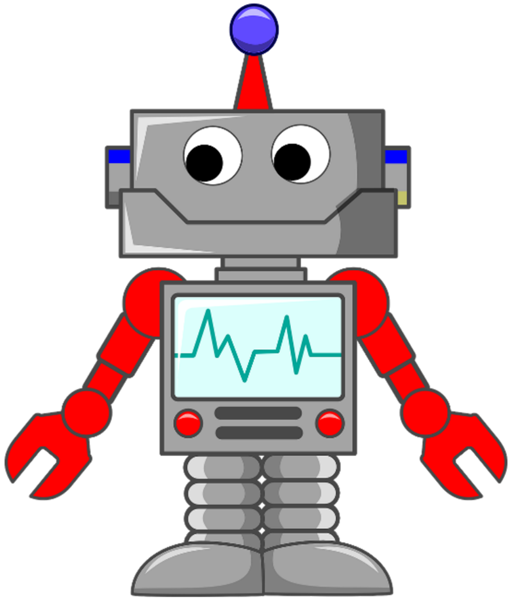


# CÁC MÔ HÌNH HỌC SÂU VÀ ỨNG DỤNG

## TOÁN NỀN TẢNG

# Đại số tuyến tính

- Biểu diễn dữ liệu bằng công cụ đại số
  - Scalar, vector, matrix, tensor
  - Một số dạng dữ liệu thực tế
  - Một số phép toán

- Các phép toán cơ bản: cộng, trừ, nhân, chia, …

- Phép nghịch đảo

# Khái niệm – Vô hướng

- Giá trị vô hướng (Scalar)
  - Mục đích: thể hiện số lượng, độ dài, khối lượng, …
  - $a \in \mathbb{R}$
  - Ký hiệu: ký tự viết thường, in nghiêng. Ví dụ: $a, b, c, \ldots$ hay $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

# Khái niệm - Vector

- Vector
  - Mục đích: thể hiện đối tượng có nhiều chiều dữ kiện như vận tốc, lực, điểm trong không gian nhiều chiều…
  - $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: vector có $n$ phần tử ($n$ chiều thành phần)
  - Ký hiệu: ký tự viết thường, in thẳng và đậm. Ví dụ: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$

# Khái niệm – Ma trận

- Ma trận (Matrix)
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: ma trận có $m$ dòng $n$ cột
  - Ký hiệu: ký tự viết hoa, in nghiêng. Ví dụ: $A, B, C$ ...

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

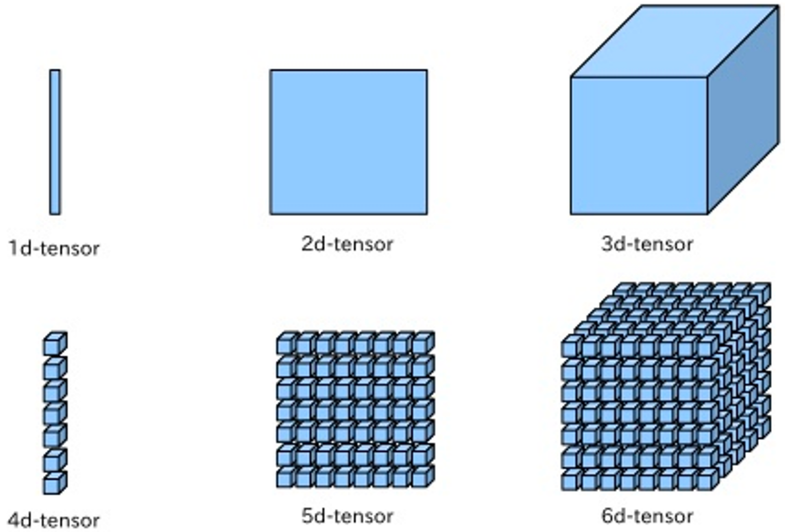
  - Ta có thể xem $A$ gồm $n$ vector $m$ chiều ghép lại:

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

với $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$

# Khái niệm – Tensor

- Tensor
  - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$: gồm nhiều phần tử được bố trí vào một không gian nhiều hơn 2 chiều
  - Ký hiệu: ký tự viết hoa, in thẳng và đậm. Ví dụ: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ...



# Một số phép toán

- Phép toán trên vector:
  - Tổng hai vector $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ : $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
  - Tích vô hướng hai vector $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

# Một số phép toán

- Phép toán trên ma trận:
  - Tổng hai ma trận $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

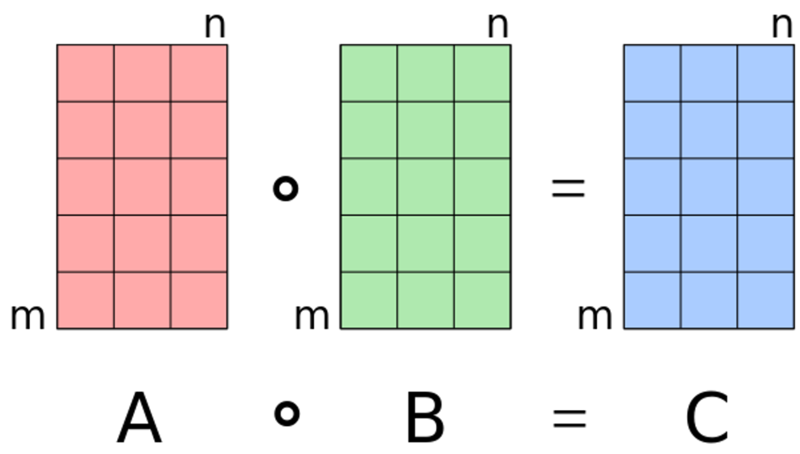
# Một số phép toán

- Phép toán trên ma trận:
  - Tích hai ma trận $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$: $C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$
  - Phép nhân ma trận không có tính giao hoán: $AB \neq BA$
  - Tính kết hợp: $(AB)C = A(BC)$
  - Tính kết hợp: $A(B + C) = AB + AC$
  - Kết hợp với chuyển vị: $(A^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = A$
$$(AB)^{\mathbf{T}} = B^{\mathbf{T}} A^{\mathbf{T}}$$
$$(A + B)^{\mathbf{T}} = A^{\mathbf{T}} + B^{\mathbf{T}}$$

# Một số phép toán

- Phép toán trên ma trận:
  - Tích Hadamard hai ma trận $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ : $C = A \circ B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$C_{ij} = A_{ij} B_{ij}$$



# Một số phép toán

- **Ma trận đơn vị**: ký hiệu là $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận vuông với tất cả phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Một số phép toán

- **Ma trận nghịch đảo**: của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ký hiệu là ma trận $A^{\mathbf{-1}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, là ma trận thỏa mãn:
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

# Ví dụ 1

- Biểu diễn phương trình bậc 2 sau dưới dạng tích hai vector:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a) $\begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

b) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} . \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

c) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{T} . \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}^{T} = 0$

d) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}^{T} = 0$

# Bài tập 1

- Dạng biểu diễn nào đúng cho phương trình sau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a) $\begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + c = 0$

b) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix} + c = 0$

c) $\begin{bmatrix} ax \\ b \\ c \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} x \\ x \\ 1 \end{bmatrix}^T = 0$

d) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix}^T = c$

# Bài tập 2

- Hãy cho biết ma trận chuyển vị của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

# Bài tập 3

- Bản chất ảnh là một ma trận. Hãy cho biết kết quả của phép chuyển vị (transpose) của ảnh sau:

a)

b)

c)

d)

# Bài tập 4

- Điều nào sau đây là đúng về tích Hadamard:

a) Chỉ tính được trên ma trận vuông

b) Chỉ tính được trên ma trận đường chéo

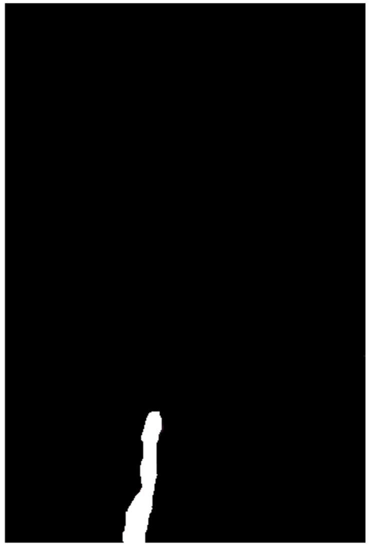
c) Chỉ tính được trên hai ma trận kích thước bằng nhau

d) Chỉ tính được khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai

# Bài tập 5

Hãy cho biết phép toán để thực hiện được ảnh kết quả như sau:

Img



Mask

Kết quả

a) Img + Mask

b) Img . Mask

c) Img ∘ Mask

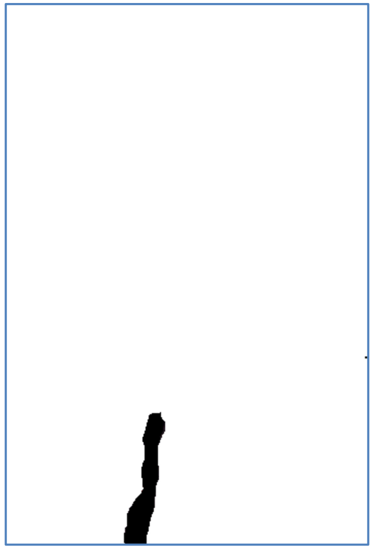
d) Img - Mask

NVTiep

# Bài tập 6

Hãy cho biết phép toán để thực hiện được ảnh kết quả như sau:

Img



Mask

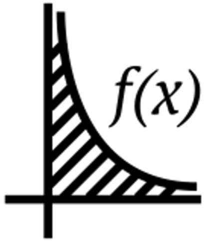
Kết quả

a) Img + Mask

b) Img . Mask

c) Img $\circ$ Mask

d) Img - Mask




# Giải tích

- Một số công thức đạo hàm
- Đạo hàm riêng
- Gradient

# Đạo hàm cơ bản

- Đạo hàm: thể hiện sự biến thiên hàm số, là công cụ quan trọng để tìm điểm cực trị của hàm số
- Một số công thức đạo hàm cơ bản:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{u^2}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

# Đạo hàm riêng

- Đạo hàm riêng (Partial Derivatives) của hàm nhiều biến $f$ theo biến $x$ kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}$
- Ví dụ: $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy - 4$. Đạo hàm riêng theo $x$ và $y$ là:

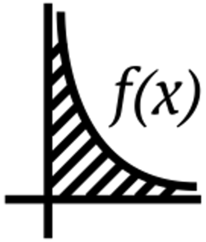
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x$$

# Gradient

- Gradient của một hàm số $f$ theo vector $\mathbf{x}$ là một vector gồm các đạo hàm riêng của $f$, kí hiệu là

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$




# Bài tập 7

- Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

c) $f'(x) = \frac{-1}{(1+x^2)^2}$

d) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

# Bài tập 8

- Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

a) $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$

c) $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

d) $f'(x) = \frac{1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

# Bài tập 9

- Hàm sau có ý nghĩa gì $f(a) = ax^2 + bx + c$

a) Hàm $f$ phụ thuộc vào các biến $a, b, c, x$

b) Hàm $f$ phụ thuộc vào biến $x$

c) Hàm $f$ phụ thuộc vào duy nhất biến $a$

d) Hàm $f$ phụ thuộc vào các biến $a, b, c$

# Bài tập 10

- Tính đạo hàm của $f(a) = ax^2 + bx + c$

a) $\frac{df}{da} = 2a + b$

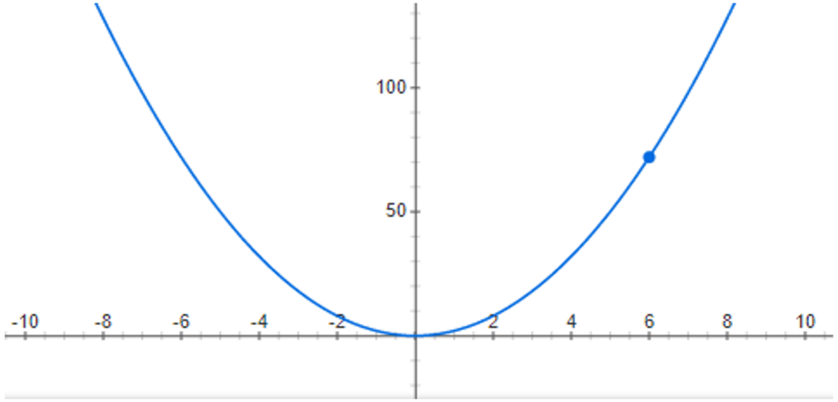
b) $\frac{df}{da} = 2a$

c) $\frac{df}{da} = x^2$

d) $\frac{df}{da} = 2x^2$

# Bài tập 11

- Giá trị đạo hàm của $f(x) = 2x^2$ tại $x = 6$ âm hay dương




a) Âm, ngược hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$

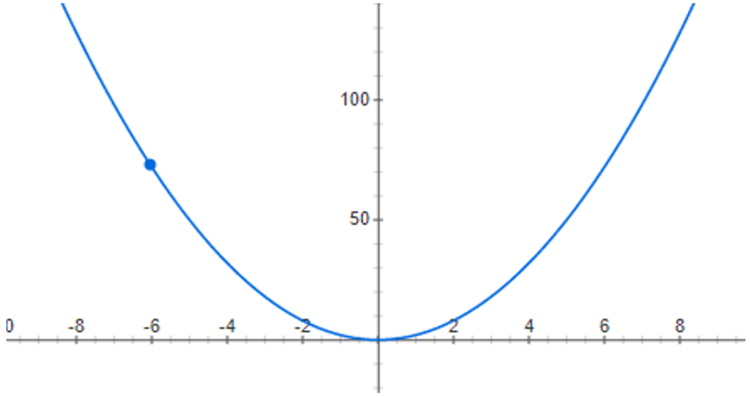
b) Âm, cùng hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$

c) Dương, ngược hướng với điều cực tiểu $x_0 = 0$

d) Dương, cùng hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$

# Bài tập 12

- Giá trị đạo hàm của $f(x) = 2x^2$ tại $x = -6$ âm hay dương.




a) Âm, ngược hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$
b) Âm, cùng hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$
c) Dương, ngược hướng với điều cực tiểu $x_0 = 0$
d) Dương, cùng hướng với điểm cực tiểu $x_0 = 0$

# Xác suất thống kê

- Không gian mẫu (Sample space): Thường được kí hiệu là $\Omega$, là tập hợp bao gồm tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ví dụ tung một viên xúc sắc có 6 mặt, khi đó:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Sự kiện (Event): một tập hợp con của $\Omega$
- **Tiên đề xác suất**:
  - $P(A) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

# Xác suất thống kê

- Một số tính chất
  - Hai sự kiện $A$ và $B$ được gọi là độc lập nhau nếu: $P(AB) = P(A).P(B)$
  - Hệ quả là: $P(A|B) = P(A)$ hay $P(B|A) = P(B)$

# Bài tập 13

- Xác suất xảy ra các biến cố A, B, C là bao nhiêu biết rằng số lần A, B và C xuất hiện lần lượt là 4, 6, 10 lần.

a) $P(A) = 0.4, P(B) = 0.6,\ P(C) = 0.10$

b) $P(A) = \frac{2}{10}, P(B) = \frac{3}{10},\ P(C) = \frac{5}{10}$

c) $P(A) = \frac{4}{100}, P(B) = \frac{6}{100},\ P(C) = \frac{10}{100}$

d) $P(A) = \frac{2}{20}, P(B) = \frac{3}{20},\ P(C) = \frac{5}{20}$