Билет 20. Теорема о фундаментальной системе решения для линейных систем.

Система дифференциальных уравнений называется линейной, если она линейнна относительно всех неизвестныхф функций и их производных.

Нормальная форма записи системы линейных уравнений

Определение 1. *Система n линейных уравнений первого поряка в нормальной форме:*

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + b^i(t), i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Будем считать, что $a_{ij}(t), f_i(t)$ - непрерывные функции на интервале (a,b), причем не исключается случай, где $a = \infty, b = \infty$.

Матричная форма записи системы:

$$\dot{x} = Ax + b$$

где A = A(t) - матрица размерности $n \times n$, b=b(t)- n-мерная вектор-функция:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^n \end{pmatrix}$$

b(t) - свободный член системы (1). Если свободный член равен нулю, то система называется однородной и принимает вид:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

Задача Коши для системы линейных диффур.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b(t) \\ x^1(t_0) &= x^1_0 \\ x^2(t_0) &= x^2_0 \\ &\dots \\ x^n(t_0) &= x^n_0 \end{aligned} \tag{3}$$

где (3) - начальные условия задачи, а t_0, x_0 - начальные значения задачи Коши.

Теорема 1. *Линейная комбинация решений однородной линейной системы (2) также является решением этой системы*

Доказательство.

$$(cx)' = c\dot{x} = cA(t)x = A(t)(ax), a = const,$$

$$(x_1 + x_2)' = \dot{x_1} + \dot{x_1} = A(t)x_1 + A(t)x_2 = A(t)(x_1 + x_2)$$

Из этих равенств следует доказательство теоремы. □

Теорема 2. *Разность любых двух решений неоднородной системы уравнений (1) есть решение однородной системы (2).*

Доказательство. Пусть $x_1(t), x_2(t)$ - решения системы (1). Тогда

$$\dot{x_1} = A(t)x_1 + b(t),$$

$$\dot{x_2} = A(t)x_2 + b(t)$$

Вычтем из первого равенства второе.

$$(x_1 - x_2)' = A(t)(x_1 - x_2)$$

Значит $(x_1 - x_2)$ - решение однородной системы. □

Теорема 3. *Если* $x_1(t), x_2(t)$ *- решения систем уравнений*

$$\dot{x_1} = A(t)x_1 + b_1(t)$$

$$\dot{x_2} = A(t)x_2 + b_2(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

Тогда x(t) - решение системы уравнений

$$\dot{x} = A(t) + b_1(t) + b_2(t)$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Лемма 1. *Пусть* $A = (a^i_j)$ *- квадратная матрица n-ого порядка,* $|a^i_j| \leq K$. *Пусть* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *- произвольный n-мерный вектор,* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), v^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j u_j$. *Тогда*

$$|v| \leq n^2 K |u|$$

Доказательство. Очевидно, что $|u^i| \leq \parallel u \parallel$

$$|v^i| = |\sum_{j=1}^{n} a^i_j u^j| \leq nK \parallel u \parallel$$

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (nK|u|)^2} = \sqrt{n^3 K^2 |u|^2} \leq \sqrt{n^4 K^2 |u|^2} = n^2 K |u|$$

$$|v| \leq n^2 K |u|$$

□

Лемма 2. *Пусть z(t) - n-мерный вектор, непрерывно зависящий от параметра t. Тогда при* $t_0 \leq t_1$ *верно равенство*

$$|\int\limits_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau| \leq \int\limits_{t_0}^{t_1} |z(\tau)| d\tau$$

Доказательство. Известно, что $|u_1 + u_2 + \ldots u_k| \leq |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_k|$.
Согласно определению интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau = \lim \sum_{i=0}^{k-1} z(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Согласно последнему неравенству

$$|\int\limits_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau| \leq \lim \sum_{i=0}^{k-1} |z(t_i)|(t_{i+1} - t_i) = \int\limits_{t_0}^{t_1} |z(\tau)| d\tau$$

$$|\int\limits_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau \leq \int\limits_{t_0}^{t_1} |z(\tau)| d\tau$$

□

Формулировка теоремы существования и единственности

Теорема 4. *Пусть* $\dot{x^i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j + b^i(t)$ *- нормальная линейная система уравнений, где* $a_j(t), b^i(t) \in C[a,b]$ *(a, b могут быть равны* ∞*). Тогда для любых начальных значений* $t_0, x_0 = (x^1_0, x^2_0, \dots, x^n_0), t_0 \in [a,b]$ *существует единственное решение сситемы с этими начальными значениями, ограниченное, на всем интервале [a,b].*

Доказательство. Введем оператор $L : \varphi(t) \longrightarrow \chi(t)$

$$\chi(t) = L\varphi(t)$$

$$\chi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} [A(\tau)\phi(\tau) + b(\tau)$$

$$\varphi(t) = L\varphi(t) \tag{4}$$

эквивалентно системе (1)с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$

$$\varphi(t) = x_0 + \int t_0{}^t \dot{x}(\tau)d\tau = x(t) + x_0$$

Значит, для решения системы достаточно решить операторное уравнение $\varphi(t) = L\varphi(t)$ и доказать единственностсь этого решения.
Пусть $\phi(t), \psi(t) \in C(a,b)$

$$L\varphi(t) - L\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)(\varphi(\tau) - \psi(\tau))d\tau \tag{5}$$

Будем решать методом последовательных приближений(метод Пикара). Выберем сегмент $[c,d] \subset (a,b)$, так чтоб $t_0 \in [c,d]$.
Пусть $u(t) \in C(a,b)$

$$v(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)u(\tau)d\tau \tag{6}$$

По лемме 2 $|v(t)| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |A(\tau)u(\tau)|d\tau$.
Т.к. $a^i_j(t)$ - непрерывные функции на (a,b), то они ограничены на этом (a,b) и $\exists K$: $a^i_j \leq K \forall i,j$. Значит, по лемме 1

$$|A(\tau)u(\tau)| \leq n^2 K|u(\tau)|, \tau \in (c,d)$$

Следовательно,

$$|v(t)| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |A(\tau)u(\tau)|d\tau \leq n^2 K \int\limits_{t_0}^{t} |u(\tau)|d\tau \tag{7}$$

Зададим $\varphi_0(t)$ на (c, d)

$$\begin{gathered} \varphi_1(t) = L\varphi_0(t) \\ \varphi_{i+1}(t) = L\varphi_i(t) \end{gathered} \tag{8}$$

Т.к. $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ непрерывны на (a,b), значит их разность тоже непрерывна и ограничена на (a,b), т.е. $\exists C = const$, такая что

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0| \leq C \tag{9}$$

Из неравенств (5)и (7) получаем

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| = |L\varphi_i(t) - L\varphi_{i-1}(t)| \leq n^2 K \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi_i(\tau) - \varphi_{i-1}(\tau)|d\tau$$

Согласно (9), при i=1:
$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\le n^2KC|t-t_0|$$

i=2:
$$|\varphi_3(t)-\varphi_2(t)|\le n^2K\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)|d\tau=(n^2K)^2C\frac{|t-t_0|^2}{2}$$

$$|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)|\le (n^2K)^iC\frac{|t-t_0|^i}{i!}\le (n^2K)^iC\frac{|d-c|^i}{i!}$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{[n^2K)(d-c)]^i}{i!}$. Он сходится по признаку Даламбера, значит его общий член стремится к 0. Это означает, что последовательность $\varphi_n(t)\rightrightarrows\varphi(t)$ на (c,d). А значит $\forall\varepsilon\exists i$

$$|\varphi_i(t)-\varphi(t)|<\varepsilon, t\in[c,d]$$

В соотношении (8) перейдем к пределу $i\to\infty$. В силу оценки (7) и равномерности функции можно перейти к пределу в правой части.

$$\varphi(t)=L\varphi(t)$$

Значит решение уравнения (4) существует на отрезке [c,d], а т.к. это произвольный отрезок из (a,b), то оно существует на всем (a,b). Т.к. функция $\varphi_i(t)$ определяется через функцию $\varphi_{i-1}(t)$, то она определена и непрерывна на всем (a,b). Теперь докажем единственность.
Возьмем $\varphi(t),\psi(t)$
$$\varphi(t)=L\varphi(t),\psi(t)=L\psi(t)$$

$\varphi(t),\psi(t)\in C[c,d]$, значит их разность ограничена константой C' на отрезке [c,d].

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\le C' \tag{10}$$

Согласно (5) имеем
$$\varphi(t)-\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}A(\tau)(\varphi(\tau)-\psi(\tau))d\tau \tag{11}$$

Согласно (7), (10)
$$|\varphi(t)-\psi(t)|\le n^2K\int\limits_{t_0}^{t}|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau\le n^KC'|t-t_0|$$

Подставим это в правую часть первого неравенства (11)
$$|\varphi(t)-\psi(t)|\le\frac{(n^2K)^2C'|t-t_0|^2}{2!}$$

Снова подставляем в 11
$$|\varphi(t)-\psi(t)|\le\frac{(n^2K)^3C'}{2!}\int\limits_{t_0}^{t}|\tau-t_0|d\tau=\frac{(n^2K)^3C'|t-t_0|^3}{3!}$$

и т.д.:
$$|\varphi(t)-\psi(t)|\le\frac{(n^2K)^sC'|t-t_0|^s}{s!}\le\frac{(n^2K)^sC'|d-c|^s}{s!}$$
Устремим $s\to\infty$. Тогда $|\varphi(t)-\psi(t)|=0$ на [c,d]. Но так как это произвольный отрезок, то и на всем (a,b). А значит, $\varphi(t),\psi(t)$ равны между собой на (a,b). □

Линейная зависимость, независимость систем вектор-функций

Определение 2. *Система решений системы уравнений (2)*

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t) \tag{12}$$

называется линейно зависимой, если существуют константы $c^1, c^2, \dots, c^r$, не равные одновременно 0, такие, что

$$\sum_{i=1}^{r} c^i x_i(t) = 0 \tag{13}$$

Лемма 3. *Пусть x(t) - решений однородной системы уравнений (2) и существует t_0 такая, что $x(t_0) = 0$, тогда $x(t) \equiv 0$ на (a,b).*

Доказательство. Функция $x(t) \equiv 0$ является решением системы (2), так как при подстановке дает верное равенство. Также известно, что существует единственное решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = 0$, а значит оно совпадает с 0 на всем (a, b). □

Утверждение 1

Если система линейно зависима хотя бы в одной точке t_0, то она линейно зависима во всех точках t.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{r} c^i x_i(t_0) = 0, \sum\limits_{i=1}^{r} |c_i| \neq 0$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c^i x_i(t_0)$$

Согласно теореме 1 x(t) - решение уравнения (2). Согласно лемме 3 $x(t) \equiv 0$ на (a,b). А значит система (12) линейно зависима на всем (a,b). □

Пусть задана система n решений $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ однородной системы (2), определенных на [a, b].

$$x_i(t) = x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t) \tag{14}$$

Определение 3. *Определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \dots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & \dots & x_n^2(t) \\ \dots & & & \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} \tag{15}$$

называется определителем Вронского для системы решений $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

Определение 4. *Система из n решений однородной системы (2), линейно независимых на [a, b], называется фундаментальной.*

Теорема 5. *Определитель Вронского W(t)≠0 для всех $t \in [a, b]$, где система решений $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ фундаментальна.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть W(t) = 0, $t_0 \in [a, b]$ Рассмотрим системы линейных однородных уравнений относительно констант $c^1, c^2, \dots, c^n$

$$\begin{aligned} c^1 x_1^1(t) + \dots + c^n x_n^1(t) = 0 \\ \dots \\ c^n x_1^n(t) + \dots + c^n x_n^n(t) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

В векторной форме:

$$c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t) = 0 \tag{17}$$

Определитель системы (16) совпадает с W(t), а W(t) = 0, а значит существует нетривиальное решение $c^1, c^2, \dots, c^n$ (нетривиальное значит хотя бы одна константа не равна 0) системы уравнений (16), а значит в силу (17) система $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ линейно зависима. □

Следствие 1. *$W(t_0) \neq 0 \forall t \in [a,b]$, если $\exists t_0 \in [a,b] : W(t_0) \neq 0$.*

Формула Остроградского-Лиувилля

$\dot{W} = W_1 + W_2 + \ldots + W_k$ по определению дифференцирования определителя, где

$$W_k = \begin{pmatrix} x_1^1 & \ldots & x_n^1 \\ \ldots & & \\ x_1^{k-1} & \ldots & x_n^{k-1} \\ \dot{x}_1^k & \ldots & \dot{x}_n^k \\ x_1^{k+1} & \ldots & x_n^{k+1} \\ \ldots & & \\ x_1^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

В силу (2) $\dot{x}_1^k = \sum\limits_{j=1}^n a_j^k x_1^j, \ldots, \dot{x}_n^k = \sum\limits_{j=1}^n a_j^k x_n^j$. Т.е. k-ая строка W_k - это линейная комбинация строк W(t). Отнимем от k-ой строки 1 строку, умноженную на a_1^k, вторую строку, умноженную на a_2^k, …, (k-1) строку, на умноженную a_{k-1}^k, (k+1) строку, на умноженную a_{k+1}^k, …, n строку, на умноженную a_n^k. Получим

$$W_k = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_n^1 \\ \ldots & & \\ x_1^{k-1} & \ldots & x_n^{k-1} \\ a_k^k x_1^k & \ldots & a_k^k x_n^k \\ x_1^{k+1} & \ldots & x_n^{k+1} \\ \ldots & & \\ x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = a_k^k W_k$$

Тогда

$$\dot{W} = S(t)W, S(t) = \sum_{k=1}^n a_k^k(t) \tag{18}$$

Функция S(t) называется следом матрицы A(t) и обозначается TrA(t)

Решим (18)

$$\frac{dW(t)}{dt} = S(t)W(t)$$

$$\frac{dW}{W} = S(t)dt$$

Проинтегрируем на отрезке $[t_0, t]$

$$lnW(t) - lnW(t_0) = \int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau$$

$$\frac{W}{W(t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau}$$

$$W = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau} \tag{19}$$

Формула (19) называется **формулой Остроградского-Лиувилля**

Из этой формулы также следует, что если $W(t_0) = 0$, то $W(t) \equiv 0$ на всем [a, b].

Следствие 2. *Любое решение x(t) однородной системы (2) есть линейная комбинация ршений фундаментальной истемы решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.*

Структура решения линейных однородных и неоднородных уравнений

Определение 5. *Общим решением линейной ситемы уравнений (1) называется множество всех решений этой системы.*

Теорема 6. *Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ - ФСР однородной системы уравнений (2), тогда формула*

$$x(t) = c^1 x_1(t) + \ldots + c^n x_n(t) \tag{20}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ - произвольные постоянные, дает общее решение этой системы. Множество всех решений системы уравнений (2) образует n-мерное векторное пространство, базисом которого будет любая ФСР.

Доказательство. При любых $c^1, \ldots, c^n$ формула (20) представляет собой решений однородное системы (2), а в силу следствия 2 любое решение системы уравнений может быть записано в виде (20). Поэтому формула (20) дает общее решение системы уравнений. Сумма 2х решений и произведений решения на число есть также решение системы. Кроме того любая ФСР линейно независима и любое решение можно выразить через него. Значит, множество всех решениеи - n-мерное векторное пространство, базисом которого может служить любая фундаментальная система решений. □

Следствие 3. *Пусть $x(t_0)$ - частное решение неоднородной системмы уравнений (1), а $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ - ФСР однородной системы уравнений, тогда формула*

$$x(t) = x_0(t) + c^1 x_1(t) + \ldots + c^n x_n(t) \tag{21}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ - произвольные постоянные, дает общее решение неоднородной системы уравнений (1).

Доказательство. При любых $c^1, \ldots, c^n$ формула (21) представеляет собой решение системы (1). Пусть x(t) - какое-либо решений систеы уравнений (1), то x(t)-$x(t_0)$ - решение однородной системы уравнений (2) и по теореме 6 может быть записано в виде

$$x(t) - x(t_0) = c^1 x_1(t) + \ldots + c^n x_n(t)$$

Следовательно любое решение x(t) системы уравнений (1) представляется в виде (1). □

Теорема 7. *ФСР однозначно определяет нормальную форму линейной однородной системы, т.е. матрицу A(t). Иначе говоря, зная фундаментальную матрицу X(t) системы, можно однозначно восстаовить эту систему уравнений.*

Доказательство. Пусть задана фундаментальная матрица X(t) однородной системы (2). Тогда

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

Умножим это соотношение справа на $X^{-1}(t)$ и получим

$$A(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t)$$

Эта формула однозначно определяет матрицу A(t). □