Билет 12
тема: "Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора"

Интегрирование ФКП и свойства интегралов

Интегралом от функции комплексного переменного по дуге $\cup AB$ линии L называется предел последовательности интегральных сумм:

$\int\limits_{\cup AB} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle \mathrm{z_k}$

где ξ_k – точка, произвольно выбранная на дуге $\cup z_{k-1}z_k$ разбиения кривой; $\triangle z_k$ – приращение аргумента функции на этом участке разбиения, $\lambda = \max_k |\triangle z_k|$ - шаг разбиения; $\triangle z_k$ – длина хорды, соединяющей концы дуги $\cup z_{k-1}z_k$.

Свойства интегралов

1. $\int\limits_{\cup AB} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\cup BA} f(z)\mathrm{d}z$

2. $\cup AB = L \qquad \int\limits_L cf(z)\mathrm{d}z = c\int\limits_L f(z)\mathrm{d}z$

3. $\int\limits_L [f_1(z)+f_2(z)]\mathrm{d}z = \int\limits_L f_1(z)\mathrm{d}z + \int\limits_L f_2(z)\mathrm{d}z$

4. Если $L = L_1 + L_2$; $\int\limits_L f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{L_2} f(z)\mathrm{d}z$

5. Если ФКП яв-ся ограниченной функцией, т.е. $|f(z)| < M$, где $M = max\{f(z)\}, \forall z \in L$, то контурный интеграл ограничен следующим значением $|\int\limits_L f(z)\mathrm{d}z| \leq M \times L$, где L - длина линии

Теорема Коши для односвязной области

Если функция $f(z)$ аналитичнав односвязной области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$, взятый вдоль границы С этой области, равен нулю:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad (9)$$

Доказательство

Предположим, что С - "звездный"контур, т.е. $\exists$ точка z_0 такая, что $\forall$ луч с вершиной в этой точке пересекает С в одной и только одной точке. Без ограничения общности можно предполагать, что $z_0 = 0$ (это достигается сдвигом плоскости z), тогда кривую С можно задать уравнением $z = r(\varphi)e^{i\varphi}$, где $r(\varphi)$ - однозначная ф-я .

C_λ - контур, определяемый уравнением $\xi = \lambda z = \lambda r(\varphi)e^{i\varphi}$, $0 < \lambda < 1$(рис.19). Т.к. C_λ лежит внутри D, то по теореме Коши

$$\int_{C_\lambda} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \qquad (10)$$

Но когда точка ζ описывает C_λ, точка $z = \frac{1}{\lambda}\zeta$ описывает C, поэтому равенство (10) можно переписать в виде

$$\int_C f(\lambda z)\, d(\lambda z) = \lambda \int_C f(\lambda z)\, dz = 0$$

и, следовательно,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \{f(z) - f(\lambda z)\}\, dz. \tag{11}$$

Так как функция $f(z)$ равномерно непрерывна в $\bar{D}$ (см. п. 5), то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любой пары точек z, ζ, удовлетворяющих неравенству $|z - \zeta| < \delta$, будет справедливо неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Пусть l — длина контура C и $R = \max r(\varphi)$; возьмем $\lambda > 1 - \frac{\delta}{R}$, тогда для любой пары точек z и $\zeta = \lambda z$ будем иметь $|z - \zeta| = (1 - \lambda)|z| \leqslant \leqslant \frac{\delta}{R}|z| \leqslant \delta$, следовательно, будет выполняться (12) и из (11) получим:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| < l\varepsilon.$$

Так как здесь ε сколь угодно мало и интеграл не зависит от ε, то этот интеграл равен 0. Для звездных контуров теорема доказана.

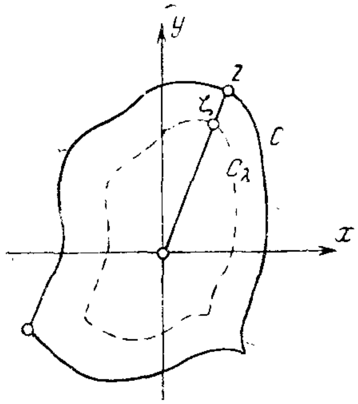

Рис. 19.

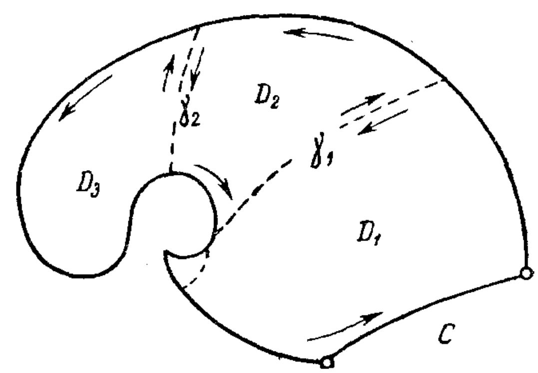

Рис. 20.

Пусть теперь C — произвольная кусочно-гладкая кривая. Если C имеет точки возврата, то мы выбросим из области D круги малого радиуса ε с центрами в этих точках, так, чтобы граница полученной области D_ε уже не имела таких точек (рис. 20). Проводя внутри D_ε конечное число линий γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), эту область можно, очевидно, разбить на части D_k, ограниченные звездными линиями C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) *). По доказанному выше,

*) Легко видеть, что отрезок кусочно-гладкой кривой в достаточно малой окрестности ее точки, не являющейся точкой возврата, представляет собой звездную кривую. В окрестности же точки возврата кривая может и не быть звездной (например, кривая, составленная из ветвей парабол $y = x^2$ и $y = 2x^2$, для которых $x \geqslant 0$, в окрестности точки $z = 0$).

интеграл вдоль ∀ линии C_k равен нулю:

$$\int\limits_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{(k=0,1,2,...,n)} \qquad (13)$$

Предположим, что линии C_k проходятся в одном, например положительном направлении, и сложим все уравнения (13). Т.к. у нас каждая линия γ_k проходится дважды и притом в противоположных направлениях, то все интегралы вдоль γ_k взаимно сокращаются. Остальные части границ C_k составляют границу C_ε области D_ε и ⇒ интеграл вдоль этой границы равен нулю:

$$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Остается показать, что равен нулю интеграл вдоль границы C области D; но это следует немедленно из того, что C и C_ε отличаются лишь на конечное чилсо малых дуг и т.к. ф-я $f(z)$ ограничена, то ее интеграл вдоль этих дуг также мал. Таким образом, интеграл вдоль C сколь угодно мало отличается от интеграла вдоль C_ε , который равен 0, и ⇒ сам равен нулю. ■

Теорема Коши для многосвязной области

Для многосвязных областей Теорема Коши, вообще говоря не верна. В самом деле, ф-я $f(z) = 1/z$ аналитична всюду в кольце $\frac{1}{2} < |z| < 2$, однако интегралы от -1 до 1 вдоль верхней и нижней половин окружности |z| = 1 отличаются друг от друга. Действительно, вдоль верхней полуокружности C_1, где $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, имеем:

$$\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = -i\pi,$$

а вдоль нижней полуокружности C_2, где $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$:

$$\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\pi.$$

Для обозначения интеграла от a до b вдоль пути C в многосвязной области мы будем поэтому иногда употреблять символ

$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)dz. \qquad (1)$$

Если в многосвязной области кривые C_1 и C_2 с общими концами расположены так, что ограничивают одну односвязную область, принадлежащую D, то интегралы вдоль кривых равны. Следовательно *значение интеграла от аналитической функции в многосвязной области D не изменяется, если контур интегрирования непрерывно* *деформируется так, что его концы остаются неподвижными и он все время остается внутри D.*

Пусть в многосвязной области D даны точки a и b и простая*) кривая C_0, их соединяющая. Пусть C — любая другая кривая, соединяющая эти точки (рис. 21, *а*). Согласно только что сделанному замечанию можно, не изменяя величины интеграла, деформировать кривую C в другую, лежащую в области D кривую $\tilde{C}$, состоящую из: 1) кривой $\tilde{C}_0$, которая вместе с C_0

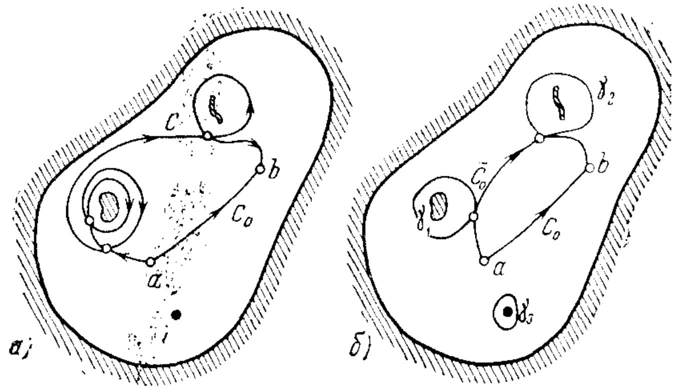

Рис. 21.

ограничивает односвязную область, принадлежащую D; 2) совокупности простых замкнутых кривых γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), каждая из которых содержит внутри себя одну связную часть границы D (рис. 21, *б*). При этом кривые γ_k могут проходиться несколько раз и в различных направлениях (на рис. 21, *б* кривая γ_1 проходится трижды по часовой стрелке, а γ_2 — один раз против часовой стрелки). Для удобства мы условимся обозначать через γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) кривые, проходимые против часовой стрелки; кроме того, мы введем еще кривые γ_k ($k = m + 1, \ldots, n$), окружающие связные части границы области D и не входящие в состав $\tilde{C}$ (как γ_3 на рис. 21, *б*).

Введем обозначения

$$\Gamma_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

при непрерывной деформации γ_k, при которой эти кривые остаются внутри D, интегралы (2) не изменяются, следовательно, величины Γ_k определяются лишь функцией $f(z)$ и областью D. Пусть N_k — целые числа, указывающие, сколько раз и в каком направлении проходится γ_k в составе кривой $\tilde{C}$; эти числа могут быть положительными, отрицательными или равными нулю

*) То есть без точек самопересечения.

По предыдущему и свойствам интегралов имеем:

$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)dz = \int\limits_{a^{\tilde{C}}}^{b} f(z)dz = \int\limits_{a^{C_0}}^{b} f(z)dz + N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + ... + N_n\Gamma_n. \qquad (3)$$

Γ_k - периоды интеграла от функции $f(z)$ в многосвязной области D.

Заметим.

Теореме Коши предыдущего пункта можно придать иной смысл так, чтоб она оставалась справедливой и для многосвязных областей. Пусть

функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной кривыми $C_0, C_1, \ldots, C_n$ (рис. 23), и непрерывна в $\bar{D}$. Проведем разрезы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, обращающие D в односвязную область D^*, и обозначим через C^* границу этой области — кривую, состоящую из участков кривых C_k и кривых γ_k, причем последние проходятся дважды в противоположных направлениях (отмечены стрелками на рис. 23).

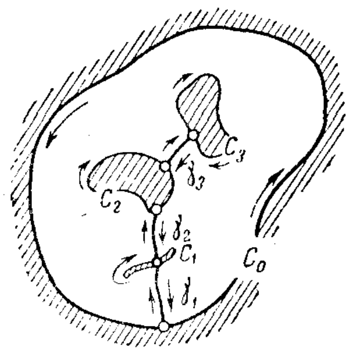

Рис. 23.

Функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D^* и непрерывна в $\bar{D}^*$; следовательно, по теореме 5 предыдущего пункта и свойствам интегралов (9) и (10) п. 11.

$$\int\limits_{C^*} f(z)\,dz = \int\limits_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,dz = 0 \qquad (8)$$

(интегралы вдоль γ_k взаимно сокращаются, а остальная часть C^* совпадает с $\sum\limits_{k=0}^{n} C_k$). При этом мы должны считать, что кривые C_0 и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ проходятся так, чтобы область D оставалась все время с одной стороны (например, на рис. 23 — слева). Таким образом, для областей любой связности теорема Коши справедлива в следующей форме:

Теорема. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$, то ее интеграл вдоль границы этой области, проходимой так, что область D все время остается с одной стороны, равен нулю.*

Примеры

Вычислить $\oint\limits_C \frac{dz}{z}$, где C - окружность $|z| = 1$

Ответ: 2πi

Вычислить $\oint\limits_C \frac{dz}{z}$, где C - граница области $1 < |z| < 2$

Ответ: $\frac{4}{3}$

Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z) \in O(D) \cap C(D)$ (аналитична в замкнутой области D (односвязной или многосвязной)), где ∂D - кусочно гладкая. Тогда

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$.

Доказательство

z - фиксируем. $z \in D$

$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z}$

$f \in O(D)$

$f - z \in O(C)$

$\varphi \in O(D \setminus \{z\})$

$\overline{V} = \{|\xi - z| \leq \varepsilon\}$

$\overline{V} \cap \partial D = \emptyset$

$\varphi \in O(D \setminus \overline{V})$, $\partial D \cup \{|z - \xi| = \varepsilon\}$

$\oint\limits_{\partial(D \cup \overline{V})} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = 0$; $\oint\limits_{\partial D} - \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} = 0$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(z) d\xi}{\xi - z}$

$f(\xi) - f(z) \rightrightarrows 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z) d\xi}{\xi - z} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

$\oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{|d\xi|}{\xi - z} = \frac{1}{\varepsilon} \oint\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} |d\xi| = \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon}$ ■

Будут ли непрерывны частные производные?

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)}$. z фиксируем

$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}$, $f'(z)$ - непрерывна в D

$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^3} \cdots$

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$ - непрерывна ■

Примеры

Пример 1. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, где C - окружность с радиусом 3/2 и центром в точке 2.

Решение. В качестве числителя подынтегрального выражения в интегральной формуле Коши следует взять функцию $f(z) = \frac{e^z}{z}$, которая аналитична в круге, ограниченном C. Применяя интегральную формулу Коши, получим

$\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-3)} = \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-3} = 2\pi i f(3) = \frac{2\pi e^3 i}{3}$.

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$ где C — произвольный замкнутый контур, однократно обходящий точку i в положительном направлении.

Решение. Функция $f(z) = e^z$ аналитична в области, ограниченной контуром C и в силу формулы для производной, находим

$\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = -\pi sin 1 + i\pi cos 1$

Ряд Тейлора

Различают числовые и функциональные ряды. Из всевозможных функциональных рядов большое распространение имеют степенные ряды:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ...$

Радиус сходимости К можно определить, пользуясь признаками Даламбера или Коши: $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$, $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}|$

Ряд сходится при |z| < R , т.е. в круге радиусом R . Более общий вид степенного ряда — ряд Тейлора

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Кругом сходимости этого ряда является круг $|z - z_0| < R$

Примеры

Пример 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$ Ее круг сходимости z <1. Внутри этого круга прогрессия сходится абсолютно, а во всяком замкнутом круге z $\leq$ q <1– равномерно. Как и в действительном анализе, сумма прогрессии внутри ее кругасходимости равна функции $\frac{1}{1-z}$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + ...$

Его радиус сходимости равен $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$

Следовательно, кругом сходимости данного ряда будет вся плоскость z

Теорема Лиувилля

Пусть f голоморфна во всей комплексной плоскости C и существует $M > 0$ такое, что

$|f(z)| \leq M$ для всех $z \in C$.

Тогда f(z) $\equiv const$

Доказательство

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \Rightarrow |c_n| \leq \frac{M}{r^n}$

Устремляем $r \to \infty$, получаем, что $c_n = 0 \Rightarrow f(z) = c_0 \equiv const$