

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição

Seja a um número real tal que

$a > 0$ e $a \neq 1$. Considere uma função real $y = f(x)$ definida por:

$$y = a^x$$

Esta função recebe o nome de função exponencial. Nessa expressão, a é base, x é a variável independente e y a variável dependente.

Veja alguns exemplos:

$$y = 3^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = \sqrt{5^x}$$

Observe as restrições impostas ao valor da base a . Se $a = 1$ a função se reduz a

$y = 1^x = 1$, ou seja, é uma função constante. Se $a = 0$ a função se torna

$y = 0^x$ que não é definida para alguns valores de x (por exemplo, 0^{-2} não existe). Se $a < 0$ alguns valores de y não seriam reais (por exemplo

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}.$$

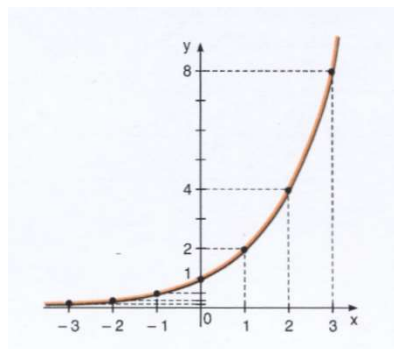
Gráfico

Vamos construir, por pontos, o gráfico da função:

$$y = 2^x$$

x	2^x	y
-3	2^{-3}	$\frac{1}{8}$
-2	2^{-2}	$\frac{1}{4}$
-1	2^{-1}	$\frac{1}{2}$
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

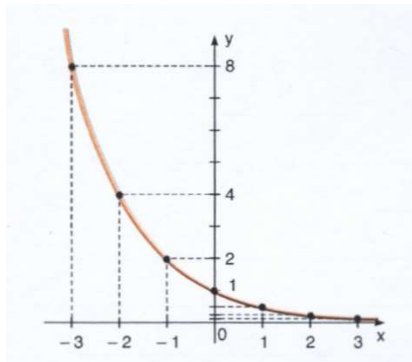
Com estes pontos, obtemos o gráfico:



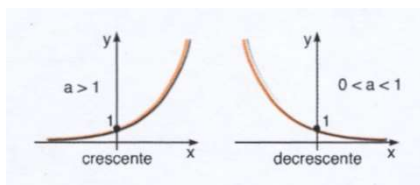
Fazendo o mesmo com a função:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Obtemos o gráfico:



De um modo geral, o gráfico da função exponencial é representado por uma curva especial que intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1). Esta curva pode ser crescente ou decrescente dependendo da base a .



Nos dois casos, o domínio e a imagem da função são:

$$D = \mathbb{R}$$

$$I_m = \mathbb{R}_+^*$$

Outras funções

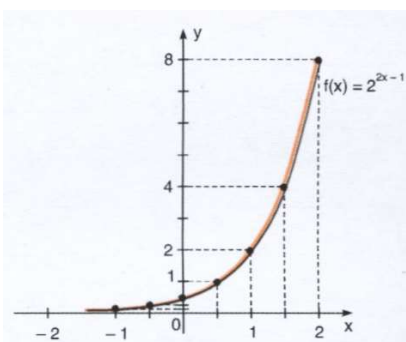
A partir dessa função exponencial básica podemos definir outras funções.

É o caso, por exemplo, da função

$$y = 2^{2x-1}$$

Vamos construir o seu gráfico por pontos. Para isso, montamos uma tabela atribuindo valores convenientes a x , calculamos $2x - 1$ e finalmente determinamos 2^{2x-1} .

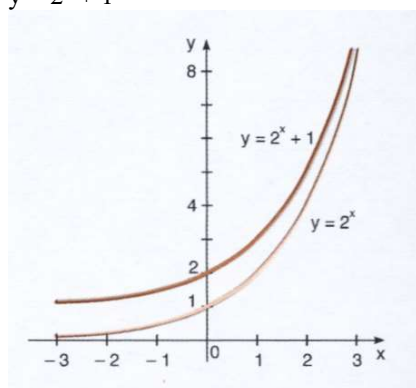
x	$2x-1$	$Y = 2^{2x-1}$
-1	-3	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	2
$\frac{3}{2}$	2	4
2	3	8



Num outro exemplo, veja a função:

Num outro exemplo, veja a função:

$$y = 2^x + 1$$

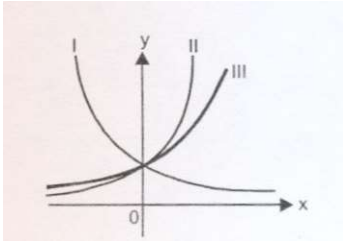


Exercícios de Aula

01. Faça um esboço do gráfico das funções definidas abaixo, indicando o Domínio, contra-domínio, imagem, interceptos com os eixos e assíntota

$$y = 3^x + 5 \quad \text{b) } y = (1/5)^x \quad \text{c) } y = 3^{\frac{x-1}{2}}$$

02. (MACK) Na figura, os gráficos I, II e III referem-se, respectivamente, às funções $y = a^x$, $y = b^x$ e $y = c^x$.



Então, está correto afirmar que:

- (A) $0 < a < 1 < b < c$
- (B) $0 < b < 1 < c < a$
- (C) $a < 0 < 1 < b < c$
- (D) $0 < a < 1 < c < b$
- (E) $a < 0 < 1 < c < b$

03. (UEL) Considere a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por $f(x) = 5^x + 3$. Seu conjunto imagem é

- (A) $]-\infty; 3[$ (B) $]-\infty; 5[$ (C) $[3; 5]$ (D) $]3; +\infty[$ (E) $]5; +\infty[$

Tarefa Básica

01. (FUVEST) Sejam $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

a) Usando o mesmo par de eixos, esboce os gráficos de f e g .

b) Decida a seguir qual dos números é o maior. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

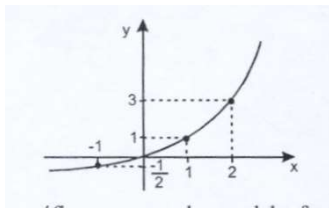
02. (UFF) Em uma cidade a população de pessoas é dada por $P(t) = P_0 2^t$ e a população de ratos é dada por $R(t) = R_0 4^t$ sendo o tempo t medido em anos. Se em 1992 havia 112.000 pessoas e 7.000 ratos, em que ano o número de ratos será igual ao de pessoas?

03. (VUNESP) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei

$N(t) = \alpha 10^{\lambda t}$, onde $N(t)$ é o número de bactérias em t horas, $t \geq 0$, e α e λ são constantes estritamente positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias, $N(0)$, é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será

(A) 4α (B) $2\alpha\sqrt{2}$ (C) 6α (D) 8α (E) $8\alpha\sqrt{2}$

04. (UEL) Observe o gráfico:



Esse gráfico corresponde a qual das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} abaixo relacionadas?

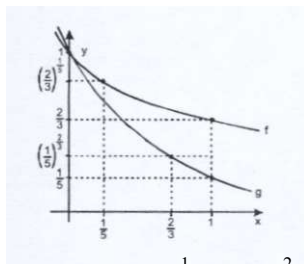
(A) $y = 2^x - 1$ (B) $y = x + \log x$ (C) $y = \frac{2^x}{2}$ (D) $y = 2^{x+1}$ (E) $y = 3^x$

05. Faça um esboço do gráfico das funções definidas abaixo, indicando o Domínio, contra-domínio, imagem, interceptos com os eixos e assíntota

a) $y = -5^x + 2$ b) $y = (1/3)^x - 4$ c) $y = 5^{\frac{3x-4}{2}} + 3$

Respostas da Tarefa Básica

01. a)



b) Pelo gráfico, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

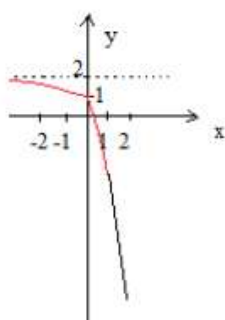
02. 1996

03. (D)

04. (A)

05.

a)



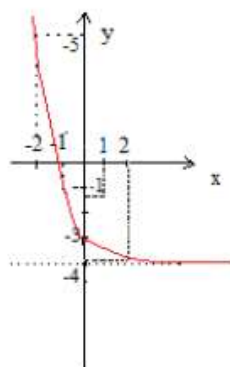
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$CD(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) =]-\infty; 2[$$

assintota $y = 2$
(0; 1)

b)



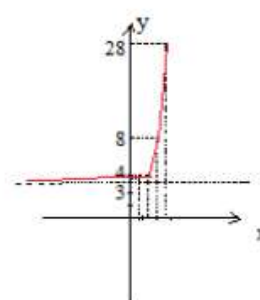
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$CD(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) =]-4; +\infty[$$

assintota $y = -4$
(0; -3)

c)



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$CD(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) =]3; +\infty[$$

assintota $y = 3$
(0; 3,04)