# Права в равнината

Дефиниция: Ако $l: Ax+By+C=0$, то уравнението $l: \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ се нарича „нормално уравнение".

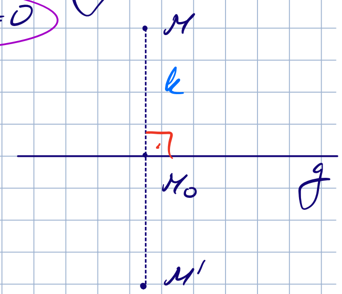
Дава разстоянието от т. $M(m_1, m_2)$ до $l$ с: $d(l, M)=\frac{|Am_1+Bm_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\boxed{1}$ Да се намери нормалното уравнение на $g$ и разстоянието от т. $M$ до $g$, ако:

$g: 3x+4y+2=0$ и $M(1,-2)$

① НУ: $\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{2}{5}=0$ ② Разстояние: $\frac{|3.1+4(-2)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$

$\boxed{2}$ Да се намери ортогоналната проекция $M_0$ на т. $M$ върху правата $g$ и симетрична точка $M'$ на $M$ спрямо $g$, ако: $M(0,1)$ и $g: 5x-12y+1=0$




① Нека $k$ е правата през $M \perp g$ и имаме, че

$k \perp g: \underline{12x+5y+C=0}$, където $C$ – const

Разменяме местата на коефициентите и умножаваме по (-1) един от тях

② $M \in k: 12.0+5.(-1)+C=0$, $-5+C=0 \rightarrow C=5$

$\Rightarrow k: 12x+5y+5=0$

③ Нека $M_0(m_1, m_2) \longrightarrow \left.\begin{matrix} M_0 \in k \\ M_0 \in g \end{matrix}\right\}$ $\begin{vmatrix} 12m_1+5m_2+5=0 \\ 5m_1-12m_2+1=0 \end{vmatrix}$ $m_1 = \frac{12m_2+1}{5}$

$12\frac{(12m_2+1)}{5}+5m_2+5=0$

$\frac{144m_2-12}{5}+5m_2+5=0$, $144m_2-12+25m_2+25=0$, $169m_2+13=0$, $169m_2=-13$

$\rightarrow m_2 = -\frac{13}{169} = -\frac{1}{13} \Rightarrow m_1 = -\frac{12.1}{13.5} - \frac{1}{5} = \frac{-12-13}{65} = \frac{-25}{65} = -\frac{5}{13}$

$\Rightarrow M_0\left(-\frac{5}{13}, -\frac{1}{13}\right)$

④ Нека $M'(x', y')$. $M_0$ е среда на $k \rightarrow$ $\left| \begin{matrix} -\frac{5}{13} = \frac{0+x'}{2} \\ (1) \quad (2) \\ -\frac{1}{13} = \frac{1+y'}{2} \end{matrix} \right.$ $\left| \begin{matrix} x' = -\frac{10}{13} \\ y' = \frac{11}{13} \end{matrix} \right\}$ $M'\left(-\frac{10}{13}, \frac{11}{13}\right)$

(1) са координатите на т. $M_0$

(2) са координатите на $M$

**ОКС** $\triangle ABC$: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

$I$ е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Тогава:

$\vec{OI} = \dfrac{a.\vec{OA} + b.\vec{OB} + c.\vec{OC}}{a+b+c}$, където $O$ е център на КС

* Координатите на $I = \dfrac{a.\text{коорд. }A + b\text{ коорд. }B + c.\text{ коорд.}}{a+b+c}$

$\boxed{3}$ Ако $A(1,-2)$, $B(2,0)$ и $C(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, то да се намери центърът $I$ на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ и радиусът $r$ на вписаната окръжност.

① Нека запишем координатите на $I \to I(i_1, i_2)$

② Намираме дължините на страните на $\triangle ABC$:

$\vec{AB}(1,2) \to |\vec{AB}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} = c$

$\vec{BC}(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) \to |\vec{BC}| = \sqrt{(\frac{8}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{64+16}{9}} = \sqrt{\frac{80}{9}} = \sqrt{\frac{4.4.5}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3} = a$

$\vec{AC}(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}) \to |\vec{AC}| = \sqrt{(-\frac{5}{3})^2 + (\frac{10}{3})^2} = \sqrt{\frac{125}{9}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} = b$

③ Намираме координатите на $I$:

$$i_1 = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}.1 + \frac{5\sqrt{5}}{3}.2 + \sqrt{5}\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{4\sqrt{5}}{3} + \frac{5\sqrt{5}}{3} + \sqrt{5}} = \frac{\frac{12\sqrt{5}}{3}}{\frac{12\sqrt{5}}{3}} = 1$$

$$i_2 = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}.(-2) + \frac{5\sqrt{5}}{3}.0 + \sqrt{5}.\frac{4}{3}}{\frac{12\sqrt{5}}{3}} = \frac{-\frac{\cancel{4}\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{3}}}{\frac{3\cancel{12}\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{3}}} = -\frac{1}{3}$$

$I(1, -\frac{1}{3})$

④ $AB$: $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ & \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ 1 \end{array} \right. & \begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} & \left. \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \end{array} = 0 \longrightarrow AB = -2x + 0 + 2y + 4 - y = 0$

$AB: 2x - y - 4 = 0$

⑤ НУ: $\dfrac{2x-y-4}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{2x-y-4}{\sqrt{5}}$

⑥ $IH$: $\dfrac{|2.1 + (-\frac{1}{3}) - 4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|-\frac{5}{3}|}{\sqrt{5}} = 0 \longrightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0$

# Общи задачи за права в равнината

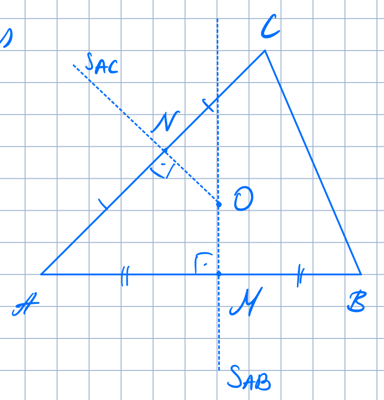
**1** Дадени са точките $A(5,1)$, $B(3,3)$ и $C(-1,5)$. Да се намерят:

а) $s_{AC} = ?$ $s_{AB} = ?$

б) Координатите на центъра т. $O$ на описаната около $\triangle ABC$ окръжност

в) Дължината $R_{ABC}$ на радиуса на описаната окръжност

а)




① Нека $s_{AB} \times AB = M$ и $s_{AC} \times AC = N$

$\rightarrow M(4,1)$ и $N(2,3)$

$$AB: \begin{vmatrix} x & 5 & 3 \\ y & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 15 + 3y - 3 - 5y - 3x = -2x - 2y + 12 = 0 \ /-6$$

$\rightarrow AB: x + y - 6 = 0$

② $s_{AB} \perp AB \Rightarrow s_{AB}: x - y + C = 0$ и $M \in AB \rightarrow 4.1 - 1.1 + C = 0 \rightarrow c = -3$

$\Rightarrow s_{AB}: x - y - 3 = 0$

③ $$AC: \begin{vmatrix} x & 5 & -1 \\ y & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + 25 + 1 - 5y - 5x = -4x - 6y + 26 \ /:(-2)$$

$\rightarrow 2x + 3y - 13 = 0$

$\rightarrow s_{AC} \perp AC \Rightarrow s_{AC}: 3x - 2y + C = 0$ и $N \in AC \Rightarrow 3.2 - 2.3 + C = 0 \rightarrow C = 0$

$\Rightarrow s_{AC}: 3x - 2y = 0$

б) т. $O$ е пресечна точка на $s_{AB}$ и $s_{AC} \rightarrow x - y - 2 = 3x - 2y$

$\rightarrow 2x - y + 2 = 0$, $y = 2x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x - (2x+2) - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x - 2x - 2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = -4 \end{cases} \Bigg\} \ O(-4,-6)$$

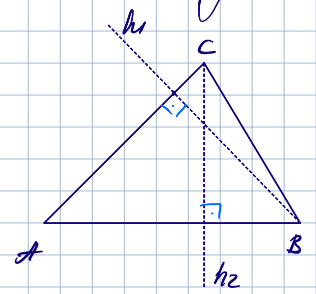
в) $\vec{OB}(7,9) \rightarrow |\vec{OB}| = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$

$|\vec{OB}| = \sqrt{130}$

$\boxed{2}$ Дадени са правите $h_1: 2x-3y+7$, $h_2: x+2y-7=0$ и $A(1,5)$

а) ако $h_1$ и $h_2$ са височините върховете $B$ и $C$ на $\triangle ABC$, то да се намерят уравненията на страните на $\triangle ABC$

б) $S_{ABC}=?$ $\quad R_{ABC}=?$




а) ① $AC \perp h_1 \to AC: 3x+2y+C=0$ и $A \in AC$

$\to 3.1+5.2+C=0$, $C=-13$

$\Rightarrow AC: 3x+2y-13=0$

② $AB \perp h_2 \to AB: 2x-y+C=0$ и $A \in AB \Rightarrow 2.1-5+C=0 \to C=3$

$\Rightarrow AB: 2x-y+3=0$

③ Нека т. $B(b_1,b_2) \to$

$$\begin{array}{l|l} \text{т. } B \in h_1 & 2b_1-3b_2+7=0 \\ \text{т. } B \in AB & 2b_1-b_2+3=0 \end{array} \ominus \left| \begin{array}{l} -3b_2+b_2+7-3=0 \\ 2b_1-b_2+3=0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} -2b_2=-4 \\ b_1=(-2+3):2 \end{array} \right\} B\left(-\frac{1}{2},2\right)$$

и $C(c_1,c_2) \to$

$$\begin{array}{l|l} \text{т. } C \in h_2 & c_1+2c_2-7=0 \\ \text{т. } C \in AC & 3c_1+2c_2-13=0 \end{array} \ominus \left| \begin{array}{l} c_1+2c_2-7=0 \\ -2c_1+6=0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} c_1=3 \\ c_2=2 \end{array} \right\} C(3,2)$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{2} & 3 \\ y & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{2x}-1+3y-6+\frac{1}{2}y-\cancel{2x} = \frac{7}{2}y-7=0 \ /.2$$

$\to BC: 7y-14 \ /:7 \to y-2=0$

б) $A(1,5)$ $\quad B(-\frac{1}{2},2)$ $\quad C(3,2)$

① $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$, $\quad \vec{AB}\times\vec{AC}=\left(\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix}\right)=\left(0,0,\frac{-9-12}{2}\right)=\left(0,0,\frac{-21}{2}\right)$

$\vec{AB}(-\frac{3}{2},-3,0)$

$\vec{AC}(2,-3,0)$

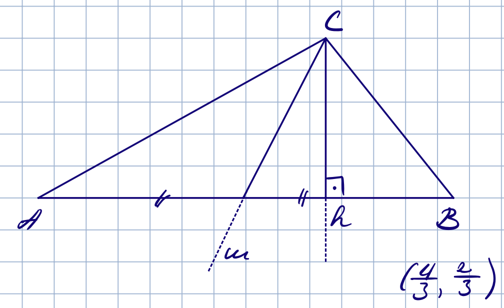
$S_{ABC}=\frac{|21|}{4}=\frac{21}{4}$ и оттук $S=\frac{abc}{4R}$, $\frac{^1\cancel{21}}{\cancel{4}}=\frac{3\sqrt{5}\cdot\cancel{7}\cdot\sqrt{13}}{\cancel{4}.2.2\,R} \to R=\frac{\sqrt{65}}{4}$

$|\vec{AB}|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ $\quad |\vec{BC}|=\frac{7}{2}$ $\quad |\vec{AC}|=\sqrt{13}$

3. Дадени са правите $h: x-7y-6=0$ и $m: 5x-13y-30=0$ и $B\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

а) Ако $h$ и $m$ съдържат медианата и височината през върха $C$ на $\triangle ABC$, то да се намерят $A$ и $C$

б) Да се намерят координатите на центъра $I$ на вписаната окръжност и $r$ на вписаната окръжност




а) ① Правите $m$ и $h$ се пресичат, от което следва: $x-7y-6=5x-13y-30=0$

$\rightarrow 4x-6y-24=0 \quad /:2$

$2x-3y-12=0, \quad x=\frac{3y+12}{2}$

$\rightarrow \begin{cases} x=\frac{3y+12}{2} \\ \frac{3y+12}{2}-7y-6=0 \ /(2) \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3y+12}{2} \\ 3y+12-14y-12=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3y+12}{2} \\ 11y=0 \end{cases} \Bigg\} \ C(6;0)$

② $AB \perp h \Longrightarrow AB: 7x+y+c=0$, $B\in AB \rightarrow 7\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+c=0$, $28+2+3c=0$, $c=-10$

$\rightarrow AB: 7x+y-10=0$

③ Нека $AB \cap m = M(m_1, m_2)$

$\rightarrow \begin{rcases} 7x+y-10=5x-13y-30 \\ 2x+14y+20=0 \ /:2 \\ x+7y+10=0 \end{rcases} \quad \begin{cases} x=-7y-10 \\ -49y-70+y-10=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-7y-10 \\ -48y-80=0 \end{cases}$

$\rightarrow y=-\frac{5}{3} \rightarrow x=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow AB\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ и $M$ е среда на $AB$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}=\frac{a_1+\frac{4}{3}}{2} \\ -\frac{5}{3}=\frac{a_2+\frac{2}{3}}{2} \end{cases} \Bigg\} \ A(2,-4)$

④ $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \frac{10\sqrt{2}}{3} = c$

$\overrightarrow{AC}(4,4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2} = b$

$\overrightarrow{BC}\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \frac{10\sqrt{2}}{3} = a$

$a+b+c = \frac{32\sqrt{2}}{3}$