Барабанщиков Андрей Павлович

Билет 10

тема: "Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов."

Степенной ряд и область его сходимости

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x^2 + ... + a_n x^n + ...,$ (1.41)

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - постоянные вещественные числа - коэффициенты ряда (1.41)

Заметим ,что всякий степенной ряд сходится в точке x = 0, причем $\exists$ степенные ряды, сходящиеся только в этой точке (например $\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k$).

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (1.41) следующую числовую последовательность:

$$\{ \sqrt[n]{|a_n|} \} \qquad (n = 1,\, 2,\, \dots). \tag{1.42}$$

Могут представиться два случая: 1) последовательность (1.42) является *неограниченной*; 2) последовательность (1.42) является *ограниченной.*

В случае 2) у последовательности (1.42) *существует конечный верхний предел* (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 3), который мы обозначим через L. Подчеркнем, что указанный верхний предел L заведомо *неотрицателен* (ибо все элементы последовательности (1.42) неотрицательны, а стало быть, и любая предельная точка этой последовательности неотрицательна).

Подводя итог, мы приходим к выводу, что могут представиться следующие три случая: I) последовательность (1.42) является неограниченной; II) последовательность (1.42) является ограниченной и имеет конечный верхний предел $L > 0$; III) последовательность (1.42) является ограниченной и имеет верхний предел $L = 0$.

Докажем теперь следующее замечательное утверждение.

Теорема 1.13 (Коши–Адамара).

I. *Если последовательность* (1.42) *не ограничена, то степенной ряд* (1.41) *сходится лишь при* $x = 0$.

II. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и имеет верхний предел* $L > 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| < 1/L$, *и расходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $x > 1/L$.

III. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и ее верхний предел* $L = 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для всех значений* x.

Доказательство.

I. Пусть последовательность (1.42) не ограничена. Тогда при $x \neq 0$ последовательность

$$|x|\, \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

также не ограничена, т. е. у этой последовательности имеются члены *со сколь угодно большими номерами* n, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \quad \text{или} \quad |a_n x^n| > 1.$$

Но это означает, что для ряда (1.41) (при $x \neq 0$) нарушено необходимое условие сходимости (см. вып. 1, гл. 13, § 1, п. 2), т. е ряд (1.41) расходится при $x \neq 0$.

II. Пусть последовательность (1.42) ограничена и ее верхний предел $L > 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютно сходится при $|x| < 1/L$ и расходится при $|x| > 1/L$.

а) Фиксируем сначала любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| < 1/L$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| < 1/(L + \varepsilon)$. В силу свойств верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, начиная с указанного номера n, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \dfrac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютно сходится по признаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3).

б) Фиксируем теперь любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| > 1/L$.

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > 1/(L - \varepsilon)$. По определению верхнего предела из последовательности (1.42) можно выделить подпоследовательность $\left\{ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к L.

Но это означает, что, начиная с некоторого номера k, справедливо неравенство

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Таким образом, начиная с указанного номера k, справедливо неравенство

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1.$$

или

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

т. е. нарушено необходимое условие сходимости ряда (1.41), и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательность (1.42) ограничена и ее верхний предел $L = 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютно сходится при любом x.

Фиксируем произвольное $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд (1.41) заведомо абсолютно сходится). Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность (1.42) не может иметь отрицательных предельных точек, число $L = 0$ является *единственной* предельной точкой, а стало быть, является пределом этой последовательности, т. е. последовательность (1.42) является бесконечно малой.

Но тогда для положительного числа $1/(2|x|)$ найдется номер, начиная с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$

Стало быть, начиная с указанного номера,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютно сходится по признаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3). Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема непосредственно приводит к следующему фундаментальному утверждению.

Теорема 1.14. *Для каждого степенного ряда* (1.41), *если он не является рядом, сходящимся лишь в точке* $x = 0$, *существует положительное число* R *(возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.

Это число R называется радиусом сходимости рассматриваемого степенного ряда, а интервал $(-R,\, R)$ называется промежутком сходимости этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.43}$$

$\left(\text{в случае, когда } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ R = \infty\right)$.

Замечание 1. На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся [1]).

Так для ряда $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ радиус сходимости R равен единице, промежуток сходимости имеет вид $(-1,\, 1)$ и этот ряд расходится на концах указанного промежутка.

Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ промежуток сходимости тот же $(-1,\, 1)$, но этот последний ряд сходится на обоих концах указанного промежутка.

---

[1]) Отметим следующую теорему Абеля: *если степенной ряд* (1.41) *сходится при* $x = R$, *то сумма его* $S(x)$ *является непрерывной в точке* R *слева.* Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$, но в таком виде теорема Абеля (фактически утверждающая регулярность метода суммирования Пуассона–Абеля) доказана в дополнении 3 к гл. 13 вып. 1.

Замечание 2. Все результаты настоящего пункта справедливы для ряда (1.41), в котором вещественная переменная x заменена комплексной переменной z.

Для такого ряда устанавливается существование положительного числа R такого, что ряд абсолютно сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Для вычисления R справедлива формула (1.43). Число R называется радиусом сходимости, а область $|z| < R$ — кругом сходимости указанного степенного ряда.

2. Непрерывность суммы степенного ряда. Пусть степенной ряд (1.41) имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма 2. *Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r < R$, ряд* (1.41) *равномерно сходится на сегменте* $[-r, r]$, *т. е. при* $|x| \leqslant r$.

Доказательство. В силу теоремы 1.14 ряд (1.41) абсолютно сходится при $x = r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Но последний числовой ряд служит мажорантным для ряда (1.41) при всех x из сегмента $[-r, r]$. На основании признака Вейерштрасса ряд (1.41) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы 2 сумма ряда* (1.41) *является функцией, непрерывной на сегменте* $[-r, r]$ (в силу теоремы 1.7).

Теорема 1.15. *Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $S(x)$ — сумма степенного ряда (1.41), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x внутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x| < R$. Всегда найдется число r такое, что $|x| < r < R$. В силу следствия из леммы 2 функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r, r]$. Стало быть, $S(x)$ непрерывна и в точке x. Теорема доказана.

3. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 1.16. *Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда* (1.41), *а x удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд* (1.41) *можно почленно интегрировать на сегменте* $[0, x]$. *Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Доказательство. Для любого x, удовлетворяющего условию $|x| < R$, найдется r такое, что $|x| < r < R$. Согласно лемме 2 ряд (1.41) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$, а стало быть, и на сегменте $[0, x]$. Но тогда в силу теоремы 1.8 этот ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости которого, согласно теореме 1.14, является величиной, обратной верхнему пределу последовательности,

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \qquad (1.44)$$

Так как верхний предел последовательности (1.44) тот же, что и у (1.42) [1], то теорема доказана.

Теорема 1.17. *Степенной ряд* (1.41) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1.9 и леммы 2) доказать лишь второе утверждение теоремы.

В результате почленного дифференцирования (1.41) получим ряд

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости R которого (согласно теореме 1.14) обратен верхнему пределу последовательности

$$\left\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \right\}. \qquad (1.45)$$

Так как последовательность (1.45) имеет тот же верхний предел, что и (1.42) [2], то теорема доказана.

Следствие. *Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.*

Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

---

[1] Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} = $

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

[2] Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = $

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

Примеры

Пример 1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$

РЕШЕНИЕ: Сделаем замену: $u = x + 3$. Тогда ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Вычислим радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Соответственно, интервал сходимости равен $(-\infty, \infty)$

Пример 2. При каких значениях x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ сходится?

РЕШЕНИЕ: Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Если x = -1, то получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

который расходится по признаку Лейбница. Если же x = 1, то мы имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Таким образом, интервал сходимости заданного ряда равен $[-1, 1)$