

Introduction à la Théorie des Catégories

Aurélien Vandeweyer

Mattia Serrani

Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation, Université de Mons, Belgique

Introduction

La théorie des catégories^[1] est une branche fondamentale des mathématiques qui permet d'étudier des concepts en les généralisant grâce à des propriétés universelles communes, décrivant ainsi des structures générales indépendamment des détails spécifiques propres à chaque domaine.

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

La définition que nous proposons^[2] ne dépend d'aucune représentation particulière :

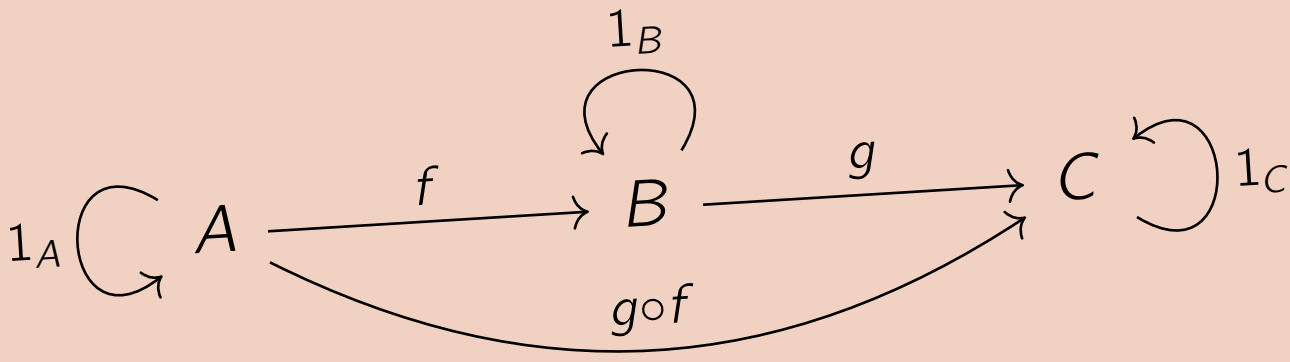
- Une **catégorie** \mathcal{C} consiste en
- Une collection d'**objets** A, B, C, \dots
 - Une collection de **morphismes** entre les objets f, g, h, \dots

telle que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :

- Une loi de **composition** : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \implies g \circ f : A \rightarrow C$.
- Une loi d'**identité** : $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.
- Une loi d'**associativité** : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Ce sont les flèches qui comptent vraiment !

Un objet est entièrement caractérisé par son **morphisme identité**^[2].

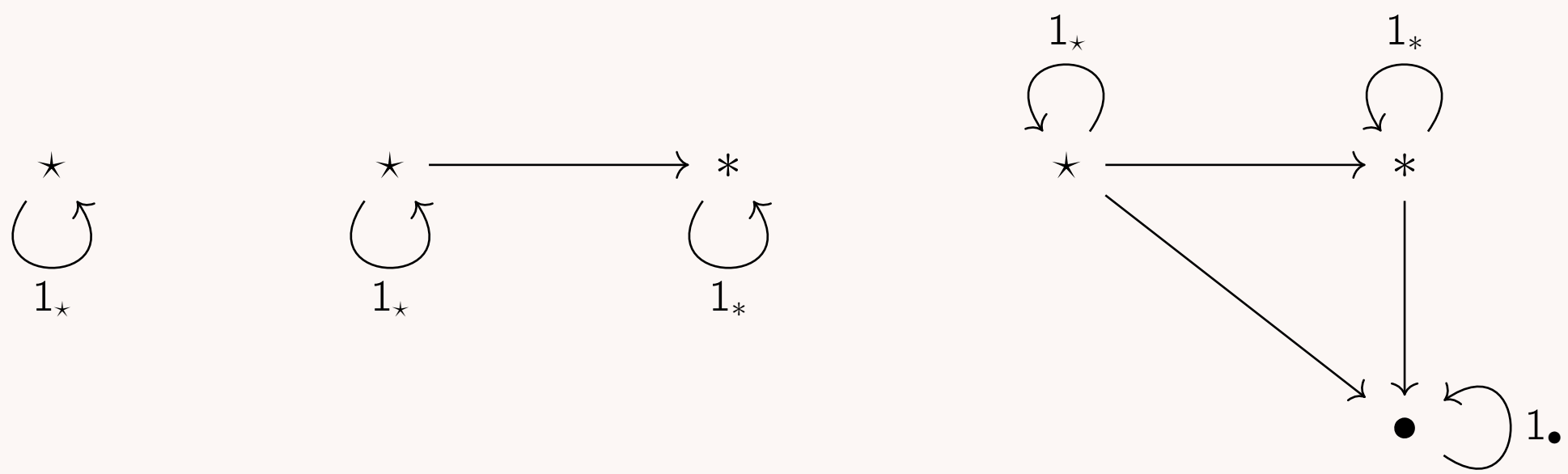


Exemples de catégories

Set : Les objets sont les ensembles et les morphismes sont les fonctions.

Pos : Les objets sont les posets et les morphismes sont les fonctions monotones.

Catégories finies : la collection d'objets et de morphismes sont des ensembles finis.



Monoïde : Un monoïde est une catégorie d'un seul objet, les flèches sont les éléments du monoïde,



Groupe : Un groupe G est un monoïde munis d'un inverse, donc G est une catégorie avec un seul objet et dont chaque morphisme est un isomorphisme.

Et si on inverse le sens des flèches ?

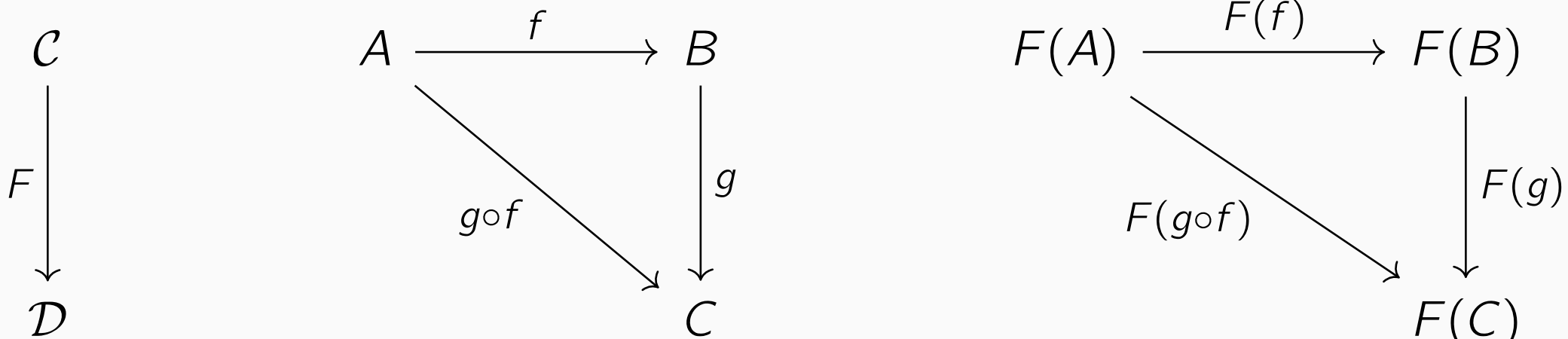
La **catégorie opposée** \mathcal{C}^{op} d'une catégorie \mathcal{C} consiste à l'inversion des flèches :



- $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.
- $\text{dom}(\mathcal{C}) = \text{cod}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ et $\text{cod}(\mathcal{C}) = \text{dom}(\mathcal{C}^{\text{op}})$.
- Un résultat prouvé dans une catégorie est également vrai dans sa catégorie duale.

Foncteurs

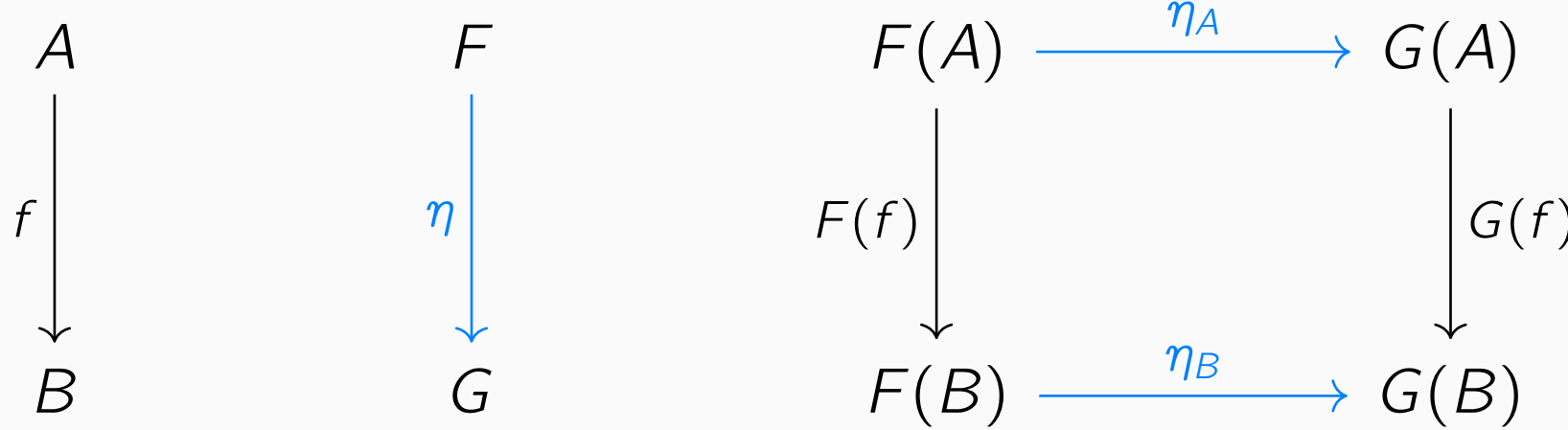
Grossièrement, si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories, alors un **foncteur** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ donne une "image" de la catégorie \mathcal{C} dans la catégorie \mathcal{D} . En termes de diagrammes^[2] :



On parle ici de foncteurs **covariants**, mais il existe également des foncteurs **contravariants**.

Applications entre foncteurs

On peut établir des correspondances entre les foncteurs, appelées **transformations naturelles**. Leur composition est illustrée comme suit :



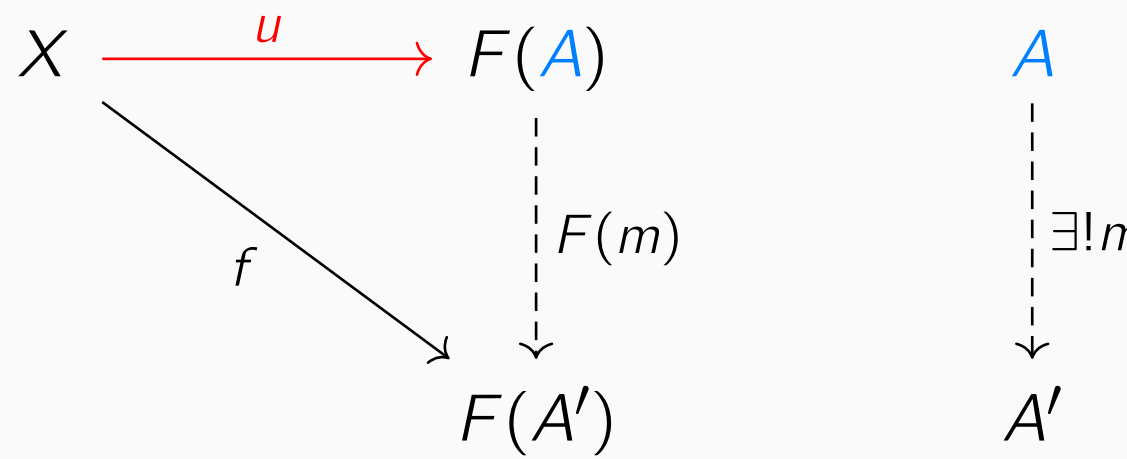
On dit que η_X est la composante X de la transformation naturelle η .

Et des isomorphismes ?

Si $F \xrightarrow{\eta} G$ et $G \xrightarrow{\nu} F$ telles que $\eta \circ \nu = 1$ alors cela définit un **isomorphisme naturel**, ce que l'on notera par $F \cong G$. Autrement dit, chaque composante de la transformation naturelle est un isomorphisme.

Propriété universelle

Pour définir une certaine notion au sens large, on utilise une **propriété universelle** (UMP) :

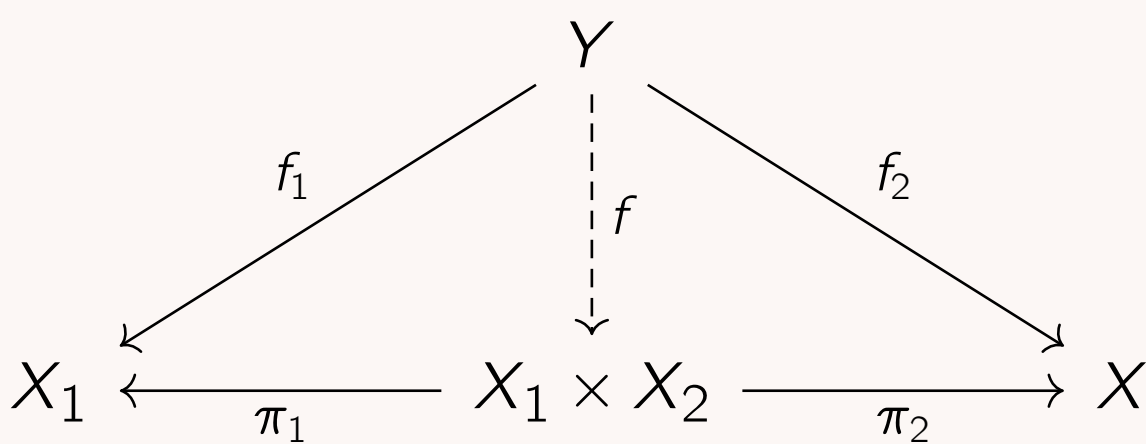


L'UMP est fréquemment définie comme une (ou plusieurs) condition d'existence.

Exemples de propriétés universelles

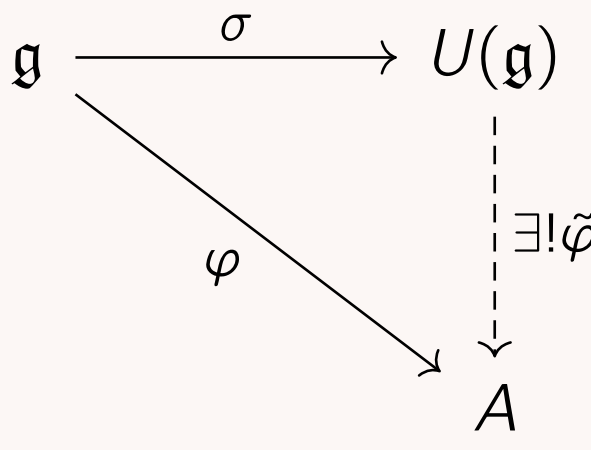
Monoïde libre : Dans la définition, X est simplement un ensemble.

Produit : Un produit^[3] est caractérisé par deux projecteurs tels que toutes les informations du produit y sont contenues. Ni plus ni moins.



Algèbre enveloppante universelle : Étant donné une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} , peut-t-on construire une algèbre associative dont le commutateur correspond au crochet de Lie de \mathfrak{g} ?

1. **Algèbre tensorielle** : $T(\mathfrak{g}) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n}$ avec $\mathfrak{g}^{\otimes 0} = K$ et $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathfrak{g})$.
2. **Algèbre enveloppante** : $[X, Y] := X \otimes Y - Y \otimes X$. On a l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / \sim$.
3. **Propriété universelle** : Soit φ un homomorphisme t.q. $\varphi([X, Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X)$, alors il existe un unique homomorphisme $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tel que le diagramme commute



En pratique ?

Le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ caractérise les **opérateurs de Casimir**. Le carré du moment angulaire \mathbf{J}^2 est l'exemple typique, $\mathbf{J}^2 := j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = l(l+1)$. Plus précisément,

$$C := \sum_{i=1}^n X_i X^i \in U(\mathfrak{g}), \quad [C, X_i] = 0, \quad X_i, X^i \in \mathfrak{g}.$$

Le lemme de Yoneda

Il s'agit d'un résultat central de la théorie des catégories^[1] : pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ et pour tout foncteur $F \in \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$, il existe un unique isomorphisme $\text{Hom}(Y(C), F) \cong F(C)$. Un corollaire important est que $Y(C) \cong Y(D) \iff C \cong D$.

- L'entité $\text{Hom}(-, A) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est un **foncteur représentant**.
- L'élément $Y(C)$ est l'**intégration de Yoneda**.
- La catégorie $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ est la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- Le lemme de Yoneda généralise le **théorème de Cayley**.

Références

1. Mac Lane, Saunders. *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed. Springer, 1998.
2. Awodey, Steve. *Category Theory*, 2nd ed. Oxford University Press, 2010.
3. Milewski, Bartosz. *Category Theory for Programmers*. Open Access Book, 2017.