TP : Résultants

Exercice 1. Prise en main
La syntaxe pour les résultants en SageMath est `P.resultant(Q)` ou `P.resultant(Q,X)` s'il faut préciser la variable. Le calcul peut être assez lent même pour des degrés modérés, notamment si on travaille en multivarié. Il semblerait que le calcul soit plus rapide si on a spécifié un anneau de polynômes (commande type `A.<X,Y,Z>=PolynomialRing(QQ,3)`) que si on se contente de déclarer des variables (syntaxe `var('X Y Z')`). Attention, le résultant de polynômes à coefficients flottants ne marche qu'avec la deuxième syntaxe ! (bug connu).

1. Utiliser un calcul de résultant pour résoudre le système polynomial de 2 équations à 2 inconnues suivant
$$\begin{cases} XY+1=0 \\ 4XY+4Y^2-4Y+1=0 \end{cases}$$
2. Trouver les points d'intersection d'un cercle et d'une ellipse d'équations respectives $X^2+Y^2-1=0$ et $X^2+2Y^2-5=0$.
3. Calculer le résultant de $X+Y+1.2$ avec YX.

Dans les deux premières questions, on pourra faire un tracé des courbes correspondantes.

Exercice 2. Soit $f(x,y,z)=x^2-y^2+z-1$. Résoudre le système $f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)=0$ à l'aide de résultants. On pourra travailler avec le corps des nombres algébriques `QQbar`. Pour trouver les racines d'un polynôme <u>univarié</u> on utilisera la commande `P.roots()`. Pour la remontée des solutions, on pensera à exploiter la symétrie du problème.
Vérifier le résultat avec la commande `solve`.

Exercice 3. La **fenêtre de Viviani** est l'intersection de la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ avec le cylindre C d'équation $x^2-x+y^2=0$.

1. Déterminer l'axe et le rayon du cylindre C.
2. Faire tracer à SageMath la courbe $C\cap S$.
3. Déterminer des équations cartésiennes vérifiées par les projections orthogonales de $C\cap S$ sur les trois plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$. Dans chacun des cas, y a-t-il d'autres points vérifiant l'équation trouvée que ceux de la projection ?

Exercice 4. Enveloppe d'une famille de courbes.

Soit $f\in\mathbb{R}[X,Y,T]$. On considère la famille paramétrée (C_t) de courbes planes où pour tout $t\in\mathbb{R}$, la courbe $C_t\in\mathbb{R}^2$ est définie par l'équation cartésienne $f(X,Y,t)=0$. L'*enveloppe* de cette famille de courbes est l'ensemble

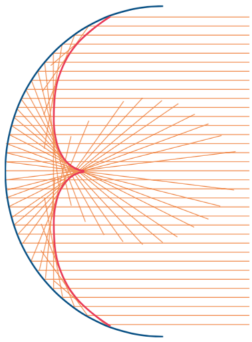
$$\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists t\in\mathbb{R},\ f(x,y,t)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=0\}.$$

1. Un exemple : déterminer l'enveloppe de la famille de cercles d'équations $(X-t)^2+(Y-t)^2=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Sur un même graphe, tracer quelques graphes de la famille et l'enveloppe.

2. Interprétation géométrique.
   Soient I un intervalle et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ inclus dans l'enveloppe, c'est-à-dire tel que $\gamma(s) \in \mathcal{E}$ pour tout $s \in I$; quitte à reparamétrer, on suppose que $\gamma(s) \in C_s$ pour tout $s \in I$. Montrer que pour tout $s \in I$, l'arc γ est tangent en $\gamma(s)$ à la courbe C_s.

   (En général on peut trouver de telles paramétrisations au moins locales de $\mathcal{E}$ via le théorème des fonctions implicites, ce qui implique que l'enveloppe est la courbe qui est tangente à toutes les courbes de la familles.)

3. L'astroïde.
   Pour prendre une photo d'un chantier, un photographe a choisi un temps de pose long. Malheureusement, une échelle a glissé le long d'un mur pendant la pose. Que voit-on sur la photo ? Faire des tracés.
4. La néphroïde.
   On observe souvent dans les tasses, bols... la figure lumineuse illustrée ci-dessous à gauche, dont on se propose de trouver l'équation.

   On modélise la situation par une source lumineuse à l'infini, dont les rayons se réfléchissent sur une surface cylindrique (cf. figure de droite). La courbe observée (les physiciens parlent de *caustique*) est l'enveloppe de la famille des rayons réfléchies.
   Donner son équation et faire des tracés.

5. Bonus : la cardioïde. Même question que précédemment, mais en considérant que la source lumineuse est au bord du cylindre.

Exercice 5. Implicitation.

1. On considère la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-t^4} \end{cases}$$

   Déterminer une équation cartésienne $\mathcal{E}$ vérifiée par tous les points de $\mathcal{C}$. Faire des tracés. Y a-t-il des points vérifiant $\mathcal{E}$ qui ne soient pas dans $\mathcal{C}$?
2. On considère la courbe paramétrée (appelée *quadrifolium* ou rosace à quatre pétales) d'équation en coordonnées polaires

$$r = \sin(2\theta).$$

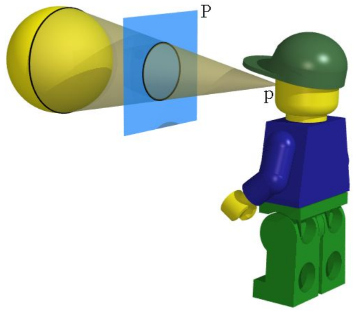
   Déterminer une équation cartésienne de cette courbe. On pourra utiliser la relation fondamentale $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour commencer par obtenir des équations ne faisant plus intervenir que X, Y et $\cos(\theta)$.
   Faire des tracés.

Exercice 6.

1. On considère le corps $\mathbb{F}_{2^{31}}$, représenté comme $\mathbb{F}_2[X]/(X^{31}+X^3+1)$ (représentation par défaut dans SageMath) ; on note x la classe de X.
   Déterminer (en passant par un résultant !) le polynôme minimal sur $\mathbb{F}_2$ de $x^9+x^7+x^6+x^2$.
2. On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique X^4-X^3-X+1. Quel est le polynôme caractéristique de $M^6-3M^2+2I_4$?

Exercice 7. Bonus : contours apparents.

Quand on observe une surface, le plus marquant visuellement est ce qu'on appelle le *contour apparent* ; c'est d'ailleurs ce qu'on dessine en général pour représenter une surface. Il s'agit de l'image de l'ensemble des points tels que le rayon lumineux depuis l'œil de l'observateur est *tangent* à la surface en ce point, cf illustration ci-contre.



Crédit images.maths.cnrs.fr

On considère une surface $\mathcal{S}$ donnée par une équation cartésienne polynomiale $P(X,Y,Z)=0$. Pour simplifier, on suppose l'observateur "à l'infini" : cela revient à chercher le contour $\mathcal{C}$ de la projection orthogonale de $\mathcal{S}$ sur le plan d'équation $Z=0$.

1. Justifier l'équivalence : $(x,y)\in\mathcal{C} \iff \exists z\in\mathbb{R},\ P(x,y,z)=\partial_Z P(x,y,z)=0$.

   En déduire une méthode pour déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Tracer le contour apparent de la quadrique de votre choix.
   On peut aussi tirer une quadrique au hasard, tracer son contour apparent suivant les trois axes, et essayer d'en deviner son type...
3. Tracer le contour apparent d'un tore de révolution, d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x=(R+r\cos(\phi))\cos(\theta)\\ y=(R+r\cos(\phi))\sin(\theta)\\ z=r\sin(\phi)\end{cases}$$

   On commencera par donner une équation cartésienne du tore.

   Tracer ensuite le contour apparent du même tore après des rotations selon l'axe des x. Qu'observe-t-on ?