7. Доказателства

1 Да се докаже, че $(\vec a\times\vec b)\times(\vec c\times\vec d) = \langle\vec a,\vec b,\vec d\rangle\vec c - \langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle\vec d$

① $\underbrace{(\vec a\times\vec b)}_{2.\,\vec e}\times\underbrace{(\vec c\times\vec d)}_{1.\,\vec e} =$

$(\vec a\times\vec b)\times\vec c = \vec b\langle\vec a,\vec c\rangle - \vec a\langle\vec b,\vec c\rangle$

$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \vec b\langle\vec a,\vec c\rangle - \vec c\langle\vec a,\vec b\rangle$

$= \cancel{\vec b\langle\vec a,\vec e\rangle - \vec a\langle\vec b,\vec e\rangle} =$

$= \cancel{\vec b\langle\vec a,\vec c,\vec d\rangle - \vec a\langle\vec b,\vec c,\vec d\rangle} \to$ Не работи

② $\to \vec e\times(\vec c\times\vec d) = \vec c\langle\vec e,\vec d\rangle - \vec d\langle\vec e,\vec d\rangle = \vec c\langle\vec a,\vec b,\vec d\rangle - \vec d\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle$ ✓

2 Да се докаже, че $\langle\vec a\times\vec b,\vec b\times\vec c,\vec c\times\vec a\rangle = \langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle^2$

① $\langle\vec a\times\vec b,\vec b\times\vec c,\vec c\times\vec a\rangle = \langle\vec a\times\vec b,\underbrace{(\vec b\times\vec c)}_{\vec d}\times(\vec c\times\vec a)\rangle =$

$= \langle\vec a\times\vec b,\vec d\times(\vec c\times\vec a)\rangle = \langle\vec a\times\vec b,\vec c\langle\vec d,\vec a\rangle - a\langle\vec d,\vec c\rangle\rangle =$

$= \langle\vec a\times\vec b,\vec c\underbrace{\langle\vec d,\vec a\rangle}_{\text{число}}\rangle - \langle\vec a\times\vec b,\vec a\underbrace{\langle\vec d,\vec c\rangle}_{\text{число}}\rangle =$

$= \langle\vec d,\vec a\rangle\langle\vec a\times\vec b,\vec c\rangle - \langle\vec d,\vec c\rangle\langle\vec a\times\vec b,\vec a\rangle = \langle\vec b,\vec c,\vec a\rangle\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle - \overbrace{\langle\vec b,\vec c,\vec c\rangle}^{0}\langle\vec a,\vec b,\vec a\rangle =$

$= \langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle = \langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle^2$

3 Да се докаже, че $\vec a\times[(\vec b\times\vec c)\times\vec d] = \langle\vec a,\vec d\rangle\vec b\times\vec c - \langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle\vec d$

① $\vec a\times[\underbrace{(\vec b\times\vec c)}_{\vec e}\times\vec d] = \vec a\times(\vec e\times\vec d) = \vec e\langle\vec a,\vec d\rangle - \vec d\langle\vec a,\vec e\rangle =$

$= \vec b\times\vec c\langle\vec a,\vec d\rangle - \vec d\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle$

4 Да се докаже $(\vec a\times\vec b)^2(\vec a\times\vec c)^2 - \langle\vec a\times\vec b,\vec a\times\vec c\rangle^2 = |\vec a|^2\langle\vec a,\vec b,\vec c\rangle^2$

ЛС $= (|\vec a\times\vec b||\vec a\times\vec c| - \langle\vec a\times\vec b,\vec a\times\vec c\rangle)(|\vec a\times\vec b||\vec a\times\vec c| + \langle\vec a\times\vec b,\vec a,\vec c\rangle) =$

$= (|\vec a||\vec b|\sin\varphi(\vec a,\vec b)|\vec a||\vec c|\sin\varphi(\vec a,\vec c) - \underbrace{\langle\vec a,\vec b,\vec e\rangle}) - (|\vec a||\vec b|\sin\varphi(\vec a,\vec b)|\vec a||\vec c|\sin\varphi(\vec a,\vec c) + \overset{\langle\vec a,\vec b,\vec e\rangle}{\vee})$

$\langle\vec a,\vec b\times\vec e\rangle = \langle\vec a,\vec b\times(\vec a\times\vec c)\rangle = \langle\vec a,\vec a\langle\vec b,\vec c\rangle - \vec c\langle\vec b,\vec a\rangle\rangle = |\vec a|^2\langle\vec b,\vec c\rangle - \langle\vec b,\vec a\rangle\langle\vec a,\vec c\rangle = |\vec a|^2|\vec b||\vec c|\cos\varphi(\vec b,\vec c) - |\vec a|^2|\vec b||\vec c|\cos\varphi(\vec a,\vec b)\cos\varphi(\vec a,\vec c)$