线性代数 II
第一次授课讲义

初稿, 2021-03-02

艾万君

西南大学

van141.abel@gmail.com

目录

引言

引言

- 线性代数是在解决线性方程组的过程中发展起来的一门学科, 它是现代数学的基础之一.

引言

- 线性代数是在解决线性方程组的过程中发展起来的一门学科, 它是现代数学的基础之一.
- 线性代数顾名思义, 研究的是线性问题. 在数学的各个领域, 线性化的思想都是非常重要的. 例如导数可以看作函数在一点处的线性逼近.

引言

- 线性代数是在解决线性方程组的过程中发展起来的一门学科, 它是现代数学的基础之一.
- 线性代数顾名思义, 研究的是线性问题. 在数学的各个领域, 线性化的思想都是非常重要的. 例如导数可以看作函数在一点处的线性逼近.
- 现在, 线性代数的理论非常完备. 已经广泛应用于数值计算, 经济学, 控制论 (工程控制) 等领域.

引言

- 线性代数是在解决线性方程组的过程中发展起来的一门学科, 它是现代数学的基础之一.
- 线性代数顾名思义, 研究的是线性问题. 在数学的各个领域, 线性化的思想都是非常重要的. 例如导数可以看作函数在一点处的线性逼近.
- 现在, 线性代数的理论非常完备. 已经广泛应用于数值计算, 经济学, 控制论 (工程控制) 等领域.
- 特别是随着现代计算机技术的发展, 线性代数的应用更加广泛.

引言

- 线性代数是在解决线性方程组的过程中发展起来的一门学科, 它是现代数学的基础之一.
- 线性代数顾名思义, 研究的是线性问题. 在数学的各个领域, 线性化的思想都是非常重要的. 例如导数可以看作函数在一点处的线性逼近.
- 现在, 线性代数的理论非常完备. 已经广泛应用于数值计算, 经济学, 控制论 (工程控制) 等领域.
- 特别是随着现代计算机技术的发展, 线性代数的应用更加广泛.
- 围绕解方程这一基本技术, 线性代数联系了行列式理论, 矩阵理论, 二次型理论以及线性变换理论. 这些理论的建立, 其实还促进了几何的发展.

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

1. 当 $a \neq 0$ 时, 则有唯一解$x = b/a$;

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

1. 当 $a \neq 0$ 时, 则有唯一解$x = b/a$;
2. 当 $a = 0$ 时, 若 $b \neq 0$, 则无解;

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

1. 当 $a \neq 0$ 时, 则有唯一解$x = b/a$;
2. 当 $a = 0$ 时, 若 $b \neq 0$, 则无解;
3. 当 $a = 0$ 时, 若 $b = 0$, 则有无穷多解.

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

1. 当 $a \neq 0$ 时, 则有唯一解$x = b/a$;
2. 当 $a = 0$ 时, 若 $b \neq 0$, 则无解;
3. 当 $a = 0$ 时, 若 $b = 0$, 则有无穷多解.

本质上, 我们这门课研究的是如何推广上述结论到更一般的方程.

从解方程谈起

我们熟知一元一次方程

$$ax + b = 0$$

的解为:

1. 当 $a \neq 0$ 时, 则有唯一解$x = b/a$;
2. 当 $a = 0$ 时, 若 $b \neq 0$, 则无解;
3. 当 $a = 0$ 时, 若 $b = 0$, 则有无穷多解.

本质上, 我们这门课研究的是如何推广上述结论到更一般的方程.

思考: 你能写出更加复杂的方程吗?

关于一元一次方程的推广

我们基本上有两种推广方式:

关于一元一次方程的推广

我们基本上有两种推广方式:

1. 考虑更高次数的方程:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

关于一元一次方程的推广

我们基本上有两种推广方式:

1. 考虑更高次数的方程:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

2. 考虑更多未知数的方程:

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0.$$

关于一元一次方程的推广

我们基本上有两种推广方式:

1. 考虑更高次数的方程:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

2. 考虑更多未知数的方程:

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0.$$

$\boxed{\text{思考: 一元高次方程以及多元一次方程的解的情况是怎样的?}}$

一元高次方程的解

考察我们熟知的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

一个基本的事实是它的解依赖于所选取的数域:

一元高次方程的解

考察我们熟知的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

一个基本的事实是它的解依赖于所选取的数域:

1. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 它一定有两个根:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta := b^2 - 4ac.$$

一元高次方程的解

考察我们熟知的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

一个基本的事实是它的解依赖于所选取的数域:

1. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 它一定有两个根:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta := b^2 - 4ac.$$

2. 在实数域 $\mathbb{R}$ 上, 它的解的个数为:

$$\begin{cases} 2, & \Delta > 0, \\ 1, & \Delta = 0, \\ 0, & \Delta < 0 \end{cases}$$

数域

因此, 我们这里给出数域的严格定义:

定义 1. (数域) 假设 $\mathbb{C}$ 是全体复数构成的集合, $\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$. 我们称 $\mathbb{P}$ 为一个数域, 如果

1. 集合 $\mathbb{P}$ 至少有两个元素;
2. 当 $a, b \in \mathbb{P}$ 时, 我们有 $a + b$, $a - b$, ab, a/b 都属于 $\mathbb{P}$.

简言之, 数域就是一个集合, 其上有加, 减, 乘, 除, 且在这四种运算下封闭.
常见的数域有: 复数域 $\mathbb{C}$, 实数域 $\mathbb{R}$, 有理数域 $\mathbb{Q}$ 等等.

一元多项式, 根与重根

现在我们可以考虑一般数域上的一元多项式及其根.

定义 2. 假设 $\mathbb{P}$ 是一个数域.

- 我们称 $f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上关于 x 的一元多项式, 这里 $0 \le n \in \mathbb{Z}$, a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 等都属于数域 $\mathbb{P}$.
- 若 $a_n \neq 0$, 则称上述多项式是 n 次多项式. 数域 $\mathbb{P}$ 上全体次数不超过 n 的多项式记作 $\mathbb{P}_n[x]$, 而全体多项式记作 $\mathbb{P}[x]$.
- 若存在 $c \in \mathbb{P}$, 使得 $f(c) = 0$, 则称 c 为多项式 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{P}$ 上的一个根; 又若存在多项式 $g(x) \neq 0$ 以及非负整数 k, 使得

$$f(x) = (x - c)^k g(x),$$

则称 c 是 $f(x)$ 的 k 重根.

代数学基本定理

关于复数域上的一元多项式的根，有如下基本结论。

定理 1. 复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n \geq 0$ 次多项式有 n 个根（计算重数）。

行列式的引入

为了引入行列式，我们继续考虑一元一次方程推广为多元一次方程的情况。
考察

$$ax + by + c = 0$$

一般而言，它表示的是一条直线，而且直线上所有点的坐标都满足方程，故该方程有无穷多解。

行列式的引入

为了引入行列式，我们继续考虑一元一次方程推广为多元一次方程的情况。
考察

$$ax + by + c = 0$$

一般而言，它表示的是一条直线，而且直线上所有点的坐标都满足方程，故该方程有无穷多解。

思考：如何使得二元一次方程有唯一解呢？

行列式的引入

为了引入行列式，我们继续考虑一元一次方程推广为多元一次方程的情况。
考察

$$ax + by + c = 0$$

一般而言，它表示的是一条直线，而且直线上所有点的坐标都满足方程，故该方程有无穷多解。

思考：如何使得二元一次方程有唯一解呢？

一个想法是考虑两直线，一般而言它们交于一点。从数学角度来说，我们需要考虑两个二元一次方程组（两条直线）。

二元一次方程组的解

考察二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

利用消元法，容易解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \end{cases}$$

这里，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

二元一次方程组的解

考察二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

利用消元法，容易解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

这里，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

思考：如何将上述一元二次方程组的解改写为更加简洁的形式呢？

如果我么引入如下 2 阶行列式的定义：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则我们可将上述一元二次方程组的解改写为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} =: \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} =: \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$

三阶行列式的定义

仿照二阶行列式的定义，我们可以定义三阶行列式如下：

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline - & - & - & & \end{array}$$

即，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$:= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

三元一次方程组的解

完全类似二元一次方程组，三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中，

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

全排列

为了研究更一般方程组的解，我们有必要定义更高阶矩阵的行列式。为此，我们先来定义全排列。

定义 3. (排列) 我们称由自然数 $1, 2, \ldots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 为一个 n 级排列。

例如：1243 就是一个 4 级排列；53421 为一个 5 级排列。
注意上述两个排列都不是按照从小到大的顺序排列的，因此存在某种逆序。

定义 4. (逆序) 在排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 中，若 $k < l$ 但 $i_k > i_l$, 则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序。称一个排列的逆序总个数为该排列的逆序数，记作 $\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)$.

逆序数的计算

例子 1. 试着计算下列排列的逆序数：

- $\tau(312)$
- $\tau(53241)$
- 你的学号构成的排列

逆序数的基本性质

定义 5. (奇排列/偶排列) 我们称一个排列为奇（偶）排列，如果该排列的逆序数为奇（偶）数。

定义 6. (对换) 交换一个排列中两个数的位置，这种操作称为对该排列作一次对换。

定理 2. 对排列作一次对换改变该排列的奇偶性。

由此可知，在 n 级排列中，有 $n!/2$ 个奇排列和 $n!/2$ 个偶排列，即它们各占一半。

证明. 容易知道，一次相邻的对换改变排列的奇偶性。下面对一般情形来证明结论成立。
不妨假设排列为 $i_1 i_2 \ldots i_n$. 考虑对换 i_k, i_l, 不妨设 $k < l$, 即该排列为

$$i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_l \ldots i_n.$$

则在对换 i_k, i_l 作用下，该排列变为

$$i_1 i_2 \ldots i_l i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_k \ldots i_n.$$

明显地，把 i_l 经过 $l-k$ 次相邻对换，上述最后一个排列变为

$$i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{l-1} i_k i_l \ldots i_n.$$

在把 i_k 经过 $l-k-1$ 次相邻对换，上述排列就变为原排列。
这表明，经过 $(l-k)+(l-k-1)=2(l-k)+1$ 次相邻对换，我们可把 i_k, i_l 对换后的排列还原为原排列。由此可见结论成立。

习题

1. 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 100, \\ 4x_1 + 3x_2 = 140. \end{cases}$$

2. 利用消元法求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 26. \end{cases}$$

3. 利用三元一次方程组的求解公式验证题2的结论成立。
4. 计算下来排列的逆序数：(1) 217986354; (2) 987654321;
5. 写出 4 阶行列式 $|(a_{ij})_{4\times}|$ 中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项；

使用软件求解线性方程组

```
In[2]:= Solve[{
        解方程
          x1 + x2 + x3 == 6,
          x1 - x2 + x3 == 2,
          3 x1 + 4 x2 + 5 x3 == 26
        }, {x1, x2, x3}]

Out[2]= {{x1 -> 1, x2 -> 2, x3 -> 3}}
```

图 1. MMA 解线性方程组