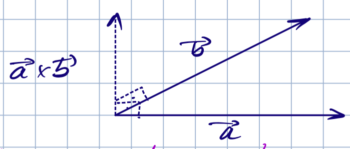
6. Векторно и смесено произведение

1. Векторно произведение

Дефиниция: Векторно произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме вектор $\vec{c}$, за който е изп.:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуват дясна тройка (положително ориентирана)



• $\vec{c}$ означаваме с $\vec{a} \times \vec{b}$

Свойства на векторното произведение:

→ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

→ $(\vec{a} \pm \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} \pm \vec{b} \times \vec{c}$

→ $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

→ $(\lambda \vec{a} \pm \mu \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{c}) \pm \mu(\vec{b} \times \vec{c}), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

→ $\left.\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned}\right\}$ Двойно векторно произведение

→ Лицето на триъгълник върху $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дава с формулата: $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

→ Лицето на успоредник върху $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дава с формулата: $|\vec{a} \times \vec{b}|$

→ Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

2. Смесено произведение

Дефиниция: Означава се $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ и то е $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$

Свойства:

→ $\langle \vec{a} \pm \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \pm \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$

→ $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$

→ $\langle \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \pm \mu \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle$

→ $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle$

→ Обемът на паралелепипед върху $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е $|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$

→ Обемът на тетраедър върху $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е $\frac{1}{6}|<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}>|$

→ Смесено произведение с координати: ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$ и координатната система е ортонормирана, то:

$$<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (*)$$

→ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни (лежат на една равнина) $\iff <\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}> = 0$
$\iff \det(*) = 0$

→ Детерминантата на Грам:

$$<\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}>^2 = \begin{vmatrix} <\vec{a}, \vec{a}> & <\vec{a}, \vec{b}> & <\vec{a}, \vec{c}> \\ <\vec{b}, \vec{a}> & <\vec{b}, \vec{b}> & <\vec{b}, \vec{c}> \\ <\vec{c}, \vec{a}> & <\vec{c}, \vec{b}> & <\vec{c}, \vec{c}> \end{vmatrix}$$

$\boxed{1}$ Да се намери $\vec{a} \times \vec{b}$, ако:

а) $\vec{a}(2, -3, 1)$ и $\vec{b}(3, 4, 5)$

б) $\vec{a}(3, -1, 1)$ и $\vec{b}(2, 1, -2)$

в) $\vec{a}(2, -1)$ и $\vec{b}(-3, 5)$

а) $\left.\begin{matrix} \vec{a}(2, -3, 1) \\ b(3, 4, 5) \end{matrix}\right\} \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) =$
$= (-19, -7, 17)$

б) $\left.\begin{matrix} \vec{a}(3, -1, 1) \\ \vec{b}(2, 1, -2) \end{matrix}\right\} \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 8, 5)$

в) $\left.\begin{matrix} \vec{a}(2, -1, 0) \\ \vec{b}(-3, 5, 0) \end{matrix}\right\} \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 7)$

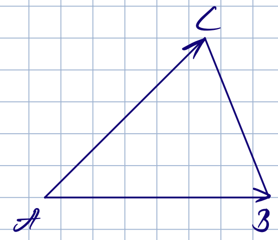
$\boxed{2}$ Дадени са $\vec{a}(2, 6, -26)$ и $\vec{b}(1, p, q)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Да се намерят p и q?

① $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0$

$$\left(\begin{vmatrix} 6 & -26 \\ p & q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -26 & 2 \\ q & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & p \end{vmatrix} \right) = (6q + 26p, -26 - 2q, \overset{a \parallel b}{2p - 6}) = (0, 0, 0)$$

$$\left| \begin{matrix} 6q + 26p = 0 \\ -26 - 2q = 0 \\ 2p - 6 = 0 \end{matrix} \right. \quad \left| \begin{matrix} q = -13 \\ p = 3 \\ 6(-13) + 26.3 = 0 \ \checkmark \end{matrix} \right.$$

3/ Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако:



$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

а) $A(1,-1,2)$, $B(3,1,2)$, $C(5,1,-2)$

б) $A(1,-2)$, $B(-3,4)$, $C(5,8)$

а) $\left.\begin{matrix}\vec{AB} = (2,2,0) \\ \vec{AC} = (4,2,-4)\end{matrix}\right\} \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-8,8,-4) = \vec{AB} \times \vec{AC}$

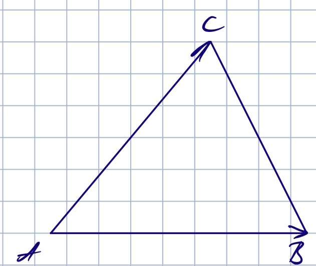
! $\Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{128+16} = \sqrt{144} = 12$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{12}{2} = \underline{\underline{6}}$

б) $\left.\begin{matrix}\vec{AB}(-4,6,0) \\ \vec{AC}(4,10,0)\end{matrix}\right\} \left(\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} \right) = (0,0,-64)$

$\Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-64)^2} = 64 \longrightarrow S_{ABC} = \frac{64}{2} = \underline{\underline{32}}$

4/ Да се намери лицето S_{ABC}, ако:



а) $A(1,2)$ $B(2,3)$ $C(-1,1)$

① $\vec{AB}(1,1,0)$ $\vec{AC}(-2,-1,0)$

$\rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (0,0,1) \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 1$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}$

Смесено произведение:

5/ $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(1,0,0)$, $\vec{c}(x,y,z)$ → ортонормирана система

а) Ако $x=1$ и $y=2$, то да се определи z така, че векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ да са компланарни

б) Ако $y=-1$ и $z=1$, то да се докаже, че за всяко x векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не са компланарни

а) $\vec{a}(1,1,1)$ $\vec{b}(1,0,0)$ $\vec{c}(x,y,z)$

① $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-z=0 \Rightarrow z=2$

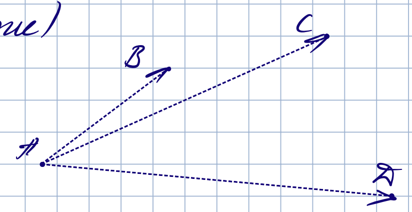
б) $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(1,0,0)$, $\vec{c}(x,-1,1)$

① $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow \langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$, но $\det(A)=$
$=-1-1=-2\neq 0$ за $\forall x$

$\Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ за никое x не са компланарни

6) Да се докаже, че точките $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ и $D(2,1,3)$ лежат в една равнина (ортонормиран базис)

① Ще докажем, че векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ са компланарни и оттам исканото ще следва



$\rightarrow \overrightarrow{AB}(-1,-1,6)$ $\quad \overrightarrow{AC}(-2,0,2)$ $\quad \overrightarrow{AD}(1,-1,4) \rightarrow \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=$

$$=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}=12-2-2-8=0 \Rightarrow$$ векторите са компланарни

7) Да се намери обемът на

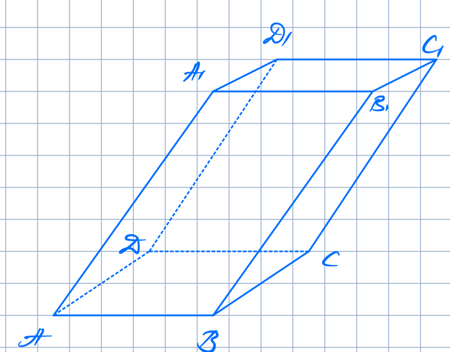
а) паралелепипеда, определен от $\vec{a}(2,1,0)$, $\vec{b}(0,1,1)$, $\vec{c}(1,0,-1)$

б) паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ако $A(3,2,1)$, $B(4,5,2)$, $D(0,1,4)$ и $A_1(0,0,7)$

в) тетраедъра, определен от $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(1,-1,2)$, $\vec{c}(3,-1,-1)$

г) тетраедъра $ABCD$, ако $A(2,-1,4)$, $B(-1,2,3)$, $C(3,-2,4)$ и $D(4,3,-1)$

а)
$$V=|\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle|=\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|=|-2+1|=1$$

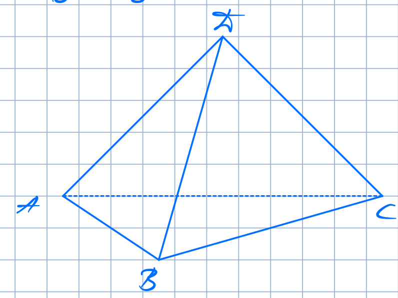


б) ① $\overrightarrow{AB}(1,3,1)$ $\quad \overrightarrow{AD}(-3,-1,3)$ $\quad \overrightarrow{AA_1}(-3,-2,6)$

② $V_{..}=|\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\rangle|=$

$$= \left| \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \right| = |-\cancel{6}+\cancel{6}-27+3+54+6| = |30| = 30$$

в) $$V = \frac{1}{6} |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |1-1+6+3+1+2| = \frac{|12|}{6} = \frac{12}{6} = 2$$



г) $\vec{AB}(-3,3,-1)$ $\vec{AC}(1,-1,0)$ $\vec{AD}(2,4,-5)$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\langle \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \rangle| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-\cancel{15}-4-2+\cancel{15}| = 1$$