Билет 18. **Дифференциальные уравнения первого порядка.**

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными, с разделяющимися переменными, линейные, однородные, Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах, неразрешенные относительно производной, Лагранжа, Клеро. Постановка задачи Коши, данные и условия Коши. Теорема Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 1. Дифференциальным уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными функциями являются функции многих переменных, то уравнения называются уравнениями в **частных производных**, в противном случае, т.е. при рассмотрении функций только одного независимого переменного, уравнения называются **обыкновенными** дифференциальными уравнениями.

Определение 2.

1. Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y') = 0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра[1].

Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \tag{1}$$

получим

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив dy через $p\,dx$ (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dp = 0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

Пример. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$. Вводим параметр $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p. \tag{3}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем $\mathrm{d}y$ на $p\,\mathrm{d}x$ в силу (1): $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p}$, $\quad p\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x + \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p}$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с $\mathrm{d}x$ влево, с $\mathrm{d}p$ — вправо:

$$(p-1)\,\mathrm{d}x = \frac{p-1}{p}\mathrm{d}p. \tag{4}$$

а) Если $p \neq 1$, то сокращаем на $p - 1$:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{p}, \; x = \ln p + C.$$

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x = \ln p + C, \; y = p + C. \tag{5}$$

В данном случае можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем p через x, т. е. $p = \mathrm{e}^{x-C}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y = \mathrm{e}^{x-C} + C. \tag{6}$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем $p = 1$. Подставляя $p = 1$ в (3), получаем еще решение

$$y = x + 1. \tag{7}$$

(Было бы ошибкой в равенстве $p = 1$ заменить p на y' и, проинтегрировав, получить $y = x + C$.)

2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки[1].

Если функция $F(x, y, y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение $\psi(x, y) = 0$ называется уравнением *дискриминантной* кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

Пример. Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{10}$$

Дифференцируем обе части равенства по y':

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{11}$$

Исключаем y' из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем $y' = 1$; подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y = x + 1. \tag{12}$$

Проверим, будет ли кривая особым решением. Для этого сначала проверяем, является ли она решением уравнения (10). Подставляя (12) в (10), получаем тождество $x + 1 = x + 1$. Значит, кривая (12) — решение.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В п. 1 было найдено, что другие решения выражаются формулой (6). Пишем условия касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \ \ y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{13}$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид $e^{x_0-C} + C = x_0+1$, $e^{x_0-C} = 1$. Из второго равенства имеем $C = x_0$; подставляя это в первое равенство, получаем $1 + x_0 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение (12) в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства (6), а именно той кривой, для которой $C = x_0$.

Итак, в каждой точке решение (12) касается другого решения (6), не совпадающего с ним. Значит, решение (12) — особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y' = p$.

3. Если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся решениями уравнения $F(x, y, y') = 0$, имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно провести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

Определение 3. Дифференциальные уравнения с **разделенными переменными имеют** вид

$$f(y)dy = g(x)dx$$

К ним сводятся многие дифференциальные уравнения первого порядка. В общем случае решение такого уравнения — это интегрирование обеих частей:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Определение 4. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если функцию

$$f(x, y)$$

можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

$$f(x, y) = p(x)h(y),$$

где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции.

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую – только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить уравнения

$$x^2y^2y' + 1 = y \quad .$$

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1$$

$$x^2y^2dy = (y-1)dx$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$

$$\frac{y^2}{(y-1)}dy = \frac{1}{x^2}dx$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{(y-1)}dy = \int\frac{1}{x^2}dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

При деление на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения x = 0 и y-1=0, т.е. y=1. Очевидно y=1 решение уравнения, а x= 0 –нет.

Определение 5. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции x, называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка,**

чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$y' + a(x)y = 0$ и в общем

решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение $y = (2x + y^3)y'$, в котором y является функцией от x, — нелинейное. Запишем его в дифференциалах: $y\,\mathrm{d}x - (2x + y^3)\,\mathrm{d}y = 0$. Так как в это уравнение x и $\mathrm{d}x$ входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{2}{y}x = y^2$$

Определение 6.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где f – функция.

Как определить однородное дифференциальное уравнение. Для того, чтобы определить, является ли дифференциальное уравнение первого порядка однородным, нужно ввести постоянную t и заменить y на ty и x на tx:

$$y \to ty, x \to tx$$

Если t сократится, то это **однородное дифференциальное уравнение**. Производная y' при таком преобразовании не меняется.

$$y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{d(ty)}{d(tx)} = \frac{t(dy)}{t(dx)} = \frac{dy}{dx}$$

Чтобы решить однородное уравнения, можно сделать замену $y = tx$,после чего получается уравнение с разделяющимися переменнами.

П р и м е р. Решить уравнение $x\,dy = (x+y)\,dx$.

Это уравнение — однородное. Полагаем $y = tx$. Тогда $dy = x\,dt + t\,dx$. Подставляя в уравнение, получим

$$x(x\,dt + t\,dx) = (x + tx)\,dx; \quad x\,dt = dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к старому переменному y, получим $y = x(\ln|x| + C)$. Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

Определение 7. Дифференциальное уравнение **Бернулли** имеет вид:

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) y^n$$

Очевидно – уравнение Бернулли по общей структуре напоминает линейное неоднородное уравнение первого порядка.

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $1/y^{n-1} = z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить вышеизложенным способом.(опр 6).

Определение 8. Уравнение **Риккати** является одним из наиболее интересных **нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка**. Оно записывается в форме:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

где $a(x), b(x), c(x)$ – непрерывные функции, зависящие от переменной x.

в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Рикка-ти сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y' + 2y^2 = 6/x^2$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде $y = a/x$. Подставляя $y = a/x$ в уравнение, найдем постоянную a.

Определение 9. ***Определение уравнения в полных дифференциалах***

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,\ y)$. Это имеет место, если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию $F(x,\ y)$, от которой полный дифференциал $\mathrm{d}F(x,\ y) = F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y$ равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде $F(x,\ y) = C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Решить уравнение

$$(2x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$, то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,\ y)$, полный дифференциал которой $\mathrm{d}F = F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y$ был бы равен левой части уравнения (2), т. е. такую функцию F, что

$$F'_x = 2x + 3x^2y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \tag{3}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (3), считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию от y:

$$F = \int (2x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для F во второе из уравнений (3), найдем $\varphi(y)$:

$$\left(x^2+x^3y+\varphi(y)\right)'_y = x^3-3y^2;\ \varphi'(y) = -3y^2;\ \varphi(y) = -y^3+\text{const}.$$

Следовательно, можно взять $F(x,\ y) = x^2+x^3y-y^3$, и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2+x^3y-y^3 = C.$$

Необходимое и достаточное условие

Пусть функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D. Дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + \mathrm{N}(x,y)dy = 0$$

будет являться уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, если справедливо равенство:

$$\partial M\partial x = \partial N\partial y.$$

Определение 10. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Дифференциальное уравнение вида $y = x\varphi(y')+\psi(y'), где\, \varphi(y') и\, \psi(y')$ – известные функции, дифференцируемые на некотором интервале, называется *уравнением Лагранжа*.

Полагая $y' = p$ и дифференцируя по переменной x, получаем общее решение уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = f(p,C) \\ y = f(p,C)\,\varphi(p)+\psi(p) \end{cases}$$

при условии, что

$$\varphi(p)-p \neq 0,$$

где p – параметр.

Уравнение Лагранжа может также иметь особое решение, если нарушается условие $\varphi(p)-p\neq 0$. Особое решение определяется функцией

$$y = \varphi(c)\,x+\psi(c),$$

где c – корень уравнения $\varphi(p)-p=0$.

Уравнение Клеро

Уравнение Клеро имеет вид:

$$y = xy' + \psi(y'),$$

где $\psi(y')$ − некоторая нелинейная дифференцируемая функция. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа, когда $\varphi(y') = y'$. Оно решается аналогичным образом с помощью введения параметра. Общее решение определяется выражением

$$y = Cx + \psi(C),$$

в котором C − произвольная постоянная.

Также как и уравнение Лагранжа, уравнение Клеро может иметь особое решение, которое выражает в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = xp + \psi(p) \end{cases},$$

где p − параметр.

11. **Задача Коши**. Дифференциальное уравнение 1–го порядка имеет бесконечно много решений. Для того чтобы выделить единственное решение, нужно задать дополнительные (начальные) условия.

Задача отыскания решения

$$y = y(x)$$

уравнения

$$F(x, y, y') = 0,$$

удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0,$$

называется **задачей *Коши*** (или начальной задачей).

Условие $y(x_0) = y_0$ — начальное условие.

Любое конкретное решение $y = y(x)$ (решение задачи Коши) уравнения 1–го порядка, называется *частным решением уравнения*.

Док-во и остальной материал по Коши в 17 билете.