Chương 2:

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN PHỨC Z

2.0 MỞ ĐẦU

2.1 BIẾN ĐỔI Z

2.2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

2.3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

2.4 BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

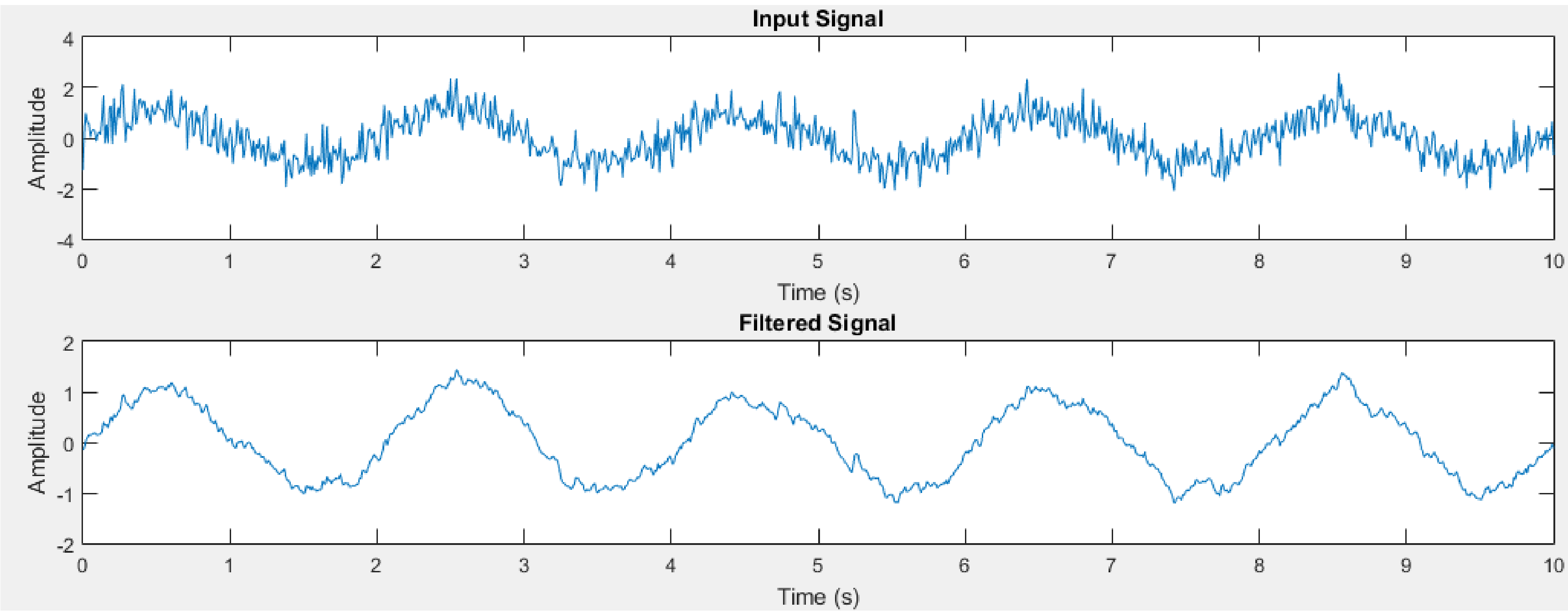
Overview of Z-tranform

The Z-transform is a mathematical tool used in digital signal processing and control theory to convert discrete-time signals, which are sequences of numbers representing samples of a continuous-time signal, into a complex function of a complex variable, which is called the Z-transform.
The Z-transform allows us to analyze the frequency content, stability, and other properties of discrete-time signals and systems, and it provides a useful alternative to the Fourier transform for analyzing digital signals.

The main purpose of the Z-transform is to provide a convenient way to analyze and design digital filters, which are used to process digital signals in a wide range of applications, including audio and image processing, communication systems, and control systems. By using the Z-transform, we can obtain a transfer function that describes the input-output relationship of a digital filter in the frequency domain, and we can use this transfer function to design filters that meet specific frequency response requirements.

In summary, the Z-transform is a powerful mathematical tool that enables us to analyze and design digital signal processing systems, particularly digital filters, by providing a convenient representation of discrete-time signals and systems in the frequency domain.

Example of filter



2.0 MỞ ĐẦU

❖ Hệ thống liên tục:

➢ **Biến đổi Fourier:**

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(j\omega)t}dt$$

$$j\omega \Rightarrow s = \sigma + j\omega$$

➢ **Biến đổi Laplace:**

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

❖ Hệ thống rời rạc:

➢ **Biến đổi Fourier:**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$e^{j\omega} \Rightarrow z = re^{j\omega}$$

➢ **Biến đổi Z:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

2.1 BIẾN ĐỔI Z

2.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

- **Biến đổi Z của dãy x(n):**

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}} \quad (*)$$

Trong đó Z – biến số phức

Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai phía

Biến đổi Z 1 phía dãy x(n):

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}} \quad (**)$$

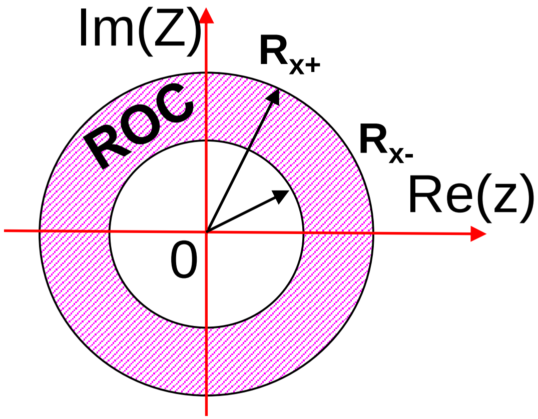
- Nếu x(n) nhân quả thì : (*) $\equiv$ (**)
- <u>Ký hiệu:</u>

$x(n) \xleftrightarrow{ZT} X(z)$ hay X(z) = ZT {x(n)}

$X(z) \xleftrightarrow{ZT^{-1}} x(n)$ hay $x(n) = ZT^{-1}\{X(z)\}$

2.1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- **Miền hội tụ của biến đổi Z -** ROC (Region Of Convergence) *là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho X(z) hội tụ.*



- Để tìm ROC của X(z) ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy
- **<u>Tiêu chuẩn Cauchy</u>:**

Một chuỗi có dạng: $$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots$$

hội tụ khi: $$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

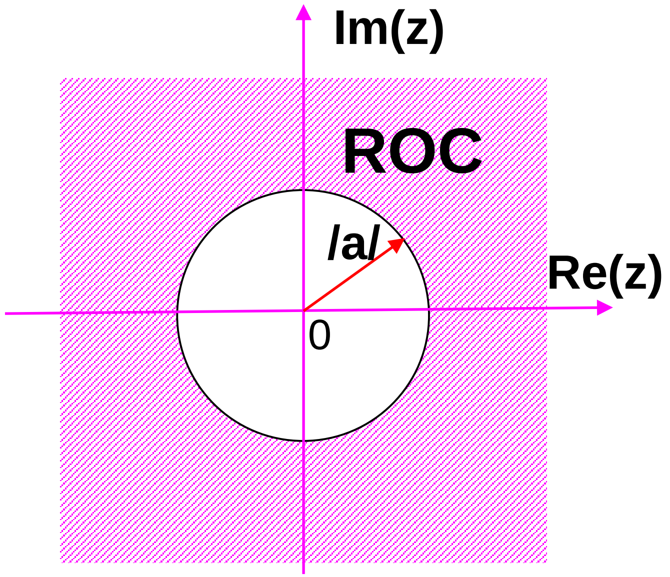
- *Nếu có dạng x(n)=aⁿ , hội tụ:* $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$ *khi /a/<1*

Ví dụ 2.1.1: Tìm biến đổi Z & ROC của **x(n)=aⁿu(n)**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a^n u(n)\right]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n.z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:



$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

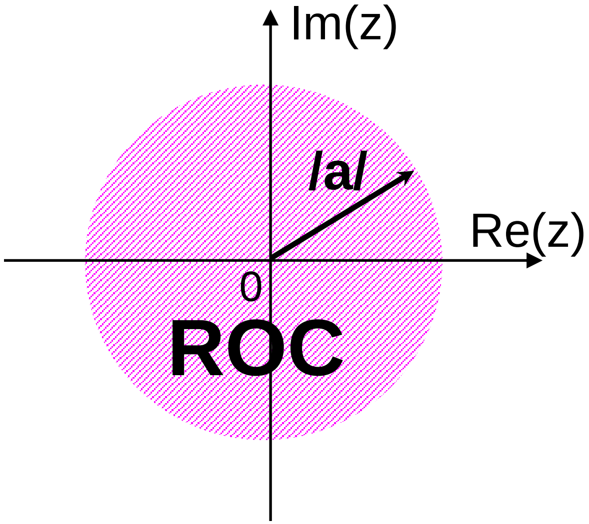
Nếu: $$\lim_{n\to\infty}\left(\left|az^{-1}\right|^n\right)^{1/n}<1\Leftrightarrow |z|>|a|$$

Vậy: $$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}};\mathrm{ROC}:|z|>|a|}$$

<u>Ví dụ 2.1.2</u>: Tìm biến đổi Z & ROC của **x(n)=-a^{n}u(-n-1)**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-a^{n}u(-n-1)\right]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{n}.z^{-n}$$

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{m}=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{m}+1$$



Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z)=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{n}+1=\boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

Nếu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|a^{-1}z\right|^{n}\right)^{1/n}<1 \Leftrightarrow \boxed{|z|<|a|}$

2.2 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

2.2.1 Tuyến tính

- Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$
- Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

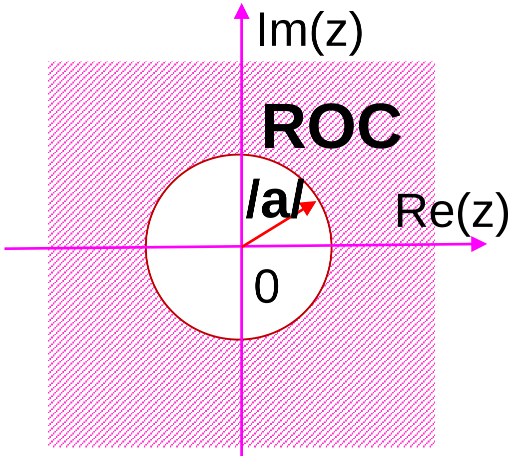
ROC chứa $\mathbf{R_1 \cap R_2}$

Ví dụ 2.2.1: Tìm biến đổi Z & ROC của

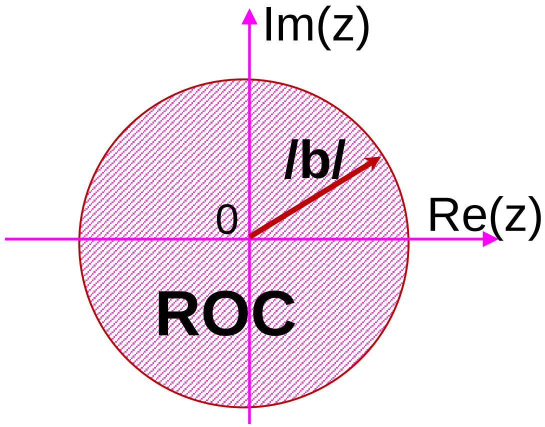
$\mathbf{x(n)=a^n u(n) - b^n u(-n-1)}$ với $|a|<|b|$

Theo ví dụ 2.1.1 và 2.1.2, ta có:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad R_1: |z| > |a|$$



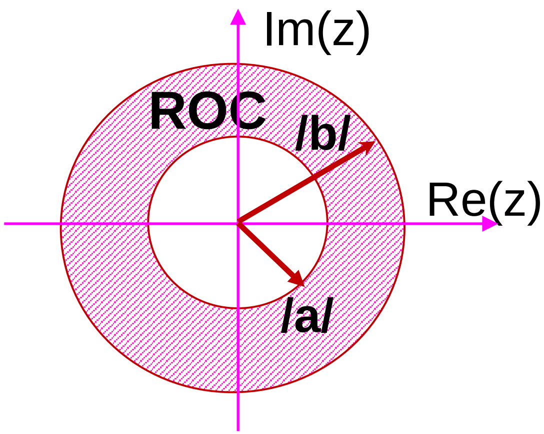
$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}} \qquad R_2: |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}}$$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|}$$



2.2.2 Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$: $\quad \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$: $\mathrm{ROC} = \mathrm{R'}$

Với: $\mathrm{R'} = \begin{cases} \text{R trừ giá trị } z=0, & \text{khi } n_0>0 \\ \text{R trừ giá trị } z=\infty, & \text{khi } n_0<0 \end{cases}$

Ví dụ 2.2.2: Tìm biến đổi Z & ROC của $\mathbf{x(n)=a^n u(n-1)}$

Theo ví dụ 2.1.1: $a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}}$; $\mathrm{ROC}: |z| > |a|$

$x(n)=a^n u(n-1) = a.a^{n-1}u(n-1)$ $\quad \boxed{\xleftrightarrow{Z} \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}} : |z| > |a|}$

2.2.3 Nhân với hàm mũ a^n

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) \quad : \mathrm{ROC} = |a|\mathrm{R}$

Ví dụ 2.2.3: Xét biến đổi Z & ROC của

$x_1(n)=u(n)$ và ***$x_2(n)=a^n u(n)$***

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \; ; R : |\mathrm{z}| > 1$$

$$\Rightarrow \quad a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(az^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}} \; ; R' : |\mathrm{z}| > |a|$$

2.2.4 Đạo hàm X(z) theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

<u>Ví dụ 2.2.4</u>: Tìm biến đổi Z & ROC của ***g(n)=na^n u(n)***

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{Z} G(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \boxed{= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} : |z| > |a|}$$

2.2.5 Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \;:\mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \;:\mathrm{ROC} = 1/R$

Ví dụ 2.2.5: Tìm biến đổi Z & ROC của ***$y(n)=(1/a)^n u(-n)$***

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} ;\mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{X(z^{-1})} = \frac{1}{1-\mathrm{a}\left(\mathrm{z}^{-1}\right)^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1-\mathrm{az}} ;\mathrm{ROC}: |\mathrm{z}| < 1/|\mathrm{a}|}$$

2.2.6 Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) : \mathrm{ROC} = R$

2.2.7 Tích 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi} \oint_c X_1(v) X_1\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} \, \mathrm{d}v : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$

2.2.8 Định lý giá trị đầu

Nếu x(n) nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z \to \infty} \mathrm{X}(z)$

Ví dụ 2.2.6: Tìm **x(0)**, biết **X(z)=e$^{1/z}$** và x(n) nhân quả

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0) = \lim_{Z\to\infty} \mathrm{X(z)} = \lim_{Z\to\infty} \mathrm{e}^{1/z} = 1$$

2.2.9 Tổng chập 2 dãy

Nếu: $$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) & : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) & : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$:ROC có chứa $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$

<u>Ví dụ 2.2.7</u>: Tìm **y(n) = x(n)*h(n),** biết
x(n)=(0.5)ⁿu(n) và ***h(n)=-2ⁿu(-n-1)***

$$x(n)=(0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}};ROC:|z|>0.5$$

$$h(n)=-2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}};ROC:|z|<2$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}.\frac{1}{(1-2z^{-1})};ROC:0,5<|z|<2$$

$$\Big\updownarrow Z^{-1} \qquad =-\frac{1}{3}.\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}+\frac{4}{3}.\frac{1}{(1-2z^{-1})};ROC:0,5<|z|<2$$

$$\boxed{y(n)=x(n)*h(n)=-\frac{1}{3}(0.5)^n u(n)-\frac{4}{3}2^n u(-n-1)}$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

x(n)	***X(z)***	***R***
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $R_1 \cap R_2$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n0}\,X(z)$	R’
$a^n\,x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
$nx(n)$	$-z\,dX(z)/dz$	R
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	1/R
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_1 \cap R_2$
x(n) nhân quả	$x(0)=\lim X(z \to \infty)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

x(n)	***X(z)***	***ROC***
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	/z/ >1
$-u(-n-1)$		/z/ <1
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	/z/ > /a/
$-a^n u(-n-1)$		/z/ < /a/
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	/z/ > /a/
$-na^n u(-n-1)$		/z/ < /a/
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	/z/ >1
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	/z/ >1

Cảm Ơn lớp đã chú ý lắng nghe

2.3 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

2.3.1 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz} \quad \textbf{(*)}$$

Với **C** - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của X(z), theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng
- <u>*Các phương pháp biến đổi Z ngược:*</u>
- ➢ *Thặng dư*
- ➢ *Khai triển thành chuỗi luỹ thừa*
- ➢ *Phân tích thành tổng các phân thức tối giản*

2.3.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Thặng dư tại điểm cực Z_{pi} bội **r** của **F(z)** được định nghĩa:

$$\boxed{Res\left[F(z)\right]_{Z=Z_{pi}} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-z_{pi})^{r}\right]_{Z=Z_{pi}}}$$

- Thặng dư tại điểm cực đơn Z_{pi} của **F(z)** được định nghĩa:

$$\boxed{Res\left[F(z)\right]_{Z=Z_{pi}} = \left[F(z)(z-z_{pi})\right]_{Z=Z_{pi}}}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $X(z)z^{n-1}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_i Res\left[X(z)z^{n-1}\right]_{Z=Z_{pi}} \quad \textbf{(*)}$$

Trong đó:

- $\mathbf{Z_{pi}}$ – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- $\mathbf{Res[X(z)z^{n-1}]_{z=z_{pi}}}$ - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{Pi}

➢ *Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được* x(n)

<u>Ví dụ 2.3.1</u>: Tìm biến đổi Z ngược của $X(z) = \frac{z}{(z-2)}$

Thay X(z) vào (*), ta được

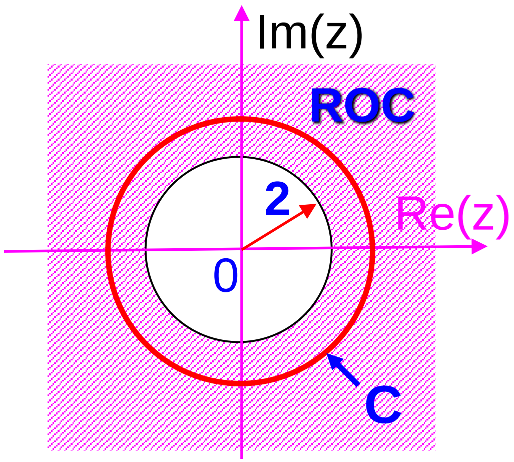
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{(z-2)} z^{n-1}dz = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]$$

➢ **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

Thặng dư tại một cực $z = a$ được tính bằng công thức:

$$R = \lim_{z\to a}\left[(z-a)X(z)\right].$$

- **n≥0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn Z_{p1}=2



Thặng dư tại Z_{p1}=2:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)}(z-2)\right]_{Z=2} = 2^n$$

- **n<0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z}{(z-2)}z^{n-1} = \dfrac{1}{(z-2)}z^n = \dfrac{1}{(z-2)z^m}$ Z_{p1}=2 đơn, Z_{p2}=0 bội m

Với: Z_{p1}=2: $\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=2} = \left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}(z-2)\right]_{Z=2} = \dfrac{1}{2^m}$

Với: $Z_{p2}=0$ bội m:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}z^m\right]_{Z=0}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m}\right] \boxed{= -\frac{1}{2^m}}$$

Vậy, với **n<0:** $\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0$

suy ra $\boxed{x(n) = 2^n : n \geq 0}$ hay $\boxed{x(n) = 2^n u(n)}$

$$\boxed{Res\left[F(z)\right]_{Z=Z_{pi}} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-z_{pi})^r\right]_{Z=Z_{pi}}}$$

2.3.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết **X(z)** có thể khai triển: $\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}}$ (*)

Theo định nghĩa biến đổi Z $\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}}$ (**)

Đồng nhất (*) & (**), rút ra: $\boxed{x(n) = a_n}$

<u>Ví dụ 2.3.2</u>: Tìm x(n) biết **X(z) = z^2 + 2z + 3 - 4z^{-1} - 5z^{-2}**

ROC: 0<|z|<∞

$$X(z) = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n} = x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2}$$

Suy ra: $\boxed{x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, -4, -5\}}$

<u>Ví dụ 2.3.3</u>: Tìm x(n) biết: $X(z) = \dfrac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2$

Do ROC của X(z) là ***/z/>2***, nên **x(n)** sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots \qquad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - 2z^{-1} \\ \cline{2-2}
-\underline{1 - 2z^{-1}} & 1 + 2z^{-1} + 2^2 z^{-2} + \cdots \\
\quad 2z^{-1} & \\
\quad -\underline{2z^{-1} - 2^2 z^{-2}} & \\
\qquad\qquad 2^2 z^{-2} & \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n : n \geq 0 \equiv 2^n u(n)}$$

Ví dụ 2.3.4: Tìm x(n) biết: $X(z) = \dfrac{1}{1-2z^{-1}} : |z| < 2$

Do ROC của X(z) là ***/z/<2***, nên **x(n)** sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^{-n} = a_{-1}z^1 + a_{-2}z^2 + a_{-3}z^3 + \cdots \qquad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
1 & -2^1z^{-1}+1 \\ \hline
-\;1-2^{-1}z^1 & -2^{-1}z^1 - 2^{-2}z^2 - 2^{-3}z^3 + \cdots \\ \cline{1-1}
\;2^{-1}z^1 & \\
-\;2^{-1}z^1 - 2^{-2}z^2 & \\ \cline{1-1}
\;2^{-2}z^2 & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} -2^n z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = -2^n : n < 0 \equiv -2^n u(-n-1)}$$

2.3.4 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH TỔNG CÁC PHÂN THỨC TỐI GIẢN

Xét **X(z)** là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{d_K z^K + d_{K-1} z^{K-1} + \ldots + d_1 z + d_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

với: K, N >0

- Nếu **K>N**, thực hiện phép chia đa thức:

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{A(z)}{B(z)} = C(z) + \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} \ldots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

Ta được C(z) là đa thức và phân thức A(z)/B(z) có bậc **M≤N**

- Nếu **K≤N**, thì X(z) có dạng giống phân thức A(z)/B(z)

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức C(z) là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược A(z)/B(z) có bậc M≤N

Xét **X(z)/z** là phân thức hữu tỉ có bậc **M≤N** :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} ... + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + ... + b_1 z + b_0}$$

Xét đến các điểm cực của X(z)/z, hay nghiệm của B(z) là *đơn, bội và phức liên hiệp*

a) <u>Xét X(z)/z có các điểm cực đơn</u>: Z_{p1}, Z_{p2}, Z_{p3},…. Z_{pN}

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N(z - z_{p1})(z - z_{p2})\cdots(z - z_{pN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{K_1}{(z - z_{p1})} + \frac{K_2}{(z - z_{p2})} + \cdots + \frac{K_N}{(z - z_{pN})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(z - z_{pi})}$$

Với hệ số $\mathbf{K_i}$ xác định bởi:

$$\boxed{K_i = \frac{X(z)}{z}(z - z_{pi})\bigg|_{Z=Z_{pi}}} \quad \text{hay} \quad \boxed{K_i = \frac{A(z)}{B'(z)}\bigg|_{Z=Z_{pi}}}$$

Suy ra **X(z)** có biểu thức:

$$X(z)=\frac{K_1}{(1-z_{p1}z^{-1})}+\frac{K_2}{(1-z_{p2}z^{-1})}+\cdots+\frac{K_N}{(1-z_{pN}z^{-1})}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{(1-z_{pi}z^{-1})}$$

Xét: $X_i(z)=\dfrac{K_i}{(1-z_{pi}z^{-1})}$

- Nếu ROC: ***/z/ > /z***$_{pi}$***/*** $\Rightarrow x_i(n)=K_i(z_{pi})^n u(n)$
- Nếu ROC: ***/z/ < /z***$_{pi}$***/*** $\Rightarrow x_i(n)=-K_i(z_{pi})^n u(-n-1)$
- **Vậy:** $\boxed{x(n)=\sum_{i=1}^{N}x_i(n)}$

<u>Ví dụ 2.3.5</u>: Tìm x(n) biết $X(z)=\dfrac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$

ROC : **a) /z/>3, b) /z/<2, c) 2</z/<3**

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1=\frac{X(z)}{z}(z-2)\bigg|_{Z=2}=\frac{2z-5}{(z-3)}\bigg|_{Z=2}=1$$

$$K_2=\frac{X(z)}{z}(z-3)\bigg|_{Z=3}=\frac{2z-5}{(z-2)}\bigg|_{Z=3}=1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-3)}\Rightarrow X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) /z/ > 3 : $\boxed{x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)}$

b) /z/ < 2 : $\boxed{x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)}$

c) 2</z/<3 : $\boxed{x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)}$

b) Xét X(z)/z có điểm cực Z_{p1} bội r và các điểm cực đơn: $Z_{p(r+1)}, \ldots, Z_{pN}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})^r(z-z_{p(r+1)})\cdots(z-z_{pN})}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1})^2}+\cdots+\frac{K_r}{(z-z_{p1})^r}+$$

$$+\frac{K_{r+1}}{(z-z_{p(r+1)})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{pN})}=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(z-z_{p1})^i}+\sum_{l=r+1}^{N}\frac{K_l}{(z-z_{pl})}$$

Với hệ số $\mathbf{K_i}$ xác định bởi:

$$\boxed{K_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-z_{c1})^r\right]\Bigg|_{Z=Z_{p1}}}$$

$$\boxed{K_l=\frac{X(z)}{z}(z-z_{pl})\Bigg|_{Z=Z_{pl}}}$$

Với giả thiết ROC của X(z): ***/z/ > max{/z_pi/}***: i=1÷N,

biến đổi Z ngược của thành phần $\mathbf{K_i/(z-z_{pi})^r}$ sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftrightarrow{Z^{-1}} \frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$\boxed{x(n)=\sum_{i=1}^{r}K_i\frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)+\sum_{l=r+1}^{N}K_l(z_{pl})^n u(n)}$$

Ví dụ 2.3.6: Tìm x(n) biết $X(z)=\frac{2z^3-5z^2+4z}{(z-2)^2(z-1)}, \mathrm{ROC}:|z|>2$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-2)^2}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\right]\Bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\Bigg|_{Z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{Z=1} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2}\Bigg|_{Z=1} = 1$$

Vậy **X(z)/z** có biểu thức là:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})} \qquad ROC: |z| > 2$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)}$$

c) Xét X(z)/z có cặp điểm cực Z_{p1} và Z^*_{p1} phức liên hiệp, các điểm cực còn lại đơn: $Z_{p3},\ldots,Z_{pN}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-z_{p1})(z-z_{p1}^*)(z-z_{p3})\cdots(z-z_{pN})}$$

X(z)/z được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1}^*)}+\frac{K_3}{(z-z_{p3})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-z_{pN})}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_2}{(z-z_{p1}^*)}+\sum_{i=3}^{N}\frac{K_i}{(z-z_{pi})}$$

Với các hệ số **K_1, K_i** được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-z_{pi})\Big|_{Z=Z_{pi}}\quad : i=1\div N$$

Do các hệ số **A(z), B(z)** là thực, nên $\mathbf{K_2=K_1^*}$

Xét : $$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-z_{p1})}+\frac{K_1{}^*}{(z-z_{p1}^*)}$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{K_1}{(1-z_{p1}z^{-1})}+\frac{K_1{}^*}{(1-z_{p1}^*z^{-1})}$$ Nếu gọi: $$\begin{cases} K_1=|K_1|e^{j\beta} \\ z_{p1}=|z_{p1}|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: **/z/>max{/z_{pi}/}**:

$$\Rightarrow x_1(n)=\left[K_1\left(z_{p1}\right)^n+K_1^*\left(z_{p1}^*\right)^n\right]u(n)$$

$$=2|K_1||z_{p1}|^n cos(n\alpha+\beta)u(n)$$

Vậy: $$\boxed{x(n)=\left\{2|K_1||z_{p1}|^n cos(n\alpha+\beta)+\sum_{i=3}^{N}K_i\left(z_{pi}\right)^n\right\}u(n)}$$

<u>Ví dụ 2.3.7</u>: Tìm x(n) biết: $X(z)=\dfrac{-z}{(z^2-2z+2)(z-1)} : |z|>\sqrt{2}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{(z^2-2z+2)(z-1)}=\frac{-1}{[z-(1+j)][z-(1-j)](z-1)}$$

$$=\frac{K_1}{[z-(1+j)]}+\frac{K_1^*}{[z-(1-j)]}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

$$K_1=\left.\frac{-1}{[z-(1-j)](z-1)}\right|_{Z=1+j}=\frac{1}{2} \qquad K_3=\left.\frac{-1}{(z^2-2z+2)}\right|_{Z=1}=-1$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1/2}{[1-(1+j)z^{-1}]}+\frac{1/2}{[1-(1-j)z^{-1}]}+\frac{-1}{(1-z^{-1})} \qquad |z|>\sqrt{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n)=(\sqrt{2})^n\cos(n\frac{\pi}{4})u(n)-u(n)}$$

Cảm Ơn lớp đã chú ý lắng nghe