TEOREMA DEL PALLONCINO — TEO 1

TEO CORRETTEZZA e COMPLETEZZA (1)

→ PARTIAMO DAL FRAME (STANDARD): $(W, <)$

- $<$ → REL. DI RAGGIUNGIBILITÀ: • ORDINAMENTO STRETTO
- W → INSIEME DEI MONDI:
  - TOT. ORDINATO
  - DISCRETO
  - CON MINIMO
  - SENZA MASSIMO

→ E DALLA LOGICA Ω: (Sottoinsieme Λ di FMA(ϕ))

- NORMALE
  - CONTIENE TUTTE LE TAUTOLOGIE ⟺ CONTIENE A1, A2, A3
  - CHIUSA RISPETTO MP: $\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$
  - CHIUSA RISPETTO SOST. UNIFORMI
  - CONTIENE K: $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$
  - CHIUSA RISPETTO NECESSITAZIONE: $\dfrac{A}{\Box A}$
- CONTIENE GLI ASSIOMI
  - (TRANS) 4: $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$
  - (SERIAL) D: $\Box A \Rightarrow \Diamond A$
  - (DEB. CONNES) L: $\Box(A \land \Box A \Rightarrow B) \lor \Box(B \land \Box B \Rightarrow A)$
  - Z: $\Box(\Box A \Rightarrow A) \Rightarrow (\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A)$

→ TEOREMA: Ω È DETERMINATA DAL FRAME $(W, <)$

↳ ossia: ∃ LOGICA MODALE NORMALE CORRETTA e COMPLETA RISPETTO AD UN FRAME CHE CORRISPONDE AD UN TEMPO DISCRETO LINEARE CON ORIGINE

(1) CORRETTEZZA: $\vdash_\Omega A \Rightarrow (W, <) \models A$

$$\left.\begin{aligned}
&A1: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)\\
&A2: (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))\\
&A3: (\sim A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow ((\sim A \Rightarrow B) \Rightarrow A)\\
&K: \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)
\end{aligned}\right\} \text{VALIDI SU OGNI FRAME}$$

K → TEO 2

$$\left.\begin{aligned}
&4 \text{ SSE RELAZIONE TRANSITIVA}\\
&D \text{ SSE RELAZIONE SERIALE}\\
&L \text{ SSE RELAZIONE DEB. CONNESSA}
\end{aligned}\right\} \text{VALGONO X COSTRUZIONE DEL FRAME } (W, <)$$

Z: $\Box(\Box A \Rightarrow A) \Rightarrow (\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A)$

↳ CONSIDERO UN QUALSIASI MODELLO COSTRUITO SU $(W, <)$

→ IMPONGO VERE:

$M \models_\alpha \Box(\Box A \Rightarrow A) \rightsquigarrow \forall \beta : (\alpha, \beta) \in R,\ M \models_\beta \Box A \Rightarrow A$

$M \models_\alpha \Diamond\Box A \rightsquigarrow \exists \gamma : (\alpha, \gamma) \in R,\ M \models_\gamma \Box A$

→ IN γ LE AVRÒ ENTRAMBE!

⇓

MP: $M \models_\gamma A$

→ SE IN γ VALE A, NEL MONDO IMMEDIATAM. PRIMA VALE $\Box A$

→ NELLO STESSO MONDO, PER MP, VARRÀ ANCORA A.

→ POICHÉ ∃ UN NUM. FINITO DI MONDI DA γ e α, POSSO ANDARE A RITROSO E ARRIVO A DIRE CHE IN α VALE $\Box A$

→ QUINDI: Z È VERA IN QUALSIASI MODELLO COSTRUITO SU $(W, <)$

→ ALTERNATIVA:

↳ SE: $\Box(\Box A \Rightarrow A)$ O: $\Diamond\Box A$ FOSSERO FALSE, Z È VERA

C.V.D.

OK CORRETTEZZA!

② $\boxed{\text{COMPLETEZZA}}$: $(\omega, <) \models A \Rightarrow \vdash_\Omega A$

→ PER ASSURDO: $\nvdash_\Omega A$

→ PASSO 1: $\exists$ MODELLO M_1 DI Ω : $M_1 \not\models_\alpha A$ ⟶ UN MONDO α DI TALE MODELLO

→ SCEGLIAMO: $M_1 = M^\Omega$ = MODELLO CANONICO DI Ω

E SAPPIAMO CHE: $\boxed{M^\Omega \models_\alpha A \text{ SSE } \vdash_\Omega A}$ → $\boxed{\text{TEO 3, COROLLARIO 3.2}}$

→ QUINDI: SU M^Ω NON VALE A

↳ NOTA: È SERIALE, TRANSITIVO, DEB. CONNESSO

→ PASSO 2: $\exists$ MODELLO M2 DI Ω SERIALE, TRANSITIVO, $\boxed{\text{CONNESSO}}$: $M_2 \not\models_\alpha A$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{DATI}: \alpha, \beta \in S \\ \cdot\ \alpha \neq \beta \\ \cdot\ \alpha R \beta \lor \beta R \alpha\end{array}}$

→ SCEGLIAMO: M_2 = SOTTOMODELLO DI M_1 GENERATO DA α

E SAPPIAMO CHE: $\boxed{M_2 \models_\beta A \text{ SSE } M_1 \models_\beta A}$ → $\boxed{\text{TEO 4}}$

→ QUINDI:
SU M_2 NON VALE A, ED È SERIALE, TRANSITIVO, CONNESSO

→ PASSO 3: $\exists$ MODELLO M DI Ω SERIALE, TRANSITIVO, CONNESSO IL CUI INSIEME DI MONDI HA CARDINALITÀ $\leq 2^{|SFMA(A)|}$ IN CUI A NON È VERA

→ DETTO: $\Pi = SFMA(A)$, $M = \Pi$-FILTRAZIONE DI M2 (TRANSITIVA)

e: $|S| \leq 2^{|\Pi|}$

E SAPPIAMO: $\boxed{\forall \alpha \in S: M_2 \models_\alpha B \text{ SSE } M \models_{[\alpha]} B}$ → $\boxed{\text{TEO 5}}$

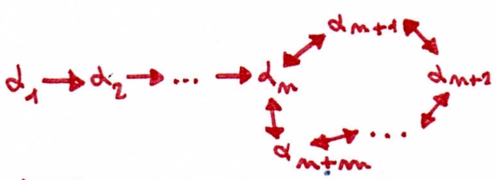
↳ Π-FILTR. DI M_2
CON: $B \in \Pi$

→ PASSO 4: $\exists$ UN PALLONCINO MODELLO DI Ω, IL CUI INSIEME DI MONDI HA CARDINALITÀ $\leq 2^{|SFMA(A)|}$, IN CUI A NON È VERA

• PALLONCINO: FRAME (T, P)

↳ $\{(\alpha_i, \alpha_j) \mid 1 \leq i < j < n+m\} \cup \{(\alpha_h, \alpha_k) \mid n \leq h, k\}$

↳ $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots \alpha_{n+m}\}$



NOTA:
NON RAPP. ARCHI TRANSITIVI

→ PER FARLO, DEFINIAMO LA RELAZIONE $\approx$: È DI EQUIVALENZA E GENERA LE CLASSI DI EQ. DETTE R-CLUSTER (C_α = R-CLUSTER DI α)

$\alpha \approx \beta$ SSE $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha R \beta \land \beta R \alpha \end{cases}$

→ SULL'INSIEME DEGLI R-CLUSTER, DEFINIAMO UNA RELAZIONE D'ORDINE: $C_\alpha \leq C_\beta$ SSE $\alpha R \beta$

$\left\{\begin{array}{l}\text{TRANSITIVA} \\ \text{ANTISIMMETRICA} \\ \text{RIFLESSIVA SE HA + DI 1 ELEM.}\end{array}\right.$ = NON DEGENERE

→ SE $C_\alpha \neq C_\beta$, C_α PRECEDE STRETTAM. C_β

▸ APPLICANDO LA RELAZIONE DI EQ. $\approx$ SU S (di M di Ω SERIALE, TRANSITIVO, CONNESSO, $|S| = 2^{|Sfma(A)|}$), ABBIAMO CHE S È COMPOSTO DA UNA SERIE FINITA DI CLUSTER, IL CUI ULTIMO È NON DEGENERE ②

↳ se: $C = C_\alpha$ è l'ULTIMO R-CLUSTER
x SERIALITÀ $\exists \beta : \alpha R \beta$,
QUINDI: $C \leq C_\beta$, MA ESSENDO C L'ULTIMO, $C = C_\beta$
E QUINDI: $C \leq C$

→ I CLUSTER IN MEZZO POTREBBERO ESSERE NON DEGENERI:

→ PER QUESTO MOTIVO, PASSIAMO DA R A R':
- $\forall \gamma, \delta \notin$ ALLO STESSO CLUSTER $(\gamma, \delta) \in R'$ SSE $(\gamma, \delta) \in R$
- $\forall \gamma, \delta \in$ ALL'ULTIMO CLUSTER $(\gamma, \delta) \in R'$
- $\forall \gamma, \delta \in$ ALLO STESSO CLUSTER (NON ULTIMO) DETTI: $\gamma_1 \dots \gamma_m$ GLI ELEM., $(\gamma_i, \gamma_j) \in R'$ SSE $i < j$

E OTTENIAMO: $M' = (S, R', V)$

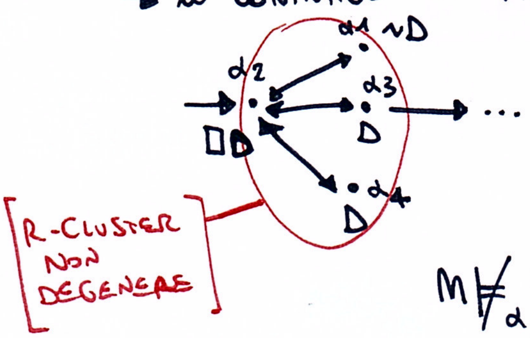
→ DIMOSTRIAMO CHE: $M \models_\alpha B$ SSE $M' \models_\alpha B$

↳ SICURAMENTE VERO x FORMULE SENZA CONNETTIVI MODALI

↳ se: $B = \Box D$

↳ se B VERA IN β DI M, ALLORA B VERA IN β DI M': $M \models_\beta B \Rightarrow M' \models_\beta B$
ESSENDO $R' \subseteq R$
↳ QUELLA DI M, CON LE CLASSI DI EQUIVALENZA
↳ QUELLA CON GLI R-CLUSTER SROTOLATI: SICURAMENTE È + PICCOLA DI 1 (CASO MIGLIORE: TUTTI CLUSTER DEGENERI e ULTIMO NON DEGENERE)

↳ IL CONTRARIO LO PROVO x ASSURDO: $M' \models_\beta B \Rightarrow M \not\models_\beta B$



$M \not\models_{\alpha_2} B$

$$\to \underset{\sim D}{\alpha_1} \to \underset{\Box D}{\alpha_2} \to \underset{D}{\alpha_3} \to \underset{D}{\alpha_4} \to \dots$$

$M' \models_{\alpha_2} B$

CASO IN CUI NON VALE!!

TEO 6

MA: LO Z-LEMMA CI GARANTISCE CHE $\exists C_\delta : C_{\alpha_2} < C_\delta$ IN CUI D NON È VERA

• QUINDI: SE $\exists C_\delta$, ALLORA $(\alpha_2, \delta) \in R'$ e QUINDI $M' \not\models_{\alpha_2} B$ CHE È IN CONTRADDIZIONE CON L'ASSUNTO. C.V.D.

→ QUINDI: $M \not\models_\alpha A$ SSE $M' \not\models_\alpha A$
↳ COSTRUITO SU UN PALLONCINO ⇒ NON VALIDA

→ PASSO 5: UN PALLONCINO È UNA IMMAGINE DI $(\omega, <)$ RISPETTO AD UN $\boxed{\text{P-MORFISMO (SURIETTIVO)}}$ → (x: f SURIETTI

↳ PSEUDO-MORFISMO DI F1 IN F2 DETTO

REL. TRA MONDI = $f: S_1 \to S_2$ SE

- $\alpha R_1 \beta$ IMPLICA $f(\alpha) R_2 f(\beta)$
- $f(\alpha) R_2 \eta$ IMPLICA $\exists\, \beta \in S_1$: $\alpha R_1 \beta$ e $\eta = f(\beta)$
- se poi abbiamo: $M_1 = (S_1, R_1, V_1)$, $M_2 = (S_2, R_2, V_2)$

allora: f P-MORFISMO DI M_1 IN M_2 SE

$\alpha \in V_1(A)$ SSE $f(\alpha) \in V_2(A)$

- INFATTI:

$f: \omega \to S$

↳ $f(i) = \alpha_i \qquad 0 \leq i < n$

$f(i) = \alpha_{n+j} \qquad i \geq n$

↳ resto di : $\frac{i-n}{m}$

→ LEMMA 6.3:

DATI:
$$\begin{cases} F_1 = (S_1, R_1) \\ F_2 = (S_2, R_2) \\ f: \text{P-MORFISMO SURIETTIVO } F1 \to F2 \end{cases}$$

ALLORA: $\underbrace{F_1 \models A}_{} \Rightarrow \underbrace{F_2 \models A}_{}$

$$(\omega, <) \models A \Rightarrow \underbrace{(T, P) \models A}_{}$$

↳ IN CONTRADDIZIONE CON QUANTO DETTO PRIMA!

C.V.D.

TEO 2: LO SCHEMA K È VALIDO IN OGNI FRAME

→ x ASSURDO: K NON VALIDO IN OGNI FRAME

→ QUINDI: $\exists$ MODELLO M: $M \not\models_\alpha \Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$

→ VERO SE:

$M \models_\alpha \Box(A \Rightarrow B) \rightsquigarrow \forall \beta : (\alpha, \beta) \in R,\ M \models_\beta A \Rightarrow B$

$M \not\models_\alpha (\Box A \Rightarrow \Box B) \rightsquigarrow \begin{cases} M \models_\alpha \Box A \rightsquigarrow \forall \beta : (\alpha,\beta) \in R,\ M \models_\beta A \\ M \not\models_\alpha \Box B \rightsquigarrow \exists \gamma : (\alpha,\gamma) \in R,\ M \not\models_\gamma B \end{cases}$

→ MA: IN γ VARRANNO x FORZA:

$\begin{cases} A \\ A \Rightarrow B \end{cases} \overset{MP:}{\rightsquigarrow} B$ [IN CONTRADDIZIONE CON $\sim B$!!]

→ QUINDI: $\nexists$ FRAME IN CUI K NON È VALIDO.

TEO 3: IL MODELLO CANONICO M^Λ DETERMINA Λ ← COROLLARIO 3.2

ossia: $\forall A : M^\Lambda \models A$ SSE $\vdash_\Lambda A$

→ LA DIMOSTRAZIONE SEGUE DAL TEOREMA:

$\forall A,\ \forall \alpha \in S^\Lambda : M^\Lambda \models_\alpha A$ SSE $A \in \alpha$ ← TEO DI VERITÀ

TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $A \in$ OGNI INSIEME MASSIMALE SSE $\vdash_\Lambda A$

→ DIMOSTRO x INDUZIONE SUI CONNETTIVI:

- $n = 0$: A FORMULA ATOMICA (BANALE: x DEFINIZIONE) $\alpha \in V(A)$
- PASSO DI INDUZIONE:
  - $A = \sim B$
    $M^\Lambda \models_\alpha A$ SSE $M^\Lambda \not\models_\alpha B$ SSE $B \notin \alpha$ (TEO DI VERITÀ)
    MA ESSENDO: α Λ-MASSIMALE, $B \notin \alpha$ SSE $A \in \alpha$
  - $A = B \Rightarrow C$
    $M^\Lambda \models_\alpha B \Rightarrow C$ SSE ¡
    $M^\Lambda \not\models_\alpha B$ V $M^\Lambda \models_\alpha C$ (TEO DI VERITÀ)
    SSE $B \notin \alpha$ SSE $\boxed{C \in \alpha}$
    x LA Λ-MASSIM. SSE $\boxed{\sim B \in \alpha}$

TAUTOLOGIA: $\begin{cases} \sim B \Rightarrow (B \Rightarrow C) \in \alpha \\ \sim B \in \alpha \end{cases}$ MP ↓ $(B \Rightarrow C) \in \alpha$

TAUTOLOGIA: $\begin{cases} C \Rightarrow (B \Rightarrow C) \in \alpha \\ C \in \alpha \end{cases}$ $\rightsquigarrow (B \Rightarrow C) \in \alpha$

→ MODELLO CANONICO: $M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$

- $S^\Lambda = \{\alpha \subseteq FMA(\Phi) \mid \alpha$ è Λ-MASSIMALE$\}$
- $(\alpha, \beta) \in R^\Lambda$ SSE $\{A \in FMA(\Phi) \mid \Box A \in \alpha\} \subseteq \beta$
- $V^\Lambda(A) = \{\alpha \in S^\Lambda \mid A \in \alpha\}$ $\forall$ FORMULA ATOMICA

$\alpha \bullet \xrightarrow[R^\Lambda]{\Box A \qquad A} \bullet \beta$

→ Δ Λ-CONSISTENTE MASSIMALE

[NON VALE: $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$]

$\forall A : A \in \Delta$ V $\sim A \in \Delta$

ossia: SE AGGIUNGI, PERDI CONSISTENZA!

$\Gamma \vdash_\Lambda A$ = A è Λ-DEDUCIBILE DA UN INSIEME DI FORMULE Γ

$\vdash_\Lambda A$ = A è TEOREMA DI Λ (= OGNI ELEM. DI Λ)

↳ $A = \Box B$

$M^\Lambda \models_\alpha \Box B$ SSE $\forall \beta : (\alpha, \beta) \in R^\Lambda : \underbrace{M^\Lambda \models_\beta B \text{ SSE } B \in \beta}_{\text{TEO DI VERITÀ}}$

MA x DEF. DI R^Λ: $(\alpha, \beta) \in R^\Lambda$ SSE $\{D \in Fma(\Phi) \mid \Box D \in \alpha\} \subseteq \beta$

C.V.D.

- AGGIUNTE:

→ $\boxed{\text{COROLLARIO 3.1}}$

$\Gamma \vdash_\Lambda A$ SSE $A \in$ AD OGNI INSIEME Λ-MASSIMALE CONTENENTE Γ

→ $\boxed{\text{COROLLARIO 2.2}}$

$\Gamma \vdash_\Lambda A$ IMPLICA: $\{\Box B \mid B \in \Gamma\} \vdash_\Lambda \Box A$

QUINDI: $\underbrace{\{\Box D \mid \Box D \in \alpha\}}_{\alpha} \vdash_\Lambda \Box B$

QUINDI: $\alpha \vdash_\Lambda \Box B$ ALLORA: $\Box B \in \alpha$

TEO 4 : DATI M MODELLO E M^α SOTTOMODELLO DI M GENERATO DA α,
DATA UNA FBF $A \in Fma(\Phi)$

$$\forall \beta \in S^\alpha, \quad M \models_\beta A \quad \text{SSE} \quad M^\alpha \models_\beta A$$

- $M = (S, R, V)$
- R^* = CHIUSURA RIFLESSIVA e TRANSITIVA DI R
- $M^\alpha = (S^\alpha, R^\alpha, V^\alpha)$
  - ↳ $V^\alpha = V \cap S^\alpha$
  - ↳ $R^\alpha = R \cap S^\alpha \times S^\alpha$
  - ↳ $S^\alpha = \{\beta \in S \mid (\alpha, \beta) \in R^*\}$

→ DIMOSTRO x INDUZIONE SUI CONNETTIVI:

- $m = 0$

$M^\alpha \models_\beta A$ SSE $\beta \in \underbrace{V^\alpha(A)}_{V \cap S^\alpha}$

↳ $\beta \in S^\alpha$

- $\beta \in V$ SSE $M \models_\beta A$ → OK

- PASSO DI INDUZIONE:

→ $A = \sim B$

$M^\alpha \models_\beta \sim B$ SSE $M^\alpha \not\models_\beta B$ SSE $M \not\models_\beta B$ SSE $M \models_\beta \sim B$

→ $A = B \Rightarrow C$

$M^\alpha \models_\beta B \Rightarrow C$ SSE $(M^\alpha \not\models_\beta B \lor M^\alpha \models_\beta C)$

SSE SSE

$(M \not\models_\beta B \lor M \models_\beta C)$ SSE $M \models_\beta B \Rightarrow C$

→ $A = \Box B$

$M^\alpha \models_\beta \Box B$ SSE $M^\alpha \models_\gamma B$ SSE $M \models_\gamma B$ SSE $M \models_\beta \Box B$

$\forall \gamma : \beta R^\alpha \gamma$ $\forall \gamma : \beta R \gamma$

NOTE:

→ δ in relazione con β: $\beta R \delta$
→ Poiché: $\beta \in S^{\alpha}$, allora: $\alpha R^* \beta$, e x trans.: $\alpha R^* \delta$
→ Quindi: $\delta \in S^{\alpha}$, e quindi: $\beta R^{\alpha} \delta$

$R \Rightarrow R^{\alpha}$

→ μ in relazione R^{α} con β: $\beta R^{\alpha} \mu$
→ Poiché: $\beta \in S$, allora: $\alpha R^* \beta$. Ma x trans.: $\alpha R^* \mu$
→ Quindi: $\mu \in S$, e quindi: $\beta R \mu$

$R^{\alpha} \Rightarrow R$ (?)

TEO 5: $\forall_{\alpha} \in S$: $M \models_{\alpha} B$ sse $M' \models_{[\alpha]} B$ $(B \in \Pi)$

↳ Arbitraria Π-filtr. di M
↳ $(B \in \Pi)$

• Lemma di filtrazione

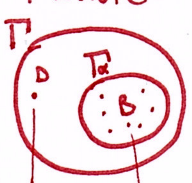
Con: $M' = (S_{\Pi}, R', V_{\Pi})$

V_{Π}: $[\alpha] \in V_{\Pi}(p)$ sse $\alpha \in V(p)$

$p \in \phi_{\Pi}$

$\phi_{\Pi} = \phi \cap \Pi \equiv \Pi$

• Filtrazione: $\Pi_{\alpha} = \{B \in \Pi \mid M \models_{\alpha} B\}$ = insieme delle sottoformule $B \in \Pi$, vere in α



Sottoinsieme

$\Pi \subseteq FMA(\phi)$, chiuso risp. alle sottoformule

$M \not\models_{\alpha} D$ $\quad M \models_{\alpha} B$

(definisce una)

• Classe di equivalenza: se: $\Pi_{\alpha} \equiv \Pi_{\beta}$, allora: $\alpha \sim_{\Pi} \beta$

• Lemma 4.1: se: $|\Pi| = n$, allora: $|S_{\Pi}| = 2^n$

$S_{\Pi} = S/_{\sim_{\Pi}}$

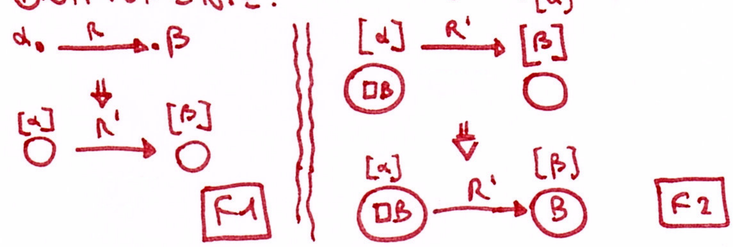
• R' = Π-filtrazione di R
↳ definita su S_{Π}
↳ proprietà:

F1) se: $(\alpha, \beta) \in R$, allora: $([\alpha], [\beta]) \in R'$

F2) se: $([\alpha], [\beta]) \in R'$, allora:

$\forall B \in \Pi$, se: $\begin{cases} \Box B \in \Pi \\ M \models_{[\alpha]} \Box B \end{cases}$, allora: $M \models_{[\beta]} B$

• Graficamente:



→ Dimostro x induzione sul numero n di connettivi:

• $n = 0$

$M' \models_{[\alpha]} B$ sse $[\alpha] \in V_{\Pi}(B)$

sse $\alpha \in V(B)$ sse $M \models_{\alpha} B$

• Passo di induzione

↳ $B = \sim A$

$M' \models_{[\alpha]} B$ sse $M' \not\models_{[\alpha]} A$

sse $[\alpha] \notin V_{\Pi}(A)$ sse $\alpha \notin V(A)$

sse $M \not\models_{\alpha} A$ sse $M \models_{\alpha} B$

↳ $B = A \Rightarrow C$

$M' \models_{[\alpha]} A \Rightarrow C$ sse

$M' \not\models_{[\alpha]} A$ $\vee$ $M' \models_{[\alpha]} C$

(come sopra) $\quad$ (caso base)

$\forall B: (\alpha, \beta) \in R$: sse

NOTA: meglio se la fai al contrario, parti da M

$M \models_{\alpha} \Box A$ sse

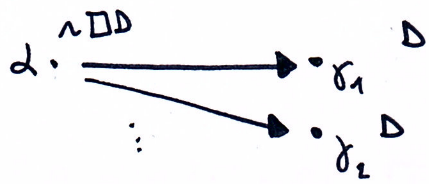
↳ $B = \Box A$ $\quad$ $M' \models_{[\alpha]} \Box A$ sse $\forall [\beta]: ([\alpha][\beta]) \in R'$: $M' \models_{[\beta]} A$ sse $M \models_{\beta} A$

TEO 6 SIA M MODELLO COSTRUITO SU FRAME (S, R) { FINITO, SERIALE, TRANSITIVO, CONNESSO
IN CUI È VERO Z.

SE: $M \not\models_\alpha \Box D$ [DI UN CLUSTER C_α, NON ULTIMO], allora: $\exists \beta \in C_\beta : C_\alpha < C_\beta$ IN CUI NON È VERO D

→ DIMOSTRO x ASSURDO:

→ $M \not\models_\alpha \Box D$, $\alpha \in C_\alpha$ NON ULTIMO, e: D VERA NEI SUCCESSIVI A C_α



→ OVVIAMENTE, D NON VERA IN C_α $\left(RN: \frac{\neg\Box D}{\neg D}\right)$

→ QUINDI: $\forall C_\beta \leq C_\alpha$ NON VERA $\Box D$ E D È VERA: $\Box D \Rightarrow D$

→ IN TUTTI I C SUCCESSIVI A C_α VALGONO $\Box D$ e D, E DUNQUE È ANCORA VERA: $\Box D \Rightarrow D$

→ IN OGNI MONDO, SI HA QUINDI: $\Box(\Box D \Rightarrow D)$ ED ESSENDO VERO Z SI HA: $\Diamond\Box D \Rightarrow \Box D$

→ DEL RESTO, IN α È VERA $\Diamond\Box D$, E DUNQUE ANCHE $\Box D$, CONTRO IL SUPPOSTO.

→ QUINDI: NON PUÒ MAI ACCADERE CHE $\Box D$ NON VERA IN α DI UN R-CLUSTER C_α NON ULTIMO, E INVECE D VERA IN TUTTI I γ DI R-CLUSTER SUCCESSIVI A C_α

7 } R TRANSITIVA SSE VALE : $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ (S:4)

• R TRANSITIVA E NON VALE $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ (x UN MONDO α)

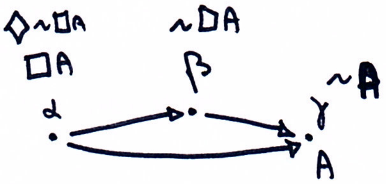
$F \not\models_\alpha \Box A \Rightarrow \Box\Box A$ SSE $F \models_\alpha \sim(\sim\Box A \vee \Box\Box A)$ SSE

$F \models_\alpha \Box A \wedge \sim\Box\Box A$: $\begin{cases} F \models_\alpha \Box A \to \forall \delta : \alpha R \delta \;\; F \models_\delta A \\ F \models_\alpha \Diamond \sim\Box A \end{cases}$

$\sim\Box\sim A = \Diamond A$

$\sim\Box B = \Diamond\sim B$

$\sim\Box\Box A = \Diamond\sim\Box A$



$\exists \beta : \alpha R \beta$

$F \models_\beta \sim\Box A$ SSE $F \models_\beta \Diamond\sim A$

SSE $\exists \gamma : \beta R \gamma$: $F \models_\gamma \sim A$

MA POICHÉ VALE LA TRANSITIVITÀ, $\alpha R \beta \wedge \beta R \gamma$ SSE $\alpha R \gamma$ QUINDI : $F \models_\gamma A$ CONTRO IPOTESI

C.V.D.

• VALE : $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$

$F \models_\alpha \Box A \Rightarrow \Box\Box A$ SSE $F \models_\alpha \sim\Box A \vee \Box\Box A$

1° CASO : $F \models_\alpha \sim\Box A$ SSE $F \models_\alpha \Diamond\sim A$ SSE $\exists \beta : \alpha R \beta$ $F \models_\beta \sim A$

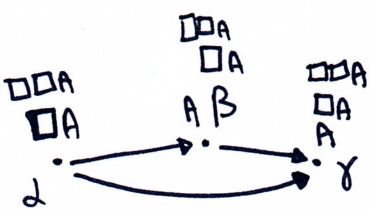
2° CASO : $F \models_\alpha \Box\Box A$ SSE $\forall \beta : \alpha R \beta$: $F \models_\beta \Box A$

$F \models_\alpha \Box A \Rightarrow \Box\Box A$ SSE $F \models_\alpha \sim(\Box A \wedge \sim\Box\Box A)$

[A OR B SSE $\sim(\sim A \wedge \sim B)$]

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$F \not\models_\alpha \Box A \wedge \sim\Box\Box A$ $\begin{cases} F \models_\alpha \sim\Box A \to \exists \beta : \alpha R \beta : F \models_\beta \sim A \\ F \models_\alpha \Box\Box A \to \end{cases}$



TEO 8 T: $\Box A \Rightarrow A$ SSE R RIFLESSIVA

• T VERA ⇒ RIFLESSIVITÀ

(x ASSURDO: R NON RIFLESSIVA)

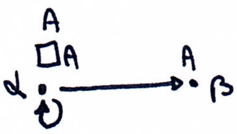
1) $M \not\models_\alpha \Box A \rightarrow \exists \beta : \alpha R \beta \quad M \models_\beta \sim A$ → CASO NON INTERESSANTE ...

OR

2) $M \models_\alpha \Box A \rightarrow \forall \beta : \alpha R \beta \quad M \models_\beta A$

AND

$M \models_\alpha A$



[ESSENDO: $M \models_\beta A \quad \forall \beta : \alpha R \beta$
ALLORA: α RAGGIUNGIBILE DA α !]

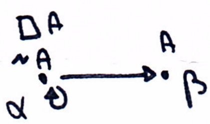
⇓

R RIFLESSIVA

• RIFLESSIVITÀ ⇒ T VERA

(x ASSURDO: T NON VERA)

$\begin{cases} M \models_\alpha \Box A \rightsquigarrow \forall \beta : \alpha R \beta \quad M \models_\beta A \\ M \not\models_\alpha A \end{cases}$



[MA ANCHE α È RAGGIUNGIBILE DA α]

⇓

T VERA!

TEO 9 LEMMA DI LINDENBAUM

$\forall$ INSIEME Λ-CONSISTENTE ⊆ INSIEME Λ-MASSIMALE

• NUMERIAMO LE FORMULE DEL LINGUAGGIO SU CUI È COSTRUITA Λ

• DETTO: Γ = INSIEME Λ-CONSISTENTE

$\Delta_0 = \Gamma$

$\Delta_{m+1} = \Delta_m \cup \{A_m\}$ se $\Delta_m \vdash_\Lambda A_m$

$= \Delta_m \cup \{\sim A_m\}$ in caso contrario

• Δ ALLA FINE SARÀ L'UNIONE INSIEMISTICA DEI Δ_m.

• PER PROVARE CHE Δ È Λ-MASSIMALE, BASTA PROVARE CHE È CONSISTENTE.

• MA LO È x COSTRUZIONE: INFATTI, O $\sim A$ O $A \in \Delta$

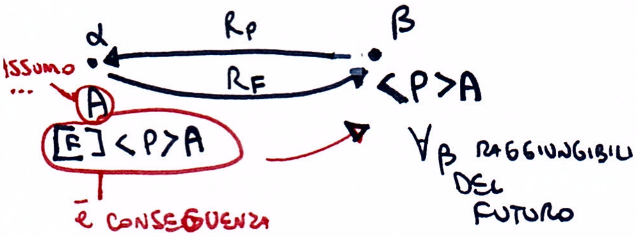
• INOLTRE, Δ_m È FATTA IN MODO DA CONSERVARE LA CONSISTENZA

…o 10

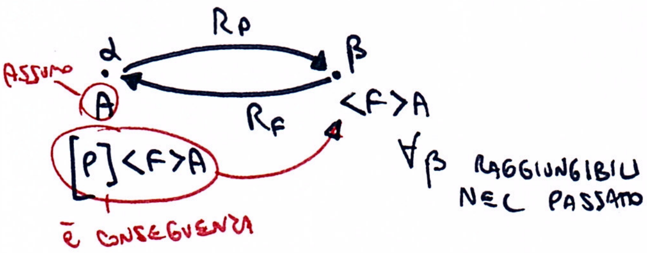
DATI: $F = (S, R_P, R_F)$ e $\boxed{R_P = R_F^{-1}}$

VALE: $A \Rightarrow [F]\langle P\rangle A$ AND $A \Rightarrow [P]\langle F\rangle A$

• LA PRIMA:



• LA SECONDA:



LOGICA TEMPORALE MULTIMODALE:

$[P]$ = NECESSARIAM. NEL PASSATO

$[F]$ = " " FUTURO

$M \models_\alpha [P]A$ SSE $\forall \beta : (\alpha,\beta) \in R_P : M \models_\beta A$

$M \models_\alpha [F]A$ SSE $\forall \beta : (\alpha,\beta) \in R_F : M \models_\beta A$

• $R_P = R_F^{-1}$ EQUIVALE A DIRE:

$(\alpha,\beta) \in R_P$ SSE $(\beta,\alpha) \in R_F$

β NEL PASSATO DI α SSE α NEL FUTURO DI β