БИЛЕТ 6. Функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал для функциий многих переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Градиент.

Определение 1. *m-мерное координатное пространство:*
m-мерным координатным пространством A^n называется множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, ..., x_m)$ m чисел $x_1, x_2, ..., x_m$

Определение 2. *m-мерное евклидово пространство:*
m-мерное евклидово пространство E^n - координатное пространство A^n, в котором для любых двух точек $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ и $M''(x''_1, x''_2, ..., x''_m)$ определено расстояние $p(M', M'')$ по формуле

$$p(M', M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2 + ... + (x''_m - x'_m)^2}$$

Определение 3. *Предел функции:*
(по Коши) *Число b называется пределом функции $f(M)$ в точке A, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M \in \{M\}$: ($\{M\}$ - область определения функции) $0 < p(M, A) < \delta$ выполняется*

$$|f(M) - b| < \epsilon$$

(по Гейне) *Говорят, что функция $f(x)$, имеет при $M \to A$ предел b, если для любой последовательности M_k такой, что*

$$\lim_{k\to\infty} M_k = A,$$

выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(M_k) = b.$$

ПРИМЕР 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to0,y\to0}(x^2 + y^2)^a = 0$, если $a > 0$.
Возьмем любое $\epsilon > 0$. Положим $\delta = \epsilon^{1/(2a)}$. Пусть $(x, y) \in S_\delta(0, 0)$, тогда

$$(x^2 + y^2)^a < \delta^{2a} < \epsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x\to0,y\to0}(x^2 + y^2)^a = 0.$$

ПРИМЕР 2. Функция $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела $(x, y) \to (0, 0)$.
Рассмотрим последовательность точек $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Тогда $f(x_n, y_n) = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 1$. Если же взять последовательность точек $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = -1$. Так как при любом $n \in N$ точки (x_n, y_n) и (x'_n, y'_n) не совпадают с точкой $(0, 0)$, а последовательности точек (x_n, y_n) и (x'_n, y'_n) сходятся к точке $(0, 0)$, то, используя определение 2 предела, получаем, что функция $f(x, y)$ не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$.

Определение 4. *Непрерывность(формальное):*
Функция f непрерывна в точке A, если $\exists \lim\limits_{M\to A} f(M) = f(A)$.

Определение 5. *Непрерывность(Гейне):*
Функция f непрерывна в точке A, если $\forall\{M_n\} : M_n \to A$ выполняется

$$f(M_n) \to f(A).$$

Определение 6. *Непрерывность(Коши):*
Функция f непрерывна в точке A, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\delta(\varepsilon) = \delta > 0\ \ :\ \ \forall M \in \{M\}\ \ :\ \ \rho(M, A) < \delta$ выполняется

$$|f(M) - f(A)| < \varepsilon.$$

Определение 7. *Функция f, определенная на $\{M\}$, непрерывна на нем, если она непрерывна в каждой точке $\in \{M\}$.*

Определение 8. *$f(x_1, ..., x_m)$ непрерывна в точке $M(x_1, ..., x_m)$ по переменной x_k, если*

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta x_k f = 0,$$

т.е.

$$\Delta x_k f = f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_m).$$

Определение 9. *Если $\exists \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1,...,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},...,x_m)-f(x_1,...,x_m)}{\Delta x_k}$ в точке M , то этот предел называется **частной производной** f в точке M по x_k и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.*

Определение 10. *Функция $U = f(x_1, ..., x_m)$ **дифференцируема** в $M(x_1, ..., x_m)$, если ее полное приращение*
$\Delta U := f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_m + \Delta x_m) - f(x_1, ..., x_m)$ представимо в виде
$\Delta U = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_m \Delta x_m$, (*)
где $A_1, ..., A_m$ - независимые от Δx_i числа;
$\alpha_1, ..., \alpha_m$ - бесконечно малые функции, которые равны 0 при $\Delta x_i = 0$.

Теорема 1. *Если функция $U = f(x_1, ..., x_m)$ дифференцируема в точке M, то в этой точке существует частные производные по всем аргументам, где $\frac{\partial U}{\partial x_k} = A_i$ (A_i из (*)).*

Доказательство к теореме 1. $\bullet$ $\Delta U = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + o(\rho)$.
$o(\rho) \geq |\alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_m \Delta x_m|$, *где* $o = (|\alpha_1| + ... + |\alpha_m|)\rho$, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}$.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i U}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i}{\Delta x_i} = A = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \bullet$$

Следствие 1. $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \Delta x_1 + ... + \frac{\partial U}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho)$. *Если U дифференцируема в точке $M(x_1, ..., x_n)$, то она непрерывна в этой точке.*

Теорема 2. (Достаточные условия дифференцируемости) *Если функция $U = f(x_1, ..., x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$, причем они непрерывны в точке M_0, тогда $U = f(x_1, ..., x_m)$ дифференцируема в M_0.*

Доказательство к теореме 2. *Докажем для функции от двух переменных (для остальных функций аналогично) $U = f(x, y)$ $\exists f_x, f_y$ в окрестности M_0 и они непрерывны. Выберем $\Delta x, \Delta y$ так, чтобы $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не выходила из окрестности $M_0(x_0, y_0)$.*
$\Delta U = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$.
Можно рассматривать $f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$, как приращение функции одной переменной $f(x, y_0 + \Delta y)$ на $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Т.к. $U = f(x, y)$ имеет частные производные, то применим теорему Лагранжа

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x$$

аналогично,

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Т.к. f'_x, f'_y− непрерывны в M_0, то

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \beta.$$

α и β - бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно. Следовательно

$$\Delta U = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y => U = f(x, y).$$

Определение 11. (Производная по направлению.)
Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $G \subset R^3$ и пусть точка $P(x_0,y_0,z_0)inG$. Рассмотрим луч, проходящий через точку и параллельный направлению $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где $cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Т.к. P - внутреняя точка G, то найдется число t_0 такое, что отрезок $x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\cos\beta$, $z=z_0+t\cos\gamma$, $-t_0 \le t \le t_0$, лежит в области G. ***Производной функции*** $f(x,y,z)$ ***в точке*** (x_0,y_0,z_0) ***в направлении l*** *назовем*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

Определение 12. (Градиент)
функция $U=f(x,y,z)$ в $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - вектор,

$$GradU=(\frac{\partial U}{\partial x}M_0,\frac{\partial U}{\partial y}M_0,\frac{\partial U}{\partial z}) \quad => \frac{\partial U}{\partial e}=(e,GradU)$$

Из этого видно, что градиент U в точке M_0 характеризует направление и величину максимального роста функции в точке M_0.
(Градиент не зависит от выбора системы координат)