2.2. El problema del jugador

En esta sección consideraremos un ejemplo particular de una caminata aleatoria puesta en el contexto de un juego de apuestas.

Planteamiento del problema
Suponga que un jugador A apuesta sucesivamente una unidad monetaria a un jugador B. Inicialmente el jugador A tiene k unidades y B tiene $N - k$ unidades, es decir, el capital conjunto entre los dos jugadores es de N unidades monetarias. En cada apuesta el jugador A tiene probabilidad de ganar p, y probabilidad de perder $q = 1 - p$, suponga además que no hay empates.

Sea X_n la fortuna del jugador A al tiempo n. Entonces $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ es una caminata aleatoria que inicia en el estado k y eventualmente puede terminar en el estado 0 cuando el jugador A ha perdido todo su capital, o bien, puede terminar en el estado N que corresponde a la situación en donde el jugador A ha ganado todo el capital. Este proceso es entonces una caminata aleatoria sobre el conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$, en donde los estados 0 y N son absorbentes, pues una vez que la cadena llega a alguno de ellos, jamás lo abandona.

Una de las preguntas que resolveremos para esta caminata es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que eventualmente el jugador A se arruine? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que la caminata se absorba en el estado 0 y no en el estado N, u oscile entre estos dos estados? Este problema se conoce como el problema de la ruina del jugador, y encontraremos a continuación su solución. Como veremos, usando probabilidad condicional es posible transformar este problema en resolver una ecuación en diferencias.

Solución al problema
Sea el primer momento en el que la caminata visita alguno de los dos estados absorbentes, es decir, $\tau = \text{mín}\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ o } X_n = N\}$. Puede demostrarse que es una variable aleatoria y que es finita casi seguramente. La pregunta planteada se traduce en encontrar la probabilidad:

$$u_k = P(X_\tau = 0 | X_0 = k)$$

Por el teorema de probabilidad total se obtiene la ecuación en diferencias:

$$u_k = p u_{k+1} + q u_{k-1}, \quad (2{,}11)$$

válida para $k = 1, 2, \dots, N - 1$. La interpretación intuitiva de esta identidad es sencilla: a partir del estado k se busca la probabilidad de ruina analizando lo que sucede en la siguiente apuesta. Se tienen dos casos: el jugador gana con probabilidad p y ahora se busca la probabilidad de ruina a partir del estado $k+1$, o bien el jugador pierde con probabilidad q y se busca la probabilidad de ruina ahora a partir del estado $k-1$. Las condiciones de frontera son $u_0 = 1$ y $u_N = 0$. Esta ecuación es una ecuación en diferencias, lineal, de segundo orden y homogénea.

Puede encontrarse su solución de la siguiente forma: multiplicando el lado izquierdo de (2.11) por $(p+q)$ y agrupando términos se llega a la expresión equivalente:

$$u_{k+1} - u_k = (q/p)(u_k - u_{k-1}). \quad (2,12)$$

Resolviendo iterativamente, las primeras $k-1$ ecuaciones se escriben de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= (q/p)(u_1 - 1) \\ u_3 - u_2 &= (q/p)^2(u_1 - 1) \\ &\cdots \\ u_k - u_{k-1} &= (q/p)^{k-1}(u_1 - 1). \end{aligned}$$

Hemos usado aquí la condición de frontera $u_0 = 1$. Conviene ahora definir $S_k = 1 + (q/p) + \cdots + (q/p)^k$ pues al sumar las $k-1$ ecuaciones anteriores se obtiene $u_k - u_1 = (S_{k-1} - 1)(u_1 - 1)$. O bien,

$$u_k = 1 + S_{k-1}(u_1 - 1). \quad (2,13)$$

De manera análoga pero ahora sumando todas las ecuaciones de (2.12) se obtiene $u_N = 1 + S_{N-1}(u_1 - 1)$. Usando la segunda condición de frontera $u_N = 0$ se llega a $u_1 - 1 = -1/S_{N-1}$. Substituyendo en (2.13) y simplificando se llega a la solución:

$$u_k = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_{N-1}}$$

Es necesario ahora distinguir los siguientes dos casos:

$$S_k = 1 + (q/p) + \cdots + (q/p)^k = \begin{cases} k+1 & \text{si } p = 1/2, \\ \frac{1-(q/p)^{k+1}}{1-(q/p)} & \text{si } p \neq 1/2. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$u_k = \begin{cases} (N-k)/N & \text{si } p = 1/2, \\ \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1-(q/p)^N} & \text{si } p \neq 1/2. \end{cases} \quad (2,14)$$

En la Figura 2.5 se muestra la gráfica de la probabilidad u_k como función del parámetro k para varios valores de p y con $N = 50$. En el caso simétrico la solución es la línea recta que une la probabilidad 1 con la probabilidad 0. Naturalmente la probabilidad de ruina decrece cuando el capital inicial k aumenta. En la sección de ejercicios se sugiere otra forma de resolver la ecuación en diferencias (2.11).