mathexam — 数学类考试出题宏包*

Van Abel†

发布日期 2020/06/21

摘要

这是按照**西南大学**考试模版格式, 为数学类考试出题的 X∃LATEX 模版. 它在**MiKTeX**以及 **TeXLive**下都能正常工作. 创作过程中, 本模板吸收了暨南大学的考试模版 **jnuexam**中的代码, 但略有改进. 此外, 还借鉴了 **exam** 宏包中关于总页码显示的代码. 本模板与它们最大的区别在于使用了 **datatool** 来计算总题目数、总分, 这为进一步开发依据题库出题奠定了基础.

1 简明使用教程

基本上, 使用本宏包`mathexam`, 你只需要下载`mathexam.sty` 并将其放到你的工作目录, 然后在你的主文件中通过`\usepackage{mathexam}` 即可使用它. 关于使用的实际例子, 你可以参考`mathexam-main.tex`. 所有这些文件都可以在模版 发布页下载.

最终排版效果可以参考`mathexam-main.pdf` 以及`mathexam-main-answer.pdf`.

2 选项、命令以及环境

2.1 基本选项

选项可以通过传递给文档类或者宏包的形式启用.

bsphack bsphack esphackesphack**showans** 选项实际上是一个开关, 如果没有该选项则不显示答案.

bsphack bsphack esphackesphack**a3paper** 选项是为制作 A3 考试卷子提供的选项, 即将两页 A4 纸打印到一页. 此外, 该选项还会自动生成侧边学生填写信息以及在最后一页添加草稿纸.

bsphack bsphack esphackesphack**fixlast** 该选项只在**a3paper** 选项启用时才有作用, 这是为了修复试卷总页码为奇数页时, 在 A3 纸上显示时的格式错误.

例如:

`\documentclass[showans]{article}` 则表示把**showans** 选项传给**article** 类.

---

*这是对版本号为 v.2.0.0 的文档说明, 最后修改日期为 2020/06/21.

†E-mail: van141.abel(AT)gmail.com

`\usepackage[showans]{mathexam}` 将showans 选项传递给mathexam 宏包.

2.2 试卷基本信息

`\university`   `\university` 命令用来输出学校名称, 它有主参数 (即用{} 写的参数) {⟨*university name*⟩}.

`\school`   `\school` 命令用来输出学院名称, 它有主参数 {⟨*school name*⟩}.

`\course`   `\course` 命令用来输出课程名称, 它有主参数 {⟨*course name*⟩}.

`\AorB`   `\AorB` 命令用来设置试卷是 A 卷、B 卷 (当然 C 卷等也可以), 它有一个主参数 {⟨*Capital letter*⟩}.

`\semester`   `\semester` 命令用来设置试卷第几学期, 它有一个主参数 {⟨*semester number*⟩}. 事实上, 本模版会自动根据出题时间计算正确的学期, 如果不正确可以用 `\semester` 命令修改.

`\finalmiddle`   `\semester` 命令用来设置试卷是期中还是期末, 它有一个主参数 {⟨*final or middle*⟩}.

`\totaltime`   `\totaltime` 命令用来设置考试的总时间, 它有一个主参数 {⟨*number of minutes*⟩}, 表示多少分钟.

`\openclose`   `\openclose` 命令用来设置试卷是开卷还是闭卷, 它有一个主参数 {⟨*open or close*⟩}.

`\degree`   `\degree` 命令用来设置考试学生的学位, 本科、硕士研究生、博士研究生等. 它有一个主参数 {⟨*degree name*⟩}.

`\totalstu`   `\totalstu` 命令用来设置学生人数, 它有一个主参数 {⟨*number of total students*⟩}.

`\major`   `\major` 用来设置学生的专业, 它有一个主参数 {⟨*major name*⟩}.

`\grade`   `\grade` 用来设置学生的年级, 它有一个主参数 {⟨*grade number*⟩}.

`\examiner`   `\examiner` 用来设置出题者, 它有一个主参数 {⟨*name of examiner*⟩}.

`\director`   `\director` 用来设置教研室主任, 它有一个主参数 {⟨*name of director*⟩}.

`\dean`   `\dean` 用来设置主管院长, 它有一个主参数 {⟨*name of dean*⟩}.

2.3 生成试卷头

`\makehead`   `\makehead` 用来根据以上信息生成试卷的页眉、页脚以及表头. 它不带参数.

2.4 判断题打勾打叉

`\ture`   这两个命令分别对应于判断题的答案是正确的和错误的.

`\false`

2.5 填空题的下划线

`\fillin`   `\fillin[`⟨*space length*⟩`]{`⟨*answer*⟩`}` 命令用来出填空题, 它将在答案下面加横线. 它有一个可选参数 [⟨*space length*⟩], 默认为 [⟨*1em*⟩]; 还有一个主参数 {⟨*answer*⟩}, 即填空题的答案.

`\fillout`   `\fillout{`⟨*answer*⟩`}` 命令也是用来出填空题, 它也将在答案下面加横线, 与`\fillin` 的区别是横线将延长到行末.

2.6 选择题的答案

\pickout \pickout 命令用来写选择题的答案, 它有一个主参数 {⟨*captial letter*⟩}, 即答案的字母. 它会自动用点填充题目与答案之间的空隙, 并把答案用括号括起来.

2.7 答案表格

\answertable \answertable 可以为选择题或者填空题生成答题表格, 这方便批阅. 它有一个可选参数 [⟨*height*⟩] 指定答题表格中各行的高度, 默认为 [⟨*1em*⟩]. 另外, 它还有两个主参数 {⟨*total number of answer*⟩}, {⟨*number of answer in each line*⟩}, 即总共的答案个数以及每行的答案个数.

2.8 修改证明题或解答题的答案提示

\solutionname \solutionname 用来设置解答或证明中的开头文字, 它有一个主参数, {⟨*name of proof*⟩}, 默认为 [⟨解⟩], 你也可以用 \renewcommand{\solutionname}{ } 来修改为 [⟨证⟩].

2.9 评分

\score \score 命令用来在解答过程中给出评分, 它有一个主参数 {⟨*score number*⟩}, 即一个数字表示给分多少.

2.10 答案隐藏

\answer \answer 命令可以用来书写答案, 它有一个主参数 {⟨*contents*⟩}, 表示具体的答案内容. 答案将在showans 选项未启用时隐藏.

2.11 辅路数据

\makedata \makedata{⟨*title*⟩} 用来生成附录标题, 其下面可以写一些用到的公式、数据等.

2.12 草稿纸

\caogaozhi \caogaozhi 命令没有参数, 它会在a3paper 选项启用时在试卷末尾增加一张草稿纸.

2.13 环境

abcd abcd 环境用来输出选择题的四个选项, 每个选项用\item 命令来书写, 因此这个环境类似通常的列表环境, 但是会自动根据答案的长度选择排列成四、二、一行.

makepart makepart 环境会生成每个部分的标题, 它有三个参数, 格式为 [⟨*contents*⟩]{⟨*title*⟩}[⟨*score per question*⟩], 即第一个可选参数为标题的说明, 如果省略, 默认会根据第三个参数是否为零以及本部分

小题的个数和总分. 当然你也可以手动指定. 第二个参数就是这部分的标题, 第三个参数默认为0, 若大于零则表示这部分每小题的分值. 例如选择题、判断题, 每小题都是一样的分.

如果第三个参数为零, 则此时需要为每个小题指定分数. 具体方法参考problem 环境的使用.

如果同时指定了第三个参数, 和每小题的参数, 则该小题的分值为这两个参数之和. 一般而言, 我们应该避免这样使用, 因为会产生歧义.

本环境还会在环境结束时根据每小题分值自动计算这部分的小题总数以及这部分的总分, 并利用datatool 宏包写入到数据库, 你可以查看\jobname.dat 文件, 其中记录了具体的数据. 这里\jobname.tex 就是你的主文件. **problem** problem 环境用来输出题目, 这包括各种题型. 它有一个可选参数 [⟨*score number*⟩], 表示本小题的分值.

solution solution 环境用来产生解答题或者证明题的答案, 它有两个可选参数, [⟨*skip height*⟩]、[⟨*solution name*⟩]. 第一个表示在答案所占空白高度的基础上增加或者减少多少高度, 例如 [⟨*10em*⟩] 表示增加 10 行, [⟨*-10em*⟩] 则表示减少 10 行. 第二个可选参数默认为\solutionname, 表示证明或者解答的开头文字.

rmk rmk 环境是为了在证明或者解答中增加一些注记, 例如不同的解法, 评分说明等. 这在参考答案中会显示出来, 但是不占据试卷的答题空白高度.

3 题型举例

我们将在这节用具体例子说明上面的命令、环境怎么使用.

3.1 判断题

```
\makepart{      }[2]
\begin{problem}
                              3    4,              5. \true
\end{problem}
```

这将生成判断题部分的标题, 而且用小括号说明本部分:(共 1 题, 每题 2 分, 共计 2 分). 每个problem 环境对应着一个小题, \true 这种该小题的答案为真.

3.2 选择题

```
\makepart{      }[2]
\begin{problem}
                              3    4,            \pickout{C}
\begin{abcd}
 \item 7;
 \item 6;
 \item 5;
```

```
  \item 4.
\end{abcd}
\end{problem}
```

这会生成选择题部分的标题, 类似前面的判断题, 会自动使用括号说明本部分小题的总数、分值情况. 每个小题用problem 环境出题, 其中正确答案用\pickout 命令输出, 而备选项用aabcd 环境输出, 每个选项用\item 输出.

3.3 填空题

```
\makepart{    }
\begin{problem}[2]
                              3    4,            \fillin{5}.
\end{problem}
```

类似地, 这里给出了一个填空题, 设置了本题的分值为 2 分. 这是因为一个小题往往有多个空, 故没有用统一设置分值的方法. 如果用\fillout{C} 则答案下的横线将填充到行末.

3.4 计算题

```
\makepart{    }
\begin{problem}[10]
                              3    4,            ?
\begin{solution}[10em]
           ,                                     .\score{5}
        $\sqrt{3^3+4^2}=5$.\score{5}
\end{solution}
\end{problem}
```

由于没有给定第三个可选参数, \makepart 命令将生成本部分的标题, 且根据本部分的小题数和总分值, 自动生成标题说明: (共 1 题, 共计 10 分).

每个问题用problem 环境给出, 环境后的可选参数 [⟨*10*⟩] 表示本小题 10 分.

相应的答案用solution 环境给出, [⟨*10em*⟩] 表示在试卷隐藏答案时, 答案的空白高度将在答案的高度基础上增加10em.

最后, 答案中的\score 命令表示这步的分值.

3.5 证明题

```
\makepart{    }
\renewcommand{\solutionname}{  }
\begin{problem}[10]
```

```
                          3    4.                    5.
\begin{solution}[10em]
            ,                                        .\score{5}
        $\sqrt{3^3+4^2}=5$.\score{5}
\end{solution}
\end{problem}
```

这里和前面计算题完全类似, 只是我们用\renewcommand{\solutionname}{ } 更改了本部分的解答开头文字都为 "证".

4   源码参考

```
 1 ⟨*package⟩
 2 \NeedsTeXFormat{LaTeX2e}[1996/06/01]
 3 \ProvidesPackage{mathexam}[2018/10/28 A package for create math examination v1.0.0]
 4 \RequirePackage{mathtools, amssymb, amsthm}
 5 \RequirePackage[contents={}]{background}
 6 \RequirePackage{ctex}
 7 \RequirePackage{geometry}
 8 \RequirePackage{tabularx}
 9 \RequirePackage{refcount, fancyhdr}
10
11 \RequirePackage{calc}
12 \RequirePackage{tikzpagenodes}
13 \usetikzlibrary{calc}
14 \RequirePackage{eso-pic}
15 \RequirePackage{etoolbox,xparse,  multido, ifthen}
16 \RequirePackage{zhnumber}
17 \RequirePackage{datatool}
18 \IfFileExists{\jobname.dat}{
19   \DTLsetseparator{,}
20   \DTLloaddb{\jobname}{\jobname.dat}
21   }{
22   \DTLnewdb{\jobname}
23 }
24
25 \newif\ifmathexam@showans\mathexam@showansfalse %
26 \newif\ifsidebyside \sidebysidefalse %       A3
27 \newif\ifmathexam@fixlast\mathexam@fixlastfalse %
28 \DeclareOption{showans}{ \mathexam@showanstrue}
29 \DeclareOption{fixlast}{
```

```latex
30    \mathexam@fixlasttrue
31 }
32 \DeclareOption{a3paper}{\sidebysidetrue}
33
34 \ProcessOptions\relax
35
36
37 \newcommand{\university}[1]{\def\mathexam@value@university{#1}}
38 \newcommand{\school}[1]{\def\mathexam@value@school{#1}}
39 \newcommand{\course}[1]{\def\mathexam@value@course{#1}}
40 \newcommand{\AorB}[1]{\def\mathexam@value@AorB{#1}}
41 \newcommand{\semester}[1]{\def\mathexam@value@semester{#1}}
42 \newcommand{\finalmiddle}[1]{\def\mathexam@value@finalmiddle{#1}}
43 \newcommand{\totaltime}[1]{\def\mathexam@value@totaltime{#1}}
44 \newcommand{\openclose}[1]{\def\mathexam@value@openclose{#1}}
45 \newcommand{\degree}[1]{\def\mathexam@value@degree{#1}}
46 \newcommand{\totalstu}[1]{\def\mathexam@value@totalstudent{#1}}
47 \newcommand{\major}[1]{\def\mathexam@value@major{#1}}
48 \newcommand{\grade}[1]{\def\mathexam@value@grade{#1}}
49 \newcommand{\examiner}[1]{\def\mathexam@value@examiner{#1}}
50 \newcommand{\director}[1]{\def\mathexam@value@director{#1}}
51 \newcommand{\dean}[1]{\def\mathexam@value@dean{#1}}
52
53 \newcommand{\mathexam@value@semester}{\ifnum\the\month<9\ifnum\the\month>2 {2}\fi\else {1}\fi}
54 \newcommand{\mathexam@lasttwoofyear}[1]{% #1 is the offset
55    \expandafter\mathexam@getlasttwo\number\numexpr\year+(#1)\relax\relax
56 }
57 \def\mathexam@getlasttwo#1#2#3#4\relax{#3#4}
58 \def\totalnumpages{\@ifundefined{mathexam@totalpages}%
59    {\mbox{\normalfont\bfseries ??}}%
60    \mathexam@totalpages
61 }
62 \newcommand{\mathexam@barfill}{\leavevmode\xleaders\hb@xt@1em{\hss | \hss }\hfill\kern\z@}
63 \newcommand{\mathexam@barfilltext}[1]{~\rotatebox[origin=c]{270}{#1}~}
64
65 \newlength\myleft
66 \newlength\myinner
67 \newlength\myouter
68 \newlength\mytop
69 \newlength\mybottom
70 \newlength\myhead
```

```
71 \setlength\myleft{.75in}
72 \setlength\myinner{1in}
73 \setlength\myouter{.4in}
74 \setlength\mytop{.2in}
75 \setlength\myhead{.3in}
76 \setlength\mybottom{.6in}
77
78 \newgeometry{
79   top=\mytop,
80   inner=\myinner,
81   outer=\myouter,
82   bottom=\mybottom,
83   headheight=\myhead,
84   includeheadfoot,
85   twoside
86 }
87
88 \newlength\lefttable
89 \setlength{\lefttable}{(\textheight-11\ccwd-\tabcolsep*15)/17}
90
91 \newcommand{\myheaderright}{%
92   \zihao{5}(       \mathexam@value@AorB     \ifmathexam@showans          \fi)
93 }
94 \newcommand{\myheader}{\zihao{5}\mathexam@value@university          }
95 \newlength\headertextlen
96 \newcommand{\makehead}{%
97   \pagestyle{plain} %plain
98   \settowidth{\headertextlen}{\myheader}
99   \ifsidebyside{
100       \AddEverypageHook{%
101         \ifthenelse{\isodd{\value{page}}}%
102         {
103           %% The header line
104           \AddToShipoutPictureBG*{
105             % Add background picture to every page/ *version for current page
106             \begin{tikzpicture}[overlay,remember picture]
107               \draw [line width=1pt ]
108               ($(current page text area.north west)-(.6\myinner,0pt)$)
109               to
110               ($(current page text area.north east)$);
111               \draw [line width=1pt]
```

```
112            ($(current page footer area.south west)-(.6\myinner,0pt)$)
113              to
114            ($(current page footer area.south east)$);
115          \end{tikzpicture}
116        }
117        \newgeometry{
118          top=\mytop,
119          inner=\myinner,
120          outer=\myouter,
121          bottom=\mybottom,
122          headheight=\myhead,
123          includeheadfoot,
124          twoside
125        }
126        \backgroundsetup{
127          color=black,
128          angle=90,
129          scale=1,
130          opacity=1,
131          position={-\myinner+\myleft,-\textheight/2},
132          vshift=8pt,
133          hshift=12.5pt,
134          contents={
135            \begin{tabular}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
136              \hline                &
137              \hspace*{3\lefttable}  &
138                                     &
139              \hspace*{3\lefttable}  &
140                                     &
141              \hspace*{2\lefttable}  &
142                                     &
143              \hspace*{2\lefttable}  &
144                                     &
145              \hspace*{3\lefttable}  &
146                                     &
147              \hspace*{3\lefttable} \\
148              \hline
149              \multicolumn{12}{c}{
150                \mathexam@barfill\mathexam@barfilltext{  }
151                \mathexam@barfill\mathexam@barfilltext{  }
152                \mathexam@barfill\mathexam@barfilltext{  }
```

```latex
153            \mathexam@barfill}    \\
154              \hline
155           \end{tabular}
156         }
157       }
158       }{
159       \restoregeometry
160       \AddToShipoutPictureBG*{
161         % Add background picture to every page/ *version for current page
162         \begin{tikzpicture}[overlay,remember picture]
163           \draw [line width=1pt ]
164           ($(current page text area.north west)-0.8*(\myleft,0)$)
165           to
166           ($(current page text area.north east)-0.8*(\myleft,0)$);
167           \draw [line width=1pt]
168           ($(current page footer area.south west)-.8*(\myleft,0)$)
169           to
170           ($(current page footer area.south east)-0.8*(\myleft,0)$);
171         \end{tikzpicture}
172       }
173     }
174     \BgMaterial
175 }}\fi
176 \ifthenelse{\value{page}=1}{
177   %% The header
178   \newgeometry{
179     top=\mytop,
180     inner=\myinner,
181     outer=\myouter,
182     bottom=\mybottom,
183     headheight=\myhead,
184     includeheadfoot,
185     twoside
186   }
187   \begin{center}
188   {\zihao{-2}\heiti\mathexam@value@university\quad
189   \mathexam@value@school}\\[2em]
190   {\zihao{-3}\heiti  \mathexam@value@course   \quad
191            \mathexam@value@AorB    \ifmathexam@showans          \fi}\\[2em]
192   \end{center}
193   \zihao{-4}
```

```
194    %\begin{tabular*}{\linewidth}{@{\extracolsep{\fill}}|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
195    \newcolumntype{P}{>{\centering\arraybackslash}X}
196    \newcolumntype{L}{>{\flushleft\arraybackslash}X}
197    \begin{tabularx}{\linewidth}{|*{12}{P|}}
198      \hline
199      \multicolumn{8}{|c|{
200        20\mathexam@lasttwoofyear{-1}    20\mathexam@lasttwoofyear{0}    \qquad
201          \mathexam@value@semester
202      }                                                                 &
203      \multicolumn{4}{|c|}{\mathexam@value@finalmiddle\quad    } \\
204      \hline
205      \multicolumn{2}{|c|{        }                                      &
206      \multicolumn{2}{|c|}{\mathexam@value@totaltime    }                &
207      \multicolumn{2}{|c|{        }                                      &
208      \multicolumn{1}{|c|}{\mathexam@value@openclose}                    &
209      \multicolumn{2}{|c|}{        }                                     &
210      \mathexam@value@degree                                            &
211                                                                        &
212      \mathexam@value@totalstudent                                      \\
213      \hline
214      \multicolumn{3}{|c|{            }                                  &
215      \multicolumn{6}{|c|}{\mathexam@value@major}                        &
216                                                                        &
217      \multicolumn{2}{c|}{\mathexam@value@grade    }                    \\
218      \hline
219                                                                        &
220         &    &    &    &    &    &    &    &    &    &    \\
221      \hline
222                                                                        &
223         &    &    &    &    &    &    &    &    &    &    \\
224      \hline
225                                                                        &
226         &    &    &    &    &    &    &    &    &    &    \\
227      \hline
228    \end{tabularx}
229
230    \noindent \zihao{5}         :
231                                        0;                                        ;
232            ;                                                                  ;
233
234    \begin{center}
```

11

```latex
235     \setlength\fboxsep{1em}
236     \setlength\fboxrule{1pt}
237     \fbox{\zihao{4}\heiti{          :                                      }}
238   \end{center}
239   \DTLsumforkeys{\jobname}{problem}{\totalproblems}
240   \DTLsumforkeys{\jobname}{score}{\totalscores}
241   \noindent\zihao{-4}          \textbf{\DTLrowcount{\jobname}}
242       \textbf{\totalnumpages}     \textbf{\totalproblems}
243       \textbf{\totalscores}

245   %\end{tabular*}
246   }
247 \ignorespace}%

249 \fancypagestyle{plain}{
250   \ifsidebyside
251     \renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
252     \renewcommand{\footrulewidth}{0pt}
253   \else
254     \renewcommand{\headrulewidth}{0.8pt}
255     \renewcommand{\footrulewidth}{0.8pt}
256   \fi
257   \settowidth{\headertextlen}{\myheader}
258   \fancyhf{}
259   \fancyhead[CE]{
260       \mathexam@value@course               \mathexam@value@AorB
261     \ifmathexam@showans          \fi
262   }
263   \fancyhead[CO]{\makebox[2\headertextlen][s]{\myheader}}
264   \fancyhead[RO]{\ifthenelse{\value{page}=1}{}{\myheaderright}
265   }
266   %% The footer
267   \cfoot{
268     \ifthenelse{\value{page}=1}{%\isodd{\value{page}}
269       \zihao{-5}
270       \begin{tabular*}{\linewidth}{@{\extracolsep{\fill}}clclclc}
271            :                              &
272         \mathexam@value@examiner           &
273                   :                        &
274         \mathexam@value@director            &
275                :                           &
```

```
276        \mathexam@value@dean                    &
277        \the\year   \the\month   \the\day      \\
278        \multicolumn{7}{c}{
279          \mathexam@value@AorB   \quad%
280            \thepage    ,    \totalnumpages   %
281        }
282      \end{tabular*}
283      }{
284          \thepage    ,    \totalnumpages   %
285    }
286  }
287 }%
288
289 %% \makepart/\makedata      /
290 \def\solutionname{   }
291 \newcounter{problem}
292 \newcounter{mypart}
293 \newcounter{score}
294 \newcounter{prescore}
295
296 \setcounter{mypart}{0}
297 \setcounter{problem}{0}
298 \NewDocumentEnvironment{makepart}{O{%
299      \IfFileExists{\jobname.dat}{\DTLfetch{\jobname}{mypart}{\themypart}{problem}}{}    %
300    \ifnum#3>0      #3   ,\fi%
301      \IfFileExists{\jobname.dat}{\DTLfetch{\jobname}{mypart}{\themypart}{score}}{}   }%
302  m%
303  O{0}%
304  }{
305  \noindent\par
306  \stepcounter{mypart}
307  \setcounter{problem}{0}
308  \setcounter{score}{0}
309  \setcounter{prescore}{#3}
310  \noindent\zihao{-4}\chinese{mypart}  #2\if\empty#1\else(#1)\fi\par%
311  \phantomsection
312  \addcontentsline{toc}{section}{\chinese{mypart}  #2}
313  }{
314  \IfFileExists{\jobname.dat}{
315    \edtlgetrowforvalue{\jobname}{1}{\themypart}
316    \dtlupdateentryincurrentrow{mypart}{\themypart}
```

```latex
317    \dtlupdateentryincurrentrow{problem}{\theproblem}
318    \dtlupdateentryincurrentrow{score}{\thescore}
319    }{
320    \DTLnewrow{\jobname}
321    \dtlexpandnewvalue
322    \DTLnewdbentry{\jobname}{mypart}{\themypart}
323    \DTLnewdbentry{\jobname}{problem}{\theproblem}
324    \DTLnewdbentry{\jobname}{score}{\thescore}
325  }
326  \setcounter{prescore}{0}
327 \par}
328 \newcommand{\centertext}{\leavevmode\xleaders\hb@xt@.25em{\hss - \hss }\hfill\kern\z@}
329 \newcommand{\makedata}[1]{
330   \noindent\centertext~{\heiti\zihao{4}     \quad#1~\centertext}\par
331   \smallskip\ignorespaces\noindent
332 }
333 %% problem/solution     /
334 \newcounter{choice}
335 \NewDocumentEnvironment{problem}{O{0}}{
336   \setcounter{choice}{0}
337   \stepcounter{problem}
338   \noindent\arabic{problem}.\,\ignorespaces
339   \ifnum#1>0($#1'$)\addtocounter{score}{#1}\fi
340   }{
341   %\addtocounter{score}{#1}
342   \addtocounter{score}{\theprescore}
343   \par
344 }
345 %% showans
346 \newcommand{\answer}[1]{\ifmathexam@showans#1\else\phantom{#1}\fi}
347
348 %%
349 \newcommand{\cdotfill}{%
350   \leavevmode\xleaders\hbox to 0.5em{\hss$\cdot$\hss}\hfill\kern0pt\relax
351 }
352 \newcommand{\true}{\unskip\nobreak\cdotfill(\makebox[1.5em]{\answer{$\checkmark$}})}
353 \newcommand{\false}{\unskip\nobreak\cdotfill(\makebox[1.5em]{\answer{\sffamily x}})}
354 %%
355 \newcommand{\ulinefill}[1]{\xleaders\hbox{\uline{\vphantom{#1}\kern1pt}}\hfill\kern0pt}
356 \newcommand{\fillin}[2][1em]{\uline{\hspace{#1}\answer{#2}\hspace{#1}}}
357 \newcommand{\fillout}[1]{%
```

```
358    \allowbreak\hbox{}\nobreak\ulinefill{#1}\uline{\answer{#1}}\ulinefill{#1}
359 }
360 %%
361 \newcommand{\pickout}[1]{\unskip\nobreak\cdotfill(\makebox[1.5em]{\answer{#1}})}
362 \newlength{\my@item@len}
363 \newcommand\my@item@temp{%
364    \unskip\cr\stepcounter{choice}(\Alph{choice})%
365 }
366 \newcommand\my@item@box{%
367    \hfill\egroup\hfill\hbox to \my@item@len\bgroup
368    \stepcounter{choice}(\Alph{choice})\ignorespaces
369 }
370 \newcommand\my@item@par{%
371    \par\stepcounter{choice}(\Alph{choice})\ignorespaces
372 }
373 \NewDocumentEnvironment{abcd}{+b}{
374    \unskip
375    \setlength{\parindent}{0pt}%
376    \setlength{\parskip}{0pt}%
377    %\setcounter{choice}{0}%
378    \let\item=\my@item@temp
379    \settowidth{\my@item@len}{\vbox{\halign{##\hfil\cr #1\crcr}}}%
380    \setcounter{choice}{0}%
381    \ifdim\my@item@len>0.486\linewidth
382      \setlength{\my@item@len}{\linewidth}%
383      \let\item=\my@item@par
384      #1\par
385    \else
386      \ifdim\my@item@len>.243\linewidth
387        \setlength{\my@item@len}{0.5\linewidth}%
388      \else
389        \setlength{\my@item@len}{0.25\linewidth}%
390      \fi
391      \let\item=\my@item@box
392      \par\bgroup #1 \hfill\egroup\par
393    \fi
394 }{}
395
396 %% \score
397 %\PassOptionsToPackage{tbtags}{amsmath}
398 %\RequirePackage{amsmath}
```

```
399 %
400 %\newcommand{\myscore}[1]{\textcolor{blue}{#1\kern0.2em    }}
401 %
402 %\newcommand{\scoretext}[1]{\cdotfill\myscore{#1}\par\noindent\ignorespaces}
403 %\newcommand{\scoreeqno}[1]{\eqno{\cdots\cdots\text{\myscore{#1}}}}
404 %\newcommand{\scoretag}[1]{\tag*{$\cdots\cdots$\myscore{#1}}}
405 %
406 %\newrobustcmd{\score}[1]{%
407 %  \ifbool{mmode}{%
408 %      \ifdefstrequal{\tag}{\dft@tag}{\scoreeqno{#1}}{\scoretag{#1}}%
409 %        }{%
410 %      \scoretext{#1}%
411 %      }%
412 %    }
413 \newcommand{\score}[1]{%
414   \ifmmode%
415     \tag*{$\cdots\cdots$(#1\,    )}
416   \else%
417     \cdotfill(#1\,    )\par\noindent
418   \fi
419 }
420
421 %
422 \newlength\ansheight
423 \newcounter{cnt}
424 \newcommand{\ansskip}[1]{
425   \setcounter{cnt}{0}
426   \whiledo {\value{cnt} <100}
427   {
428     \vspace*{.01#1}\goodbreak
429     \stepcounter{cnt}
430   }
431 }
432 %                 :            ;
433 %                 :                           ;
434 %\begin{solution}[4em][  ]
435 %
436 %\end{solution}
437 \newbox{\ansbox}
438 \NewDocumentEnvironment{solution}{O{0em} O{\solutionname} +b}
439 { \savebox{\ansbox}{
```

```latex
440    \parbox[b]{\linewidth}{#3}}
441    \settoheight{\ansheight}{\usebox\ansbox}
442    \ifmathexam@showans
443      \par\noindent\textbf{#2}:~#3\qed\par
444    \else
445      \addtolength{\ansheight}{#1}
446      \ansskip{\ansheight}
447    \fi
448 }{\par}
449
450 \NewDocumentEnvironment{rmk}{+b}{
451    \ifmathexam@showans
452      \par\noindent\textbf{  }: #1\par
453    \fi
454 }
455
456 %% ---------------------------------------------------------------------------
457 %%                \answertable
458 %% ---------------------------------------------------------------------------
459
460 \gdef\answer@lines@temp{}%
461 \newcommand{\answer@lines@add}[1]{%
462    \xdef\answer@lines@temp{\answer@lines@temp#1}%
463 }
464
465 \newrobustcmd{\answer@number@hided}[1]{    } %     PDFLaTeX
466 \newrobustcmd{\answer@cell@strut}[1]{\parbox[c][#1][c]{2em}{\hbox{    }}}
467
468 \newcounter{answer@col}
469 \newcounter{answer@row}
470 \newcounter{answer@total}
471
472 \newcommand{\answer@lines}[3]{%
473    % #1
474    % #2
475    % #3
476    \setcounter{answer@row}{(#2-1)/#3+1}%
477    \begingroup
478    \let\hline=\relax  \let\\=\relax %
479    \gdef\answer@lines@temp{}%
480    \setcounter{answer@total}{1}%
```

```
481  \whileboolexpr{%
482    test{\ifnumgreater{\value{answer@row}}{0}}
483  }{%
484    \addtocounter{answer@row}{-1}%
485    \answer@lines@add{\answer@number@hided}%
486    \setcounter{answer@col}{1}%
487    \unlessboolexpr{%
488      test{\ifnumgreater{\value{answer@col}}{#3}}%
489    }{%
490    \answer@lines@add{&}%
491    \ifnumgreater{\value{answer@total}}{#2}{}{%
492      \answer@lines@add{\arabic{answer@total}}%
493    }%
494    \stepcounter{answer@col}%
495    \stepcounter{answer@total}%
496    }%
497    \answer@lines@add{\\ \hline \answer@cell@strut{#1}}%
498    \setcounter{answer@col}{1}%
499    \unlessboolexpr{
500      test{\ifnumgreater{\value{answer@col}}{#3}}
501    }{%
502      \answer@lines@add{&}%
503      \stepcounter{answer@col}%
504    }%
505    \answer@lines@add{\\ \hline}%
506  }%
507  \endgroup
508  \answer@lines@temp
509 }
510
511 \newcommand{\answertable}[3][1em]{%
512   \noindent
513                  ,                        .\par
514   \noindent\begin{tabularx}{\linewidth}{|c|*{#3}{P|}}
515     \hline
516     \answer@lines{#1}{#2}{#3}
517   \end{tabularx}%
518   \par\vspace{0.8em}%
519 }
520
521 \newcommand{\caogaozhi}{%
```

```
522    \begin{tikzpicture}[%
523      remember picture,overlay,font=\sffamily\fontsize{100pt}{100pt}\selectfont%
524      ]%
525      \node[text=lightgray!20] at (current page text area.center) {  \quad   \quad   };
526  \end{tikzpicture}}
527  \ifsidebyside
528    \preto{\@enddocumenthook}{%
529      \clearpage
530      \pagestyle{empty}
531      \caogaozhi
532      \clearpage
533      \caogaozhi
534      \addtocounter{page}{-2}
535    }
536    \RequirePackage{pgfpages}
537    \ifmathexam@fixlast
538      \preto{\@enddocumenthook}{
539        %insert an enpty page for odd total page
540        \clearpage
541        \thinspace
542      }
543    \fi
544    \pgfpagesuselayout{2 on 1}[a3paper, border shrink=5mm,landscape]
545  \fi
546
547  \preto{\@enddocumenthook}{
548    \if@filesw
549      \immediate\write\@mainaux
550      {\string\gdef\string\mathexam@totalpages{\arabic{page}}}}%
551    \fi
552    \DTLsavedb{\jobname}{\jobname.dat}
553    \IfFileExists{\jobname.dat}{}{\DTLdisplaydb{\jobname}}
554  }
555  ⟨/package⟩
556  ⟨*maintex⟩
557  \documentclass[cs4size]{article}
558  \usepackage[a3paper]{mathexam} %showans
559  \usepackage[colorlinks,linkcolor=cyan,ocgcolorlinks]{hyperref}
560  \usepackage{caption}
561  \input{main}
562  ⟨/maintex⟩
```

```
563 ⟨*mainanstex⟩
564 \documentclass[cs4size]{article}
565 \usepackage[showans]{mathexam} %showans
566 \usepackage[colorlinks,linkcolor=cyan,ocgcolorlinks]{hyperref}
567 \usepackage{caption}
568 \input{main}
569 ⟨/mainanstex⟩
570 ⟨*main⟩
571 \university{        }
572 \school{                }
573 \course{        (A)(2)}
574 \AorB{A}
575 \finalmiddle{    }
576 \totaltime{120}
577 \openclose{    }
578 \degree{    }
579 \totalstu{70}
580 \major{            }
581 \grade{2020}
582 \examiner{}
583 \director{}
584 \dean{}
585 \DeclareMathOperator{\sech}{sech}
586 \DeclareMathOperator{\arctanh}{arctanh}
587 \begin{document}
588 \makehead
589 \begin{makepart}{          }[3]
590   \begin{problem}
591        $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$    $(0,0)$   \pickout{B}
592     \begin{abcd}
593     \item        ;
594     \item              ;
595     \item              ;
596     \item
597     \end{abcd}
598   \end{problem}
599   \begin{problem}
600     $f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$            $2x+y-1=0$              :\pickout{A}
601     \begin{abcd}
602     \item $\frac{1}{\sqrt{5}}$;
603     \item $\frac{2}{\sqrt{5}}$;
```

```latex
    \item $1$;
    \item $2$.
    \end{abcd}
\end{problem}
\begin{problem}
        $D:x^2+y^2\leq2^2$                $\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$      \pickout{C}
    \begin{abcd}
    \item $16\pi$;
    \item $8\pi$;
    \item $\frac{16\pi}{3}$;
    \item $\frac{8\pi}{3}$.
    \end{abcd}
\end{problem}
\begin{problem}

    $\Omega=\left\{ (x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq1 \right\}$
                $\iiint_\Omega\sqrt{1- \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV$
    \pickout{B}
    \begin{abcd}
    \item $\frac{\pi^2}{4}$;
    \item $\frac{\pi^2abc}{4}$;
    \item $\pi^2$;
      $\pi^2abc$.
    \end{abcd}
\end{problem}
\begin{problem}
        $\gamma$        $x^2+y^2+z^2=1$        $y=x$            .
            $\int_\gamma\sqrt{2y^2+z^2}ds$      \pickout{C}
    \begin{abcd}
    \item $0$;
    \item $\pi$;
    \item $2\pi$;
    \item $\pi/2$.
    \end{abcd}
\end{problem}
\end{makepart}
\begin{makepart}{      }[3]
    \begin{problem}
        $f(u)$              .      $F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^4}
    f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$,      $F'(1)=$\fillin{$8\pi f(1)$}.
    \end{problem}
```

21

```
645    \begin{problem}
646            $z=z(x,y)$                              .
647        $z$        $P(1,1,1)$              $\vec{l}=(1,1)$              $=$\fillin{$-2$}.
648    \end{problem}
649    \begin{problem}
650        $n$                  $f(x_1,\ldots,x_n)=f(r)$
651     $\Delta f=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
652                        $=$\fillin{$f''(r)+(n-1)f'(r)/r$}.
653    \end{problem}
654    \begin{problem}
655        $z=f(x,y)$        $P(1,1)$            .
656        $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}
657     \frac{f(x,y)-x-2y+3}{\ln(1+(x-1)^2+(y-1)^2)}=\pi$,
658            $dz|_{(1,1)}=$\fillin{$dx+2dy$}.
659    \end{problem}
660    \begin{problem}
661                $z=2x^2+3y^2-1$        $4x+6y+z-1=0$                  \fillin{4x+6y+z+6=0}.
662    \end{problem}
663 \end{makepart}
664 \begin{makepart}{      }[5]
665    \renewcommand{\solutionname}{  }
666    \begin{problem}
667                $f(x,y)$
668     $\Omega \subset \mathbb{R}^2$              $P_0\in\Omega$          .
669        $\epsilon$-$\delta$                  :    $P_0(0,0)\in \Omega$    $f$            $df(P_0)$.
670     \begin{solution}[6em]
671                    $a,b\in \mathbb{R}$,      $df(P_0)=adx+bdy$. \score{1}\\
672        $\epsilon$-$\delta$                :
673            $\epsilon>0$,          $\delta>0$,
674     $(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)$,
675        $0<\sqrt{x^2+y^2}\leq \delta$,\score{3}\\
676            $a,b\in \mathbb{R}$,      :
677     \[
678     \left\lvert \frac{f(x,y)-f(0,0)-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rvert\leq\epsilon.
679     \score{2}
680     \]
681    \end{solution}
682    \end{problem}
683    \begin{problem}
684                $f=f(x,y)$, $g=g(x,y)$              $\Omega$          .
685                 $f$, $g$              .
```

```
686    \begin{solution}
687                                              :\\
688        $f=f(x,y)$              $\Omega$                 ,\score{1}\\
689      $g=g(x,y)$    $\Omega$                 .\score{1}\\
690        $g$    $\Omega$          \score{1}\\
691          $(\xi,\eta)\in \Omega$,
692      \[
693        \iint_\Omega f(x,y)g(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\iint_\Omega g(x,y)dxdy.
694        \score{3}
695      \]
696    \end{solution}
697  \end{problem}
698 \end{makepart}
699 \clearpage
700 \begin{makepart}{      }[10]
701  \renewcommand{\solutionname}{  }
702  \begin{problem}
703        $z^2=x^2+y^2$        $x^2+y^2=4x$                   .
704    \begin{solution}
705             ,                      .
706                   ,                    $Oxy$              $(x-2)^2+y^2\leq 2^2$,
707                        $(x,y,z=\sqrt{x^2+y^2})$,
708      $(x,y)\in D=\left\{ (x,y):(x-2)^2+y^2\leq2^2 \right\}$. \score{2}
709
710
711      \[
712        dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy,\score{3}
713      \]
714          ,
715      \begin{align}
716        I&=2\iint_D \sqrt{2}dxdy\score{3}\\
717          &=2\sqrt{2}\cdot \pi 2^2=8\sqrt{2}\pi. \score{2}
718      \end{align}
719    \end{solution}
720  \end{problem}
721  \begin{problem}
722        $\Sigma$          $ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
723        ,            $I=\iint_\Sigma zdxdy$.
724    \begin{solution}
725             $\Sigma$                    ,            $\Sigma_+$, $\Sigma_-$.
726        $Oxy$                       $D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.
```

```
           ,
     \[
       \Sigma_\pm:\left(x,y,z^\pm=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}
       -\frac{y^2}{b^2}}\right), \quad (x,y)\in D_{xy}.\score{2}
     \]
                                 $\vec{n}_\pm=(-z^\pm_x,-z^\pm_y,1)$.
              ,                    ,                          .
     \score{(2)}


                     ,
     \begin{align*}
       I&=\iint_{\Sigma_+}zdxdy+\iint_{\Sigma_-}zdxdy\\
        &=\iint_{D_{xy}}(0,0,z^+)\cdot\vec{n_+}dxdy
        -\iint_{D_{xy}}(0,0,z^-)\cdot\vec{n}_-dxdy\\
        &=2\iint_{D_{xy}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dxdy
        =2abc\iint_{u^2+v^2\leq1}\sqrt{1-u^2-v^2}dudv\score{2}\\
        &=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr
        =2\pi abc\int_0^1\sqrt{1-t}dt\score{2}\\
        &=2\pi abc\left. \left( -\frac{2}{3}(1-t)^{3/2} \right) \right\rvert_{t=0}^1
        =\frac{4\pi abc}{3}.\score{2}
     \end{align*}
   \end{solution}
  \end{problem}
\end{makepart}
\clearpage
\begin{makepart}{      }
  \renewcommand{\solutionname}{  }
  \begin{problem}[10]
                  $n$($n\geq3$)         ,    $n$                .
    \begin{solution}
                          $n$                  $n$      ;\score{2}\\
                                        $\theta_i$, $i=1,2,\ldots,n$,
         $\theta_i\in(0,\pi)$(             $n\geq3$).        ,
     \[
       S=\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}R^2\sin\theta_i,\score{1}
     \]
         $R>0$            .
     \[
       \Theta=\sum_{i=1}^n\theta_i-2\pi=0.\score{1}
     \]
```

```
768        \[
769          L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\lambda)
770          =S-\lambda\Theta
771          =\sum_{i=1}^n\left( \frac{1}{2}R^2\sin\theta_i
772          -\lambda\theta_i \right)+\lambda2\pi.\score{1}
773        \]
774                $\nabla L=0$
775        \[
776          \begin{cases}
777            R^2\cos\theta_i/2-\lambda=0,\quad i=1,2,\ldots,n\\
778            \sum_{i=1}^n\theta_i-2\pi=0.
779          \end{cases}\score{2}
780        \]
781             $\theta_i\in(0,\pi)$,
782        $\cos\theta_i\in(-1,1)$                      .
783        \[
784          \cos\theta_i=2\lambda/R^2, \quad i=1,2,\ldots,n,
785          \implies\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n.\score{2}
786        \]
787
788        \[
789          \sum_{i=1}^{n}\theta_i=2\pi\implies \theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=2\pi/n.
790        \]
791                      ,        $n$           $n$        .                                   .
792                      .\score{1}
793        \begin{rmk}
794                                    $\theta_i$         ,           .
795        \end{rmk}
796      \end{solution}
797    \end{problem}
798 \end{makepart}
799 \clearpage
800 \begin{makepart}[   1   ,        10   ,      30   ]{      }
801   \begin{problem}[30]
802           ,
803                    $A$            $1$                        $z$                     ,
804     $A$              \emph{      }(tractrix).        $z$                         .
805             $z$                                  \emph{      }(tractricoid).
806             $Oxy$-                              \emph{      }(pseudosphere),
807                                $-1$                        .       ,
808           Hilbert    1901                                                            .
```

```
809                              1693                    ·                 ·
810          1678                        (Trait\'e de la Lumi\`ere)                              .
811     \begin{enumerate}
812       \item                 $z=z(x)$
813         \begin{equation}\label{eq:tractrix}
814           z'(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\quad 0<x\leq 1.
815         \end{equation}
816                 \eqref{eq:tractrix}
817         \begin{equation}\label{eq:para-tractrix}
818           x(t)=\sech t,\quad z(t)=t-\tanh t,\quad 0<t<+\infty.
819         \end{equation}
820             ,                                              .
821
822             ,
823         \[
824           \sech t=\frac{1}{\cosh t}=\frac{2}{e^{t}+e^{-t}},\quad\tanh t
825           =\frac{\sinh t}{\cosh t}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}.
826         \]
827       \item          $\Sigma$           .
828       \item           $Oxy$-                      $\Omega$          .
829     \end{enumerate}
830     \begin{minipage}{\textwidth}
831       %\begin{mpost}
832       %  u:=8pt;
833       %  vardef exp primary x =(mexp(256)**x) enddef;
834       %  %e=2.718;
835       %  %vardef exp primary x= (e**x) enddef;
836       %  vardef sinh primary x = save xx; xx=exp x; (xx-1/xx)/2 enddef;
837       %  vardef cosh primary x= save xx; xx= exp x; (xx+1/xx)/2 enddef;
838       %  vardef sech primary x = (1/cosh x) enddef;
839       %  vardef csch primary x = (1/sinh x) enddef;
840       %  vardef tanh primary x =(sech(x)/csch(x)) enddef;
841       %  vardef f primary x = (( sech(x), x-tanh(x))) enddef;
842
843       %  vardef ParametricCurve(suffix f)(expr xmin, xmax, xinc)=
844       %  ( f(xmin)
845       %  for x=xmin+xinc step xinc until xmax:
846       %  hide(show(x); show(f(x));)
847       %  ..f(x)
848       %  endfor )
849       %  enddef;
```

```
850
851        %   pickup defaultpen;
852        %   pickup pencircle scaled 1pt;
853
854        %   drawarrow -4u*right--20u*right;
855        %   drawarrow -4u*up--20u*up;
856
857        %   path pat;
858        %   pat=ParametricCurve(f, 0.1, 3.05, 0.25) scaled 10u;
859        %   z0=10u*right;
860        %   t=4.5;
861        %   z1=point t of pat;
862        %   z2=(origin--20u*up) intersectionpoint (z1--(z1+10u*(direction t of pat)));
863
864        %   draw pat withcolor blue;
865        %   draw z1--z2 withcolor red;
866        %   undraw origin--z0;
867        %   draw origin--z0 withcolor red;
868
869        %   pickup defaultpen;
870        %   pickup pencircle scaled 3pt;
871        %   dotlabel.urt(btex $A$ etex, z0);
872        %   dotlabel.urt(btex $A$ etex, z1);
873        %   dotlabel("",z2);
874        %   label.bot(btex $x$ etex, 20u*right);
875        %   label.rt(btex $z$ etex, 20u*up);
876        %   dotlabel.llft(btex $O$ etex, origin);
877        %\end{mpost}
878        \hfill\includegraphics[scale=.8]{tractrix}\\
879        %\hfill\captionof{figure}{      }\label{fig:tractrix}
880     \end{minipage}
881     \begin{solution}
882      \begin{enumerate}
883        \item         ,            $A$          .      $A=(x,z)$,    $A$
884          \[
885            z'(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\quad 0<x\leq1.
886          \]
887                        $z=z(x)$                \eqref{eq:tractrix}. \score{4}
888
889          $z(t)=z(x(t))$,
890          \begin{align*}
```

27

```
891        z'(t)&=z'(x)x'(t)=-\frac{\sqrt{1-[x(t)]^2}}{x(t)}\cdot x'(t)\\
892            &=-\sqrt{\cosh^2 t-1}\cdot \frac{-\sinh t}{\cosh^2t}
893            =\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2t}=\tanh^2t.
894        \end{align*}
895            ,
896        \[
897          z'(t)=1-\tanh't=1-\frac{1}{\cosh^2t}
898          =\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2t}=\tanh^2t.
899        \]
900            , \eqref{eq:para-tractrix}                    \eqref{eq:tractrix}.
901        \score{2}
902
903            $x(0)=1, z(0)=0$                  ,
904        \eqref{eq:para-tractrix}                    . \score(2)
905
906          ,                        $z=z(x)$      $z$                   .
907        \[
908          \begin{cases}
909            x=\sech t\cos\theta,\\
910            y=\sech t\sin\theta,\\
911            z=t-\tanh t,
912          \end{cases}\quad
913          0\leq t<+\infty,\quad 0\leq \theta\leq 2\pi
914          \score{2}
915        \]
916      \item
917        \[
918          X(r,\theta)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta,z(r)\right),
919          0<r\leq1, 0\leq \theta\leq 2\pi,
920        \]
921            ,
922        \[
923          dS=\lvert X_r\times X_\theta \rvert drd\theta
924          =r\sqrt{1+[z'(r)]^2}drd\theta,\score{5}
925        \]
926            ,
927        \[
928          S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \lvert X_r\times X_\theta \rvert dr
929          =2\pi\int_0^1r\sqrt{1+[z'(r)]^2}dr. \score{3}
930        \]
931
```

```
932              \eqref{eq:tractrix},
933           \[
934             \sqrt{1+z'^2(r)}=1/r,\implies S= 2\pi. \score{2}
935           \]
936
937           \textbf{    }:                (a)
938           \[
939             X(t,\theta)=\left( \sech t\cos\theta,\sech t\sin\theta,t-\tanh t \right),
940             \score{2}
941           \]
942
943           \[
944             dS=\lvert X_t\times X_\theta \rvert dt d\theta
945             =\sech t\tanh t dt d\theta
946             =\frac{\sinh t}{\cosh^2t} dt d\theta.\score{5}
947           \]
948                , $\Sigma$
949           \begin{align*}
950             S&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\sech t\tanh tdt \score{3}\\
951              &=-2\pi\int_0^{+\infty} d(\sech t)
952              =2\pi.\score{2}
953           \end{align*}
954         \item    \eqref{eq:para-tractrix}                ,
955           \[
956             X(t,\theta)=(\sech t\cos\theta,\sech t\sin\theta,t-\tanh t),\quad
957             t\in[0,+\infty),\quad\theta\in[0,2\pi].
958           \]
959                ,
960           \[
961             J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}=-\sech^2 t\tanh t.\score{2}
962           \]
963
964           \begin{align*}
965             \lvert \Omega \rvert
966             &=\iint_{x^2+y^2\leq 1}zdxdy
967             =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}
968             (t-\tanh t)\sech^2 t\tanh t dt,\score{5}\\
969             \frac{\lvert \Omega \rvert}{2\pi}
970             &=\int_0^1 (u\arctanh u-u^2) du,
971             \quad(u=\tanh t, du=\sech^2 tdt)\\
972             &=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_0^1\arctanh u du^2\\
```

29

```
973        &=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left( \left. u^2\arctanh u \right\rvert_{u=0}^1
974          -\int_0^1 \frac{u^2}{1-u^2}du \right),\quad (\arctanh'u=\frac{1}{1-u^2})\\
975        &=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left( \left. u^2\arctanh u \right\rvert_{u=0}^1
976          +1-\frac{1}{2}\int_0^1\left( \frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u} \right)du \right)\\
977        &=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left. \left( u^2\arctanh u
978          -\frac{1}{2}\left( -\ln(1-u)+\ln(1+u) \right) \right) \right\rvert_{u=0}^1\\
979        &=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\lim_{u\to1^-}\left( u^2\arctanh u
980          -\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \right).\score{3}
981      \end{align*}
982        $u=\tanh t$,
983      \begin{align*}
984        \lim_{u\to1^-}\left(u^2\arctanh u+\ln\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)
985      &=\lim_{t\to+\infty}\left(t\tanh^2 t
986      +\ln\sqrt{\frac{1-\tanh t}{1+\tanh t}}\right)\\
987      &=\lim_{t\to+\infty}\left( t\frac{(e^{t}-e^{-t})}{e^{t}+e^{-t}}
988      -\ln(\cosh t+\sinh t) \right)\\
989      &=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t(e^{t}-e^{-t})}{e^{t}+e^{-t}}-t)=0.
990      \end{align*}
991
992      \[
993        \lvert \Omega \rvert=\pi/3.\score{2}
994      \]
995    \end{enumerate}
996    \end{solution}
997  \end{problem}
998 \end{makepart}
999 \end{document}
1000 ⟨/main⟩
```

5   版本历史

6 索引

斜体数字表示相应条目描述的页码, 而下划线的数字表示表示相应条目定义的页码. 使用条目的页码用罗马数字表示.

32