

4. Складання та віднімання векторів

! \vec{a}, \vec{b} ; $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = ?, \text{ also } \vec{p} = -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}$$

$\vec{q} = -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$ доводиться?

$$\textcircled{1} \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \varphi(\vec{p}, \vec{q})$$

\textcircled{2} Нехай вектори \vec{a} та \vec{b} є \mathbb{R}^2

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \varphi$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = -\sqrt{3}\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2, -\vec{a}^2 + \sqrt{3}\vec{b}^2 = \sqrt{3}|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a}^2 + 2\sqrt{3}|\vec{b}|^2 = 3\sqrt{3} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{3} - 5\cos \varphi$$

$$\textcircled{4} \quad |\vec{p}|^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = -\sqrt{3}\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 - 4\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi} \geq 0 \quad [\text{Знають що } \varphi \in [0, \pi]]$$

$$|\vec{q}|^2 = \vec{q} \cdot \vec{q} = -\vec{a}^2 + \sqrt{3}\vec{b}^2, -\vec{a}^2 + \sqrt{3}\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\sqrt{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi$$

$$\Rightarrow |\vec{q}| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi}$$

$$\textcircled{5} \quad 3\sqrt{3} - 5\cos \varphi = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi}. \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ?$$

$$27 - 30\sqrt{3}\cos \varphi + 25\cos^2 \varphi = (7 - 4\sqrt{3}\cos \varphi)(4 - 2\sqrt{3}\cos \varphi) \cdot \frac{3}{4} \quad | : 4$$

$$108 - 120\sqrt{3}\cos \varphi + 100\cos^2 \varphi = 84 - 90\sqrt{3}\cos \varphi + 72\cos^2 \varphi$$

$$28\cos^2 \varphi - 30\sqrt{3}\cos \varphi + 24 = 0 \quad | : 2$$

$$14\cos^2 \varphi - 15\sqrt{3}\cos \varphi + 12 = 0, \quad \Delta = 675 - 672 = 3$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{15\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{28} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{15\sqrt{3}}{28} - \frac{4\sqrt{3}}{4}, \quad \cos \varphi = \frac{15\sqrt{3}}{28} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \Rightarrow \varphi = 80^\circ$$

$$\rightarrow \arccos \left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \right)$$

\textcircled{2} Задача 2: які $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$ відповідно до $|\vec{a}| = 15$

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\iff |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\iff (|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)(|\vec{a}| + |\vec{b}|) = 0$$

$$\iff |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

3) Da se goleste, re $b^2 \angle \underline{\underline{\vec{a}, \vec{b}}} = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\textcircled{1} \quad b^2 \angle \underline{\underline{\vec{a}, \vec{b}}} = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 |\vec{b}| \cos \varphi \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 |\vec{b}| \cos \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 |\vec{b}| \cos \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 |\vec{b}| \cos \varphi = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow (|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi) (|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad // \cos \varphi = 0^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad // \cos \varphi = 180^\circ \Rightarrow \cos \varphi = -1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$