САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет
по лабораторной работе №2
на тему
"Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция"

выполнил:
Кыльчик И.В.
группа: 33501/1
преподаватель:
Богач Н.В.

Санкт-Петербург
2018

1. Цель работы

Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

2. Постановка задачи

– Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполните расчет преобразования Фурье. Перечислите свойства преобразования Фурье.

– С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом, воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции, сравните время работы обоих алгоритмов.

3. Теоретическая часть

Всякая периодическая функция $\varphi_p(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$

где $f_1 = 1/T_1; T_1$ - период функции $\varphi_p(t); C_k$ - постоянные коэффициенты.

Условие Дирихле означают, что функция должна быть ограниченной, кусочно-непрерывной и иметь на протяжении периода конечное число экстремумов.

В качестве базовых функция, т.е. функций, по которым проводится разложение использованы комплексные гармонические функции вида $e^{j2\pi k f_1 t}$, где k - целочисленный параметр. Эти функции ортогональны на промежутке $T_1 = 1/f_1$, соответственно интеграл на этом промежутке от произведения двух функций с параметрами $k = n$ и $k = -m$ равен нулю при $n \neq m$. Коэффициенты C_k можно найти из уравнения:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0+T_1}^{t_0} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

Интеграл Фурье. Ряд Фурье справедлив для периодических сигналов. Однако на его основе можно вывести соотношения для преобразования непериодических сигналов. Действительно, непериодический сигнал можно представить как частный случай периодического, но имеющего период, стремящийся к бесконечности. При этом частота f_1 стремится к нулю и ее целесообразно обозначить как дифференциал df. Частота отдельной гармоники kf_1 в этом случае будет играть роль текущей частоты f, а сумма гармоник перейдет в интеграл по этой частоте. В результате для непериодической функции получим

$$\varphi(t) = \lim_{T_1 \to \infty} \{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \varphi(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt] e^{j2\pi k f_1 t} \frac{1}{T_1} \}.$$

Следовательно

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt] e^{-j2\pi f t} df$$

Данное соотношение носит название интеграла или преобразование Фурье (ПФ).

Если два сигнала похоже меняются при переходе от точки к точке, то меру их *корреляции* можно вычислить, взяв сумму произведений соответствующих пар точек. Если сумма конечна, это указывает на наличие корреляции. Отрицательная сумма указывает на отрицательную корреляцию, т.е. увеличение одной переменной связано с уменьшением другой. Таким образом, взаимную корреляцию $r_{12}(n)$ двух последовательностей данных $x_1(n)$ и $x_2(n)$, содержащих по N элементов, можно записать как

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Впрочем, такое определение взаимной корреляции дает результат, который зависит от числа взятых точек. Чтобы это исправить, результат нормируется на число точек (делится на N). Данную операцию можно также рассматривать как усреднение суммы произведений. Итак, получаем следующее улучшенное определение:

$$r_{12} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Впрочем, чтобы данное определение можно было использовать, его также нужно модифицировать. В некоторых случаях корреляция, определенная указанным выше способом, может быть нулевой, хотя две последовательности коррелируют на 100%. Это может произойти, например, когда два сигнала идут не в фазе. Чтобы преодолеть подобный сдвиг фаз, необходимо сдвинуть (или задержать) один из сигналов относительно другого. Обычно, чтобы выровнять сигналы перед определением корреляции, x_2 смещается влево. Альтернативной и эквивалентной процедурой является смещение x_1 вправо. В результате получаем такую формулу для взаимной корреляции:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+j) = r_{12}(-j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n-j).$$

На практике, когда два сигнала коррелируют, их фазовая связь скорее всего неизвестна, так что корреляцию нужно находить для нескольких различных задержек, чтобы установить наибольшее значение корреляции, которое затем считается истинным.

Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции, которая обычно формулируется следующим образом:

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]$$

хотя корректной является такая формулировка:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]$$

где F_D^{-1} обозначает обратное дискретное преобразование Фурье. Данный подход требует выполнения двух дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и одного обратного ДПФ, что легче всего сделать, используя алгоритм БПФ. Если число членов в последовательностях достаточно велико, данный метод БПФ дает результат быстрее, чем непосредственный расчет взаимной корреляции.

4. Ход работы

4.1. Преобразование Фурье

Применим преобразование Фурье для синусоидальной функции.

```
syms frequency ampl phase bias t T;
sinFunc = ampl*sin(2*pi*frequency*t+phase) + bias;
f_FT = fourier(sinFunc)
```

Результатом является следующая формула:

```
-ampl*pi*(dirac(w - 2*pi*frequency) - dirac(w + 2*pi*frequency))*1i,
```

где dirac(w) это дельта функция от w, которая равна 0 на всем промежутке, кроме 0 и равна бесконечности в точке 0. Посмотрев внимательнее на эту функцию, мы можем увидеть, что она представляет собой два пика расположенные в точках frequency и -frequency, как и ожидалось.

Применим преобразование Фурье для прямоугольной функции.

```
rectFunc = ampl*rectangularPulse(-T,T,t);
f_FT = fourier(rectFunc)
```

Результатом является следующая формула:

```
ampl*((sin(T*w) + cos(T*w)*1i)/w - (cos(T*w)*1i - sin(T*w))/w).
```

Если присмотреться то мы можем заметить что cos сократится и в итоге мы получим функцию вида $2 * ampl * T * sync(wT)$, что в теории и является преобразованием Фурье для прямоугольного импульса.

4.2. Корреляция

С помощью функции корреляции найдем позицю синхропосылки [101] в сигнале.

```
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
sync = [1 0 1];

r = zeros(1, length(signal) + length(sync) - 1);
for n = 1:(length(signal) + length(sync) - 1)
    for j = 1:length(sync)
        if(n >= length(sync) - j + 1 && n <= length(signal) + 1 - j)
            r(n) = r(n) + signal(n - length(sync) + j)*sync(j);
        end
    end
    if(r(n) == 2)
        break;
    end
end

data = zeros(1, 8);
for i=1:8
    data(i) = signal(n+i);
end
```

В результате выполнения программы в массив *data* запишутся первые 8 битов [01110000] после синхропосылки.

Применим быструю корреляцию.

```
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
sync = [1 0 1];

N = 2^nextpow2(length(signal));
signalSpectr = fft(signal, N);
syncSpectr = fft(sync, N);

mult = signalSpectr.*conj(syncSpectr);
result = ifft(mult, N);

n = find(result == 2);
data = zeros(1, 8);
for i=1:8
    data(i) = signal(n(1)+length(sync)-1+i);
end
```

Результат выполнения аналогичен предыдущей программе.

Оценим время выполнения при помощи функции *timeit*. Для программы обычной корреляции время выполнения составляет порядка 10^{-6} секунд, а для быстрой корреляции порядка 10^{-4} секунд. Как мы видим при малом количестве данных быстрая корреляции уступает по скорости, но при увеличении размера синхропосылки и самого сигнала, программа быстрой корреляции выполнится быстрее.

5. Вывод

В данной лабораторной работе мы изучили как выполнить преобразование Фурье для простейших сигналов, а также изучили алгоритм корреляции и быстрой корреляции.

Изучая преобразование Фурье можно выделить следующий свойства:

1. **Суммирование функций.** Преобразование Фурье — линейное преобразование. Отсюда следует, что ПФ линейной комбинации некоторых функций равно аналогичной линейной комбинации ПФ этих функций.

2. **Смещение функций.** При смещении функции по аргументу на t_0 ее ПФ умножается на $e^{i2\pi f t_0}$

3. **Перемножение функций.** ПФ произведения двух функций $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ равно свертке их ПФ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f')X\Phi_2(f-f')df'$.

4. **Свертывание функций.** ПФ свертки двух функций $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t')X\varphi_2(t-t')dt'$ равно произведению ПФ свертываемых функций $\Phi_1(f)\Phi_2(f)$.

5. **Обратимость преобразования Фурье.** Преобразование Фурье обратимо с точностью до знака аргумента.

Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов и т.д. В телекоммуникационных технологиях очень удобно применять ПФ т.к. оно позволяет нам перейти от временного пространства в частотное, в котором намного легче работать.