12. Права и равнина в пространството

Дефиниция: Ако равнината π минава през т. $A(a_1, a_2, a_3)$ и е компланарна с векторите $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, то уравненията

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = a_2 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = a_3 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$$

се наричат „параметрични уравнения" на равнината π

* $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ (векторите не може да са успоредни)

* 1 точка и 2 вектора

Дефиниция: Уравнението:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - a_1 & p_1 & q_1 \\ y - a_2 & p_2 & q_2 \\ z - a_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}$$

се нарича „общо уравнение" на равнината π

$\Longleftrightarrow \pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi: k(Ax + By + Cz + D) = 0, \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{1}$ Да се намерят параметричните уравнения и общото уравнение на равнината ε, която минава през т. M и е компланарна на векторите $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$, ако:

а) $M(2, 1, 2)$, $\vec{p_1}(1, 2, 3)$, $\vec{p_2}(-1, 2, 1)$

б) $M(-3, 7, 1)$, $\vec{p_1}(-2, 5, -6)$, $\vec{p_2}(-1, 1, 0)$

а)

① $\varepsilon: \begin{cases} x = 2 + 1\lambda - 1\mu \\ y = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ z = 2 + 3\lambda + 1\mu \end{cases}$ това е параметричното уравнение от точка и два вектора

Ако вземем $\lambda = 0, \mu = 1$:

$\varepsilon: \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ т. $A(1, 3, 3)$

Ако вземем $\lambda = -1, \mu = 2$

$\varepsilon: \begin{cases} x = \cancel{2} - 1 - \cancel{2} = -1 \\ y = 1 - 2 + 4 = 3 \\ z = 2 - 3 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ т. $B(-1, 3, 1)$

③ Общо уравнение:

$$\varepsilon: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{p_1} \\ \underbrace{-1 \quad 2 \quad 1}_{p_2} \end{vmatrix} = 2(x-2)-3(y-1)+2(z-2)+2(z-2)-6(x-2)-(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-\cancel{4}-3y+3+2z-\cancel{4}+2z-\cancel{4}-6x+\cancel{12}-y+1=0$$

$$\Leftrightarrow -4x-4y+4z+4=0 \quad /:(-1)$$

$$\Rightarrow \varepsilon: x+y-z-1=0$$

б) ① Параметрично уравнение:

$$\varepsilon: \begin{cases} x = -3-2\lambda-1\mu \\ y = 7+5\lambda+1\mu \\ z = 1-6\lambda+0\mu \end{cases}$$

б) $M(-3,7,1)$, $\vec{p_1}(-2,5,-6)$, $\vec{p_2}(-1,1,0)$

② Общо уравнение:

$$\varepsilon: \begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot x-2(z-1)+6(y-7)+5(z-1)+0y+6(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow -2z+2+6y-42+5z-5+6x+18=0$$

$$\Leftrightarrow 6x+6y+3z-27=0 \quad /:3$$

$$\Rightarrow \varepsilon: 2x+2y+z-9=0$$

$\boxed{2}$ Да се намери общо уравнение на равнината π, ако π минава през точките

а) $A(1,4,3)$ $B(1,3,2)$ $C(2,-1,1)$

б) $A(2,0,1)$ $B(-1,2,0)$ $C(-1,-1,-1)$

Правим вектори от точките (не е нужно да имат общо начало, нача-ло произволни

а) ① $\vec{AB}(0,-1,-1)$ $\vec{AC}(1,-5,-2)$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \left.\begin{aligned} & 2x-\cancel{2}-y+4+0z+z-\cancel{3}+0y-5x+\cancel{5}= \\ & = -3x-y+z+4=0 \quad /(-1) \\ & \Rightarrow 3x+y-z-4=0 \end{aligned}\right\}$$

б) ① $\vec{AB}(-3,2,-1)$ $\vec{AC}(-3,-1,-2)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4(x-2)+3(z-1)+3y+6(z-1)-x+2-6y=$$

$$= -4x+8+3z-3+3y+3z-6-x+2-6y=$$

$$= -5x - 3y + 9z + 4 = 5x + 3y - 9z - 1 = 0$$

$\boxed{3}$ Да се намери уравнение на равнината π, която минава през т. A и е успоредна на равнината λ, ако:

а) $A(1,-2,3)$, $\lambda: x - 7y - 4z - 1 = 0$

б) $A(-2,0,5)$: $\lambda: y - 2z - 3 = 0$

а) $\pi \parallel \lambda \Rightarrow \pi: x - 7y - 4z + D = 0$, D – const

$A \in \pi \Rightarrow 1 - 7(-2) - 4.3 + D = 0$, $D = -15 + 12$, $D = -3$

$\Rightarrow \pi: x - 7y - 4z - 3 = 0$

б) $\pi \parallel \lambda \Rightarrow \pi: y - 2z + D = 0$, D – const.

$A \in \pi \rightarrow 0 - 2.5 + D = 0 \rightarrow D = 10$

$\Rightarrow \pi: y - 2z + 10 = 0$