第65卷第4期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.65, No.4
2022年7月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Jul., 2022

DOI: 10.12386/A20220050　　**文献标识码: A**

# 中国古代数学的贡献

周向宇

中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100190
E-mail: xyzhou@math.ac.cn

**摘　要**　本文将阐释与揭示中国古代数学对华夏文明的贡献, 除了对物质文明的贡献, 特别是对国学、语言、文化等的影响与贡献; 中华文化对数学的推崇与影响、中华经典中的数学; 中国古代数学成就及其对现代数学的影响与贡献.

**关键词**　筹算与国学; 勾股定理的商高证明;《愚公移山》的数学; 墨子的半分法; 阿拉伯代数的源泉问题
**MR(2010) 主题分类**　01A25
**中图分类**　O112

## The Contribution of Ancient Chinese Mathematics

Xiang Yu ZHOU

*Academy of Mathematics and Systems Science,*
*Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *P. R. China*
*E-mail*: *xyzhou@math.ac.cn*

**Abstract**　In this article, we elaborate and reveal the contribution of Chinese ancient mathematics to the Chinese civilization, not only to the material civilization, but also to Sinology, Chinese language and Chinese culture; elaborate the respect and influence of Chinese culture on Mathematics and discover mathematics in Chinese Classics; and describe the achievements of Chinese ancient mathematics and disclose its influence and contribution to modern mathematics.

**Keywords**　rod arithmetic and Chinese classics; ShangGao's proof of Gougu theorem; mathematics in "Yu Gong removes mountains"; Mozi's bisection method; source problem of Arab algebra
**MR(2010) Subject Classification**　01A25
**Chinese Library Classification**　O112

毛主席曾说: "许多马克思列宁主义的学者也是言必称希腊, 对于自己的祖宗, 则对不住, 忘记了" (见文 [1]).

收稿日期: 2022-04-22; 接受日期: 2022-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11688101, 12288201)

习近平总书记说: “文化自信是一个国家、一个民族发展中最基本、最深沉、最持久的力量” (2020 年 9 月 8 日, 在全国抗击新冠肺炎疫情表彰大会上的讲话); “坚定文化自信, 是事关国运兴衰、事关文化安全、事关民族精神独立性的大问题”; “坚定文化自信, 离不开对中华民族历史的认知和运用” (2016 年 11 月 30 日, 在中国文联十大、中国作协九大开幕式上的讲话).

华罗庚先生说过, 中华民族是擅长数学的民族. 华先生对中国数学史有深刻见地.

学习与研究数学, 应该重视数学概念和思想的来龙去脉、源与流, 强调数学精神和数学文化, 学贯中西、博古通今, 注重从中西、古今的角度思考问题.

多年来, 作者在研究专业数学之余, 对中国国学、历史、地理、中外数学史颇有兴趣, 并坚持学习与钻研. 本文是作者学习和研究中国古代数学的心得体会与研究成果. 这些年来, 作者在许多场合做过多个科普报告, 如 “数学之魅力”、“筹算与国学”、“从复数谈起”、“中国古代数学的贡献”、“数学的威力” 等, 本文基于这些报告整理而成.

## 1 算筹记数

### 1.1 记数与运算问题

我们先从自然数谈起. 人类在数学上的发展, 首先源于对自然数的认知. 自然数作为基数与序数反映了一一对应、顺序、大小等思想. 在远古时期, 人们需要用各种办法来计数狩猎的收获. 在远古中国, 我们结绳计数, 而在其他文明, 也有垒石计数的 (微积分 calculus 一词的前词根原意就是卵石之意, 引申为垒石计数、计算术). 再到后来, 人们采用书契 (书写符号) 来计数、表示数目, 正如《周易 · 系辞下》所说: “上古结绳而治, 后世圣人易之以书契”. 我认为, 人类所碰到的最早、最重大的数学问题, 便是记数问题及其运算问题: 如何用少量、简洁的符号来表示所有的数, 以及如何对它们进行运算?

### 1.2 十进位值制思想

中国在十进位值制上作出了突出的贡献. 十进制、十进位值制的出现, 和生产力的发展、人口的增长、生活与劳动的需要等是密切相关的: 捕获的猎物增多了, 人口也增加了, 用结绳或垒石来计数, 已经不适应于生产力发展的需求, 所以才逐步发展出了十进制、十进位值制. 在商代的甲骨文中, 出现了叁万多的大数, 这里除了有符号表示一至九外, 还有符号来表示十、百、千、万这些数. 到了周朝, 十进位值制思想得到发展, 建立了以筹记数的方法, 除了有数字 (表示数目一至九的符号, 零用空位、后来发展为用 ○ 表示), 关键是还引进了数位 (数字的位置), 表示十、百、千、万等符号可以省略了, 通过数字的不同位置来表达它们的含义, 这样符号更少、更简洁了. 到了春秋战国时期, 十进位值制在中国已经非常普遍. “筹” 和 “算” 经常出现在东周时期的许多文献里, 如《仪礼》,《老子》,《孙子》,《荀子》,《管子》, 而且, “数” 作为主要学习内容是西周六艺 “礼、乐、射、御、书、数” 教育之一, 这在《礼记 · 内则》有记载.

古代中国通过用 “筹” 来计数引进十进位值制. 比如《墨子 · 经下》说: “一少于二而多于五”, 即 “一” 在个位数时小于 “二”, 但在十位数时却大于 “五”;《墨子 · 经说下》提到: “一: 五有一焉; 一有五焉; 十, 二焉”, 说的就是位值制. 虽然秦朝焚书坑儒 —— 刘徽给《九章算术》作注时指出, 秦朝焚毁了很多书籍, 导致各类经书残缺不全 (“往者暴秦焚书, 经术散坏”), 这也是他写《九章算术注》的一个因素, 但公元四、五世纪的《孙子算经》仍把算筹记数的方式表达得非常明确: “凡算之法, 先识其位, 一从十横, 百立千僵, 千十相望, 万百相当”. 也就是说, 记数的方法, 首先

要判断数字的位置, 个位用纵式, 十位是横式, 百位又用纵式, 千位又是横式, 就这样纵横相间地用算筹来记数. 用纵式和横式符号来表示自然数 1 至 9 的方式可见图 1. 以 2014 的算筹记法为例: 从右往左, 个位用纵式的 4, 十位用横式的 1, 百位是零使用空位, 千位又用横式的 2, 见图. 这显然是十进位值制思想, 是对上述记数问题的一个回答.

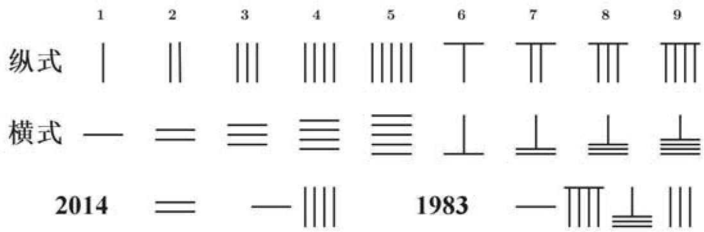


图 1 算筹记数

### 1.3 十进位值制的评述

关于 “十进位值制”, 拉普拉斯曾评价道: “从印度人那里, 我们学到了用 10 个字母来表示所有数的聪明办法, 这个聪明办法, 除了赋予给每个符号以一绝对的值以外, 还赋予了一个位置的值, 这是一种既精致又重要的想法. 这种想法看起来如此简单, 而正因为如此简单, 我们往往并未能足够认识它的功绩. 但是, 正由于这一方法的无比简单, 以及这一方法对所有计算的无比方便, 使得我们的算术系统在所有有用的创造中成为第一流的. 至于创造这种方法是多么困难, 则只要看看下面的事实就不难理解. 这个事实是: 这一发明甚至逃过了阿基米德与阿波罗尼斯的天才, 而他们是古代两位最伟大的人物 (见文 [2]).

《普林斯顿数学指南》中条目 “十进位值制” (decimal place value system) (见文 [3]) 指出, 印度人大约在公元五世纪使用十进位值制, 然而成书于公元四世纪的《孙子算经》就已经很明确地阐明了十进位值制. 更遑论 “筹”、“算” 已广泛见于先秦经典, 而 “筹”、“算” 的首要目的就是计数. 后来注意到, 吴文俊先生其实更早就意识到了这个问题, 他说十进位值制思想最早的创立者应将拉普拉斯说的 “印度人” 改为 “中国人” [4]. 吴先生对中国数学史有重要贡献.

国际上也开始逐渐地承认 [6], 是中国最早创立了十进位值制, 并且在公元前几个世纪, 也就是在印度采用位置记数法的很久之前, 就已开始使用, 是当时最先进的记数系统.

现今沿用印度 - 阿拉伯数字的记数系统, 思想和方法与中国古代十进位值制是一样的, 但符号更简洁、表述更方便, 进一步回答了上面提到的人类遇到的最古老的记数问题. 这里, 印度 - 阿拉伯数字作出了贡献. 现今十进位值制记数系统在欧洲进而在全球普及离不开 Stevin, Napier, Vieta 等人的贡献. 可见, 数学思想的简要表述对数学发展也是十分重要的.

### 1.4 中国古代数学

《汉书 · 律历志》明确地提到了我国古代数学的诸多方面: 推历、生律、制器、规圆、矩方、权重、衡平、准绳、嘉量, 探赜索隐、钩深致远. 其中, “赜” 的意思是深奥、幽深、玄妙、精妙. “探赜索隐、钩深致远” 阐明了科学研究的真谛, 把科学研究的对象、内容与方式以及目标与意义都讲清楚了. 作科学研究就是探赜索隐、钩深致远. 另外, 这里提到的规矩、权衡、准绳、嘉量都属于数学, 包括数学的测量工具及其用途, 比如规是画圆的工具, 矩是画方的工具, 准绳是量平、画直线的工具, 权衡是量轻重的工具. 另外还有钩, 做曲线用.

筹算也是我国古代数学的一个重要组成部分. 所谓的 "筹" (有时又称 "策"、"筹策"、"算筹"), 是指用竹、木、铁、玉、兽骨、象牙等各种材质制成的小棍. 另外, 还有用于盛 (chéng) 装它们的算筹袋和算子筒. 在做筹算时, 将算筹从算袋中取出, 放在桌上、炕上或地上等进行摆弄、运算.

## 2 中国古代数学与国学

所谓国学, 应该是以先秦诸子百家学说为根基的中国传统思想、文化、学术体系. 国学涉及范围广泛, 包括哲学、文学、政治、经济、军事、历史、地理、医学、建筑、书画、音乐等等, 且涉及各个时代.

事实上, 中国文化对数学的严谨、严格、严密, 准确、精确、客观, 非常地推崇. 《淮南子 · 主术训》说: 孔丘、墨翟修先圣之术, 通六艺之论. 国学的奠基者们都精通六艺、通晓筹算, 他们将各自的人文思想用数学命题来进行阐释, 反映了人文精神与数学精神的交融, 体现了中国文化从根基上对数学的尊崇.

### 2.1 古代数学之用

史书记载: 伏羲女娲持规矩; 大禹: 左準绳, 右规矩, 载四时; 奚仲: 造车之父, 利用规矩、准绳造马车.

"勾三股四弦五" 在大禹时期就已经知道了. 《史记 · 夏本纪》记载大禹治水的情形: "左准绳, 右规矩, 载四时, 以开九州, 通九道, 陂九泽, 度九山. "《淮南子 · 修务训》也说: "无规矩, 虽奚仲不能以定方圆; 无准绳, 虽鲁班不能以定曲直." 奚仲发明了轮子, 是中国的造车之父. 如果没有了规矩, 即便是奚仲也确定不了方圆; 如果没有了准绳, 哪怕是鲁班也确定不了直线. 这说明, 我国古代很早就使用准绳和规矩这些基本的数学工具, 并做出重大应用.

### 2.2 古代数学源远流长

周文王演周易; 周武王建周朝, 周公 (儒学奠基人) 制礼乐. 数学教育属六艺 (礼、乐、射、御、书、数) 之一, 据史料记载, 至晚始于西周. 西周造车技术高超, 车辆制造业发达, 而造车相当依赖数学. 刘徽在为《九章算术》作注时说: "按周公制礼而有九数, 九数之流, 则《九章》是矣". 甲骨文中, 已有规、矩等字. 这些都说明, 我国古代数学源远流长.

### 2.3 周公与商高

《周髀算经》记载周公向商高请教天文测量的有关知识: "夫天不可阶而升, 地不可得尺寸而度, 请问数安从出? " 商高告诉他, 关键在于用 "矩". 周公感叹: "大哉言数! 请问用矩之道." 商高则进一步解释, 通过不同的摆放方式, 矩可以实现多种不同的用途: "平矩以正绳, 偃矩以望高, 覆矩以测深, 卧矩以知远, 环矩以为圆, 合矩以为方." 周公称赞说: "善哉!"

《管子 · 七法》里记载了很多管子与数学相关的内容. 管仲所说的七法是指: "则、象、法、化、决塞、心术、计数". 其中, "计数" 包括刚柔、轻重、大小、实虚、远近、多少, 这些问题都与数学相关. 管仲认为, 想要办成大事, 不可不通晓数学: "不明于计数, 而欲举大事, 犹无舟楫而欲经于水险也. 举事必成, 不知计数不可." 此外, 管仲把尺寸、绳墨、规矩、衡石、斗斛、角量称为 "法", 这些也是数学. 管仲说: "不明于法, 而欲治民一众, 犹左书而右息之." 在管仲治理国家时, 数学起了重要作用.

由上述可见, 从伏羲女娲到大禹, 从文、武王到周公、管子, 从中国文化的根基上看, 中国的统治者对数学是十分欣赏、重视的.

## 2.4 孟子的人文思想与数学

《孟子 · 离娄上》说: "离娄之明, 公输子之巧, 不以规矩, 不能成方圆; ··· 尧舜之道, 不以仁政, 不能平治天下". 事实上, "不以规矩不能成方圆" 是一个数学命题 (现在已成为人们常用的格言警句), 孟子以此阐述它的核心人文思想 "仁". 目前人们常说 "规规矩矩做人做事", 反映了数学的影响.

中国文化看重 "圆方", 向有 "天圆地方" 之说. 方圆都是轴对称图形, 又是中心对称图形. 中国古代发明了画圆与方的规与矩.

《孟子 · 离娄上》还说: "规矩, 方圆之至也; 圣人, 人伦之至也." 这里, 孟子把数学命题和他的人文思想交融为一体, 在他的著作中还能找到许多其他类似的比较、阐述. 以下仅举几例:

《孟子 · 离娄上》: 圣人既竭目力焉, 继之以规矩准绳, 以为方圆平直, 不可胜用也; ··· 既竭心思焉, 继之以不忍人之政, 而仁覆天下矣.

《孟子 · 梁惠王上》: 权, 然后知轻重; 度, 然后知长短. 物皆然, 心为甚.

《孟子 · 告子上》: "羿之教之射, 必志于彀, 学者亦必志于彀; 大匠诲人, 必以规矩, 学者亦必以规矩."

《孟子 · 尽心上》: 公孙丑曰: "道则高矣美矣, 宜若登天然, 似不可及也. 何不使彼为可几及, 而日孳孳也." 孟子曰: "大匠不为拙工改废绳墨, 羿不为拙射变其彀率, 君子引而不发, 跃如也, 中道而立, 能者从之."

《孟子 · 尽心下》: "梓匠轮舆, 能与人规矩, 不能使人巧."

这些, 都需要对数学有准确的认识, 才能更好地理解其意.

## 2.5 墨子的人文思想与数学

墨子是一位百科式科学家. 《墨子 · 经上》说: "圜, 一中同长也." 圆就是有一个中心到具距离等长的图形. 圆可以用规来实现, 所谓 "圜, 规写交也" (用规写画的终点与始点相交合的封闭轨迹). "方, 柱隅四权(讙)也" (方形即四边四角相等的平面四边形. 柱: 边. 隅: 角. 权: 均衡、平衡、平均, 这里意味着相等. 另外《考工记》中: "九和之弓, 角与干权" 的 "权" 也是此意), "方, 矩见交也" (用矩尺画出相交的封闭图形), 方可以用矩来实现, 这是墨子的公理化定义. "有穷"、"无穷" 是墨家的常用术语. 他给出了力的定义, 认为力是使物体运动变化的原因; 认识到了重力、杠杆原理; 还做了世界上第一个小孔成像的实验, 证明光沿直线传播.

《墨子 · 法仪》还说: "百工为方以矩, 为圆以规, 直以绳, 衡以水, 正以县. 无巧工不巧工, 皆以此五者为法." 无论是巧匠还是一般工匠, 都要遵从相同的客观准则, 说明墨子已经认识到了数学的客观性, 以此强调法度的重要性.

墨子的核心人文思想是 "天志" (天的意志). 《墨子 · 天志上》说: "我有天志, 譬若轮人之有规, 匠人之有矩, 轮匠执其规矩, 以度天下之方圆. 曰: 中者是也, 不中者非也." 墨子把以规矩定方圆, 比喻为判断是非, 显然他对数学的精确和严谨是十分推崇的. 后文《墨子 · 天志中》还说: "是故子墨子之有天之, 辟人无以异乎轮人之有规、匠人之有矩也." 墨子把天志思想和数学命题

联系对应起来."中吾规者谓之圆, 不中吾规者谓之不圆, …… 中吾矩者谓之方, 不中吾矩者谓之不方." 判别圆和方的规则都很明确, 这些思想方法都来自数学.

### 2.6 荀子的人文思想与数学

荀子的一个核心人文思想就是 "礼". 《荀子·王霸》说: "礼之所以正国也, 譬之, 犹衡之于轻重也, 犹绳墨之于曲直也, 犹规矩之于方圆也, 既错之而人莫之能诬也." 这充分反映了荀子对数学的推崇.

《荀子·礼论》: "故绳墨诚陈矣, 则不可欺以曲直; 衡诚县矣, 则不可欺以轻重; 规矩诚设矣, 则不可欺以方圆; 君子审于礼, 则不可欺以诈伪."

我们知道, 有了绳墨就不可欺以曲直, 有了衡 (秤) 就不可欺以轻重, 有了规矩就不可欺以方圆, 这些都是数学道理. 荀子以此来说明 "礼" 的重要性.

同样地, 《荀子·礼论》接着说: "君子审于礼, 则不可欺以诈伪. 故绳者, 直之至; 衡者, 平之至; 规矩者, 方圆之至; 礼者, 人道之极也." 荀子从绳、衡、规矩这些数学知识, 引申到他的核心人文思想 "礼". 只有对数学的 "之至" 理解透彻了, 才能透彻理解其人文的 "之极".

### 2.7 管子的人文思想与数学

管仲治理国家时应用了数学, 他的人文思想也是用数学语言来表征的. 《管子·法法》说: "规矩者, 方圆之正也, 虽有巧目利手, 不如拙规矩之正方圆也 ……, 故虽有明智高行, 倍法而治, 是废规矩而正方圆也." 这里, 管仲用数学语言来阐释背法而治的后果.

《管子·形势解》: "奚仲之为车器也, 方圜曲直皆中规矩钩绳, 故机旋相得, 用之牢利, 成器坚固. 明主, 犹奚仲也, 言辞动作, 皆中术数, 故众理相当, 上下相亲. 巧者, 奚仲之所以为器也, 主之所以为治也."

"以规矩为方圜则成, 以尺寸量长短则得, 以法数治民则安."

《管子·七臣七主》: "法律政令者, 吏民规矩绳墨也. 夫矩不正, 不可以求方; 绳不信, 不可以求直."

### 2.8 韩非子的人文思想与数学

韩非子也是法家的代表人物, 他十分推崇 "法术", 他也借用规矩、尺寸等数学语言来阐述 "法", 他的数学思想和人文思想是交融在一起的. 韩子引绳墨, 切事情, 明是非.——《史记·老子韩非列传》.

《韩非子·用人》: "释法术而任心治, 尧不能正一国; 去规矩而妄意度, 奚仲不能成一轮; 废尺寸而差短长, 王尔不能半中. 使中主守法术, 拙匠守规矩尺寸, 则万不失矣."

《韩非子·饰邪》: "夫悬衡而知平, 设规而知圆, 万全之道也. …… 释规而任巧, 释法而任智, 惑乱之道也."

### 2.9 法律与数学

唐代吴兢的《贞观政要·公平》提到: "法, 国之权衡也, 时之准绳也"; 《淮南子·主术训》说: "法者, 天下之度量, 而人主之准绳也". 目前我国的法徽、人民法院院徽含有权衡; 时至今日, 我们仍说 "以法律为准绳", 可见古代数学的影响. 度量、权衡、准绳都是数学, 被用于法律. 反映了中国文化对数学严谨、规范、精确的推崇.

### 2.10 先贤们的数学观

先贤们为什么重视数学? 先贤们显然希望自己的学说无论在哪里用、在什么时候用、谁来用, 都有一致性, 不会因地、因时、因人而异, 能反映客观性、普适性. 而数学的一个重要特点就是客观性与普适性, 数学命题具长期生命力, 其正确性不会因时因地因人而改变. 这也是为什么先贤们建立的学说直到今天仍有强大的生命力. 这反映出中国文化对数学思想、方法、能力的看重.

### 2.11 筹算与语言

筹算对中国语言有很重要的影响. 我认为, 像运筹帷幄、技高一筹、略胜一筹、一筹莫展等成语, 都源自于筹算. 运字特征: 运的对象从一处到了另一处, 发生了位移. 筹算的过程是把算筹从袋中取出, 移到桌上进行运算, 这正是运筹. "运筹帷幄", 字面意思是说在军帐里进行筹算, 进而引申为在战斗中进行谋划、策划. 在我看来, "技高一筹"、"高出一筹" 和 "略胜一筹" 的本意, 并不是比较两人的筹码多少, 而是比较两人的筹算能力, 你会把筹摆弄在正确的位置上, 也就是你的筹算能力更强, 你就 "技高一筹"、"高出一筹" 或 "略胜一筹". "展" 字特征: 展的对象展前没看见, 展后看见了. 算筹本是放在袋中的, 没看见, 做筹算时需把算筹取出, 摆在桌上演算, 就能看见了, 所以做筹算就是一个展筹的过程. "一筹莫展" 是说, 做筹算时连算袋里一根筹都拿不出来摆在正确的位置, 说明完全不会做, 比喻一点办法都想不出, 一点计策也施展不了.

此外还有很多与算筹有关的词语, 例如统筹、筹款、筹办、筹备、筹措、筹划、筹集、筹建、筹借、筹码、筹谋、筹拍、筹商、筹资、筹组等等. 简简单单、随随便便的办理不能称为筹办, 筹办得要是有谋划、有思考、动了脑筋的办理.

数学对中国语言的影响还有很多例子. 比如建筑工匠、尤其是泥木工需要使用数学工具, 离开了 "准绳" 便无法工作, 所以 "准绳" 后来被引申为必须遵守的法规.

如今的许多词语都与数学中的准绳有关, 例如: 准则、准确、准时、准保、标准、水准、准点、准信、准数、对准、瞄准、保准、放之四海而皆准, 绳正、绳之以法、绳墨之言、绳愆纠谬.

再比如常规、规则、规范、规定、萧规曹随、循规蹈矩, 上策、献策、策划、策反、策应、策动、束手无策、出谋划策, 权衡、权度、衡量、衡定 (评定) 等词语, 也都源自于数学中的规、矩、策、权、衡等.

### 2.12 《周易》中的数学

《周易》记载: "上古结绳而治, 后世圣人易之以书契." 从结绳计数到符号计数, 《周易》可谓是二进制的滥觞, 书中显现了对称和对偶的思想. 比如阴和阳. 上述提到的 "探赜索隐, 钩深致远" 也是出自《周易》. 《周易》对中国哲学的发展起到了重要的作用, 是一部具有科学思想的深刻巨著.

### 2.13 老子的人文思想与数学

老子的《道德经》说 "负阴抱阳", 这其实蕴含了深刻的数学原理, 用现代的数学语言来说就是: 阴和阳两个元素构成一个有限群, 运算不必只作用于数上. 另外, 将 "阴阳" 换成 "负正", 这句话即蕴含了 "负负得正" 的思想. 所以说, 中国古代文化发现了第一个有限群 ($Z_2$).

老子在《道德经》中说: "道生一, 一生二, 二生三, 三生万物." 此外他又说: "善数不用筹策." 上面已提到我国用筹策和十进位值制来计数. 老子显然深入思考了计数问题, 不用筹策, 即不用

十进位值制. 结合这两句话来看, 其实可以看出老子认为三进位值制也可计数, 也是“善数”. 所以, 我认为, 老子是三进位值制的创立者. 事实上, 三进制对中国的传统文化有很大影响, 比如祭祀时供奉三碗米饭、点三根香、洒三杯酒、还有三鞠躬.“三” 已经代表了万物, 代表了祭祀者的所有哀思和缅怀. 此外还有军事上的 “三三制” 等. 目前朋友圈时兴点赞, 有些人点 4 个、5 个乃至一串大拇指, 我以为不如按老子的思想点三个, 以此代表完全赞同.

## 3 中国古代数学的成就

### 3.1 代数思想

中国古代很早就有了零的思想, 比如在筹算中用空位表示零. 零不仅指各个数位上的零 (用空位表示, 后用圆圈 O), 也包括运算结果中的零. 中国古代很早就引进了负数, 在《九章算术》里就很明确地引进了负数、加法的逆运算减法及其运算规则 (交换律、结合律), 乘法的分配律, 乘法的逆运算及分数及其运算律, 这是数学发展中的一个里程碑. 所以说, 中国古代数学最早认识、发现、引进了第一个无限群、环、域 (整数群、整数环、有理数域); 另外还引进了矩阵 (matrix), 发现了消元法 (Gaussian elimination), 解决了线性方程组求解问题 (Cramer's Rule for system of linear equations).

《九章算术》是一部十分重要的数学著作, 总结了战国、秦、汉时期的数学成就, 西汉的张苍、耿寿昌等曾经做过增补和整理, 后来刘徽给它作了注解. 虽然最后成书于东汉前期 (公元一世纪左右), 但许多内容显然早已存在于先秦. 这从刘徽为《九章算术》作的注就可看出. 负元 (逆元)、逆运算及其运算规律的引进使得运算变得方便灵活, 完满解决了运算问题, 为抽象代数的产生奠定了基础. 对其意义与价值, 套用拉普拉斯关于十进位值制的话来评价是不过分的.

### 3.2 天元术

中国古代数学用算筹计算圆周率, 开平方根、立方根和更高次的根, 对多项式方程进行数值求解. 此外, 中国古代数学还引进了未知量 “天元”, 国家自然科学基金有一个 “数学天元基金”, 就是为了纪念中国古代引进了变量、未知量、待定量. “宋元四杰” 李冶、秦九韶、杨辉、朱世杰建立、整理和发展了天元术, 而到了朱世杰时期已经发展成为了天、地、人、物四个变元.

在宋元四杰时期 (大约为十三、十四世纪), 中国数学的发展达到了一个高峰, 比如十进分数. 比如秦九韶的大衍求一术 (1247 年), 这个结果被称为中国剩余定理 (高斯后来重新发现). 又比如高次方程的数值解法, 也是秦九韶基于很多古代数学家的贡献发展总结而来的. 西方在 19 世纪重新发现这个方法, 并称为霍纳方法 (Horner's scheme), 在前苏联编撰的《数学百科全书》的相应条目 “Horner's scheme” 里, 明确地指出霍纳方法其实就是秦九韶的方法.

### 3.3 极限思想

再来谈谈中国古代的极限思想. 《庄子 · 天下》有句惠子名言: “一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.” 第一天取木棰长度的 1/2, 第二天取 1/4, 到了第 $n$ 天取 $1/2^n$, 万世都不会穷尽. 写成式子, 即

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

后面必然需要省略号 “$\cdots$”.

另外,《墨子 · 经下》有句话的意思是说, 一条线段从中点分为两半, 取其一半再破成两半, 仍取一半继续分割, 直到不可分割时就只剩一个点. 《墨子 · 经下》: “非半弗𣂪, 则不动, 说在端.” 这里,𣂪(zhuó) (注: 有的书也用斫) 意指: 用刀斧砍.《经说下》曰: “非𣂪半, 进前取也. 前则中无为半, 犹端也. 前后取, 则端中也. 𣂪必半, 毋与非半, 不可𣂪也”. 墨子的半分法体现了 (事实上等价于) 区间套原理. 半分法可以用来证明数学分析里的几个重要、被认为有难度的定理. 比如证明致密性定理、聚点定理、有限覆盖定理, 还有连续函数的零点存在定理、Henstock–Kurzweil 积分中的基础 —Cousin 引理 (对闭区间 $[a,b]$ 上的任一正函数 $\delta$, 总存在闭区间的 $\delta$- 细度分划 ($\delta$-fine Perron partition)) (HK 积分仅对黎曼积分做些许改动, 就蕴含了勒贝格积分), 其实用的都是墨子的半分法.

另外, 惠子的取半、墨子的半分及王尔的半中说明古人应该很早就会用尺规平分线段.

刘徽和祖冲之的 “割圆术” 也蕴含了极限的思想. 祖率 (密率)

$$\pi \approx 355/113$$

是非常巧妙的. 祖冲之和他的儿子祖暅编写了《缀术》, 这本书是唐朝算学科最难的课本. 祖暅原理 “幂势既同, 则积不容异”, 就是说: 如果两个立方体的所有等高的横截面积全都相等, 则它们的体积必相同 (这里 “既” 是 “全、都” 之意). 这在微积分里被西方称为卡瓦列里 (Cavalieri) 原理. 祖暅用其原理求出 “牟合方盖” 的体积, 进而得出球体积, 解决了刘徽遗留问题.

《缀术》代表了当时数学的最高水平, 但 “学官莫能究其深奥, 是故废而不理”, 这本书最终失传了, 这是十分遗憾的事情. 在我看来, 《缀术》蕴含极限思想, 光从书名来看, “缀” 就有连续的含义.

明朝数学家王文素及其《算学宝鉴》对数学有重要贡献, 比如对于 17 世纪微积分创立时期出现的导数, 王文素在 16 世纪已发现并使用.

上述成就当然是基础数学的成就, 只是中国古代数学的一小部分.

## 4 《愚公移山》新解

下面谈谈《愚公移山》这个经典寓言故事里包含的数学思想.

我们过去读《愚公移山》的时候都知道这个故事诠释了不怕困难、迎难而上、坚韧不拔、坚持不懈、持之以恒的精神与思想, 当然这是最基本的含义.

### 4.1 愚公与协商精神

除此之外, 我认为愚公事实上是开协商之先河. 我在全国政协小组发言时, 委员们也非常赞同, 认为这是一个新解. 愚公在移山前, 组织大家协商讨论, 并不搞一言堂, 而是 “聚室而谋”; 也不搞形式主义, “其妻献疑”, 还采纳了妻子的合理建议. 所以《愚公移山》生动诠释了有事好商量、众人的事众人商量、不搞形式主义、真协商、协商于决策之前、决策基于科学等协商精神.

### 4.2 愚公的数学思想

智叟嘲笑愚公不自量力, 愚公则回答说: “虽我之死, 有子存焉, 子又生孙, 孙又生子, 子又有子, 子又有孙, 子子孙孙, 无穷匮也, 而山不加增, 何苦而不平? ” 愚公的回答其实蕴含了深刻的数学思想, 前半部分定义了自然数, 并且认识到了自然数的加法及其运算规律, 有穷与无穷、常量

与变量的辩证关系; 后半部分则是阿基米德原理. 所以说, 愚公的移山决策不是主观决策, 而是基于数学原理的.

### 4.3 愚公子孙模型

愚公回答的前半部分, 定义了自然数及其加法, 也认识到了自然数的无穷性. 我们来构建自然数的愚公子孙模型. 愚公子孙的辈分集与自然数集构成了一一对应 (对辈分集可自然引进加法与减法), 并且这个对应保持代数运算. 这里的辈分集是愚公子孙的等价类所构成的集合, 愚公的两个后代称为等价, 当且仅当这两个后代是同一辈分. 假设愚公本人对应于 0, 其子辈对应于 1, 其孙辈 (即子之子辈) 对应于

$$1+1=2.$$

依次类推, 可以定义自然数的后继数: 设愚公某后辈对应于 $n$, 则该后辈的子辈对应于 $n+1$. 往后数辈分得加法, 往前溯辈分得减法.

我们用愚公子孙模型来表述加法交换律. $1+2$ 对应于子辈之孙辈, 即曾孙辈, 而 $2+1$ 对应于孙辈之子辈, 也是曾孙辈, 所以

$$1+2=2+1.$$

一般地, 愚公 $X$ 世孙之 $Y$ 世孙, 也是愚公 $Y$ 世孙之 $X$ 世孙, 这样就得到交换律 $X+Y=Y+X$. 用愚公子孙模型也可以阐释加法结合律. 考虑 $1+1+1$ 三个数相加, 前两者相加可得 $2+1$, 后两者相加则得 $1+2$. 已经证明 $1+2=2+1$, 故

$$(1+1)+1=1+(1+1).$$

这就是结合律.

习知, 19 世纪末皮亚诺提出 (5 条) 皮亚诺公理来构造自然数的算术系统. 在我看来, 愚公子孙模型更加简介、生动和自然, 只需两个公理:

(1) 存在始祖愚公.

(2) 愚公家族血脉流淌, 即愚公家族的任一辈 (代) 均有子辈.

这个模型反映了自然数作为基数与序数的特点. 这个模型蕴含归纳公理, 反映了数学归纳法原理, 一个关于愚公家族的命题对世世代代 (所有辈分) 都成立, 只需: 1、命题对愚公成立; 2、若命题对愚公家族某代成立, 则对其子辈也成立. 比如愚公家族世世代代爱劳动, 只需知道: 1、愚公爱劳动; 2、若愚公家族某一辈爱劳动, 则其子辈也爱劳动.

### 4.4 愚公原理

愚公说: "子子孙孙, 无穷匮也, 而山不加增, 何苦而不平? " 假设太行、王屋二山的土石方量为 $b$, 假设愚公家族每一代能挖的土石方量至少为 $a$. $b$ 非常大, 但山不加增, 所以 $b$ 是一个常数. $a$ 可能非常小, 但它总大于 0, 一代人能挖 $a$, $n$ 代人就能挖 $na$. 因为子子孙孙无穷匮, $n$ 是变数, 可以趋于无穷大."何苦而不平" 是说, 总可以找到自然数 $n$, 使得

$$na>b.$$

这个结果在教科书里通常被称为阿基米德原理. 可见, 愚公的思想是深刻的.

### 4.5 愚公数学思想的扩充

有趣的是, 愚公子孙模型还可以扩展为祖孙模型. 愚公祖孙的辈分集与整数集构成了一一对应, 并且保持代数运算; 负数是有意义的, 小的数可以减大的数. 如何定义负整数和减法呢? 愚公对应于 0, 他的父辈对应于 $-1$, 他的祖父 (父辈之父辈) 则对应于 $-1-1=-2$. 如果愚公的某祖辈对应于 $-n$, 则该祖辈之父辈对应于 $-n-1$, 这样就可以定义减法. 中国古代数学很早就认识并使用负数, 而西方长期不承认负数、认为小数不可以减大数. 愚公的孙子的曾祖是愚公之父, 对应于 $2-3=-1$, 这就是小数减大数, 有鲜活的意义. 愚公的曾祖的孙子也是愚公之父, 对应于 $-3+2=-1$, 因此交换律仍然成立. 结合律的证明同理.

### 4.6 《愚公移山》的浪漫主义

愚公的坚持不懈感天动地, 感动上天. 愚公受上天助力, 移山成功. 小时候读到这时, 觉得这是不是迷信. 后来做数学, 思考数学问题, 费时长久, 还是未能攻破, 但依然久久为功、坚持不懈, 到某时不知何故却豁然开朗, 灵感出现, 终攻破难题, 真是天助也. 常言道 "天道酬勤" 也许就是在诠释这种现象吧.

### 4.7 愚公开辟克难学

我认为愚公开启了计量克难学. 记愚公家族到第 $n$ 代的克难量为 $f(n)$, 则有愚公克难公式

$$f(n)=na.$$

《愚公移山》有现实意义:

**例子 1** 学前儿童面对中学、大学学习内容, 犹如愚公碰到大山一样, 困难当然很大. 可是只要学生在小学、初中、高中各个阶段, 每学年、每学期都按部就班完成学习任务, 坚持不懈, 就能完成学业.

**例子 2** 实现 GDP 大幅增长的长期宏伟目标, 看起来困难很大, 但只要我们不怕困难, 迎难而上, 按部就班完成每年计划、五年规划, 坚持不懈, 就能实现目标.

愚公克难公式是线性的. 愚公的感天动地, 可以认为他得到非线性量的帮助, 所以这时有

$$f(n)=na+f_1(n),$$

这里 $f_1(n)$ 是非线性量或突变量. 这反映出量变到质变的道理、突变发生的现象.

有时困难量不是常量, 这时情况复杂. 记困难函数为面临的困难量、克难函数为克服困难的力量, 它们涉及的变量、因素多. 战略上藐视困难: 相当于说, 困难函数 $g(t)$ 相比于克难函数 $f(t)$ 是无穷小量, 可写成 $g(t)=o(f(t))$, 即困难函数与克难函数之比趋于零. 为了做到这, 就需在战术上重视困难, 比如采取措施使困难函数成有界函数, 让克难函数成单增无界函数.

## 5 勾股定理与割补术

### 5.1 《周髀算经》中的勾股定理

下面来谈谈勾股定理. 《周髀算经》中说: "若求邪至日者, 以日下为勾, 日高为股, 勾股各自乘, 并而开方除之, 得邪至日." (见文 [5]). 这里的 "邪至日" 是指 "弦". 这句话是说, "勾" 的平方

加“股”的平方再开平方就得到“弦”. 我们将很明显地看到中国古代的数学思想已经把数和形统一起来、把几何与代数交融起来.

### 5.2 商高的勾股定理证明

《周髀算经》开篇描述了周公与商高的对话, 其中有这样一句: “既方之, 外半其一矩, 环而共盘, 得成三四五.” 我认为这句话其实给出了勾股定理的严格证明.

直角三角形的短边称为“勾”、长边称为“股”、斜边称为“弦”. “既”是全、都的意思, 所谓“既方之”, 就是以勾、股、弦为边, 都作一个正方形 (见图 2 (1) 和 (2)).

接着在“股方”中构造一个勾股矩形, 而“外半其一矩”是指沿着对角线将矩形分为两半 (《周髀算经》中的“折矩”), 取外面那个勾股形 (见图 2(2)).

再将所取的勾股形环绕起来, 形成刚才以弦为边作成的方形盘, 这就是“环而共盘”(见图 2(3)). 习知, 这个图是 2002 年国际数学家大会 (ICM 2002) 的会标. 方盘的面积就是“弦方”.

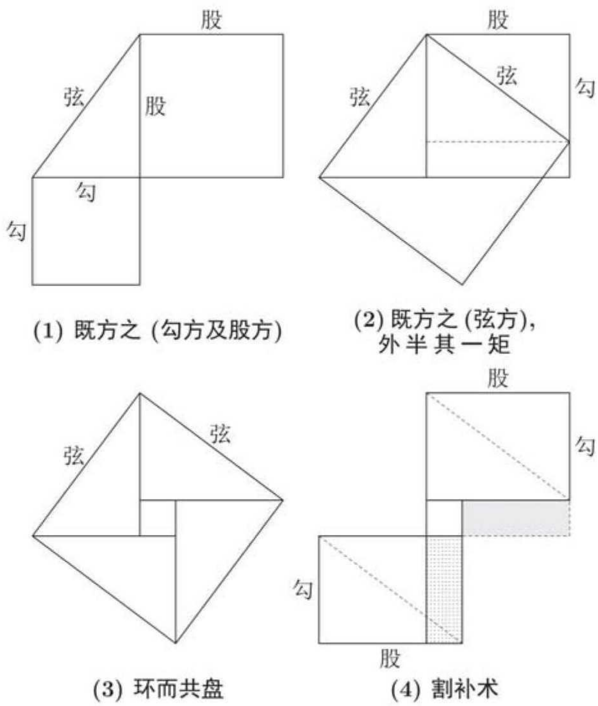


图 2 勾股定理的商高证明

显然, “弦方”由四个勾股三角形和中间的小正方形 (勾股之差自相乘, 称为中黄实) 构成 (见图 2(3)).

把中黄实的右边 (“股方”右下角) 着浅黑色的矩形割补到中黄实的下边 (“勾方”的右侧) 着点阵黑色的矩形 (见图 2(4)). 图 2 中各步只画关键图形部分.

一割一补, 割前补后面积不变. 割前是“勾方”加“股方”, 补后是中黄实加上四个勾股三角形 (《周髀算经》中的积矩), 即“勾方”加“股方”就等于中黄实 (小正方形) 的面积加上四个勾股三角形的面积; 这一割补法顺带给出了完全平方差公式 (勾股之差自相乘与两倍勾股积的和等

于勾方加股方). 而“弦方”由中黄实加上四个勾股形构成, 从而“勾方”加“股方”等于“弦方”.

这就是商高对勾股定理的简洁美妙的证明. 所以说, 商高开定理证明之先河. 想想勾股定理的欧几里得证明, 也是“既方之”, 不过“弦方”是朝外、不与“勾方”和“股方”相交.

### 5.3 勾股定理的商高证明 (续)

证明“既方之, 外半其一矩, 环而共盘, 得成三四五”中的“环而共盘”之另一诠释如下. 前两句用图是一样的. “外半其一矩”反映《周髀算经》中的“折矩”想法. 这里“环而共盘”是将外取的半矩 (勾股三角形) 环绕弦方而共成一个“柱隅四权”的大正方形盘, 见图 3 左图. 显然, 大正方形 (边长为勾与股之和的方形) 面积为“勾方”与“股方”之和加上虚线标识的两个勾股矩形 (四个勾股三角形) 的面积 (《周髀算经》中的“积矩”), 见图 3 右图, 这顺带给出了完全平方和公式 (勾股之和自相乘等于勾方、股方与两倍勾股积的和), 而大正方形由弦方加上四个勾股三角形构成, 所以弦方等于“勾方”与“股方”之和. 这个证明反映了《周髀算经》中的折矩 - 积矩的思想与方法.

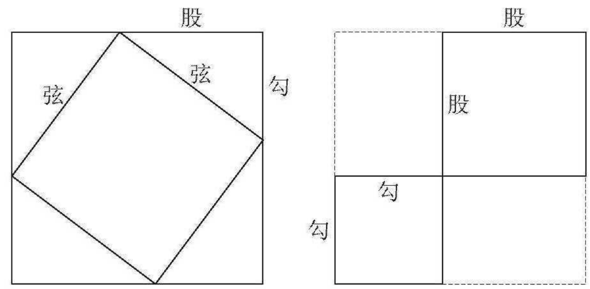


图 3 勾股定理的商高证明 (续)

### 5.4 周朝的数学

综上所述, 周朝在中国古代数学史上起重要作用, 应浓墨重彩; 中国古代著名数学家应上溯至商高. 虽然《周髀算经》对商高着墨不多, 但从其用矩之道、勾股定理之证明等可足以推断当时数学形成了丰富系统的包括几何 (圆、方、矩、三角形等)、代数的数学知识体系, 并创立了融合代数与几何的思想、数形结合的思想, 开启了定理证明之先河.

### 5.5 数学中的“既”

这里, 对“既方之”的理解很重要、很关键. 我认为, “既”在这里是全、都的意思. 数学中有这样的例子, 如祖暅原理“幂势既同, 则积不容异”, 上面已解释了, 这里的“既”是全、都的意思; 另外如既约分数. 我认为, “既约分数”事实上是指 (分子与分母的公因数) 全都约掉的分数, “既”也是全、都的意思.

### 5.6 经典文献中的“既”

事实上, 在左丘明著的经典文献《左传 · 僖公二十二年》“子鱼论战”篇章中 ( 宋人既成列, 楚人未既济. 司马曰: “彼众我寡, 及其未既济也, 请击之.” 公曰: “不可.” 既济而未成列, 又以告.

公曰: "未可." 既陈而后击之, 宋师败绩. 公伤股, 门官歼焉), 出现的 "既" 就是全、都的意思, 特别是 "未既济" 中的 "既" ("济" 是渡河之意), "未既济" 即 "尚未全都过河" 之意. 有的 "既" 可引申为 "已经" 之意, 如 "既成列"、"既济"、"既陈" 中的 "既".

另外,《考工记》中: "三材既具, 巧者和之" 的 "既" 也是全、都的意思.

### 5.7 商高证明的丰富内涵

商高证明图有丰富内涵, 这里仅举一例. 利用割补术或出入相补原理, 我们把 "勾方" 与 "股方" 之和与 "弦方" 作比较. 我们把 "股方" 中多出的勾股三角形割补到 "弦方" 中, 又把 "股方" 中多出的小直角三角形割下, 和 "勾方" 中多出的直角梯形补到一起, 构成另一个勾股三角形 (见图 4). 这时, "弦方" 仍然缺少一个四边形. 因为直角三角形 $x$ 和 $x'$ 是全等的, 直角梯形 $y$ 和 $y'$ 也是全等的, 容易看出这个黑色四边形的面积 $x+y$ 恰好是一个勾股三角形的面积 $x+y'$ 或 $x'+y$. 所以, "勾方" 加 "股方" 所多出的一个勾股三角形, 正好填补了 "弦方" 的空缺.

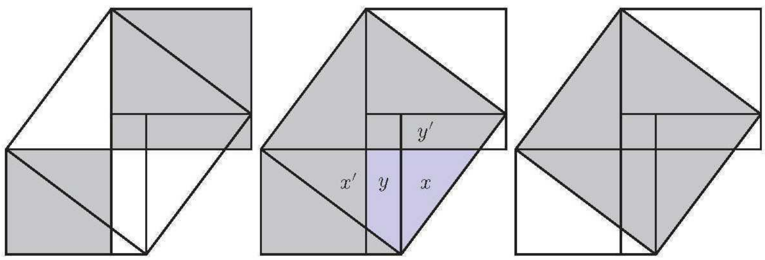


图 4 割补术

### 5.8 中科院数学院的院徽

中国科学院数学与系统科学研究院的院徽就是商高证明的第三步 "环而共盘" 的两个解释的叠加图 (见图 5). 十多年前, 我应邀到中学母校作演讲, 题目是 "数学之魅力". 我讲到了证明图 (图 2 (3)), 按我当时的理解, 设直角三角形的勾长是 $a$, 股长是 $b$, 弦长是 $c$, 那么中间的小正方形的面积等于 $(b-a)^2$. 弦方由中间的小正方形与四个勾股形构成, 弦方的面积 $c^2$, 而小正方形的面积再加上四个勾股三角形的面积等于:

$$(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab=a^2+b^2,$$

即得勾股定理.

后来我发现自己的认识不足, 推理方向弄反了. 事实上正如上面所述, 商高已经利用他的弦图先 (顺带) 证明了

$$(b-a)^2=b^2-2ab+a^2,$$

再推导出勾股定理.

### 5.9 勾股定理的赵爽证明

在《周髀算经》之后还有很多勾股定理的证明, 比如东汉时期的赵爽.

如商高图一样, 赵爽的《周髀算经》注也可从多个角度给出勾股定理的证明. 我们作一条延长线, 容易看出图 5 右图中着色区域的面积就是 $a^2+b^2$. 小正方形的面积 $(b-a)^2$, 显然等于 $a^2+b^2$ 再减去四个勾股三角形的面积 $2ab$. 所以利用这个图形也可证明平方差公式. 将左下和右下的两个直角三角形割补到弦方的上部, 即可知着色区域的面积也等于 $c^2$. 所以

$$a^2+b^2=c^2,$$

这也给出了勾股定理的一个简单证明. 这里也出现了 "合并同类项" 和 "割补术" 的思想, 比如四个勾股三角形的面积都是 $\frac{1}{2}ab$, 属于同类项, 可将它们合并为 $2ab$.

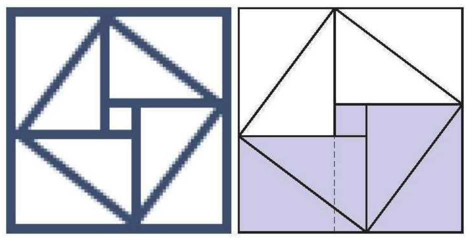

图 5 中科院数学院的院徽与赵爽证明

赵爽发现许多关于勾股弦关系的公式并用割补术 (出入相补方法) 作了证明, 事实上给出了二次方程的根式解.

### 5.10 勾股定理的刘徽证明

再来看看刘徽的证明. 他也是 "既方之": 分别以勾、股、弦为边作一个正方形 (见图 6). 然后比较 "勾方"、"股方" 和 "弦方" 的公共部分: "股方" ("青方") 多出的两个三角形可以补入 "弦方", "勾方" ("朱方") 多出的三角形也可以补入 "弦方", 即大、小 "青出" 分别补在大、小 "青入", "朱出" 补在 "朱入". 可以看出赵爽和刘徽的证明都蕴含了深刻的代数思想. 刘徽的 "出入相补, 各从其类" 实涵 "移项、集项" 之代数思想.

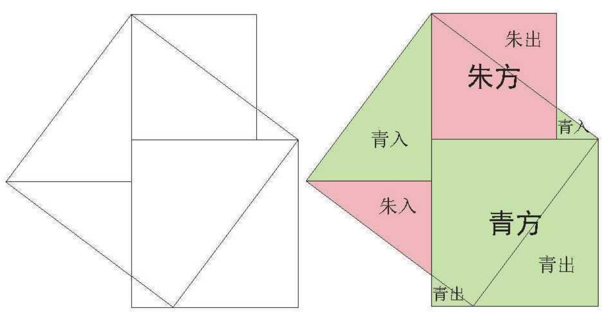


图 6 刘徽的青朱出入图

### 5.11 割补术与花拉子米的代数

代数 algebra 一词源自花拉子米所著的 Hisab al-jabr wa'l-muqabalah 的书名《还原与对消计算概要》(移项和集项的科学). 书名中的 al-jabr 一词 (英译 algebra) 的本意是还原, 即 "移项",

而 wa'l-muqabalah 意为对消, 即 "合并同类项" (集项), 这是两种基本的代数运算. 书的内容是解一元二次方程.

我国古代从商高证明勾股定理开始的割补术完全蕴含了这两种基本的代数运算. 移项是说 $A-a=B$ 等价于 $A=B+a$, 从 $A$ 中割去 $a$ 得到 $B$, 等价于在 $B$ 中补上 $a$ 得到 $A$, 割前是 $A$, 补后是 $B+a$, 割前补后面积不变, 这是割补术的基本思想. 前面提到, 商高的 "折矩" 与 "积矩" 及刘徽的出入相补原理、"各从其类" 事实上包含了合并同类项的思想.

从赵爽的证明图可以推出许多代数式. 事实上, 很多代数式也都有类似的几何推导.

### 5.12 "割补术" 与一元二次方程

中国古代数学事实上给出了二次项: 勾方、股方、勾股积. 一元二次方程主要分为如下三类:

$$\begin{aligned} &x^2+c=bx \quad (x^2+45=14x),\\ &x^2+bx=c \quad (x^2+10x=39),\\ &x^2=bx+c \quad (x^2=2x+15), \quad b,c>0. \end{aligned}$$

用 "割补法" 及 "半分法" 即可求解这些方程.

不失一般性, 比如求解 $x^2+45=14x$ (见图 7). 作长为 14, 宽为 $x$ 的矩形, 内含边长为 $x$ 的正方形 (左侧) 以及剩余的面积为 45 的矩形 (右侧). 分 $x>7$ 和 $x<7$ 两种情况, 不妨考虑 $x>7$ 的情况. 首先用 "半分法" 沿着大矩形的上下边半分并将两分点连成直线, 分为左右两个同大小的矩形. 然后在右半矩形截取一个边长为 7、面积为 $7\times7=49$ 的正方形. 把右侧矩形的下底部割补到其左邻上方 (见图中箭头), 因右侧矩形的面积是 45, 由割补术, 得黑色图形面积为 45. 边长为 7 的正方形由黑色图形加上边长为 $x-7$ 的小正方形构成, 故

$$49=45+(x-7)^2.$$

由此求出 $x-7=2$, 即 $x=9$.

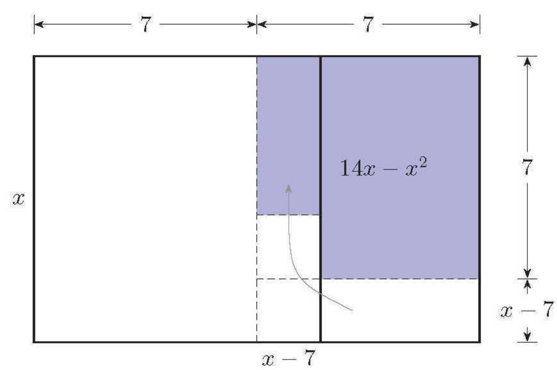


图 7 解方程 $x^2+45=14x$

又比如用 "割补术" 求解 $x^2+10x=39$ (见图 8). 先作一个边长为 $x$ 的正方形, 在它的右边作一个长为 10、高为 $x$ 的矩形, 两者的总面积是 39. 利用 "半分法" 将矩形沿对称轴半分, 将右边的一半割下来补在正方形之下 (见图中箭头). 这样形成的黑色图形面积仍为 39, 加上边长为 5

的方形便构成边长是 $x+5$ 的大正方形, 所以

$$(x+5)^2 = 39 + 5 \times 5 = 64.$$

由此求出 $x+5=8$, 即 $x=3$.

再比如求解 $x^2 = 2x + 15$ (见图 9). 由割补术 (见图中箭头), 黑色面积为 15, 可得

$$(x-1)^2 = 15 + 1,$$

从而 $x=5$.

上述割补术事实上给出了解二次方程的配方法.

从以上例子可以看出, 中国古代的 "割补术"、出入相补原理、半分法等完全可以解决一元二次方程. 半分法古人早已熟知, 如王尔半中、惠子 "日取其半"、墨子 "非半弗䚡" 等, 说明古人会用圆规平分线段. 我相信, 花拉子米的《代数学》也是基于这样的办法来求解一元二次方程的.

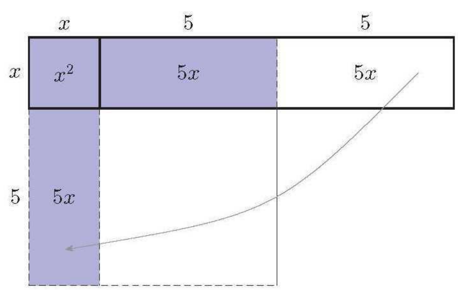


图 8 解方程 $x^2 + 10x = 39$

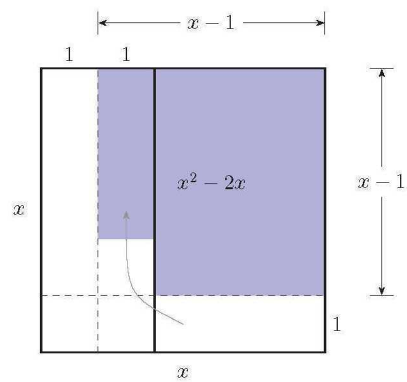


图 9 解方程 $x^2 = 2x + 15$

## 6 代数的源泉

### 6.1 代数源泉问题

Boyer 在他的《数学史》[6] 中指出花拉子米 (约 780— 约 850) 是 "代数之父", 但所有的数学分支都不是突然冒出来的, 自然要问阿拉伯代数的灵感究竟来自何方? Boyer 在书中试着给出了几个 "答案", 但他自己认为都不怎么靠谱. 我们不妨把这个问题称做是 "花拉子米代数之源泉问题". 在吴文俊先生主编的《世界著名数学家传记》[7] 关于花拉子米的文章中也提到: "关于花拉子米撰写《代数学》一书所受的学术影响以及资料来源等问题, 至今尚未搞清."

基于对我国古代数学的学习与思考, 我给出的答案是: 花拉子米的代数源自中国古代数学思想与方法. 花拉子米的《代数学》主要是解一元二次方程. 由上述讨论, 一元二次方程完全可以利用中国古代商高 (西周初)、《九章算术》(公元一世纪左右)、赵爽 (约 182—250 年)、刘徽 (约 225 年 — 约 295 年) 等建立和发展的数学思想包括数形结合思想、几何与代数交融思想、割补术、出入相补原理、半分法、二项式分类 (勾方、股方、勾股积) 等来解决; 《代数学》书名中反映的代

数运算: 移项与合并同类项其实已由割补术、出入相补原理所蕴涵. 应该说, 花拉子米是中国古代数学思想代数方面的整理者、解释者.

现代数学发展的基础通常被认为有两大支柱: 几何和代数 [8]. 在西方, 几何通常被认为是古希腊的几何, 而代数通常被认为是阿拉伯代数 (即花拉子米代数). 中国古代数学对于现代数学的一个重要贡献就是提供了花拉子米代数的源泉, 花拉子米的代数其实是中国古代数学思想的一个重新整理和重述 (reformulation), 起到了中国古代数学影响现代数学的桥梁作用. 简言之, 代数学是研究运算及其规律的学科. 应该强调的是, 中国古代数学开启了几何和代数融合之先河, 创始了方便的、灵巧的代数思想、代数方法、代数运算, 对现代数学发展打下了坚实基础、做出了重大贡献.

**致谢** 感谢李俐在报告整理、李植和徐旺在电脑绘图及生僻字的电脑生成等方面的帮助.

## 参 考 文 献

[1] 毛泽东, 改造我们的学习, 毛泽东选集第三卷, 北京: 人民出版社, 1991: 797.

[2] Cajori F., A History of Mathematical Notations, Dover Publications, Inc. New York, 1993: 70.

[3] Gowers T. (Ed.), The Princeton Companion to Mathematics, Princeton University Press, 2008.

[4] 吴文俊, 对中国传统数学的再认识, 百科知识, 1980 年第 7–8 期.

[5] 程贞一, 闻人军, 周髀算经译注, 上海: 上海古籍出版社, 2012.

[6] 卡尔 · 博耶 (Carl B. Boyer) 著, 尤塔 · 梅兹巴赫 (Uta C. Merzbach) 修订, 数学史 (修订版), 中央编译出版社, 2012.

[7] 吴文俊主编, 世界著名数学家传记, 花拉子米, 北京: 科学出版社, 1995.

[8] 李文林, 数学史概览, 北京: 高等教育出版社, 2000.

[9] 中国大百科全书, 数学卷, 数学编辑委员会主任: 华罗庚, 苏步青, 北京: 中国大百科全书出版社, 1992.

[10] 周易、老子、墨子、列子、庄子、孟子、荀子、管子、韩非子、左传、淮南子、贞观政要, 中华经典名著全本全注全译丛书, 北京: 中华书局, 2010–2019.