Билет 7. Замкнутость класса ограниченно-детерминированных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Конечная порожденность этого класса.

Маткурбанов Алишер, Симонов Дмитрий

19 апреля 2018 г.

1. Детерминированные функции.
2. Ограниченно-детерминированные функции.
3. Канонические уравнения о-д функций.
4. Определение суперпозиции и операции обратной связи.
5. Замкнутость и конечная порождаемость класса о-д функций.

1. Детерминированные функции

Пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ – алфавит входных символов, а $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ – алфавит выходных символов. Алфавиты A и B конечны. Функция f: $A^* \to B^*$ используется для описания дискретных процессов в дискретный момент времени $t = 1, 2, \ldots$, при этом слово α , $\alpha \in A^*$, последовательность входных символов, а слово β, $\beta \in B^*$, последовательность выходных символов. Функция f: $A^* \to B^*$ называется детерминированной, если выполняются следующие условия:

а) Если $\alpha \in A^*$, то $|\alpha| = |f(\alpha)|$, т.е. длина входного слова равна длине выходного слова.

б) Если $\alpha_1 = a(1)...a(k)$, $\alpha_2 = a'(1)...a'(k)$, $f(\alpha_1) = b(1)...b(k)$, $f(\alpha_2) = b'(1)...b'(k)$, причем $a(1) = a'(1), ...a(s) = a'(s)$ при $1 \le s \le k$, то $b(1) = b'(1), ..., b(s) = b'(s)$ $(a(i)$, здесь $a'(i) \in A, b(i), b('i) \in B$, т.е. каждый выходной сигнал определяется однозначно последовательностью входных символов и не зависит от символов, поступающих в последующие моменты времени.

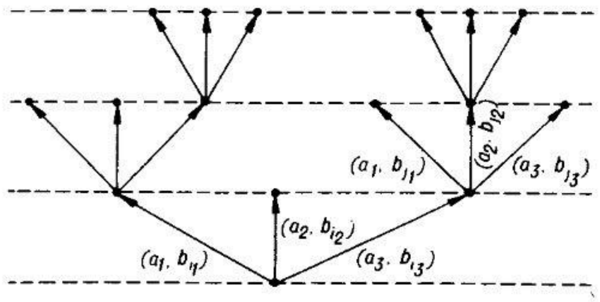
1.1. Информационное дерево и остаточные функции

Детерминированные (д-функции) функции удобно задавать информационными деревьями. Информационное дерево - бесконечный ориентированный граф G, каждому ребру которого приписана пара $(a, b), a \in A, b \in B$, причем выполняются условия:

1) Существует корень дерева, из которого достижимы все вершины. Для каждой вершины $v \in G$ существует единственная последовательность вида $v_1, p_1, v_2, p_2, ..., p_i, v_i + 1 = v$, где $i \ge 0$, $v_1, v_2, ..., v_{i+1}$ - вершины G, p_j - ребро, ведущее от v_j к v_{j+1}, $j = 1, \ldots, i$.

2) Из каждой вершины v графа G выходит ровно m ребер, которым сопоставлены пары вида (a_1, b_{i1}),...,(a_m, b_{im}), $\{i_1, \ldots, i_m \} \subseteq \{1, ..., n\}$.

На следующем рисунке показан примерный вид информационного дерева.



Пусть G – информационное дерево в алфавитах A, B, v_1 – корень дерева, v – произвольная вершина. Подграф графа G, образованный вершинами, достижимыми из v (включая v), тоже является информационным деревом. Обозначим его $G(v)$. Установим связь между функциями $f = f_G$ и $f' = f_G(v)$, которые реализуют деревья G и $G(v)$ соответственно. Рассмотрим путь π из корня v_1 дерева G, соответствующий такому слова α, $\alpha \in A^*$, что концом пути π служит вершина v. Определяемое путем π слово в алфавите B обозначим β. По определению функции f имеем $f(\alpha) = \beta$. Пусть γ – произвольное слово в алфавите A. Рассмотрим путь π_1 из корня v_1 дерева G, соответстующий слову $\alpha\gamma$, а также путь π_2 из корня v дерева $G(v)$, соответствующий слово γ. Обозначим δ_1 и δ_2 определяемые путями π_1 и π_2 слова в алфавите B. Путь π_2 представляет собой концевой отрезок пути π_1, а слово δ_2 является концом слова δ_1. Так как соответстующий слову α начальный отрезок пути π_1 есть путь π, то получаем представление слова δ_1 в виде $\beta\delta_2$, при этом $\delta_1 = f(\alpha\gamma)$, $\delta_2 = f'(\gamma)$. Таким образом, получаем тождество $f(\alpha\gamma) = f(\alpha)f'(\gamma)$, где α – фиксированное слово из A^*, а γ – произвольное слово из A^*. Функции f', которые удовлетворяют этому тождеству для различных α из A^*, называются *остаточными функциями* д. функции f.

Менее формально – любое поддерево дерева G с корнем в вершине, отличной от v_0, определяет остаточную функцию. Если ввести отношение изоморфизма (похожести) на всех поддеревьях G (а их всего бесконечно), то можно разделить все поддеревья на классы эквивалентности. Отношение изоморфизма введем так: два поддерева изоморфны, если "наложив"корни этих поддеревьев друг на друга, "совпадут"и ребра и метки на ребрах у этих поддеревьев. Разобьем все поддеревья (остаточные функции) на классы эквивалентности - все изоморфные деревья попадают в один класс.

2. Ограниченно-детерминированные функции

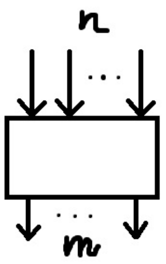
Д. функция называется ограниченно-детерминированной (о.д.-функцией), если множество ее остаточных функций конечно. Отношение изоморфизма, введенное выше, разбивает множество поддеревьев $G(v)$ информационного дерева G на классы эквивалентности - Q_1, Q_2, ... Очевидно, любые два дерева G(v) из одного и того же класса Q_i определяют одну и ту же д.функцию, а из разных классов Q_i - различные д.функции. Определим функции φ и ψ таким образом: $\varphi(Q_i, a) = Q_j$, $\psi(Q_i, a) = b_j$. Функция φ определена на множестве $Q_1, Q_2, ... \times A$ и принимает значения из $\{Q_1, Q_2, ...\}$, а ψ на множестве $\{Q_1, Q_2, ...\} \times A$ и принимает значения из B. Рассмотрим произвольное слово $\alpha, \alpha = \alpha(1)...\alpha(p), \alpha \in A^*$. Пусть $v_1, \rho_1, v_2, \rho_2, ..., \rho_p, v_{p+1}$ – путь из корня v_1 инф. дерева G, соответствующий слову α. Обозначим $(a(i), b(i))$ отметку ребра ρ_i, $i = 1, ..., p, q(i)$ – такой класс Q_{j_i}, что $G(v_i) \in Q_{j_i}, i = 1, ...p + 1$. Согласно определению функций φ и ψ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)),\ t = 1, ..., p \end{cases} \tag{1}$$

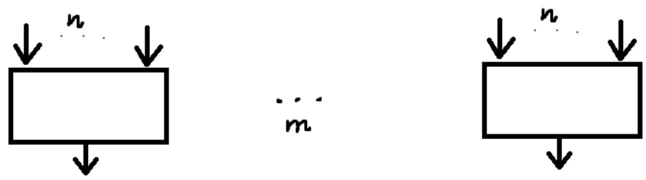
Если множество $\{Q_1, Q_2, ...\}$ конечно, то рассматриваемая д. функция является конечно автоматной функцией, реализуемой инициальным конечнным абстрактным автоматом $V = \{A, Q, B, \varphi, \psi, Q_{j_1}\}$. Получается с каждым инициальным конечным автоматом можно связать о -д. функцию $F_V : A^* \to B^*, F_V(\alpha) = \psi(q_0, \alpha)$. Здесь A и B - произвольные конечные алфавиты. На практике, однако, удобно иметь дело не с буквами этих алфавитов, а с некоторыми их кодами.

2.1. Канонические уравнения о-д. функций

Таким образом, с самого начала можно считать, что имеется некоторый основной алфавит $T = \{t_1, ..., t_k\}$, который используется для кодирования букв алфавитов A, Q, B. Сначала $T = \{0, 1\}, A = \{0, 1\}^n, Q = \{0, 1\}^r, B = \{0, 1\}^m$. Графически это будет выглядеть так:



Однако для задачи синтеза схем не важно сколько выходов у автомата, т.к мы можем использовать m автоматов, у каждого из которых по n входов и 1 выходу:



Таким образом мы можем считать, что у автомата V имеется n входов и 1 выход.

Множество всех функций, вычисляемых автоматами со многими входами, обозначим через P.

С учетом нововведений канонические уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, ..., q_r(1) = q_r^0 \\ q_1(t+1) = \varphi_1(q_1(t), ..., q_r(t), x_1(t), ..., x_n(t)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_r(t+1) = \varphi_r(q_1(t), ..., q_r(t), x_1(t), ..., x_n(t)), \\ b(t) = \psi(q_1(t), ..., q_r(t), x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{2}$$

Итак, о.-д. функция $f(x_1, ..., x_n)$, вычисляемая автоматом $V = (\{0, 1\}^n, \{0, 1\}^r, \{0, 1\}, \phi, \psi, q_0)$, может быть задана с помощью кононических уравнений, где все функции в правых частях функции алгебры логики.

Пример - уравнения о. д. функции, которая реализуется *задержкой с нулевым начальным состоянием* - G_0 (в первый момент времени выдает 0, дальше выдает предыдущий символ, который подали на вход).

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = x(t), \\ y(t) = q(t) \end{cases} \tag{3}$$

3. Операция суперпозиции и обратной связи.

С каждым автоматом (получается и с о -д. функцией) мы можем связать схему, которая реализует этот автомат.

Операции суперпозиции: отождествление переменных, перестановка переменных, добавление фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, подстановка функции вместо переменной. Удобно интерпретировать эти операции графически.

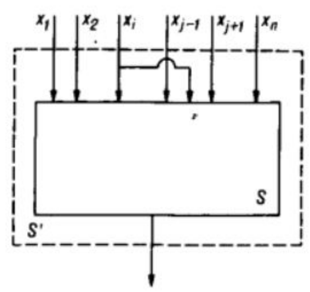


Рис. 1: Отождествление.

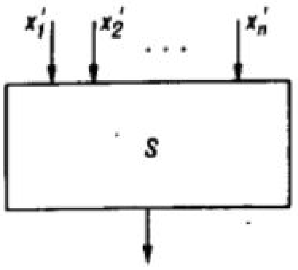


Рис. 2: Перестановка.

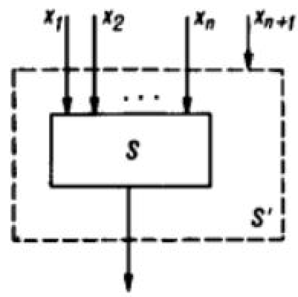


Рис. 3: Добавление фиктивной.

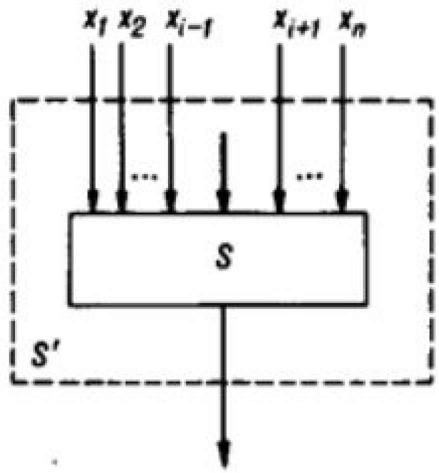


Рис. 4: Удаление фиктивной.

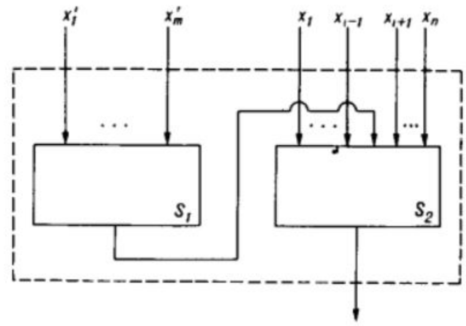


Рис. 5: Подстановка функции.

Операция обратной связи: Пусть $n \geq 2$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ - о.-д. функция, которая задается канонической системой:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0, \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), x_1(t), \ldots, x_n(t)), i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{4}$$

Пусть f зависит фиктивно он какий-нибудь переменной, допустим x_1. Получим ψ' из ψ изъятием фиктивной переменной $x_1(t)$. Тогда о-д. функция $f(x_1, ..., x_n)$ задается системой:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0, \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), x_1(t), \ldots, x_n(t)), i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{5}$$

Теперь вместо фиктивной x_1 в φ_i, $i = 1, ..., r$ подставим ψ' (мы можем это сделать, т.к. ψ' не зависит от x_1). Получится следующая система:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0, \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), x_2(t), \ldots, x_n(t)), i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{6}$$

Эта система задает некоторую функцию f' которая получилась из функции f применением операции обратной связи.

5. Замкнутость и конечная порожденность класса о-д функций

Оператор Σ - замыкание относительно операций суперпозиции.

Оператор K - замыкание относительно операций суперпозиции и операции обратной связи.

Функция Шеффера на множестве о-д функций: о.-д. функция, у которой в канонических уравнениях функцией выходов является функция Шеффера:

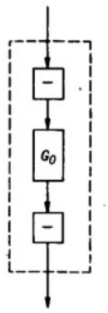
$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = q(t), \\ y(t) = \overline{x_1(t)} \vee \overline{x_2(t)} \end{cases} \tag{7}$$

Она является аналогом функции Шеффера из алгебры логики на множестве о-д функций.

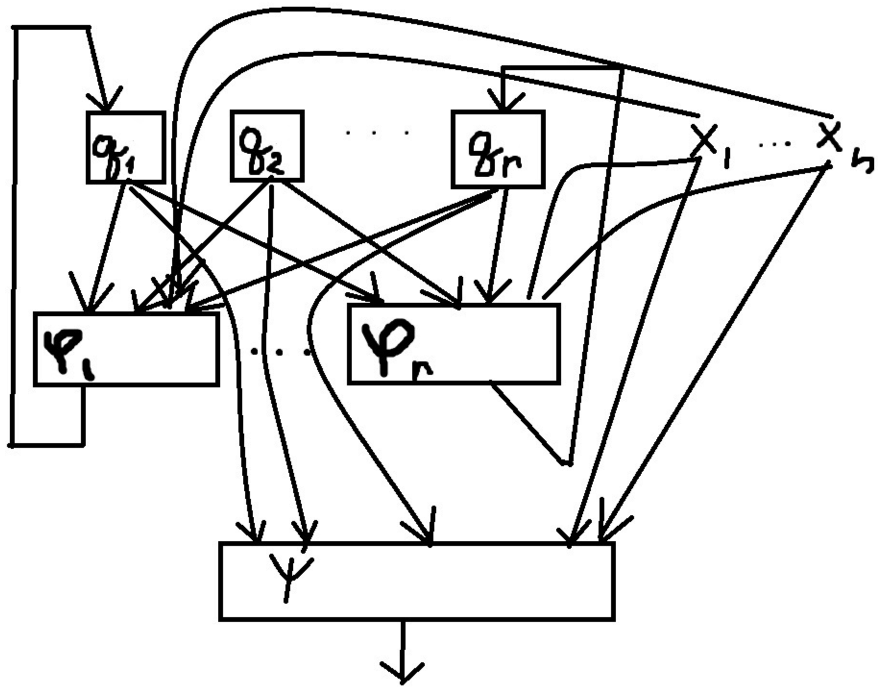
Теорема 1. *Конечным применением оператора K к системе функций, состоящей из функции нулевой задержки и функции Шеффера можно построить все о-д функции.*

Доказательство:

Построим схему, которая реализует произвольную о-д функцию по определению канонических уравнений (2) произвольной о-д функции. Для синтеза схемы нам потребуется реализовать функции из системы (2) – все q_i, φ_i, ψ и $x_j, i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, n$. Все функции кроме q_i построим из функции Шеффера, q_i построим из задержек нуля и единицы. Сначала построим задержку единицы из задержки нуля таким образом:



Используем задержки для построения q_i. Далее построим следующую схему:



Эта схема реализует произвольную о.-д. по определению канонических уравнений. $\square$