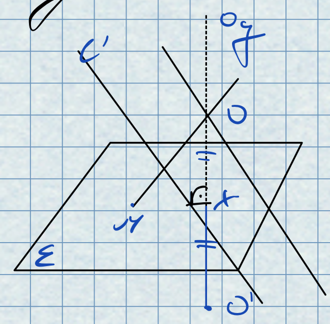
15. Лъчи

[1] Дадена е равнината $\varepsilon: 2x+3y+2z-4=0$. Да се намери лъч l, който минава през началото на координатната система и след отразяването си това успореден на ординатата.

$O(0,0,0)$ – начало на КС



① $Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ – ординатата; $Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ – абсцисата; $Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ – апликатата

② Нека h е правата през т. O, перпендикулярна на ε; $\vec{N_\varepsilon}(2,3,2) \perp \varepsilon$

$\Rightarrow \vec{N_\varepsilon} \parallel h$

$\Rightarrow h: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

③ $X \in h: \begin{cases} x_1 = 2\lambda \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = 2\lambda \end{cases}$

$X \in \varepsilon: \; 2x_1+3x_2+2x_3-4=0$

$4\lambda + 9\lambda + 4\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4}{17}$

$x_1 = \frac{8}{17}, \; x_2 = \frac{12}{17}, \; x_3 = \frac{8}{17}$

④ Нека $O'(x', y', z')$ е симетричната на O относно ε. $\Rightarrow X$ е среда на OO'

⑤ $\left.\begin{aligned} 8/17 &= (0+x'):2 \\ 12/17 &= (0+y'):2 \\ 8/17 &= (0+z'):2 \end{aligned}\right\} \; x' = \frac{16}{17}, \; y' = \frac{24}{17}, \; z' = \frac{16}{17}$

⑥ $l' \parallel Oy$; две точки от Oy са т. $A(0,1,0)$ и $B(0,2,0) \rightarrow \vec{AB}(0,1,0) \parallel Oy$

$\Rightarrow Oy \parallel l'$

⑧ Нека $l' \cap \varepsilon = M(m_1, m_2, m_3)$

⑦ $l': \begin{cases} x = 16/17 + 0\mu = 16/17 \\ y = 24/17 + 1.\mu = 24/17 + \mu \\ z = 16/17 + 0.\mu = 16/17 \end{cases}$

$M \in l': \begin{cases} m_1 = 16/17 \\ m_2 = 24/17 + \mu \\ m_3 = 16/17 \end{cases}$

$M \in \varepsilon: \; 2m_1 + 3m_2 + 2m_3 - 4 = 0$

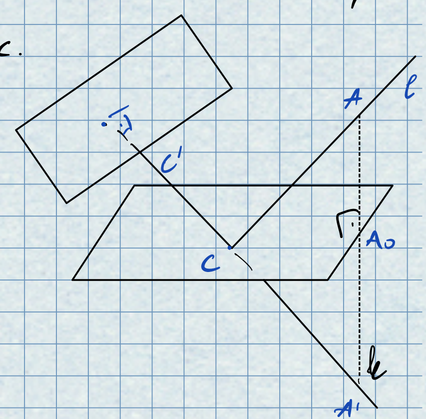
$\rightarrow \frac{32}{17} + \frac{72}{17} + 3\mu + \frac{32}{17} - 4 = 0;$

$3\mu + 4 = 0 \rightarrow \mu = \frac{-4}{3}$

$\Big\}\ m_2 = \frac{4}{51},\ m_1 = m_3 = \frac{16}{17}$

⑨ $M\left(\frac{16}{17}, \frac{4}{51}, \frac{16}{17}\right) \rightarrow \overrightarrow{OM}\left(\frac{16}{17}, \frac{4}{51}, \frac{16}{17}\right)$

$\boxed{2}$ Дадени са т. $A(0,-3,2)$ и $\beta: 4x-y-4z-72=0$ и $\gamma: x-3y-z+4=0$. Лъч $\underline{l}$ минава през т. A, отразява се от γ в т. C и отразеният лъч пресича β под прав ъгъл в т. B. Да се намерят l, l' и S_{ABC}.



① Нека $\underline{h}$ е правата през т. A, $\perp \gamma \Rightarrow$

$h \parallel \overrightarrow{N_\gamma}(1,3,-1)$

$\Rightarrow h: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3-3\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

② Нека $A_0(a_1, a_2, a_3) = h \cap \gamma$

③ $A_0 \in h: \left| \begin{array}{l} a_1 = \lambda \\ a_2 = -3-3\lambda \\ a_3 = 2-\lambda \end{array} \right.$

$A_0 \in \gamma \ \big|\ a_1 - 3a_2 - a_3 + 4 = 0$

$\lambda + 9 + 9\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 3;\ A_0(-1,0,3)$

④ Нека $A'(a_1', a_2', a_3')$ е симетричната на A относно $\gamma \Rightarrow A_0$ е среда на AA'

$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} -1 = (0+a_1'):2 & \rightarrow a_1' = -2 \\ 0 = (-3+a_2'):2 & \rightarrow a_2' = 3 \\ 3 = (2+a_3'):2 & \rightarrow a_3' = 4 \end{array} \right\} A'(-2,3,4)$

⑤ Но $l' \perp \beta \Rightarrow l' \parallel \overrightarrow{N_\beta}(4,-1,-4) \Rightarrow l': \left| \begin{array}{l} x = 2-4a \\ y = 3-a \\ z = 4-4a \end{array} \right.$

⑥ Нека $B(b_1, b_2, b_3)$

$B \in l' \left| \begin{array}{l} b_1 = -2+4a \\ b_2 = 3-a \\ b_2 = 4-4a \end{array} \right.$

$B \in \beta \ \big|\ 4b_1 - b_2 - 4b_3 - 72 = 0$

$\Big\}\ B(10,0,-8)$

⑦ Нека $C(c_1, c_2, c_3)$

$C \in l' \left| \begin{array}{l} c_1 = -2+4a \\ c_2 = 3-a \\ c_3 = 4-4a \end{array} \right.$

$C \in \gamma \ \big|\ c_1 - 3c_2 - c_3 + 4 = 0$

$\Big\}\ C(2,2,0)$

(8) $\vec{AC}(2, 5, -2) \longrightarrow \quad l: \begin{cases} x = 2 + 2b \\ y = 2 + 5b \\ z = 0 - 2b \end{cases}$ (9) $\vec{AB}(10, 3, -10)$

$$\Rightarrow \vec{AC} \times AB = \left(\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-44, 0, -44)$$

$$S_{ABC} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{2} = 22\sqrt{2}$$