Билет 10. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Степенной ряд и область его сходимости *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида 1 или 2

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...\mathbf{(1)},$$

где $a_0, a_1, a_2, ...a_n, ...$ – коэффициенты ряда .

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ – степенной ряд с центром разложения в точке x_0 **(2)**

Сделали замену : $t = x - x_0$. Получили : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Краткое док-во основных теорем. Более полное смотри в дополнении .

Теорема Абеля .

Формулировка . Если степенной ряд сх-ся $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сх-ся при $x = x_1 \neq 0$, то он сх-ся абсолютно для $\forall x : |x| < |x_1|$, если степенной ряд расх-ся при $x = x_2$, то он расходится при $\forall x : |x| > |x_2|$.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сх-ся в какой-то точке x_1 , то он сходится при $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ расходится в какой-то точке x_2 , то он расходится $\forall x \in (-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$

Док-во

1.Любой степенной ряд сх-ся при $x = 0$, поэтому далее рассматриваем $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.

$\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$ $|a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot x^n \cdot \dfrac{|x_1^n|}{|x_1^n|}| = |a_n \cdot x_1^n| \cdot |\dfrac{x}{x_1}|^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_1^n$ сх-ся $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot x_1^n = 0 \Rightarrow \exists C : |a_n \cdot x_1^n| < C \ \forall n$ (так сх-ся последовательность ограничена)

Значит $|a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot x_1^n| \cdot |\dfrac{x}{x_1}|^n < C|\dfrac{x}{x_1}|^n$. Так как $|\dfrac{x}{x_1}|^n < 1$ то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n|$ сх-ся так как сх-ся ряд с большими положительными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C \cdot |\dfrac{x}{x_1}|^n$

2.Предположим , что $\exists x \in (-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сх-ся . Тогда по первому пункту в x_2 он также сх-ся , а это противоречит условию .Значит при $(-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ расходится .

Следствие :

Пусть $A = sup\{|x_1|\}$ (такие x_1 , что ряд сх-ся) ,$B = inf\{|x_2|\}$ (такие x_2 , что ряд расх-ся) $\Rightarrow A = B$ $\forall x \in (-A, A)$ ряд сх-ся и $\forall x \in (-\infty, A) \cup (A, +\infty)$ ряд расх-ся . A – радиус сходимости . Будем обозначать его R .

Утв.1 Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сх-ся в точке $x \neq 0$. Тогда этот ряд абсолютно сх-ся в каждой точке числовой прямой , либо $\exists R > 0$ такое что , ряд сх-ся абсолютно при $|x| < R$ и расх-ся при $|x| > R$.

Определение

Интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ наз-ся интервал $(-R, R)$, где $R > 0$, такой что в каждой точке $x \in (-R, R)$ ряд абсолюно сх-ся , а в точках $x : |x| > R$ ряд расходится .Число R радиус сходимости степенного ряда . **На концах интервала ряд может как сх-ся , так и расходится**

Теорема 1 (Коши-Адамара)

1.Если $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограничена , то радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = R = 0$

2.Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = +\infty$

3.Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} = \dfrac{1}{R} \in (0, +\infty)$, то R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Док-во

1. $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограниченна $\Rightarrow \forall x \neq 0$ $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot x$ – неограничена $\Rightarrow |a_n x^n|$ — неограничена $\Rightarrow$ общий член $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не стремится к 0 $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится .

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \forall x \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot x = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ |\sqrt[n]{|a_n|} \cdot x| < \varepsilon \Rightarrow |a_n x^n| < \varepsilon^n$. Возьмем $|\varepsilon| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится так как сходится ряд с большими положительными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n$. А так как сходится $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \Rightarrow$ сх-ся $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

3.$\forall x \in (-R; R)$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} = |x| < \dfrac{1}{R} < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится по признаку Коши $\Rightarrow$ сх-ся и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

При существовании конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ $(0 < L < +\infty)$ радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ $(x \neq x_0)$ можно найти по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Док-во Рассмотрим ряд

$$|a_0| + |a_1 \cdot x| + |a_2 \cdot x^2| + ... + |a_n \cdot x^n| + ... = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n|$$

Применим к ряду признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot x^{n+1}|}{|a_n \cdot x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x^{n+1}|}{|a_n| \cdot |x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot L \Rightarrow$$

ряд будет сх-ся (расх-ся) если $|x| \cdot L < 1$ $(|x| \cdot L > 1) \Rightarrow$ степенной ряд сх-ся абсолютно при $x : |x| < \dfrac{1}{L}$. По определению радиуса сходимости получим $R = \dfrac{1}{L}$ т.е. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Радиус сходимости степенного ряда можно также найти по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ $(0 < L < +\infty)$

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^n$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|(-1)^{n-1} \cdot n|}{|(-1)^n \cdot (n+1)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ ряд абсолютно сх-ся на $-1 < x < 1$

Исследуем на концах : $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot (-1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-n)$. Для него не выполнен необходимый признак сходимости : $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) \neq 0$. $x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n$. Для него $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} n \Rightarrow$ ряд расходится .

Теорема 2

Пусть для $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ $R > 0$. Тогда :

1.$\forall r \in (0,R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r,r]$

2. $S(x) \in C(-R,R)$

3. $\forall x_0, x \in (-R,R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n \cdot t^n dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$

4. $S(x) \in C^{\infty}(-R,R)$

Док-во

1.$\forall x \in [-r,r]$ $|a_n x^n| \le |a^n| \cdot r^n$ $r \in (0,R) \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сх-ся $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n| \rightrightarrows$ на $[-r,r] \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r,r]$

2.$\forall r \in (0,R)$ $\forall x \in [-r,r]$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_n \rightrightarrows S(x), a_n x^n \in C[-r,r] \Rightarrow S(x) \in C[-r,r]$ В силу произвольности выбора r $S(x) \in C[-R,R]$

3.Следует из следующей теоремы

если $f(x) \in C(a,b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на (a,b) , то $\forall x_0, x \in (a,b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$

4.Сначала докажем , что $S(x) \in C^1(-R,R)$.

Из первого пункта следует $\forall r \in (0,R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r,r]$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \rightrightarrows S(x)'$ на $[-r,r]$ так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow$ ряд из производных тоже имеет радиус сходимости $R \Rightarrow$ по 2 пункту $S'(x) \in C(-R,R)$ Аналочично показывается , что $S''(x) \in C(-R,R)$ и т.д.

Дальше материал по книге Ильина , Позняка

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (1) числовую последовательность

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}(n = 1, 2, ..)(*)$$

Теорема Коши-Адамара (1)

1. Если последовательность (*) не ограничена , то степенной ряд (1) сходится лишь при $x = 0$.

2. Если последовательность (*) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$, то ряд (1) абсолютно сходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \dfrac{1}{L}$ и расходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $x > \dfrac{1}{L}$

3. Если последовательность (*) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$, то ряд (1) абсолютно сходится для $\forall x$

Док-во

1.Пусть последовательность (*) неограничена. Тогда при $x \neq 0$ последовательность $|x| \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ также не ограничена , т.е. у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n , удовлетворяющие неравенству $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ или $|a_n x^n| > 1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости числового ряда $\Rightarrow$ ряд (1) расходится при $x \neq 0$

2. Пусть последовательность (*) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$:

а) Фиксируем сначала любое x удовлетворяющий $|x| < \dfrac{1}{L}$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такой что $|x| < \dfrac{1}{L+\varepsilon}$ По свойству верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n удовлетворяют неравенству : $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ начиная с указанного n справедливо :

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{L+\dfrac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon} < 1 \Rightarrow$ по критерию Коши ряд абсолюно сходится .

б) Фиксируем любой x удовлетворяющий неравенству $|x| > \dfrac{1}{L}$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : |x| > \dfrac{1}{L-\varepsilon}$. По определению верхнего предела из последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n = 1, 2, ..)$ можно выделить подпоследовательность $\{ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ (k=1,2,..) сходящуюся к $L \Rightarrow$ начиная с указанного номера k

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1$$

или $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости ряда (1) — ряд расходится

3. Пусть последовательность (*) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$. Фиксируем произвольное $x \neq 0$. Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n = 1, 2, ..)$ не может быть иметь отрицательных предельных точек $L = 0$ – единственная предельная точка $\Rightarrow$ последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n = 1, 2, ..)$ бесконечно малая $\Rightarrow \dfrac{1}{2|x|} > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: начиная с которого $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \ \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ по признаку Коши ряд абсолюно сходится .

Теорема 2

Для каждого степенного ряда (1) если он не является рядом сходящимся лишь в точке $x = 0$, $\exists R > 0$ (возможно $R = \infty$) такое , что этот ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$

R – радиус сходимости степенного ряда $(-R, R)$ – промежуток сходимости этого ряда.

Формула Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (в случае $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, R = \infty$)

Замечание На концах промежутка в точках $x = R$ и $x = -R$ ряд (1) может как сходится , так и расходится .

Непрерывность суммы степенного ряда

Пусть степенной ряд (1) имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма . Каково бы ни было r : $0 < r < R$ ряд (1) равномерно сходится на сегменте $[-r, r]$, т.е. $|x| \leq r$

Док-во По теореме 2 ряд (1) абсолютно сходится при $x = r$, т.е. сходится ряд $|a_0| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k$. Последний числовой ряд мажорирует ряд (1) при $\forall x \in [-r, r] \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса (Д2) ряд (1) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$.

Следствие В условиях леммы 2 сумма ряда (1) является функцией , непрерывной на сегменте $[-r, r]$ (Д3)

Теорема 3

Сумма степенного ряд внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией .

Док-во

Пусть $S(x)$ – сумма степенного ряда (1) , а R – его радиус сходимости . Фиксируем $\forall x : |x| < R \Rightarrow \exists r : |x| < r < R. \Rightarrow$ по следствию из леммы функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r.r] \Rightarrow S(x)$ непрерывна в точке x .

Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда

Теорема 4

Если $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда (1) , а x – удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости , что и исходный ряд.

Док-во Для $\forall x : |x| < R \; \exists r : |x| < r < R$. По лемме ряд (1) сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$, а значит $\Rightarrow$ на $[0, x]$. Но тогда по Д4 этот ряд можно почленно интегрировать на $[0, x]$. В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ..$$

радиус сходимости которого величина обратная верхнему пределу последовательности .

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}(**)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]$$

Так как верхний предел (**) тот же что и у (*) – теорема доказана .

Теорема 5

Степенной ряд (1) внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно . Ряд , полученный почленным дифференцированием имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный ряд .

Первая часть утверждения (из Д5 и леммы)

Вторая часть : $a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + ... + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + ...$ Радиус сходимости R обратен верхнему пределу последовательеность $\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]$$

Следствие

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд , полученный n - кратный почленным дифференцированием исходного степенного ряда , имеет тот же радиус сходимости , что и исходный ряд

Дополнение

Д0 Св-ва верхнего предела ??

Д1 Критерии сходимости числового ряд Коши и Даламбера см Билет 7

Д2 (Ильин, Позняк часть 2 стр. 21) Функциональный ряд $\rightrightarrows$ на данном множестве , если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом

Д3 (Ильин, Позняк часть 2 стр. 26) Если все члены функционального ряда непрерывны на $[a, b]$ и если указанный ряд сходится $\rightrightarrows$ на $[a, b]$, то и сумма этого ряда непрерывна на $[a, b]$

Д4.(Ильин,Позняк часть 2 стр. 27) . Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x) \rightrightarrows$ на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно , т.е. предел $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ и равен $\int_a^b f(x)dx$

Д5.(Ильин,Позняк часть 2 стр. 29). Пусть каждая функция $f_n(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'_n(x)$, причем последовательность производных $\{f'_n(x)\} \rightrightarrows$ на $[a, b]$, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в хотя бы одной точке x_0 сегмента $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[a, b]$, причем эту последовательность можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно , т.е. всюду на сегменте $[a, b]$ предельная функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, являющуюся предельной функцией последовательности $\{f'_n(x)\}$