19. Теоремы о фундаментальной системе решений для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка и методы их интегрирования. Понижение порядка уравнения в случаях, когда заданная функция не зависит от искомой функции и производных от искомой функции до некоторого порядка, не содержит явно независимую переменную искомой функции, уравнение является однородным или обобщенно-однородным.Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Теоремы о линейной зависимости и независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Фундаментальная система функций. Структура решений линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Восстановление дифференциального уравнения по фундаментальной системе. Формула Остроградского- Лиувилля. Дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка и методы их интегрирования

Определение 1. *Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно совокупности величин $y, \frac{du}{dt}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}$ и имеет вид*

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)y^{'} + a_n(x)y = F(x)$$

где $a_i(x) \in C^{(a,b)}$ и $a_0(x) \neq 0$.

Разделим обе части на $a_0(x)$ и введем обозначения $p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}, f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$. Получим уравнение в виде:

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = f(x)$$

В дальнейшем, будем рассматривать его в таком виде (для удобства переобозначив $p_i(x)$ на $a_i(x)$)

Определение 2. *Уравнение*

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = 0$$

будем называть однородным (в противном случае - неоднородным).

Рассмотрим уравнения с постоянными коэффицентами.

1.Чтобы решить уравнение вида

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_ny^{'} + a_ny = 0 \tag{1}$$

нужно составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

и найти все его корни $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

В случае *простых* корней общее решение есть сумма состоящая из слагаемых вида $C_ie^{\lambda_i x}$

В случае *кратных* корней общее решение имеет вид (k - кратность корня)

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + \dots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$$

В случае, когда $a_i \in R$, решение можно записать в вещественной форме даже если $\lambda \in C$. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в общую формулу включаются слагаемые:

В случае *простых* корней

$$C_{m+1}e^{\alpha x}cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}sin\beta x$$

В случае *кратных* корней (k - кратность)

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}sin\beta x \tag{1}$$

P, Q - многочлены (k - 1) степени вида $A + Bx + Cx^2 + ...Dx^{k-1}$

Пример.

$$\begin{aligned} y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0 \\ \lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2, \\ \lambda_4 = 2i, \lambda_5 = -2i \\ y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4cos2x + C_5sin2x \end{aligned} \tag{2}$$

2.Чтобы решить уравнение вида

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_ny^{'} + a_ny = f(x)$$

нужно найти общее решение однородного уравнения и добавить к нему частное решение неоднородного. В данном случае, будем искать частное решение в зависимости от правой части.

Для уравнение с правой частью $P_m(x)e^{\lambda x}$, $P_m(x)$ - многочлен m степени, частное решение имеет вид:

$$y = x^sQ_m(x)e^{\gamma x} \tag{3}$$

s = 0 когда γ не корень характеристического уравнения
s = k, когда γ корень характеристического уравнения, k - его кратность
Подставим y в исходное, приравняем коэффиценты при подобных членач, найдем коэффиценты.

Если в правую часть входят синус и косинус, то разлагаем их по формулам Эйлера:

$$cosbx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, sinbx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{-2i}$$

Если $a_i \in R$, тогда можно обойтись без замен Эйлера
Для уравнений с правой частью

$$e^{\lambda x}(P(x)cos\beta x + Q(x)sin\beta x) \tag{4}$$

можно искать частное решение в виде

$$y = x^se^{\alpha x}(R_m(x)cos\beta x + T_m(x)sin\beta x)$$

s = 0 если $\alpha + \beta i$ не корень хар. уравнения
s = k если $\alpha + \beta i$ корень хар. уравнения (k - кратность)
$T_m(x), R_m(x)$ - многочлены степени равной наибольшей из степеней P и Q.

Пример.

$$\begin{aligned} y^{'''} - 6y^{''} - 9y' = xe^{3x} + e^{3x}cos2x \\ \lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 0 \\ y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3 \end{aligned} \tag{4}$$

Правая часть состоит из 2 слагаемых вида (4)
Для первого слагаемого $\gamma = \alpha + \beta i = 3$
Для второго слагаемого $\gamma = \alpha + \beta i = 3 + 2i$
Т.к. эти числа различны, надо искать отдельные частные решения для того же уравнения, сначала с одним слагаемым в качестве п.ч., потом с другим. Работаем по той же схеме, подставляем оба частных в исходные, находим коэффиценты, общее решение есть общее решение однородного + два частных.

3.Уравнения

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y^{'} + p_n(x)y = f(x)$$

с любой правой частью решаются методом вариации постоянных. Находим общее решение однородного, объявляем константы за функции, подставляем в исходное, находим эти функции и получаем ответ.

2. Методы понижения порядка линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

1.Если уравнение имеет вид:

$$F(x, y^k, y^{k+1}, \ldots y^n) = 0$$

т.е н не входит в него, то порядок можно понизить заменив $y^k = z$

2.Если уравнение имеет вид:

$$F(y, y^{'}, y^{''} \ldots y^n) = 0$$

т.е x не входит в него, то порядок можно понизить заменив $y^{'} = p(y)$

3.Если уравнение однородно относительно y и его производных т.е.при одновременной замене $y, y^{'}, y^{''} \ldots$ на $ky, ky^{'}, ky^{''} \ldots$, то порядок можно понизить заменой $y^{'} = yz$, где z - новая неизвестная.

4.Если уравнение однородно относительно x и y в обобщенном смысле т.е.при одновременной замене x на kx, y на $k^m y$, $y^{'}$ на $k^{m-1}y^{'}$, $y^{''}$ на $k^{m-2}y^{''}$, то порядок можно понизить заменой $x = e^t, y = ze^m t$, где z(t) - новая неизвестная функция.

Число m - найдем на примере. Пусть дано уравнение:

$$2x^4y^{''} - 3y^2 = x^4$$

Приравняем друг другу показатели степеней куда будет входить k

$$4 + (m - 2) = 2m = 4$$

Отсюда m = 2. Далее действуем по плану, хладнокровно и ОСТОРОЖНО.

3. Л.З. и Л.Н.З. системы функций

Определение 3. *Система функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ является линейно зависимой, если существуют константы $c_1, \ldots, c_n$ одновременно не равные 0, такие, что*

$$c_1f_1(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$$

В противном случае, система функций называется Л.Н.З.

4. Определитель Вронского

Определение 4.

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- *определитель Вронского*

5. Теоремы о л.з. и л.н.з. решений

Теорема 1. *Если функции $y_1, \ldots, y_n$ л.з. то определитель Вронского равен 0.*

Доказательство. Пусть функции $y_1, \ldots, y_n$ л.з. т.е. существуют константы одновременно не равные 0 такие, что:

$$\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_n y_n = 0$$

Без ограничения общности, пусть $\alpha_n \neq 0$, тогда:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}$$

Составим систему, продифференциировав всю эту поеботу.

$$\begin{aligned} y_n' &= \beta_1 y_1' + \ldots + \beta_{n-1} {y_{n-1}}' \\ &\ldots \\ y_n^{(n-1)} &= \beta_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}(n-1) \end{aligned}$$

Умножим в (5) первый столбец на $-\beta_1$, второй на $-\beta_2$ и т.д. Прибавим к последнему. В силу выведенных выше уравнений, последний столбец (5) будет равен 0, а следовательно и сам Вронскиан равен 0. $\square$

Теорема 2. *Если решения $y_1, \ldots, y_n$ л.н.з. на интервале, то $W[y_1, \ldots, y_n]$ не обращается в 0 ни в одной точке интервала.*

Доказательство. Пусть не так и $W(x_0) = 0$. Обозначим y_i при $x = x_0$ через y_{i0}, значения $y_i^{(k)}(x_0$ - через $y_{i0}^{(k)}$ Посмотрим на систему:

$$\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} &= 0 \\ &\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Для данной системы, мы имеем Вронскиан $= 0$. Следовательно, однородная система имеет решения, причем $C_1 \ldots C_n$ не все равны 0.
Составим функцию:

$$\widetilde{y}(x) = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

Т.к. игрики решения, следовательно $\widetilde{y}(x)$ - тоже. В силу (5) при $x = x_0$ имеем:

$$\widetilde{y}(x_0) = 0, \widetilde{y}^{(1)}(x_0) = 0, \ldots, \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Мы получили начальные условия, которые по теореме о сущ определяют единственное решение исходного уравнения, коим является лишь тривиальное. Значит:

$$C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n = 0$$

Более того, константы не равны 0, а значит, $y_1, \ldots, y_n$ л.з. Противоречие. $\square$

6. Структура решений однородного и неоднородного уравнения нного порядка

Рассмотри системы (нормальные) вида:

$$\dot{x}^i = a^i_\alpha(t)x^\alpha + b^i(t); y, \alpha = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В векторной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{2}$$

Однородное в векторной форме:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

Утверждение 1. *Если $\phi(t), \psi(t)$ - 2 решения (1), тогда $\chi(t) = \phi(t) - \psi(t)$ является решением (3)*

Доказательство. Имеем:

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t) + b(t)$$
$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) + b(t)$$

Вычтем одно из другого и получим:

$$\dot{\chi(t)} = A(t)\chi(t)$$

ч.т.д. □

Утверждение 2. *Всякое решение (2) может быть представлено в виде:*

$$\phi(t) = \chi(t) + \psi(t)$$

где $\psi(t)$ некоторое частное решение (2), $\chi(t)$ специально подобранное решение (3).

Доказательство. Действительно, если $\phi(t)$ - произвольное решение (2), а $\psi(t)$ - частное решение (2), то $\phi(t) - \psi(t) = \chi(t)$ - решение (2) (Из предыдущего утверждения). ч.т.д. □

Из этого утверждения следует, что для того, чтобы найти некоторое решение (2), нужно найти частное решение и прибавить к нему общее решение (3).

7. Ф.С.Р

Пусть $\phi_1, \dots, \phi_n$ - л.н.з решения (3). Тогда они являются фундаментальной системой решений (3).

8. Восстановление уравнения (3) по Ф.С.Р.

Дана Ф.С.Р. - построить соответствующее дифференциальное уравнение.

Для этого приравняем нулю следующий определитель (4):

$$W(y_1, \dots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n, y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n', y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)}, y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

y здесь есть искомая функция. Разложим его по последнему столбцу и получим однородное дифференциальное уравнение нного порядка. При подстановке в определитель вместо y $y_i, i = 1, 2, \dots, n)$ мы получим определитель с двумя одинаковыми столбцами равный 0. Значит, у уравнения могут быть частные решения.

Коэффицент при $y^{(n)}$ есть Вронскиан, а он, как мы уже знаем, не обращается в 0 на данном интервале. Разделим на него все уравнение. Получим однородное уравнение нного порядка, а оно, как мы уже знаем, однозначно определяется Ф.С.Р.

9. Формула Отсроградского - Луивилля

Распишем (4) подробнее:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- y^{(n-1)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots y_n'' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Т.к. мы знаем, что Вронскиан $\neq 0$ разделим обе части на него. Например, коэффицент при $y^{(n-1)}$ примет вид:

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}.$$

Видно, что определитель в числителе есть производная от определителя Вронского стоящего в знаменателе, потому что производня по x определителя, составленная из функций зависящих от x, равна сумме n определителей, из которых у первого в первой строке функции заменены производными, а остальные неизменны, у второго во второй строке функции заменены производными и т.д, у n-го в последней строке функции заменены производными. Применяя это правило к определителю Вронского мы получим n - 1 слагаемых в виде определителей, имеющих две разные строки т.е. обращающиеся в ноль, а последнее слагаемое, не равное нулю, есть как раз числитель в выражении для p_1. Итак, мы имеем:

$$p_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

Откуда

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}$$

Выражаем константу C через начальное условие и получим:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}$$

Так, мы вывели формулу, определяющуя определитель Вронского, которая называется формулой Отсрогрдского-Луивилля.