Вопрос 8. Абсолютная и условная сходимость. Свойство абсолютно сходящихся рядов.

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $U_1, U_2, ..., U_k, ..$ и образуем из нее бесконечную сумму вида

$$U_1 + U_2 + ... + U_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \ (1.1)$$

Сумма (1.1) называется *числовой ряд или просто ряд.*
Сумма первых n членов ряда (1.1) называется *n-я частичная сумма ряда S_n*

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \ (1.2)$$

Определение.Ряд (1.1) называется сходящимся, если сходится последовательность S_nчастичных сумм (1.2) этого ряда. При этом предел S указанной последовательности S_n называется суммой ряда (1.1).

$$S = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Определение.

Будем называть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ *(1)* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ *(2).*

Теорема 1.

Если ряд сходится абсолютно, то сам ряд тоже сходится.

Доказательство.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ сходится. По теореме Коши: $\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$:$\forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |U_k|| < \varepsilon$, $\forall p > 0$ (p=1,2,...), берем модуль от самого ряда: $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} U_k| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |U_k| < \varepsilon$ (модуль суммы = сумма модулей). Теорема доказана.

Формулировка теоремы Коши.

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall \varepsilon > 0$ *нашелся номер N такой, что для* $\forall n \geqslant N$*, и для натурального числа* $\forall p (p = 1, 2, ...)$ $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} U_k| < \varepsilon$.

Определение.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ *называется* ***условно сходящийся****, если этот ряд сходится, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ *расходится.*

Определение.

Ряд (*) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k U_k = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + ...$ называется **знакопеременным.**

Пример.

1. $U_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ (-1)^n \ (\frac{2n+100}{3n+1})^n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ |(-1)^n \ (\frac{2n+100}{3n+1})^n| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ |(-1)^n| \ |(\frac{2n+100}{3n+1})^n|$

По Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{2n+100}{3n+1})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$ - сходится $\Rightarrow U_n$ - **абсолютно** сходится.

2. $U_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$

Решение: Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - это гармонический ряд, он расходится. Для исследования на сходимость исходного знакочередующегося ряда применим признак Лейбница:
$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}...>\frac{1}{n}>...$ - первое условие выполнено;
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ - второе условие выполнено.
Таким образом , по признаку Лейбница ряд сходится. Так как ряд из модулей расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится, значит, он сходится **условно**.

Теорема Лейбница.

Если члены знакопеременного ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, т.е. ***1.*** $U_{n+1}<U_n\ \forall n$ ***2.*** $U_n\to 0$ *то ряд сходится.*

Доказательство.

1) Построим последовательность частных сумм ряда (*) с четным индексом:
$S_{2m}=U_1-U_2+U_3-U_4-...-U_{2m}=(U_1-U_2)+(U_3-U_4)+...+(U_{2m-1}-U_{2m})$.
Т.к.$\forall$ скобка в $S_{2m}>0$, то S_{2m} возрастающая.
Покажем, что S_{2m} ограниченная: представим S_{2m} в виде:
$S_{2m}=U_1-[(U_2-U_3)+(U_4-U_5)+...+(U_{2m-1}-U_{2m})]$, каждая скобка положительна, поэтому если из U_1 вычесть каждую скобку(число), то получим число меньше U_1, т.е. $S_{2m}<U_1$, $\forall m\Rightarrow S_{2m}$ возрастает, ограничена сверху $\Rightarrow\exists$ конечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2m}{=}S$, причем $0<S<U_1$.

2) $\sphericalangle$ последовательность частных сумм ряда (*) с нечетным индексом:
$S_{2m+1}=U_1-U_2+U_3-...-U_{2m}+U_{2m+1}=S_{2m}+U_{2m+1}$.
Из условия (2): $\lim\limits_{n\to\infty}U_{2m+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\ S_{2m+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2m}+U_{2m+1}){=}\lim\limits_{n\to\infty}S_{2m}{+}\lim\limits_{n\to\infty}U_{2m+1}{=}\ S\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\Rightarrow$ ряд сходится и его сумма равна S. Теорема доказана.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Теорема Дирихле.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k$ *(1) сходится абсолютно, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k^{'}$ *(2), полученный перестановкой членов ряда (1), также сходится и имеет тот же предел.*

Доказательство.

1) Пусть ряд состоит из положительных элементов.

$\sphericalangle$ произвольную частичную сумму $S_k^{'}$ ряда (2), которая получена произвольной перестановкой ряда (1). Т.к. $U_1^{'}=U_{n_1},U_2^{'}=U_{n_2},...,U_k^{'}=U_{n_k}$, то, взяв $n^{'}>\forall$ номера $n_k\Rightarrow S_k^{'}<S_{n^{'}}\Rightarrow S_k^{'}<S\Rightarrow S^{'}$ - сходится, т.к. $S_k^{'}$(частичная сумма) ограничена $\Rightarrow S^{'}\leqslant S(*)$, но ряд S можно получить перестановкой ряда $S^{'}$, т.е. $S\leqslant S^{'}(**)$, сопоставим (*) и (**), то получим $S=S^{'}$.

2) Пусть ряд произвольный и абсолютно сходится. Т.к. абсолютно сходящийся ряд $\sum|U_k|$ при $\forall$ перестановке сходится, то по **теореме.1** - сам ряд тоже сходится. Теорема доказана.

Почему к ПРОСТО сх-ся ряду теорема Дирихле не применима?

Потому что:
если мы не будем требовать АБСОЛЮТНУЮ сходимость, то ряд может быть каким угодно.
Значит, ряд может получится УСЛОВНО сходящимся. а для условно сходящего ряда есть теорема Римана.
Если мы говорим, что ряд просто СХОДИТСЯ, то это просто общее понятие. Для общего

понятия есть критерий КОШИ - а этот критерий для практики неудобный.
Поэтому мы разделили ряды на те, у которых только неотрицательные члены, и те, у которых могут быть и отрицательные, и положительные члены.

Теорема Римана.
Если ряд условно сходится, то для $\forall$ числа L $\exists$ перестановка S', такая что $S' \to L$.

Доказательство.
Пусть P - положительные элементы ряда S, Q - абсолютные значения отрицательных элементов ряда S $\Rightarrow$ P и Q расходятся.
Докажем, что P и Q расходятся:
Пусть S_n частичная сумма ряда S, P_n и Q_n соответственно. $\Rightarrow S_n = P_n - Q_n$ и по условию, что ряд $\sum U_k \to S$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = S$, но т.к. радя $\sum U_k$ не сходится абсолютно, то $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = +\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = +\infty$. Доказали, что P и Q расходятся.
$\sphericalangle$ $p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} > L$, добавим столько же отрицательных q: $p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - q_2 - ... - q_{k_1} < L$, опять добавим столько же р: $p_1 + ... + p_{k_1} - q_1 - ... - q_{k_1} + p_{k_1+1} + ... + p_{k_2} > L$ и т.д. В итоге получим бесконечный ряд, в котором будут все эти члены.
Докажем, что полученный ряд сходится к L:
Если брать элементы ряда из p и q ровно столько, чтобы выполнялось неравенство, то от L будет отличаться только на модуль последнего члена, т.к. модули последних членов бесконечно малые величины, то ряд $(p_1 + ... + p_{k_1}) - (q_1 + ... + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + ... + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + ... + q_{m_2}) + ... \to L$.
Если $L = +\infty$, то можно набор положителлльных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились $>$ 1,2,3,... и т.д., а отрицательные члены помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Для $L = -\infty$ аналогично. Теорема доказана.

Пример.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + ...$ (1)
В результате перестановки членов получим ряд:
$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) + ...$ (2)
Пусть S_n и S'_n - частичные суммы ряда (1) и (2) соответственно. Можем записать:
$S'_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \frac{1}{2}S_{2n} \Rightarrow$

$$S'_{3n} = \frac{1}{2}S_{2n} \ (3)$$

Далее:

$$S'_{3n-1} = \frac{1}{2}S_{2n} + \frac{1}{4n} \ (4)$$
$$S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \frac{1}{4n-2} \ (5)$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, то из формул (3), (4), (5) получим:

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2}S, \ \lim_{n\to\infty} S'_{3n-1} = \frac{1}{2}S, \ \lim_{n\to\infty} S'_{3n-2} = \frac{1}{2}S$$

Таким образом ряд (2) сходится и имеет сумму, равную $\frac{1}{2}S$.

Доп.материал:
Критерий Коши. Для сходимости ряда (1.1), необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что при $n > Np > 0, np -$ было выполнено неравенство:

$$|S_{n+p} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k| < \varepsilon$$

В частности, если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Признак Даламбера. Если $U_n > 0$(n=1,2,...) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$, то

1. при q < 1 ряд (1.1) сх-ся
2. при q > 1 ряд расх-ся

Признак Коши. Если $U_n \geq 0$ (n=1,2,...) и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = q$, то

1. при q < 1 ряд сх-ся
2. при q > 1 ряд расх-ся

Признак Раабе. Если $U_n \geq 0$ (n=1,2,...) и $\lim\limits_{n\to\infty} n * (\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1) = p$, то

1. при p > 1 ряд сх-ся 2. при p < 1 ряд расх-ся

Признак Гаусса. Если $U_n > 0$ (n=1,2,...) и $\frac{U_n}{U_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\Theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $|\Theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то

1. при $\lambda > 1$ ряд сх-ся
2. при $\lambda < 1$ ряд расх-ся
3. при $\lambda = 1$ ряд сх-ся, если $\mu > 1$ и ряд ряд расх-ся, если $\mu \leqslant 1$.

Признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n V_n$ сх-ся, если

1. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ сх-ся
2. числа V_n образуют монотонную и ограниченную последовательность.

Определение. Функция $f(x)$ называется неубывающей [невозрастающей] на множестве $\{x\}$, если для любых $x_1, x_2 \in \{x\}$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $[f(x_1) \geqslant (x_2)]$