数据科学的数学基础
第 4 次理论作业

陈万祺　3220102895

2025 年 10 月 30 日

Problem 1

Show that in the space of $\mathbb{R}^n$, for any $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$, there exist $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$, which depend on n, p_1 and p_2, such that for any $x \in \mathbb{R}^n$, it holds

$$c_1\|x\|_{p_1} \le \|x\|_{p_2} \le c_2\|x\|_{p_1}.$$

解：

首先，考虑 $p_2 < +\infty$ 的情况。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\|x\|_{p_2}^{p_2} = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2}.$$

由于 $p_1 < p_2$，利用 Hölder 不等式。设 $q = \frac{p_2}{p_1} > 1$，则 $q' = \frac{q}{q-1} = \frac{p_2}{p_2-p_1}$。根据 Hölder 不等式，

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} = \sum_{i=1}^n (|x_i|^{p_1})^q \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1}\right)^q \cdot \left(\sum_{i=1}^n 1^{q'}\right)^{1/q'} = \|x\|_{p_1}^{p_2} \cdot n^{1-p_1/p_2}.$$

因此，

$$\|x\|_{p_2} \le n^{(1-p_1/p_2)/p_2}\|x\|_{p_1} = n^{1/p_1-1/p_2}\|x\|_{p_1}.$$

所以，我们可以取 $c_2 = n^{1/p_1-1/p_2}$。

接下来，考虑 $p_2 = +\infty$ 的情况。此时，

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$|x_i| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{p_1}\right)^{1/p_1} = \|x\|_{p_1},$$

对于所有 $i = 1, \ldots, n$。因此，

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_1}.$$

所以，我们可以取 $c_2 = 1$。
接下来证明不等式的左侧部分。
首先，考虑 $p_2 < +\infty$ 的情况。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\|x\|_{p_1}^{p_1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}.$$

由于 $p_1 < p_2$，根据 Jensen 不等式，

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{p_2/p_1} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i|^{p_1})^{p_2/p_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}.$$

因此，

$$\left(\frac{\|x\|_{p_1}^{p_1}}{n}\right)^{p_2/p_1} \leq \frac{\|x\|_{p_2}^{p_2}}{n}.$$

整理得

$$\|x\|_{p_1}^{p_2} \leq n^{p_2/p_1 - 1}\|x\|_{p_2}^{p_2}.$$

因此，

$$\|x\|_{p_1} \leq n^{1/p_1 - 1/p_2}\|x\|_{p_2}.$$

所以，我们可以取 $c_1 = n^{1/p_2 - 1/p_1}$。
接下来，考虑 $p_2 = +\infty$ 的情况。此时，

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\|x\|_{p_1}^{p_1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1} \leq n \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|)^{p_1} = n\|x\|_\infty^{p_1}.$$

因此，

$$\|x\|_{p_1} \leq n^{1/p_1}\|x\|_\infty.$$

所以，我们可以取 $c_1 = n^{-1/p_1}$。
综上所述，对于任意 $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$，存在依赖于 n、p_1 和 p_2 的常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，有

$$c_1\|x\|_{p_1} \le \|x\|_{p_2} \le c_2\|x\|_{p_1}.$$

具体地，当 $p_2 < +\infty$ 时，可以取 $c_1 = n^{1/p_2-1/p_1}$ 和 $c_2 = n^{1/p_1-1/p_2}$；当 $p_2 = +\infty$ 时，可以取 $c_1 = n^{-1/p_1}$ 和 $c_2 = 1$。

Problem 2

Prove or disprove: for any $x \in \mathbb{R}^n$, it holds

$$\|x\|_1\|x\|_\infty \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\|x\|_2^2.$$

解：

不妨假设 $\|x\|_\infty = 1$（若 $x = 0$ 则不等式显然成立）。令 $y_i = |x_i|$，则 $y_i \in [0,1]$ 且 $\max_i y_i = 1$。此时需证：

$$\sum_{i=1}^n y_i \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2.$$

等价地：

$$(1+\sqrt{n})\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\sum_{i=1}^n y_i \ge 0.$$

考虑函数 $f(t) = 2t - (1+\sqrt{n})t^2$，其中 $t \in [0,1]$。这是开口向下的二次函数，顶点在 $t = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ 处，最大值为 $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$。因此对任意 $t \in [0,1]$：

$$2t - (1+\sqrt{n})t^2 \le \frac{1}{1+\sqrt{n}}.$$

不失一般性，设 $y_1 = 1$。则：- 当 $i = 1$ 时：$2 - (1+\sqrt{n}) = 1 - \sqrt{n}$ - 当 $i = 2,\dots,n$ 时：$2y_i - (1+\sqrt{n})y_i^2 \le \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

对所有 i 求和：

$$\sum_{i=1}^n \left[2y_i - (1+\sqrt{n})y_i^2\right] \le (1-\sqrt{n}) + (n-1)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{n}}.$$

计算右边：

$$(1-\sqrt{n}) + \frac{n-1}{1+\sqrt{n}} = (1-\sqrt{n}) + \frac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}{1+\sqrt{n}} = (1-\sqrt{n}) + (\sqrt{n}-1) = 0.$$

因此：

$$\sum_{i=1}^n \left[2y_i - (1+\sqrt{n})y_i^2\right] \le 0,$$

即：

$$2\sum y_i \le (1+\sqrt{n})\sum y_i^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum y_i \le \frac{1+\sqrt{n}}{2}\sum y_i^2.$$

由于在假设 $\|x\|_\infty = 1$ 下不等式成立，且不等式是齐次的，故对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

因此，原不等式成立。