线性代数 II
第二次授课讲义

初稿, 2021-03-13

艾万君

西南大学

van141.abel@gmail.com

目录

行列式的定义

回忆，二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

行列式的定义

回忆，二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

思考：四阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{44} \end{vmatrix}$	应该如何定义？它有多少项呢？

不难看出，在三阶行列式的定义中，

- 恰好有 $3!$ 项；
- 每一项的形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的一个排列；
- 当排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为偶数时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的系数为 $+1$；否则为 -1；

由此我们可将三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

容易检验，二阶行列式也可以用类似的和式定义。
因此，我们得到一般的 n 阶行列式的定义。

定义 1. 我们将 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和。

行列式的计算例子

例子 1. 利用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 按照定义，四阶行列式是 $4!$ 项形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 的代数和。注意到，只有 a_{13}，a_{24}，a_{32}，a_{41} 不为零。故非零项只有

$$(-1)^{\tau(3421)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = (-)^5 a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = -24.$$

例子 2. 利用行列式的定义证明上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

证明. 若记预证的行列式为 D, 则按照 n 阶行列式的定义,

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nj_n}.$$

注意，要使得 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nj_n}$ 不为零：

- 当 $j_n < n$ 时，$a_{nj_n} = 0$, 故只有 $j_n = n$;
- 当 $j_{n-1} < n-1$ 时，$a_{n-1,j_{n-1}} = 0$, 故 $j_{n-1} = n-1$ 或者 n, 但是 j_n 已经等于 n, 从而 $j_{n-1} = n-1$;
- 完全类似地，我们知道最终非零的项只有形如 $a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} a_{nn}$;
- 而且其符号为 $(-1)^{\tau(12 \cdots n-1 n)} = 1$.

由此可见结论成立。

定理 1. 完全类似地，我们可以证明

1. 负对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

2. 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n,n-1}a_{nn}.$$

定理 2. 对 n 阶行列式，证明如下的按列展开公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

证明. 假设我们令左边的行列式为 D, 则按照行列式的定义，我们知道

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}.$$

为了将其转化为结论所需要的形式，我们考虑交换 D 的上述定义式中的两项 a_{kj_k} 与 a_{lj_l}.
明显地，我们可以通过不断的对换，将 D 的定义式中每一项都排列成形如 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 的形式，关键是看它们的符号相差多少。

证明续. 注意到，经过把 a_{kj_k} 与 a_{lj_l} 对换，在 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{nj_n}$ 中:

- 行指标所成排列的逆序数满足:

$$(-1)^{\tau(12\cdots k\cdots l\cdots n)} = (-1)^{\tau(12\cdots l\cdots k\cdots n)+1};$$

- 列指标所成排列的逆序数满足:

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)+1};$$

证明续. 这表明，在上述对换 a_{kj_k} 与 a_{lj_l} 的过程中，行指标的逆序数加上列指标的逆序数的奇偶性保持不变。由此得到

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)+\tau(12\cdots k \cdots l \cdots n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_l j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_l \cdots j_k \cdots j_n)+\tau(12\cdots l \cdots k \cdots n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}.$$

证明续. 由此，经过有限次对换，我们得到

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$