Introduction à la Théorie des Catégories

Aurélien Vandeweyer **Mattia Serrani**
Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation, Université de Mons, Belgique

Introduction

La théorie des catégories[1] est une branche fondamentale des mathématiques qui permet d'étudier des concepts en les généralisant grâce à des propriétés universelles communes, décrivant ainsi des structures générales indépendamment des détails spécifiques propres à chaque domaine.

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

La définition que nous proposons[2] ne dépend d'aucune représentation particulière :

Une **catégorie** $\mathcal{C}$ consiste en
- Une collection d'**objets** A, B, C, ...
- Une collection de **morphismes** entre les objets f, g, h, ...

telle que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :
- Une loi de **composition** : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \implies g\circ f : A \to C$.
- Une loi d'**identité** : $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.
- Une loi d'**associativité** : $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$.

Ce sont les flèches qui comptent vraiment !

Un objet est entièrement caractérisé par son **morphisme identité**[2].

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[loop above, "1_B"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop right, "1_C"] \end{tikzcd}$$

Exemples de catégories

Set : Les objets sont les ensembles et les morphismes sont les fonctions.

Pos : Les objets sont les posets et les morphismes sont les fonctions monotones.

Catégories finies : la collection d'objets et de morphismes sont des ensembles finis.

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop below, "1_\star"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[loop below, "1_\star"] \arrow[r] & * \arrow[loop below, "1_*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[loop above, "1_\star"] \arrow[r] \arrow[dr] & * \arrow[loop above, "1_*"] \arrow[d] \\ & \bullet \arrow[loop right, "1_\bullet"] \end{tikzcd}$$

Monoïde : Un monoïde est une catégorie d'un seul objet, les flèches sont les éléments du monoïde,

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop left, "1"] \arrow[loop above, "y"] \arrow[loop right, "x"] \end{tikzcd} \qquad \text{Un exemple concret :} \qquad \{\mathbb{Z}, +\} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[loop above, "\text{Peano}"] \end{tikzcd}$$

Groupe : Un groupe G est un monoïde munis d'un inverse, donc G est une catégorie avec un seul objet et dont chaque morphisme est un isomorphisme.

Et si on inverse le sens des flèches ?

La **catégorie opposée** $\mathcal{C}^{\text{op}}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ consiste à l'inversion des flèches :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^{\text{op}} & B^{\text{op}} \arrow[l] \\ & C^{\text{op}} \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

- $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.
- $\text{dom}(\mathcal{C}) = \text{cod}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ et $\text{cod}(\mathcal{C}) = \text{dom}(\mathcal{C}^{\text{op}})$.
- Un résultat prouvé dans une catégorie est également vrai dans sa catégorie duale.

Foncteurs

Grossièrement, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, alors un **foncteur** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ donne une "image" de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{D}$. En termes de diagrammes[2] :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "F"'] \\ \mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(C) \end{tikzcd}$$

On parle ici de foncteurs **covariants**, mais il existe également des foncteurs **contravariants**.

Applications entre foncteurs

On peut établir des correspondances entre les foncteurs, appelées **transformations naturelles**. Leur composition est illustrée comme suit :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[d, "\eta"'] \\ G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

On dit que η_X est la composante X de la transformation naturelle η.

Et des isomorphismes ?

Si $F \xrightarrow{\eta} G$ et $G \xrightarrow{\nu} F$ telles que $\eta\circ\nu = 1$ alors cela définit un **isomorphisme naturel**, ce que l'on notera par $F \cong G$. Autrement dit, chaque composante de la transformation naturelle est un isomorphisme.

Propriété universelle

Pour définir une certaine notion au sens large, on utilise une **propriété universelle** (UMP) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(A) \arrow[d, dashed, "F(m)"] \\ & F(A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "\exists! m"] \\ A' \end{tikzcd}$$

L'UMP est fréquemment définie comme une (ou plusieurs) condition d'existence.

Exemples de propriétés universelles

Monoïde libre : Dans la définition, X est simplement un ensemble.

Produit : Un produit[3] est caractérisé par deux projecteurs tels que toutes les informations du produit y sont contenues. Ni plus ni moins.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

Algèbre enveloppante universelle : Étant donné une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, peut-on construire une algèbre associative dont le commutateur correspond au crochet de Lie de $\mathfrak{g}$?

1. *Algèbre tensorielle* : $T(\mathfrak{g}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n}$ avec $\mathfrak{g}^{\otimes 0} = K$ et $\sigma : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$.
2. *Algèbre enveloppante* : $[X,Y] \stackrel{!}{=} X\otimes Y - Y \otimes X$. On a l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\sim$.
3. *Propriété universelle* : Soit φ un homomorphisme t.q. $\varphi([X,Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X)$, alors il existe un unique homomorphisme $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que le diagramme commute

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

En pratique ?

Le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ caractérise les **opérateurs de Casimir**. Le carré du moment angulaire $\mathbf{J}^2$ est l'exemple typique, $\mathbf{J}^2 := j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = l(l+1)$. Plus précisément,

$$C := \sum_{i=1}^{n} X_i X^i \in U(\mathfrak{g}), \qquad [C, X_i] = 0, \qquad X_i, X^i \in \mathfrak{g}.$$

Le lemme de Yoneda

Il s'agit d'un résultat central de la théorie des catégories[1] : pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ et pour tout foncteur $F \in \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$, il existe un unique isomorphisme $\boxed{\text{Hom}(Y(C), F) \cong F(C)}$. Un corollaire important est que $\boxed{Y(C) \cong Y(D) \Leftrightarrow C \cong D}$.

- L'entité $\text{Hom}(-, A) : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$ est un **foncteur représentant**.
- L'élément $Y(C)$ est l'**intégration de Yoneda**.
- La catégorie $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ est la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$.
- Le lemme de Yoneda généralise le **théorème de Cayley**.

Références

1. Mac Lane, Saunders. *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed. Springer, 1998.
2. Awodey, Steve. *Category Theory*, 2nd ed. Oxford University Press, 2010.
3. Milewski, Bartosz. *Category Theory for Programmers*. Open Access Book, 2017.