ГЛАВА II

СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы рассмотрим важнейшие методы исследования голоморфных функций. Они основаны на представлении таких функций в виде специальных интегралов (интегралов Коши) или в виде сумм некоторых рядов (рядов Тейлора и Лорана). Начнем с понятия интеграла от функций комплексного переменного.

§ 4. Интеграл

14. Понятие интеграла. Определение. Пусть дан путь γ класса C^1, т. е. непрерывно дифференцируемое отображение $z(t)\colon J \to \mathbb{C}$, где $J=[\alpha, \beta]$ — отрезок действительной оси $\mathbb{R}^1$ (см. п. 3). Пусть на образе этого пути $z(J)$, который мы также будем обозначать через γ, задана комплексная функция $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ такая, что функция $f \circ z(t)$ непрерывна на J (в этом случае мы просто будем говорить, что f непрерывна на γ). Будем называть интегралом от функции f *вдоль пути* γ число

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{1}$$

где в правой части интеграл от комплексной функции действительного переменного понимается как соответствующая линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей.

Определение без всяких изменений распространяется на кусочно непрерывно дифференцируемые пути.

Примеры. 1. Пусть γ — окружность $z=a+re^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, и $f(z)=(z-a)^n$, где $n=0, \pm 1, \ldots$ — произвольное целое число. По определению (1) нужно знать *

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = r^{n+1}i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt;$$

при $n \neq -1$ имеем

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = r^{n+1}i\left\{\int_0^{2\pi}\cos(n+1)t\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin(n+1)t\,dt\right\} = 0,$$

а при $n=-1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Таким образом, целые степени $(z-a)^n$ обладают свойством «ортогональности»

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при} \quad n=-1, \end{cases} \tag{2}$$

которым мы будем неоднократно пользоваться.

2. Пусть γ — произвольный путь $z=z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, класса C^1 с концами в точках $a=z(\alpha)$ и $b=z(\beta)$; тогда

$$\int_\gamma dz = b-a, \qquad \int_\gamma z\,dz = \frac{b^2-a^2}{2}. \tag{3}$$

В самом деле,

$$\int_\gamma dz = \int_\alpha^\beta z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta dx(t) + i\int_\alpha^\beta dy(t) =$$
$$= x(\beta)-x(\alpha)+i[y(\beta)-y(\alpha)] = z(\beta)-z(\alpha).$$

Аналогично

$$\int_\gamma z\,dz = \int_\alpha^\beta z(t)z'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}[z^2(t)]\,dt = \frac{z^2(\beta)}{2} - \frac{z^2(\alpha)}{2}.$$

Мы видим, что интегралы (3) не зависят от вида пути и вполне определяются его начальной и конечной точками. По любому замкнутому пути эти интегралы равны нулю.

З а м е ч а н и е. В принятых нами в определении условиях на путь и функцию интеграл (1) всегда существует (как интеграл от непрерывной функции) и может пониматься в смысле Римана. Если путь γ лишь спрямляем, то даже для непрерывных функций f требуется более общее понятие интеграла, ибо в правой части (1) множитель $z'(t)$ существует лишь почти всюду. Поэтому в случае спрямляемых путей нужно пользоваться интегралом Лебега (и тогда естественно считать функцию f такой, что $f\circ z(t)$ суммируема на I).

Перечислим основные свойства интеграла от комплексных функций.

Теорема единственности.

му, мы покажем, что аналитическая функция полностью определяется своими значениями на произвольной последовательности точек, сходящейся к некоторой внутренней точке области аналитичности.

Начнем с одной теоремы относительно нулей аналитической функции. *Нулем* функции $f(z)$ называют любую точку $z = a$, в которой $f(z)$ принимает значение 0: $f(a) = 0$. Если аналитическая функция не равна тождественно 0 в окрестности своего нуля a, то в ее тейлоровском ряде с центром в a все коэффициенты не могут равняться нулю (иначе сумма ряда была бы тождественно равна нулю). Номер младшего отличного от нуля коэффициента этого разложения называется *порядком* нуля a. Таким образом, в окрестности нуля порядка n тейлоровское разложение функции имеет вид:

порядок нуля равен эн, если все производные до эн вкл. в точке а равны 0,

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1} (z-a)^{n+1} + \ldots, \tag{1}$$

где $c_n \neq 0$ и $n \geqslant 1$. но эн+1 производная отлична от нуля

Очевидно, *порядок нуля a можно определить также как порядок младшей отличной от нуля производной $f^{(n)}(a)$.*

Очевидно также, что в окрестности нуля порядка n аналитическая функция $f(z)$ допускает представление вида

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \tag{2}$$

где функция

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \tag{3}$$

также аналитична в окрестности точки a (ибо она представляется сходящимся степенным рядом).

В силу непрерывности $\varphi(z)$ эта функция отлична от нуля и всюду в некоторой окрестности точки a. Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля a и не равна тождественно 0 ни в какой его окрестности. Тогда существует окрестность точки a, в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме a.*

Из доказанной теоремы и вытекает *теорема единственности* теории аналитических функций, о которой мы говорили в начале пункта.

Теорема 2. *Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают на некоторой последовательности точек a_n, сходящейся к внутренней точке a области D, то всюду в D*

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Для доказательства мы рассмотрим функцию

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Она аналитична в D и имеет своими нулями точки a_n, а в силу непрерывности и точку a, ибо $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=0$. Отсюда следует, что $f(z)$ тождественно равна 0 в некоторой окрестности a, ибо в противном случае нарушалась бы только что доказанная теорема 1. Таким образом, множество всех нулей функции $f(z)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

Обозначим через $\mathscr{E}$ совокупность всех внутренних точек множества нулей функции $f(z)$. Если $\mathscr{E}$ совпадает с D, то наша теорема доказана. Если же $\mathscr{E}$ составляет лишь часть области D, то найдется граничная точка b множества $\mathscr{E}$, являющаяся внутренней точкой D. Существует последовательность точек b_n множества $\mathscr{E}$, сходящаяся к b; точка b в силу непрерывности $f(z)$ является нулем $f(z)$. С другой стороны, $f(z)$ не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки b, ибо точка b была бы внутренней, а не граничной точкой множества $\mathscr{E}$. По теореме 1 отсюда вытекает, что в некоторой окрестности точки b нет ни одного нуля $f(z)$, но это противоречит тому, что b является граничной точкой $\mathscr{E}$. Полученное противоречие и доказывает теорему единственности.

Из теоремы единственности вытекает, что аналитическая в некоторой области и не равная тождественно нулю функция $f(z)$ не может обращаться в нуль ни в какой подобласти из D, ни на какой дуге, лежащей в D, ни даже на последовательности точек D, сходящейся к ее внутренней точке.

Легко, однако, привести пример, когда бесконечная последовательность нулей функции сходится к граничной точке ее области аналитичности: функция $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ обращается в нуль на последовательности точек $z_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, сходящейся к точке $z=0$.

21. Ряды Лорана. Ряды Тейлора — аппарат, удобный для представления функций, аналитических в круговых областях. Весьма важно, однако, иметь аппарат для представления функций в областях иного вида. Например, при изучении функций, аналитических в некоторой окрестности точки a всюду, кроме самой точки a, приходится рассматривать кольцевые области вида $0<|z-a|<R$. Оказывается, что для функций, аналитических в кольцевых областях $r<|z-a|<R$, где $r\geqslant 0$, $R\leqslant\infty$, можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

являющиеся обобщением тейлоровских разложений. Такие разложения мы и рассмотрим в этом пункте.

Итак, пусть функция $f(z)$ аналитична в некотором кольце K: $r < |z-a| < R$, где $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$. Выберем произвольно числа r' и R' так, что $r < r' < R' < R$, а также число k, $0 < k < 1$, и рассмотрим кольцо $\frac{r'}{k} < |z-a| < kR'$. В произвольной внутренней точке z этого кольца мы можем представить $f(z)$ по формуле Коши (п. 14), которая для нашего случая принимает вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2}$$

внутри кольца берем еще одно кольцо

где обе окружности C: $|\zeta - a| = R'$ и c: $|\zeta - a| = r'$ проходятся против часовой стрелки.

Для первого интеграла имеем $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{kR'}{R'} = k < 1$, следовательно, дробь, в него входящую, можно разложить в сходящуюся на C равномерно относительно ζ геометрическую прогрессию:

фишка в том, что два интеграла в виде сумм представляем. А вот эта дробь - геом. убыв. прогрессия (вспомнили формулу, расписали)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \ldots$$

Умножая это разложение на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя его почленно по ζ (что возможно в силу равномерной сходимости), мы получим разложение первого члена формулы (2) в степенной ряд:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Заметим, что выражение (4) нельзя представить, как в п. 18, в виде $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, так как $f(z)$, вообще говоря, не аналитична в точке a.

Для второго интеграла имеем:

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < \frac{kr'}{r'} = k < 1,$$

следовательно, равномерно на c сходится прогрессия

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} =$$

$$= -\frac{1}{z-a} - \frac{\zeta - a}{(z-a)^2} - \frac{(\zeta - a)^2}{(z-a)^3} - \ldots - \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n} - \ldots$$

Как и выше, получим разложение второго члена формулы (2) в ряд, но теперь по отрицательным степеням $(z-a)$:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}, \qquad (5)$$

где появляется минус, потому что мы обходим так, что область остается справа

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (6)$$

Заменим в формулах (5) и (6) индекс $-n$, пробегающий значения 1, 2, ..., индексом n, пробегающим значения -1, -2, ...; тогда, объединяя оба разложения (3) и (5) в одно, получим:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \qquad (7)$$

Далее, согласно п. 13, в формулах (4) и (6) окружности C и c можно заменить любой окружностью γ: $|z-a| = \rho$, где $r' < \rho < R'$. Поэтому обе эти формулы можно объединить в одну:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (8)$$

Полученное здесь разложение (7) функции $f(z)$ по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ с коэффициентами, определяемыми по формулам (8), называется *лорановским разложением* функции $f(z)$ с центром в точке a; ряд (3) называется *правильной*, ряд (5) — *главной частью* этого разложения.

Так как r' и R' в нашем рассуждении могут быть взяты сколь угодно близкими к r и R, а k может сколь угодно мало отличаться от 1, то разложение (7) можно считать установленным для всех точек z кольца аналитичности функции $f(z)$.

Правильная часть ряда Лорана по теореме Абеля сходится всюду в круге $|z-a| < R$, причем в любом круге $|z-a| < kR$ $(0 < k < 1)$ его сходимость равномерна. Главная часть представляет степенной ряд относительно переменной $Z = 1/(z-a)$, следовательно, по той же теореме он сходится при $|Z| < 1/r$, т. е. всюду вне круга $|z-a| > r$, причем при $|z-a| \geq r/k$, $0 < k < 1$, его сходимость также равномерна.

Таким образом, доказана

Теорема 1 (П. Лоран*), 1843 г.). *В любом кольце K: $r < |z-a| < R$, в котором аналитична функция $f(z)$, эта функция может быть представлена своим рядом Лорана* (7), *равномерно сходящимся в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу K.*

Из формул (8) для коэффициентов ряда Лорана точно так же, как в п. 17, получаем следующие *неравенства Коши:* если функция $f(z)$ ограничена на окружности $|z-a| = \rho$, пусть $|f(z)| \leqslant M$, то

$$|c_n| < \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots). \tag{9}$$

Заметим, наконец, что областью сходимости произвольного ряда вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

всегда служит некоторое круговое кольцо **) $r < |z-a| < R$, где $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$.

В этом очень легко убедиться с помощью теоремы Абеля, разбивая ряд на правильную и главную части. Для случая $r < R$ справедлива

Теорема 2. *Если ряд*

отсюда нужно только то, чему равны коэффициенты

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{10}$$

сходится в кольце $r < |z-a| < R$, то его сумма $f(z)$ аналитична в этом кольце и разложение (10) *является рядом Лорана для функции $f(z)$.*

В самом деле, аналитичность $f(z)$ доказывается на основании теорем Абеля и Вейерштрасса так же, как в теореме 4 предыдущего пункта. Далее, на любой окружности γ: $|z-a| = \rho$, где $r < \rho < R$, ряд (10) сходится равномерно и остается таким после умножения на $(z-a)^{-n+1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Если проинтегрировать разложение

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1}$$

---

*) Пьер Лоран (1813—1854) — французский математик. Теорема была получена также в 1841 г. К. Вейерштрассом, однако он опубликовал свой результат лишь в 1894 г. Ряды вида (7) встречались еще в работе Л. Эйлера (1748 г.).

**) Это кольцо может оказаться пустым, если $r \geqslant R$, а в случае $r = R$ множеством сходимости может служить любое множество на окружности $|z-a| = r$.

по окружности γ и воспользоваться легко доказываемыми для любого целого n соотношениями: смотри первые две стр.

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \tag{11}$$

(ср. вывод формулы (4) из п. 13), то мы получим выражения коэффициентов ряда (10):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}},$$

совпадающие с выражениями (8). Следовательно, ряд (10) является рядом Лорана функции $f(z)$, и теорема 2 доказана.

Теорема 2 является теоремой единственности разложения в ряд Лорана, ибо из нее следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ является лорановским разложением этой функции.

22. Особые точки. Развитый в предыдущем пункте аппарат разложений Лорана позволит нам полностью изучить поведение аналитических функций в окрестности простейшего типа точек, в которых нарушается аналитичность этих функций — так называемых изолированных особых точек. Точка a называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z-a| < R$ этой точки (с исключенной точкой a), в которой $f(z)$ аналитична. Подчеркнем, что здесь речь идет о точках, в окрестности которых функция однозначна (условие однозначности включается в условие аналитичности функции, см. п. 5). Об особых точках многозначного характера мы будем говорить в п. 25. критерий сущ. особых точек

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции $f(z)$ в их окрестности:

1) Точка a называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$,

2) точка a называется *полюсом*, если $f(z)$ является бесконечно большой при приближении к a, т. е. если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ (это означает, что $|f(z)| \to \infty$ при $z \to a$) и, наконец,

3) точка a называется *существенно особой точкой*, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Изложим основные свойства функций, относящиеся к их особым точкам. Если a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то по теореме 1 предыдущего пункта эту функцию можно разложить в ряд Лорана в кольце ее аналитичности $0 < |z-a| < R$:

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$
$$\ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \quad (1)$$

Это разложение имеет различный вид в зависимости от характера особой точки. Приведем три относящиеся сюда теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы a была устранимой особой точкой функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки a не содержало главной части.*

Ясно, что если лорановское разложение $f(z)$ не содержит главной части, т. е. $f(z)$ представляется степенным рядом

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \quad (2)$$

то существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$ *) и a является устранимой особой точкой.

Пусть, обратно, a является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Тогда в силу того, что $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует и конечен, функция $f(z)$ ограничена в окрестности a; пусть $|f(z)| \leqslant M$. Воспользуемся неравенствами Коши из п. 21

док-во это небязательно

$$|c_n| \leqslant M\rho^{-n};$$

так как в них число ρ можно выбирать сколь угодно малым, то ясно, что все коэффициенты c_n с отрицательными индексами равны нулю и лорановское разложение $f(z)$ не содержит главной части. Теорема доказана.

Замечание. По существу мы доказали более сильное утверждение: *если функция $f(z)$ ограничена в окрестности изолированной особой точки a, то a является устранимой особой точкой этой функции.*

Название «устранимая особая точка», как теперь стало очевидно, оправдывается тем, что такую особую точку можно «устранить», полагая $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$; после этого функция $f(z)$ будет аналитической и в точке a, ибо во всем круге $|z-a| < R$ она будет представляться сходящимся степенным рядом (2) (см. теорему 4 п. 19).

Перейдем к случаю полюса. Из определения полюса a следует, что $f(z)$ отлична от нуля в некоторой окрестности этого

*) По теореме 4 п. 19 правая часть (2) аналитична в точке $z = a$, следовательно, она непрерывна и ее предел при $z \to a$ равен сумме ряда в точке a, т. е. c_0.

полюса: $0<|z-a|<R'$, где $R' \leqslant R$. В такой окрестности аналитична функция $g(z)=1/f(z)$, для которой, очевидно, $\lim\limits_{z \to a} g(z)=0$. Следовательно, по предыдущей теореме, a является устранимой особой точкой $g(z)$ и, положив $g(a)=0$, мы получим, что a является нулем функции $g(z)$. Обратно, если $g(z)$ имеет в точке a нуль (и не равна тождественно нулю), то функция $f(z)=1/g(z)$ по теореме 1 п. 20 аналитична в некоторой окрестности $0<|z-a|<R$ точки a; очевидно, $f(z)$ имеет в точке a полюс.

Таким образом, нули и полюсы аналитических функций весьма просто связаны друг с другом. Условимся еще называть *порядком полюса a* функции $f(z)$ порядок нуля a функции $g(z)=1/f(z)$.

Теорема 2. *Для того чтобы точка a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности a содержала лишь конечное число членов*:

это док-во надо по билету

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k. \tag{3}$$

При этом номер старшего отрицательного члена разложения совпадает с порядком полюса.

Пусть a является полюсом порядка n функции $f(z)$. Тогда функция $g(z)=1/f(z)$, $g(a)=0$, имеет в точке a нуль порядка n и согласно п. 20 в окрестности точки a представляется в виде

$$g(z)=(z-a)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична и $\varphi(a) \neq 0$. В этой окрестности

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \tag{4}$$

Но функция $1/\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z-a|<R$ точки a, следовательно, она разлагается там в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\ldots+c_0(z-a)^n+\ldots,$$

где $c_{-n}=\dfrac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Подставляя это разложение в формулу (4), получим искомое разложение (3), справедливое в окрестности $0<|z-a|<R$.

Пусть теперь, обратно, в некоторой окрестности $0<|z-a|<$ $<R$ точки a имеет место разложение (3), причем $c_{-n} \neq 0$.

Тогда функция $\varphi(z)=(z-a)^n f(z)$, $\varphi(a)=c_{-n}$, в круге $|z-a|<R$ представляется рядом Тейлора

$$\varphi(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\ldots, \tag{5}$$

т. е. аналитична. Так как $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=c_{-n}\neq 0$, то

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}=\infty$$

и точка a является полюсом функции $f(z)$. Функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z-a)^n}{\varphi(z)}$ имеет, очевидно, в точке a нуль порядка n, следовательно, порядок полюса a равен n. Теорема доказана.

Из доказанных теорем непосредственно вытекает

Теорема 3. *Точка a тогда и только тогда является существенно особой для функции $f(z)$, когда главная часть лорановского разложения последней в окрестности точки a содержит бесконечно много членов.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки выясняет следующая

Теорема 4 (Ю. В. Сохоцкий*), 1868 г.). *Если a — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_k\to a$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=A$.*

Прежде всего, существует последовательность $z_k\to a$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=\infty$, ибо в противном случае $f(z)$ была бы ограниченной в окрестности a и точка a была бы устранимой особой точкой (см. замечание к теореме 1). Пусть теперь задано произвольное комплексное число A. Имеет место один из двух случаев: 1) в любой окрестности точки a найдется точка z, в которой $f(z)=A$, тогда теорема Сохоцкого доказана, ибо из таких точек z можно построить последовательность $z_k\to a$, так что $f(z_k)=A$, а значит, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=A$, и 2) в некоторой окрестности точки a функция $f(z)$ не принимает значения A.

Во втором случае в упомянутой окрестности аналитична функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$. Точка a не может быть для нее ни полюсом, ни устранимой особой точкой, ибо в этих случаях существовал бы конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=$

---

*) Эта теорема обычно приписывается Вейерштрассу, однако она была доказана в диссертации русского математика Юлиана Васильевича Сохоцкого (1842—1929) и опубликована за 8 лет до появления работы Вейерштрасса. Одновременно с Сохоцким теорему получил итальянский математик Ф. Казорати.

23. Теорема о вычетах. Принцип аргумента. Здесь мы введем весьма важное для дальнейших приложений понятие вычета *) функции и докажем некоторые связанные с ним теоремы общего характера; примеры вычисления вычетов и различные приложения мы рассмотрим ниже (главным образом в гл. V и VI).

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке a (обозначение $\operatorname{res} f(a)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{1}$$

где γ — достаточно малая окружность $|z-a|=\rho$, проходимая в положительном направлении. Согласно п. 13 величина вычета не зависит от величины ρ для достаточно малых ρ.

Из формул (8) п. 21 для коэффициентов ряда Лорана при $n=-1$ непосредственно вытекает, что

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz=c_{-1}, \tag{2}$$

т. е. что *вычет функции $f(z)$ в особой точке a равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности a.*

Отсюда следует, что в устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю. Нахождение вычета в полюсе порядка n облегчает следующая формула:

$$\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}. \tag{3}$$

Для ее вывода достаточно умножить лорановское разложение

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\ldots$$

на $(z-a)^n$, продифференцировать полученное равенство $n-1$ раз и затем перейти к пределу при $z\to a$ (непосредственная подстановка $z=a$ в выражение производной невозможна, ибо a — особая точка $f(z)$).

Для полюсов первого порядка формула (3) принимает особенно простой вид:

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}. \tag{4}$$

---

*) Понятие вычета было введено О. Коши в «Мемуаре об определенных интегралах» (1814); в своих «Упражнениях по математике» (1826—1829) он дал также многочисленные приложения этого понятия к анализу. В своих работах Коши указывает, что он пришел к понятию вычета, развивая идеи Эйлера.

Если при этом в окрестности точки a функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в этой точке функций:

необязательно

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(a)\neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в a нуль первого порядка (т. е. $\psi(a)=0$, а $\psi'(a)\neq 0$), то формулу (4) можно заменить следующей:

$$\operatorname{res} f(a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (5)$$

Пример. Мероморфная функция $\operatorname{ctg} z^2$ имеет полюсы первого порядка в точках $z=\pm\sqrt{\pm k\pi}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, и полюс второго порядка в точке $z=0$ (в этом проще всего убедиться, рассматривая нули функции $\operatorname{tg} z^2$). Вычет в точке $z=0$ по формуле (3) равен

$$\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2\operatorname{ctg} z^2)=\lim_{z\to 0}\frac{z\sin 2z^2-2z^3}{\sin^2 z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\frac{4}{3}z^7+\ldots}{z^4-\ldots}=0\ ^{*)}$$

(это видно также из того, что лорановское разложение $\operatorname{ctg} z^2$ с центром в точке $z=0$ может содержать лишь четные степени z). Вычет в точке $z=\pm\sqrt{\pm k\pi}$ по формуле (5), где принято $\varphi=\cos z^2$, $\psi=\sin z^2$, равен

$$\frac{\cos z^2}{2z\cos z^2}=\frac{1}{2z}=\pm\frac{1}{2\sqrt{\pm k\pi}}.$$

Применение теории вычетов основывается главным образом на следующей важной *теореме о вычетах*:

Теорема 1 (О. Коши, 1825 г.). *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на границе **) C области D и аналитична внутри этой области всюду, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда, если C обходится в положительном направлении, то*

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(a_k). \qquad (6)$$

---

*) Мы заменили числитель и знаменатель первыми членами их тейлоровских разложений в окрестности точки $z=0$.

**) Здесь и далее непрерывность $f(z)$ на границе области понимается в смысле непрерывности по области, т. е. в том смысле, что в любой точке z_0 границы существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, причем $z\to z_0$ по точкам области D. Если C имеет кратные точки, например содержит двубережный разрез, то условие можно ослабить, потребовав существования предельных значений $f(z)$ лишь при $z\to z_0$ с каждой из сторон разреза (при этом пределы с одной и с другой стороны не обязаны совпадать).

Доказательство вытекает из теоремы Коши для многосвязных областей (п. 13). Заключим каждую точку a_k в кружок γ_k: $|z-a_k|=\rho_k$ столь малый, что все такие кружки лежат в области D и не пересекаются друг с другом (рис. 26). Так как $f(z)$ аналитична в области D^*, ограниченной кривой C и совокупностью окружностей γ_k, и непрерывна в $\bar{D}^*$, то по цитированной теореме

$$\int_C f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k^-} f(z)\,dz=0,$$

где все γ_k^- проходятся по часовой стрелке. Меняя направление обхода окружностей γ_k и пользуясь определением вычета (1), согласно которому

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{res} f(a_k),$$

мы получаем нужный результат (6).

Принципиальная важность теоремы о вычетах заключается в том, что она позволяет свести вычисление величины «в целом», какой является интеграл по замкнутому контуру конечной величины, к вычислению величин «в малом», дифференциальных величин, какими являются вычеты. Действительно, вычеты вычисляются с помощью интегралов по бесконечно малым контурам или даже с помощью простого предельного перехода (формулы (3), (4) и (5)). Метод сведения вычисления величин «в целом» к вычислению дифференциальных величин является обычным в математическом анализе (сравни вычисление интегралов с помощью первообразных, которые определяются на основании известных производных). Применение теории вычетов посвящена специальная глава V.

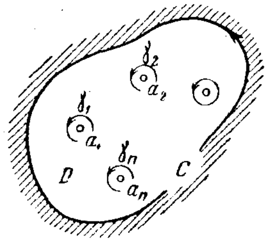

Рис. 26.

Остановимся еще на понятии логарифмического вычета. Под *логарифмическим вычетом* аналитической функции $f(z)$ в точке a понимают вычет ее логарифмической производной

$$\{\ln f(z)\}'=\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Ясно, что имеет смысл говорить о логарифмических вычетах не только в особых точках, но и в нулях $f(z)$. Если точка a