Халтаев Т.Р.

Теорема Журавлева о ДНФ типа сумма тупиковых

Элементарная конъюнкция (ЭК) — это произведение переменных без повторений, но, может быть, с отрицаниями.

Носитель функции алгебры логики (ФАЛ) f — это множество наборов, на которых она равна 1. Носитель будем обозначать N_f.

Максимальная грань — это грань из носителя функции, которую нельзя вложить ни в одну другую грань из носителя. Просто грань — это носитель ЭК.

ДНФ A, реализующая ФАЛ f, является *тупиковой* ДНФ, если f не реализуется ДНФ A' ($f \neq A'$) для любой ДНФ A', полученной из A в результате удаления некоторых букв или целых ЭК. Проще говоря, тупиковая ДНФ — это ДНФ, состоящая из максимальных граней, ни одну из которых нельзя выкинуть, сохранив при этом N_f.

ДНФ *типа сумма тупиковых* (ДНФ ΣT) ФАЛ f — дизъюнкция всех тех различных максимальных граней этой ФАЛ, которые входят в хотя бы одну тупиковую ДНФ ФАЛ f.

Пусть $\alpha \in N_f$. *Пучок* $\Pi_\alpha(f)$ — это множество всех максимальных граней внутри N_f, которые проходят через α.

Пусть $N_K \subseteq N_f$ — максимальная грань внутри носителя. Точку $\alpha, \alpha \in N_K$, будем называть *регулярной точкой* ФАЛ f*внутри грани* N_K, если найдется точка β, $\beta \in N_f \setminus N_K$, для которой имеет место включение $\Pi_\beta(f) \subseteq \Pi_\alpha(f)$.

Грань N_K ФАЛ f называется *регулярной гранью* этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны внутри грани N_K.

Теорема 1. *Максимальная грань N_K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда эта грань N_K не является регулярной гранью ФАЛ f.*

Доказательство. Пусть N_K является регулярной гранью ФАЛ f и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — все ее регулярные точки. Тогда для каждого j, $j = 1, \ldots, s$, в силу регулярности точки α_j, найдется точка $\beta_j \in N_f \setminus N_K$ такая, что любая максимальная грань ФАЛ f, проходящая через точку β_j, проходит и через точку α_j. Следовательно, любая система максимальных граней ФАЛ f, покрывающая точки $\beta_1, \ldots, \beta_s$, неизбежно покроет и все точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Таким образом, грань N_K, состоящая из регулярных точек, не может входить в тупиковое покрытие множества N_f максимальными гранями, и поэтому N_K не может входить в ДНФ ΣT ФАЛ f.

Пусть теперь N_K — нерегулярная грань ФАЛ f и значит содержит точку α, которая не регулярна внутри N_K. И пусть $N_f \setminus N_K = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$. Из нерегулярности точки α следует, что для любого j, $j = 1, \ldots, q$ пучок $\Pi_{\beta_j}(f)$ не может быть вложен в пучок $\Pi_\alpha(f)$. Поэтому в $\Pi_{\beta_j}(f)$ найдется грань Π_{K_j}, которая проходит через точку β_j, но не проходит через точку α. Следовательно, из покрытия множества N_f максимальными гранями $N_K, N_{K_1}, \ldots, N_{K_q}$ нельзя удалить грань N_K, так как только она покрывает в нем точку α. Таким образом, любое тупиковое покрытие множества N_f, являющееся подпокрытием указанного покрытия, будет соответствовать тупиковой ДНФ, содержащей N_K. Значит N_K входит в ДНФ ΣT ФАЛ f. Теорема доказана.

$\square$