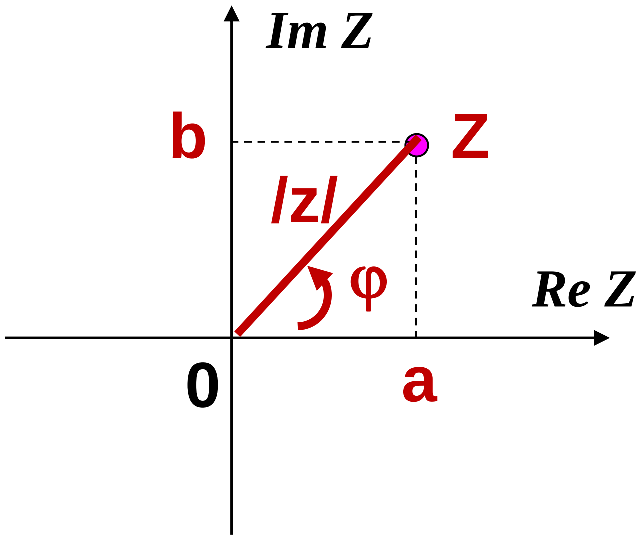
# KIẾN THỨC TOÁN

## 1. SỐ PHỨC

$$\boxed{z = a + jb = |z|e^{j\varphi} = |z|\cos\varphi + j.|z|\sin\varphi}$$

Với: $\begin{cases} |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} \\ \boldsymbol{\varphi} = \arg(\boldsymbol{z}) = \arctan(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}) \end{cases}$




❖ ***Euler:*** $\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$

Liên hiệp phức: $z^* = a - jb = |z|e^{-j\varphi}$

Ví dụ: $z = 2 + j2 = 2\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + j2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

## ❖ Các phép tính trên số phức:

$$z_1 = a_1 + jb_1 = |z_1| e^{j\varphi_1} \qquad z_2 = a_2 + jb_2 = |z_2| e^{j\varphi_2}$$

- Cộng trừ: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$
- Nhân: $z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Chia: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- Tính chất: $z_1^* z_2^* = (z_1 z_2)^*$

## ❖ Các phép tính trên số phức:

### 1. Số phức

Một số phức có dạng:

$$z = a + bi$$

Trong đó:

- $a$: phần thực
- $b$: phần ảo
- $i$: đơn vị ảo, với $i^2 = -1$

Hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$.

# ❖ Các phép tính trên số phức:

## 2. Phép cộng

Cộng hai số phức:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- **Phần thực**: cộng các phần thực.
- **Phần ảo**: cộng các phần ảo.

Ví dụ:

$$(3 + 2i) + (1 + 4i) = (3 + 1) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

## 3. Phép trừ

Trừ hai số phức:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

- **Phần thực**: trừ các phần thực.
- **Phần ảo**: trừ các phần ảo.

Ví dụ:

$$(3 + 2i) - (1 + 4i) = (3 - 1) + (2 - 4)i = 2 - 2i$$

# ❖ Các phép tính trên số phức:

## 4. Phép nhân

Nhân hai số phức:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$

Áp dụng quy tắc phân phối và $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

**Ví dụ:**

$$(3 + 2i)(1 + 4i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4i + 2i \cdot 1 + 2i \cdot 4i$$

$$= 3 + 12i + 2i + 8i^2$$

Do $i^2 = -1$:

$$= 3 + 12i + 2i - 8 = -5 + 14i$$

# ❖ Các phép tính trên số phức:

## 5. Phép chia

Chia hai số phức $z_1$ cho $z_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

Nhân cả tử và mẫu với **liên hợp** của mẫu:

$$\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

- Mẫu số trở thành: $a_2^2 + b_2^2$
- Tử số thực hiện phép nhân như đã trình bày ở phép nhân.

**Ví dụ:**

$$\frac{3 + 2i}{1 + 4i}$$

Nhân tử và mẫu với liên hợp của $1 + 4i$, là $1 - 4i$:

$$\frac{3 + 2i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{(3 + 2i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)}$$

Mẫu số:

$$(1 + 4i)(1 - 4i) = 1^2 - (4i)^2 = 1 - 16(-1) = 1 + 16 = 17$$

Tử số:

$$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4i) + 2i \cdot 1 + 2i \cdot (-4i)$$

$$= 3 - 12i + 2i - 8i^2$$

Do $i^2 = -1$:

$$= 3 - 12i + 2i + 8 = 11 - 10i$$

Kết quả:

$$\frac{3 + 2i}{1 + 4i} = \frac{11 - 10i}{17} = \frac{11}{17} - \frac{10}{17} i$$

## 2. CHUỖI SỐ

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} : & |a| < 1 \\ \infty : & |a| \geq 1 \end{cases}$$

- $$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

- $$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

# Chương 1: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.1 Khái niệm tín hiệu và hệ thống

1.2 Tín hiệu rời rạc

1.3 Hệ thống tuyến tính bất biến

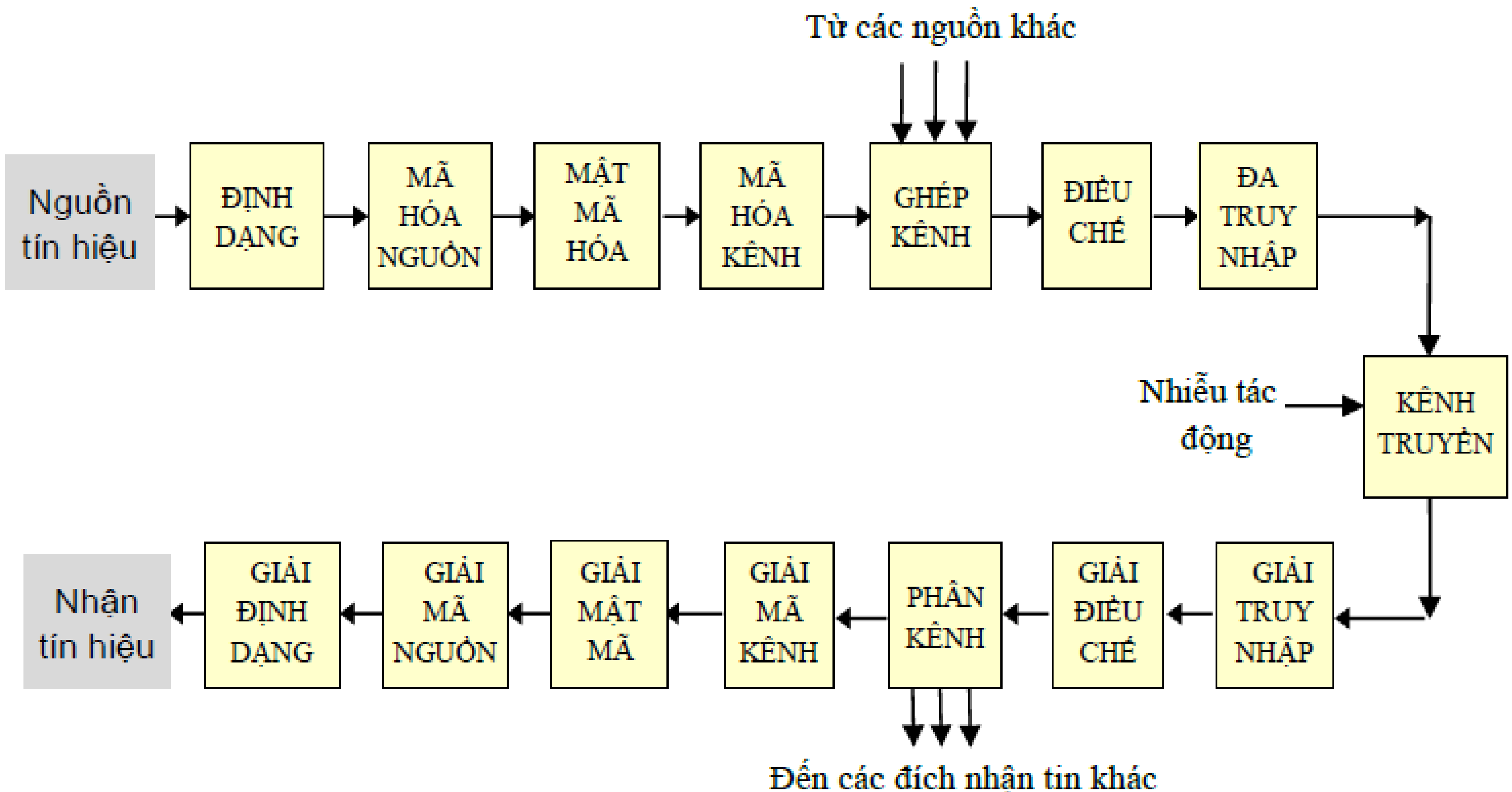
1.4 Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

1.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

1.6 Tương quan các tín hiệu

# 1.1 KHÁI NIỆM TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

## ❖ Sơ đồ các khối chức năng của hệ thống thông tin số



# 1.1 KHÁI NIỆM TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

## 1.1.1 KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI TÍN HIỆU

### a. Khái niệm tín hiệu

- **Tín hiệu** là biểu hiện vật lý của thông tin
- ✓ Tín hiệu được biểu diễn một hàm theo một hay nhiều biến số độc lập.
- Ví dụ về tín hiệu:
- ✓ **Tín hiệu âm thanh, tiếng nói** là sự thay đổi áp suất không khí theo thời gian
- ✓ **Tín hiệu hình ảnh** là hàm độ sáng theo 2 biến không gian và thời gian
- ✓ **Tín hiệu điện** là sự thay đổi điện áp, dòng điện theo thời gian

## b. Phân loại tín hiệu

- **Theo các tính chất đặc trưng:**

✓ Tín hiệu xác định & tín hiệu ngẫu nhiên

- *Tín hiệu xác định*: biểu diễn theo một hàm số
- *Tín hiệu ngẫu nhiên*: không thể dự kiến trước hành vi

✓ Tín hiệu tuần hoàn & tín hiệu không tuần hoàn

- *Tín hiệu tuần hoàn*: $x(t)=x(t+T)=x(t+nT)$
- *Tín hiệu không tuần hoàn*: không thoả tính chất trên

✓ Tín hiệu nhân quả & không nhân quả

- *Tín hiệu nhân quả*: $x(t)=0 : t<0$
- *Tín hiệu không nhân quả*: không thoả tính chất trên

- Tín hiệu thực & tín hiệu phức
  - *Tín hiệu thực*: hàm theo biến số thực
  - *Tín hiệu phức*: hàm theo biến số phức
- Tín hiệu năng lượng & tín hiệu công suất
  - *Tín hiệu năng lượng*: **$0<E<\infty$**
  - *Tín hiệu công suất*: **$0<P<\infty$**
- Tín hiệu đối xứng (chẵn) & tín hiệu phản đối xứng (lẽ)
  - *Tín hiệu đối xứng*: $x(-n)=x(n)$
  - *Tín hiệu phản đối xứng*: $-x(-n)=x(n)$

- Tín hiệu thực & tín hiệu phức
  - *Tín hiệu thực*: hàm theo biến số thực
  - *Tín hiệu phức*: hàm theo biến số phức
- Tín hiệu năng lượng & tín hiệu công suất
  - *Tín hiệu năng lượng*: $\mathbf{0<E<\infty}$
  - *Tín hiệu công suất*: $\mathbf{0<P<\infty}$
- Tín hiệu đối xứng (chẵn) & tín hiệu phản đối xứng (lẽ)
  - *Tín hiệu đối xứng*: $x(-n)=x(n)$
  - *Tín hiệu phản đối xứng*: $-x(-n)=x(n)$

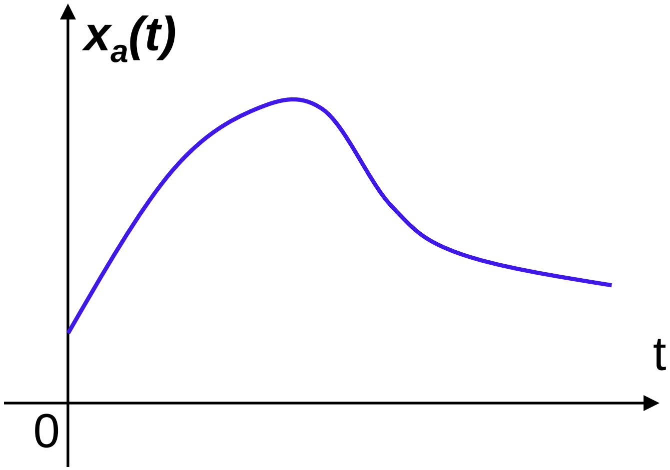
- **Theo biến thời gian:**

✓ *Tín hiệu liên tục*: có biến thời gian liên tục

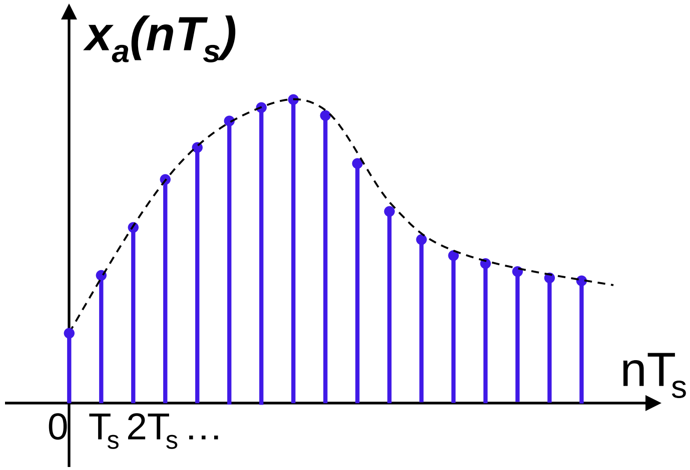
✓ *Tín hiệu rời rạc*: có biến thời gian rời rạc

- **Theo biến thời gian và biên độ:**

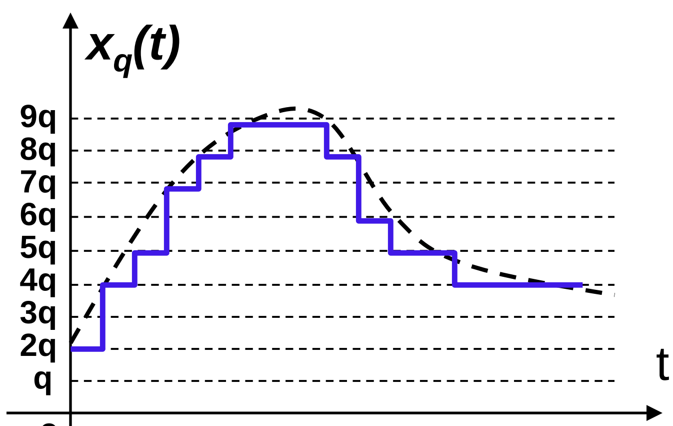
| | **Tín hiệu tương tự (analog)** | **Tín hiệu rời rạc (lấy mẫu)** | **Tín hiệu lượng tử** | **Tín hiệu số** |
|---|---|---|---|---|
| **Biên độ** | Liên tục | Liên tục | Rời rạc | Rời rạc |
| **Thời gian** | Liên tục | Rời rạc | Liên tục | Rời rạc |



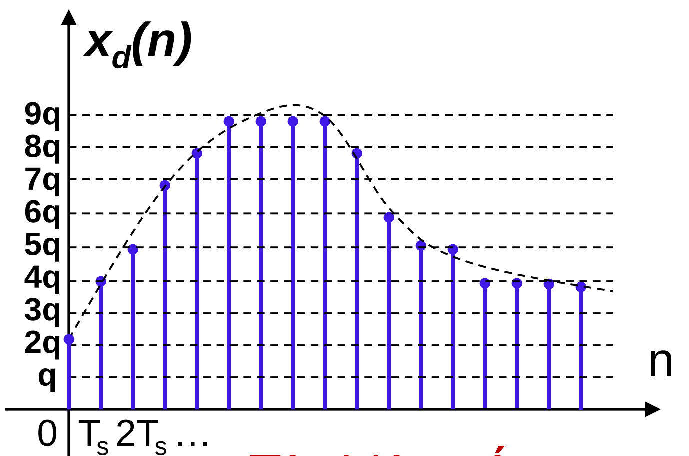

Tín hiệu tương tự




Tín hiệu rời rạc (lấy mẫu)




Tín hiệu lượng tử




Tín hiệu số

## Ví dụ cụ thể về tín hiệu lấy mẫu, lượng tử hóa và tín hiệu số

Giả sử có tín hiệu **âm thanh liên tục** $x(t) = \sin(2\pi f t)$, trong đó $f = 1\,\mathrm{Hz}$.

### 1. Tín hiệu liên tục

- **Dạng**: $x(t) = \sin(2\pi t)$.
- **Ví dụ cụ thể**: Âm thanh phát ra từ một nhạc cụ (dây đàn rung liên tục).

| Thời gian $t$ (giây) | Tín hiệu $x(t)$ |
|---|---|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | 0.587 |
| 0.2 | 0.951 |
| 0.3 | 0.951 |
| 0.4 | 0.587 |

### 2. Tín hiệu lấy mẫu

- Lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ tại các khoảng thời gian $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$.
- **Kết quả**: Tín hiệu chỉ còn giá trị tại các thời điểm $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots$.

| Thời gian $t$ (giây) | Tín hiệu lấy mẫu $x[n]$ |
|---|---|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | 0.587 |
| 0.2 | 0.951 |
| 0.3 | 0.951 |
| 0.4 | 0.587 |

## 3. Tín hiệu lượng tử hóa

- Biên độ $x[n]$ được làm tròn thành 4 mức rời rạc: **0.0, 0.5, 1.0, -0.5, -1.0**.

| Thời gian $t$ (giây) | Tín hiệu lấy mẫu $x[n]$ | Tín hiệu lượng tử hóa |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | 0.587 | 0.5 |
| 0.2 | 0.951 | 1.0 |
| 0.3 | 0.951 | 1.0 |
| 0.4 | 0.587 | 0.5 |

### 4. Tín hiệu số

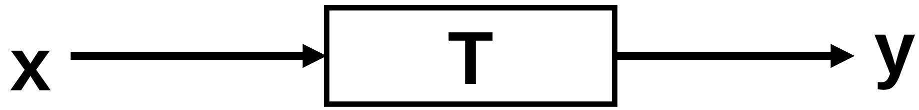
- Tín hiệu lượng tử hóa được mã hóa thành **dãy nhị phân** (bit) để xử lý trên máy tính.
- Ví dụ, với 4 mức lượng tử hóa:
  - $0.0 \rightarrow$ **00**
  - $0.5 \rightarrow$ **01**
  - $1.0 \rightarrow$ **10**
  - $-0.5 \rightarrow$ **11**

| Thời gian $t$ (giây) | Tín hiệu lượng tử hóa | Mã nhị phân (bit) |
|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 00 |
| 0.1 | 0.5 | 01 |
| 0.2 | 1.0 | 10 |
| 0.3 | 1.0 | 10 |
| 0.4 | 0.5 | 01 |

# 1.1.2 KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

## a. Khái niệm hệ thống

- **Hệ thống** đặc trưng toán tử **T** làm nhiệm vụ biến đổi tín hiệu vào **x** thành tín hiệu ra **y**




**Hệ thống**

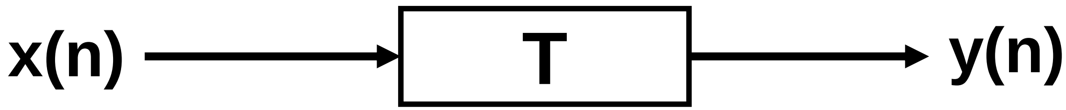
- **Các hệ thống xử lý tín hiệu:**

✓ ***Hệ thống tương tự***: Tín hiệu vào và ra là tương tự

✓ ***Hệ thống rời rạc***: Tín hiệu vào và ra là rời rạc

✓ ***Hệ thống số***: Tín hiệu vào và ra là tín hiệu số

## b. Phân loại các hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc




**Hệ thống**

❖ **Hệ thống tuyến tính & phi tuyến**

- *<u>Hệ tuyến tính</u>:* $T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$
- *<u>Hệ phi tuyến</u>*: không thoả tính chất trên

❖ **Hệ thống bất biến & thay đổi theo thời gian**

- *<u>Hệ bất biến theo thời guan</u>:* nếu tín hiệu vào **x** dịch đi **k** đơn vị thì tín hiệu ra **y** cũng dịch đi **k** đơn vị.
- *<u>Hệ thay đổi theo thời gian</u>*: không thoả tính chất trên

1. **Hệ thống bất biến theo thời gian (Time-Invariant System)**

    - Là hệ thống **không thay đổi** đặc tính khi tín hiệu đầu vào bị dịch thời gian.
    - Nói cách khác, nếu đầu vào $x(t)$ tạo ra đầu ra $y(t)$, thì khi đầu vào dịch thời gian $x(t - t_0)$, đầu ra cũng sẽ dịch $y(t - t_0)$.
    - **Công thức**:

    $$x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

    - **Ví dụ**: $y(t) = 2x(t)$ là hệ thống bất biến, vì khi dịch $x(t - t_0)$, đầu ra cũng dịch $y(t - t_0) = 2x(t - t_0)$.

2. **Hệ thống thay đổi theo thời gian (Time-Variant System)**

    - Là hệ thống mà đặc tính thay đổi theo thời gian. Khi tín hiệu đầu vào bị dịch thời gian, đầu ra không đơn thuần dịch theo thời gian tương ứng.
    - **Công thức**:

    $$x(t - t_0) \to y'(t) \neq y(t - t_0)$$

    - **Ví dụ**: $y(t) = t \cdot x(t)$. Khi $x(t - t_0)$ thay đổi, đầu ra sẽ là:

    $$y(t) = t \cdot x(t - t_0)$$

    Điều này không còn giữ nguyên dạng của $y(t - t_0)$.

## ❖ Hệ thống nhân quả & không nhân quả

- *Hệ nhân quả:* Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở thời điểm quá khứ và hiện tại
- *Hệ không nhân quả*: không thoả tính chất trên

## ❖ Hệ thống ổn định & không ổn định

- *Hệ thống ổn định:* nếu tín hiệu vào bị chặn $|x(n)| < \infty$ thì tín hiệu ra cũng bị chặn $|y(n)| < \infty$
- *Hệ thống không ổn định*: không thoả tính chất trên

1. **Hệ thống nhân quả (Causal System)**

   - Là hệ thống mà **đầu ra tại thời điểm** $t$ chỉ phụ thuộc vào **đầu vào tại thời điểm** $t$ hoặc các thời điểm **trước đó** ($t' \leq t$).
   - **Công thức:** $y(t) = f(x(t), x(t-1), x(t-2), \ldots)$
   - **Đặc điểm**: Hệ thống này không "nhìn trước tương lai" vì đầu ra không phụ thuộc vào giá trị của đầu vào tại thời điểm tương lai ($t' > t$).
   - **Ví dụ:** $y(t) = x(t) + 2x(t-1)$

     Đầu ra $y(t)$ chỉ phụ thuộc vào $x(t)$ và $x(t-1)$.

2. **Hệ thống không nhân quả (Non-Causal System)**

   - Là hệ thống mà **đầu ra tại thời điểm** $t$ phụ thuộc vào **đầu vào tại thời điểm tương lai** ($t' > t$).
   - **Công thức:** $y(t) = f(x(t), x(t+1), x(t-1), \ldots)$
   - **Đặc điểm**: Hệ thống này "nhìn trước tương lai", điều này không thực tế trong các hệ thống thực tế, nhưng thường gặp trong các ứng dụng xử lý tín hiệu số như lọc tín hiệu offline.
   - **Ví dụ:** $y(t) = x(t) + x(t+1)$

     Đầu ra $y(t)$ phụ thuộc vào giá trị $x(t)$ và $x(t+1)$.

# 1.2 TÍN HIỆU RỜI RẠC

## 1.2.1 BIỂU DIỄN TÍN HIỆU RỜI RẠC

❖ **Tín hiệu rời rạc** được biểu diễn bằng một dãy các giá trị với phần tử thứ n được ký hiệu **x(n)**.

| Tín hiệu liên tục $x_a(t)$ | Lấy mẫu $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $t = nT_s$ | Tín hiệu rời rạc $x_a(nT_s) \equiv x(n)$ | $T_s=1$ |
|---|---|---|---|

Với $T_s$ – chu kỳ lấy mẫu và **n** – số nguyên

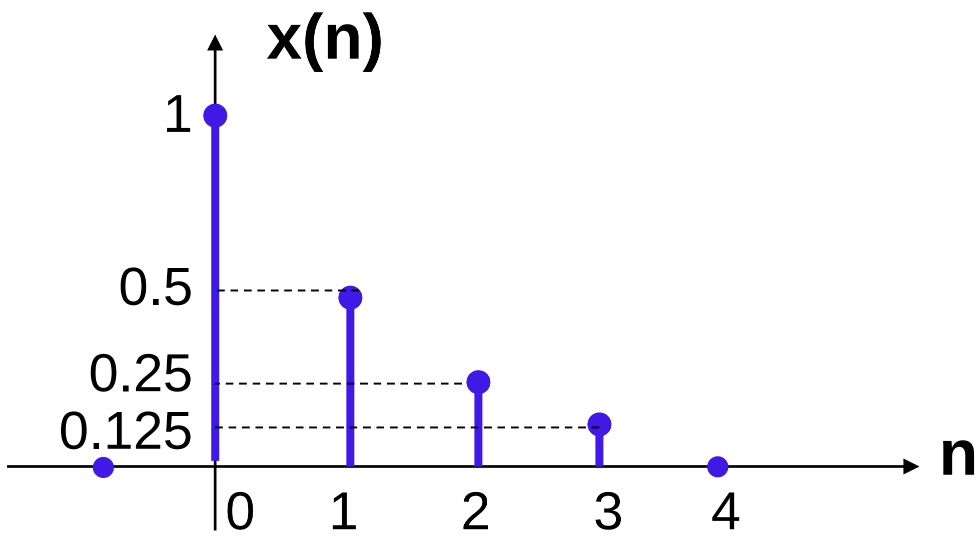
✓ **Tín hiệu rời rạc** có thể biểu diễn bằng một trong các dạng: hàm số, dãy số & đồ thị.

❖ **<u>Hàm số</u>:** $$x(n)=\begin{cases}(0.5)^n: & 0\le n\le 3\\ 0: & \text{n còn lại}\end{cases}$$

❖ **<u>Dãy số</u>:** $$x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right\}$$

$\uparrow$ - Gốc thời gian n=0

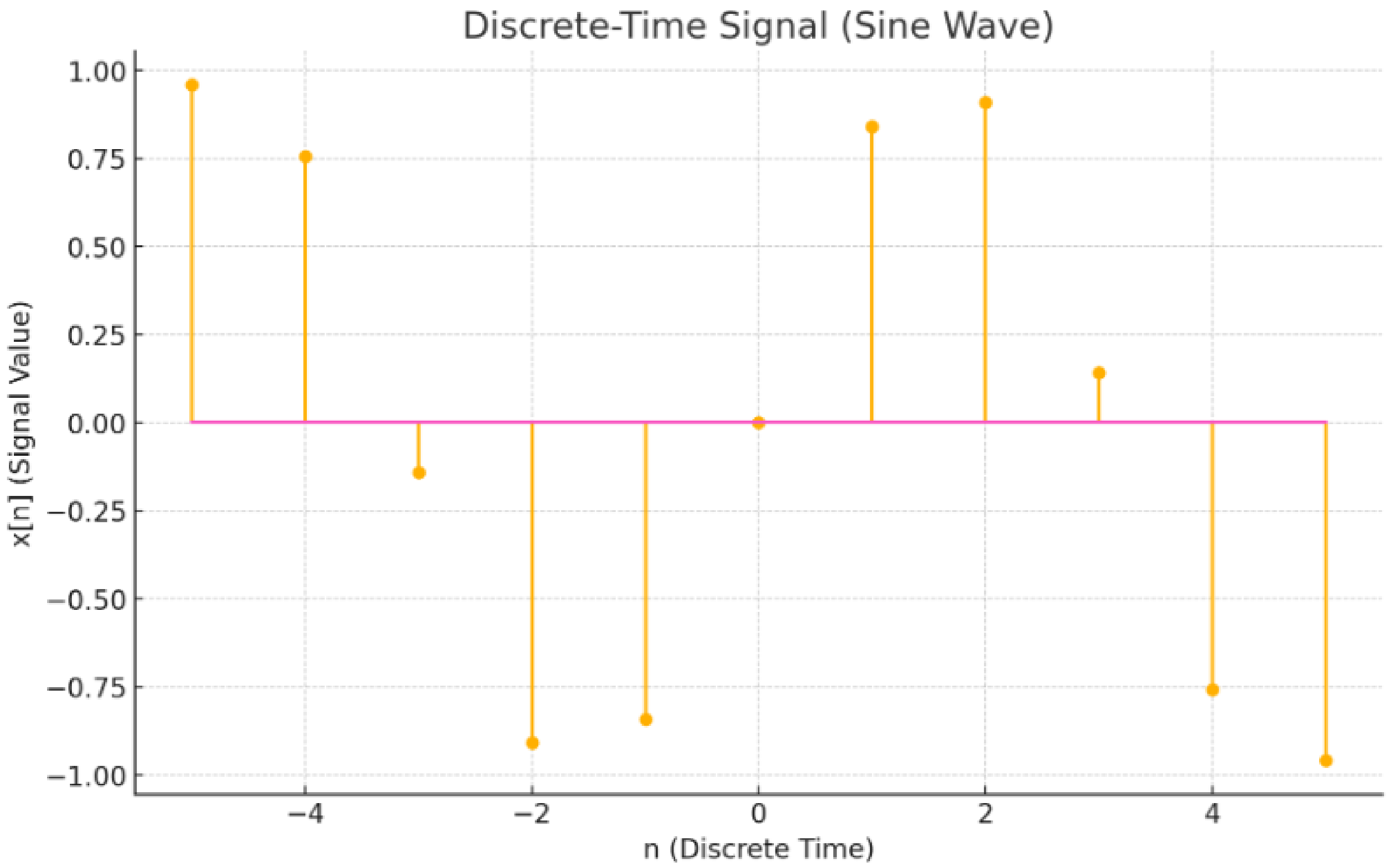
❖ **<u>Đồ thị</u>:**



# Code python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Định nghĩa tín hiệu rời rạc
n = np.arange(-5, 6)  # Thời gian rời rạc từ -5 đến 5
x_n = np.sin(n)       # Tín hiệu, ví dụ sóng sine
# Vẽ tín hiệu rời rạc
plt.stem(n, x_n, use_line_collection=True)
plt.title("Discrete-Time Signal (Sine Wave)")
plt.xlabel("n (Discrete Time)")
plt.ylabel("x[n] (Signal Value)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

# Code python

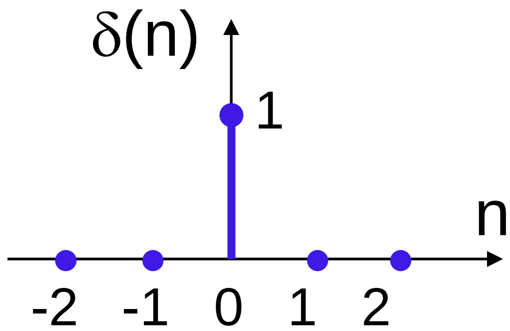


Discrete-Time Signal (Sine Wave)
x[n] (Signal Value)
n (Discrete Time)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−4
−2
0
2
4

# 1.2.2 MỘT SỐ DÃY RỜI RẠC CƠ BẢN

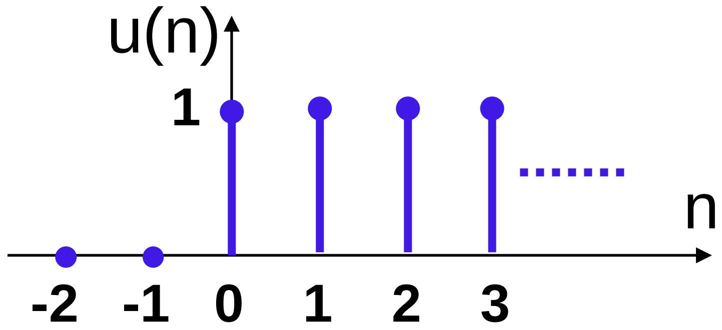
- **Dãy xung đơn vị:**

$$\delta(n)=\begin{cases}1: & n=0\\ 0: & n \text{ còn lại}\end{cases}$$



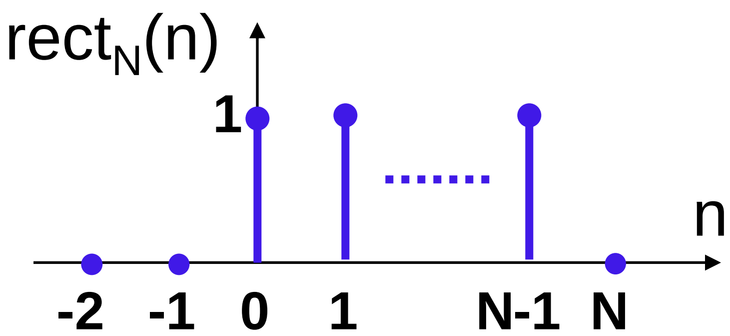

- **Dãy nhảy bậc đơn vị:**

$$u(n)=\begin{cases}1: & n\geq 0\\ 0: & n<0\end{cases}$$



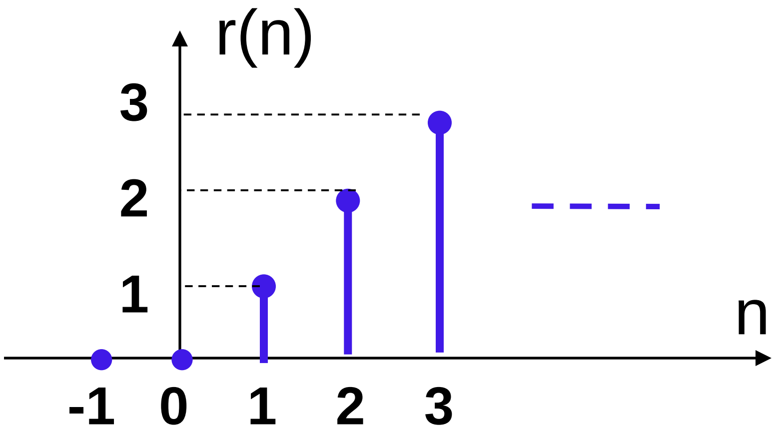

- **Dãy chữ nhật:**

$$rect_N(n)=\begin{cases}1: & \mathrm{N}-1\geq n\geq 0\\ 0: & n \text{ còn lại}\end{cases}$$



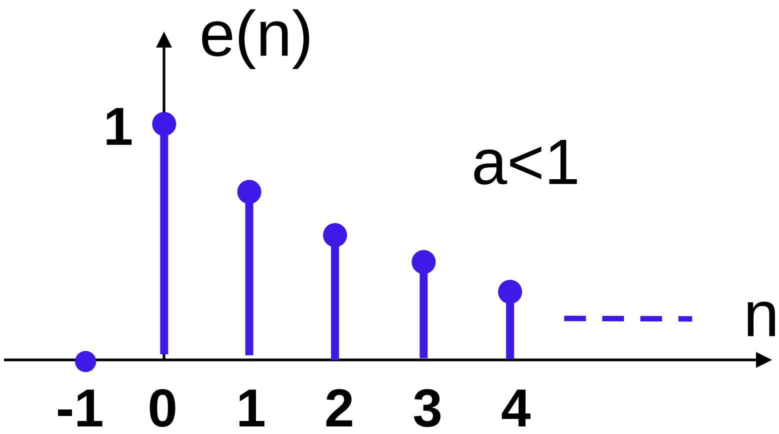
- **<u>Dãy dốc đơn vị</u>:**

$$r(n)=\begin{cases} n: \ n\geq 0 \\ 0: n<0 \end{cases}$$




- **<u>Dãy hàm mũ thực</u>:**

$$e(n)=\begin{cases} a^n: \ n\geq 0 \\ 0: n<0 \end{cases}$$



# 1.2.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU RỜI RẠC

Cho 2 dãy: $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\};\ x_2(n)=\{2,\underset{\uparrow}{3},4\}$

**a. Cộng 2 dãy:**

Cộng các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n)+x_2(n)=\{2,\underset{\uparrow}{4},6,3\}$$

**b. Nhân 2 dãy:**

Nhân các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n).x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{3},8\}$$

# 1.2.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU RỜI RẠC

Cho dãy: $x(n) = \{1,\underset{\uparrow}{2},3,4\}$

**c. <u>Dịch:</u>** x(n) -> $x(n-n_o)$

**$n_0$>0** – dịch sang phải $n_0$ đơn vị $\qquad x(n-1) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

**$n_0$<0** – dịch sang trái $n_0$ đơn vị $\qquad x(n+1) = \{1,2,\underset{\uparrow}{3},4\}$

**d. <u>Gập tín hiệu:</u>** x(n) -> x(-n)

Lấy đối xứng qua trục tung $\qquad x(-n) = \{4,3,\underset{\uparrow}{2},1\}$

# 1.3 HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BiẾN

## 1.3.1 ĐÁP ỨNG XUNG CỦA HỆ THỐNG

### a. Biểu diễn tín hiệu theo các xung đơn vị

**Ví dụ 1.3.1**: Biểu diễn dãy $x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,5\}$ theo các xung đơn vị

$$x(n)=1\delta(n+2)+2\delta(n+1)+3\delta(n)+4\delta(n-1)+5\delta(n-2)$$

$$x(n)=x(-2)\delta(n+2)+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)$$

**Tổng quát:** $$\boxed{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)}$$

## b. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(n)=T[x(n)]$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow h(n)=T[\delta(n)]$$

$$\boxed{h(n) = y(n)\big|_{x(n)=\delta(n)}}$$

- Đáp ứng xung ***h(n)*** của hệ thống là đáp ứng ra khi tín hiệu vào là dãy xung đơn vị **δ(n)**

Với $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$ , suy ra:

$$y(n)=T[x(n)]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)}$$

Phép tổng chập 2 dãy x(n) và h(n)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

➢ ***h(n) đặc trưng hòan tòan cho hệ thống trong miền n***

## c. Cách tìm tổng chập

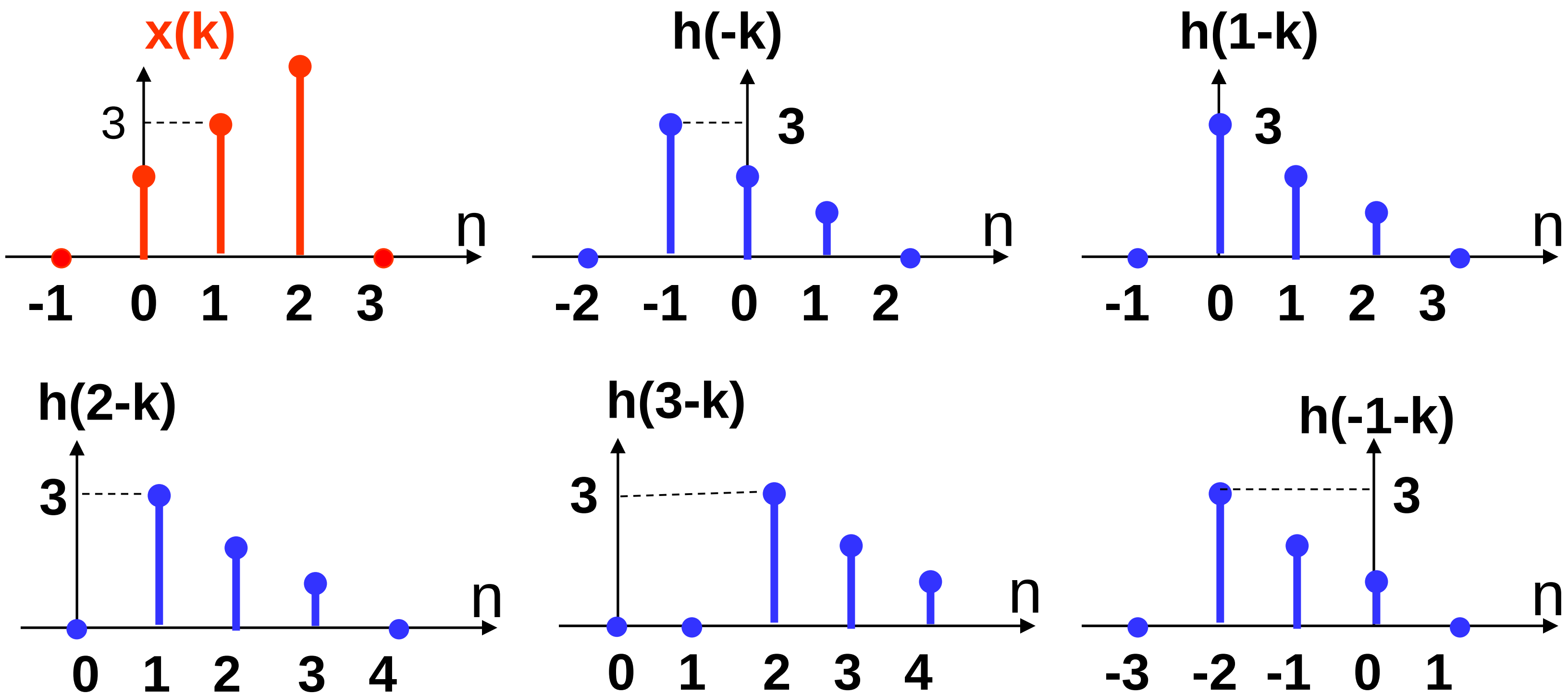
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Đổi biến số n ->k: **x(k) & h(k)**
- Gập h(k) qua trục tung, được **h(-k)**
- Dịch h(-k) đi n đơn vị: sang phải nếu **n>0**, sang trái nếu **n<0** được **h(n-k)**
- Nhân các mẫu 2 dãy x(k) và h(n-k) và cộng lại

**<u>Ví dụ 1.3.2:</u>** Cho 2 dãy $x(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ và $h(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$

Hãy tìm y(n) = x(n)*h(n)

- Đổi biến số n->k: $x(k)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ và $h(k)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$
- Gập h(k) qua trục tung: $h(-k)=\{3,\underset{\uparrow}{2},1\}$
- Xác định h(n-k):



**n>0** dịch sang phải:

$$h(1-k)=\{\underset{\uparrow}{3},2,1\}$$

$$h(2-k)=\{\underset{\uparrow}{0},3,2,1\}$$

$$h(3-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,3,2,1\}$$

**n<0** dịch sang trái:

$$h(-1-k)=\{3,2,\underset{\uparrow}{1}\}$$

$$h(-2-k)=\{3,2,1,\underset{\uparrow}{0}\}$$

$$y(0)=\sum_k x(k)h(0-k)=7$$

$$y(1)=\sum_k x(k)h(1-k)=16$$

$$y(2)=\sum_k x(k)h(2-k)=17$$

$$y(3)=\sum_k x(k)h(3-k)=12$$

$$\ldots\ldots$$

$$y(-1)=\sum_k x(k)h(-1-k)=2$$

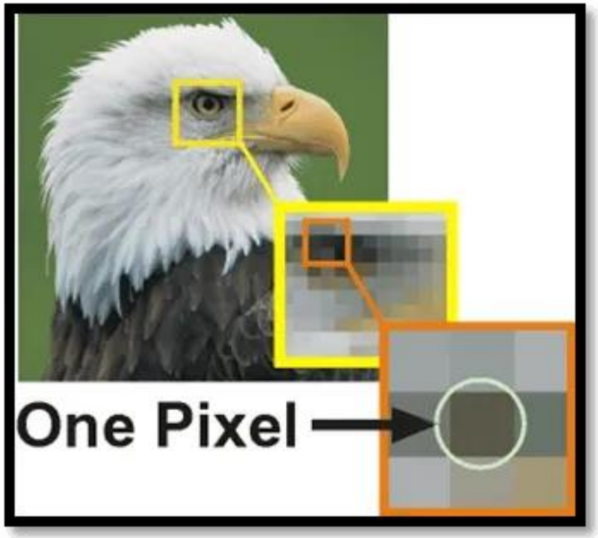
$$y(-2)=\sum_k x(k)h(-2-k)=0$$

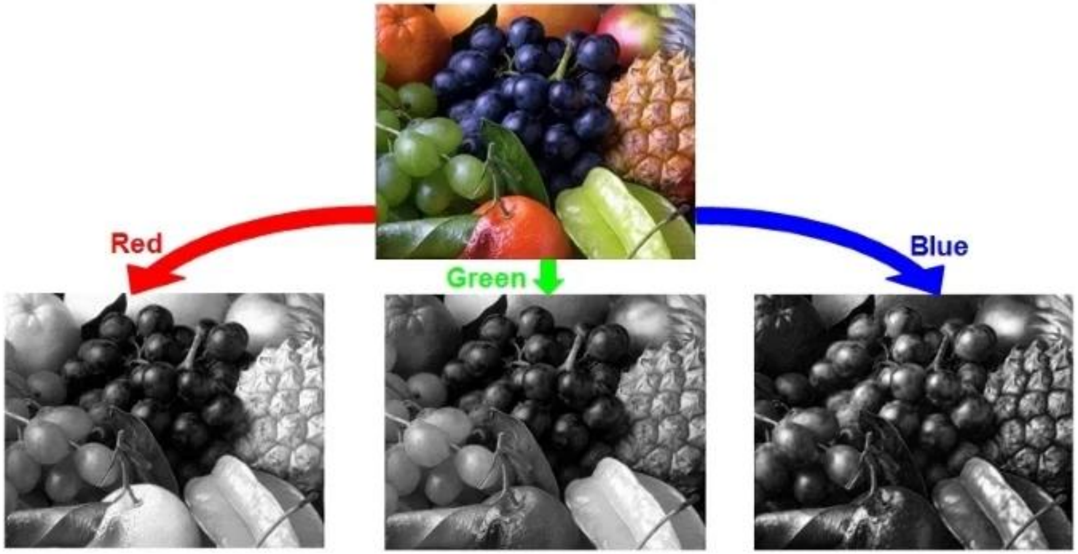
$$\ldots\ldots$$

$$\boxed{y(n)=\{2,\underset{\uparrow}{7},16,17,12\}}$$

# Tích chập trên miền ảnh

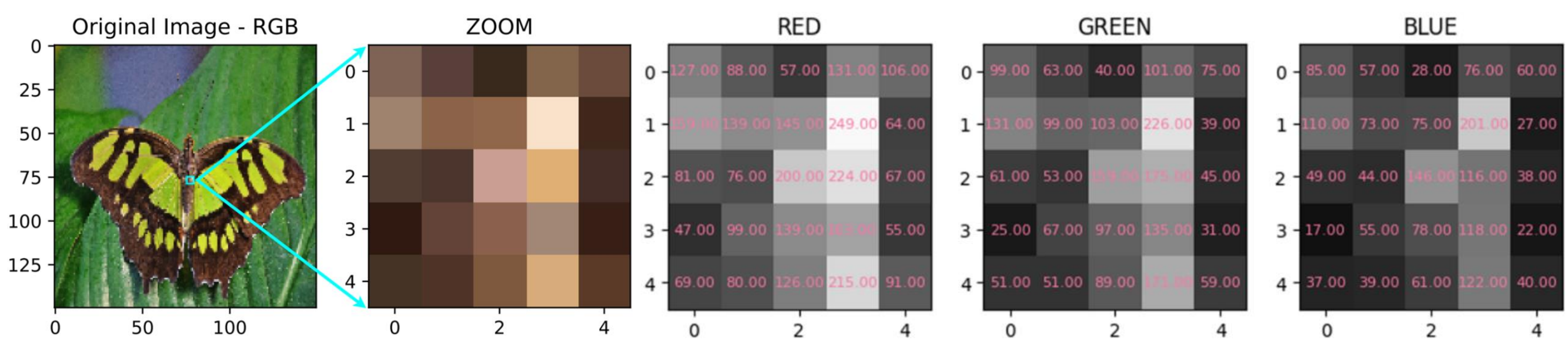
**Ảnh kỹ thuật số:** Hình ảnh kỹ thuật số về cơ bản là lưới các đơn vị nhỏ gọi là pixel . Mỗi pixel đại diện cho đơn vị nhỏ nhất của hình ảnh và chứa thông tin về màu sắc và cường độ tại điểm cụ thể đó.



# Tích chập trên miền ảnh

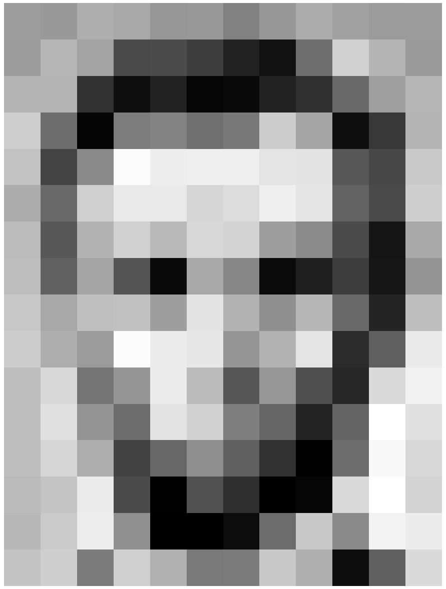
**Ảnh kỹ thuật số:** Thông thường, mỗi pixel gồm **ba giá trị** tương ứng với các kênh màu đỏ, xanh lá cây và xanh lam (**RGB**). Các giá trị này xác định màu sắc và cường độ của pixel đó, mỗi màu nằm trong khoảng giá trị [0 - 255]. Thực tế khi tách ảnh **RGB** thành 3 kênh riêng biệt thì mắt thường chỉ cảm nhận thấy màu xám.

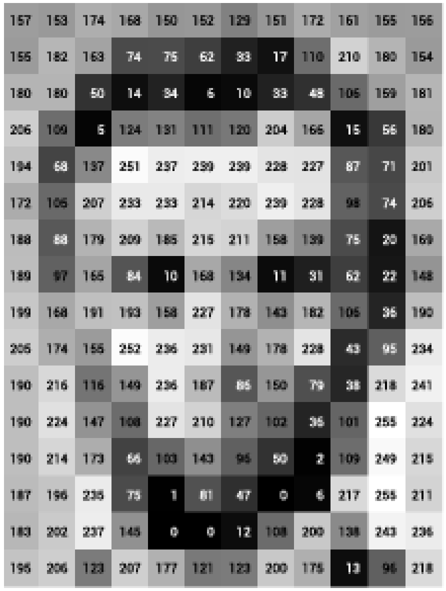


# Tích chập trên miền ảnh

## Ảnh kỹ thuật số

Đối với ảnh xám mỗi pixel **mang một giá trị duy** nhất biểu thị cường độ ánh sáng tại điểm đó, dao động từ đen (0) đến trắng (255) .





| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 157 | 153 | 174 | 168 | 150 | 152 | 129 | 151 | 172 | 161 | 155 | 156 |
| 155 | 182 | 163 | 74 | 75 | 62 | 33 | 17 | 110 | 210 | 180 | 154 |
| 180 | 180 | 50 | 14 | 34 | 6 | 10 | 33 | 48 | 106 | 159 | 181 |
| 206 | 109 | 5 | 124 | 131 | 111 | 120 | 204 | 166 | 15 | 56 | 180 |
| 194 | 68 | 137 | 251 | 237 | 239 | 239 | 228 | 227 | 87 | 71 | 201 |
| 172 | 105 | 207 | 233 | 233 | 214 | 220 | 239 | 228 | 98 | 74 | 206 |
| 188 | 88 | 179 | 209 | 185 | 215 | 211 | 158 | 139 | 75 | 20 | 169 |
| 189 | 97 | 165 | 84 | 10 | 168 | 134 | 11 | 31 | 62 | 22 | 148 |
| 199 | 168 | 191 | 193 | 158 | 227 | 178 | 143 | 182 | 106 | 36 | 190 |
| 205 | 174 | 155 | 252 | 236 | 231 | 149 | 178 | 228 | 43 | 95 | 234 |
| 190 | 216 | 116 | 149 | 236 | 187 | 86 | 150 | 79 | 38 | 218 | 241 |
| 190 | 224 | 147 | 108 | 227 | 210 | 127 | 102 | 36 | 101 | 255 | 224 |
| 190 | 214 | 173 | 66 | 103 | 143 | 96 | 50 | 2 | 109 | 249 | 215 |
| 187 | 196 | 235 | 75 | 1 | 81 | 47 | 0 | 6 | 217 | 255 | 211 |
| 183 | 202 | 237 | 145 | 0 | 0 | 12 | 108 | 200 | 138 | 243 | 236 |
| 195 | 206 | 123 | 207 | 177 | 121 | 123 | 200 | 175 | 13 | 96 | 218 |

# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Các thành phần chính của phép toán Convolution:

1. **Kernel (Filter)**: Ma trận nhỏ di chuyển trên ảnh đầu vào để trích xuất đặc trưng.

2. **Stride:** Bước di chuyển của kernel trên ảnh; stride lớn giảm kích thước feature map.

3. **Padding:** Thêm viền giá trị (thường là 0) xung quanh ảnh để kiểm soát kích thước kết quả của feature map.

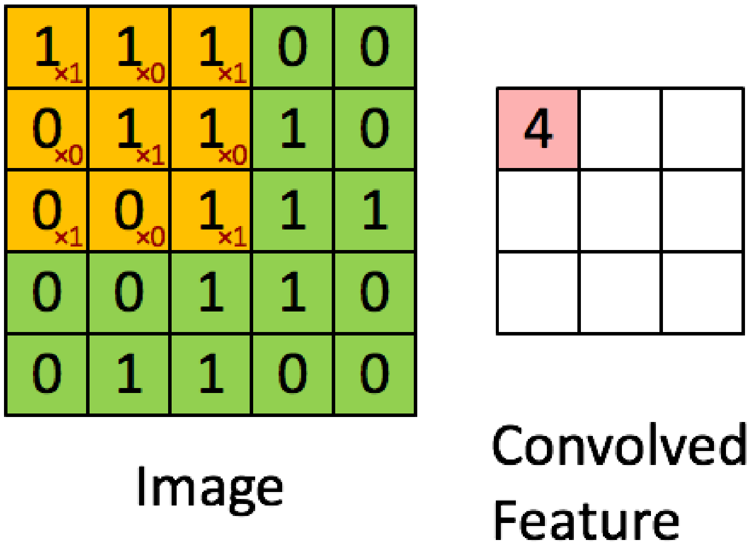
4. **Feature map:** Kết quả của phép convolution, biểu diễn các đặc trưng trích xuất từ ảnh đầu vào.

# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Nếu đầu vào là 1 ảnh xám thì sẽ chỉ có 1 kernel được khởi tạo, nếu đầu vào là ảnh RGB thì sẽ có 3 kernel được khởi tạo.

Minh họa cho tích chập ảnh xám 2D



# Tích chập trên miền ảnh

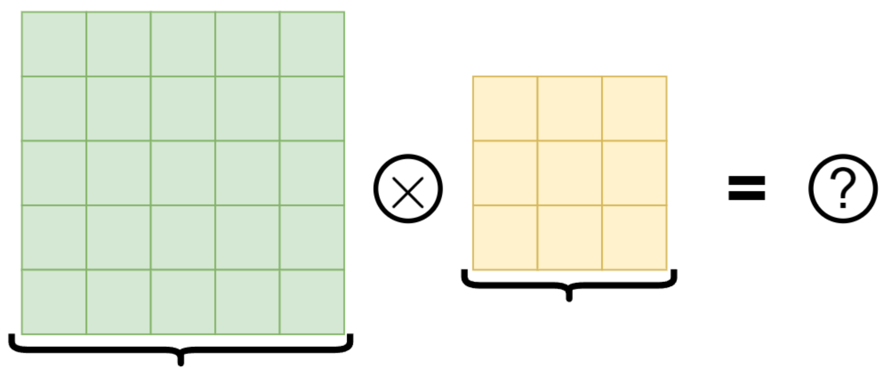
## 4.2 Tích Chập 2D

$$\text{Output size} = \frac{\text{Input size} + (2 \times \text{Padding}) - \text{Kernel size}}{\text{Stride}} + 1$$

$$\text{Output size} = \frac{5 + (2 \times 0) - 3}{1} + 1 = \mathbf{3}$$

Input size = 5
Padding = 0
Kernel = 3
Stride = 1

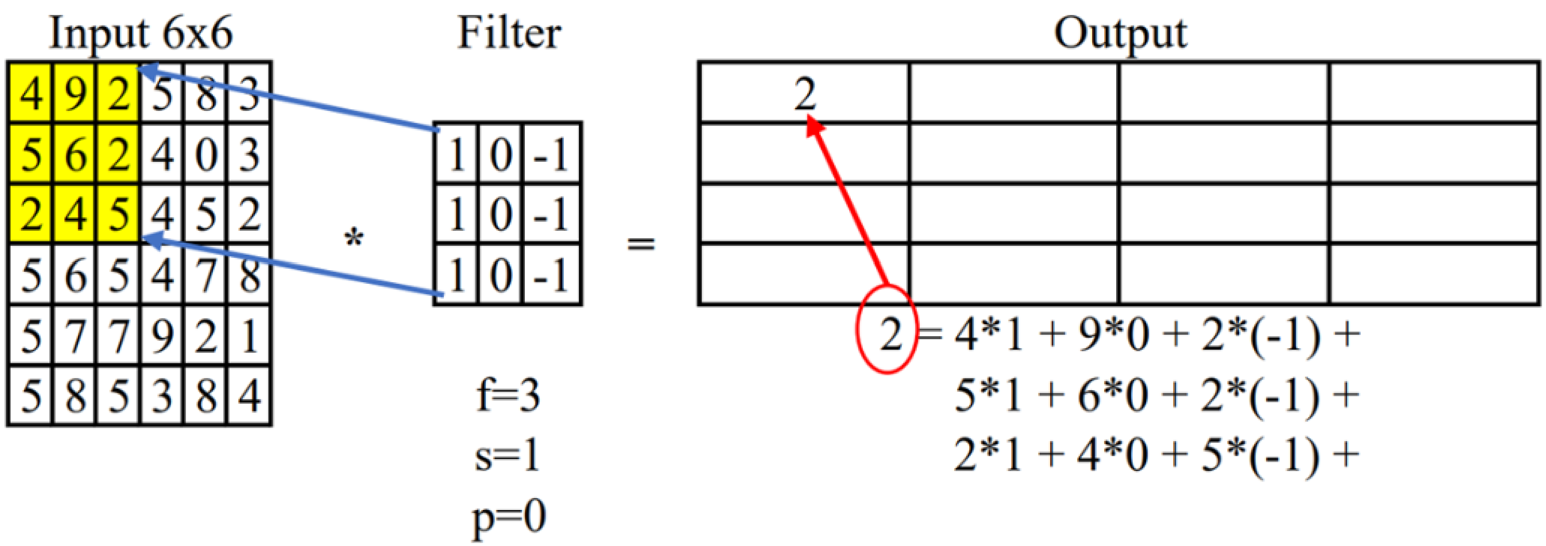
**Vậy đầu ra sẽ có kích thước 3x3**



# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Tính toán thủ công tích chập 2D với ảnh 6x6, filter/kernel 3x3, padding 0x0, stride 1.



# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Sinh viên hoàn thành phép tính và đối chiếu kết quả.

Input 6x6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 | 5 | 8 | 3 |
| 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 |
| 2 | 4 | 5 | 4 | 5 | 2 |
| 5 | 6 | 5 | 4 | 7 | 8 |
| 5 | 7 | 7 | 9 | 2 | 1 |
| 5 | 8 | 5 | 3 | 8 | 4 |

*

filter/kernel 3x3

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 |
| 1 | 0 | -1 |
| 1 | 0 | -1 |

padding 0x0, stride 1

=

Output 4x4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | ? | ? | ? |
| ? | ? | ? | ? |
| ? | ? | ? | ? |
| ? | ? | ? | ? |

# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Sinh viên hoàn thành phép tính và đối chiếu kết quả.

Input 6x6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 | 5 | 8 | 3 |
| 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 |
| 2 | 4 | 5 | 4 | 5 | 2 |
| 5 | 6 | 5 | 4 | 7 | 8 |
| 5 | 7 | 7 | 9 | 2 | 1 |
| 5 | 8 | 5 | 3 | 8 | 4 |

*

filter/kernel 3x3

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 |
| 1 | 0 | -1 |
| 1 | 0 | -1 |

padding 0x0, stride 1

=

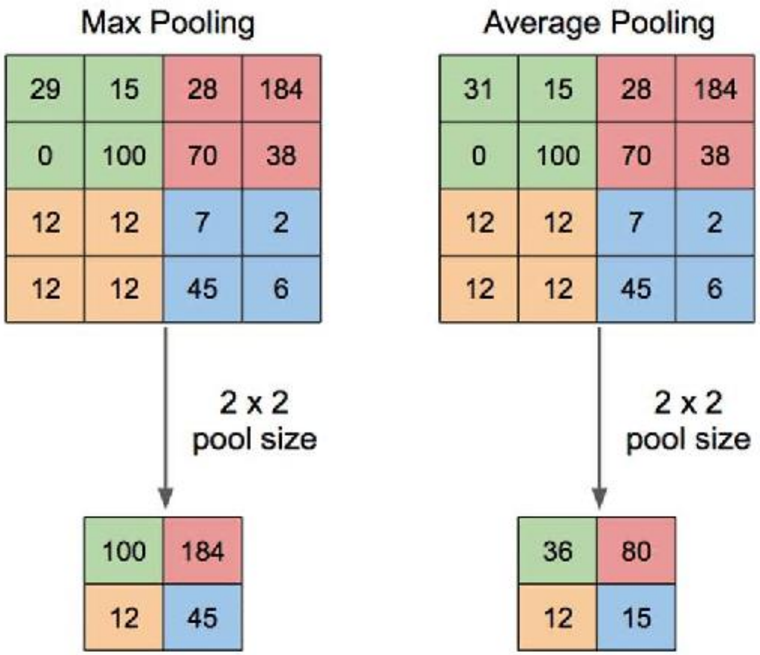
Output 4x4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | -4 | 5 |
| 0 | 4 | 0 | -1 |
| -5 | 0 | 3 | 6 |
| -2 | 5 | 0 | 3 |

# Tích chập trên miền ảnh

## Tích Chập 2D

Theo sau 1 lớp Conv thường sẽ là một lớp gộp để thu nhỏ ảnh lại, với mục đích là các pixel được lấy chiều sâu theo Conv thường mang thông tin giống nhau nên ta chỉ cần chọn 1 pixel từ 1 vùng to. Có nhiều cách để lấy Pooling nhưng phổ biến nhất là 2 cách:




- Max Pooling
- Average Pooling

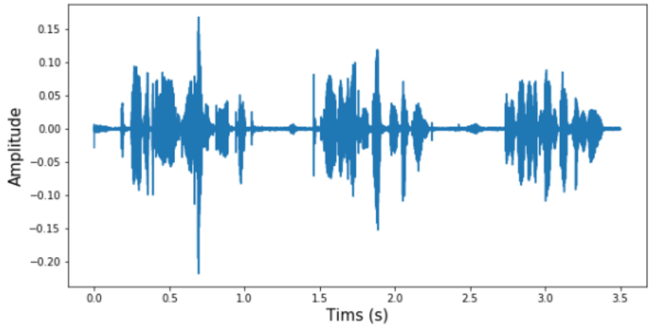
# Tích chập trên âm thanh

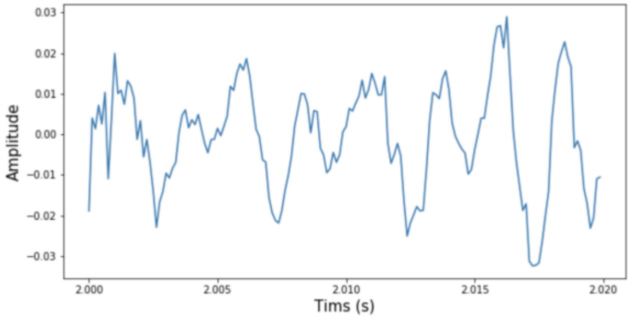
## Tích Chập 1D

Tương tự như Tích chập 2D thì Tích chập 1D (1D Convolution) cũng hoạt động bằng cách trượt một bộ lọc (filter/kernel) qua một chuỗi dữ liệu đầu vào (input sequence). Bộ lọc này là một mảng 1D.

Sử dụng chủ yếu để xử lý dữ liệu **chuỗi, như âm thanh, văn bản, hoặc chuỗi thời gian.**

Chẳng hạn như có thể biểu diễn âm thanh dưới dạng sóng 1D miền thời gian như sau:



# Tích chập trên âm thanh

## Tích Chập 1D

Tích chập 1D cũng có kernel,  padding, stride, và công thức tính toán kích thước đầu ra tương tự như Conv2D

$$\text{Output size} = \frac{\text{Input size} + (2 \times \text{Padding}) - \text{Kernel size}}{\text{Stride}} + 1$$

# Tích chập trên âm thanh

## Tích Chập 1D

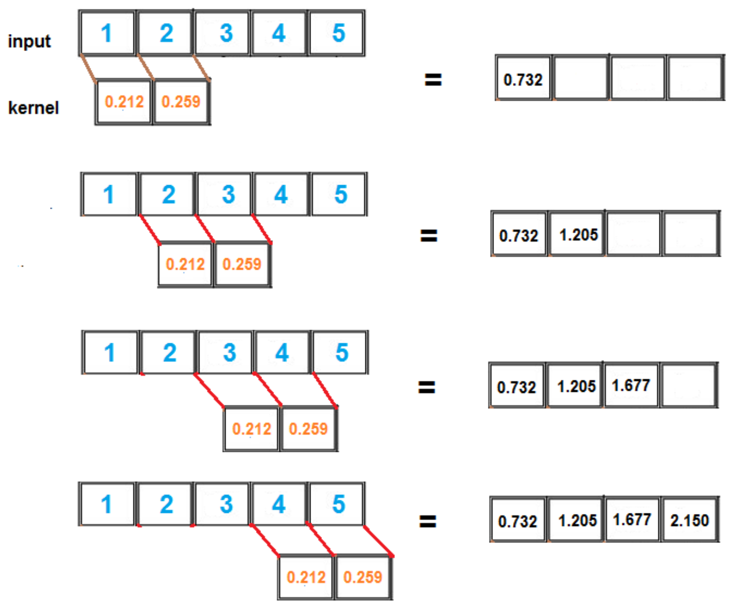
Tính toán convolution 1D thủ công với các thông số sau

- input = [1, 2, 3, 4, 5]
- kernel = [0.212, 0.259]
- padding = 0
- stride = 1

# Tích chập trên âm thanh

## Tích Chập 1D

Tính toán convolution 1D thủ công




**1. Tính kích thước đầu ra:**

Công thức: tương tự như 2D

input_size = 5

kernel_size = 2

$$\text{output\_size} = \frac{5+(2\times0)-2}{1} + 1 = 4$$

**2. Tính toán conv1D:**

- Vị trí 1: $1 \times 0.212 + 2 \times 0.259 = 0.212 + 0.518 = 0.730$
- Vị trí 2: $2 \times 0.212 + 3 \times 0.259 = 0.424 + 0.777 = 1.201$
- Vị trí 3: $3 \times 0.212 + 4 \times 0.259 = 0.636 + 1.036 = 1.672$
- Vị trí 4: $4 \times 0.212 + 5 \times 0.259 = 0.848 + 1.295 = 2.143$

**3. Kết quả cuối cùng:**

output = [0.730, 1.201, 1.672, 2.143]

## d. Các tính chất của tổng chập

- **Giao hoán:** $y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$
- **Kết hợp:** $y(n) = x(n) * [h_1(n)*h_2(n)]$

  $= [x(n)*h_1(n)] * h_2(n)$
- **Phân phối:** $y(n) = x(n) * [h_1(n)+h_2(n)]$

  $= x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$

# 1.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

**Định lý 1:** Hệ thống TTBB là nhân quả $\Leftrightarrow$ **h(n)=0: n<0**

**Ví dụ 1.3.3:** Xét tính nhân quả các hệ thống cho bởi:

a) $y(n)=x(n-1)+2x(n-2)$ b) $y(n)=x(n+1)+2x(n)+3x(n-1)$

Thay $x(n)=\delta(n)$, ta được biểu thức h(n) các hệ:

a) $h(n)= \delta(n-1)+2\delta(n-2) = \{\underset{\uparrow}{0},1,2\}$

Do h(n)=0: n<0 -> *hệ nhân quả*

b) $h(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+3\delta(n-1) = \{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$

Do h(-1)=1 -> *hệ không nhân quả*

# 1.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

**Định lý 2:** Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

**Ví dụ 1.3.4:** Xét tính ổn định của hệ thống: $h(n)=a^n u(n)$

$$S = \sum_{n-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

- **/a/< 1 -> S=1/(1-/a/) :** hệ ổn định
- **/a/≥ 1 ->S=∞:** hệ không ổn định

# 1.4 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TTHSH

## 1.4.1 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

*Hệ thống tuyến tính* được đặc trưng bởi PTSP tuyến tính:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$$

Với: **N** – gọi là bậc của phương trình sai phân: N,M>0

**$a_k(n)$, $b_r(n)$** – các hệ số của phương trình sai phân

## 1.4.2 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HSH

*Hệ thống tuyến tính bất biến* được đặc trưng bởi PTSPTTHSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

**$a_k$ , $b_r$** – không phụ thuộc vào biến số n

# 1.4.3 GiẢI PTSP TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

- Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất: $\mathbf{y_h(n)}$
- Tìm nghiệm riêng của PTSP: $\mathbf{y_p(n)}$
- Nghiệm tổng quát của PTSP: $\mathbf{y(n) = y_h(n) + y_p(n)}$

## a. Nghiệm của PTSP thuần nhất:

Giả thiết $\alpha^n$ là nghiệm của PTSP thuần nhất:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng:

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\alpha^1 + a_N = 0$$

## a. Nghiệm của PTSP thuần nhất (tt):

- Phương trình đặc trưng có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$

$$y_h(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

- Phương trình đặc trưng có nghiệm $\alpha_1$ bội **r**

$$y_h(n) = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_{r-1}n^{r-1})\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

## b. Nghiệm riêng của PTSP:

- Thường chọn riêng $y_p(n)$ có dạng giống với **x(n)**

**<u>Ví dụ 1.4.1:</u>** Giải PTSP: $\mathbf{y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)}$ **(*)** với $\mathbf{n \geq 0}$, biết $y(n)=0$: $n<0$ và $\mathbf{x(n)=3^n}$

- <u>Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất</u> $\mathbf{y_h(n)}$

  $\mathbf{y_h(n)}$ là nghiệm của phương trình:

  $$\mathbf{y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0}$$

  Phương trình đặc tính: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1=1; \alpha_2=2$

$$\Rightarrow \mathbf{y_h(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n)}$$

- <u>Tìm nghiệm riêng của PTSP</u> $\mathbf{y_p(n)}$

  Chọn $\mathbf{y_p(n)}$ có dạng $\mathbf{y_p(n)=B3^n}$ , thay vào PTSP **(*)** :

  $$\mathbf{B3^n - 3B3^{n-1} + 2B3^{n-2} = 3^n \Rightarrow B = 9/2}$$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

  $$\mathbf{y(n) = y_h(n) + y_p(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4.5\ 3^n}$$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

**$y(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4,5\ 3^n$**

Dựa vào điều kiện đầu: y(n)=0: n<0:

Từ: **$y(n)= 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$** với **$x(n)=3^n$**

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y(0)=3y(-1)-2y(-2)+3^0 =1=A_1+A_2+4.5 \\ \Rightarrow y(1)= 3y(0)-2y(-1)+3^1=6=A_1+2A_2+4,5.3^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_1=0.5 \\ A_2=-\ 4 \end{array}$$

Vậy: $\boxed{y(n) = 0.5\ 1^n - 4\ 2^n + 4,5\ 3^n}$ **: $n \geq 0$**

# 1.5 SƠ ĐỒ THỰC HIỆN HỆ THỐNG

## 1.5.1 HỆ THỐNG ĐỆ QUI & KHÔNG ĐỆ QUI

### a. Hệ thống không đệ qui

- ***Hệ thống không đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N=0**

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r): \quad a_0=1$$

$$h(r)=b_r \Rightarrow y(n)=\sum_{r=0}^{M} h(r)x(n-r) \qquad \Rightarrow L\left[h(r)\right]=M+1$$

- Hệ thống không đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài hữu hạn – FIR** (Finite Impulse Response)

- Hệ thống không đệ qui luôn luôn ổn định do:

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \left| h(r) \right| = \sum_{r=0}^{M} \left| b_r \right| < \infty$$

## b. Hệ thống đệ qui

- ***Hệ thống đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N>0**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- Hệ thống đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài vô hạn – IIR** (Infinite Impulse Response)
- Hệ thống đệ qui có thể **ổn định** hoặc **không ổn định**