

Segunda Lista de Exercícios Análise de Algoritmos – Pós – 2º. Semestre/2018

- 1- Seja a expressão $y = x_1 \text{ op}_1 x_2 \text{ op}_2 x_3 \text{ op}_3 x_4 \text{ op}_4 \dots \text{ op}_{n-1} x_n$, onde cada x_i é um inteiro positivo e cada op_i é um operador (+ ou \times) que ocorre alternadamente. Deseja-se obter o valor mínimo de y , isto é, a ordem de execução das operações a fim de obter o menor valor de y . Utilize a técnica de programação dinâmica para resolver este problema, considerando $M(i, j)$ a notação para expressar o valor mínimo da expressão.
 - (a) Dado o exemplo $y = 2 + 3 \times 7 + 4 \times 5$, mostre como seria construída a sua solução através de um algoritmo de programação dinâmica. Mostre a matriz e os resultados que seriam obtidos em cada passo da execução.
 - (b) Qual o significado de i e j em $M(i, j)$?
 - (c) Qual o caso base para $M(i, j)$?
 - (d) Qual o caso geral de $M(i, j)$?
 - (e) Apresente e prove a subestrutura ótima.
 - (f) Apresente a recorrência para este problema.
 - (g) Observe que a solução deste problema é a parentização ótima que resulta no valor mínimo de y . Apresente todas as soluções ótimas através dos resultados obtidos em (a).
- 2- Estude o problema da Mochila.
- 3- Modifique o algoritmo de busca em profundidade para que este identifique se o grafo contém ciclos. Considere que o grafo é não direcionado, sendo assim, os ciclos têm, pelo menos três vértices. Note que esta modificação não deve aumentar o tempo de execução da busca.
- 4- Em geral, para a prova da razão de aproximação é necessário estabelecer um limite inferior para a solução ótima. Assim, apresente o limite inferior para o problema do escalonamento, quando a diferença entre os tempos de processamentos dos processos é pequena. Também apresente o limite inferior para o problema do empacotamento (Next fit), considerando que a capacidade da caixa seja C . É possível identificar alguma relação entre estes dois limites?
- 5- Supondo a heurística Next Fit para o problema do empacotamento e a capacidade das caixas igual a 15, apresente o limite inferior da solução ótima, dada por OPT, e descreva em palavras o seu significado. Em seguida, prove a razão de aproximação do Next Fit, sendo a solução deste algoritmo dada por N. Considere apenas o caso onde N é par.
- 6- Dada uma sequência $S = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ de n inteiros positivos, o objetivo é determinar uma subsequência C de S , tal que o resultado da aplicação alternante dos operadores ($-$ e $+$) nos elementos de C , retorne o maior valor possível. Os elementos de C devem estar na mesma ordem em que aparecem em S , isto é, os elementos não podem mudar de posição. Assim, devem ser testadas todas as subsequências de S da esquerda para a direita, de tal maneira que a aplicação alternante dos operadores $-$ e $+$, retorne o maior valor possível.

Veja os exemplos abaixo:

$S = [4, 9, 2, 4, 1, 3, 7]$, a subsequência $C = [9, 2, 4, 1, 7]$ é a que retorna o maior valor dado por $9 - 2 + 4 - 1 + 7 = 17$.

$S = [7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$, $C = [7]$.

Um algoritmo para encontrar C , a solução ótima, para uma dada sequência S , através de programação dinâmica, utiliza dois vetores I e P para armazenar o resultado, com posições de 0 a n . O vetor I armazena subsoluções de comprimento ímpar e P as de comprimento par. Isto é, $I[i]$ armazena a soma alternante máxima obtida até os i 's primeiros elementos da sequência dada, mas considerando apenas subsequências de comprimento ímpar. $P[i]$ armazena a soma alternante máxima até os i 's primeiros

elementos da sequência, mas considerando subsequências de comprimento par. Observe que o comprimento de C depende dos valores de S. Suponha que o comprimento de S é pelo menos um e todos os seus elementos são inteiros positivos.

- (a) A expressão recursiva para o cálculo do valor da solução é dada abaixo. Apresente seu significado em relação à decomposição em subproblemas e a subestrutura ótima que originou tal expressão.

$$I[i] = \max \{ P[i-1] + x_i, I[i-1] \} \quad e \quad P[i] = \max \{ I[i-1] - x_i, P[i-1] \} \quad , \quad \text{se} \\ i > 0$$

- (b) Para o primeiro exemplo acima, detalhe a representação dos resultados, utilizando o item (a) e mostrando os valores para cada uma das posições dos vetores.
- (c) Baseado na recursão acima, apresente o valor da posição 0 de cada um dos vetores
- (d) Escreva um algoritmo iterativo para realizar o cálculo do valor de C de acordo com os itens (b) e (c).
- (e) Apresente o tempo de execução do algoritmo em (d).