Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин

Аннотация

Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой группу теорем, посвященных установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения.

Ключевые слова: случайная величина, функция распределения, независимость случайных величин, математическое ожидание, дисперсия, моменты, сходимость случайных величин, сходимость последовательности функций, характеристическая функция, нормальное распределение, условие Линдеберга, центральная предельная теорема.

1 Основные определения

Определение. Пусть Ω – множество всех возможных исходов некоторого испытания. Каждый элемент ω из Ω называют *элементарным событием*, а Ω – *пространством элементарных событий*.

Определение. *Случайной величиной (СВ)* ξ называется отображение пространства элементарных событий во множество вещественных чисел, то есть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение. Функцию $F(x) = F_\xi(x) := P(\xi < x)$ (вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x) называют *функцией распределения (ФР)* СВ ξ.

Определение. СВ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любой группы $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}$ этих величин имеет место равенство

$$P(\xi_{i_1} < x_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} < x_{i_k}) = P(\xi_{i_1} < x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(\xi_{i_k} < x_{i_k})$$

при произвольных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ и любом k, $1 \le k \le n$.

Определение. Функцию $f(x) = f_\xi(x) := F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ называют *плотностью распределения (вероятности)* непрерывной СВ ξ.

Определение. *Начальный момент* k-го порядка СВ ξ определяется как

$$\nu_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, & \text{если } \xi \text{ - непрерывная;} \\ \sum_{j=1}^{n} x_i^k p_i, & \text{если } \xi \text{ - дискретная.} \end{cases}$$

Примечание. Начальный момент 1-го порядка есть *математическое ожидание* $\nu_1 =: M(\xi)$.

Определение. *Центральный момент* k*-го порядка* СВ ξ определяется как

$$\mu_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^k f(x) dx, \text{ если } \xi \text{ - непрерывная;} \\ \sum_{j=1}^{n} (x_i - M(\xi))^k p_i, \text{ если } \xi \text{ - дискретная.} \end{cases}$$

Примечание. Центральный момент 2-го порядка есть *дисперсия* $\mu_2 =: D(\xi)$.

Определение. *Сходимость последовательности функций* $\{f_n : X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ к $f : X \to Y$ определяется как

$$(f_n \to f) := \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists N > 0 \ \forall n > N \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Определение. *Равномерная сходимость последовательности функций* $\{f_n : X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ к $f : X \to Y$ определяется как

$$(f_n \rightrightarrows f) := \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall x \in X \ \forall n > N \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Определение. ФР F_n СВ ξ_n *слабо сходится к* ФР F СВ ξ, если для любой непрерывной и ограниченной функции $f(x)$

$$\int f(x) dF_n(x) \to \int f(x) dF(x).$$

Обозначение. Обозначим слабую сходимость через $F_n(x) \Rightarrow F(x)$.

Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ *сходится по распределению* к СВ ξ при $n \to \infty$, если последовательность ФР $F_n(x)$ СВ ξ_n сходится к ФР $F(x)$ СВ ξ в каждой точке x непрерывности функции $F(x)$.

Обозначение. Обозначим сходимость по распределению через $\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{F} \xi$.

Примечание. В некоторых источниках слабая сходимость СВ и сходимость по распределению принимаются как равные термины.

Определение. *Характеристической функцией* СВ ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) := M(e^{it\xi}).$$

Определение. Непрерывная СВ ξ имеет *нормальный закон распределения* с параметрами a и σ^2, если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Обозначение. СВ ξ, имеющую нормальный закон распределения, обозначим через $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

Если $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то $M(\xi) = a$ и $D(\xi) = \sigma^2$, а также

$$\varphi_\xi(x) = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}, \tag{1.1}$$

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{1.2}$$

$$\text{где } \Phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \textit{функция Лапласа}. \tag{1.3}$$

2 Вспомогательные теоремы

Теорема 1. *Из $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ и непрерывности $F(x)$ во всех точках следует $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$.*

Теорема 2 (Теорема единственности)**.** *Характеристическая функция случайной величины однозначно определяет ее функцию распределения.*

Теорема 3 (Теорема непрерывности)**.** *Для сходимости $F_n \Rightarrow F$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при каждом t, где $\varphi(t)$ – характеристическая функция, соответствующая F.*

3 ЦПТ для сумм независимых одинаково распределенных СВ

Теорема 4 (Теорема Ляпунова для н.о.р.с.в.)**.** *Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания $M(\xi_k) = a$ и дисперсии $D(\xi_k) = \sigma^2$, $k \geq 1$. Пусть $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geq 1$. Введем еще последовательность*

$$\zeta_n := \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Закон распределения случайной величины ζ_n неограниченно приближается к стандартному нормальному закону. По-другому

$$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} \zeta \sim N(0,1) \text{ или}$$

$$P(\zeta_n < x) \rightrightarrows \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Для доказательства вспомним несколько свойств характеристической функции:

1. Для любой СВ ξ
$$\varphi_\xi(0) = 1.$$

2. Для любой СВ ξ и для любых $a, b \in \mathbb{R}$
$$\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(ta).$$

3. Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые СВ, то
$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

4. Если существует k-й момент $M(|\xi|^k) < \infty$, $k \geq 1$, то существует непрерывная k-я производная $\varphi_\xi^{(k)}(t)$ и $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k)$.

Без ограничения общности можно считать $a = 0$, так как иначе можно было бы рассмотреть последовательность $\{\xi_k - a\}$, при этом последовательность $\{\zeta_k\}$ не изменилась бы. Покажем это. Пусть $\xi'_k = \xi_k - a$. Тогда
$$M(\xi'_k) = M(\xi_k - a) = M(\xi_k) - M(a) = a - a = 0.$$
$$D(\xi'_k) := M([\xi'_k - M(\xi'_k)]^2) = M(\xi'^2_k) = M([\xi_k - a]^2) =: \sigma^2.$$

И наконец,

$$\zeta'_n = \frac{\xi_1 - a + \xi_2 - a + \ldots + \xi_n - a - 0 * n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - an}{\sigma\sqrt{n}} = \zeta_n.$$

Стало быть, для доказательства требуемой сходимости достаточно показать, что
$$\varphi_{\zeta_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

когда $a = 0$ (см (1.1)). Имеем по свойству 3

$$\varphi_{\zeta_n}(t) = \varphi^n_{\xi_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

По условию существует второй начальный момент (поскольку математические ожидания и дисперсии конечны), значит, справедливо разложение

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2) = 1 - ati - \frac{t^2}{2}(a^2 + \sigma^2) + o(t^2) = \\ = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2).$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\ln \varphi_{\zeta_n}(t) = \ln \varphi^n_{\xi_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \ln\left[1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n = \\ = n\ln\left[1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] \approx n\left[-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] \to -\frac{t^2}{2}.$$

Получим

$$(\varphi_{\zeta_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}) \Longrightarrow (F_{\zeta_n}(x) \rightrightarrows \Phi(x)) \Longrightarrow (\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} \zeta \sim N(0,1)).$$

$\square$

Замечание. Согласно теореме 3, из сходимости характеристических функций следует слабая сходимость (сходимость по распределению), а *равномерная* сходимость в ЦПТ вытекает из непрерывности функции $\Phi(x)$ (теорема 1, формула 1.2).

Замечание. Если последовательность СВ S_n такова, что при некоторых A_n и B_n

$$P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) \rightrightarrows \Phi(x) \text{ при } n \to \infty,$$

то будем говорить, что СВ S_n (A_n, B_n)-*асимптотически нормальна.*

Пример. Имеется n идентичных технических устройств (ТУ), время безотказной работы каждого i-го из которых – СВ ξ_i, распределенная по показательному закону с параметром λ, одинаковым для всех ТУ. Число

n собранных в такую систему достаточно велико. СВ $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы между собой. В случае отказа i-го ТУ происходит мгновенное и безотказное переключение на следующие по порядку $(i+1)$-е ТУ, $(i+1) \leq n$. Общее время безотказной работы системы равно сумме времен ξ_i:

$$S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Найти приближенно вероятность того, что система ТУ проработает безотказно время, не меньшее заданного τ, то есть $P(S_n \geq \tau)$.

◀ Имеем $\xi_i \sim Exp(\lambda)$, значит, $M(\xi_i) = \frac{1}{\lambda}$ и $D(\xi_i) = \frac{1}{\lambda^2}$. Получим $M(S_n) = \frac{n}{\lambda}$ и $D(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$. Искомая вероятность равна

$$P(S_n \geq \tau) = P(S_n > \tau) = 1 - P(S_n < \tau) = 1 - F(\tau),$$

где F определяется по формуле (1.2). Получим

$$P(S_n > \tau) = \frac{1}{2} - \Phi_0((\tau - n/\lambda)/(\sqrt{n}/\lambda)) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{\lambda\tau - n}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом, СВ S_n $(\frac{n}{\lambda}, \frac{\sqrt{n}}{\lambda})$-асимптотически нормальна. ▶.

4 ЦПТ для сумм произвольных независимых СВ

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых и не обязательно одинаково распределенных СВ с конечными $M(\xi_k) = a_k$ и $D(\xi_k) = \sigma_k$. Обозначим

$$S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \text{ и } Z_n := \frac{S_n - A_n}{B_n}.$$

Теорема 5. *Если последовательность* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при любом* $\tau > 0$ *удовлетворяет* ***условию Линдеберга***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\tau B_n} (x - a_k)^2 f_k(x)dx = 0, \text{ то}$$

$$P(Z_n < x) \rightrightarrows \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Условие Линдеберга представляет собой своеобразное требование равномерной малости слагаемых $\frac{\xi_k - a_k}{B_n}$ в Z_n.

Теорема 6 (Теорема Ляпунова)**.** *Если для последовательности* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *можно подобрать такое число* $\delta > 0$*, что выполняется* ***условие Ляпунова***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M(|\xi_k - a_k|^{2+\delta}) = 0, \text{ то}$$

$$P(Z_n < x) \rightrightarrows \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Список литературы

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей

[2] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей

[3] Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики

[4] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения

Адилов Санжар. Ташкент 2018