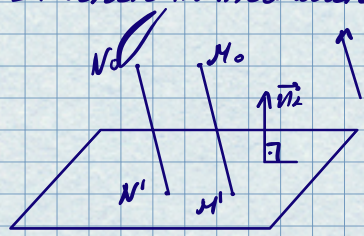
18. Успоредно, ортогонално и централно проектиране

I. Успоредното проектиране



λ – проекционна равнина

$\vec{\ell}$ – проекционно направление

Алгоритъм:

1. Взимаме произволна точка M_0 от пространството
2. Намираме правата k през т. M_0, успоредна на $\vec{\ell}$
3. Намираме пресечната точка M' на k с λ

$\boxed{1}$ Дадена е АКС $Oxyz$ и равнина $\lambda: x+y+2z+2=0$ и $\vec{\ell}(1,-2,0)$

а) Да се провери, че $\vec{\ell} \nparallel \lambda$

б) Да се намери аналитичното представяне на успоредното проектиране на тримерното пространство по направление $\vec{\ell}$ върху равнината λ

а) Ако $\vec{\ell} \parallel \lambda$, то $\vec{\ell} \perp \vec{n_\lambda} \Rightarrow \langle \vec{\ell}, \vec{n_\lambda} \rangle = 0$

$\vec{n_\lambda}(1,1,2) \to \langle \vec{n_\lambda}, \vec{\ell} \rangle = 1.1 + 1(-2) + 2.0 = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{\ell} \nparallel \lambda$

б) ① Нека т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка. Нека k е правата през M_0, успоредна на $\vec{\ell}$. Нека $k \cap \lambda = M'(x', y', z')$

$$\Rightarrow k: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 - 2\lambda \\ z = z_0 \end{cases} \qquad M' \in k \left| \begin{array}{l} x' = x_0 + \lambda \\ y' = y_0 - 2\lambda \\ z' = z_0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x' = x_0 + \lambda \\ y' = y_0 - 2\lambda \\ z' = z_0 \end{array} \right.$$

$$M' \in \lambda \quad \left| \; x' + y' + 2z' + 2 = 0 \right. \qquad \left| \; x_0 + \lambda + y_0 - 2\lambda + 2z_0 + 2 = 0 \right.$$

$$\Rightarrow \lambda = x_0 + y_0 + 2z_0 + 2$$

② $$\Rightarrow M' \begin{cases} x' = x_0 + (x_0 + y_0 + 2z_0 + 2) \\ y' = y_0 - 2(x_0 + y_0 + 2z_0 + 2) \\ z' = z_0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ В АКС $Oxyz$ са дадени равнината $\alpha: x+y+2z+3=0$ и права

$$l: \begin{cases} x = 3+s \\ y = 1+2s \\ z = 2-s \end{cases}$$

а) Да се докаже, че $l \nparallel \alpha$

б) Да се намери аналитично представяне на успоредно проектиране по направлението l върху α;

$\vec{p}(1,2,-1) \parallel l$

а) Ако $l \parallel \alpha$, то $\vec{p} \parallel \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n_\alpha} \Rightarrow \langle \vec{p}, \vec{n_\alpha} \rangle = 0$

$\vec{n_\alpha}(1,1,2) \rightarrow \langle \vec{n_\alpha}, \vec{p} \rangle = 1.1+2.1+(-1).2 = 1 \neq 0 \Rightarrow l \nparallel \alpha$

б) Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка и нека k е правата през M_0, успоредна на $\vec{l}$. $k \parallel l \Rightarrow k \parallel \vec{p}$

① $$\Rightarrow k: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + 2\lambda_0 \\ z = z_0 - \lambda \end{cases}$$

② Нека $k \cap \alpha = M'(x', y', z')$

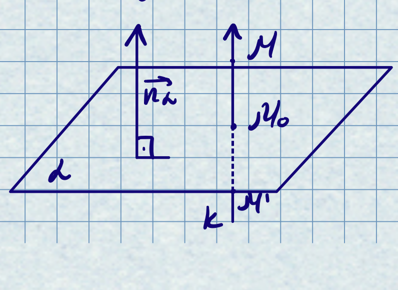
$$M' \in k \left| \begin{array}{l} x' = x_0 + \lambda \\ y' = y_0 + 2\lambda \\ z' = z_0 - \lambda \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x' = x_0 + \lambda \\ y' = y_0 + 2\lambda \\ z' = z_0 - \lambda \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x' = -y_0 - 2z_0 - 3 \\ y' = -2x_0 - y_0 - 4z_0 - 6 \\ z' = x_0 + y_0 + 3z_0 + 3 \end{array} \right.$$

$$M' \in \alpha \;\left|\; x' + y' + 2z + 3 = 0 \right. \qquad \left|\; x_0 + \lambda + y_0 + 2\lambda + 2z_0 - 2\lambda + 3 = 0 \right.$$

$\rightarrow \lambda = -x_0 - y_0 - 2z_0 - 3$ замести

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II. Ортогонално проектиране



$\boxed{1}$ В ОКС е дадена равнината $\alpha: x-2y-3z+4=0$. Да се намери аналитично представяне на ортогоналното проектиране на тримерното пространство.

върху равнината λ $\quad n_\lambda(1,-2,-3) \perp \lambda$

① Нека $M_0(x_0,y_0,z_0)$ е произволна точка и нека k е правата през M_0, $k \perp \lambda$

$\Rightarrow k \parallel \vec{n}_\lambda$

$$\Rightarrow k: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 - 2\lambda \\ z = z_0 - 3\lambda \end{cases}$$

② Нека $k \cap \lambda = M'(x', y', z')$

$$M' \in k \quad \left| \begin{array}{l} x' = x_0 + \lambda \\ y' = y_0 + 2\lambda \\ z' = z_0 - 3\lambda \end{array} \right.$$

$$M' \in \lambda \quad | \; x' - 2y' - 3z' + 4 = 0$$

$\Rightarrow x_0 + \lambda - 2(y_0 + 2\lambda) - 3(z_0 - 3\lambda) + 4 = 0$

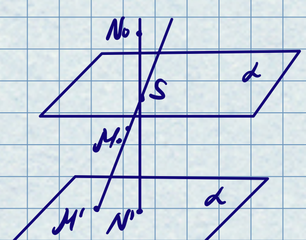
$$14\lambda = -x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 4$$

$$\lambda = \frac{-x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 4}{14}$$

$$M': \begin{cases} x' = x_0 + \lambda = \dfrac{13x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 4}{14} \\ y' = y_0 + 2\lambda = \dfrac{-2x_0 + 5y_0 + 6z_0 - 8}{14} \\ z' = z_0 - 3\lambda = \dfrac{3x_0 - 6y_0 - 8z_0 + 12}{14} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{14} & \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{5}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{6}{14} & -\frac{8}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{14} \\ -\frac{8}{14} \\ \frac{12}{14} \end{pmatrix}$$

III. Централно проектиране



Алгоритъм:

1. Взимаме една произволна точка M_0 и намираме правата SM_0
2. Намираме пресечната точка M' на SM_0 и λ

S – център на проектирането

λ – проекционна равнина

λ' – равнина през S, $\parallel \lambda$

* Точките от λ' не могат да се проектират

1 В АКС $Oxyz$ са дадени равнината $\alpha: x-y+2z-1=0$ и т. $S(2,0,1)$. Да се намери аналитичното представяне на централното проектиране с център S върху α

① Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка, $M_0 \notin \alpha' : \begin{cases} \text{през } S \\ \parallel \alpha \end{cases}$

$\vec{SM_0}(x_0-2, y_0, z_0-1) \parallel SM_0$

② $SM_0: \begin{cases} x = 2+\lambda(x_0-2) \\ y = 0+\lambda(y_0) \\ z = 1+\lambda(z_0-1) \end{cases}$

③ Нека $SM_0 \cap \alpha = M'(x', y', z')$

$M' \in SM_0 \;\Big|\; x = 2+\lambda(x_0-2), \quad y = 0+\lambda(y_0), \quad z = 1+\lambda(z_0-1)$

$M' \in \alpha \;\Big|\; x'-y'+2z'-1=0$

$\Rightarrow 2+\lambda(x_0-2)-\lambda y_0+2+2\lambda(z_0-1)-1=0$

$\lambda(x_0-y_0+2z_0-4)=0$

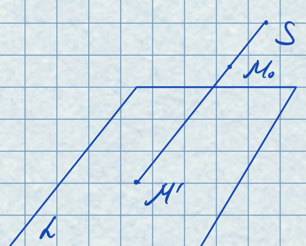
$\lambda = \dfrac{-3}{x_0-y_0+2z_0-4}$

$\Rightarrow x' = 2+\lambda(x_0-2) = \dfrac{-x_0-2y_0+4z_0-2}{x_0-y_0+2z_0-4}$

$y' = \lambda y_0 = \dfrac{-3y_0}{x_0-y_0+2z_0-4}$

$z' = 1+\lambda(z_0-1) = \dfrac{x_0-y_0-z_0-1}{x_0-y_0+2z_0-4}$

2 В АКС са дадени равнината $\alpha: x-2y+3z-1=0$ и т. $S(0,2,1)$. Да се намери аналитичното представяне на централното проектиране с център S върху α



① Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка, $M_0 \notin \alpha' \begin{cases} \text{през } S \\ \parallel \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{SM_0}(x_0, y_0-2, z_0-1)$

$\Rightarrow SM_0: \begin{cases} x = a x_0 \\ y = 2+a(y_0-2) \\ z = 1+a(z_0-1) \end{cases}$

② Нека $SM_0 \cap \alpha = M'(x', y', z')$

$$\text{MÉ SM}_0 \left|\begin{array}{l} x' = a x_0 \\ y' = 2 + a(y_0 - 2) \\ z' = 1 + a(z_0 - 1) \end{array}\right.$$

$$\text{MÉL} \quad \left| \; x' - 2y' + 3z' - 1 = 0 \quad (*) \right.$$

$$a x_0 - 4 - 2a(y_0 - 2) + 3 + 3a(z_0 - 1) - 1 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 1}$$

$$x' = a x_0 = \frac{2x_0}{x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 1}$$

$$y' = 2 + a(y_0 - 2) = \frac{2x_0 - 2y_0 + 6z_0 - 2}{x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 1}$$

$$z' = 1 + a(z_0 - 1) = \frac{x_0 - 2y_0 + 5z_0 - 1}{x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 1}$$