

4. Скалярное произведение векторов



1) $\vec{a}, \vec{b}; |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$

$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = ?$, или $\vec{p} = -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}$

и $\vec{q} = -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

$$\textcircled{1} \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \varphi(\vec{p}, \vec{q})$$

$\textcircled{2}$ Если взаимно перпендикулярны \vec{a} и \vec{b} $\angle \varphi = 90^\circ$

$$\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underbrace{|\vec{a}|}_{1} \underbrace{|\vec{b}|}_{1} \underbrace{\cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})}_{0} = 0$$

$$\textcircled{3} \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = \langle -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}, -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} \rangle = \sqrt{3}|\vec{a}|^2 - 3\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + 2\sqrt{3}|\vec{b}|^2 =$$

$$= 3\sqrt{3} - 5\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3\sqrt{3} - 5\cos \varphi$$

$$\textcircled{4} |\vec{p}|^2 = \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle = \langle -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}, -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b} \rangle = 3|\vec{a}|^2 - 4\sqrt{3}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 4|\vec{b}|^2 = 7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi} \geq 0 \quad [\text{бывает ли } \varphi \text{ равен } 0]$$

$$|\vec{q}|^2 = \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = \langle -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}, -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 - 2\sqrt{3}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 3|\vec{b}|^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{q}| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi}$$

$$\textcircled{5} 3\sqrt{3} - 5\cos \varphi = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \uparrow^?$$

$$27 - 30\sqrt{3}\cos \varphi + 25\cos^2 \varphi = (7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi)(4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi) \cdot \frac{3}{4} \quad / : 4$$

$$108 - 120\sqrt{3}\cos \varphi + 100\cos^2 \varphi = 84 - 90\sqrt{3}\cos \varphi + 72\cos^2 \varphi$$

$$28\cos^2 \varphi - 30\sqrt{3}\cos \varphi + 24 = 0 \quad / : 2$$

$$14\cos^2 \varphi - 15\sqrt{3}\cos \varphi + 12 = 0, \quad \Delta = 675 - 672 = 3$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{15\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{28} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{16\sqrt{3}}{28} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \quad \cos \varphi = \frac{14\sqrt{3}}{28} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$\rightarrow \arccos\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

2) Да, се доказва, че $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ са

перпендикулярни $\Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\textcircled{1} \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|\vec{a}| - |\vec{b}|)(|\vec{a}| + |\vec{b}|) = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

13) Да се покаже, че $\vec{b} \perp \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a}}_{\text{вектор}} - \underbrace{|\vec{a}|^2 \vec{b}}_{\text{вектор}} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\textcircled{1} \vec{b} \perp \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a} - |\vec{a}|^2 \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{b}, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a} - |\vec{a}|^2 \vec{b} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{b}, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, |\vec{a}|^2 \vec{b} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - |\vec{a}|^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{a}| |\vec{b}|)(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{a}| |\vec{b}|) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \quad // \cos \varphi = 0^\circ = \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$2) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -|\vec{a}| |\vec{b}| \quad // \cos \varphi = 180^\circ = \cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$