

Teorema de Nyquist e a Lei de Shannon

1st Vanessa Cezar do Nascimento
Curso de Ciência da Computação
Universidade Franciscana - UFN
Santa Maria, Brasil
vanessa.cezar@ufn.edu.br

Resumo—O presente trabalho tem como objetivo apresentar e discutir dois conceitos fundamentais para a comunicação, os fundamentos do Teorema de Nyquist e da Lei de Shannon. Ambos os teoremas são essenciais para garantir a integridade e a eficiência na transmissão de sinais em diversas aplicações tecnológicas. Além da explicação teórica, o trabalho apresenta exemplos práticos que demonstram a importância desses conceitos em situações reais

Index Terms—Teorema de Nyquist, Lei de Shannon

I. INTRODUÇÃO

A comunicação digital moderna depende diretamente da forma como sinais são processados, transmitidos e recebidos com eficiência e precisão. Para garantir que essas transmissões ocorram sem perda de informação ou distorções significativas, é essencial compreender os limites impostos pelos sistemas físicos e matemáticos envolvidos. Nesse contexto, destacamos o Teorema de Nyquist e a Lei de Shannon, dois marcos fundamentais da teoria da informação.

O Teorema de Nyquist define a frequência mínima de amostragem necessária para converter um sinal de tempo contínuo em um sinal de tempo discreto sem perda de informação e a Lei de Shannon estabelece o limite teórico de capacidade de um canal de comunicação na presença de ruído, determinando a máxima taxa de dados que pode ser transmitida sem erros

II. TEOREMA DE NYQUIST

Em 1924, ao perceber que até mesmo um canal perfeito tem uma capacidade de transmissão finita, o engenheiro Harry Theodor Nyquist desenvolveu o Teorema de Nyquist, também conhecido como Teorema da Amostragem, ele derivou uma equação expressando a taxa máxima de dados de um canal sem ruído com largura de banda finita.

Esse teorema diz como converter um sinal de tempo contínuo (E) em um sinal de tempo discreto (F) sem perder nenhuma informação, "Se um sinal arbitrário atravessar um filtro com baixa frequência de corte H , o sinal filtrado poderá ser completamente reconstruído a partir de apenas $2H$ amostras (exatas) por segundo. Fazer uma amostragem da linha com uma rapidez maior que $2H$ vezes por segundo seria inútil, pois os componentes de frequência mais alta que essa amostragem poderia recuperar já teriam sido filtrados." (TANENBAUM, ANDREW S)

$$F_a > 2 \cdot F_{max} \quad (1)$$

Em que:

- F_a é frequência de amostragem ou frequência de Nyquist (A.1)

- F_{max} é a frequência mais alta do sinal

Se:

- A frequência de amostragem for maior que do que a frequência de Nyquist, pode – se reconstruir o sinal original das amostras sem qualquer perda de informação

- A frequência de amostragem menor que a frequência de Nyquist pode ocorrer aliasing (B)

III. LEI DE SHANNON

A lei de Shannon, ou Teorema de Shannon-Hartley, refere-se a capacidade de um canal, foi desenvolvida pelo matemático e engenheiro, Claude Elwood Shannon em 1948, ela é uma extensão/aprofundamento do estudo de Nyquist, entretanto nesse estudo levou-se em consideração a existência de ruído aleatório na transmissão dos dados.

Esse teorema estabelece o limite teórico máximo da taxa de transmissão de dados sem erro em um canal de comunicação, mesmo quando há ruído aleatório no sistema.

$$C = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (2)$$

Em que:

- C é a capacidade do canal em bits por segundos (bps).
- B é a largura de banda do canal (H) em hertz (Hz).
- S/N é a relação sinal-ruído (I) em Decibéis (dB)

A Lei de Shannon mostra que, quanto maior a largura de banda e melhor a qualidade do sinal, maior será a quantidade de dados que podem ser transmitidos corretamente

IV. REFERENCIAL TEÓRICO

Nessa seção do trabalho será abordado conceitos importantes para o entendimento referente ao conteúdo presente neste trabalho.

A. AMOSTRAGEM

Em termos gerais, amostragem é um procedimento para escolher apenas alguns membros de uma população inteira, de forma que torne possível fazer análises referente a toda população. Em específico os termos abordados neste trabalho

amostragem é o processo de fazer medições de um sinal de tempo contínuo em intervalos regulares, como a cada segundo ou a cada milissegundo, a amostragem permite armazenar, transmitir e processar sinais usando dispositivos digitais, como computadores e microcontroladores

1) *TAXA DE AMOSTRAGEM*: A taxa de amostragem, ou frequência de amostragem, é o número de amostras de um sinal analógico que são coletadas por segundo. As unidades para taxa de amostragem são amostras por segundo (sps) ou Hertz (Hz). 3

B. ALIASING

Aliasing é um fenômeno que ocorre quando um sinal contínuo (ou analógico) é amostrado com uma frequência muito baixa, ou seja, inferior ao dobro da maior frequência presente no sinal. Isso viola o Teorema de Nyquist, que estabelece que a taxa de amostragem deve ser pelo menos duas vezes a maior frequência do sinal para garantir uma representação fiel.

Quando ocorre aliasing, as variações rápidas do sinal original não são capturadas corretamente, o que gera uma representação distorcida ou enganosa após a digitalização. As frequências mais altas acabam "imitando" frequências mais baixas, tornando-se indistinguíveis no sinal amostrado. Esse efeito é indesejável, pois pode corromper informações importantes do sinal.

C. SINAL ANALÓGICO

Um sinal analógico é uma representação contínua de informações, cuja amplitude varia ao longo do tempo, assumindo valores diferentes a cada instante. Trata-se de uma forma natural de comunicação utilizada por diversos equipamentos eletrônicos. Esses sinais são, em geral, gerados por sensores de medição e, em seguida, processados e convertidos pelos dispositivos que recebem essas informações.

D. DISTORÇÃO

Distorção em comunicação de dados consiste em uma alteração ou degradação da forma do sinal original durante sua propagação do emissor até o receptor. Essa alteração pode ser causada por diversos fatores, como o comportamento não linear de componentes eletrônicos ou a resposta em frequência do meio de transmissão. Como resultado, o sinal recebido pode ser diferente do sinal enviado, comprometendo a integridade das informações transmitidas e podendo causar erros na sua interpretação. Ou seja, distorção é uma modificação indesejada que afeta negativamente a qualidade e a fidelidade da comunicação.

E. SINAL DE TEMPO CONTÍNUO

Um sinal $x(t)$ é um sinal de tempo contínuo, se ele está definido para todos os instantes de tempo dentro de uma intervalo de tempo t .

A maioria dos sinais físicos são contínuos, como por exemplo, posição e velocidade de um corpo, fala ou música

captada por um microfone, tensão ou corrente num circuito elétrico

F. SINAL DE TEMPO DISCRETO

Um sinal $x[n]$ é um sinal de tempo discreto, se ele está definido somente para instantes isolados de tempo n .

Um sinal de tempo discreto, pode ser obtido a partir de um sinal de tempo contínuo, fazendo-se uma amostragem do mesmo a uma taxa uniforme. Só os sinais discretos podem ser armazenados e processados em computadores digitais.

G. TRANSMISSÃO DE DADOS

Transmissão de dados é o processo de transferência de dados digitais ou analógicos, dependendo do tipo de sinal utilizado, entre dois ou mais dispositivos por meio de um meio de comunicação, como fios de cobre, fibra óptica ou sinais sem fio.

Funcionamento da transmissão: Os dados são codificados em sinais elétricos, ópticos ou de rádio, os sinais são enviados pelo meio de comunicação e por fim, o dispositivo receptor decodifica o sinal de volta ao seu formato original.

1) *TAXA DE TRANSMISSÃO*: É a quantidade de dados que podem ser transmitidos em um determinado período de tempo, ou ainda pode-se entender que a taxa de transmissão refere-se a velocidade com que os dados são transmitidos entre dispositivos. A taxa de transmissão é medida em bits por segundo (bps) ou unidades mais altas como quilobits por segundo (Kbps).

Uma taxa de transmissão mais alta permite que mais dados sejam enviados simultaneamente, melhorando a performance geral do sistema. Alguns fatores como largura de banda de rede, meio de transmissão e qualidade do sinal afetam a taxa de transferência real.

H. LARGURA DE BANDA DO CANAL

Largura de banda do canal refere-se à quantidade máxima de dados que podem ser transmitidos por uma conexão de rede em um determinado período de tempo, sendo geralmente expressa em bits por segundo (bps) ou em seus múltiplos, como Kbps e Mbps. Ela determina a velocidade e a capacidade de transferência de dados, influenciando diretamente o desempenho da rede. Uma largura de banda maior permite o envio e recebimento simultâneo de um volume maior de informações, proporcionando uma comunicação mais rápida e eficiente. Por outro lado, uma largura de banda limitada pode ocasionar congestionamentos, atrasos ou interferências, comprometendo a qualidade da transmissão. Dessa forma, a largura de banda é um elemento fundamental na definição da performance de qualquer sistema de comunicação de dados.

I. RELAÇÃO SINAL-RUÍDO

A relação sinal-ruído (SNR) é uma medida que compara o nível de um sinal desejado com o nível de ruído de fundo, se representarmos a potência do sinal por S e a potência do ruído

por N, a relação sinal/ruído será S/N, sua unidade é Decibéis (dB)

Geralmente essa relação é utilizada para avaliar a qualidade de um sinal de áudio, melhorar a detecção ou medição de um sinal e analisar a intensidade do sinal desejado em comunicações analógicas e digitais

J. TEORIA DA INFORMAÇÃO

A teoria da informação é uma área de estudo que se preocupa com a codificação, decodificação, transmissão e manipulação informações. Ela é baseada em probabilidades e estatística e é fundamental para a compressão de dados, além disso, ela também ajuda a entender como a redundância pode ser usada para melhorar a confiabilidade da transmissão de dados.

V. EXEMPLOS PRÁTICOS

A. Teoria de Nyquist

1) *Exemplo 1 - Sensor de vibração*: Um sensor mede vibrações que pode chegar a uma frequência 1000 Hz, logo a frequência mínima de amostragem será 2000 Hz, pois $F_a > 2 \cdot F_{max} \rightarrow F_a > 2 \cdot 1000 \rightarrow F_a > 2000 Hz$.

2) *Exemplo 2 - Eletrocardiograma*: Um sinal de eletrocardiograma tem componentes de frequência máxima de 150 Hz, logo a frequência mínima de amostragem será 300 Hz, pois $F_a > 2 \cdot F_{max} \rightarrow F_a > 2 \cdot 150 \rightarrow F_a > 300 Hz$.

3) *Exemplo 3 - Transmissão de rádio FM*: A faixa de áudio transmitida em uma estação de rádio FM vai até 15 kHz, assim a frequência mínima de amostragem será 30 kHz, pois $F_a > 2 \cdot F_{max} \rightarrow F_a > 2 \cdot 15000 \rightarrow F_a > 30000 Hz$.

B. Lei de Shannon

1) *Exemplo 1 - Rede Wifi doméstica*: Uma rede wifi com largura de banda de 20 MHz, ou seja, 20.000.000 Hz e uma relação sinal-ruído de 30 dB terá uma capacidade máxima do canal de aproximadamente 99 Mbps, pois ao utilizar a equação (2), Lei de Shannon, $C = B \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N}) \rightarrow C = 20.000.000 \cdot \log_2(1 + 30) \rightarrow C = 20.000.000 \cdot \log_2(31) \cong 99.080.000 \cong 99 Mbps$.

2) *Exemplo 2 - Canal via satélite*: Um canal via satélite com largura de banda de 10.000.000 Hz, 10 MHz, e uma relação sinal-ruído de 10 dB possuirá uma capacidade máxima do canal de 34,59 Mbps. Utilizando a equação (2), Lei de Shannon, $C = B \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N}) \rightarrow C = 10.000.000 \cdot \log_2(1 + 10) \rightarrow C = 10.000.000 \cdot \log_2(11) \cong 10.000.000 \cdot 3,459 \cong 34,59 Mbps$.

3) *Exemplo 3 - Comunicação submarina*: Um Comunicação submarina com largura de banda de 500 Hz e uma relação sinal-ruído de 10 dB possuirá uma capacidade máxima do canal de 1730 bps. Utilizando a equação (2), Lei de Shannon, $C = B \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N}) \rightarrow C = 500 \cdot \log_2(1 + 10) \rightarrow C = 500 \cdot \log_2(11) \cong 500 \cdot 3,459 \cong 1730 Mbps$.

REFERÊNCIAS

- [1] "O que é o teorema de amostragem de Nyquist-Shannon e como ele pode ser aplicado ao processamento de sinais?" LinkedIn. Acesso em: 13 abr. 2025. Disponível: <https://pt.linkedin.com/advice/1/what-nyquist-shannon-sampling-theorem-how-syuwe?lang=ptamp;lang=pt>
- [2] "Sampling Rate | Analog Devices". Google Translate. Acesso em: 13 abr. 2025. Disponível: <https://www-analog-com.translate.goog/en/resources/glossary/sampling-rate.html>
- [3] "O que é transmissão de dados? | phoenixNAP Glossário de TI". Acesso em: 13 abr. 2025. Disponível: <https://phoenixnap.pt/glossário/transmissão-de-dados>
- [4] "Teorema Shannon". Prezi. Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <https://prezi.com/5yxv47jfam2s/teorema-shannon/>
- [5] "O que é largura de banda? | phoenixNAP Glossário de TI". Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <https://phoenixnap.pt/glossário/o-que-é-largura-de-banda>
- [6] "O que é: Distorção - Comunicação Visual é Aqui | ÍCONE IDEIAS". Acesso em: 13 abr. 2025. Disponível: <https://iconeideias.com.br/glossario/glossario/o-que-e-distorcao/>
- [7] "Tecnologias de Transmissão". Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <http://www3.dsi.uminho.pt/adriano/Teaching/Comum/FactDegrad.html>
- [8] "Tecnologias de Transmissão". Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <http://www3.dsi.uminho.pt/adriano/Teaching/Comum/FactDegrad.html>
- [9] "Shannon e a Teoria da Informação". Energia Inteligente. Acesso em: 13 abr. 2025. Disponível: <https://energiainteligenteufjf.com.br/especial/shannon-e-a-teoria-da-informacao/>
- [10] Cristina Fernando HomePage. Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <https://www.fccdecastro.com.br/TPI/TPICap3parte2.pdf>
- [11] ISR Web Page. Acesso em: 14 abr. 2025. Disponível: <http://users.isr.ist.utl.pt/jsm/teaching/ss/1Sinais.pdf>
- [12] TANEMBAUM, Andrew S. Redes de Computadores: quarta edição. 4. Ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2003.