第二章、Geogebra几何画板

1. GeoGebra入门

1.1 GeoGebra 界面与基本操作

1.1.1 介绍界面和基本操作

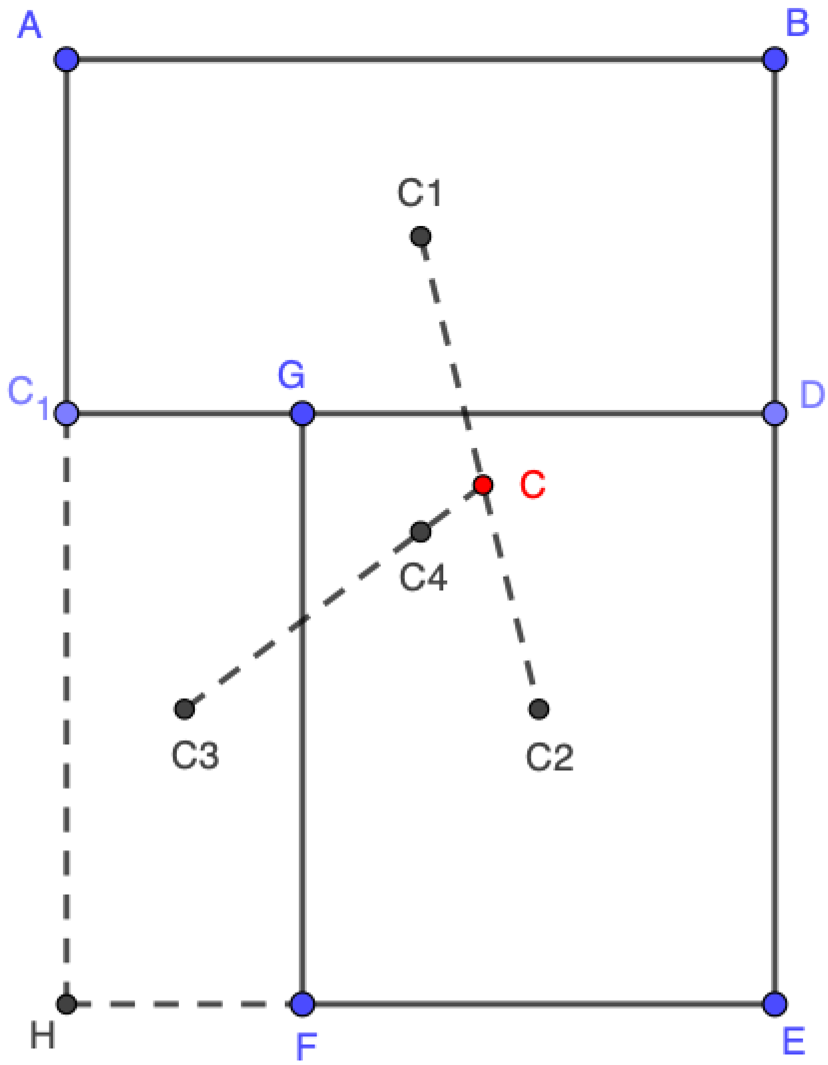
- **GeoGebra的安装**：在线版本、离线安装。已知问题：GeoGebra6 classical 在Mac中存在首次启动后，不能将窗口前置显示的问题。建议使用GeoGebra 5经典版。
- **GeoGebra的基本界面**：如何隐藏/显示坐标轴、网格、标签；如何保存、导出文件。
- **GeoGebra的基本操作**：使用工具构造各种几何对象，并观察代数区域。

1.2 绘制基本几何图形

1.2.1基本图形

- 绘制点、线段、圆、椭圆、抛物线、多边形等；
- 尝试绘制不同的几何图形
- 探索GeoGebra的更多功能

示例: 利用GeoGebra作出两个矩形拼接成的L形图形的重心。



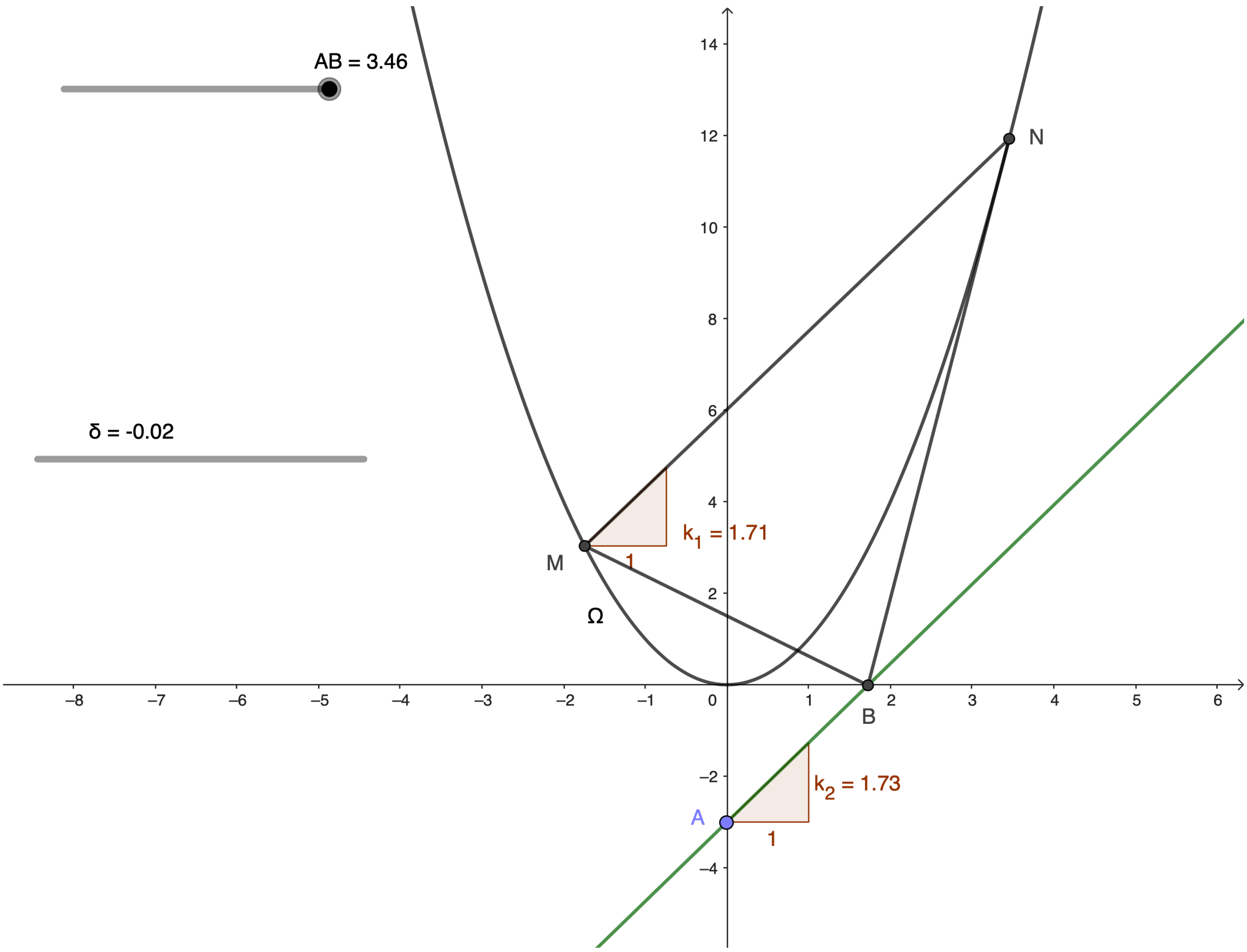
1.3 GeoGebra交互式教学的应用

1.3.1 GeoGebra的基础操作

示例: 2024重庆高中数学联赛初试，第十题

已知抛物线$\Omega: y=x^2$，动线段AB在直线$y=\sqrt{3}x-3$上且B在A的右侧，满足$|AB|=2\sqrt{3}$. 过A作Ω的切线，令左边的切点为M. 过B作Ω的切线，令右边的切点为N. 求当$MN \parallel AB$时，A点的横坐标。

根据题意，利用Geogebra作图如下, [在线版本]。



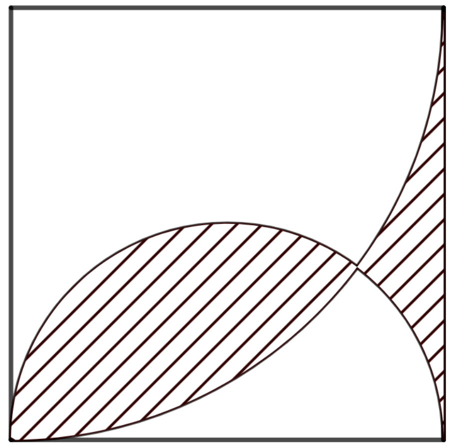
练习:

1. 利用GeoGebra探索上述例子中的答案；
2. 通过将上述二次曲线换成椭圆，你可以得到更加一般的结论吗？
3. (必做!!) 利用GeoGebra作图探索其他数学竞赛试题。
4. (必做!!) **大作业**：参考周向宇院士的论文@周2022中国，利用GeoGebra复原商高关于勾股定理的证明。

1.4 轨迹与阴影

1.4.1 轨迹与阴影

示例: 如图所示，通过先构造一个正方形$ABCD$，然后以AB为直径画半圆弧、以D为圆心画圆弧AC、线段BC构成一个封闭图形。是将该图形利用斜线进行标记。

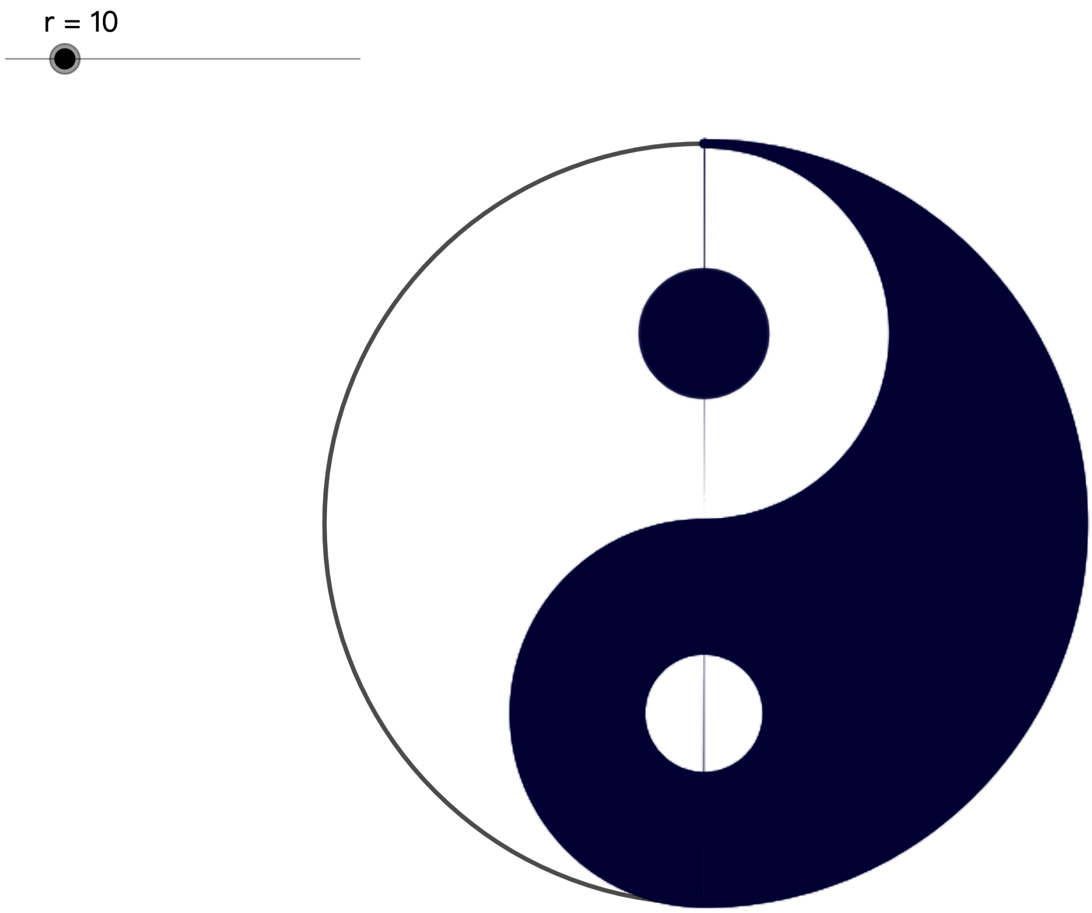


1.4.2 轨迹与阴影（高级）

要点如下:

- 我们利用这三段路径生成了一个列表`l1={c,d,f}`
- 通过`Point(l1)`得到路径上任意的一个点E
- 通过`Locus(E+0,E)`得到点E的轨迹
- 通过设置该轨迹的属性：显示轨迹、颜色、透明度、样式得到效果图。

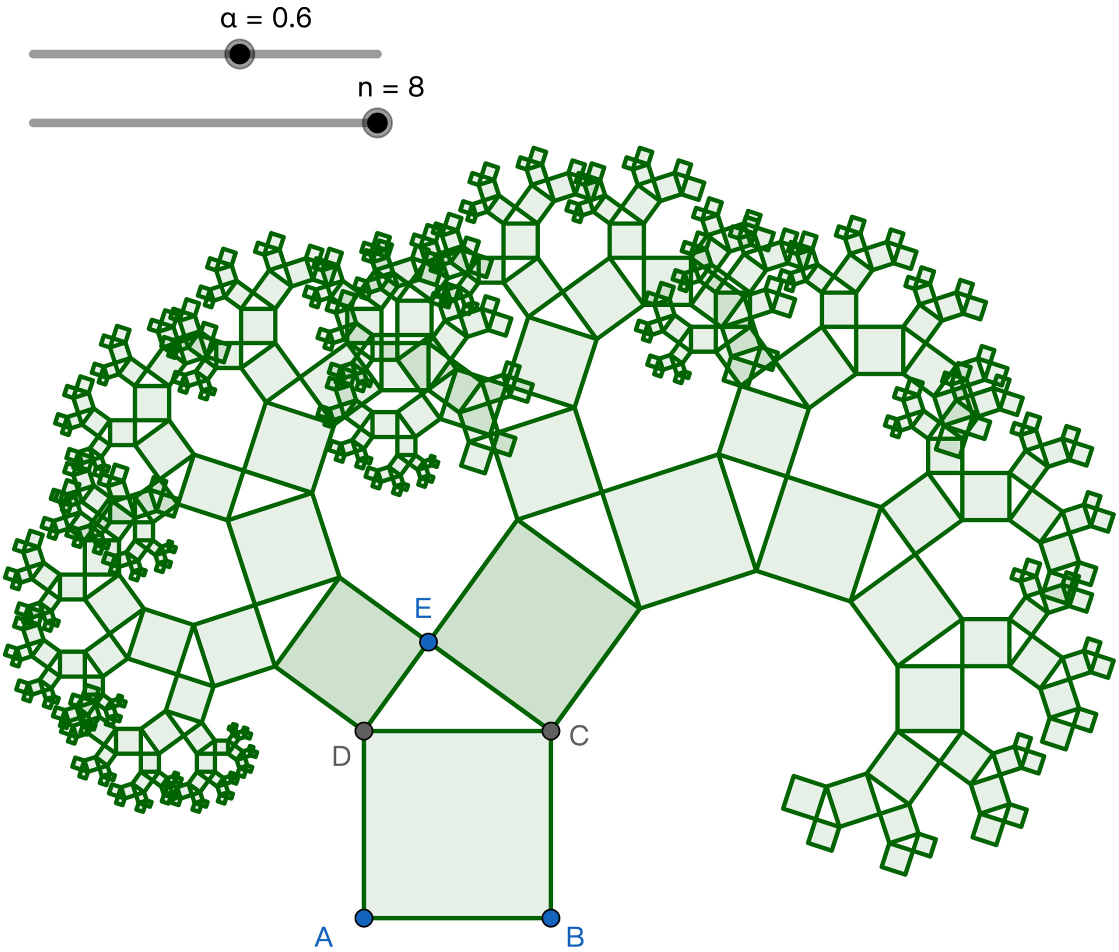
练习: 利用轨迹生成太极图



2 GeoGebra 高级功能

2.1 迭代

2.1.1 GeoGebra迭代生成勾股树



直接利用代数输入区，完成以下操作:

- 设定点 $A=(-8,-30)$, $B=(-2,-30)$;
- 生成以 AB 为底边的正方形;
- 定义参数 α 初始值为 0.6, 范围为 $[0,1]$;
- 以顶点 C,D 为端点画圆;
- 在圆弧上取点 E, 使得它依赖于参数 α;
- 分别以 DE、EC 为底边构造正方形;
- 定义迭代次数参数 n, 范围为 $[2,8]$, 初始值为 6;
- 使用迭代列表生成勾股树。

以下是完整代码：

```
A=(-8, -30)
B=(-2, -30)
p=Polygon(A, B, 4)
alpha=0.6
Semicircle(Vertex(p, 4), Vertex(p, 3))
E=Point(Semicircle(Vertex(p, 4), Vertex(p, 3)), alpha)
pl=Polygon(Vertex(p, 4), Point(Semicircle(Vertex(p, 4), Vertex(p, 3)), alpha), 4)
pr=Polygon(Point(Semicircle(Vertex(p, 4), Vertex(p, 3)), alpha), Vertex(p, 3), 4)
n=8
IterationList(Flatten(Zip({Polygon(Vertex(p, 4), Point(Semicircle(Vertex(p, 4),
Vertex(p, 3)), alpha), 4), Polygon(Point(Semicircle(Vertex(p, 4), Vertex(p, 3)),
alpha), Vertex(p, 3), 4)}, p, P)), P, {{p}}, n)
```

---

1. 根据在线文档，理解上述代码中的 [Flatten]、[Zip]、[IterationList] 命令;
2. 尝试使用迭代列表生成其他分形图像：例如雪花曲线（Koch曲线）、分形二叉树、黎曼积分的上和与下和等。

2.1.2 迭代代码解释

Zip: Zip(<Expression>, <Var1>, <List1>, <Var2>, <List2>, ...)

- 通过将变量 Var 替换为随后的 List，返回 Expression 计算结果后的列表。
- 输入：Zip(a^2, a, {1,2,5})
  结果：{1,4,25}
- 输入：Zip(Midpoint(A, B), A, {P, Q}, B, {R, S})
  结果：PR, QS 之终点列表
- 输入：Zip(Degree(a), a, {x^2, x^3, x^6})
  结果：{2,3,6}
- 输入：Zip(Simplify(a*x^(b-1)), a, {1, 2, 5}, b)
  结果：{1, 2x, $5x^2$}
- 输入：Zip(f(2), f, {x+1,x+3})
  结果：{3, 5}

IterationList: IterationList(<Function>, <Start Value>, <Number of Iterations>)

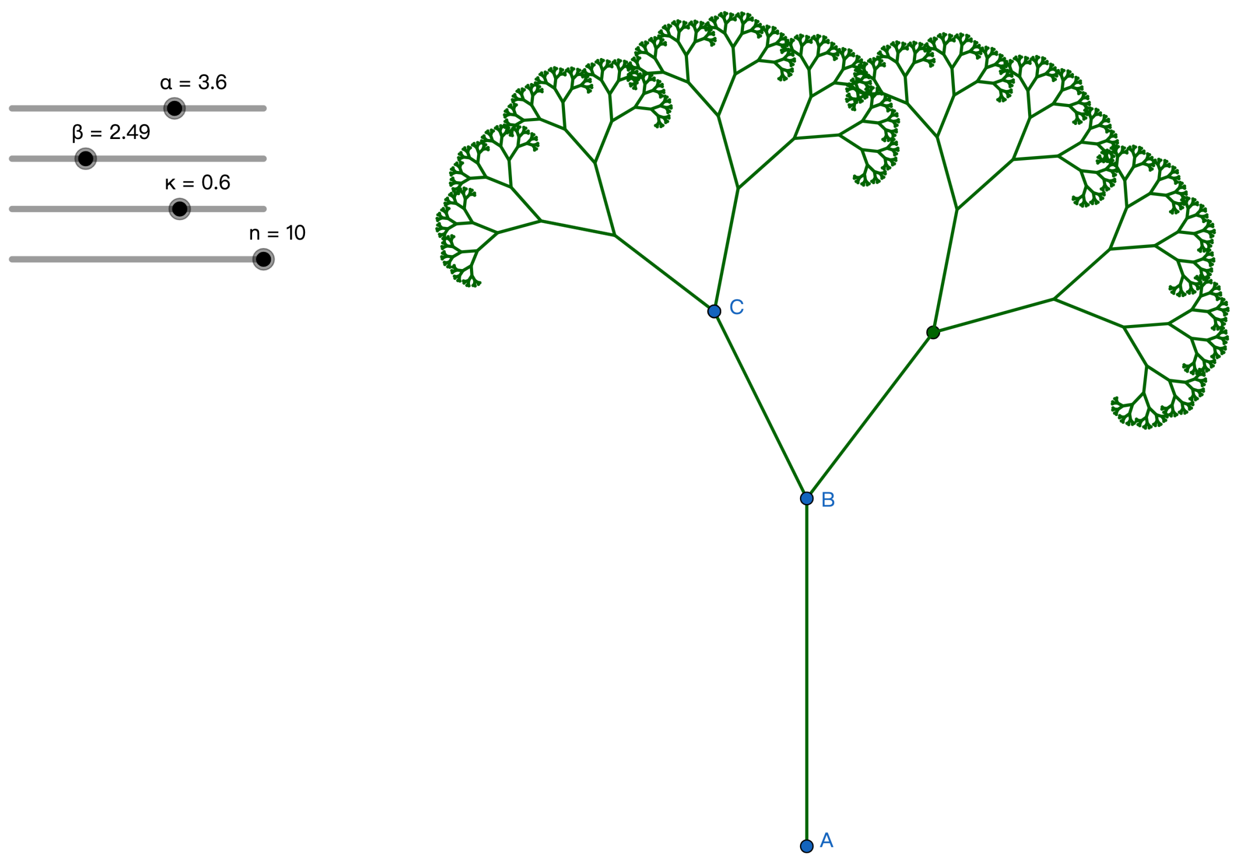
- 重复计算函数的值，返回循环次数加一长度的列表, 列表的第一个元素就是给定的初值。
- 输入：IterationList(a^2+1,1,3)
  输出：{1,2,5,26}

- 输入：`IterationList(a^(2)+b^(2),a,b,{1,1},5)`
  输出：`{1,1,2,5,29,866}`

2.2 分形二叉树

2.2.1 分形二叉树

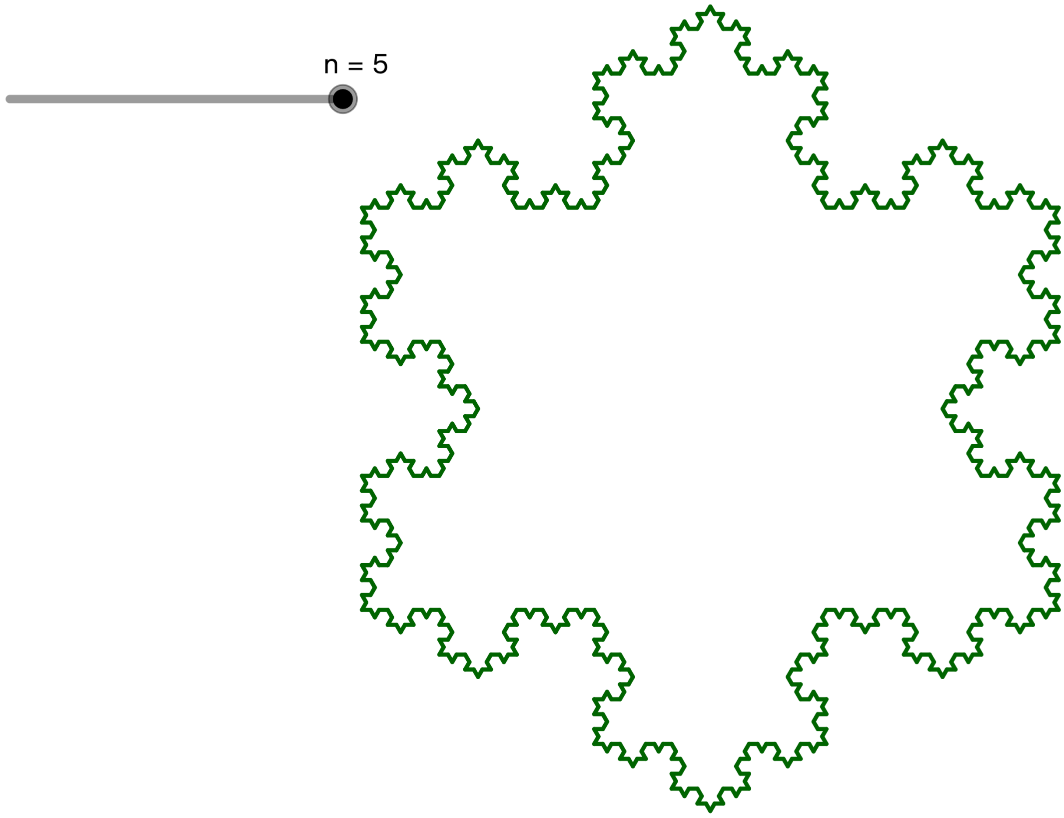
```
A=(50,-50)
B=(50,-10)
f=Segment(A,B)
alpha=2.72
beta=3.73
kappa=0.7
IterationList(Flatten(Zip(Zip(Segment(Point(f, 1), Dilate(Rotate(Point(f, 0), theta,
Point(f, 1)), kappa, Point(f, 1))), theta, {alpha, beta}), f, f1)), f1, {{f}}, n)
```



2.3 Koch曲线

2.3.1 Koch曲线

```
A=(0,0)
B=(21,0)
C=Rotate(B,pi/3,A)
f=Segment(A,B)
g=Segment(B,C)
h=Segment(C,A)
IterationList(
Flatten(
Zip(
Zip(
Sequence(
Segment(Element(l1, u), Element(l1, u + 1)), u, 1, 4
), l1, {
  /*将顶点插入到三等分点序列*/
  Insert(
  /*得到三等分线段的顶点*/
  Rotate(Point(ff, 2 / 3), -pi/3, Point(ff, 1 / 3)),
  /*生成线段ff上的三等分点序列，包括端点*/
  Sequence(Point(ff, v), v, 0, 1, 1 / 3)
  /*3表示插入在序列的第三个位置*/
, 3)}
), ff, f1)
),
f1, {{f, g, h}}, n)
/*最后一个迭代完整代码如下*/
Element( IterationList( Flatten( Zip( Zip( Sequence( Segment( Element( l3, u), 
Element( l3, u+1)), u, 1, 4), l3, {Insert( Rotate( Point( ff, 2/3), -pi/3, Point( ff, 1/3)), 
Sequence( Point( ff, v), v, 0, 1, 1/3), 3)}), ff, f1)), f1, {{f, g, h}}, n), n)
```



2.4 涂色

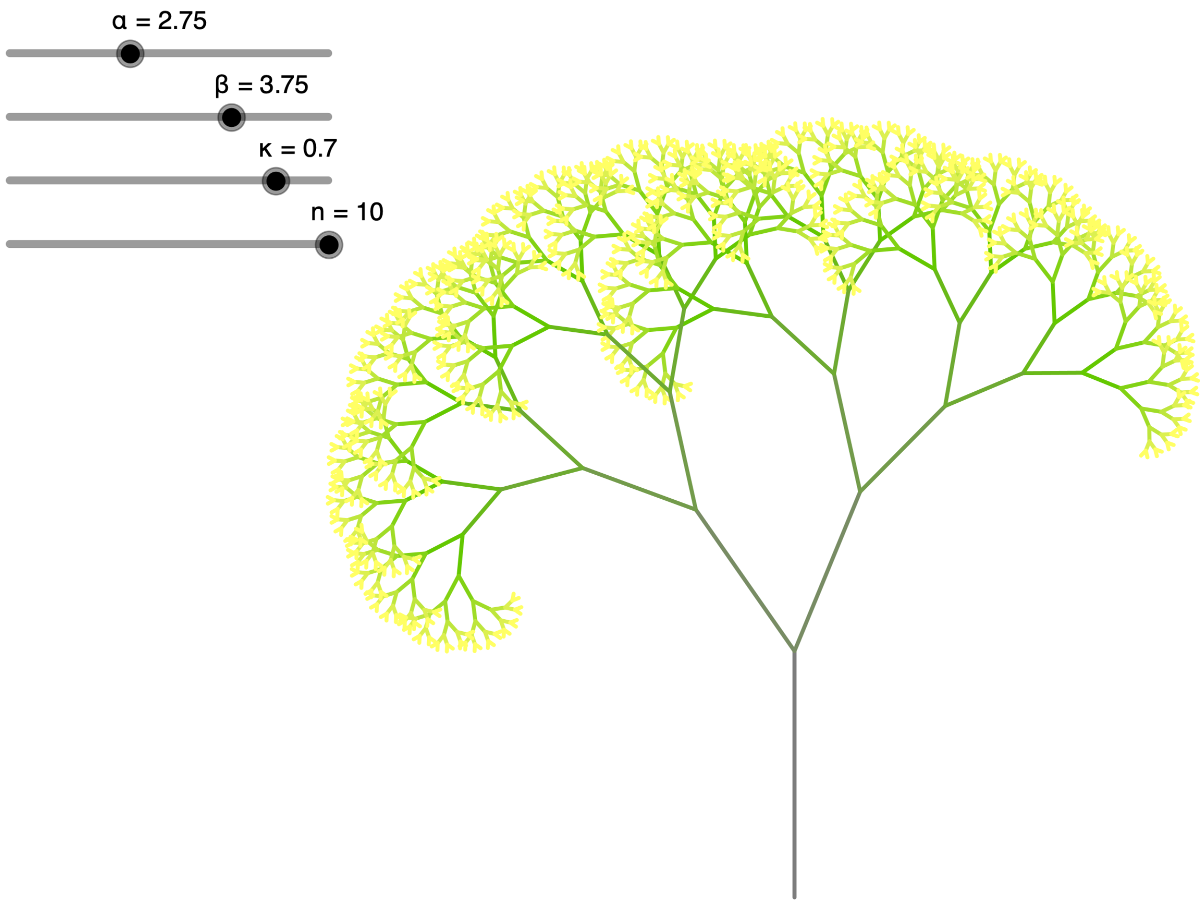
2.4.1 涂色原理

- 考虑上面迭代的例子，其实迭代的最终结果是一个列表，列表的第 k 个元素就是迭代中第 k 步生成的图形。
- 因此，我们可以对每步生成的图形进行不同的染色，这样就得到了渐变色。
- 渐变色的构造如下：利用颜色的 RGB 值，构造一个折线段：

```
/*颜色的RGB/255, 归一化到区间[0,1]*/
h=Polyline((128, 128, 128) / 255, (102, 204, 0) / 255, (255, 255, 102) / 255)
/*此时折线段上的点的坐标就是该点处颜色的RGB值*/
Point(h,0.3)
/*表示整个折线长度的0.3处点的RGB值*/
```

- 动态染色
  - 利用表格，取得迭代列表中第 k 步的元素
  - 根据 k 在折线段上取 $(k-1)/n$ 处的点
  - 根据该点的 RGB 动态染色第 k 步的元素
  - 具体代码如下：

```
/*取元素*/
B1=Element(l2,A1)
/*右键设置该元素属性:高级/动态颜色*/
/*红：x(Point(h, (A1 - 1) / n)) */
/*绿：y(Point(h, (A1 - 1) / n)) */
/*蓝：z(Point(h, (A1 - 1) / n)) */
/*最后下拉填充表格得到B2...Bn的元素*/
```



作业

1. 自行对勾股数等迭代图形涂色。
2. 你能想到涂色的其他应用吗？
3. (必做!!)**大作业**：对 Julia 集

---

3 GeoGebra 在教学中的应用

3.1 教学案例分析

黎曼积分

回忆，给定连续函数$y=f(x)$, $x\in[a,b]$. 我们可以将区间$[a,b]$等分为n等份。然后定义和

$$\bar{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(b-a)\max_{x\in[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}]}f(x),$$
$$\underline{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(b-a)\min_{x\in[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}]}f(x).$$

可以证明$n\to\infty$时，上述$\bar{S}_n$以及$\underline{S}_n$的极限都存在。分别称为函数f的黎曼积分的上和与下和。

3.2 设计互动式教学活动

黎曼和的代码实现

利用GeoGebra可以实现上述动态效果， 完整代码如下：

```
f: y=0.05 x^(3)-3 x+1
A=(-9,0)
B=(9,0)
n=10
Zip(Polygon(u, (x(u), y(Min(f, x(u), x(v)))), (x(v), y(Min(f, x(u), x(v)))), v), u,
Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1), v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n))
Zip(Polygon(u, (x(u), y(Max(f, x(u), x(v)))), (x(v), y(Max(f, x(u), x(v)))), v), u,
Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1), v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n))
b=Sum(Zip(x(((B-A)/(n))) y(Min(f, x(u), x(v))), u, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1),
v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n)))
a=Sum(Zip(x(((B-A)/(n))) y(Max(f, x(u), x(v))), u, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1),
v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n)))
text1=TableText({a,b,c})
text2=TableText({"Upper","Lower","Difference"})
```

3.3 学生作品展示与评价

黎曼积分的代码解释

代码解释如下：

- `l1=Sequence(A+ (B-A)/n*i,i,0,n)`：生成AB线段的n等分点列表。
- `C=Min(f,x(Element(l1,1)),x(Element(l1,2)))`：构造第一个区间的最小值点；
- `D=Max(f,x(Element(l1,1)),x(Element(l1,2)))`：构造第一个区间的最大值点；
- 构造最小值矩形的左、右端点:

```
E=(x(Element(l1, 1)), y(Min(f, x(Element(l1, 1)), x(Element(l1, 2)))))
F=(x(Element(l1, 2)), y(Min(f, x(Element(l1, 1)), x(Element(l1, 2)))))
```

- 构造最小值矩阵:

```
poly1=Polygon(Element(l1, 1), (x(Element(l1, 1)), y(Min(f, x(Element(l1, 1)),
x(Element(l1, 2))))), (x(Element(l1, 2)), y(Min(f, x(Element(l1, 1)), x(Element(l1,
2))))), Element(l1, 2))
```

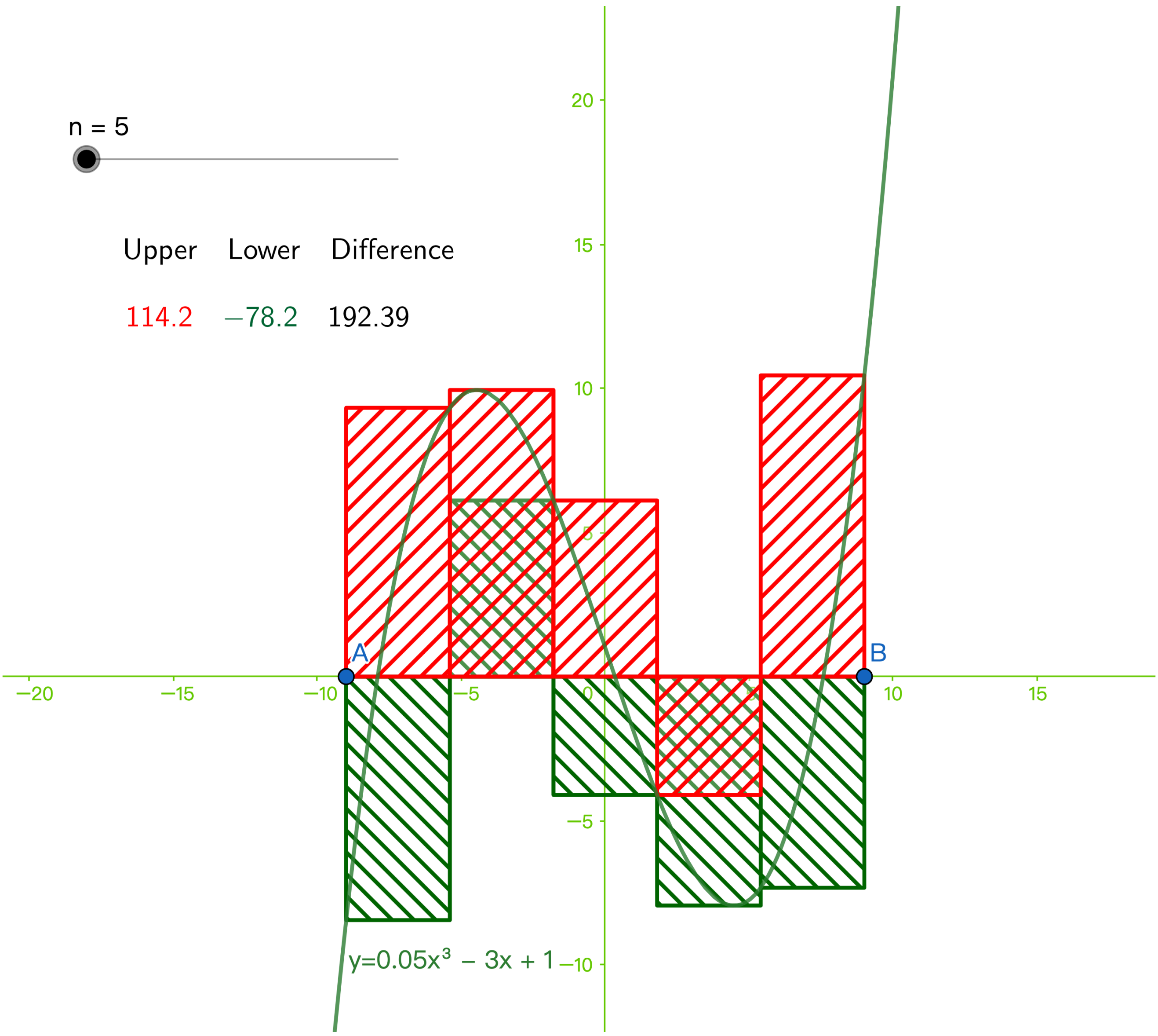
- 利用 `Zip` 构造所有最小值矩阵:

```
l2=Zip(Polygon(u, (x(u), y(Min(f, x(u), x(v)))), (x(v), y(Min(f, x(u), x(v)))), v), u,
Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1), v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n))
```

- 将所有的最小值矩阵的面积求和:

```
b=Sum(Zip(x(((B-A)/(n))) y(Min(f, x(u), x(v))), u, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 0, n-1),
v, Sequence(A+((B-A)/(n)) i, i, 1, n)))
```

黎曼积分-上和与下和


n = 5
Upper
Lower
Difference
114.2
−78.2
192.39
A
B
y=0.05x³ − 3x + 1
−20
−15
−10
−5
0
10
15
20
5
−5
−10