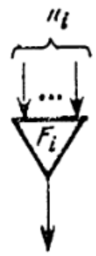
Имеется конечное множество F объектов F_i $(i = 1, \ldots, r)$, называемых *элементами*. Каждый элемент F_i имеет n_i входов и один выход. Элемент F_i графически изображается так, как указано на рис.



Схемой из функциональных элементов с n входами и p выходами называется ориентированный граф без циклов, образованный с помощью элементов из множества F путем применения операций объединения, присоединения и расщепления. Входам и выходам этого объекта приписаны различные буквы x_{i_1},..., x_{i_n} и z_{j_1},..., z_{j_p} соответственно из алфавитов X и Z. Полученную таким образом схему будем обозначать через $\Sigma(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; z_{j_1}, ..., z_{j_p})$

Пусть $\Sigma(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; z_{j_1}, ..., z_{j_p})$ — схема из функциональных элементов. Сопоставим ей систему уравнений (функций) алгебры логики

$$z_1 = f_1(x_1, ..., x_n)$$

$$...$$

$$z_p = f_p(x_1, ..., x_n)$$

называемую также проводимостью данной схемы. Для этого каждому элементу F_i из множества F ставится в соответствие логический оператор $f_i^0(..., ..., ...)$, имеющий n_i мест и задаваемый булевой функцией $f_i^0(y_1, ..., _{n_i})$.

Число L(Σ) будем называть *сложностью схемы.* В дальнейшем схемы будем называть минимальными, если они состоят из минимального количества элементов.

Соединением S данных входов, выходов и элементов называется геометрическая фигура, состоящая из этих объектов и обладающая следующими свойствами:

1) каждый вход элементов подключен либо ко входу, либо к выходу элемента;

2) каждый выход подключен либо ко входу, либо к выходу элемента

Лемма. Число S^*(n, p, h) соединений с данными входами x_{i_1},..., x_{i_n}, данными выходами z_{j_1},..., z_{j_p} и содержащих h Ф. Э., занумерованных числами от 1 до h, не превосходит

$$r^h(n+h)^{hv+p}$$

, где v = $\underset{1 \le i \le r}{max}\ n_i$

Доказательство. Каждый из h занумерованных элементов можно выбрать r способами, а каждый из его входов можно подключить либо к одному из входов x_{i_1},..., x_{i_n} либо к выходу одного из h элементов, т. е. вход элемента может быть подключен n + h способами. Всего для элемента имеется не более $r(n+h)^v$ возможностей. Очевидно, что каждый из выходов z_{j_1},..., z_{j_p} может быть подключен n + h способами. Поэтому

$$S^*(n,p,h) \le r^h(n+h)^{hv+p}$$

Теорема. Число S_0(n, p, h) минимальных схем из Ф. Э. с данными входами x_{i_1},..., x_{i_n}, данными выходами z_{j_1},..., z_{j_p} и содержащих h Ф. Э., удовлетворяет неравенству

$$S_0(n,p,h) \le \frac{1}{h!}r^h(n+h)^{hv+p}$$

Доказательство. Очевидно, что в минимальной схеме на выходах разных элементов получаются разные функции от переменных x_{i_1},..., x_{i_n} (иначе один из таких элементов можно было бы удалить из схемы, и, изменив некоторые соединения в ней, сохранить ее функционирование). Благодаря этому все h! соединений с занумерованными элементами, которые порождаем каждая минимальная схема, различны. Отсюда и из предыдущей леммы следует неравенство теоремы.

Функция L(n) вида

$$L(n) = \underset{f \in P^{(n)}}{max} L(f)$$

называется функцией Шеннона, где $P^{(n)}$ - множество всех функций от n переменных

Теорема (о нижней оценке). $L(n) \succeq 2^n/n$.

Доказательство. Число минимальных схем из Ф. Э. с n входами и одним выходом (p = 1), содержащих ровно h элементов в рассматриваемом базисе (v = 2, r = 3), т. е.

$$S_0(n,1,h) \le \frac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+1}$$

Обозначим число минимальных схем из Ф. Э. с данными входами $x_1, ..., x_n$, данными выходами $z_1, ..., z_p$, содержащих не более h элементов, через S(n, p, h). Тогда

$$S(n,p,h) = \sum_{i=0}^{h} S_0(n,p,i)$$

Оценим сверху S(n, 1, h). Мы имеем

$$S(n,1,h) = \sum_{i=0}^{h} S_0(n,1,i) \le \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{i!}3^i(n+i)^{2i+1} \le (h+1)\frac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+1} \le \frac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+2}$$

Если h > n, то

$$S(n,1,h) < \frac{3^h(2h)^{2h+2}}{(h/e)^h} = 4h^2(12e)^h h^h < (ch)^h$$

, где c - некоторая константа Положим h = $[2^n/n]$ (при этом условие h > n выполняется, начиная с n = 5) и оценим сверху число минимальных схем из Ф. Э. сложности не более h (при $n \ge 5$). Мы имеем

$$S(n,1,h) \le (c\frac{2^n}{n})^{2^n/n}$$

и, значит, минимальными схемами сложности не более h может быть реализовано не более $(c\frac{2^n}{n})^{2^n/n}$ булевых функций от n переменных.

Рассмотрим выражение

$$log_2\frac{(c\frac{2^n}{n})^{2^n}}{2^{2^n}} = \frac{2^n}{n}(log_2c + n - log_2n) - 2^n = \frac{2^n}{n}(log_2c - log_2n) \to -\infty(n \to \infty)$$

Следовательно, при достаточно большом n числитель будет меньше знаменателя. Значит, минимальных схем сложности не более h не хватает для реализации всех булевых функций от n переменных, и поэтому существуют функции от n переменных, которые не могут быть реализованы со сложностью, меньшей или равной

$$h = [\frac{2^n}{n}]$$

т. е. при достаточно больших n

$$L(n) > 2^n/n$$

Теорема доказана.

Определение. Многополюсник из Ф. Э., имеющий n входов и s выходов, называется *универсальным* для данного множества функций, если для каждого $i(1 \le i \le s)$ в многополюснике найдется выход $\tau(i)$ такой, что на нем реализуется функция $f_i(x_1, ..., _n)$.

Лемма. Для любого n можно построить универсальный многополюсник U_n для множества всех булевых функций от n переменных $x_1, ..., _n$ и

$$L(U_n) \le 2 \cdot 2^{2^n}$$

Доказательство. Построение многополюсника U_n будем осуществлять индуктивным способом.

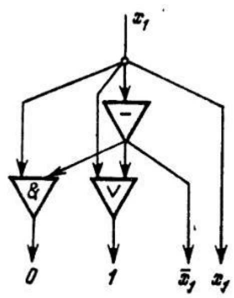


*Рис.*1

Базис индукции ($n = 1$). В качестве U_1 возьмем многополюсник, изображенный на рис 1. Мы имеем $L(U_1) = 3 \leq 2 \cdot 2^{2^1}$. *Индуктивный переход.* Предположим, что построен универсальный многополюсник U_{n-1} для множества всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, ..., x_{n-1}$, и $L(U_{n-1}) \leq 2 \cdot 2^{2^{n-1}}$. Рассмотрим разложение
$f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = x_n f'(x_1, ..., x_{n-1}) \vee \overline{x_n} f''(x_1, ..., x_{n-1})$.
Множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, ..., x_n$, разобьем на три непересекающихся класса. I. $f' \equiv f'' \equiv 0$. Этот класс содержит одну функцию $f \equiv 0$. II. Ровно одна из функций f' или f"тождественно равна 0. В этом классе содержатся функции f вида

$$f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = x_n f'(x_1, ..., x_{n-1})(f'' \equiv 0)$$

или

$$f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \overline{x_n} f''(x_1, ..., x_{n-1}))(f' \equiv 0)$$

т.е. $2(2^{2^{n-1}} - 1)$ функций. III. Все остальные функции, т. е. функции f,у которых

$$f' \not\equiv 0, f'' \not\equiv 0$$

В этом классе имеется

$$2^{2^n} - 2(2^{2^{n-1}} - 1) - 1$$

функций.

На рис. 2 изображен многополюсник U_n. Здесь выходы многополюсника U_{n-1} занумерованы числами $1, ..., 2^{2^{n-1}}$, причем считается, что на выходе 1 реализуется константа 0.
Выходы многополюсника U_n разбиты на три класса в соответствии с разбиением множества всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, ..., x_n$.
Данный многополюсник содержит:

а) подсхему U_{n-1} и вне ее еще

б) один инвертор,

в) $2(2^{2^{n-1}}-1)$ конъюнкторов,
г) $2^{2^n}-2(2^{2^{n-1}}-1)-1$ дизъюнкторов. Таким образом,

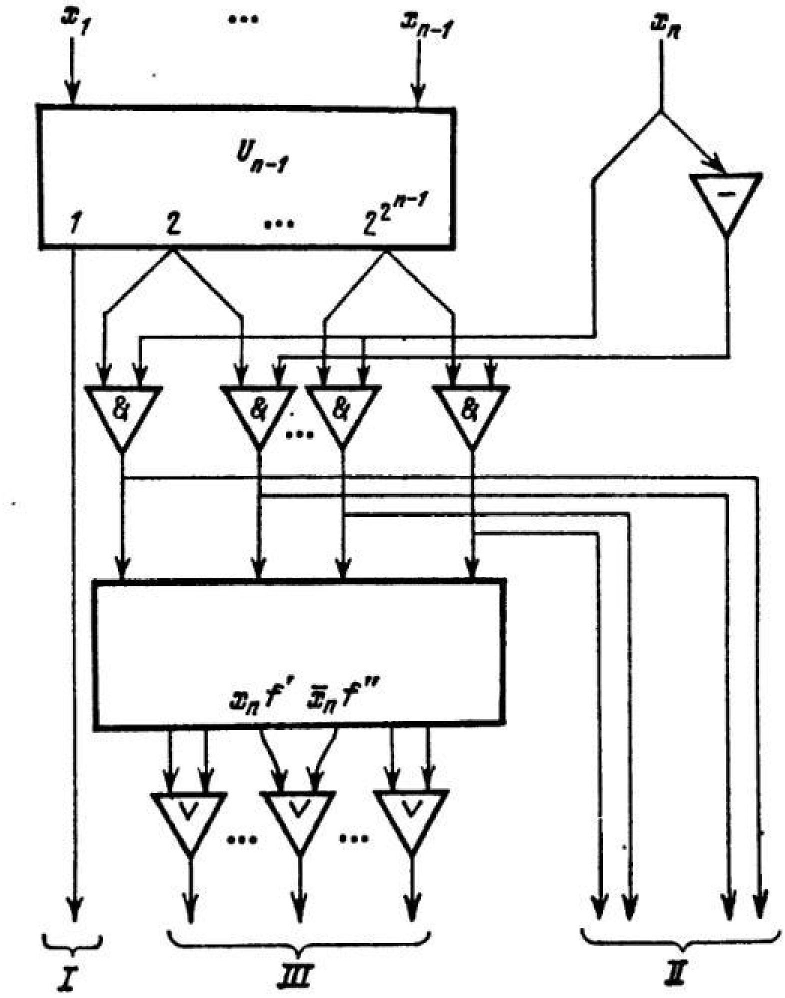


*Рис.*2

Таким образом,

$$L(U_n)=L(U_{n-1})+1+2(2^{2^{n-1}}-1)+2^{2^n}-2(2^{2^{n-1}}-1)-1$$

Лемма доказана.

Теорема (о верхней оценке). Существует метод синтеза, который для каждой булевой функции $f(x_1,...,_n)$ позволяет построить схему из Ф.

Э. сложности $L(f)$ и

$$L(f) \preceq 8\frac{2^n}{n}$$

Доказательство.

Возьмем разложение $f(x_1, ..., x_n) = \underset{(\delta_1,...,\delta_k)}{\vee} x_1^{\delta_1}\&...\&x_k^{\delta_k}\&f(\delta_1, ..., \delta_k, x_{k+1}, ..., x_n)$

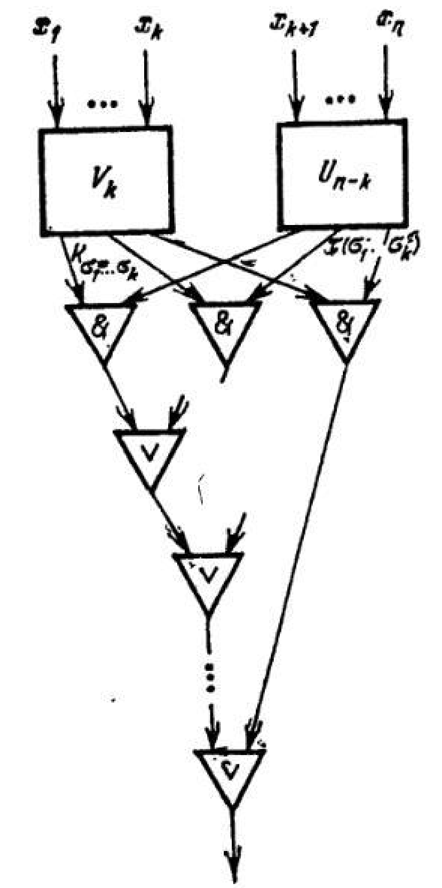


*Рис.*3

Рассмотрим схему Σ, изображенную на рис. 3. V_k — многополюсник, универсальный для множества всех конъюнкций $K_{(\delta_1,...,\delta_k)} = x_1^{\delta_1}\&...\&x_k^{\delta_k}$

U_{n-k} — многополюсник, универсальный для множества всех булевых функций, зависящих от переменных $x_{k+1}, ..., x_n$. Через $\tau(\delta_1, ..., \delta_k)$ обозначен его выход, на котором реализуется функция $f(\delta_1, ..., \delta_k, x_{k+1}, ..., x_n)$.

Легко видеть, что данная схема Σ_f реализует функцию $f(x_1, ...,_n)$ в соответствии с приведенным выше разложением. Оценим сложность Σ_f:

$$L(\Sigma_f) \leq L(V_k)+L(U_{n-k})+2\cdot2^k-1 \leq 2\cdot2^k+k-4+2\cdot2^{2^{n-k}}+2\cdot2^k-1 = 4\cdot2^k+2\cdot2^{2^{n-k}}+k-5$$

Подберем параметр k таким образом, чтобы правая часть этого неравенства стала возможно меньше. Так как нас интересует порядок величины $L(f)$ то, вместо минимума правой части, который в дискретном случае вычисляется сложно, мы возьмем значение правой части при $m = [log_2(n^-21og_2n)]$, где $m = n^-k$. Это значение подбирается, исходя из следующих соображений: с ростом k член $4 \cdot 2^k$ возрастает, а член $2 \cdot 2^{2^{n-k}}$ убывает, и минимум достигается, когда оба члена становятся близкими друг к другу. Мы имеем

$$\frac{1}{2}(n - 2\log n) < 2^m < (n - 2\log n)$$

$$L(f) \preceq 4\frac{2^n}{2^m} + 2 \cdot 2^{2^m} \preceq \frac{4 \cdot 2^n}{\frac{1}{2}(n - 2\log n)} + 2\frac{2^n}{n^2} \preceq 8\frac{2^n}{n}$$