Рахматова Валерия

Билет 3. Теорема Поста о полноте системы функций

Рассмотрим некоторые замкнутые классы в P_2 и докажем, что каждый из этих классов является замкнутым. Для доказательства покажем, что ни одна из операций суперпозиции не выводит за пределы класса.

Операции суперпозиции:
1. Отождествление переменной.
2. Перестановка переменных.
3. Подстановка функции.
4. Добавление фиктивной переменной.
5. Удаление фиктивной переменной.

Определение. $T_0 : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 | \ f(0, ..., 0) = 0\}$.
Утверждение. $[T_0] = T_0$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in T_0$.
1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Тогда

$$f'(0, ..., 0) = f(0, ..., 0) = 0 \ \Rightarrow f' \in T_0.$$

2. Если после перестановки переменных подставить вместо них константу 0, то значение функции останется равным 0.

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_0$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Так как $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_0$, то ее значение на наборе из 0 будет равным 0, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1, ..., x_n)$ не выведет за пределы T_0.

4. Если мы добавим фиктивную переменную x_{n+1}, то значение функции не изменится. Возьмем $x_{n+1} = 0$, тогда $f(0, ...0, 0) = 0$.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значение функции по прежнему будет равным 0 на наборе из всех 0.

□

Определение. $T_1 : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 | \ f(1, ..., 1) = 1\}$.
Утверждение. $[T_1] = T_1$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in T_1$.
1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Тогда

$$f'(1, ..., 1) = f(1, ..., 1) = 1 \ \Rightarrow f' \in T_1.$$

2. Если после перестановки переменных подставить вместо них константу 1, то значение функции останется равным 1.

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_1$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Так как $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_1$, то ее значение на наборе из 1 будет равным 1, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1, ..., x_n)$ не выведет за пределы T_1.

4. Если мы добавим фиктивную переменную x_{n+1}, то значение функции не изменится. Возьмем $x_{n+1} = 1$, тогда $f(1, ...1, 1) = 1$.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значение функции по прежнему будет равным 1 на наборе из всех 1.

□

Определение. $S : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 | \ \overline{f}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = f(x_1, ..., x_n)\}$.
Утверждение. $[S] = S$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in S$.
1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Функция, обратная к данной, будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{f'}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_n}) = \overline{f}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-1}}).$$

В силу самодвойственности f

$$\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-1}}). = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Следовательно,

$$\overline{f'}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_n}). = f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

и

$$f'(x_1, ..., x_n) \in S.$$

2. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ...x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}).$$

Функция, обратная к данной, будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{f'}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{f}(\overline{x_{i_1}}, ..., \overline{x_{i_n}}).$$

В силу самодвойственности f

$$\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_n}). = f(x_1, ..., x_n).$$

Следовательно,

$$\overline{f'}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_n}). = f'(x_1, ..., x_n)$$

и

$$f'(x_1, ..., x_n) \in S.$$

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in S$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Так как $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in S$, то ее значения на обратных наборах будут обратными, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1, ..., x_n)$ не выведет за пределы S.

4. Добавление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а следовательно не выводит ее за пределы класса.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значения функции на обратных наборах останутся обратными.

□

Определение. $M : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 | \ \forall \alpha, \ \beta : \ \alpha \preceq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$.
Утверждение. $[M] = M$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in M$.

1. Отождествление переменной не влияет на сравнимость двух наборов, следовательно не выводит за пределы класса.

2. Аналогично, при перестановке переменных наборы α и β останутся сравнимыми.

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in M$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Так как $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in M$, то на наборах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таких, что $\overline{a} \preceq \overline{b}$ $g(\overline{a}) \leq g(\overline{b})$. Таким образом, $\alpha' \preceq \beta'$, где $\alpha' = (a_1, ..., g(\overline{a}))$, $\beta' = (b_1, ..., g(\overline{b}))$. Отсюда следует, что

$$f(\alpha') \leq f(\beta')$$

или

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta).$$

Таким образом,

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) \in M.$$

4. Добавление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а, следовательно, не выводит ее за пределы класса.

5. Удаление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а, следовательно, не выводит ее за пределы класса.

□

Определение. $L : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 | \ \exists \ a_0, ..., a_n \in \{0; 1\} \ f(x_1, ..., x_n) = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \ n \in N\}$.

Утверждение. $[L] = L$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in L$.

1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Тогда

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + ... + a_{n-1} \cdot x_{n-1} + a_n \cdot x_{n-1}.$$

Таким образом,

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in L.$$

2. Пусть над переменными $x_1, ..., x_n$ совершили перестановку. Обозначим переставленные переменные за $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$. Получим новую функцию

$$f'(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = a_{i_0} + a_{i_1} x_{i_1} + ... + a_{i_n} x_{i_n}.$$

$$f'(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in L.$$

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in L$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Так как $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in L$, то при подстановке ее вместо переменной в линейную функцию вновь получим полином Жегалкина степени не выше 1. Таким образом,

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) \in L.$$

4. Пусть x_{n+1} новая фиктивная переменная, тогда коэффициент при этой переменной в полиноме Жегалкина будет равен нулю. Соответственно, при добавлении этой переменной функция не выйдет за пределы класса.

5. Аналогично доказывается случай удаления фиктивной переменной.

□

Теорема. *Для того, чтобы система функций B была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть B полна, То есть, $[B] = P_2$. Допустим, B лежит в одном из указанных классов - обозначим его за R, то есть, $B \subseteq R$. Тогда, в силу свойств замыкания и замкнутости R имеем

$$P_2 = [B] \subset [R] = R.$$

Значит, $R = P_2$, а это не так. Необходимость доказана.

Доказательству достаточности предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Если $f(x_1, ..., x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одного переменного, то есть, константу.*

Лемма 2. *Если $f(x_1, ..., x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.*

Лемма 3. *Если $f(x_1, ..., x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций вида x и $\overline{x}$, а также возможно навешивания отрицания над f можно получить функцию $x_1 \& x_2$.*

Достаточность. Пусть B целиком не содержится ни в одном из пяти указанных классов. Тогда из B можно выделить подсистему B', содержащую не более пяти функций, которая также обладает этим свойством. Для этого возьмем в B функции f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M, L, и положим

$$B' = \{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\}.$$

Можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных $x_1, ..., x_n$.

Доказательство достаточности будем проводить в три этапа:

I. Построение при помощи функций f_i, f_j и f_k констант 0 и 1.

Рассмотрим функцию $f_i \notin T_0$. Возможны два случая:

1. $f_i(1, ..., 1) = 1$. Тогда $\phi(x) = f_i(x, ..., x)$ есть константа 1, так как

$$\phi(0) = f_i(0, ..., 0) = 1, \quad \phi(1) = f_i(1, ..., 1) = 1.$$

Для функции $f_j: \ f_j(1, ..., 1) = 0$ так же возможны два случая.

1.1 $f_j(0, ..., 0) = 0$, тогда получим константу 0, так как

$$\phi(0) = f_j(0, ..., 0) = 0, \quad \phi(1) = f_j(1, ..., 1) = 0.$$

1.2 $f_j(0, ..., 0) = 1$, тогда получим $\overline{x}$. Имея константу 0 и $\overline{x}$, получим константу 1.

2. $f_i(1, ..., 1) = 0$. Тогда $\phi(x) = f_i(x, ..., x)$ есть $\overline{x}$, так как

$$\phi(0) = f_i(0, ..., 0) = 1, \quad \phi(1) = f_i(1, ..., 1) = 0.$$

Возьмем f_k ($f_k \notin S$). Так как мы имеем $\overline{x}$, то в силу леммы 1 из f_k мы можем получить константу. Из полученной константы и $\overline{x}$ можно получить вторую константу.

Итак, в обоих случаях имеем константы 0 и 1.

II. Построение при помощи констант 0, 1 и функции f_m функции $\overline{x}$. Это осуществляется на основе леммы 2.

III. Построение при помощи констант 0, 1 и функций $\overline{x}$ и f_l функции $x_1 \& x_2$. Это осуществляется на основе леммы 3.

Таким образом, при помощи формул над B' (а значит и над B) мы реализовали функции $\overline{x}$ и $x_1 \& x_2$. Этим достаточность доказана.

□

Утверждение. $[x_1 \& x_2, \ \overline{x_1}] = P_2$.

Доказательство. Путем навешивания отрицания над коньюнкцией и подстановки отрицания вместо переменных получим $x_1 \vee x_2$. С помощью системы $\{x_1 \vee x_2, \overline{x}, x_1 \& x_2\}$ можно построить СДНФ. Для любой функции, тождественно не равной нулю верно:

$$f(x_1 ... x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in E_2^n} x_1^{\sigma_{i_1}} \& ... \& x_n^{\sigma_{i_n}}.$$

Константу 0 можно получить, подставив в конъюнкцию x и $\overline{x}$. Таким образом, система$\{x_1 \vee x_2, \overline{x}, x_1 \& x_2\}$ полна. $\square$