Понятие плоского и планарного графов. Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$

Аннотация

Рассматривается вопрос о возможности нарисовать граф на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались нигде, кроме как в их общей концевой вершине. Под графом понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Ключевые слова: плоский граф, планарный граф, грань плоского графа, формула Эйлера.

1 Основные определения

Определение. *Графом* G называется пара (V, E), где V – конечное непустое множество и E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы V называются *вершинами* графа, элементы E – *ребрами.*

Определение. *Плоским графом* называется изображение графа на плоскости, причем вершинам графа сопоставлены точки на плоскости, а ребрам – кусочно гладкие линии, соединяющие соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме концевых вершин.

Определение. *Гранью* называется область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер графа. Одна из граней не ограничена и называется *внешней* гранью, а остальные – *внутренними* гранями. *Границей грани* будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Определение. Граф называется *планарным*, если он представим в виде плоского графа.

Обозначение. K_5 – полный граф из 5 вершин, то есть между двумя любыми вершинами из множества вершин $V(K_5)$ существует ребро (см. рис. 1).

Обозначение. $K_{3,3}$ – полный двудольный граф, то есть множество вершин $V(K_{3,3})$ разбито на 2 класса по 3 вершины и каждые две вершины из разных классов соединены ребром, а вершины из одного и того же класса не соединены (см. рис. 2).

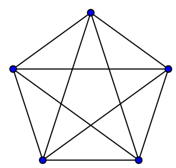

Рис. 1: Граф K_5.

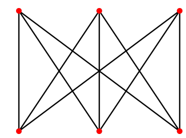

Рис. 2: Граф $K_{3,3}$.

2 Вспомогательные определения

Определение. Непустой граф G называется *связным*, если любые две его вершины соединены путем в G.

Определение. Максимальный связный подграф в G называется *компонентой связности* графа G.

Определение. $G' \subseteq G$ является *остовным подграфом* в графе G, если $V' = V$.

Определение. Связный ациклический (не содержащий циклов) граф T называется *деревом*.

3 Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *В любом дереве T с n вершинами количество ребер равно $n - 1$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ тривиально. Пусть $n > 1$, $e \in E(T)$. В T нет циклов, следовательно, $T - e$ имеет ровно две компоненты T_1 и T_2, каждая из которых есть дерево. Пусть T_i содержит n_i вершин и m_i ребер, $i = 1, 2$. По индуктивному предположению $m_i = n_i - 1$. Далее имеем:
$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n - 1$. □

4 Основные утверждения

Теорема 1 (Формула Эйлера)**.** *Для произвольного плоского связного графа G с n вершинами, m ребрами и f гранями справедливо:*

$$n - m + f = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое остовное дерево T графа G. В T n вершин, $n-1$ ребро (по доказанной лемме) и одна грань (внешняя). Отсюда $n-(n-1)+1=2$, то есть формула верна. Будем поочередно добавлять к T недостающие ребра в G. В результате, на каждом шаге число вершин не меняется, число ребер увеличивается на 1, число граней так же увеличивается на 1, поскольку при соединении двух вершин ребром грань, на границе которой содержатся эти вершины, разбивается на две грани. Таким образом, для всех графов, получаемых при этой процедуре, в частности, и для G, формула остается верной. □

Теорема 2 (Общая формула Эйлера). *Для произвольного плоского графа G с n вершинами, m ребрами, f гранями и k компонентами связности справедливо:*

$$n-m+f=1+k.$$

Доказательство. Рассмотрим каждую компоненту связности G_i, $i = 1,\dots,k$ и проведем доказательство, опираясь на теорему 1. □

Теорема 3. *K_5 непланарен.*

Доказательство. От противного. Так как $n=5$, $m=10$, по формуле Эйлера для планарности K_5 должно быть $f=7$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами. Значит, $2m \geq 3f$, то есть $20 \geq 21$. Противоречие. □

Теорема 4. *$K_{3,3}$ непланарен.*

Доказательство. От противного. Так как $n=6$, $m=9$, по формуле Эйлера для планарности $K_{3,3}$ должно быть $f=5$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере четырьмя ребрами (двудольный граф не содержит нечетных циклов). Значит, $2m \geq 4f$, то есть $18 \geq 20$. Противоречие. □

5 Дополнительные вопросы

5.1 Критерии планарности

Определение. Операция *подразбиения ребра* $e=(u,v)$ графа состоит в следующем: из графа удаляется ребро e и добавляются ребра $e_1=(u,w)$ и $e_2=(w,v)$, где w – новая вершина.

Определение. Два графа называются *гомеоморфными*, если они оба могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Теорема 5 (Теорема Понтрягина-Куратовского)**.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Определение. Операция *стягивания* в графе получается отождествлением двух смежных вершин u и v, то есть удалением u и v и добавлением новой вершины w, смежной с теми вершинами графа, которые были смежны или с u, или с v.

Определение. Граф G называется *стягиваемым* к графу H, если H можно получить из G с помощью некоторой последовательности стягиваний.

Теорема 6 (Теорема Вагнера)**.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам* K_5 *или* $K_{3,3}$.

5.2 Укладка графов в трехмерном пространстве

Определение. Граф G *укладывается* в пространство L, если существует такое отображение вершин и ребер графа G соответственно в точки и кусочно гладкие кривые этого пространства, что различным вершинам соответствуют различные точки, а кривые, соответствующие различным ребрам, пересекаются только в инцидентных этим ребрам вершинах. Изображенный таким образом граф называется *укладкой* графа G в пространство L.

Теорема 7. *Каждый граф укладывается в трехмерное пространство.*

Теорема 8. *Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен.*

Теорема 9. *Графы* K_5 *и* $K_{3,3}$ *укладываются на торе.*

Список литературы

[1] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич Лекции по теории графов

Адилов Санжар. Ташкент 2018