2.2. El problema del jugador

En esta sección consideraremos un ejemplo particular de una caminata aleatoria puesta en el contexto de un juego de apuestas.

Planteamiento del problema

Suponga que un jugador A apuesta sucesivamente una unidad monetaria a un jugador B. Inicialmente, el jugador A tiene k unidades y B tiene $N-k$ unidades; es decir, el capital conjunto entre los dos jugadores es de N unidades monetarias. En cada apuesta, el jugador A tiene probabilidad de ganar p y probabilidad de perder $q=1-p$. Suponga además que no hay empates.

Sea X_n la fortuna del jugador A al tiempo n. Entonces, $\{X_n : n = 0,1,2,\dots\}$ es una caminata aleatoria que inicia en el estado k y eventualmente puede terminar en el estado 0, cuando el jugador A ha perdido todo su capital, o bien puede terminar en el estado N, que corresponde a la situación en donde el jugador A ha ganado todo el capital.

Este proceso es entonces una caminata aleatoria sobre el conjunto $\{0,1,2,\dots,N\}$, en donde los estados 0 y N son absorbentes, pues una vez que la cadena llega a alguno de ellos, jamás lo abandona.

Una de las preguntas que resolveremos para esta caminata es la siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de que eventualmente el jugador A se arruine? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que la caminata se absorba en el estado 0 y no en el estado N, u oscile entre estos dos estados?

Este problema se conoce como el problema de la ruina del jugador, y encontraremos a continuación su solución. Como veremos, usando probabilidad condicional es posible transformar este problema en resolver una ecuación en diferencias.

Solución al problema

Sea τ el primer momento en el que la caminata visita alguno de los dos estados absorbentes, es decir, $\tau = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ o } X_n = N\}$. Puede demostrarse que τes una variable aleatoria y que es finita casi seguramente. La pregunta planteada se traduce en encontrar la probabilidad:

$$u_k = P(X_\tau = 0 \mid X_0 = k).$$

Por el teorema de la probabilidad total se obtiene la ecuación en diferencias:

$$u_k = p\, u_{k+1} + q\, u_{k-1}, \qquad (2.11)$$

válida para $k = 1,2,\dots,N-1$. La interpretación intuitiva de esta identidad es sencilla: a partir del estado k se busca la probabilidad de ruina analizando lo que sucede en la siguiente apuesta. Se tienen dos casos: El jugador gana con probabilidad p y se busca la probabilidad de ruina a partir del estado $k+1$ o bien el jugador pierde con probabilidad q y se busca la probabilidad de ruina a partir del estado $k-1$. Las condiciones de frontera son $u_0 = 1, u_N = 0$. Esta ecuación es una ecuación en diferencias lineal, homogénea y de segundo orden.

Puede encontrarse su solución de la siguiente manera: multiplicando el lado izquierdo de (2.11) por $(p+q)$ y agrupando términos, se llega a la expresión equivalente:

$$u_{k+1} - u_k = \frac{q}{p}(u_k - u_{k-1}). \qquad (2.12)$$

Resolviendo iterativamente, las primeras $k-1$ecuaciones se escriben como:

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \frac{q}{p}(u_1 - 1), \\ u_3 - u_2 &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 (u_1 - 1), \\ \\ u_k - u_{k-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} (u_1 - 1). \end{aligned}$$

Aquí se ha usado la condición de frontera $u_0 = 1$.

Definamos ahora:

$$S_k = 1 + \frac{q}{p} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Al sumar las $k-1$ecuaciones anteriores se obtiene:

$$u_k - u_1 = (S_{k-1} - 1)(u_1 - 1),$$

o bien,

$$u_k = 1 + S_{k-1}(u_1 - 1). \qquad (2.13)$$

De manera análoga, sumando todas las ecuaciones de (2.12) se obtiene:

$$u_N = 1 + S_{N-1}(u_1 - 1).$$

Usando la condición de frontera $u_N = 0$, se llega a:

$$u_1 - 1 = -\frac{1}{S_{N-1}}.$$

Sustituyendo en (2.13) y simplificando se obtiene la solución:

$$u_k = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_{N-1}}.$$

Se distinguen los siguientes dos casos:

$$S_k = \begin{cases} k+1, & \text{si } p = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1-(q/p)^{k+1}}{1-(q/p)}, & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{N-k}{N}, & \text{si } p = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}, & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.14}$$

En la Figura 2.5 se muestra la gráfica de la probabilidad u_k como función del parámetro k, para varios valores de p y con $N = 50$. En el caso simétrico, la solución es la línea recta que une la probabilidad 1 con la probabilidad 0. Naturalmente, la probabilidad de ruina decrece cuando el capital inicial k aumenta.