raggiungibile da β. Quindi: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_\beta \langle P \rangle A}$

ma allora sicuramente in α è falso $[F]\langle P \rangle A$, in quanto c'è un mondo raggiungibile da α in cui $\langle P \rangle A$ è falso, quindi: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_\alpha [F]\langle P \rangle A}$

ma allora risulta falso in α la formula $A \Rightarrow [F]\langle P \rangle A$, che non è altro che un'istanza dello schema $\mathcal{A} \Rightarrow [F]\langle P \rangle \mathcal{A}$.

Medesimo ragionamento vale per l'altro schema, in particolare:

Si supponga che la valutazione di A sia β , ossia: $\boldsymbol{V(A) = \{\beta\}}$

ma poiché da α non è possibile raggiungere β nel futuro, si avrà che in α è falsa $\langle F\rangle A$, ossia: $\boldsymbol{\mathcal{M} \nvDash_\alpha \langle F\rangle A}$

Ma allora in β è falso $[P]\langle F\rangle A$ e quindi è falsa l'istanza dello schema $\mathcal{A} \Rightarrow [P]\langle F\rangle\mathcal{A}$.

Risulta quindi dimostrato che affinchè $R_P = R_F^{-1}$, devono essere validi i due schemi.

Perché il tempo risponda alla nozione naturale di "tempo", inoltre, ci si aspetta che la relazione sia transitiva.

La serialità, invece, non è indispensabile, in quanto si potrebbe voler rappresentare un intervallo di tempo e quindi fissare un inizio ed una fine al tempo che si considera.

In realtà, dunque, per avere la *minima logica normale temporale* è necessaria la presenza di:

- i due schemi indicati sopra $\mathcal{A} \Rightarrow [P] < F > \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \Rightarrow [F] < P > \mathcal{A}$
- lo schema 4 (quale rappresentativo dei frame transitivi) indicato nella sua espressione nel futuro e nel passato, ossia:
  - $[F]\mathcal{A} \Rightarrow [F][F]\mathcal{A}$;
  - $[P]\mathcal{A} \Rightarrow [P][P]\mathcal{A}$

La minima logica normale temporale, detta **KT**, è dunque la logica che contiene:

- A1, A2, A3
- Lo schema K nel futuro e K nel passato
- $\mathcal{A} \Rightarrow [P] < F > \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \Rightarrow [F] < P > \mathcal{A}$
- lo schema 4 nel passato e nel futuro

Tale logica è corretta e completa rispetto alla classe dei frame temporali, dove con il termine *frame temporale*, si fa riferimento ad un insieme di mondi ed una relazione binaria da interpretare come "$\mathcal{R}_{futuro}$" (ed implicitamente $\mathcal{R}_{passato}$). Ricorrendo alla filtrazione, infine, si può anche dimostrare che è decidibile.

In base poi alle caratteristiche che si vogliono nel modello (come ad esempio il tempo infinito nel futuro, infinito nel passato o in entrambe le direzioni) si andranno ad aggiungere alla logica gli schemi di interesse (ad esempio lo schema D per aggiungere la serialità che permette di esprimere il tempo infinito).

15 novembre 2010

Esercitazione sui Tableaux

La tecnica che si basa sugli **algoritmi di Tableaux** è una tecnica che serve a decidere se una formula è o meno un teorema di una teoria o, viceversa, se quella formula è insoddisfacibile. Per sommi capi, dunque, la tecnica dei tableaux serve a dimostrare dei teoremi, però in modo radicalmente differente rispetto alle tecniche classiche.

Fondamentalmente, infatti esistono 3 metodi per definire la veridicità di una formula:
1. il metodo basato sulla logica deduttiva;
2. la dimostrazione naturale;
3. gli algoritmi basati sul tableaux.

Il metodo classico, basato sulla logica deduttiva, ha il grande vantaggio di produrre una dimostrazione in senso classico (ossia partendo dalle ipotesi note e con regole di inferenza, deduzione si arriva a dimostrare al teorema), ma ha anche il problema di essere, per loro natura, difficilmente automatizzabili, in quanto dato un insieme di assiomi, non esiste un modo per definire una regola secondo la quale utilizzarli.

All'estremo opposto, invece, si trova la tecnica dei tableaux che si basa sul **principio delle sottoformule**, secondo il quale, data una formula complessa $\mathcal{A}$, la veridicità di $\mathcal{A}$ dipende solo dai valori assunti nello specifico modello dalle sue sottoformule. Questo permette di affrontare la dimostrazione in modo opposto rispetto a quanto fatto dal metodo classico, infatti si parte dalla formula e si prova a scomporla strutturalmente in varie sottoformule fino ad ottenere degli elementi di base che non saranno altro che le configurazioni dei terminali (quindi delle formule atomiche che compaiono in $\mathcal{A}$) che manifestano la veridicità della formula iniziale.

Questo procedimento, se da un lato non permette di avere una giustifcazione di come si è arrivati alla conclusione che $\mathcal{A}$ sia vera, dall'altro il procedimento di scomposizione, effendo fondamentalmente un procedimento sintattico, è molto più facile da automatizzare e questo è il motivo per cui il mondo dei tableaux è il punto di riferimento per chi si occupa di intelligenza artificiale e simili.

Il fatto che si arrivi ad una configurazione di terminali che rende vera la formula iniziale permette di affermare che quella formula è *soddisfacibile*, tuttavia è possibile ricondurre la soddisfacibilità di una formula ad una teoremicità del suo opposto e viceversa. Se ci si chiede se $\mathcal{A}$ è un teorema, infatti, non sia fa altro che chiedersi se $\sim \mathcal{A}$ è soddisfacibile e viceversa.

Se $\sim \mathcal{A}$ è soddisfacibile, allora esiste almeno un modello consistente con la teoria in analisi in cui $\mathcal{A}$ è falsa e quindi $\mathcal{A}$ non può essere un teorema; viceversa, se $\sim \mathcal{A}$ è insoddisfacibile allora $\mathcal{A}$ è un teorema.

Ci si andrà qui a concentrare sui tableaux per le logiche (uni)modali proposizionali ed in particolare si andranno ad utilizzare:
- i classici connettivi proposizionali e modali ($\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Box$, $\diamond$)
- una serie di assiomi che permettono di definire il tipo di logica in cui si sta lavorando:

Nome	**Schema**	**Logica ottenuta**
K	$\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B})$	Permette di operare con la logica proposizionale classica
D	$\Box\mathcal{A} \Rightarrow \diamond \mathcal{A}$	K_D corretta e completa su tutti i frame seriali
T	$\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	K_T corretta e completa su tutti i frame riflessivi
4	$\Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\Box\mathrm{A}$	K_4 corretta e completa su tutti i frame transitivi
B	$\mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$	K_B corretta e completa su tutti i frame simmetrici
5	$\diamond \mathcal{A} \Rightarrow \Box \diamond \mathcal{A}$	K_5 corretta e completa su tutti i frame euclidei

Attraverso l'utilizzo di questi assiomi, si va a restringere la topologia del frame sul quale poggia la logica.

Nella costruzione dei tableaux esistono fondamentalmente due tipi di approcci:
1. tableaux con frame implicito: la topologia del frame che si va a costruire risiede in una notazione particolare delle formule ossia si avranno delle formule con dei prefissi al fine di indicare quale sia il mondo raggiungibile

2. tableaux con frame esplicito: sono caratterizzati da una rappresentazione grafica del frame, con più di una relazione di raggiungibilità e si andrà a caratterizzare ogni nodo con le formule valide nel nodo stesso.

Nel caso delle logiche modale, tipicamente si sceglie un approccio di tipo "*implicito*", quindi si lavorerà con delle formule dotate di prefisso al fine di indicare il mondo di riferimento.

Data una formula di cui si vuole dimostrare la soddisfacibilità, tale formula verrà decomposta nelle sue sottoformule; per quanto riguarda la logica K, ci si rifà alle seguenti regole di espansione per la logica proposizionali:

Regole ~	$\frac{\sigma \sim\sim \mathcal{A}}{\sigma\mathcal{A}}$		
Regole α	$\frac{\sigma\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A}, \sigma\mathcal{B}}$	$\frac{\sigma \sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{\sigma \sim \mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$	$\frac{\sigma \sim (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})}{\sigma\mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$
Regole β	$\frac{\sigma\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A} \mid \sigma\mathcal{B}}$	$\frac{\sigma \sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}{\sigma \sim \mathcal{A} \mid \sigma \sim \mathcal{B}}$	$\frac{\sigma\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\sigma \sim \mathcal{A} \mid \sigma\mathcal{B}}$
Regole $\Leftrightarrow$	$\frac{\sigma\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}{\sigma\mathcal{A}, \sigma\mathcal{B} \mid \sigma \sim \mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B}}$		$\frac{\sigma \sim (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})}{\sigma\mathcal{A}, \sigma \sim \mathcal{B} \mid \sigma \sim \mathcal{A}, \sigma\mathcal{B}}$

Esistono, inoltre, delle regole di espansione per la logica modale, ossia:

Regole $\Box$	$\frac{\sigma\Box\mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$	$\frac{\sigma \sim\Diamond \mathcal{A}}{\sigma n \sim \mathcal{A}}$	$per\ ogni\ \sigma n\ disponibile$
Regole $\Diamond$	$\frac{\sigma \Diamond \mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$	$\frac{\sigma \sim \Box\mathcal{A}}{\sigma n \sim \mathcal{A}}$	$per\ ogni\ \sigma n\ non\ ristretto$

Esercizio 1

Verificare la soddisfacibilità di una particolare istanza dello schema K, ossia: $\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	

Applicando la 3° regola α, si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	

Il passo 2 non è al momento espandibile in quanto non vi sono mondi disponibili, si procede dunque espandendo il passo 3 ricorrendo ancora alla 3° regola α ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	
5	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box Q$	

Il passo 4 non è al momento espandibile in quanto non vi sono mondi disponibili, si procede dunque espandendo il passo 5 ricorrendo ancora alla 2° regola $\Diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$	
3	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	
5	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box Q$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	

Essendo disponibile il mondo $\langle 1,1\rangle$, si può ora andare ad espandere il 2° passo, ricorrendo alla 1° regola $\Box$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	
5	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box Q$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	
7	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow Q$	

Si può ora espandere anche la formula al passo 4, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$	V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	V
5	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box Q$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	
7	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow Q$	
8	$\langle 1,1\rangle$	P	

Si prosegue ora espandendo il passo 7, ricorrendo alla 3° regola β che porta alla separazione del tableaux in due tableaux paralleli e porta ad ottenere:

# passo	mondo	formula		espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$		V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box(P \Rightarrow Q)$		V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box Q)$		V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box P$		V
5	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box Q$		V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$		
7	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow Q$		V
8	$\langle 1,1\rangle$	P		
9	$\langle 1,1\rangle$	$\sim P$	Q	

Nel primo ramo di espansione si è dunque ottenuto $\sim P$ nel mondo $\langle 1,1\rangle$ e P sempre nel mondo $\langle 1,1\rangle$. Questa è la situazione che prende il nome di *clush* e sta ad indicare che si è derivata una contraddizione. Anche nel secondo ramo di espansione è presente un clush tra Q e $\sim Q$. Entrami i rami di espansione terminano con un clush (e prendono il nome anche i *rami chiusi*); il tableaux dunque è a sua volta chiuso e quindi non si è in grado di indentificare alcun modello che rendano vera la formula analizzata.

Poiché l'espressione analizzata è insoddisfacibile, allora la formula di partenza dell'esercizio è soddisfacibile, come volevasi dimostrare.

È chiaro che è possibile ridurre il numero di regole di decomposizione, a patto di imporre una forma normale nell'espressione iniziale. In particolare, tipicamente si vanno ad esprimere tutte le formule nella loro forma normale negata.

Esercizio 2

Verificare la soddisfacibilità della formula: $(\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$	

Applicando la 3° regola α, si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square X \wedge \square Y$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(X \wedge Y)$	

Si procede espandendo il passo 2 ricorrendo alla 1° regola α ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square X \wedge \square Y$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(X \wedge Y)$	
4	$\langle 1 \rangle$	$\square X$	
5	$\langle 1 \rangle$	$\square Y$	

Si può espandere ora il passo 3 ricorrendo alla 2° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square X \wedge \square Y$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(X \wedge Y)$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\square X$	
5	$\langle 1 \rangle$	$\square Y$	
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (X \wedge Y)$	

Grazie alla presenza, nel tableaux, del mondo $\langle 1,1 \rangle$, si può procedere all'espansione del passo 4 ricorrendo alla 1° regola $\square$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square X \wedge \square Y) \Rightarrow \square(X \wedge Y)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square X \wedge \square Y$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(X \wedge Y)$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\square X$	V
5	$\langle 1 \rangle$	$\square Y$	
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (X \wedge Y)$	
7	$\langle 1,1 \rangle$	X	

Medesima espansione può essere applicata al passo 5, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\Box X \wedge \Box Y) \Rightarrow \Box(X \wedge Y)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box X \wedge \Box Y$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box(X \wedge Y)$	V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box X$	V
5	$\langle 1\rangle$	$\Box Y$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim(X \wedge Y)$	
7	$\langle 1,1\rangle$	X	
8	$\langle 1,1\rangle$	Y	

Si procede ora espandendo il passo 6 mediante la 2° regola β ed ottenendo:

# passo	mondo	formula		espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\Box X \wedge \Box Y) \Rightarrow \Box(X \wedge Y)$		V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box X \wedge \Box Y$		V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box(X \wedge Y)$		V
4	$\langle 1\rangle$	$\Box X$		V
5	$\langle 1\rangle$	$\Box Y$		V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim(X \wedge Y)$		V
7	$\langle 1,1\rangle$	X		
8	$\langle 1,1\rangle$	Y		
9	$\langle 1,1\rangle$	$\sim X$	$\sim Y$	

Anche in questi caso, entrambi i rami del tableaux sono chiusi, quindi il tableaux è chiuso e quindi la formula indicata al passo 1 è insoddisfacibile e, di conseguenza, la formula indicata nel testo nell'esercizio è un teorema.

Esercizio 3

Verificare la soddisfacibilità della formula: $\diamond A \Rightarrow \Box A$

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond A \Rightarrow \Box A)$	

Applicando la 3° regola α, si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond A \Rightarrow \Box A)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond A$	
3	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box A$	

Si può espandere il passo 2, ricorrendo alla 1° regola $\diamond$ che porta alla generazione del nuovo mondo $\langle 1,1\rangle$, ottenendo:

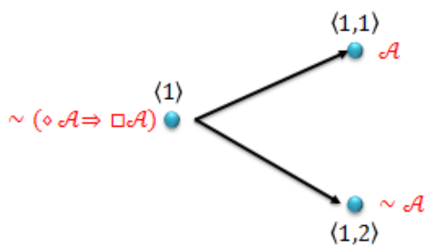
# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond A \Rightarrow \Box A)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond A$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim \Box A$	
4	$\langle 1,1\rangle$	A	

Si può espandere anche il passo 3, ricorrendo alla 2° regola $\diamond$ che porta alla generazione del nuovo mondo $\langle 1,2 \rangle$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond A \Rightarrow \Box A)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond A$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box A$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	A	
5	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim A$	

Si ha un unico ramo privo di clush, infatti A e $\sim A$ non appartengono allo stesso mondo, la negazione di partenza, dunque, è soddisfacibile e, di conseguenza, la formula iniziale non è un teorema.

Per come viene completato il tableaux, inoltre, oltre a dire che questa espressione è soddisfacibile ci dice anche come è strutturato uno dei modelli che rende vera questa espansione, ossia permette di rappresentare il frame andando a seguire la relazione di raggiungibilità indicata, nel caso della logica K, dal prefisso; infatti, in questo caso, il mondo 1 può raggiungere tutti i mondi che hanno come marcatura un valore di cui 1 è il prefisso. Graficamente:



quanto riportato a lato è il modello costruito dal tableaux sopra sviluppato ed è l'esempio che rende vera l'espressione riportata al passo 1 e che dimostra che la formula di partenza non è un teorema.

Esercizio 4

Verificare la soddisfacibilità della formula: $(\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$	

Applicando la 3° regola α, si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$	

Per espandere il passo 2 si ha bisogno di una regola β, ma ricordando la convenzione per cui tale regole hanno priorità inferiore, si procede espandendo prima il passo 3, andando ad utilizzare la 2° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (\Box A \Rightarrow A)$	

Si può ora espandere il passo 4 ricorrendo ancora alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (\Box A \Rightarrow A)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box A$	
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim A$	

La formula al passo 6 non è ulteriormente espandibile (formula atomica), la formula al passo 5 non è espandibile in quanto non è presente un altro mondo disponibile e raggiungibile da $\langle 1,1 \rangle$, pertanto si può procedere espandendo al formula al passo 2 mediante la 3° regola β ed ottenendo:

# passo	mondo	formula		espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$		V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$		V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$		V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (\Box A \Rightarrow A)$		V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box A$		
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim A$		
7	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box\Box A$	$\Box A$	

Si può ora procedere espandendo la formula nel primo ramo del passo 7 mediante la 2° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula		espansa	
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$		V	
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$		V	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$		V	
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (\Box A \Rightarrow A)$		V	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box A$			
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim A$			
7	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box\Box A$	$\Box A$	V	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim \Box A$			

Applicando la medesima espansione alla formula nel 1° ramo del passo 8, si ottiene:

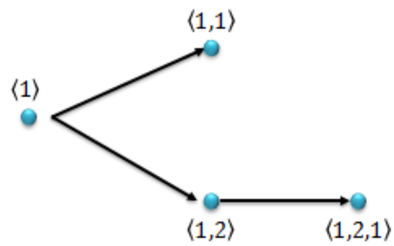
# passo	mondo	formula		espansa	
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$		V	
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$		V	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box(\Box A \Rightarrow A))$		V	
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim (\Box A \Rightarrow A)$		V	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box A$			
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim A$			
7	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box\Box A$	$\Box A$	V	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim \Box A$		V	
9	$\langle 1,2,1 \rangle$	$\sim A$			

La formula al passo 4 è ancora non espandibile (infatti non v'è alcun mondo raggiungibile da $\langle 1,1 \rangle$), tuttavia è possibile espandere la formula del 2° ramo del passo 7, infatti dal mondo $\langle 1 \rangle$ è raggiungibile il mondo $\langle 1,1 \rangle$ e quindi si ottiene:

# passo	mondo	formula		espansa	
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim(\Box\Box A \Rightarrow \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A \Rightarrow A)$		V	
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box\Box A \Rightarrow \Box A$		V	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim(\Box(\Box A \Rightarrow A))$		V	
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim(\Box A \Rightarrow A)$		V	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box A$			
6	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim A$			
7	$\langle 1 \rangle$	$\sim\Box\Box A$	$\Box A$	V	V
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\Box A$	$\langle 1,1 \rangle$ A	V	
9	$\langle 1,2,1 \rangle$	$\sim A$			

Nel 2° ramo si verifica un clush (infatti nel mondo $\langle 1,1 \rangle$ sono presenti sia A che $\sim A$) quindi il 2° ramo è chiuso, mentre il 1° non è chiuso, quindi la formula al passo 1 è soddisfacibile e la formula iniziale non è un teorema.

In questo caso, il modello di riferimento può essere così rappresentato:



Tutto ciò che si è visto finora vale per K, ma quando si impone che valga una certa combinazione degli assiomi T, D, B, 4 o 5 è necessario gestire la validità dell'assioma e tenerne conto all'interno dei tableaux, esistono 2 approcci:

- costruzione di nuove regole di scomposizione che permettono di gestire in modo diverso la propagazione delle sottoformule
- modifica nella regola di raggiungibilità fra i mondi: invece di imporre in qualche modo la validità dell'assioma in modo diretto, si terrà conto della proprietà che quell'assioma conferisce al frame in esame. In particolare, se ne terrà conto quando si andrà a propagare le sottoformule andando a decomporre delle espressioni modali, quindi quando si andranno ad eliminare, nei passaggi da una sottoformula all'altra, un $\Box$ o un $\diamond$.

L'idea di base è quella di lavorare ovviamente con formule prefisse e tenere conto, nella propagazione delle sottoespressioni, di alcune regole; la regola base è quella secondo cui si decompone un $P \diamond x$ in un Qx, oppure si decompone un $P\Box$x in Qx, ossia:

$$\boldsymbol{P \diamond x \rightarrow Qx}$$
$$\boldsymbol{P \Box x \rightarrow Qx}$$

dove P e Q sono delle denotazioni di mondi; in particolare, nei casi in esame, la grammatica di P e Q sarà l'insieme delle stringhe di numeri naturali, esattamente come si è visto negli esempi precedenti.

Il problema consiste nel capire quali sono le combinazioni lecite di P e Q, ossia, partendo da un P, quale Q permetta di propagare la sottoformula.

La regola base, per la logica K, vuole che:

- P sia iniziale di Q
- Q sia più lungo di P di 1 valore (quindi Q = (P, n))
- Q non sia prefisso di altre marcature già presenti nel tableau

Man mano che si aggiungono gli altri schemi di assiomi, invece, bisogna tenere presente la geometria del frame, quindi:

- se si aggiunge **T**, bisogna tener conto della *riflessività* del frame e quindi la regola, oltre a quella base, accetta anche quanto segue:
  - P è iniziale di Q
  - Q è al più un intero più lungo di P

  Così facendo, si tiene conto che ogni mondo è raggiungibile da se stesso.
- Se si aggiunge **B**, bisogna tener conto della *simmetria* del frame e quindi la regola prevede anche che:
  - P sia prefisso di Q e Q sia più lungo di 1 intero
    Oppure…
  - Q sia prefisso di P e P sia più lungo di 1 intero
- Se si aggiunge **4**, bisogna tener conto della *transitività* del frame e quindi la regola prevede anche che:
  - P è prefisso di Q
  - Q potrebbe essere più lungo di P di un numero arbitrario di valori
- Se si aggiunge **S4**, bisogna tener conto sia della *transitività* che della *riflessività* e quindi la regola prevede anche che:
  - P sia prefisso (anche improprio) di Q

  In questo caso, dunque, valgono le eccezioni viste per la logica 4, ma P e Q possono anche coincidere.

Nell'identificazione delle marcature dei mondi raggiungibili, dunque, si tiene conto delle relazioni topologiche imposte dagli assiomi che si sono aggiunti alla logica.

Riassumendo, dunque, in relazione ai vari assiomi possibili valgono le seguenti regole:

ASSIOMA	**REGOLA**
K,D	generale
T	generale, identità
KB, B	generale, inversa
K4, D4	generale, transitiva
S4	Generale, identità, transitiva
S5	universale

Esercizio 5

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in B: $\diamond \Box x \Rightarrow x$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	**mondo**	**formula**	**espansa**
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond \Box x \Rightarrow x)$	

Si ricorre alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	**mondo**	**formula**	**espansa**
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond \Box x \Rightarrow x)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond \Box x$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim x$	

L'unica formula espandibile è quella al passo 2, ricorrendo alla 1° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	**mondo**	**formula**	**espansa**
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond \Box x \Rightarrow x)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond \Box x$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim x$	
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\Box x$	

Se fossimo in K, le formule qui presenti non sarebbero ulteriormente espanbili, ma in questo caso, la presenza dell'assioma B vincola a tener conto della *simmetria* e quindi la formula $\square x$ non si aspetta soltanto un mondo $\langle 1,1,n \rangle$, ma accetta anche la propagazione nel mondo che lo precede, quindi:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond \square x \Rightarrow x)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond \square x$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim x$	
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\square x$	V
5	$\langle 1 \rangle$	x	

Nel mondo $\langle 1 \rangle$ si genera quindi un clash; si ha un ramo solo chiuso, quindi il tableau è chiuso, la negazione dell'assioma B non è soddisfacibile e quindi l'assioma B è effettivamente un teorema.

Esercizio 6

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in T: $\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	

Se si fosse nella logica K, l'espansione sarebbe già terminata, in quanto bisognerebbe ricorrere alla 2° regola $\square$, ma non si ha alcun mondo disponibile. In questo caso, però, il frame è caratterizzato dall'assioma T che porta la *riflessività,* quindi è possibile estendere sullo stesso mondo, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	

A questo punto, è possibile applicare la 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	

Si può ora estendere la formula ottenuta la passo 3, ricorrendo alla 1° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	

Si può estendere anche la sottoformula al passo 4, ricorrendo alla 2° regola ⋄ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	

Si può estendere ora la sottoformula al passo 6, ricorrendo alla 2° regola α ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	V
7	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\diamond P$	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim P$	

A questo punto non sarebbe possibile compiere alcun passo, tuttavia, la presenza del mondo $\langle 1,2 \rangle$ permette di espandere ulteriormente la formula presente al passo 1, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	V
7	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\diamond P$	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim P$	
9	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	

Così facendo, si può espandere quanto ottenuto mediante la 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	V
7	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\diamond P$	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim P$	
9	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \Box(\diamond P \vee P))$	V
10	$\langle 1,2 \rangle$	$\diamond P$	
11	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim \Box(\diamond P \vee P)$	

Si da qui è evidente la presenza di un clash nel mondo $\langle 1,2 \rangle$ che porterebbe ad affermare che la formula iniziale è un teorema in T, tuttavia il tableau è ulteriormente espandibile, ricorrendo alla 1° regola ⋄ sulla formula al passo 10 che porta ad ottenere:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	V
7	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\diamond P$	
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim P$	
9	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
10	$\langle 1,2 \rangle$	$\diamond P$	V
11	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	
12	$\langle 1,2,1 \rangle$	P	

A questo punto è possibile espandere la formula al passo 7, vista la disponibilità del mondo $\langle 1,2,1 \rangle$, che porta ad ottenere:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P)))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
4	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	P	
6	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \vee P)$	V
7	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim\diamond P$	V
8	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim P$	
9	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \square(\diamond P \vee P))$	V
10	$\langle 1,2 \rangle$	$\diamond P$	V
11	$\langle 1,2 \rangle$	$\sim \square(\diamond P \vee P)$	
12	$\langle 1,2,1 \rangle$	P	

Si è dunque ottenuto un altro clash, ad ulteriore conferma del fatto che la formula di partenza è teorema in T.

Esercizio 7

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in S4 (riflessività e transitività): $\square P \Rightarrow \square \diamond \square \diamond P$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square P \Rightarrow \square \diamond \square \diamond P)$	

Si espande ricorrendo alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square P \Rightarrow \square \diamond \square \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \square \diamond \square \diamond P$	

Si espande la formula al passo 3, ricorrendo alla 2° regola $\diamond$ ed ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box \diamond \Box \diamond P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \diamond \Box \diamond P$	

A questo punto, in K non sarebbe stato possibile espandere ulteriormente; in questo caso, però, grazie alla proprietà riflessiva dell'assioma S4, la formula indicata al passo 4, può essere espansa restando sul medesimo mondo, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box \diamond \Box \diamond P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \diamond \Box \diamond P$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box \diamond P$	

Si ricorre ancora alla 2° regola $\diamond$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box \diamond \Box \diamond P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \diamond \Box \diamond P$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box \diamond P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \diamond P$	

Sempre per la proprietà riflessiva, la formula al passo 6 può essere ancora espansa con le 2° regola $\Box$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box \diamond \Box \diamond P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \diamond \Box \diamond P$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box \diamond P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \diamond P$	V
7	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	

A questo punto, per la proprietà transitiva, è possibile espandere l'ultima formula disponibile (quella al passo 2) ricorrendo alla 1° formula $\Box$ e raggiungendo il mondo $\langle 1,1,1 \rangle$, infatti:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \Box \diamond \Box \diamond P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\Box P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \Box \diamond \Box \diamond P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \diamond \Box \diamond P$	V
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box \diamond P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \diamond P$	V
7	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	
8	$\langle 1,1,1 \rangle$	P	

Si è così ottenuto un clash che dimostra che la formula data inizialmente è un teorema in S4.

La transitività, come si è potuto vedere nell'esempio precedente, è un po' come il "vaso di Pandora", in quanto genera dei problemi di terminazione dell'algoritmo, come si può notare nell'esempio seguente:

Esercizio 8

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in K4 (riflessività e transitività): $\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P$
Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	

Si espande ricorrendo alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \diamond \Box P$	

Si espande la formula al passo 2 mediante la 1° formula $\diamond$ e si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \diamond \Box P$	
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	

A questo punto, è disponibile il mondo $\langle 1,1 \rangle$, quindi è possibile espandere anche la formula del passo 3 mediante la 2° regola $\Box$ che porta ad ottenere:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	

È possibile quindi espandere la formula al passo 5 mediante la 2° regola $\diamond$ da cui si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	

A questo punto, per transitività, è possibile dal passo 3, propagare nel mondo $\langle 1,1,1 \rangle$ il $\sim \Box P$, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim \diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	
7	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	

Ma ancora, la formula al passo 7 è espandibile con la 2° regola $\diamond$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	
7	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
8	$\langle 1,1,1,1 \rangle$	$\sim P$	

Ma per transitività, dal passo 3 è possibile ancora propagare nel nuovo mondo $\langle 1,1,1,1 \rangle$ il $\sim \Box P$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	
5	$\langle 1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim P$	
7	$\langle 1,1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	V
8	$\langle 1,1,1,1 \rangle$	$\sim P$	
9	$\langle 1,1,1,1 \rangle$	$\sim \Box P$	

Come si può notare, nel mondo $\langle 1,1,1,1 \rangle$ si è ottenuta esattamente la stessa marcatura presente nel mondo $\langle 1,1,1 \rangle$ ed a questo punto si è innescato un meccanismo per cui ogni volta che si genera un mondo, la presenza del $\sim \Box P$ porta alla generazione di un mondo successivo con la sua marcatura $\sim P$ ed a causa della transitività data dallo schema 4, verrà propagato nel nuovo mondo anche il $\sim \Box P$ e quindi si può andare avanti all'infinito a generare nuovi mondi.

L'algoritmo dei tableaux, quindi, in tali condizioni, non termina rendendosi così inutile; il problema è che l'algoritmo dei tableaux sta cercando qui di costruire un modello della formula, ma tale modello è infinito, ossia è così costruito: un mondo $\langle 1 \rangle$ da cui è raggiungibile il mondo $\langle 1,1 \rangle$ nel quale è valido P, dal mondo $\langle 1,1 \rangle$ è raggiungibile il mondo $\langle 1,1,1 \rangle$ in cui è valido $\sim P$ e così via.

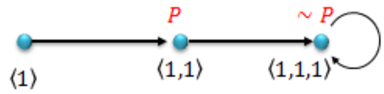
Nella realtà, ci si rende conto di questa condizione patologica in quanto ci sono 2 mondi (in particolare, nel caso in analisi, il mondo $\langle 1,1,1 \rangle$ ed il mondo $\langle 1,1,1,1 \rangle$) che hanno la stessa marcatura e sono uno successivo all'altro. Si può ricorrere anche ad un criterio più semplice, secondo il quale la marcatura del mondo figlio ($\langle 1,1,1,1 \rangle$) sia un sottoinsieme della marcatura del mondo padre.

Il problema del modello infinito, nasce infatti dalla ricerca della marcatura mano a mano che si generano figli; applicando questo criterio (detto anche **tecnica di blocking**) si va quindi a dire che se il figlio ha un sottoinsieme della marcatura del padre, allora è inutile continuare ad espandere le espressioni della marcatura del figlio, in quanto se è presente un clash che deriva dalle marcature del figlio, lo stesso clash sarà identificabile anche nel padre.

Il mondo $\langle 1,1,1 \rangle$ va quindi a bloccare il mondo $\langle 1,1,1,1 \rangle$; quando si verifica un *blocking*, la risposta alla soddisfacibilità della formula è positiva, ossia la formula al passo 1 risulta soddisfacibile. In particolare esiste un modello, che è quello che si sta cercando di costruire) che è infinito, ma non è detto che tutti i modelli che rendono soddisfacibile la formula $\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$ siano infiniti, anzi c'è un teorema secondo cui *"esiste almeno un modello finito".*

L'algoritmo dei tableaux, infatti, non costruisce dei modelli generici, bensì per costruzione questi modelli sono tutti ad albero e quindi anche in questo caso l'algoritmo sta cercando di costruire un albero, peccato che i modelli ad albero della formula in analisi sono infiniti e quindi sta cercando di costruire un modello infinito.

Esistono tuttavia dei modelli finiti; il caso più semplice è quello riportato a lato:



Tale modello è quindi il controesempio che dimostra che la formula iniziale $\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P$ non è un teorema in K4.

Quando si esegue un blocking, in particolare, si possono verificare due possibilità:

- o si ottiene un modello infinito identificando iterativamente il mondo bloccato con quello bloccante
- o si identifica sempre il bloccante con il bloccato, ma si va a chiudere il modello in un modello finito

Si inizia quindi a delineare una distinzione tra quanto ottenuto dall'algoritmo dei tableaux (detto tipicamente **albero di completamento**) ed il modello che si può aver costruito come esempio. Il modello, di suo, potrebbe non essere ad albero, ma se così fosse l'algoritmo dei tableaux terminerà con un albero di completamento con blocking e da qui sarà possibile scegliere se costruire un modello ad albero infinito o meno.

Esiste anche un'altra tecnica che consente di tener conto della transitività del frame e che consiste nel propagare la sottoespressione da un mondo ad un qualunque mondo che abbia il mondo di partenza come prefisso; un'altra tecnica, invece, non comporta la modifica della relazione di raggiungibilità, ma introduce nuove regole d'inferenza secondo le quali un formula non è vera solo nei mondi direttamente raggiungibili, ma anche in tutti i mondi che sono raggiungibili da quest'ultimi. Questo è un altro modo per esprimere la transitività del frame e significa che invece di propagare lungo "catene", si posso utilizzare due nuove regole di espansione, ossia:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\ \Box \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\boldsymbol{\sigma N}\ \Box \boldsymbol{\mathcal{A}}} \qquad \frac{\boldsymbol{\sigma} \sim\diamond \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\boldsymbol{\sigma N} \sim\diamond \boldsymbol{\mathcal{A}}}$$

si va dunque a propagare l'intera espressione.

Esercizio 8a

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in K4 (riflessività e transitività) ricorrendo alle nuove regole di espansione: $\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	

Si espande ricorrendo alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond \Box P$	

Si espande la formula al passo 2 mediante la 1° formula $\diamond$ e si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond \Box P$	
4	$\langle 1,1 \rangle$	P	

A questo punto, è disponibile il mondo $\langle 1,1 \rangle$, quindi è possibile espandere anche la formula del passo 3 mediante la 2° regola $\Box$ che porta ad ottenere:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim \Box P$	

Sapendo che il frame è transitivo, però, è possibile espandere la formula $\sim\diamond \Box P$ in base alla nuova regola introdotta, nel mondo raggiungibile, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim \Box P$	
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	

A questo punto si può propagare la formula ottenuta al passo 5 con la 2° regola $\diamond$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	
7	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim P$	

A questo punto, essendo disponibile il mondo $\langle 1,1,1\rangle$, è possibile espandere la formula al passo 6 mediante la 2° regola $\Box$, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
7	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim P$	
8	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim \Box P$	

Ancora per la nuova regola di espansione, a partire dal mondo $\langle 1,1\rangle$ si può espandere nel mondo $\langle 1,1,1\rangle$ la formula del passo 6, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\diamond P \Rightarrow \diamond \Box P)$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim \Box P$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	V
7	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim P$	
8	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim \Box P$	
9	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim\diamond \Box P$	

Si può reiterare ulteriormente, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\diamond P \Rightarrow \diamond \square P)$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\diamond P$	V
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond \square P$	V
4	$\langle 1{,}1 \rangle$	P	
5	$\langle 1{,}1 \rangle$	$\sim \square P$	V
6	$\langle 1{,}1 \rangle$	$\sim\diamond \square P$	V
7	$\langle 1{,}1{,}1 \rangle$	$\sim P$	
8	$\langle 1{,}1{,}1 \rangle$	$\sim \square P$	V
9	$\langle 1{,}1{,}1 \rangle$	$\sim\diamond \square P$	
10	$\langle 1{,}1{,}1{,}1 \rangle$	$\sim P$	
11	$\langle 1{,}1{,}1{,}1 \rangle$	$\sim\diamond \square P$	

Come si può notare, anche in questo caso si sono ottenute le stesse marcature.

Vi sono dunque due modi per trattare la transitività:

- o si propaga il contenuto dell'espressione modale lungo catene di mondi raggiungibili
- oppure muoversi sempre semplicemente di un mondo, però andando a propagare non solo la sottoespressione, ma anche l'espressione intera

Queste sono, inoltre, i motivi che portano ai problemi di terminazione dell'algoritmo: tipicamente infatti, nel corso dell'espansione delle varie formule, si vanno a propagare formule aventi un numero sempre minore di connettivi; quando c'è la transitività, invece, può succedere quanto segue:

- se si propaga lungo catene, in realtà si vanno a scrivere formule che sono sempre più piccole di quelle espanse, ma si scrivono in relazione a mondi arbitrariamente lontani,
- se si usano le regole introdotte sopra, si scrive sempre in relazione al mondo successivo, ma si riporta sempre la stessa formula con il medesimo numero di connettivi

Risulta quindi impossibile dimostrare in modo banale la terminazione dell'algoritmo.

Anche la **serialità** comporta qualche problema, infatti, nel caso in cui si operi con un frame seriale, è necessario permettere l'espansione di un "*necessariamente (□)*" con la costruzione di un mondo qualora quel mondo non fosse già presente all'interno del tableau.

Esercizio 9

Verificare la soddisfacibilità della seguente formula in KD4: $\square P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \square Q) \Rightarrow Q)$

Si opera per refutazione, quindi si andrà ad elaborare la soddisfacibilità della sua negazione, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \square Q) \Rightarrow Q))$	

Si espande ricorrendo alla 3° regola α, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1 \rangle$	$\sim (\square P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \square Q) \Rightarrow Q))$	V
2	$\langle 1 \rangle$	$\square P$	
3	$\langle 1 \rangle$	$\sim\diamond ((P \Rightarrow \square Q) \Rightarrow Q)$	

La formula al passo 2, risulta ora direttamente espandibile grazie alla *proprietà seriale*, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	⟨1⟩	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	⟨1⟩	$\Box P$	V
3	⟨1⟩	$\sim \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	
4	⟨1,1⟩	P	

La formula al passo 4, risulta ora espandibile mediante la 2° regola □, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	⟨1⟩	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	⟨1⟩	$\Box P$	V
3	⟨1⟩	$\sim \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	⟨1,1⟩	P	
5	⟨1,1⟩	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	

La regola al passo 5 è espandibile ricorrendo alla 3° regola α, che porta ad ottenere quanto segue:

# passo	mondo	formula	espansa
1	⟨1⟩	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	⟨1⟩	$\Box P$	V
3	⟨1⟩	$\sim \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	⟨1,1⟩	P	
5	⟨1,1⟩	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	⟨1,1⟩	$P \Rightarrow \Box Q$	
7	⟨1,1⟩	$\sim Q$	

A questo punto, l'unica formula espandibile è quella del passo 6, che richiede la 3° regola β, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	⟨1⟩	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	⟨1⟩	$\Box P$	V
3	⟨1⟩	$\sim \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	⟨1,1⟩	P	
5	⟨1,1⟩	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	⟨1,1⟩	$P \Rightarrow \Box Q$	
7	⟨1,1⟩	$\sim Q$	

A questo punto, l'unica formula espandibile è quella del passo 6, che richiede la 3° regola β, che porta a suddividere il tableau in 2 rami ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	⟨1⟩	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	⟨1⟩	$\Box P$	V
3	⟨1⟩	$\sim \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	⟨1,1⟩	P	
5	⟨1,1⟩	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	⟨1,1⟩	$P \Rightarrow \Box Q$	V
7	⟨1,1⟩	$\sim Q$	

8a	⟨1,1⟩	$\sim P$		8b	⟨1,1⟩	$\Box Q$	

Il primo ramo risulta già chiuso a causa della presenza di un clash; per quanto riguarda il secondo ramo, invece, si ricorre ancora alla proprietà seriale, ottenendo:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow \Box Q$	V
7	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	

8a	$\langle 1,1\rangle$	$\sim P$		8b	$\langle 1,1\rangle$	$\Box Q$	V
				9	$\langle 1,1,1\rangle$	Q	

Per la proprietà transitiva data dall'assioma 4, però, nel nuovo mondo $\langle 1,1,1\rangle$ generato, sarà vera anche $\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$, ossia:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow \Box Q$	V
7	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	

8a	$\langle 1,1\rangle$	$\sim P$		8b	$\langle 1,1\rangle$	$\Box Q$	V
				9	$\langle 1,1,1\rangle$	Q	
				10	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	

Applicando ora la 3° regola α , dal passo 10 si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim (\Box P \Rightarrow \diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow \Box Q$	V
7	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	

8a	$\langle 1,1\rangle$	$\sim P$		8b	$\langle 1,1\rangle$	$\Box Q$	V
				9	$\langle 1,1,1\rangle$	Q	
				10	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim ((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	

Applicando ora la 3° regola α , dal passo 10 si ottiene:

# passo	mondo	formula	espansa
1	$\langle 1\rangle$	$\sim(\Box P \Rightarrow \diamond((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q))$	V
2	$\langle 1\rangle$	$\Box P$	V
3	$\langle 1\rangle$	$\sim\diamond((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
4	$\langle 1,1\rangle$	P	
5	$\langle 1,1\rangle$	$\sim((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
6	$\langle 1,1\rangle$	$P \Rightarrow \Box Q$	V
7	$\langle 1,1\rangle$	$\sim Q$	

8a	$\langle 1,1\rangle$	$\sim P$		8b	$\langle 1,1\rangle$	$\Box Q$	V
				9	$\langle 1,1,1\rangle$	Q	
				10	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim((P \Rightarrow \Box Q) \Rightarrow Q)$	V
				11	$\langle 1,1,1\rangle$	$P \Rightarrow \Box Q$	
				12	$\langle 1,1,1\rangle$	$\sim Q$	

Anche nel 2° ramo si è ottenuto un clash nel mondo ⟨1,1,1⟩, quindi entrambi i rami sono chiusi, il tableaux è chiuso e quindi la formula al passo 1 non è soddisfacibile, mentre la formula iniziale è un teorema in KD4.

Conclusioni sulla Logica Multimodale

Nella lezione precedente è stato introdotto in concetto di logica temporale con l'introduzione dei due operatori [P] e [F]; la motivazione per l'introduzione di tali operatori viene dalla seguente considerazione:
i frame lineari $(R,<)$ e $(Q,<)$ determinano la stessa logica K4DLX, dove X è lo schema $\Box\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A}$, che corrisponde alla condizione di debole densità. La logica unimodale non è dunque abbastanza espressiva per distinguere la granularità "densa" e "continua" del tempo, per questo abbiamo bisogno dei due operatori [P] e [F].

In tale linguaggio bimodale risulta utile anche l'introduzione dell'operatore $\Box$ (sempre), che non va letto però come un operatore indipendente, ma come operatore derivato dagli altri due, infatti si ha che:

$$\Box\boldsymbol{\mathcal{A}} \quad = \quad [\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\mathcal{A}} \wedge [\boldsymbol{F}]\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

analogamente si tratta la formula duale $\diamond\boldsymbol{\mathcal{A}}$, che significa "*in qualche momento* $\mathcal{A}$", ed è l'abbreviazione di $\langle\boldsymbol{P}\rangle\boldsymbol{\mathcal{A}} \vee \boldsymbol{\mathcal{A}} \vee \langle\boldsymbol{F}\rangle\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Ricorrendo ai connettivi [P], [F] e $\Box$, si può andare a definire uno schema, detto **schema CONT** in quanto permette di individuare il tempo continuo, che permette di distinguere le due granularità temporali.

Lo schema CONT è così strutturato:

$$\boldsymbol{CONT}: \Box([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \langle\boldsymbol{F}\rangle[\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow ([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{F}]\boldsymbol{\mathcal{A}})$$

ed è da leggersi come segue: "*sempre se necessariamente nel passato $\mathcal{A}$ implica possibilmente nel futuro, necessariamente nel passato $\mathcal{A}$, allora necessariamente nel passato $\mathcal{A}$ implica necessariamente nel futuro $\mathcal{A}$*".

Questo schema CONT è lo schema che fa la differenza tra le due granularità del tempo; in particolare è possibile dimostrare che questo schema non è valido nel frame $(Q,<)$, mentre è valido sul frame $(R,<)$:

LO SCHEMA $\Box([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \langle\boldsymbol{F}\rangle[\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow ([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow [\boldsymbol{F}]\boldsymbol{\mathcal{A}})$ È VALIDO SU $(R,<)$, MA NON SU $(Q,<)$.

DIMOSTRAZIONE

Lo schema CONT non è valido in $(Q,<)$

Si va a costruire una particolare formulazione dello schema in cui, invece di considerare una generica formula $\mathcal{A}$, si va a considerare la formula atomica A, ossia:

$$\Box([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{A} \Rightarrow \langle\boldsymbol{F}\rangle[\boldsymbol{P}]\boldsymbol{A}) \Rightarrow ([\boldsymbol{P}]\boldsymbol{A} \Rightarrow [\boldsymbol{F}]\boldsymbol{A})$$

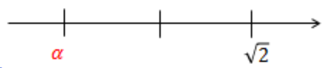
Per far vedere che questo schema non è valido nel frame in analisi è sufficiente dimostrare che questa sua particolare istanza non è valida, infatti tale istanza è valutabile su un modello costruito sul frame considerando una funzione di valutazione della lettera enunciativa.

In particolare, si va a costruire un modello su $(Q,<)$ avente una nuova funzione di valutazione così definita:

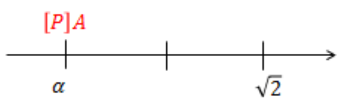
$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{Q} | \boldsymbol{\alpha} < \sqrt{\boldsymbol{2}}\}$$

i mondi α, in questo caso sono i numeri razionali, quindi A è vera solo nei numeri razionali minori di $\sqrt{2}$.

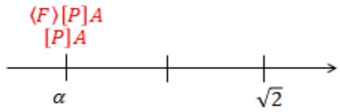
Si consideri allora un mondo razionale più piccolo di $\sqrt{2}$, ad esempio α:



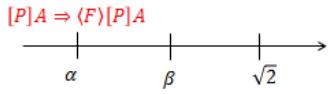
andando a considerare il mondo α, è noto che in tale mondo $[P]A$ è vero, infatti si sa che in tutti i numeri razionali minori di $\sqrt{2}$ A è vera (per la funzione di valutazione) .



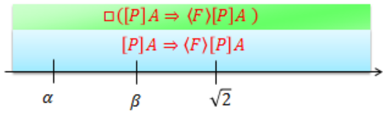
Ma in α è vera anche $\langle F\rangle[P]A$, in quanto i razionali sono densi e quindi si riesce sempre a trovare un numero razionale più grande di quello in cui si è e più piccolo di $\sqrt{2}$; in particolare in un mondo β più grande di α, ma più piccolo di $\sqrt{2}$, è vera [P]A (infatti $\beta < \sqrt{2}$), quindi possibilmente nel futuro è vera necessariamente nel passato A ($\langle F\rangle[P]A$).



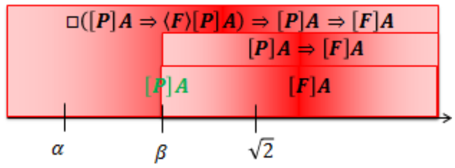
A seguito di quanto visto finora è possibile affermare che in α è vera $[P]A \Rightarrow \langle F\rangle[P]A$



Se si considera un mondo α più grande di $\sqrt{2}$, succede però che risulta falso [P]A, perché c'è qualche numero razionale compreso tra $\sqrt{2}$ e α in cui A non è vera, quindi è ancora vera la formula $[P]A \Rightarrow \langle F\rangle[P]A$ e, di conseguenza, si può affermare che in ogni mondo del modello è vera la formula $\Box([P]A \Rightarrow \langle F\rangle[P]A)$.



Ponendo ancora nel mondo β, risulta evidente che, in qualsiasi $\beta < \sqrt{2}$, sia vera [P]A, ma non è vera [F]A, quindi non risulta vera $[P]A \Rightarrow [F]A$.



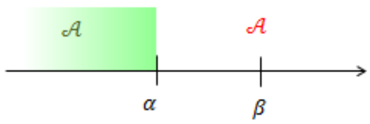
Si è dunque trovato un mondo di un modello costruito su $(Q,<)$ in cui è vero l'antecedente, ma falso il conseguente, quindi è falsa la formula (e, di conseguenza, anche lo schema di partenza).

Lo schema CONT, dunque, non è l'assioma definitore di una logica determinata da $(Q,<)$.

Lo schema CONT è sempre valido in $(R,<)$

Supponiamo di essere in un modello costruito su $(R,<)$ in cui la formula $[P]\mathcal{A} \Rightarrow [F]\mathcal{A}$ non sia vero.

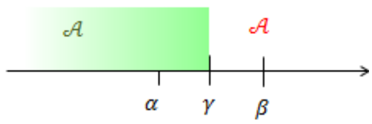
Ciò permette di affermare che esiste sicuramente su $(R,<)$ un mondo α tale per cui prima di α la formula $\mathcal{A}$ è sempre vera, mentre dopo α esiste almeno un mondo β in cui $\mathcal{A}$ non è vera.



Tra tutti i numeri reali si va ora a considerare il più grande numero reale γ tale che:

$$\boldsymbol{\gamma}: \quad \forall \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mathcal{M}} \vDash_{\alpha} \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Si è dunque definita una situazione per cui è noto che prima di γ $\mathcal{A}$ sia sempre vera, mentre, dopo γ non è detto.



Posizionandosi in γ, viene dunque richiesto che $[P]\mathcal{A}$ sia vera, mentre $\langle F\rangle[P]A$ sia falsa, in quanto γ è il più grande dei mondi in cui $\mathcal{A}$ era sempre vera, quindi ovunque ci si posizioni dopo γ non è più vera $[P]\mathcal{A}$.

Ma allora se si falsifica la formula iniziale $[P]\mathcal{A} \Rightarrow [F]\mathcal{A}$ (conseguente dello schema CONT), risulta falso anche l'antecedente, ottenendo così che lo schema CONT è valido in $(R,<)$.

Si è dunque effettivamente ottenuto che su $(R,<)$ il CONT è uno schema valido, mentre su $(Q,<)$ il CONT è uno schema non valido.

Lo schema CONT, quindi, è esattamente lo schema che permettere di distinguere le due granularità del tempo.

La Logica Temporale Lineare

Vista la maggior espressività della logica temporale bimodale, si procede ora andando a definire il concetto di *linearità* nel contesto delle logiche con i due operatori [F], [P] per qualunque granularità del tempo.

Si dice **logica temporale lineare** ogni logica che contenga la minima logica temporale K_t ed i seguenti schemi:

- $\Box\mathcal{A} \Rightarrow [P][F]\mathcal{A}$
- $\Box\mathcal{A} \Rightarrow [F][P]\mathcal{A}$

dove l'operatore □ è visto al solito come operatore derivato che serve a "riassumere" le formule: $\Box\mathcal{A}$ è infatti introdotta come forma abbreviata della formula $[P]\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge [F]\mathcal{A}$

La più piccola logica lineare temporale è chiamata *Lin* ed è determinata dalla classe dei frame transitivi debolmente connessi nel futuro e nel passato, infatti si ricorda che K_t è la minima logica temporale che contiene:

- A1, A2 e A3
- Lo schema K nel futuro e K nel passato
- $\mathcal{A} \Rightarrow [P]\langle F\rangle\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \Rightarrow [F]\langle P\rangle\mathcal{A}$
- lo schema 4 nel passato e nel futuro

La minima logica temporale lineare contenente gli schemi

- $D_F: \langle F\rangle T;$
- $D_P: \langle P\rangle T;$
- $Z_F: [F]([F]\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\langle F\rangle[F]\mathcal{A} \Rightarrow [F]\mathcal{A})$
- $Z_P: [P]([P]\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\langle P\rangle[P]\mathcal{A} \Rightarrow [P]\mathcal{A})$

è determinata dal frame $(\mathbb{Z}, <)$ e viene detta *LinDisc*.

Se Z_P viene sostituita da:

- $W_P: [P]([P]\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow [P]\mathcal{A}$

otteniamo la logica $LinDisc^{\omega}$ determinata da $(\omega, <)$.

La più piccola estensione normale di Lin che contiene gli schemi:

- $D_F;$
- $D_P;$
- $X_F: [F][F]\mathcal{A} \Rightarrow [F]\mathcal{A}$

è determinata dal frame $(Q, <)$ e viene chiamata $LinRat$

La più piccola estensione normale di $LinRat$ che contiene lo schema:

- $CONT: \Box([\mathrm{P}]\mathcal{A} \Rightarrow \langle F\rangle[\mathrm{P}]\mathcal{A}) \Rightarrow ([P]\mathcal{A} \Rightarrow [F]\mathcal{A})$

è determinata dal frame $(R, <)$ e viene chiamata $LinRe$.

Si sono dunque definite tutte le logiche temporali lineari ben assiomatizzate e su cui si posso costruire dei risultati di decidibilità andando a generalizzare le tecniche utilizzate per il frame $(\omega, <)$

La Logica Temporale della concorrenza

Nella realtà, però, risulta necessario conoscere come si evolve il sistema, definendo, ad esempio, cosa succede nello stato successivo , ossia si ha bisogno di un qualche meccanismo che permetta, nel tempo discreto, di contare il numero dei possibili stati del sistema.

Per distinguere lo stato in analisi, gli operatori utilizzati finora ($[P], [F]$ *e* $\langle P\rangle, \langle F\rangle$) non hanno una grande utilità, in quanto permettono di predicare su un qualche stato o su tutti gli stati seguenti.

Uno dei metodi che permettono di analizzare un particolare stato e/o l'evoluzione del sistema in uno stato particolare è quello che si basa sull'utilizzo della **logica della concorrenza** (detta anche **logica LTL**).

La logica LTL è una logica multimodale il cui alfabeto è così composto:

- un insieme di formule atomiche Φ
- i soliti connettivi logici $\sim$ e $\Rightarrow$ (a cui si possono aggiungere al solito gli altri connettivi $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$)
- gli operatori modali già visto in precedenza $\Box$ e $\diamond$, dove $\Box$ assume qui il significato "da ora in poi";
- due nuovi operatori modali:
    - $\odot$, con il significato di "nello stato successivo"
    - $\mathcal{U}$, connettivo binario da leggersi come "*until*" con il significato di "finchè"
- i simboli ausiliari (e).

Le *formule ben formate* si definiscono al solito modo, tenendo conto dell'aggiunta dell'operatore binario $\mathcal{U}$:

- ogni formula atomica è una fbf
- se $\mathcal{A}$ è una fbf, anche $\sim \mathcal{A}$, $\Box\mathcal{A}$, $\odot \mathcal{A}$ sono fbf
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf, anche $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{B}$ sono fbf

Per mettere a punto la semantica dei nuovi operatori introdotti si fa uso di un frame detto *sequenza di stati* che è costituito da una coppia $(\mathcal{S}, \sigma)$, dove σ è una funzione suriettiva da ω (insieme dei numeri naturali) ad $\mathcal{S}$ e dispone in sequenza gli elementi di $\mathcal{S}$.

Su questo frame si costruisce al solito modo un modello $\mathcal{M}$ e alla scrittura $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{A}$ (dove con j si indica il j-esimo mondo della sequenza) si dà il seguente significato:

- $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ formula atomica A, se e solo se $\sigma_j \in V(A)$;
- $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, se e solo se $\mathcal{M} \nvDash_j \mathcal{A}$ oppure $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{B}$
- $\mathcal{M} \vDash_j \sim \mathcal{A}$ se e solo se non $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{A}$
- $\mathcal{M} \vDash_j \odot \mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{M} \vDash_{j+1} \mathcal{A}$
- $\mathcal{M} \vDash_j \Box\mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{M} \vDash_k \mathcal{A}$ con $k \geq j$
- $\mathcal{M} \vDash_j \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{M} \vDash_k \mathcal{B}$ per quale $k \geq j$ e $\mathcal{M} \vDash_i \mathcal{A}$ per ogni $j \leq i < k$

La logica della concorrenza è tipicamente utilizzata per descrivere problemi quali la condivisione delle risorse e simili e quindi ha un certo numero di applicazioni informatiche; per tale ragione sarebbe interessante ottenere dei risultati di decidibilità. Per avere dei risultati di decidibilità, però, è necessario disporre di alcuni assiomi di cui è nota la veridicità; la logica della concorrenza, infatti, può essere assiomatizzata come segue:

- A1
- A2
- A3
- $K_\Box$: $\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B})$
- $K_\odot$: $\odot (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\odot \mathcal{A} \Rightarrow \odot \mathcal{B})$
- Fun: $\odot\sim \mathcal{A} \Leftrightarrow \sim\odot \mathcal{A}$ (schema detto *Function*)
- Mix: $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge \odot \Box\mathcal{A}$
- Ind: $\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \odot \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{A})$ (schema detto *Induction*)
- $U1$: $\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{B} \Rightarrow \diamond \mathcal{B}$
- $U2$: $\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee (\mathcal{A} \wedge \odot (\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{B}))$

Come regole d'inferenza, infine, si avranno:

- modus ponens (MP);
- regola di necessitazione rispetto a $\Box$ $(RN_\Box)$
- regola di necessitazione rispetto a $\odot$ $(RN_\odot)$

Osserviamo che lo schema:

- Fun esprime il fatto che la relazione di raggiungibilità associata a $\odot$ sia una funzione;
- Mix e Ind insieme esprimono il fatto che la relazione di raggiungibilità di $\Box$ è interpretata come la chiusiusra transitiva e riflessiva della relazione di $\odot$.

- Mix implica immediatamente lo schema T e quindi la riflessività
- lo schema 4 è derivabile dai precedenti ed implica la transitività;
- Ind esprime il principio di induzione.

Delle osservazioni sopra elencate, si focalizzi l'attenzione su quella relativa alla derivabilità dello schema 4, ossia:

LO SCHEMA 4 È DERIVABILE DAGLI SCHEMI PRECEDENTEMENTE ELENCATI ED IMPLICA LA TRANSITIVITÀ

DIMOSTRAZIONE

Si consideri una particolare istanza dello schema Mix, ossia: $\quad \Box\mathcal{A} \Rightarrow \odot\, \Box\mathcal{A}$

da questo schema, per la $RN_{\Box}$ si ottiene: $\quad \Box(\Box\mathcal{A} \Rightarrow \odot\, \Box\mathcal{A})$

ora si va a riscrivere lo schema Ind, in cui al posto di $\mathcal{A}$ si ricorre a $\Box\mathcal{A}$, ottenendo quindi: $\quad \Box(\Box\mathcal{A} \Rightarrow \odot\, \Box\mathcal{A}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A})$

a questo punto, per modus ponens dalle ultime due formule ottenute, si ottiene esattamente lo schema 4, infatti: $\quad \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$

A questo punto, per proseguire con lo studio, si ricorre come al solito alla costruzione del modello canonico rispetto ai due operatori $\odot$ e $\Box$. Tale modello canonico, dunque, sarà composto da:

- un insieme di mondi $\mathcal{S}$;
- una relazione di raggiungibilità rispetto a $\odot$
- una relazione di raggiungibilità rispetto a $\Box$

Formalmente dunque si va a costruire il seguente modello: $\mathcal{M}^{LTL} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}_{\Box}, \mathcal{R}_{\odot})$, dove:

- la relazione di raggiungibilità $\mathcal{R}_{\Box}$, a seguito delle definizione date in precedenza, corrisponde alla chiusura transitiva e riflessiva della relazione di $\odot$
- lo schema Fun esprime il fatto che la relazione di raggiungibilità $\mathcal{R}_{\odot}$ deve essere una funzione

Si ha dunque un frame costituito da un insieme di mondi, da una funzione tra l'insieme dei mondi (infatti il mondo successivo di un mondo di $\mathcal{S}$ è dato dalla funzione $f(\mathcal{S})$) ed in cui la funzione di raggiungibilità $\mathcal{R}_{\Box}$ è la chiusura riflessiva e transitiva della funzione f.

Per analizzare la decidibilità, si applica poi la filtrazione, stando ben attenti a mantenere le caratteristiche delle due funzioni di raggiungibilità; applicando un po' di artifici, tali caratteristiche sono mantenibili e quindi si può dimostrare che la logica della concorrenza LTL è corretta e completa rispetto alla classe dei frame $(\mathcal{S}, f)$, dove $\mathcal{S}$ è l'insieme dei mondi finito con un limite superiore da 2^x (con x pari al numero delle sottoformule della formula $\mathcal{A}$), mentre f è una funzione $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Il problema sta nel definire come sono le sottoformule della formula $\mathcal{A}$, infatti, a causa della presenza degli operatori $\odot$ e $\mathcal{U}$ sarà necessario eseguire qualche modifica rispetto a quanto visto finora sulle sottoformule. In particolare bisognerà applicare delle modifiche tenendo conto che l'insieme delle sottoformule non sarà più il numero di connettivi, ma , poiché per ogni connettivo al più si costruiranno 3 nuove formule, allora il numero delle sottoformule sarà pari a $3 \times \#\ connettivi$ ed, in ogni caso, rimane finito, ottenendo così il medesimo risultato di decidibilità

La Logica Dinamica

Un altro tipo di logica abbastanza famosa, nata con l'obiettivo di testare la correttezza di software, è quella che prende il nome di **logica dinamica**.

Verrà qui analizzata solamente la **logica dinamica proposizionale**; essa opera principalmente su due tipologie di oggetti:

- *programmi*: indicati in generale con lettere greche
- *formule ben formate:* per le quali si ricorrerà alla nomenclatura usata finora

Ad ogni programma π si andrà ad associare l'operatore modale $[\pi]$ ed il duale $\langle\pi\rangle$ con i seguenti significati:

- $[\pi]\mathcal{A}$ = dopo ogni esecuzione del programma π vale la formula $\mathcal{A}$
- $\langle\pi\rangle\mathcal{A}$ = esiste almeno un'esecuzione del programma π al termine della quale è vera $\mathcal{A}$

Questo, dunque, è il linguaggio che permette di esprimere correttamente, ad esempio, le post-condizioni.

Per costruirne il modello, è necessario partire da un frame così definito $(\boldsymbol{\mathcal{S}}, \{\boldsymbol{\mathcal{R}_\pi} | \boldsymbol{\pi} \in \boldsymbol{Progr}\})$dove:

- $\mathcal{S}$ è un insieme di mondi
- $\{\mathcal{R}_\pi | \pi \in Progr\}$ è un insieme di relazioni di raggiungibilità valide al variare di π nell'insieme dei programmi.

Da tale frame, per passare al modello, sarà quindi sufficiente aggiungere la funzione di valutazione, quindi: $\boldsymbol{\mathcal{M}} = (\boldsymbol{\mathcal{S}}, \{\boldsymbol{\mathcal{R}_\pi} | \boldsymbol{\pi} \in \boldsymbol{Progr}\}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$.

I programmi, tuttavia, come sappiamo, sono costruiti a partire da oggetti elementari che poi vanno a comporsi tra loro; in particolare, i costrutti fondamentali con cui si vanno a costruire dei programmi sono:

- la sequenza di istruzioni
- la ripetizione iterativa di istruzioni un numero predefinito di volte

In modo non deterministico si va sempre ad applicare una delle due precedenti operazioni; i programmi di riferimento di questi linguaggio, dunque sono così composti:

- un insieme di programmi elementari (Π)
- da un insieme di formule atomiche (Φ)

Da questi si vanno a costruire gli insiemi di programmi e di formule ben formale; in particolare

- per quanto riguarda i programmi:
  - ogni programma atomico è un programma;
  - se π_1 e π_2 sono programmi, allora $\pi_1; \pi_2$ è un programma
    - dove $\pi_1; \pi_2$ sta per "*esegui* π_1 *e poi* π_2"
  - se π_1 e π_2 sono programmi, allora $\pi_1 \vee \pi_2$ è un programma
    - dove $\pi_1 \vee \pi_2$ sta per "*esegui* $non\ deterministacamente$ π_1 *o* π_2"
  - se π_1 è un programma, allora π_1^* è un programma
    - dove π_1^* sta per "*ripeti un numero finito di volte o 0 volte* π_1"
  - se $\mathcal{A}$ è una fbf, allora $\mathcal{A}?$ è un programma
    - dove $\mathcal{A}?$ sta per "*testa* $\mathcal{A}$: $continua\ se\ \mathcal{A}\ é\ vero, altrimenti\ esci$"
- per quanto riguarda le formule ben formale:
  - ogni formula atomica è una fbf
  - se $\mathcal{A}$ è una fbf, allora $\sim \mathcal{A}$ è una fbf;
  - se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf, allora $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è una fbf;
  - se $\mathcal{A}$ è una fbf e π_1 è un programma, allora $[\pi]\mathcal{A}$ è una formula be formata
  - nient'altro è una fbf

Partendo dall'insieme dei programmi elementari non sia più bisogno nel modello di avere la funzione di raggiungibilità per tutti i programmi, ma sarà sufficiente avere la funzione di raggiungibilità per i programmi elementari, visto che gli altri programmi si costruiscono a partire da questi. In particolare, si avrà che:

- $\mathcal{R}_{\pi_1;\pi_2} = \mathcal{R}_{\pi_1} \cdot \mathcal{R}_{\pi_2}$;
- $\mathcal{R}_{\pi_1 \vee \pi_2} = \mathcal{R}_{\pi_1} \vee \mathcal{R}_{\pi_2}$;
- $\mathcal{R}_{\pi_1^*} = \left(\mathcal{R}_{\pi_1}\right)^*$;
- $\mathcal{R}_{A?} = \{(s,s) \colon \mathcal{M} \vDash_s A\}$, ossia è formata da tutte le coppie (s,s) tali che nel mondo s del modello sia vera A

Un modello così costruito viene detto ***modello standard della logica dinamica***.

Anche la logica dinamica, come le logiche viste finora, è assiomatizzabile al fine di studiarne la decidibilità, infatti sono identificabili i seguenti schemi:

- A1, A2, A3;
- $K_{[\pi]}$ con π programma atomico
- $Comp$: $[\pi_1;\pi_2]\mathcal{A} \Leftrightarrow [\pi_1][\pi_2]\mathcal{A}$ (schema di composizione)
- $Union$: $[\pi_1 \vee \pi_2]\mathcal{A} \Leftrightarrow [\pi_1]\mathcal{A} \wedge [\pi_2]\mathcal{A}$
    - tale schema può risultare anomalo a causa della presenza dell'AND ($\wedge$) nel conseguente; ragionandoci, però, risulta evidente che tale struttura è corretta, infatti si vuole a seguito del programma π_1 o del programma π_2 (scelto indeterministicamente) sia vera $\mathcal{A}$, quindi si vuole che $\mathcal{A}$ sia vera dopo ogni esecuzione di π_1, ma sia anche vera dopo ogni esecuzione di π_2
- $Test$: $[\mathcal{A}?]\mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$
- Mix: $[\pi_1^*]\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \wedge [\pi_1][\pi_1]^*\mathcal{A}$
- Ind: $[\pi_1^*](\mathcal{A} \Rightarrow [\pi_1]\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow [\pi_1^*]\mathcal{A})$

i due schemi Mix e Ind sono esattamente quelli visti per la logica della concorrenza, in quanto traducono la chiusura riflessiva e transitiva della relazione associata all'operatore.

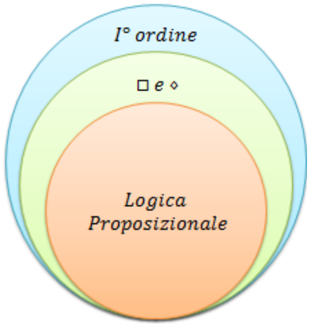
Con questi schemi di assiomi, uniti a *modus ponens (MP)* ed alla regola di necessitazione rispetto a $[\pi]$ per ogni programma π, si può andare a costruire un'assiomatizzazione della logica dinamica proposizionale.

A questo punto, ricorrendo alle solite tecniche (declinate ad hoc), è possibile avere un risultato di decidibilità anche per questa tipologia di logica. Tale risultato, anche in questo caso, richiede, a livello di complessità, di considerare in maniera opportuna cosa sono le sottoformule di una formula data; sviluppando gli opportuni studi, si ottiene, anche qui che il legame tra le sottoformule ed il numero di connettivi che occorrono in una formula è un legame lineare e quindi è possibile con poche modifiche ottenere il risultato sulla decidibilità.

26 novembre 2010

Il Model Checking e la Logica CTL*

Si è visto che la **logica temporale** è un particolare tipo di **logica multimodale**; in particolare si può pensare di introdurre dei “*modi*” (□ *e* ⋄) e quindi di estendere la logica proposizionale ricorrendo a tali modalità.



Tali modi non hanno un particolare significato, ma il significato è dato dalla semantica, che non ha un valore assoluto, ma dipende dalla struttura e dell’interpretazione dei modi rispetto alla relazione di accessibilità ai mondi.

I modi introdotti, non sono indipendenti l’uno dall’altro, ma sono introdotti in modo che uno sia il duale dell’altro, ossia:

$$\diamond \boldsymbol{P} = \sim \Box \sim \boldsymbol{P}$$

Convenzionalmente, per poter nominare tali modi si ricorre alla seguente nomenclatura:

- □ è letto come “*necessariamente*”;
- ⋄ è letto come “*possibilmente*”;

All’interno della logica multimodale giocano un ruolo molto importante le cosiddette *logiche temporali*, in quanto permettono di descrivere un sistema che evolve nel tempo; alle solite proprietà atomiche riferite agli eventi che si sviluppano istantaneamente, dunque, si legano le proprietà relative allo sviluppo di una certa struttura temporale.

La logica temporale viene utilizzata per fare simulazioni in ambito ingegneristico e per fare, ad esempio, verifiche del software; nell’ambito della verifica del software, infatti, vi sono diversi approcci possibili:

1. *simulazione:* data una descrizione astratta di un software, prima di svilupparlo per intero, si va ad eseguire una simulazione dei suoi componenti principali
2. *testing:* una volta che il software è stato sviluppato completamente, si va ad eseguire una fase di test, provando un gran numero di possibili ingressi. In generale, le risposte che si ottengono da questa fase sono di tipo statistico, ossia fatto un test si può dire che il software è ragionevolmente buono all’interno di un certo campione specifico di dati
3. *verifica deduttiva:* opera a livello di logica proposizionale; sostanzialmente vengono individuate le parti principali del codice e si cerca di identificare se vi sono delle implicazioni e/o delle contraddizioni al loro interno
4. *model checking:* tecnica più avanzata (e recente). Dato un sistema complesso, descritto attraverso l’utilizzo di automi o qualsiasi altro formalismo di tipo operazionale, in ogni stato è possibile prendere visione di tutte le possibili scelte attuabili in quel particolare stato ed una volta eseguita una scelta è noto lo stato successivo in cui si andrà a finire. Dato questo sistema, si vogliono testare su di esso alcune **proprietà:**
   a. <u>*liveness:*</u> indicata dalla formula $\boldsymbol{G(request \Rightarrow F\ grant)}$ e da leggersi come “*sempre nel futuro, se viene fatta una richiesta al sistema, allora da qualche parte nel futuro questa richiesta verrà soddisfatta*”.
   b. <u>*Fairness:*</u> indicata dalla formula $\boldsymbol{GF(exec)}$ e da leggersi come “*sempre, prima o poi, il sistema esegue un qualcosa*”; permette di porre l’attenzione su quelle attività che devono essere eseguite infinitamente spesso.
   c. <u>*Safety:*</u> in riferimento ad un sistema ascensore, essa è indicata dalla formula $\boldsymbol{G(open_i \Rightarrow i - th\ floor)}$, ossia va a sottolineare quei comportamenti che si vorrebbero evitare per rendere sicuro il sistema. Nel caso riportato come esempio, la formulazione è da leggersi come segue: “*sempre, se la porta è al piano i-esimo, allora l’ascensore deve trovarsi al piano i-esimo*”.

Avendo definito una serie di proprietà del sistema, se ne è così fornito un *formalismo descrittivo* (infatti descrive delle proprietà senza occuparsi di come istantaneamente si comporta il sistema).

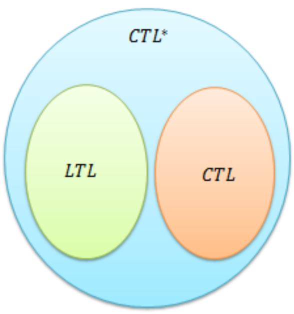
Il model checking, in pratica, una volta definite le proprietà richieste dal sistema, va a controllare che tali proprietà siano effettivamente rispettate dal sistema stesso, fornendo come risposta in uscita:
  - SI, nel caso in cui la proprietà è soddisfatta dal sistema
  - NO, nel caso in cui la proprietà non sia soddisfatta dal sistema, ed in tali circostanze genera un controesempio

5. *Analisi della soddisfacibilità:* problema leggermente diverso rispetto al model checking, infatti dato come input una formula, genera come output:
   - SI se esiste un modello che soddisfa la formula data in input ($\mathcal{M} \vDash \varphi$)
   - NO altrimenti

Le **logiche temporali** vengono introdotte per descrivere transizioni su sistemi reattivi (che evolvono nel tempo), ma senza *tempo esplicito*, infatti si ha la possibilità di scegliere come evolve il tempo, infatti sarà differente analizzare un sistema che evolve in tempo continuo rispetto ad un sistema che evolve in tempo discreto.

Oltre alla differenza tra *tempo continuo* e *tempo discreto*, è necessario evidenziare anche la differenza tra ***tempo lineare*** e ***tempo arborescente***:
- quando si considera un **tempo arborescente**, si sta andando a studiare l'evoluzione di un sistema lungo un albero, in cui vi possono essere degli istanti che portano a ramificazioni
- quando si considera un **tempo lineare**, si sta studiando l'evoluzione lungo una sola linea, per cui esiste un solo istante successivo per l'istante corrente

Tali differenze hanno portato a sviluppare non solo logiche differenti, ma anche sintassi diverse per ciascuna di queste logiche. In particolare:
- per il *tempo lineare* si avranno:
  - le logiche LTL (linear time temporal logic)
  - le logiche PLTL (logiche simili alle LTL, con modalità che permettono di esprimere il passato)
  - ed altre…
- per il *tempo arborescente* si avranno:
  - CTL
  - CTL*
  - PCTL



Andando ad analizzare l'espressività delle logiche principale che si andranno a vedere (LTL, CTL, CTL*), si può osservare che CTL* è la logica più ampia, al cui interno sono identificabili LTL e CTL, che sono logiche incomparabili tra di loro, in quanto hanno una sintassi leggermente diversa l'uno dall'altro.

A livello di espressività, dunque, CTL* risulta essere la logica più espressiva, tuttavia nelle applicazioni non è possibile scegliere sempre CTL* a fronte di questa caratteristica, in quanto alla maggior espressività si affianca una sua maggiore complessità in fase di model checking.

Non necessariamente, inoltre, LTL è più semplice di CTL*, però in generale risulta comunque più intuitiva.

La Logica CTL*

Concettualmente le formule CTL* descrivono proprietà dell'albero computazionale, ottenuto fissando uno stato iniziale in una struttura di Kripke e sviluppando la struttura in un albero infinito.

Per quanto riguarda l'**alfabeto** di riferimento di tale logica, si può identificare:

- AP: insieme di proposizioni atomiche che possono essere viste come i singoli eventi che possono avvenire all'interno del sistema
- Connettivi ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$)
- *Quantificatori di cammino*: si suddividono in:
    - A : per indicare "lungo ogni cammino";
    - E: per indicare "lungo un qualche cammino";
- *Operatori Temporali*: ve ne sono numerosi, ma i principali sono:
    - X: nello stato successivo (*next*);
    - F: in uno stato del cammino (*future*);
    - G: in tutti gli stati (*globally*);
    - U: finchè (*until*)
    - R: duale di U (*release*)

Per quanto riguarda la **sintassi** della logica CTL* si distinguono due tipi di formule (formule di stato e formule di cammino), caratterizzate da una semantica differente. Dato un insieme di proposizione atomiche AP, la sintassi delle formule CTL* è la seguente:

- se $p \in AP$, p è una formula di stato;
- se f e g sono formule di stato, allora sono formule di stato anche:
    - $\sim f$;
    - $f \wedge g$;
    - $f \vee g$
- se f è una formula di stato, f è anche una formula di cammino
- se f è una formula di cammino, allora
    - Ef è una formula di stato
    - Af è una formula di stato
- se f e g sono formule di cammino allora sono formule di cammino anche:
    - $\sim f$;
    - $f \vee g$;
    - $f \wedge g$;
    - Xf;
    - Ff;
    - Gf;
    - fUg;
    - fRg.

Riassumendo, si può dunque, si può affermare che:

FORMULE DI STATO	φ_S: $p \in AP \mid \sim \varphi_S \mid \varphi_S \wedge \varphi_S \mid \varphi_S \vee \varphi_S \mid A\varphi_C \mid E\varphi_C$
FORMULE DI CAMMINO	φ_S: $\varphi_S \mid \sim \varphi_C \mid \varphi_C \wedge \varphi_C \mid \varphi_C \vee \varphi_C \mid X\varphi_C \mid F\varphi_C \mid G\varphi_C \mid \varphi_C U \varphi_C \mid \varphi_C R \varphi_C$

Le formule di cammino, dunque, risultano più generali; le formule di stato, infatti, non contengono operatori temporali. Per tale motivo, quando si andranno a valutare le formule di stato si opererà in un certo modo, mentre con gli operatori temporali bisognerà ricorrere ad una semantica differente.

È noto che la **semantica** di una certa logica è data in base ad una certa struttura; se si pensa, ad esempio, alla logica proposizionale, dato l'insieme AP di lettere proposizionali, la semantica è data rispetto ad una valutazione delle lettere, ossia una funzione che, per ciascuna delle singole lettere, dica se sono vere oppure false, ossia: $v: AP \to \{0,1\}$.

Nel caso della logica temporale, si hanno sempre delle lettere proposizionali, il cui valore, però, evolve nel tempo e tale tempo non è lineare, bensì arborescente. Ciò che si ottiene, dunque, non è più una semplice valutazione, ma è ciò che prende il nome di **struttura di Kripke**.

Prima di poter introdurre la semantica, dunque, è necessario introdurre il concetto di "*struttura di Kripke*"; esistono numerose definizioni equivalenti a riguardi, la più semplice risulta essere la seguente:

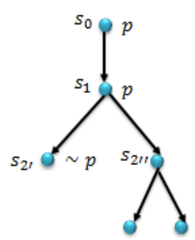
LA STRUTTURA DI KRIPKE È UNA TERNA DEL TIPO $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, l)$ DOVE:
- $\mathcal{S}$ È UN INSIEME DI STATI (IDENTIFICABILI COME I NODI DELL'ALBERO SU CUI SI STANNO FACENDO EVOLVERE LE FORMULE)
- $\mathcal{R}$ È LA RELAZIONE DI ACCESSIBILITÀ SU $\mathcal{S}$ ($\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$) CHE DESCRIVE IL GRAFO SOGGIACENTE ALL'ALBERO IN ANALISI PERMETTENDO DI DEFINIRE, DATO UN NODO, QUALE SIA IL PADRE E QUALE SIA IL FIGLIO.
- l È L'*ETICHETTATURA* CHE, AD OGNI SINGOLO NODO, ASSOCIA TUTTE LE LETTERE PROPOSIZIONALI (PROPRIETÀ ATOMICHE) CHE VALGONO IN QUEL NODO. AD OGNI STATO, DUNQUE, ASSOCIA UN INSIEME DI PROPOSIZIONI ATOMICHE $(l: S \to 2^{AP})$

Si può osservare che la componente destra della funzione riportata per l non è altro che la valutazione, come quella indicata per la logica proposizionale. 2^{AP}, infatti, sarebbero tutte le funzioni che da AP vanno in un insieme di 2 elementi. Ad ogni singolo stato, quindi, si sta associando una valutazione per tutte le lettere di AP.

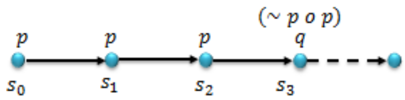
Dato un insieme di stati (finito o infinito) ed una relazione di accessibilità che permette di definire come sono relazioni tra loro gli stati (ossia definisce la struttura dell'albero), l'etichettatura permette di definire le lettere atomiche valgono in ogni singolo stato e quindi permette di valutare anche formule più complesse nei vari stati dell'albero.

La complessità della semantica della logica CTL* è data dal fatto che si vuole studiare come evolve la validità delle formule nel tempo; in particolare, indicando con π^i in un cammino $\pi = s_0, s_1, \ldots | \forall i \ (s_i, s_{i+1}) \in \mathcal{R}$ il suffisso di π che parte da s_i, si ha che:
- se f è una formula di stato, $\boldsymbol{\mathcal{M}, s} \vDash \boldsymbol{f}$ indica che f vale in uno stato s della struttura di Kripke $\mathcal{M}$;
- se f è una formula di cammino, $\boldsymbol{\mathcal{M}, \pi} \vDash \boldsymbol{f}$ indica che f vale lungo un cammino π della struttura di Kripke $\mathcal{M}$.

La relazione $\vDash$ viene quindi definita induttivamente come segue:

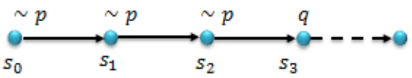
Fissando $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ **formule di stato**	• $\mathcal{M}, s \vDash p$	sse	$p \in l(s)$ con $p \in AP$
	• $\mathcal{M}, s \vDash \sim p$	sse	$\mathcal{M}, s \nvDash p$
	• $\mathcal{M}, s \vDash \varphi \wedge \psi$	sse	$\mathcal{M}, s \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, s \vDash \psi$
	• $\mathcal{M}, s \vDash \varphi \vee \psi$	sse	$\mathcal{M}, s \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}, s \vDash \psi$
	• $\mathcal{M}, s \vDash E\varphi$	sse	$\exists$ un cammino π da s tale che $\mathcal{M}, \pi \vDash \varphi$ *Deve dunque esiste almeno un cammino che inizia con lo stato s in cui la formula φ sia soddisfatta, ossia: $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi$*
	• $\mathcal{M}, s \vDash A\varphi$	sse	$\forall$ cammino π che inizia con s, $\mathcal{M}, \pi \vDash \varphi$ *La formula φ deve essere soddisfatta nel primo stato del cammino π, ossia: $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi$*
	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi$	sse	Definito s_0 il primo stato di π (π^0), $\mathcal{M}, s_0 \vDash \varphi$
	• $\mathcal{M}, \pi^i \vDash \varphi$	sse	Definito s_i l'i-esimo stato di π (π^i), $\mathcal{M}, s_i \vDash \varphi$
Fissando $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\psi}$ **formule di cammino**	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \sim \varphi$	sse	$\mathcal{M}, \pi^0 \nvDash \varphi$
	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi \wedge \psi$	sse	$\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi$ e $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \psi$
	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi \vee \psi$	sse	$\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \psi$
	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash X\varphi$	sse	$\mathcal{M}, \pi^1 \vDash \varphi$ *Ossia la formula φ deve essere soddisfatta a partire dallo stato successivo a s_0 nel cammino π. Graficamente:* *per quanto detto sulla soddisfacibilità di $X\varphi$:* $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash Xp \Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi^1 \vDash p$ *ma per definizione:* $\mathcal{M}, \pi^1 \vDash p \Leftrightarrow \mathcal{M}, s^1 \vDash p$. *Quindi Xp è valido nella struttura rappresentata a lato.* *Si osservi invece che:* $\mathcal{M}, \pi^1 \nvDash Xp$
			
	• $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash F\varphi$	sse	$\exists i \geq 0 \mid \mathcal{M}, \pi^i \vDash \varphi$

- $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash G\varphi$ sse $\forall i \geq 0 \,|\mathcal{M}, \pi^i \vDash \varphi$
- $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi U \psi$ sse $\exists k \geq 0 \,|\mathcal{M}, \pi^k \vDash \psi$ e $\forall\, 0 \leq j < k |\mathcal{M}, \pi^j \vDash \varphi$



Graficamente, considerando pUq, deve svilupparsi quanto segue: deve dunque esistere un istante in cui vale q, e p deve essere valido in tutti gli istanti precedenti

- $\mathcal{M}, \pi^0 \vDash \varphi R \psi$ sse $\forall j \geq 0, se\ \forall i < 0\ si\ ha\ che\ \mathcal{M}, \pi^i \nvDash \varphi$ allora $\mathcal{M}, \pi^j \vDash \psi$



E' la situazione duale a quella vista per l'operatore U, infatti, graficamente si è nella situazione riportata a lato:

Esempio 1 (esecuzione finita)

Supponiamo che la struttura di Kripke in analisi sia così costituita:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\} \\ AP = \{p\} \\ l(s_1) = l(s_3) = \{p\} \quad l(s_0) = l(s_2) = \emptyset \end{cases}$$

Si consideri il seguente cammino $\pi = s_1 s_1 s_3 s_3 s_2 s_3 s_3 s_0 s_2 s_2 s_0$; a seguito della definizione dell'etichettatura e del cammino, si può quindi andare ad affermare che:

- $\pi^0 \vDash p$: infatti $\pi^0 = s_1$ e l'etichettatura di s_1 contiene p;
- $\pi^4 \nvDash p$: infatti $\pi^4 = s_2$ e s_2 è etichettato con l'insieme vuoto, quindi p non vale nello stato s_2 e di conseguenza non vale in π^4;
- $\pi^{15} \nvDash p$, infatti si sta considerando un istante che è oltre la fine dell'esecuzione e quindi p è sempre falso
- $\pi^2 \vDash p \wedge Xp$, infatti affinchè questo sia valido è necessario, per definizione dell'operatore $\wedge$, che $\mathcal{M}, \pi^2 \vDash p$ e $\mathcal{M}, \pi^2 \vDash Xp$, quindi:
  - $\mathcal{M}, \pi^2 \vDash p$, infatti $\pi^2 = s_3$ e l'etichettatura di s_3 contiene p;
  - $\mathcal{M}, \pi^2 \vDash Xp$: affinché questo sia valido è necessario che $\mathcal{M}, \pi^3 \vDash p$, quindi:
    - $\mathcal{M}, \pi^3 \vDash p$ infatti $\pi^3 = s_3$ e l'etichettatura di s_3 contiene p;

  essendo valide tutte le condizione richieste , si può quindi effettivamente affermare che $\pi^2 \vDash p \wedge Xp$
- $\pi^3 \nvDash Gp$, infatti sappiamo che l'operatore *globally (G)* è valido se e soltanto se $\forall i \geq 3 \,|\mathcal{M}, \pi^i \vDash p$, ma è sufficiente considerare $\pi^4 = s_2$ per trovare un caso in cui p non è valida e quindi affermare che $\pi^3 \nvDash Gp$. Si osservi, inoltre, che essendo l'esecuzione di tipo finito, tale formula sarà falsa a prescindere, in quanto prima o poi (al termine dell'esecuzione) si avrà sempre $\sim p$ e quindi *l'operatore G non può mai essere valido in un'esecuzione finita.*
- $\pi^1 \vDash FG \sim p$: sempre in relazione al fatto che si sta studiando un'esecuzione finita, tale formula sarà sempre valida, in quanto nel futuro esisterà sempre un certo punto in seguito al quale $G \sim p$ sarà sempre verificata, ossia dopo il quale p sarà sempre falsa.

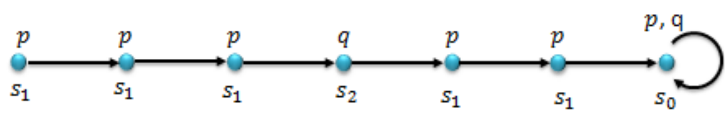
Esempio 2 (esecuzione infinita)

Supponiamo che la struttura di Kripke in analisi sia così costituita:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{s_0, s_1, s_2\} \\ AP = \{p, q\} \\ l(s_0) = \{p, q\} \quad l(s_1) = \{p\} \quad l(s_2) = \{q\} \end{cases}$$

Si consideri il seguente cammino $\pi = s_1 s_1 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_0)^\omega$ (quindi con un loop infinito sullo stato s_0); a seguito della definizione dell'etichettatura e del cammino, si può quindi andare ad affermare che:

- $\pi^1 \vDash FGp$: infatti nel futuro, esiste un punto a seguito del quale sarà sempre vero p; in particolare c'è l'istante in cui si comincerà a ciclare su s_0 e, sapendo che $l(s_0) = \{p, q\}$, si può affermare che durante il loop p sarà sempre vero
- $\pi^1 \vDash p\ U\ q$: per verificare tale affermazione è sufficiente fare una rappresentazione grafica della struttura in analisi inserendo le varie etichette:



Si può osservare che, partendo da π^1, la prima volta che si legge q è in π^3 ed in tutti gli istanti precedenti é vera p

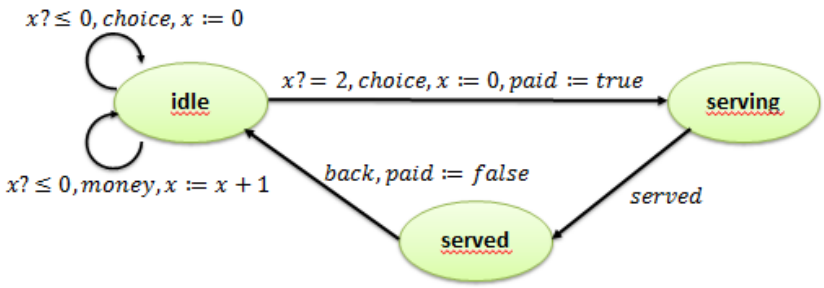
- $\pi^4 \vDash Gp$: evidente dalla rappresentazione della struttura riportata in precedenza
- $\pi^2 \nvDash XGq$: infatti si ha che $\pi^3 \vDash q$, ma q non risulta valida in tutti gli stati successivi a π^2 (basta vedere che è falsa in π^4)

Esempio 3: passaggio da un sistema reale alla struttura di Kripke soggiacente

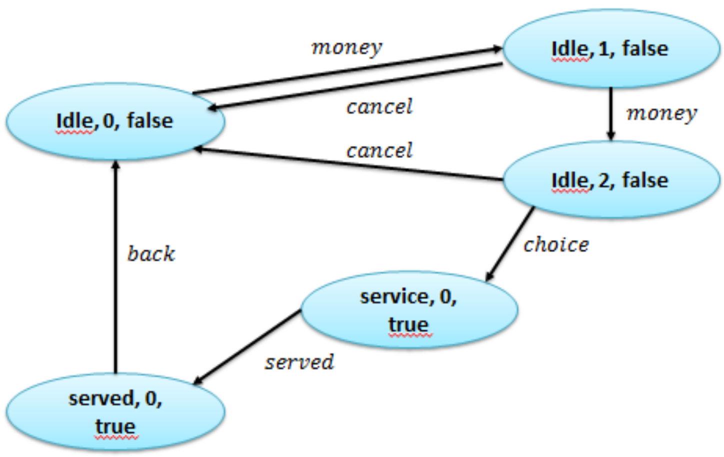
1. *mondo reale:* si consideri, ad esempio, una macchina del caffè automatica caratterizzata dalla seguente proprietà: sono necessari 2 gettoni affinchè venga erogato il caffè

2. *sintassi:* si va a modellizzare il mondo reale ricorrendo ad una macchina a stati così strutturata:
   a. è necessario avere un contatore per contare il numero di monete inserite
   b. se il contatore è ≤ 0 e viene inserito un gettone, allora bisogna incrementare di 1 il contatore
   c. nel momento in cui il contatore delle monete arriva a 2 e viene selezionata la bevanda ($choice$), allora il contatore viene resettato a 0, la variabile "$paid$" diventa vera e si passa nello stato "$serving$"
   d. a questo punto diventa vera una variabile di servizio ($served$); quando la bevanda è stata erogata si ritorna allo stato iniziale e la variabile "$paid$" torna ad essere falsa
   e. se invece il contatore è minore di 0 e viene selezionata una scelta, il sistema deve restare nello stato precedente, ossia non deve succedere nulla

La macchina a stati che indica tale funzionamento può essere così rappresentata:



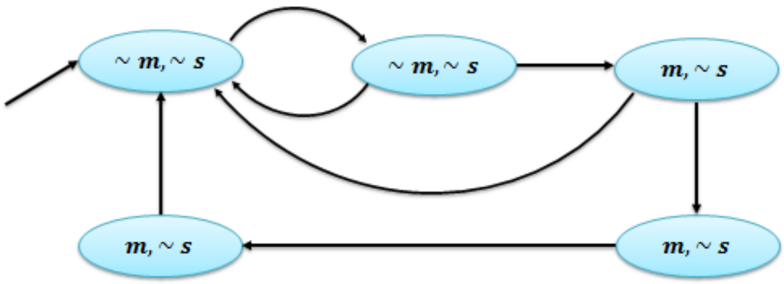
3. *Semantica:* si va a definire il sistema di transizioni, andando a descrivere nel dettaglio le operazioni compiute dal sistema. Per il caso in analisi, indicando in ogni nodo lo stato del sistema, il valore del contatore e la validità della variabile "$paid$" si otterrà quanto segue:



4. *Struttura di Kripke:* dopo aver definito la semantica, è possibile definire i predicati atomici del sistema che, nel caso in analisi, risultano essere:

a. $m \rightarrow credito\ sufficiente$
b. $s \rightarrow servizio$

a questo punto è sufficiente sostituire tali predicati nella macchina a stati elaborata al punto in precedenza, ottenendo:



Si è dunque ottenuta la struttura di Kripke relativa al sistema reale di una macchina del caffè automatica e partendo da questa è possibile andare a studiarne le relative proprietà.

Le Logiche CTL ed LTL

Durante il corso, è stata analizzata la **logica modale**, come estensione della logica proposizione che si basa sull'utilizzo di *operatori modali*. Dopo aver analizzato il valore astratto di tali operatori, risulta necessario ora comprenderne il significato pratico ed il loro utilizzo in campo ingegneristico. Alcuni esempi di utilizzo degli operatori modali sono:

- date delle black-box collegate tra di loro e soggiacenti un certo grafo, in ognuna di queste v'è un certo di informazione ed il sistema evolve a seconda del fatto che una certa scatola possa acquisire o meno informazione dall'altra. In tali condizioni, gli operatori modali assumono il valore di "*conosce*" o "*non conosce*", ottenendo così una *logica epistemologica*
- sviluppo di una *logica della necessità*, in cui certi comportamenti avvengono in base ad alcune parti del sistema che possono permettere o bloccare tali comportamenti (tale tipo di logica viene anche detta *deontologica*)
- una logica particolarmente interessante è quella che rappresenta l'evoluzione di un sistema che varia nel tempo (*logica temporale*); tale logica è a sua volta un'estensione della logica proposizionale, quindi, in relazione alla potenza del linguaggio generato, è collocabile a metà strada tra la logica del 1° ordine e la logica proposizionale.

Focalizzando l'attenzione sulle logiche temporali, si ha a disposizione un certo insieme di predicati atomici, considerati come *singoli eventi* che possono verificarsi all'interno del sistema, e l'idea dei *mondi*, tipica della logica modale, viene qui applicata al concetto di *stato* ed i vari stati sono collegati tra di loro mediante una certa *relazione di accessibilità*.

Un mondo, dunque, è lo stato del sistema, ossia un sottoinsieme di proposizioni atomiche (eventi) che possono avvenire (o non avvenire) in tale stato.

Esempio

Dato l'insieme degli eventi $AP = \{p, q\}$, un sistema può essere composto dai seguenti stati:

- $s_1 = \{p, \sim q\}$;
- $s_2 = \{p, q\}$;
- $s_3 = \{\sim p, q\}$;
- $s_4 = \{\sim p, \sim q\}$

Definiti gli stati, il sistema evolve da uno stato all'altro a seconda delle proprietà che vengono (o non vengono) soddisfatte. Si otterrà quindi un grafo che rappresenta, in ogni istante, tutte le proprietà che valgono in ogni particolare stato del sistema ed in tutti gli stati che sono raggiungibili.

Quando si opera con un sistema complesso, si hanno due modi per poter valutare i possibili comportamenti del sistema stesso; in particolare, quando si è in un certo stato, si può vedere se:

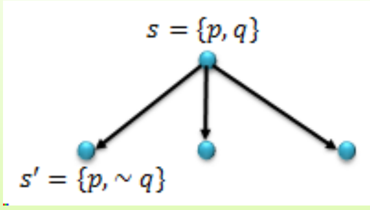
- andare ad indagare su tutte le possibili evoluzioni a partire da tale stato
- andare ad indagare su una particolare evoluzione a partire da tale stato

Si è dunque introdotto un *formalismo logico*, detto **CTL***, che, a livello dei singoli stati, offre una descrizione di tipo logica proposizionale, mentre a livello complessivo si può andare ad indagare su tutti gli stati accessibili dallo stato corrente oppure valutare se esiste almeno uno stato accessibile dallo stato corrente in cui vige una certa proprietà. A tal proposito, si sono quindi utilizzati dei *quantificatori di cammino*, che prendono il nome di A e E.

Se ci si limita a considerare ciò che avviene in uno stato, è sufficiente andare ad applicare semplicemente le classiche regole della logica proposizionale; quando si è in uno stato, però, si può andare anche a quantificare su tutti i possibili cammini che partono da quello stato oppure si può predicare affermando, ad esempio che "*esiste almeno un cammino in cui sono soddisfatte certe proprietà*" ed è proprio tale operazione che viene svolta ricorrendo ai *quantificatori di cammino*. E' possibile inoltre mettere in relazione tra loro i predicati atomici di due stati collegati tra loro utilizzando degli *operatori temporali*.

Esempio

Si consideri il seguente grafo:



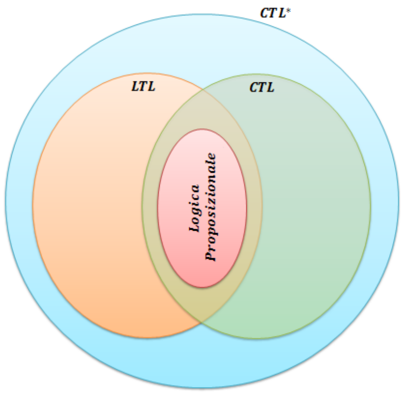
in relazione ad esso è possibile affermare che:

- $E(Xp)$, ossia esiste un cammino in cui nell'istante successivo a quello corrente (s) vale p
- $E(X \sim q)$, ossia esiste un cammino in cui nell'istante successivo a quello corrente (s) vale $\sim q$

È dunque possibile mettere in relazione l'istante corrente con delle proprietà, delle proposizioni atomiche e delle espressioni della logica proposizionale che valgono in certi istanti successivi o precedenti.

Si è quindi introdotto il formalismo **CTL***, caratterizzato da una sintassi abbastanza evoluta e da una sua semantica, e si è detto essere una logica *arborescente lineare:*

- *arborescente* in quanto, nel momento in cui si considera il quantificatore di cammino universale, si vanno ad analizzare tutti i possibili rami che si sviluppano dal nodo che si sta considerando
- *lineare* in quanto, nel momento in cui si analizzare il quantificatore di cammino esistenziale, si vanno sostanzialmente a cancellare tutti gli altri possibili cammini



Questo formalismo, dunque, è molto potente, a volte anche troppo rispetto alle necessità concrete che si hanno e quindi vengono introdotti altri due formalismi che vanno ad estendere la logica proposizionale:

- **CTL:** logica strettamente arborescente
- **LTL:** logica strettamente lineare

La logica CTL

Sintassi

Corrisponde a quella vista per CTL*, ma gli operatori temporali sono <u>sempre</u> preceduti da quantificatori di cammino.

Ad esempio:

- FGp o GFp non sono formule CTL, infatti contengono solo operatori temporali
- $AFEGp, EFEGp, EFAGp$ sono formule di CTL in quanto tutti gli operatori temporali sono preceduti da quantificatori di cammino.

Obbligando a mettere sempre un quantificatore di cammino prima dell'operatore temporale, si va a considerare un andamento strettamente arborescente; la sintassi, dunque, risulta semplificata, infatti si hanno le solite formule della logica proposizionale a cui si può aggiungere come prefisso un operatore misto cammino-temporale. Quindi, poiché gli operatori di cammino sono A e E, mentre gli operatori temporali analizzati sono X, U, G, F e R, in CTL si hanno a disposizione i seguenti operatori misti:

- $AX \quad e \quad EX$
- $AU \quad e \quad EU$
- $AG \quad e \quad EG$
- $AF \quad e \quad EF$
- $AR \quad e \quad ER$

Per quanto riguarda gli operatori *until (U)* e *release (R)*, si ricordi che sono operatori binari, quindi gli operatori ad essi relativi indicati sopra in forma semplificata, in realtà stanno ad indicare:

- $A(p\ U\ q) \quad e \quad E(p\ U\ q)$
- $A(p\ R\ q) \quad e \quad E(p\ R\ q)$

Si può dimostrare, inoltre, che si può ridurre il numero degli operatori misti semplicemente a 3, ossia:

- EX
- EG
- EU

ossia tutti gli operatori indicati sopra possono essere semplicemente dedotti a partire da questi 3.

La logica CTL, tuttavia, non viene presentata direttamente con solo tali operatori, in quanto risulta eccessivamente complesso e, soprattutto, perché, quando si descrive concretamente un sistema reale, se si utilizza un insieme di operatori minimo, si tende ad aumentare enormemente la lunghezza delle formule.

L'interesse nel cercare quali siano gli operatori minimi di un certo linguaggio è dato dal fatto che, quando si procede con l'implementazione di uno strumento di verifica, si potrà procedere come segue:

- si andranno ad implementare degli algoritmi di verifica solo per l'insieme di operatori minimi
- con una qualche sintassi viene messa in input allo strumento di verifica la descrizione del sistema ricorrendo a tutti gli operatori messi a disposizione dalla logica
- si ricorrerà ad parse che permetterà di tradurre la descrizione fornita nell'equivalente composta solo dagli operatori minimi, permettendo così di utilizzare gli algoritmi precedentemente implementati.

Si può quindi affermare che vengono introdotti numerosi operatori per fornire una maggiore chiarezza nella descrizione del sistema all'utente finale, ma allo stesso tempo si cerca di utilizzare – nelle verifiche – un insieme minimo di operatori per rendere meno complessi a livello implementativo e computazionale gli algoritmi di verifica utilizzati.

Per dimostrare l'equivalenza tra gli operatori elencati sopra ed i 3 operatori minimi è sufficiente considerare tutti gli operatori non minimi ed osservare che possono essere scritti in maniera equivalente ricorrendo solo ai 3 operatori minimi; in particolare:

- Il *Release* può non essere considerato in quanto è, per definizione, il duale dell'*Until;*
- In generale, si può far riferimento alla seguente tabella:

$AX\varphi$	=	$\sim EX(\sim \varphi)$
$EF\varphi$	=	$E(True\ U\ \varphi)$
$AG\varphi$	=	$\sim EF(\sim \varphi)$
$AF\varphi$	=	$\sim EG(\sim \varphi)$
$A[\varphi\ U\ \psi]$	=	$\sim E[\sim \psi\ U\ (\sim \varphi \wedge \sim \psi)] \wedge \sim EG \sim \psi$
$A[\varphi\ R\ \psi]$	=	$\sim E[\sim \varphi\ U \sim \psi]$
$E[\varphi\ R\ \psi]$	=	$\sim A[\sim \varphi\ U \sim \psi]$

In realtà, al di là dell'equivalenza tra gli operatori minimi e gli altri operatori, molto più complesso risulterebbe andare a dimostrare che tali operatori sono effettivamente i 3 operatori minimi.

Vantaggi & Svantaggi

Per la logica CTL esistono delle procedure effettive di verifica, ossia dato un sistema (che può essere un automa a stati finiti, un automa di Büchi, un set di formule, ect.) ed una formula scritta in CTL da verificare su tale sistema, esistono degli strumenti anche sufficientemente efficienti che riescono a verificare se tale formula vale nel sistema considerato.

D'altro canto, quando si opera su un sistema concreto, non è comodo obbligare ogni operatore temporale ad essere preceduto da un quantificatore di cammino, in quanto rende particolarmente complesso il processo descrittivo.

La Logica LTL

Per rimediare alle problematiche viste con la logica CTL, si introduce un altro formalismo (con comparabile con CTL, ma contenuto in CTL*) che prende il nome di **LTL (Linear Time temporal Logic)**

Sintassi

La sintassi di LTL è simile a quella vista per CTL*, ma non vengono considerati i quantificatori di cammino ad eccezione di un'operatore di cammino universale A, posto in testa a qualsiasi formula – e quindi tipicamente omesso, ossia viene riportata la direttamente la formula φ per indicare $A\varphi$ - . Da tale quantificazione esterna si deduce che le formule non vengono più valutate su un albero, ma su una linea.

La sintassi per le formule LTL risulta dunque estremamente semplificata, in quanto non sia ha più bisogno di distinguere *formule di stato* da *formule di cammino*; gli operatori permessi sono quindi: X, G, F, U e R. In particolare, una generica formula φ di LTL può essere:

- $p \in AP$ (preposizione atomica)
- $\sim \psi$
- $\psi \vee \lambda$
- $\psi \wedge \lambda$ ricordando che $\psi \wedge \lambda \equiv \sim (\sim \psi \vee \sim \lambda)$
- $\psi \Rightarrow \lambda$ ricordando che $\psi \Rightarrow \lambda \equiv \sim \psi \vee \lambda$
- $\psi \Leftrightarrow \lambda$ ricordando che $\psi \Leftrightarrow \lambda \equiv (\psi \Rightarrow \lambda) \wedge (\lambda \Rightarrow \psi)$
- $X\psi$
- $F\psi$
- $G\psi$
- $\psi\ U\ \lambda$
- $\psi\ R\ \lambda$

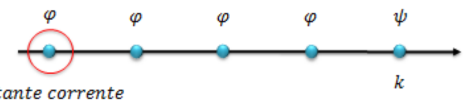
Per ottenere tali formule, si è operato in modo induttivo, procedendo come già visto in precedenza, ossia:

- ogni proposizione atomica $p \in AP$ è una formula di LTL
- Se φ è una formula di LTL, allor anche $\sim \varphi$ è una formula di LTL
- Se φ e ψ sono formule di LTL, allora sono formule di LTL anche:
  - $\psi \wedge \lambda$
  - $\psi \vee \lambda$
  - $\psi \Rightarrow \lambda$
  - $\psi \Leftrightarrow \lambda$
- Se φ e ψ sono formule di LTL, allora sono formule di LTL anche:
  - $X\varphi$;
  - $G\varphi$;
  - $F\varphi$;
  - $\psi U \varphi$;
  - $\psi R \varphi$.

Semantica

La semantica della logica LTL, così come per CTL, corrisponde a quella vista per CTL*, a meno delle formule non appartenenti alla logica di riferimento.

Formalmente, per la logica LTL, fissata una struttura di Kripke $\mathcal{M}$ ed una certa successione di stati $\pi \in S^{\omega}$ (ossia $\pi = s_0 s1 \quad s_2 \dots$ anche infinita[1]), si può affermare quanto segue:

$\boldsymbol{\pi \vDash p}$ sse $\boldsymbol{p \in s_0}$	Una preposizione atomica p, nella struttura di Krikpe assegnata, è verificata lungo il percorso π se e soltanto se p è uno di quegli eventi che si verifica nel primo istante del percorso
$\boldsymbol{\pi \vDash \sim \varphi}$ sse $\boldsymbol{\pi \nvDash \varphi}$	
$\boldsymbol{\pi \vDash \varphi \vee \psi}$ sse $\boldsymbol{\pi \vDash \varphi \ \ oppure \ \ \pi \vDash \psi}$	
$\boldsymbol{\pi \vDash X\varphi}$ sse $\boldsymbol{\pi^1 \vDash \varphi}$	La formula Xp è vera se nell'istante successivo a quello corrente vale p. Si osservi che la notazione $\boldsymbol{\pi^n}$, permette di identificare il percorso di π a partire dall'n-esimo stato. *Esempio:* $\pi^1 = s_1 s_2 s_3 \dots$ *senza* s_0
$\boldsymbol{\pi \vDash F\varphi}$ sse $\boldsymbol{\exists k \geq 0 \mid \pi^k \vDash \varphi}$	Esiste un certo stato del percorso in cui è vera φ. Questa rappresenta la versione *debole* dell'operatore *Future,* in quanto il segno $\geq$ permette che venga considerato "futuro" anche lo stato attuale
$\boldsymbol{\pi \vDash \bar{F}\varphi}$ sse $\boldsymbol{\exists k > 0 \mid \pi^k \vDash \varphi}$	Tale relazione rappresenta il "*futuro stretto*", infatti ricorre alla notazione "strettamente > di 0", ma è comunque ottenibile dalla combinazione delle relazioni basilari, infatti: $\bar{F}\varphi \equiv F\varphi \wedge \sim \varphi$
$\boldsymbol{\pi \vDash G\varphi}$ sse $\boldsymbol{\forall k \geq 0 \mid \pi^k \vDash \varphi}$	
$\boldsymbol{\pi \vDash \varphi\, U\, \psi}$ sse $\boldsymbol{\exists k \geq 0 \mid \pi^k \vDash \psi \ \ e \ \ \forall 0 \leq j < k, \pi^j \vDash \varphi}$	Graficamente:  sostanzialmente φ dovrà valere fino a quando non vale ψ; nel momento in cui inizia a valere ψ, invece, potrebbe smettere di essere verificata φ
$\boldsymbol{\pi \vDash \varphi\, R\, \psi}$ sse $\boldsymbol{\forall j \geq 0, se\ \forall i < j\ \vert \pi^i \nvDash \varphi\ allora\ \pi^j \vDash \psi}$	

I cinque operatori permessi dalla logica LTL possono essere espressi in termini dei due soli operatori X e U, infatti:

- $\boldsymbol{\varphi\, R\, \psi \equiv \sim (\sim \varphi\ U\ \sim \psi)}$
  - dalla formula $(\sim \varphi\ U\ \sim \psi)$ bisogna portar fuori le negazioni, stando attenti al quantificatore universale espresso implicitamente in testa alle formule
- $\boldsymbol{F\varphi \equiv\ True\ U\, \varphi}$
  - Affermare che $(True\ U\ \varphi)$ significa che $\exists k \geq 0 \mid \pi^k \vDash \varphi\ \ e\ \ \forall 0 \leq j < k, \pi^j \vDash True$ con $True \equiv tautologia$
  - Ma il fatto che $\forall 0 \leq j < k, \pi^j \vDash True$ è banale, infatti sempre, in ogni istante, devono valere le tautologie, quindi non dà informazioni rilevanti e può essere sottointeso
  - Inoltre $\exists k \geq 0 \mid \pi^k \vDash \varphi$ è esattamente la definizione di $F\varphi$
- $\boldsymbol{G\varphi \ \equiv \sim F \sim \varphi}$
  - infatti il "*Globally*" è, per definizione, il duale del futuro e quindi dire che "vale sempre φ" è come dire "non è vero che nel futuro non vale φ".

[1] Ha più senso considerare le successioni infinite, in quanto la gran parte delle applicazioni reali (macchinetta del caffè, ascensore, etc.) rappresentano sistemi che non sono stati pensati per avere un termine, ma –idealmente- dovrebbero sempre essere in esecuzione.

Risulta quindi evidente che gli operatori X e U siano gli operatori minimi; risulta tuttavia più complesso dimostrare che l'insieme composto da tale operatori è effettivamente l'*insieme minimale*, ossia che non è possibile esprimere tutti gli operatori permessi dalla logica solo con il *Next (X)* o solo con l'*Until (U).*

Soddisfacibilità di una formula

La **soddisfacibilità di un formula** è espressa dalla seguente affermazione:

NELLA STRUTTURA DI KRIPKE $\mathcal{M}$, NELLO STATO s È SODDISFATTA UNA CERTA FORMULA $(A)\varphi$ SE E SOLTANTO SE, PER OGNI CAMMINO π CHE INIZIA CON LO STATO s, SI HA CHE φ È SODDISFATTA LUNGO IL CAMMINO π. FORMALMENTE:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}, s \vDash_s (A)\varphi \quad sse \quad \forall \pi \mid \pi_0 = s, \pi = \varphi}$$

Veridicità di una formula

La **veridicità di un formula** è espressa dalla seguente affermazione:

UNA CERTA FORMULA $(A)\varphi$ È VERA NELLA STRUTTURA DI KRIPKE $\mathcal{M}$ SE E SOLTANTO SE TALE FORMULA È SODDISFACIBILE LUNGO OGNI STATO. FORMALMENTE:

$$\boldsymbol{\mathcal{M} \vDash (A)\varphi \quad sse \quad \mathcal{M}, s \vDash_s (A)\varphi \quad \forall s \in \mathcal{S}}$$

3 dicembre 2010

Model Checking su LTL

Dato un sistema ed una formula, si vuole stabilire se tale formula è soddisfatta dal sistema; in realtà tale operazione non è *model checking puro*, in quanto il model checking vero e proprio consiste nel valutare che un sistema non sia contraddittorio.

Per ricondurre tale obiettivo ad un problema di model checking puro è sufficiente considerare un nuovo sistema composto semplicemente dal sistema di partenza unito alla negazione della formula.

Tipicamente i sistemi vengono forniti in modalità *operazionale*, ossia si individuano:

- tutte le possibili combinazioni di eventi,
- tutti i possibili input ed output per ogni singola combinazione di eventi
- tutti i comportamenti che ha il singolo stato quando riceve un particolare input

Sostanzialmente, dunque, si va a trasformare il sistema in un automa di qualche tipo, mentre la formula è un formalismo di tipo *descrittivo*, ossia non sia va ad analizzare ogni singolo stato, ma si controlla che globalmente valga una certa proprietà.

Il primo problema consiste dunque nell'omogeneizzare il formalismo operazionale con il formalismo descrittivo; per fare ciò si può ricorrere a due altrenative:

- trasformare il formalismo operazionale in un formalismo descrittivo, applicando delle regole di deduzione;
- trasformare la formula in un opportuno automa e poi costruire l'automa complessivo composto dall'automa di partenza unito alla negazione dell'automa ottenuto dalla formula.

Per semplicità (anche se più oneroso dal punto di vista computazionale), si opera tipicamente mediante la seconda strada, ossia si va a trasformare la formula in un automa equivalente.

Gli Automi a Stati Finiti

Un **automa a stati finiti** è costituito da un alfabeto A, un insieme finito di stati Q, un insieme finito di possibili stati iniziali I e una *funzione di transizione* $\delta: Q \times I \rightarrow Q$.

Gli automi possono essere utilizzati come *riconoscitori di linguaggi* o come *generatori di linguaggi*; focalizzando l'attenzione sugli automi riconoscitori di linguaggi, si può affermare che un riconoscitore di linguaggi è una quintupla così composta:

$$\mathcal{A} = \langle A, Q, \delta, I, F \rangle$$

dove $F \subseteq Q$ rappresenta l'insieme degli stati finali.

Un automa, quindi, è dato una volta che è stata fissata tale quitupla e nel momento in cui l'alfabeto di riferimento e Q sono insieme finiti, tale automa prende il nome di **automa a stati finiti**.

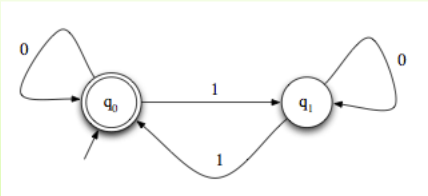
Gli insiemi di terne date dalla relazione δ vengono dette *transizioni* vengono così espresse: $(q, a, q') \in \delta$.

Due transizioni si dicono *consecutive* se, date le transizioni (q, a, q') e (p, b, p'), $q' = p$.

Viene quindi definita *percorso sull'automa* $\mathcal{A}$ una successione di transizioni consecutive ed in particolare si hanno le seguenti definizioni:

- un percorso si dice *iniziale* se il primo stato della prima transizione appartiene all'insieme I;
- un percorso si dice *finale* se l'ultimo stato dell'ultima transizione appartiene all'insieme F;
- un percorso si dice *ammissibile* se è insieme percorso iniziale e finale.

Esempio



Dato l'automa riportato a lato, il percorso 1001 è un percorso ammissibile.

Dato un percorso, l'*etichetta* di tale percorso non è altro che la successione delle lettere dell'alfabeto che sono state lette durante il percorso stesso.

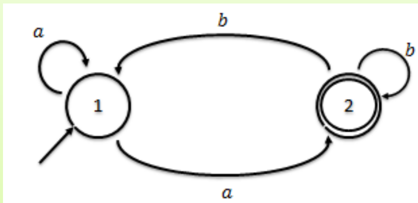
L'etichetta di un percorso ammissibile è riconosciuta dall'automa. Oltre alla definizione analitica, si può dare all'automa una rappresentazione compatta per via grafica:

Esempio

Si consideri l'automa così definito: $\mathcal{A} = (\{a, b\}, \{1,2\}, \{(1, a, 1), (2, b, 1), (2, b, 2)\}, \{1\}, \{2\})$. gli stati vengono rappresentati come cerchi;

- gli stati iniziali vengono indicati con una freccia entrante
- gli stati finali vengono indicati con una doppia bordatura
- le transizioni vengono tradotte mediante frecce che partono dal primo stato indicato e arrivano al 2° stato indicato e riportano come etichettatura la lettera riportata nella terna di definizione.

L'automa riportato all'inizio, può quindi essere rappresentato come indicato a lato.



Quando si ha un alfabeto composto da lettere, su tali lettere rimangono definite alcune operazioni quali:

- unione (+);
- concatenamento; in particolare si possono costruire anche delle concatenazioni iterate, come ad esempio, $(ab)^n$, che indica di concatenare a e b un numero finito di volte ($(ab)^3 = ababab$).

In relazione al concatenamento, esistono due operatori particolari:

- $(\boldsymbol{ab})^*$**:** indica la possibilità di costruire una parola anche nulla, infatti $(\boldsymbol{ab})^* = \{(\boldsymbol{ab})^{\boldsymbol{n}} | \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}\}$
- $(\boldsymbol{ab})^+$: indica la possibilità di costruire una parola composta dall'iterazione di ab, ma non nulla, infatti: $(\boldsymbol{ab})^+ = \{(\boldsymbol{ab})^{\boldsymbol{n}} | \boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}\}$

Con la nomenclatura $\boldsymbol{A^*}$**,** per definizione, non è dunque altro che l'insieme di tutte le possibili stringhe (parole) che si possono scrivere utilizzando le lettere in A ed un qualunque sottoinsieme di A^* viene detto **linguaggio** ($\mathcal{L} \subseteq A^*$).

Un automa, quindi, è in grado di riconoscere le etichette di tutti i percorsi ammissibili e, raggruppando tutte queste etichette, si ottiene un sottoinsieme di parole che è il linguaggio riconosciuto dall'automa.

Ad esempio, riprendendo l'esempio precedente, il linguaggio riconosciuto dall'automa rappresentato è $\mathcal{L} = a(a + b)^* = \mathcal{L}(\mathcal{A})$; tale automa riconosce dunque il linguaggio composto da tutte le parole che iniziano con a.

Gli Automi di Büchi

Gli automi visti finora, con la condizione di ammissibilità per le etichette così definita, riconoscono solo comportamenti (parole) finite, in quanto una parola (percorso) ammissibile deve avere termine in un certo stato.

Tuttavia si è detto che la struttura soggiacente ad una logica temporale, tipicamente vuole modellizzare un comportamento possibilmente infinito, quindi è necessario costruire degli automi che non riconoscano solo parole finite, ma anche parole infinite. Per fare ciò è necessario introdurre un altro tipo di automi che prendono il nome di **Automi di Büchi**.

Un *automa di Büchi* è, di base, un automa a stati finiti, caratterizzato dalla medesima quintupla, ossia $\mathcal{A} = \langle A, Q, \delta, I, F \rangle$, dove:

- A è l'alfabeto finito
- Q è l'insieme finito di stati
- δ è la funzione di transizione
- I e F sono sottoinsieme degli stati iniziali e finali, rispettivamente.

In realtà, qui, l'utilizzo del sottoinsieme F è un po' improprio, in quanto non possono esistere degli stati finali, visto che si devono accettare parole infinite.

L'unica variazione, rispetto agli automi a stati finiti, è quella relativa al concetto di *percorso (cammino) finale:*

UN CAMMINO VIENE DETTO *FINALE* SE VISITA UNO STATO $\in F$ INFINITAMENTE SPESSO

Un cammino, quindi, è accettato se parte da uno stato iniziale, ma non termina su uno stato finale, bensì se ci passa infinitamente spesso.

È noto che, per gli automi a stati finiti, il linguaggio riconosciuto da un automa deterministico è sempre riconosciuto anche dal corrispondente automa non deterministico e viceversa; nell'ambito degli automi di Büchi, invece, si può dimostrare che gli automi di Büchi deterministici non sono equivalenti a quelli non deterministici, ossia il non determinismo, nel riconoscimento di parole infinite, è strettamente più potente del determinismo.

Si procede ora andando a considerare il medesimo automa considerato per gli automi a stati finiti ($\mathcal{A} = (\{a,b\}, \{1,2\}, \{(1,a,1), (2,b,1), (2,b,2)\}, \{1\}, \{2\})$), andando però ad interpretarlo come automa di Büchi, ossia la regola di accettazione diventa: *è necessario passare infinitamente spesso per lo stato 2*.

Il linguaggio riconosciuto da questo automa, visto che è un automa di Büchi, è indicato come: $\boldsymbol{\mathcal{L}^{\omega}(\mathcal{A})}$, dove il simbolo ω permette proprio di ricordare che bisogna considerare solo i comportamenti infiniti.

Si è visto in precedenza che l'automa $\mathcal{A}$ riconosce la stringa $a(a+b)^*$, ma poiché l'automa di Büchi deve riconoscere stringhe infinite, verrebbe spontaneo sostituire l'operatore * (star con l'operatore ω, ossia l'operatore di iterazione infinita, ottenendo così che $\mathcal{L}^{\omega}(\mathcal{A}) = a(a+b)^{\omega}$.

In realtà tale affermazione risulta essere completamente falsa (tant'è che la parola a^{ω} non è riconosciuta, in quanto non passa infinite volte dallo stato 2), infatti, in realtà, questo automa riconosce il seguente linguaggio: $\mathcal{L}^{\omega}(\mathcal{A}) = a(a^*b)^{\omega}$.
L'automa riconosce quindi l'evento GFb riportato a lato:

Si è dunque ottenuta un'equivalenza tra la formula del linguaggio ed una formula della logica; in particolare, si può notare come una formula LTL possa essere tradotta in un'automa di Büchi in cui le etichette sono gli elementi del sistema ed il grafo dell'automa dipende dagli operatori temporali.

In relazione a tale correlazione, si può osservare quanto segue:

- del sistema si può dire che l'automa è già fornito, in quanto è un formalismo di tipo operazionale
- è necessario trasformare la formula LTL in automa di Büchi (facendone prima la negazione)
- dati i due automi (l'automa del sistema e l'automa che nega la formula), bisogna andare a vedere se esiste una traccia che soddisfa la negazione della formula ed il sistema. Se tale cammino esiste, significa che la formula di partenza è insoddisfacibile.

Ottenuti gli automi di Büchi, quindi, risulta necessario costruire l'**intersezione dei due atomi**. I meccanismi di intersezione tra automi visti per gli automi a stati finiti, non valgono per gli automi di Büchi; si procede dunque andando ad analizzare il procedimento necessario.

Data la formula di LTL φ, quindi, si vuole costruire il relativo automa di Büchi che descrive come variano nel tempo i predicati atomici che soddisfano φ; in particolare:

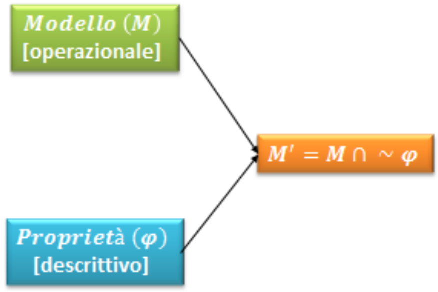
- A*lfabeto:* sarà composto dai singoli predicati atomici;
- *Insieme degli stati* Q: per quanto riguarda l'insieme degli stati, se q è uno stato allora q non è altro che un sottoinsieme di tutte le sottoformule di φ ($q \subseteq sottoformule\ di\ \varphi$). L'idea di fondo è la seguente: ogni percorso che parte dallo stato q, soddisfa le formule di q; q, infatti, è uno stato che contiene al suo interno delle sottoformule e quindi se in un certo istante ci si trova a passare dallo stato q, significa che in quell'istante sono soddisfacibili tutte le formule ivi contenute.
- *Stati iniziali:* vengono definiti "stati iniziali" tutti quegli stati q tali che $\varphi \in q$. Infatti si è definito q come insieme delle sottoformule di φ e gli stati iniziali sono quelli in cui è possibile leggere subito φ
- *Transizioni:* per descrivere le transizioni degli automi di Büchi, è necessario definire 2 particolari concetti:
  - **chiusura di $\boldsymbol{\varphi}$ $(\boldsymbol{ch(\varphi)})$:** viene detto $ch(\varphi)$, l'insieme contenente tutte le sottoformule di φ e le loro negazioni.
  - **$\boldsymbol{q}$ coerente**: uno stato q è detto *coerente* se e soltanto se è un insieme massimale tale $\forall\ \psi, \tau\ (sottoformule\ di\ \varphi)$, si verificano tutte le seguenti condizioni:
    - $\boldsymbol{\psi \in q \quad XOR \quad \sim\psi \in q}$ (gli stati devono contenere o una formula o la sua negazione, non entrambi (altrimenti sarebbero incoerenti), ma neanche nessuna delle due (altrimenti sarebbero incompleti))
    - $\boldsymbol{\psi \vee \tau \in q \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in q\ \ oppure\ \ \tau \in q}$
    - $\boldsymbol{\psi U \tau \in q \quad \Rightarrow \quad \psi \in q \vee \tau \notin q}$
    - $\boldsymbol{\psi U \tau \notin q \quad \Rightarrow \quad \psi \notin q}$

  Definiti tali concetti, si può ora definire il concetto di *transizione*: due stati sono raggiungibili l'uno dall'altro leggendo un etichetta (ad esempio a), ossia $q \xrightarrow{a} q'$, se e soltanto se si verificano le seguenti condizioni:
  - <u>$a \in q$</u>
  - sono valide una delle seguenti situazioni:
    - <u>se $X\psi \in q \Rightarrow \psi \in q'$</u> : infatti se si è in uno stato ed all'interno di questo stato deve valere "*nel prossimo istante* ψ", vuol dire che nell'istante successivo deve valere ψ
    - <u>$se\ \ \psi U \tau \in q\ \ e\ \tau \notin q\ \ \Rightarrow \psi U \tau \in q'$</u>
    - <u>$se\ \ \psi U \tau \in q\ \ e\ \tau \in q'\ \ \Rightarrow \psi U \tau \notin q'$</u>
- *Stati finali:* dato u_i l'insieme delle sottoformule del tipo $\varphi_i U \theta_i$ di $ch(\varphi)$, l'insieme degli stati finali è definito come segue: $F_i = \{q \mid \sim u_i \in q\} \ \cup \{q \mid \psi_i \in q\}$

Costruzione dell'automa di Büchi

L'obiettivo è quello di fare **Model Checking**, quindi si vuole esprimere una data proprietà in un certo formalismo logico; in particolare, supponiamo che il sistema sia scritto in modo operazionale e si vuole sapere se tale sistema soddisfi o meno una certa formula, rappresentativa di una certa proprietà e riportata mediante un formalismo descrittivo (ad esempio in LTL).

E' necessario, quindi, che il formalismo operazionale ed il formalismo descrittivo comunichino tra di loro; in particolare si dovrà andare a considerare un nuovo modello generato dal modello di partenza e dalla negazione della formula. Graficamente, la condizione attuale è rappresentabile come riportato a lato.



Il *Model Checking*, dunque, può fornire i seguenti risultati:

- positivo se M' risulta vuoto, ossia se non è coerente (supponendo che il sistema non soddisfi la formula, se il sistema risulta incoerente allora soddisfa la formula di partenza)
- negativo, altrimenti.

Il problema nasce proprio nella necessità di far comunicare i due formalismi (operazionale e descrittivo) e le possibilità sono 2:

- trasformare il modello in un modello descrittivo
- trasformare la proprietà (quindi la formula) in un modello operazionale.

Siccome, tipicamente, la generazione di un modello descrittivo comporta un numero elevato di formule, si tende a ricorrere alla seconda possibilità, ossia alla conversione della formula in un formalismo operazionale. Da un punto di vista applicativo, inoltre, sono più noti ed approfonditi gli algoritmi e le tecniche per trattare con automi.

Si andrà qui ad analizzare come sia possibile trasformare una formula di LTL nell'automa di Büchi equivalente.

Costruzione dell'automa di Büchi

Si consideri $Fl(\varphi)$ come l'insieme delle sottoformule di φ; a partire da questo, si vanno a definire i vari componenti dell'automa.

Insieme degli stati

L'insieme degli stati $\mathcal{S}$ non è altro che l'insieme delle parti di $Fl(\varphi)$ ($\boldsymbol{\mathcal{S}} = \wp(\boldsymbol{Fl(\varphi)})$), quindi per ogni sottoinsieme di sottoformule di φ si ottiene uno stato. Teoricamente, dunque, si ottiene un numero di stati esponenziale rispetto al numero di sottoformule, ma non tutti gli stati verranno considerati.

Lo stato, di per sé, dunque, non è altro che un sottoinsieme di sottoformule e in un istante ci si trova in uno stato q nel momento in cui si stanno soddisfacendo tutte le formule presenti in quello stato. Per poter fare ciò, non tutti gli stati avranno valore (basti pensare all'inutilità di considerare stati in cui sono valide le formule p e $\sim p$); in particolare, per la scelta degli stati da considerare si ricorre al concetto di **stato coerente:** *uno stato è coerente se:*

- *è massimale rispetto all'inclusione*
- $\forall\ \psi \in ch(\varphi)\ \ si\ ha\ \ \psi \in q\ \ XOR\ \ \sim\psi \in q$
- $se\ \psi U\theta \in q\ \ \Rightarrow\ \ \psi \in q\ \ \vee\ \ \theta \in q$
- $se\ \psi U\theta \notin q\ \ \Rightarrow\ \ \theta \notin q$

Gli stati veri e propri dell'automa, dunque, saranno solo gli stati coerenti.

Alfabeto

L'alfabeto è composto semplicemente dalle proposizioni atomiche che compaiono in φ, ossia $\sum = AP\ \ di\ \varphi$

Transizioni

Le transizioni devono soddisfare la semantica di LTL, quindi sia ha una certa transizione tra due stati $\left(q \xrightarrow{a} q'\right)$, etichettata con una proposizione atomica (ad esempio a) se e soltanto se si verificano le seguenti condizioni:

- $a \in q$
- una delle seguenti condizioni:
  - $se\ X\psi \in q \ \Rightarrow\ \psi \in q';$
  - $se\ X\psi \notin q \ \Rightarrow\ \psi \notin q';$
  - $se\ \psi U\theta \in q\ \ e\ \ \theta \notin q' \Rightarrow \psi U\theta \in q'$
  - $se\ \psi U\theta \in q\ \ e\ \ \psi \in q' \Rightarrow \psi U\theta \notin q'$

Non sono stati omessi tutti gli altri operatori temporali, in quanto è già stato mostrato come, in logica LTL, tutti gli operatori sono ottenibili ricorrendo semplicemente agli operatori X e U

Stati Iniziali

Lo stato q è detto *stato iniziale* se e soltanto se la formula data (φ) è valida in q, ossia si considerano iniziali gli stati in cui già vale la formula data.

Stati Finali

Gli stati finali per gli automi di Büchi non sono identificabili direttamente come gli stati iniziali, bensì si ha un insieme di insiemi di stati finali. Ciò significa che, al variare di un certo parametro, si hanno diversi stati finali, per ognuno di questi si va a definire un particolare automa di Büchi ed infine gli automi di Büchi ottenuti vanno uniti tra loro in modo particolare.

Non si ottiene, dunque, un unico automa direttamente, ma si ottiene un numero elevato da automi da unire, tuttavia ciò non risulta essere un problema computazionale.

Formalmente:

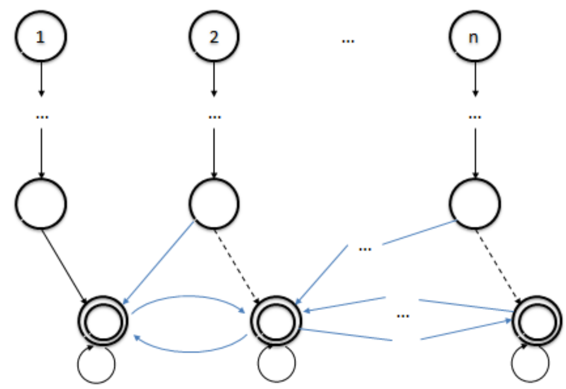
- si dice u_i l'insieme delle sottoformule del tipo $\psi_i\ U\ \theta_i$ della chiusura di $\varphi\ \ \big(ch(\varphi)\big)$
- per ogni i, è definito l'insieme F_i composto dagli stati tali per cui $\sim u_i$ appartiene a q, uniti agli stati in cui è soddisfatta la ψ_i, quindi: $F_i = \{q \mid \sim u_i \in q\} \cup \{q \mid \psi_i \in q\}$

Al variare di i, dunque, si hanno diversi insiemi di stati finali e questi porta a disporre di $\beta\varphi_1, \dots, \beta\varphi_n$ automi, dotati tutti dei medesimi stati iniziali, delle stesse transizioni e dello stesso alfabeto, ma aventi ciascuno un insieme diverso di stati finali; in particolare $\beta\varphi_1$ avrà come insieme di stati finali F_1, così come $\beta\varphi_n$ avrà come insieme di stati finali F_n.

Per ottenere un unico automa di riferimento è necessario:

- riordinare secondo un qualche criterio gli automi ottenuti
- si elimina l'ultimo arco entrante in uno stato di accettazione
- si pone lo stato di partenza di tali archi in connessione con lo stato finale dell'automa precedente
- gli stati finali dei vari automi vengono connessi tra loro con archi bidirezionali

Applicando tali operazioni, si ottiene quando riportato nella figura sottostante:



Tale procedimento, in generale, non permette di ottenere l'automa minimo, infatti:

- si va a considerare un numero molto elevato di stati
- andando a tradurre tutti gli operatori temporali come X o U, ovviamente si va ad aumentare la dimensione dell'automa
- la procedura presentata per connettere i vari automi non risulta di certo essere la procedura ottimale, benchè risulti la più semplice.

Esistono meccanismi che permettono di ottenere automi quasi minimi o che, dato un automa, riesco a derivarne il corrispettivo automa minimo, tuttavia non è detto che nella pratica tali procedure siano sempre effettivamente applicate, in quanto si tratta di procedure particolarmente costose, quindi, tipicamente, si cerca di ottenere non l'automa minimo, ma l'automa "quasi minimo", ottenibile mediante procedure praticamente gratuite.

Esempio1

Si costruisca l'automa della formula $\varphi = Fp$

1° passo: la formula contiene un operatore temporale non considerato nella procedura, quindi bisogna tradurla nella formula equivalente dotata degli operatori minimi.

$$\varphi = Fp = True\ U\ p$$

d'ora in avanti, dunque, si andrà ad operare ed a costruire l'automa relativo alla formula $\varphi = True\ U\ p$. Da ciò è possibile dedurre anche che l'alfabeto dell'automa sarà:

$$\Sigma: AP\ di\ \varphi: \{p, \sim p\}$$

2° passo: si va a costruire la chiusura di φ, ricordando che la chiusura di una formula contiene tutte le sottoformule e le negate, quindi, nel caso in analisi:

$$Ch(\varphi) = \{p, \sim p, True\ U\ p, \sim (True\ U\ p)\}$$

a priori, dunque, l'automa generato potrebbe avere fino 2^4 stati

3° passo: si vanno a definire gli stati coerenti; per essere *coerenti*, gli stati devono essere *massimali* e se contengono una sottoformula non possono contenere anche la sua negazione. In relazione al caso in analisi, quindi, gli unici stati che possono essere coerenti sono:

$p, T\ Up$
$p, \sim (T\ Up)$
$\sim p, T\ Up$
$\sim p, \sim (T\ Up)$

Si sono dunque applicate le proprietà per cui gli stati devono essere massimali e o contengono una sottoformula o esclusivamente la sua negazione.

Il numero degli stati si è così già notevolmente ridotto da 2^4 a solo 4.

4° passo: si vanno ora a valutare le altre proprietà degli stati coerenti, ossia

- $se\ \psi U\theta \in q \ \Rightarrow\ \psi \in q \ \vee\ \theta \in q$
- $se\ \psi U\theta \notin q \ \Rightarrow\ \theta \notin q$

$\boldsymbol{p, T\ Up}$	Rispetta il 1° vincolo	√	s_1
$\boldsymbol{p, \sim (T\ Up)}$	Non rispetta il 2° vincolo, perché contiene la negazione dell'*until*, ma non contiene la negazione del 2° fattore di tale operatore ($\sim p \notin q$), quindi lo stato non è coerente		
$\boldsymbol{\sim p, T\ Up}$	Rispetta il 1° vincolo, infatti T è sempre presente.	√	s_2
$\boldsymbol{\sim p, \sim (T\ Up)}$	Rispetta il 2° vincolo	√	s_3

Dei 2^4 stati possibili, dunque, applicando prima il concetto di massimalità e poi quello di coerenza, se ne sono ottenuti 3.

5° passo: si procede ora andando a vedere quali di questi 3 stati possono essere iniziali. Ricordando che sono iniziali quegli stati in cui vale la formula di partenza φ, risulta evidente che:

$$I: \{s_1, s_2\}$$

6°passo: si vanno ora a costruire le transizioni, ricordando che esiste una transizione se e soltanto se si verificano le seguenti condizioni:

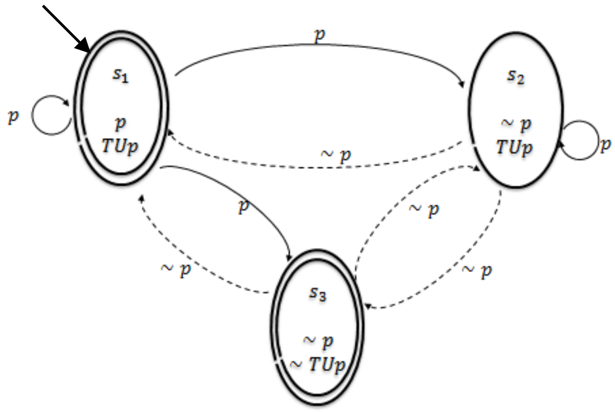
- $p \in q$
- una delle seguenti condizioni:
  - $se\ X\psi \in q \ \Rightarrow\ \psi \in q'$;
  - $se\ X\psi \notin q \ \Rightarrow\ \psi \notin q'$;
  - $se\ \psi U\theta \in q\ \ e\ \ \theta \notin q' \Rightarrow \psi U\theta \in q'$
  - $se\ \psi U\theta \in q\ \ e\ \ \psi \in q' \Rightarrow \psi U\theta \notin q'$

Nel caso in analisi:

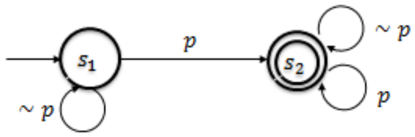
- <u>stato s_1:</u>
  - gli archi uscenti da s_1 possono essere etichettati solo con p, in quanto $p \in s_1$.
  - $s_1 \rightarrow s_1$
    - $TUp \in s_1\ e\ p \in s_1 \Rightarrow TUp \in s_1$:tale condizione è verificata quindi si ha $s_1 \xrightarrow{p} s_1$
  - $s_1 \rightarrow s_2$
    - $TUp \in s_1\ e\ T \in s_2 \Rightarrow TUp \notin s_2$:tale condizione è verificata, quindi $s_1 \xrightarrow{p} s_2$
  - $s_1 \rightarrow s_3$
    - $TUp \in s_1\ e\ T \in s_3 \Rightarrow TUp \notin s_3$: tale condizione è verificata, quindi $s_1 \xrightarrow{p} s_3$
- <u>stato s_2:</u>
  - gli archi uscenti da s_2 possono essere etichettati solo con $\sim p$, in quanto $\sim p \in s_2$.
  - Poiché $s_2 \in \sim TUp$, bisogna stare attenti a considerare la negazione delle regole definite sopra, ossia:
    - $\psi U\theta \notin q\ \vee\ \theta \in q' \Rightarrow \psi U\theta \in q'$
    - $\psi U\theta \notin q\ \vee\ \psi \in q' \Rightarrow \psi U\theta \notin q'$[1]
  - $s_2 \rightarrow s_1$
    - $TUp \notin s_2\ e\ p \in s_1 \Rightarrow TUp \in s_1$:tale condizione è verificata quindi $s_2 \xrightarrow{\sim p} s_1$
  - $s_2 \rightarrow s_3$
    - $TUp \notin s_2\ e\ T \in\ s_3 \Rightarrow TUp \notin s_3$:tale condizione è verificata quindi $s_2 \xrightarrow{\sim p} s_3$
  - $s_2 \rightarrow s_2$
    - $TUp \notin s_2\ e\ T \in s_2 \Rightarrow TUp \notin s_2$: tale condizione è verificata quindi si ha $s_2 \xrightarrow{\sim p} s_2$
- <u>stato s_3:</u>
  - gli archi uscenti da s_2 possono essere etichettati solo con $\sim p$, in quanto $\sim p \in s_3$.
  - $s_3 \rightarrow s_1$
    - $TUp \notin s_3\ e\ p \in s_1 \Rightarrow TUp \in s_1$: tale condizione è verificata quindi si ha $s_3 \xrightarrow{\sim p} s_1$
  - $s_3 \rightarrow s_2$
    - $TUp \notin s_3\ e\ T \in s_2 \Rightarrow TUp \notin s_2$:tale condizione è verificata, quindi si ha $s_3 \xrightarrow{\sim p} s_2$
  - $s_3 \rightarrow s_3$
    - $TUp \notin s_3\ e\ p \notin s_3 \Rightarrow TUp \notin s_3$: tale condizione è verificata quindi si ha $s_3 \xrightarrow{\sim p} s_3$

[1] Ottenute ricorrendo all'uguaglianza $A \Rightarrow B \equiv \sim A \vee B$ a cui sono state applicate poi le regole di De Morgan per ottenere la forma negata

7° passo: si vanno a definire gli stati finali; avendo un solo *Until* nella formula, si otterrà un unico automa i cui stati finali sono definiti dalla relazione $F_i = \{q \mid \sim (TUp) \in q\} \cup \{q \mid p \in q\}$. L'automa finale risulta dunque quello riportato di seguito:



In realtà, in relazione alla formula data è possibile costruire un automa molto più semplice, ossia:

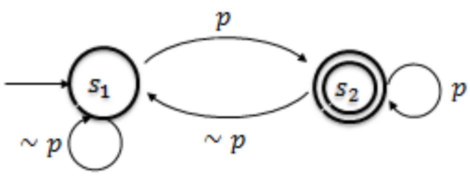


I due automi sono del tutto equivalenti, infatti è indicato che fintantoché non avviene p si sta in s_1, quanto avviene p si può passare allo stato di ripetizione, all'interno del quale non ha più importanza ciò che accade, ossia può avvenire indistintamente p o $\sim p$

Esempio2

Si costruisca l'automa della formula $\varphi = GFp$

Senza eseguire il procedimento passo a passo per la costruzione dell'automa, risulta evidente che tale formula può essere modellizzata dal seguente automa di Büchi:

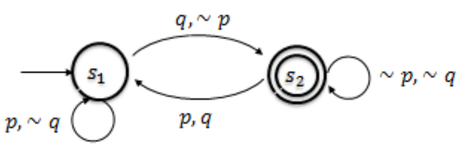


Infatti fintantochè vale $\sim p$ si rimane nello stato iniziale, quando inizia a valere p si passa nello stato s_2 e siccome sempre deve valere p, si rimane nello stato di accettazione con p e si torna allo stato iniziale con $\sim p$.

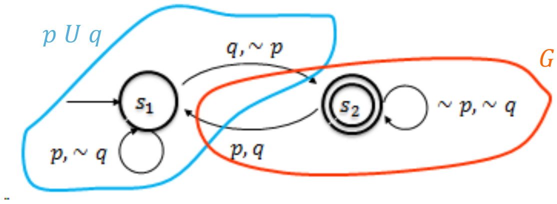
Esempio 3

Si costruisca l'automa della formula $\varphi = G(p\ U\ q)$

L'automa di Büchi ottenuto da tale formula è il seguente:



si legge p, fintantoché non si legge q, soddisfando così l'*Until*; il *Globally*, invece, è espresso mediante la transizione che riporta allo stato finale; i due operatori temporali sono dunque identificabili sull'automa come segue:

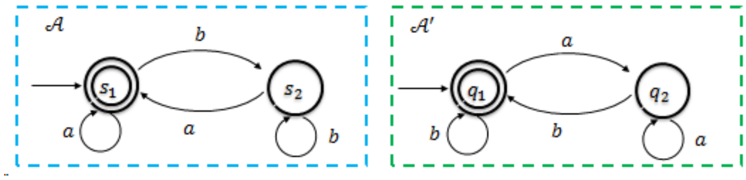


L'intersezione tra Automi

L'operazione di intersezione tra automi varia a seconda della tipologia di automi con cui si sta lavorando.

Intersezione tra Automi a Stati Finiti

L'intersezione tra Automi a Stati Finiti è un'operazione estremamente semplice, basata sul concetto di *prodotto cartesiano*. Per capirne il funzionamento si osservi il seguente esempio; dato l'alfabeto $AP: \{a, b\}$, si considerino i seguenti due automi:



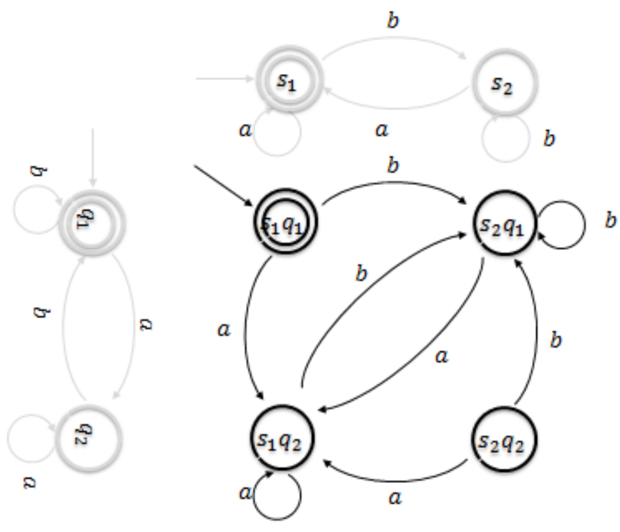
Risulta evidente che:

- l'automa $\mathcal{A}$ riconosce le stringhe che terminano con a e la stringa vuota ($\mathcal{L}(\mathcal{A}): (a, b)^*a|\varepsilon$)
- l'automa $\mathcal{A}'$ riconosce le stringhe che terminano con b e la stringa vuota (i due automi sono dunque identici a meno dell'inversione delle etichette sugli archi) ($\mathcal{L}(\mathcal{A}'): (a, b)^*b|\varepsilon$)

Per eseguire l'intersezione di questi due automi si opera una sorta di "prodotto cartesiano", infatti:

- il numero degli stati dell'automa risultante è pari al prodotto tra il numero di stati degli automi di partenza
- gli stati iniziali dell'automa risultante sono quelli ottenuti come composizione di stati iniziali degli automi di partenza
- gli stati finali dell'automa risultante sono quelli ottenuti come composizione degli stati finali degli automi di partenza
- le transizioni sono ottenute in modo tale per cui, facendo le proiezioni rispetto al primo o rispetto al secondo automa di partenza, si ottengono esattamente le transizioni dei due automi di partenza.

Graficamente, ritornando all'esempio precedente, si ottiene dunque quanto segue:



Si può notare che lo stato s_2q_2 non viene mai raggiunto; andando infine a definire come $\mathcal{A}''$ l'automa intersezione ottenuto, si può osservare che esso riconosce solo la stringa vuota (ε), come volevasi dimostrare dall'intersezione dei due linguaggi di partenza evidenziati sopra.

Intersezione tra Automi di Büchi

Si consideri l'automa $\mathcal{A}$, interpretandolo però come automa di Büchi, ossia andando ad accettare solamente quelle stringhe infinite che passano infinitamente spesso per lo stato s_1. Il linguaggio accettato dall'automa sarà dunque: $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}) = (a^*b^+a^+)^\omega$.

Allo stesso modo, l'automa $\mathcal{A}'$ espresso come automa di Büchi sarà ancora complementare al precedente, quindi riconoscerà il seguente linguaggio: $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}') = (b^*a^+b^+)^\omega$.

L'intersezione di questi due linguaggi, a differenza del caso degli automi a stati finiti, non sarà vuota, infatti, ad esempio la stringa $(ba)^\omega$ sarà riconosciuta dall'automa intersezione.

L'intersezione tra automi di Büchi, infatti, non viene eseguita come l'intersezione tra automi a stati finiti, bensì è più complessa in quanto, nella costruzione dell'automa prodotto, è necessario gestire una sorta di "memoria" per ricordare se lo stato di arrivo fosse uno stato di ripetizione o meno. Bisogna definire quindi un meccanismo che memorizzi il percorso effettuato.

La costruzione dell'automa intersezione tra due automi di Büchi, dunque, non è semplice come quella vista per gli automi a stati finiti; si considerino i seguenti due automi di Büchi di partenza, aventi alfabeto Σ comune:

$$\mathcal{A}_1 = \{Q_1, \Sigma, \sigma_1, i_1, F_1\} \qquad \mathcal{A}_2 = \{Q_2, \Sigma, \sigma_2, i_2, F_2\}$$

L'automa prodotto, equivalente all'intersezione tra i due automi, è definito come segue:

- l'insieme degli stati è dato dal prodotto cartesiano tra Q_1, Q_2 e $\{0,1,2\}$
- l'alfabeto rimane lo stesso
- le transizioni $\bar{\sigma}$ sono calcolate nel seguente modo: $(r_i, q_j, x)a(r_h, q_k, y)$ (ricordando che ogni stato è una terna, ossia $(p_1, p_2, \underbrace{\{0,1,2\}}_{x\ o\ y})$) se:
  - $r_i a r_h$: ossia esiste una transizione con a tra gli stati r_i ed r_h del 1° automa;
  - $q_j a q_k$: ossia esiste una transizione con a tra gli stati q_j e q_k del 2° automa;
  - con x e y così relazionate:
    - se $x = 0$ e $r_h \in F_1$ allora $y = 1$ $((-,-,0)a(fin,-,1))$;
    - se $x = 1$ e $q_k \in F_1$ allora $y = 2$ $((-,-,1)a(-,fin,2))$;
    - se $x = 2$ allora $y = 0$ $((-,-,2)a(-,-,1))$;
    - altrimenti $y = 0$ $((-,-,x)a(-,-,x))$
- lo stato iniziale è dato dalle terna composta da:
  - stato iniziale dell'automa $\mathcal{A}_1$ (i_1);
  - stato iniziale dell'automa $\mathcal{A}_2(i_2)$;
  - etichetta 0
- gli stati finali sono dati dal prodotto cartesiano tra $Q_1, Q_2\ e\ \{2\}$

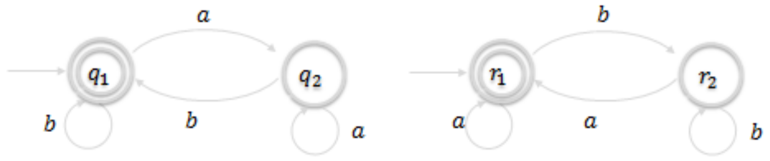
Formalmente, dunque:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{Q_1 \times Q_2 \times \{0,1,2\}, \Sigma, \bar{\sigma}, (i_1, i_2, 0), Q_1 \times Q_2 \times \{2\}}\}$$

Esempio 4

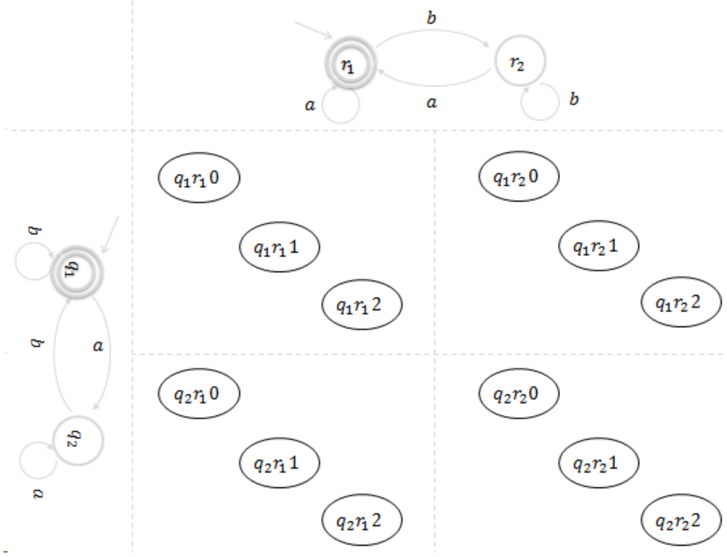
Si costruisca l'automa intersezione dei seguenti linguaggi: $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}) = (a^*b^+a^+)^\omega$ e $\mathcal{L}^\omega(\mathcal{A}') = (b^*a^+b^+)^\omega$

Gli automi dei due linguaggi da intersecare possono essere così rappresentati:

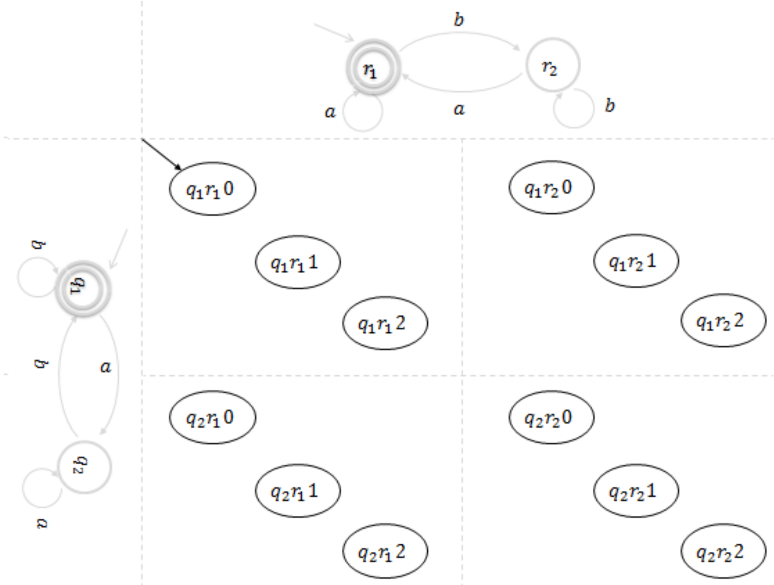


Seguendo le regole definite sopra:

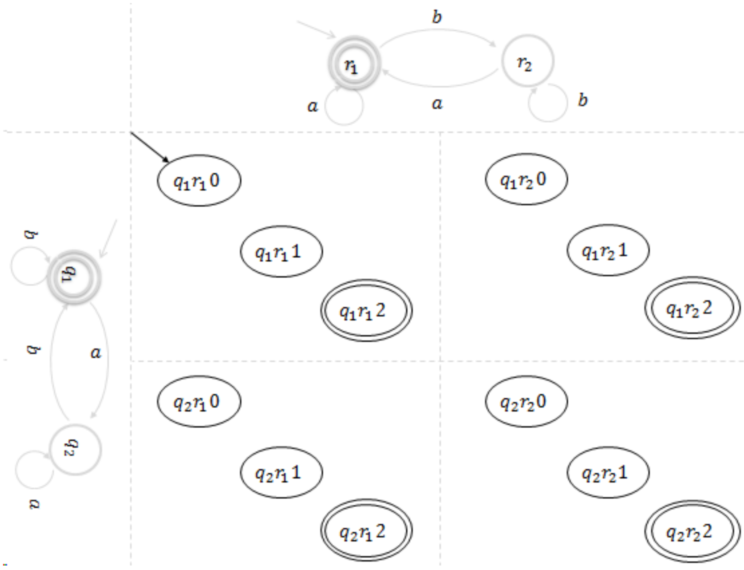
- l'insieme degli stati sarà composto come segue:



- L'insieme degli stati iniziali, stando alla regola definita sopra, sarà composto dall'unico stato r_1q_10, quindi:

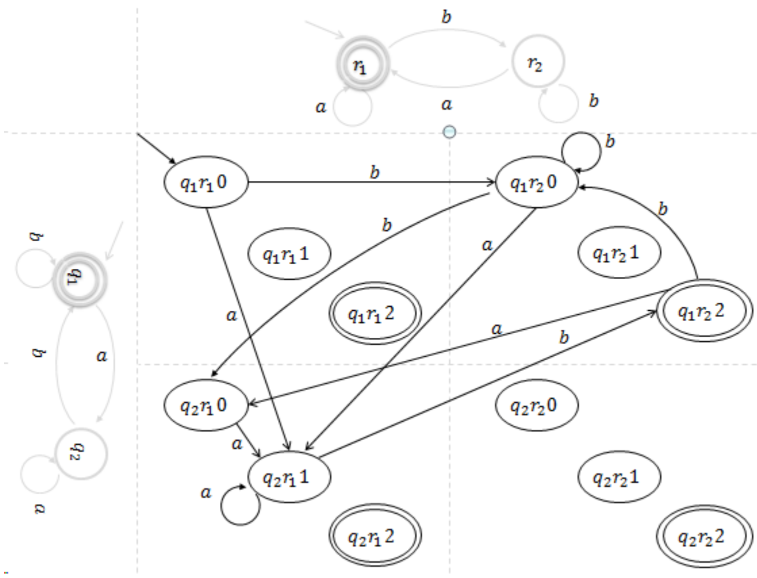


- L'insieme degli stati finali sarà composto da tutti gli stati aventi etichetta pari a 2, quindi:

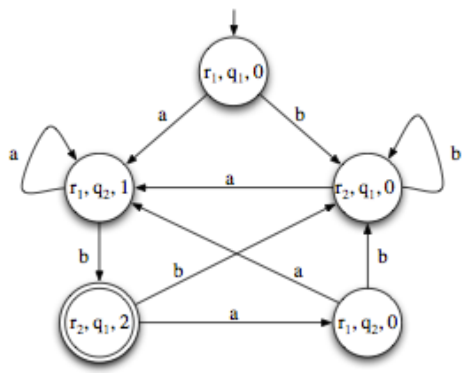


- Per quanto riguarda le transizioni bisogna andare a valutare le proprietà su tutte le possibili combinazioni di stati, incominciando ovviamente l'analisi dallo stato iniziale e proseguendo considerando di volta in volta in nuovi stati collegati:
  - q_1r_10:
    - con a ci si muove nel 1° "quadrante in basso"
      - $x = 0, r_1 \in F_1$, allora $y = 1$, quindi $q_1r_10 \xrightarrow{a} q_2r_11$
    - con b ci si muove nel 2° quadrante in alto
      - $x = 0, r_2 \notin F_1$, allora $x = y$ quindi $q_1r_10 \xrightarrow{b} q_1r_20$
  - q_2r_11:
    - con a si rimane nel medesimo quadrante
      - $x = 1, q_2 \notin F_2$, allora $y = x$, quindi $q_2r_11 \xrightarrow{a} q_2r_11$
    - con b ci si muove nel 2° quadrante in alto
      - $x = 1, q_1 \in F_1$, allora $y = 2$ quindi $q_2r_11 \xrightarrow{b} q_1r_22$
  - q_1r_20:
    - con a ci si muove nel 1° quadrante in basso
      - $x = 0, r_1 \in F_1$, allora $y = 1$, quindi $q_1r_20 \xrightarrow{a} q_2r_11$
    - con b si rimane nel medesimo quadrante
      - $x = 0, r_2 \notin F_1$, allora $y = x$ quindi $q_1r_20 \xrightarrow{b} q_1r_20$
  - q_1r_22:
    - con a ci si muove nel 1° quadrante in basso
      - $x = 2, allora\ y = 0$, quindi $q_1r_22 \xrightarrow{a} q_2r_10$
    - con b si rimane nel medesimo quadrante
      - $x = 2$, allora $y = 0$ quindi $q_1r_22 \xrightarrow{b} q_1r_20$
  - q_2r_10:
    - con a si rimane nel medesimo quadrante
      - $x = 0, r_1 \in F_1, allora\ y = 1$, quindi $q_2r_10 \xrightarrow{a} q_2r_11$
    - con b ci si muove nel 2° quadrante in alto
      - $x = 0, r_2 \notin F_1$, allora $y = x$ quindi $q_2r_10 \xrightarrow{b} q_1r_20$

Non sono raggiungibili altri stati, quindi l'automa finale risulta essere così strutturato:



Viene riportata di seguito una rappresentazione più ordinata del medesimo automa:



Benchè l'applicazione a mano di tale procedimento sia effettivamente complessa, essa si presta molto bene all'implementazione.

Dato il modello e la formula, dunque, si va a negare la formula ed a costruire l'automa sia del modello che della formula negata. Fatto ciò, si vuole andare a dimostrare che l'automa prodotto riconosce solo l'insieme vuoto.

Un'euristica possibile consiste nel costruire l'automa prodotto poco alla volta, controllando passo dopo passo se l'automa in elaborazione è in grado di riconoscere qualcosa o meno; se nel fare il prodotto tra due automi, infatti, si scopre che lo stato iniziale è connesso ad uno stato finale dotato di un ciclo attraverso cui si è in grado di riconoscere una parola infinita del linguaggio, sarebbe inutile proseguire con l'esecuzione del prodotto, in quanto si è già trovato un controesempio rispetto al comportamento desiderato.

Nel caso pessimo, ossia nel caso in cui sia richiesto di determinare l'automa prodotto completo, se l'automa che descrive il modello ha M stati, mentre l'automa che descrive la formula negata ha N stati, allora la complessità del *Model Checking* risulta essere pari a:

$$\Theta\left(|M| \cdot |N| \cdot 2^{|M|+|N|}\right)$$

Gli Automi di Miller

Si è visto nella lezione precedente la difficoltà nel trasformare una formula LTL nel relativo automa di Büchi; in particolare è possibile semplificare tale processo, evitando di costruire tante coppie di automi quante sono le sottoformule che compaiono, ma per far ciò è necessario ricorrere ad una variante degli automi di Büchi, che prendono il nome di **automi di Miller**.

Gli *automi di Miller* si comportano come gli automi di Büchi, ma cambia la funzione di accettazione, infatti gli automi di Miller non hanno un vero e proprio insieme degli stati finali, ma ricorre ad un insieme di sottoinsiemi di stati finali, infatti, dato l'automa di Miller $\mathcal{A}: (\mathcal{S}, \mathcal{Z}, s_0, \sigma, F)$, si ha che:

- $\mathcal{S} = \wp\big(ch(\varphi)\big)$ è l'insieme degli stati dell'automa ed ogni stato è un sottoinsieme della formula φ che viene fornita in ingresso. Ogni stato è caratterizzato da delle sottoformule che, come visto per gli automi di Büchi, devono soddisfare il *criterio di massimalità*.
- $\mathcal{Z} = AP \cup \sim AP$ è l'alfabeto del linguaggio, ossia tutte le possibili etichette delle transizioni dell'automa (a differenza degli automi di Büchi, qui si considerano tutte le lettere proposizionali, ma anche tutte le loro negazioni)
- s_0*:* insieme degli stati iniziali
- $\sigma \subseteq \mathcal{S} \times 2^{AP \cup \sim AP} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$*:* funzione di transizione che si basa sulle seguenti proprietà:
  - per ogni stato $s \in \mathcal{S}$, tutti gli archi uscenti da s sono etichettati con tutte le proposizioni atomiche (o le loro negazioni) contenute in s. Quindi tutti gli archi uscenti da s avranno la medesima etichettatura
  - $X\varphi \in s$ se e soltanto se $\varphi \in s'$
  - $\varphi_1 U \varphi_2 \in s$ se e soltanto se $(\varphi_2 \in s) \vee (\varphi_1 \in s \wedge \varphi_1 U \varphi_2 \in s')$
    - tale proprietà, in sostanza, va a sfruttare la seguente equivalenza:
      $$\varphi_1 U \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \big(\varphi_1 \wedge (\varphi_1 U \varphi_2)\big)$$
    - essa sta a significare che un *Until* vale se nello stato corrente vale il 2° membro dell'*Until*, oppure se nello stato corrente vale il 1° membro, allora necessariamente nello stato successivo deve valere ancora l'*Until*
- $F \subseteq \wp\big(\wp(\mathcal{S})\big)$: insieme di sottoinsiemi di stati finali, ossia $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

Nel caso degli automi di Büchi, una parola veniva accettata se il cammino passava infinitamente spesso per lo stato finale; nel caso degli automi di Miller, invece, si accetta una parola infinita che è generata passando almeno infinitamente spesso per ognuno dei sottoinsiemi di stati finali.

Esempio 1

Costruire l'automa di Miller relativo alla formula aUb, con a e b predicati atomici

Gli stati consistenti per l'automa sono:

- $\{a, b, aUb\}$;
- $\{a, \sim b, aUb\}$;
- $\{\sim a, \sim b, \sim (aUb)\}$;
- $\{a, \sim b, \sim (aUb)\}$;
- $\{\sim a, b, aUb\}$

Tra gli stati consistenti, gli stati iniziali sono quelli in cui vale la formula iniziale $\varphi = aUb$, ossia:

- $\{a, b, aUb\}$;
- $\{a, \sim b, aUb\}$;
- $\{\sim a, b, aUb\}$

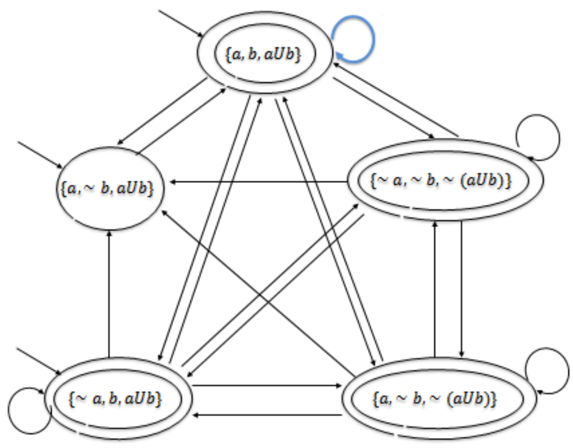
Tra gli stati consistenti, gli stati finali sono quelli che rispettano la seguente relazione $F_i = \{q \mid \sim (TUp) \in q\} \cup \{q \mid p \in q\}$, ossia:

- $\{a, b, aUb\}$;
- $\{\sim a, \sim b, \sim (aUb)\}$;
- $\{a, \sim b, \sim (aUb)\}$;
- $\{\sim a, b, aUb\}$

Poiché la formula iniziale contiene un solo *Until*, l'automa risultante può essere considerato, fino a qui, come un automa di Büchi classico.

Per quanto riguarda le etichette delle transizioni, invece, negli automi di Miller esse assumono lo stesso valore delle proposizioni atomiche (negate e non) contenute nello stato di partenza; per tale ragione, tipicamente, l'etichettatura non viene riportata, ma è deducibile direttamente dallo stato di partenza dell'arco.

Andando a riportare le transizioni in base alle regole date, si ottiene il seguente automa di Miller:



Osserviamo, ad esempio, il loop evidenziato:

- nello stato di partenza c'è l'*Until*
- nello stato di arrivo (che è sempre lo stesso) è valido il 2° membro dell'*Until*

ecco dunque motivata l'esistenza della transizione che, come spiegato in precedenza, avrà come etichetta (a, b).

Ovviamente l'automa ottenuto non è minimo, ma può essere minimizzato ricorrendo all'ausilio di alcuni tool

Gli Automi Temporizzati

Gli automi di Büchi sono caratterizzati dall'ipotesi che nel passaggio da uno stato al successivo sia trascorsa un'unità di tempo; si vuole ora definire, invece, un formalismo che dia la possibilità di modellizzare sistemi anche in tempo continuo, ossia dei sistemi in cui le transizioni avvengono in intervalli di tempo ben definiti. Si vuole inoltre avere a disposizione strumenti che diano la possibilità di modellizzare sistemi complessi, composti da sottosistemi più semplici che evolvono in modo tra loro asincrono; per poter considerare tali sottosistemi nel loro complesso, sarà necessario disporre di un *tempo globale* e dei *tempi locali* per ciascuno dei sottosistemi che devono poter comunicare tra di loro. Infine, si vuole poter gestire uno sviluppo di tipo *arborescente*, esattamente come avviene per la logica CTL.

Per raggiungere tali obiettivi si introducono gli **automi temporizzati**, ossia automi a stati finiti per i quali è importante definire i seguenti concetti:

- $\boldsymbol{X}$ è l'insieme finito di variabili, dette *clock* (ossia sono gli *orologi locali*);
- per poter leggere tali variabili si ricorre ad una *valutazione* $\boldsymbol{V_X}$, ossia la valutazione V sull'insieme X è una funzione che ad ogni clock associa il suo tempo, dove tale tempo può essere un numero intero, un numero reale, un razionale, etc. Nel caso più generale possibile si ha dunque che: $\boldsymbol{V_X}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{\boldsymbol{X}}$ è l'insieme di tutte le possibili valutazioni
- se $d \in \mathbb{R}$ e v è una valutazione, allora $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}$ è la valutazione così definita: $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}$
- non servirebbe a nulla avere un orologio locale per ogni sistema, se questi orologi partissero contemporaneamente e avanzassero con il medesimo intervallo di tempo, quindi, per renderli significativi, è necessario introdurre una funzione di *reset*, ossia: sia $r \subseteq X$, la valutazione $[r \leftarrow 0]$ (da leggersi come "*azzeramento di r*") è la valutazione v' definita come segue:
    - $v'(x) = 0 \qquad se\ x \in r;$
    - $v'(x) = v(x) \quad altrimenti.$

  r rappresenta dunque quei clock che vanno in reset. I clock che subiscono tale valutazione, quindi, ripartono da 0, mentre quelli che non vengono resettati continuano ad evolvere
- **vincoli di clock $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$:** sono combinazioni booleane di vincoli atomici (dette anche *guardie*) del tipo $x \sim c$ dove:
    - $\sim \in \{=, \leq, \geq, <, >\}$
    - $c \in \mathbb{N}$: il confronto viene sempre eseguito con un numero naturale. Tale scelta non rappresenta una limitazione significativa, infatti in un automa temporizzato si ha un numero finito di stati ed un numero finito di transizioni (e quindi di *guardie*), quindi l'eseguire il confronto con i numeri naturali non è particolarmente restrittivo, ma semplifica di molto l'operazione.
- $\boldsymbol{C_<(X)}$**:** simbolo per indicare le combinazioni booleane positive di vincoli del tipo $x \leq c$ e $x < c$.
- **interpretazione di un vincolo:** una valutazione soddisfa un vincolo atomico $x \sim c$ se e soltanto se $v(x) \sim c$, dove il simbolo $\sim$ da ad indicare un confronto di qualsiasi tipo. Se si è in grado di soddisfare un vincolo atomico, allora si può soddisfare anche una combinazione booleana di vincoli, ricorrendo alle medesime regole viste per la logica proposizionale.

Si può ora procedere con la definizione di **automa temporizzato**, ossia:

UN AUTOMA TEMPORIZZATO È UNA 6-UPLA COSÌ DEFINITA $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{l_0}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Inv}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{T})$, DOVE:

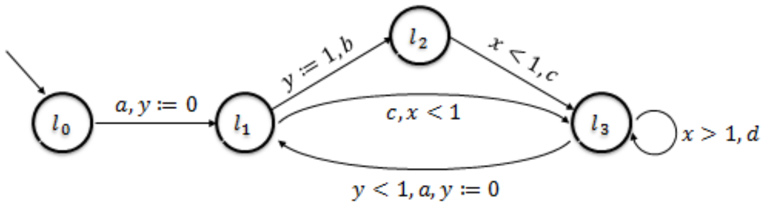
- L: insieme finito di *locazioni.* In un automa temporizzato, infatti, non ci sono stati, bensì delle locazioni, in quanto una locazione rappresenta una componente di uno stato. In particolare, in tale contesto, uno stato è definito come $(dove\ ci\ si\ trova(locazione), orologio\ dello\ stato\ in\ cui\ ci\ si\ trova)$; risulta differente, infatti, trovarsi in una locazione, ad esempio, al tempo t=0 piuttosto che trovarsi nella medesima locazione in un qualsiasi istante successivo
- l_0 è la locazione iniziale
- X è l'insieme finito di clock

- Inv è un insieme di "*invarianti di locazione*", ossia è una funzione che va da ogni locazione ad una combinazione positiva di vincoli, ossia: $Inv: L \rightarrow \mathcal{C}_{<}(X)$
- Σ è l'*alfabeto delle azioni*, ossia le proprietà che devono valere, identificabili anche come gli eventi del sistema
- T è l'*insieme delle transizioni*. In relazione agli automi temporizzati, le transizioni diventano particolarmente complesse, infatti bisogna poter gestire le azioni soddisfando gli invarianti, controllando gli orologi, etc.
  Formalmente, una transizione è una relazione tra:
  - locazione (L)
  - vincoli $\left(\mathcal{C}(x)\right)$
  - azioni (Σ)
  - un reset degli orologi, ossia una funzione che ad ogni orologio associa il valore 0 (se da resettare) o 1 (se da non resettare) (2^x)
  - una nuova locazione (L).

  Quindi, in totale, si ha che: $\boldsymbol{T \subseteq L \times \mathcal{C}(x) \times \Sigma \times 2^x \times L}$

Esempio 1

Per comprendere la definizione delle transizioni negli automi temporizzati, si consideri il seguente automa temporizzato e se ne osservino le transizioni.



l'automa temporizzato rappresentato è composto da:
- 4 locazioni;
- l_0 è la locazione iniziale
- l'alfabeto delle azioni è composto da $\Sigma: \{a, b, c, d\}$
- i clock sono $X: \{y, x\}$

Si vanno ora ad osservare alcune transizioni:
- $\boldsymbol{l_3 \xrightarrow{y<1, a, y:=0} l_1}$ è una transizione completa, infatti contiene *guardia*, *azione* e *reset*. In particolare tale transizione viene attivata quando:
  - l'orologio y ha un valori minore di 1;
  - avviene l'azione a;
  - a seguito della transizione, l'orologio verrà resettato.

N.B. per distinguere le *guardie* dai *reset*, è sufficiente guardare l'operatore utilizzato: il simbolo ":=", infatti, viene utilizzato per il indicare il *reset*, mentre gli operatori classici sono utilizzati per indicare le *guardie*.

In generale, dunque, una transizione è così indicata: $\boldsymbol{l \xrightarrow{g,a,r} l'}$, stando molto attenti a rispettare l'ordine degli elementi sull'arco. E' anche importante sottolineare, però, che non è detto che su ogni etichetta vi siano tutti e tre i componenti.

- $\boldsymbol{l_0 \xrightarrow{a, y:=0} l_1}$: tale transizione, ad esempio, non ha alcun vincolo da soddisfare e quindi l'etichetta dell'arco è composta solamente dall'*azione* e da un *reset*, indicando così che può avvenire indipendentemente dai valori degli orologi x e y
- $\boldsymbol{l_2 \xrightarrow{x<1, c} l_3}$: tale transizione, invece, verrà attivata se l'orologio x ha valore minore di 1, permetterà di eseguire l'azione c, ma non resetterà alcun orologio, quindi sia x che y continueranno ad evolvere.

Lo **stato** (o **configurazione**) di un automa temporizzato non é altro che una coppia (l, v), ossia *locazione* e *valore degli orologi*. Nella locazione l_0, ad esempio, si può essere nello stato $(l_0, 0, 0)$, ma anche nello stato $(l_0, 5, 5)$, nel caso in cui si stia fermi nella locazione l_0 senza effettuare alcuna transizione. Quando avviene la transizione $l_0 \xrightarrow{a, y:=0} l_1$ avverrà quanto segue:

- ci si sposterà nella locazione l_1;
- l'orologio x assume il valore pari al tempo trascorso tra l'avvio degli orologi e l'esecuzione della transizione: infatti se negli automi di Büchi l'avvento di una transizione indica il passare di una unità di tempo, qui invece v'è un concezione realistica dello scorrere del tempo
- l'orologio y viene resettato

Si osservi che nel contesto degli automi temporizzati non si andrà mai a parlare di *stati finali*, infatti i sistemi descritti da questi automi sono sistemi che continuano ad evolvere; si andranno di conseguenza ad individuare quelle locazioni che rappresentano le proprietà che si vogliono verificare e quindi si andrà a cercare una particolare evoluzione del sistema che passa per tali locazioni

La Semantica

La semantica degli automi temporizzati ovviamente non ha nulla a che vedere con quella vista per il automi a stati finiti, ma per poterla descrivere correttamente (rifacendosi anche a quanto già visto per gli automi a stati finiti) si andrà a ricavare dall'automa temporizzato di partenza un automa a stati finiti i cui stati sono le varie configurazioni.

Viene quindi introdotto il concetto di **Timed Transition System (TTS)**, ossia una quaterna così definita:

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{s_0}, \rightarrow, \sum)$$

dove:

- S: insieme degli stati;
- s_0: stati iniziali
- $\rightarrow$: transizioni
- $\sum$: alfabeto

L'unico aspetto che è necessario andare a definire nel dettaglio è quello relativo alle *transizioni*: la transizione, in questo contesto, associa ad uno stato un'azione oppure un numero reale $\mathbb{R}$ (detto *tempo globale*) ed un altro stato. Formalmente:

$$\rightarrow \subseteq \boldsymbol{S} \times (\sum \cup \mathbb{R}) \times \boldsymbol{S}$$

Ricorrendo agli automi temporizzati, infatti, possono svilupparsi due tipi di eventi:

- l'azione avviene istantaneamente
- l'azione avviene dopo un certo intervallo di tempo

La transizione così definita è tale che:

- se $s \xrightarrow{0} s\ \ allora\ s = s'$:ossia se non è trascorso tempo e non è avvenuta un'azione, allora si è rimasti nella medesima locazione
- $se\ s \xrightarrow{d} s\ e\ s \xrightarrow{d'} s'\ con\ d\ e\ d' \in \mathbb{R}\ allora\ s \xrightarrow{d+d'} s'$: ossia se è trascorso solo del tempo senza che sia avvenuta un'azione, allora si può andare direttamente nello stato finale indicando sulla transizione il tempo totale trascorso
- $se\ s \xrightarrow{d} s'\ con\ d \in \mathbb{R}$, allora per i d istanti trascorsi non è avvenuta alcuna azione, ossia $\forall\ \ 0 \leq d' \leq d$ esiste s'' (eventualmente uguale a s o s') tale che $s \xrightarrow{d} s''$ e $s'' \xrightarrow{d-d'} s'$

Grazie a teli proprietà è possibile ora dare una definizione formale della semantica degli automi temporizzati:

SIA A UN TA (TIMED AUTOMATA) E $s_A = (S, s_0, \to, \Sigma)$, IL TTS ASSOCIATO AD A È DEFINITO COME SEGUE:

- L'INSIEME DEGLI STATI È COMPOSTO DALLE CONFIGURAZIONI DELL'AUTOMA A ($S = L \times \mathbb{R}^x$);
  - DOVE $\mathbb{R}^x$ INDICA LA LETTURA DI TUTTI GLI OROLOGI DEL SISTEMA, PER OGNI LOCAZIONE
- LO STATO INIZIALE DEL TTS È LA LOCAZIONE INIZIALE ($s_0 = (l_0, v_0)\ con\ v_0(x) = 0, \forall x \in X$);
- LA RELAZIONE DI TRANSIZIONE.

Per quanto riguarda la *relazione di transizione,* negli automi temporizzati è possibile individuare 2 tipi di eventi:

- evolve il tempo, senza che avvenga un'azione
- avviene un'azione, il tempo non è trascorso, ma possono essere avvenuti dei *reset*

Medesima distinzione è presente nella definizione delle transizioni per TTS, infatti si hanno:

- **transizioni di azione:** dallo stato (l, v) si va nello stato (l', v') con l'azione a se e soltanto se esiste una transizione sull'automa temporizzato che va da l ad l' con l'azione a, tale che la valutazione v soddisfa il vincolo g e, se si resetta, la nuova valutazione soddisfa gli invarianti di l'. Formalmente:

$$\boldsymbol{(l, v) \xrightarrow{a} (l', v')\ \ sse\ \ \ esiste\ l \xrightarrow{g,a,r} l'\ \ tale\ che\colon v \vDash g\ \ \ e\ \ \ v' = [r \leftarrow 0]v \vDash Inv(l')}$$

  Perché una transizione di azione sia abilitata, dunque, deve soddisfare i vincoli di partenza e, dopo che è avvenuto il reset, i vincoli di arrivo.

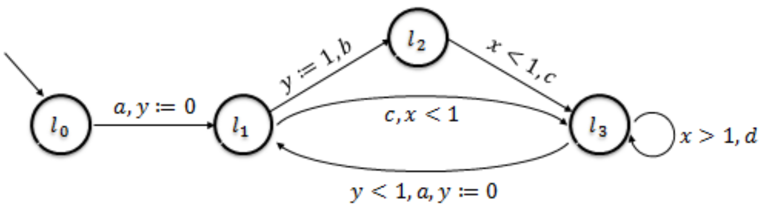
- **Transizione di ritardo:** sono le transizioni in cui non avviene alcuna azione; il ritardo è indicato da un numero reale ($\mathbb{R}$) e da un stato (l, v) si passa ad uno stato (l', v') con ritardo $d \in \mathbb{R}$ se:
  - $l = l'$
  - la valutazione $v + d$ continua a soddisfare gli invarianti di l.

  Formalmente:

$$(l, v) \xrightarrow{d} (l', v')\ \ \ sse\ \ \ (l = l')\ \ e\ (v + d) \vDash Inv(l)$$

Si ricorda che negli automi temporizzati non si hanno più degli stati finali, ma si hanno delle esecuzioni del sistema potenzialmente infinite.

Si consideri, ad esempio, un'esecuzione del sistema basato sul seguente automa:



- si parte dallo stato iniziale, ossia locazione 0 ed entrambi gli orologi settati a 0 $\quad (l_0, (0,0))$
- passa del tempo e si supponga che sia avvenuta una transizione di ritardo di 2,67 sec; si è ancora nella stessa locazione, ma gli orologi si sono aggiornati; si avrà quindi: $\quad (l_0(0,0)) \xrightarrow{2,67} (l_0, (2,67\ , 2,67))$
- successivamente viene eseguita l'azione a; tale azione porta il sistema nella locazione l_1 senza far scorrere altro tempo, tuttavia applica il reset all'orologio y quindi l'orologio x sarà pari a quello dello stato precedente, mentre l'orologio y viene resettato, quindi i due orologi locali, a seguito della transizione a cominciano a divergere, infatti si ottiene:

$$(l_0(0,0)) \xrightarrow{2,67} (l_0, (2,67\ , 2,67)) \xrightarrow{a} (l_1(2,67\ , 0))$$

- a seguito dell'azione a, avviene una transizione di ritardo di 1 secondo; questo tempo trascorso non ha modificato la locazione (che rimane l_1), mentre ha fatto avanzare entrambi gli orologi, ottenendo quindi:

$$(l_0, (0,0)) \xrightarrow{2,67} (l_0, (2,67\ , 2,67)) \xrightarrow{a} (l_1, (2,67\ , 0)) \xrightarrow{1} (l_1, (3,67\ , 1))$$

- a questo punto, poiché l'orologio y è andata a 1, è stata abilitata la transizione associata all'azione b (transizione non possibile negli stati precedenti in quanto non veniva soddisfatta la *guardia* $y \coloneqq 1$); può dunque avvenire l'azione b che ci porta nella locazione l_2, non fa passare il tempo né per l'orologio x né per l'orologio y ed è una transizione priva di reset. Quindi si è nella seguente situazione:

$$(l_0,(0,0)) \xrightarrow{2{,}67} (l_0,(2{,}67\ ,2{,}67)) \xrightarrow{a} (l_1,(2{,}67\ ,0)) \xrightarrow{1} (l_1,(3{,}67\ ,1)) \xrightarrow{b} (l_2,(3{,}27\ ,1))$$

- da questo stato, per come è stato costruito l'automa temporizzato, la transizione successiva non sarà mai abilitata, in quanto l'orologio x è già superiore ad 1 e non c'è nessun'altra transizione possibile che permetta di ridurre il valore di x e di variare la propria locazione. Da questo stato in poi, dunque, possono avvenire soltanto ritardi. Il sistema globale prosegue la propria evoluzione, ma sempre e solo con transizione di ritardo, in quanto è in uno stato di deadlock

L'esecuzione sopra riportata può essere rappresentata anche in maniera più semplice mediante una **parola temporizzata**, ossia una traccia dell'esecuzione; una *parola temporizzata*, infatti, tiene traccia delle azioni che avvengono e dell'istante, nel tempo globale, in cui avvengono.

Nel caso riportato sopra, dunque, si avrà:

- l'azione a è avvenuta nell'istante 2,67, quindi: $(a,\ 2{,}67)$
- l'azione b è avvenuta al tempo globale 3,67, quindi: $(b,\ 3{,}67)$
- non avvengono più azioni per l'eternità.

Un altro esempio di esecuzione del sistema potrebbe essere il seguente:

- avviene l'azione a all'istante 0 portando il sistema nella locazione l_1: $(a,0)$;
- da l_1 avviene l'azione c, all'istante 0,5, portando il sistema nella locazione l_3: $(c,0{,}5)$;
- da l_3 si può tornare alla locazione l_1 con l'azione a all'istante 0,75: $(a,0{,}75)$;
- etc.

Si è visto, dunque, che gli automi temporizzati sono un formalismo utilizzato per due obiettivi:

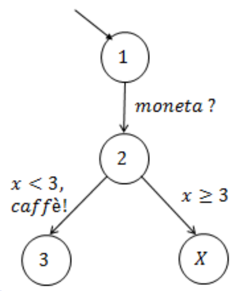
1. descrivere un sistema
2. per trasformare una formula CTL in un automa temporizzato per poi eseguire il *model checking*

Automi temporizzati per sistemi concorrenti

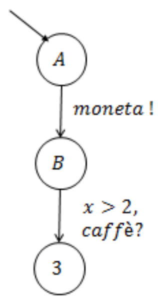
Gli automi temporizzati, inoltre, danno la possibilità di comporre dei sistemi concorrenti, ossia sistemi che evolvono indipendentemente, ma in relazione agli stimoli che uno dà all'altro. Si hanno dunque due sistemi tra i quali esiste un **canale di trasmissione**, ossia entrambi i sistemi possono inviare e ricevere una certa azione dall'altro. In particolare, viene indicato con:

- "!" l'invio di un segnale
- "?" la ricezione di un segnale

Per capire il loro funzionamento, si consideri di avere una macchinetta del caffè ed un utente: semplificando al massimo la struttura dei due sistemi si avrà che:

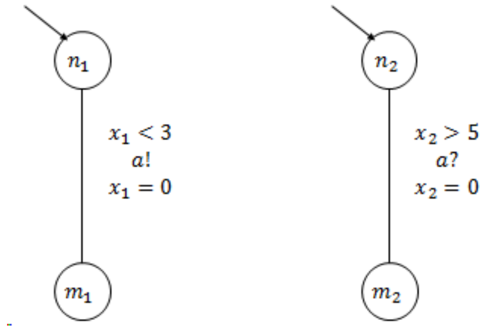


- <u>macchina del caffè:</u>
  - la macchina del caffè riceve una moneta, cambiando il proprio stato
  - entro 3 sec invia il caffè e passa nello stato finale del servizio oppure, se sono passati più di 3 sec ed il caffè non è stato erogato, va in uno stato d'errore



- <u>utente:</u>
  - l'utente invia la moneta, passando nello stato B, in cui sta attendendo il caffè
  - entro 2 secondi riceverà il caffè

Per comporre i due sistemi, si ricorre alle seguenti regole; si considerino i due seguenti sistemi:



il primo sistema presenta un vincolo sull'orologio locale, invia una certa azione e resetta l'orologio; il secondo sistema, invece, presenta a sua volta un orologio locale che deve soddisfare un vincolo, riceve l'azione inviata dall'altro (si osservi che se tale ricezione non fosse presente, le due transizioni sarebbero del tutto indipendenti) ed azzera il proprio orologio.

Le transizioni etichettate con una certa azione (dove in un sistema si riceve, mentre nell'altro si invia) si attivano simultaneamente se:

- entrambi i vincoli sono soddisfatti (infatti se uno dei due vincoli non fosse soddisfatto, benchè l'azione avente il vincolo soddisfatto possa essere eseguita, non potrebbe verificarsi comunque la loro composizione)
- è presente un'azione di ricezione ed un'azione di invio
- vengono effettuati tutti i reset

Il formalismo degli automi temporizzati, dunque, è un ottimo formalismo anche perché permette la composizione di sistemi concorrenti tra di loro e che evolvono in modo asincrono, ossia ognuno evolve con la propria logica e non sono stati progettati direttamente insieme.

Le proprietà che si vogliono verificare su un sistema di questo tipo sono, ad esempio, le seguenti:

- il sistema non deve mai cadere in uno stato di deadlock; in CTL tale vincolo può essere così espresso: $AG(\sim l_{deadlock})$
- è possibile che il sistema mai una certa locazione l_n; espresso in CTL: $EG(\sim l_n)$

Oltre a queste proprietà basilari, è possibile anche esprimere concetti un po' più raffinati che, a dir la verità, vanno anche un po' oltre la logica CTL; infatti si può arricchire CTL, ottenendo quella logica che prende il nome di TCTL (*timed-CTL*), andando ad esplicitare alcune particolari proprietà, come:

- il sistema soddisfa la proprietà p (inserita all'interno di una certa locazione di interesse) in un tempo compreso tra 4 e 6 secondi
  - tale proprietà, espressa formalmente, può essere indicata come "*su ogni percorso, prima o poi, succede che si soddisfa la proprietà p e l'orologio associato alla locazione d'interesse è superiore a 4, ma minore di 6*". Formalmente, dunque: $AF(q \wedge x \geq 4 \wedge x \leq 6)$.

Si possono quindi andare a verificare proprietà molto più complesse rispetto a quelle permesse con la logica CTL standard, in quanto si possono aggiungere anche dei vincoli temporali sul quando una certa proprietà deve essere soddisfatta.

Gli automi temporizzati, dunque, vengono usati sia per fare *model checking* in relazione alla logica CTL, ma anche per fare *model checking* su logiche molto più espressive.

Procedure di decisione sulla "Reachability" su automi temporizzati

Dato un automa temporizzato, la formula CTL che si vuole verificare può essere di vari tipi a seconda che contenga dei *globally*, degli *eventually*, etc.

Un tipo di proprietà che sono molto richieste in fase di verifica sono le cosiddette **reachability**, ossia dato il sistema, si vuole verificare che il sistema arrivi in un certo stato, in un tempo definito.

Dato un automa a stati finiti, se si fissa il numero di transizioni si ha automaticamente fissato un numero finito di possibili evoluzioni, perché dall'automa si potranno estrarre tutte le parole riconoscibili con il numero fissato di transizioni; dal punto di vista puramente teorico, dunque, con gli automi a stati finiti il problema di reachability è comunque decidibile (nel peggiore dei casi si dovrà ricorrere ad un controllo esaustivo).

Nel caso degli automi temporizzati, invece, se si fissa il tempo a disposizione (ad esempio 10 sec), nell'arco di quei 10 secondi possono essere accaduti comportamenti infiniti o un numero infinito di comportamenti. Per tale ragione anche il problema di "*bundle model checking*" (ossia il model checking eseguito fissando un intervallo temporale finito) apparentemente sembra essere non decidibile, ma in realtà non è così, in quanto si può ricorrere alla tecnica delle **regioni** che permettono di individuare un numero finito (benchè grande) di comportamenti del sistema.

L'obiettivo è quello di costruire una relazione di equivalenza tra gli stati; è noto che gli stati del TTS associato ad un automa temporizzato sono infiniti in generale, infatti si è detto che lo stato è individuato dalla locazione (e le locazioni sono in numero finito), ma anche dal tempo che è, invece, infinito, in quanto reale. Si vuole ottenere dunque una relazione di equivalenza tra gli stati sperando che il numero di classi di equivalenza che si vanno ad ottenere sia finito. Se si riesce a fare ciò, si riesce a rendere trattabile il problema.

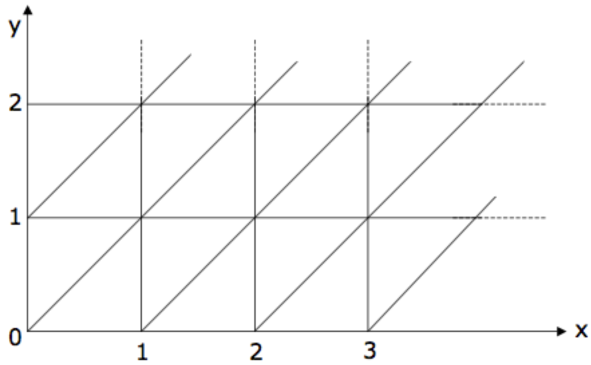
Si dice che due stati (l, v) e (l', v') sono equivalenti se:

- le due locazioni coincidono, ossia: $l \equiv l'$
- le due valutazioni devono essere equivalenti rispetto alla relazione M, dove M è la più grande costante che compare nell'automa temporizzato, ossia il numero più grande utilizzato all'interno di una guardia: $v \equiv_M v'$
    - Formalmente, $v \equiv_M v'$ se e soltanto se per ogni orologio $(\forall x \in X)$ succede:
        - la lettura sull'orologio x è maggiore di M se e soltanto se anche la lettura v' è maggiore, ossia $\boldsymbol{v(x) > M \Leftrightarrow v'(x) \in M}$
        - se la lettura dell'orologio x da un numero più piccolo di M, allora la parte intera della lettura $v(x)$ deve essere uguale alla parte intera della lettura $v'(x)$ e la parte frazionaria letta da $v(x)$ è uguale a 0 se e soltanto se anche la parte frazionaria letta da $v'(x)$ è uguale a 0. Formalmente: $\boldsymbol{se\ v(x) \le M\ allora\ \lfloor v(x) \rfloor = \lfloor v'(x) \rfloor\ \ e\ (\{v(x)\} = 0 \Leftrightarrow \{v'(x)\} = 0)}$. Sostanzialmente, a livello di numeri interi $v(x)$ e $v'(x)$ devono leggere lo stesso numero, e $v(x)$ leggerà un numero effettivamente intero (con parte frazionaria nulla) se e solo se anche $v'(x)$ legge un numero effettivamente intero
        - per ogni coppia di orologi, se la lettura del primo orologio dà un valore inferiore a M e lo stesso accade per la lettura del secondo orologio, allora la parte frazionaria del 1° orologio è minore della parte frazionaria del 2° orologio rispetto alla lettura della valutazione v se e soltanto se lo stesso accade per la valutazione v', ossia: $\boldsymbol{\forall x, y \in X\ \ se\ \ v(x) \le M\ e\ v(y) \le M\ allora\ \{v(x)\} \le \{v(y)\} \Leftrightarrow \{v'(x)\} \le \{v'(y)\}}$
        Questo significa che le due valutazioni mantengono l'ordine degli orologi.

Questa definizione di "*stati equivalenti*", dati due automi temporizzati, può essere implementata in modo algoritmico per costruire la classe di equivalenza ed in particolare si ha che:

- il simbolo $\equiv_M$ è detto **equivalenza regionale**
- le classi di equivalenza vengono dette **regioni**
- il numero delle regioni è minore uguale al numero ottenuto dalla relazione: $|\boldsymbol{x}|! \cdot \boldsymbol{2}^{|x|} \cdot \prod_{x \in X}(\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{C_x} + \boldsymbol{2})$ dove:
    - $|x|$ è il numero di clock
    - C_x è la più grande costante utilizzata come guardia per ogni clock

Le regioni per un automa temporizzato con due clock x e y con $c_x = 2$ e $c_y = 1$ può essere così rappresentato:



Dato ciò, è possibile costruire il cosiddetto *grafo delle regioni*; tale grafo si costruisce attraverso i seguenti passaggi:

- gli stati del grafo delle regioni hanno forma $(s, [v])$, dove $s \in S$ e $[v]$ è una regione di clock
- gli stati iniziali hanno la forma: $(s_0, [v])$, dove $s_0 \in S$ e $v(x) = 0, \forall x \in X$
- il grafo delle regioni ha una transizione $\big((s, [v]), a, (s', [v'])\big)$ se e soltanto se $(s, w) \Rightarrow_a (s', w')$ per qualche $w \in [v]$ e $w' \in [v']$