

物理信息神经网络求解波动方程实验报告

一、实验目标

利用物理信息神经网络求解以下偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1], t \in [0, 2]$$

其中波速 $c = 0.5$

边界条件 (BC):

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 2]$$

初始位移条件 (IC1):

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

初速度条件 (IC2):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

PDE的解析解:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct) = \sin(\pi x) \cos(0.5\pi t)$$

二、理论分析

损失函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_u$$

其中：

- $\mathcal{L}_f = \text{MSE}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ 为PDE约束损失
- $\mathcal{L}_u = \text{MSE}(u_{\text{pred}} - u_{\text{exact}})$ 为边界和初始条件损失

网络架构

- **输入层**: 2个特征 (x, t)
- **隐藏层**: 6个块，每块包含：

- 全连接层 (32个神经元)
- Tanh激活函数
- **输出层**: 1个神经元 (预测 $u(x, t)$)

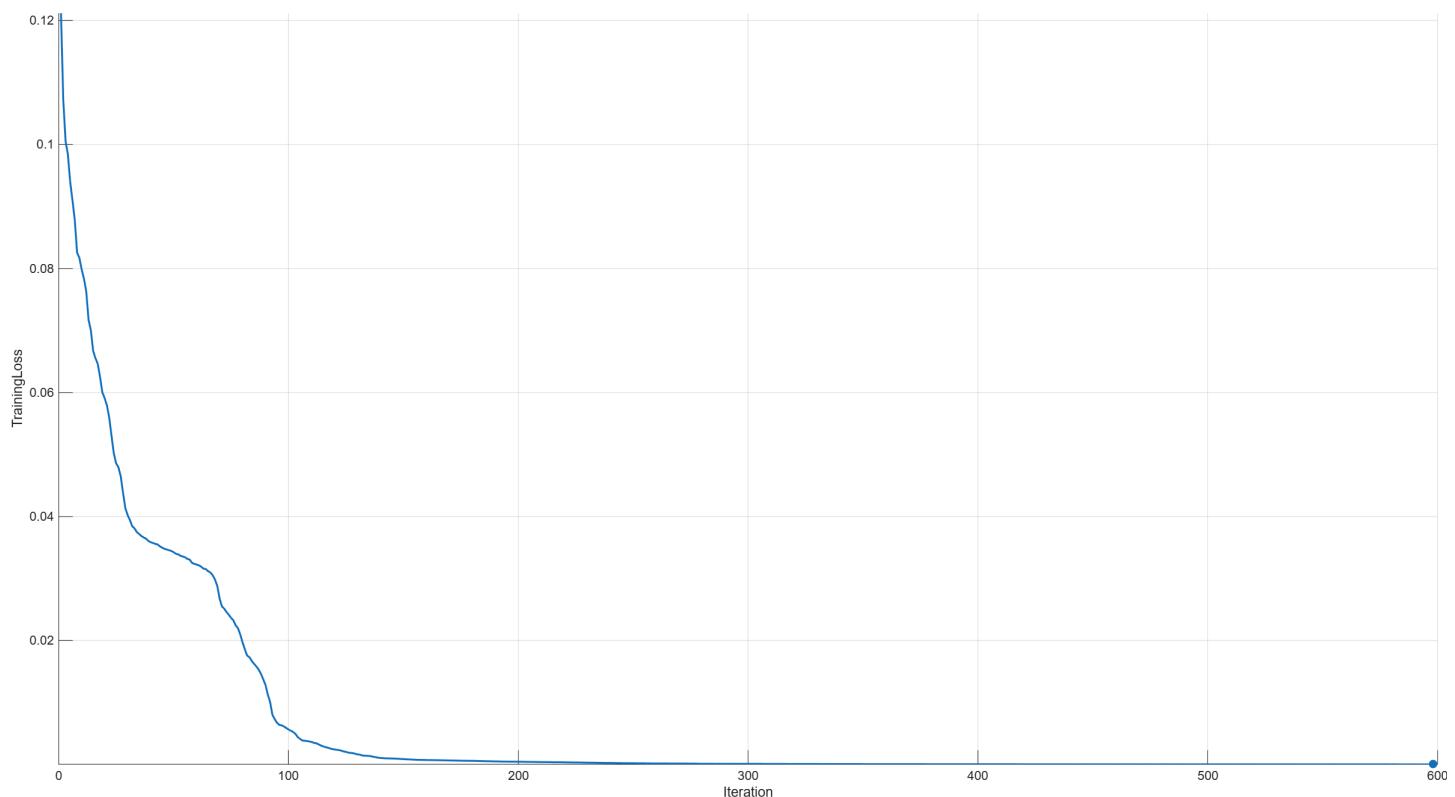
三、训练过程

3.1 训练配置

参数	值
优化器	L-BFGS
最大迭代次数	2000
内部配置点数	8000
边界条件点数	30×2
初始条件点数	50
梯度容差	$1e-5$
步长容差	$1e-5$

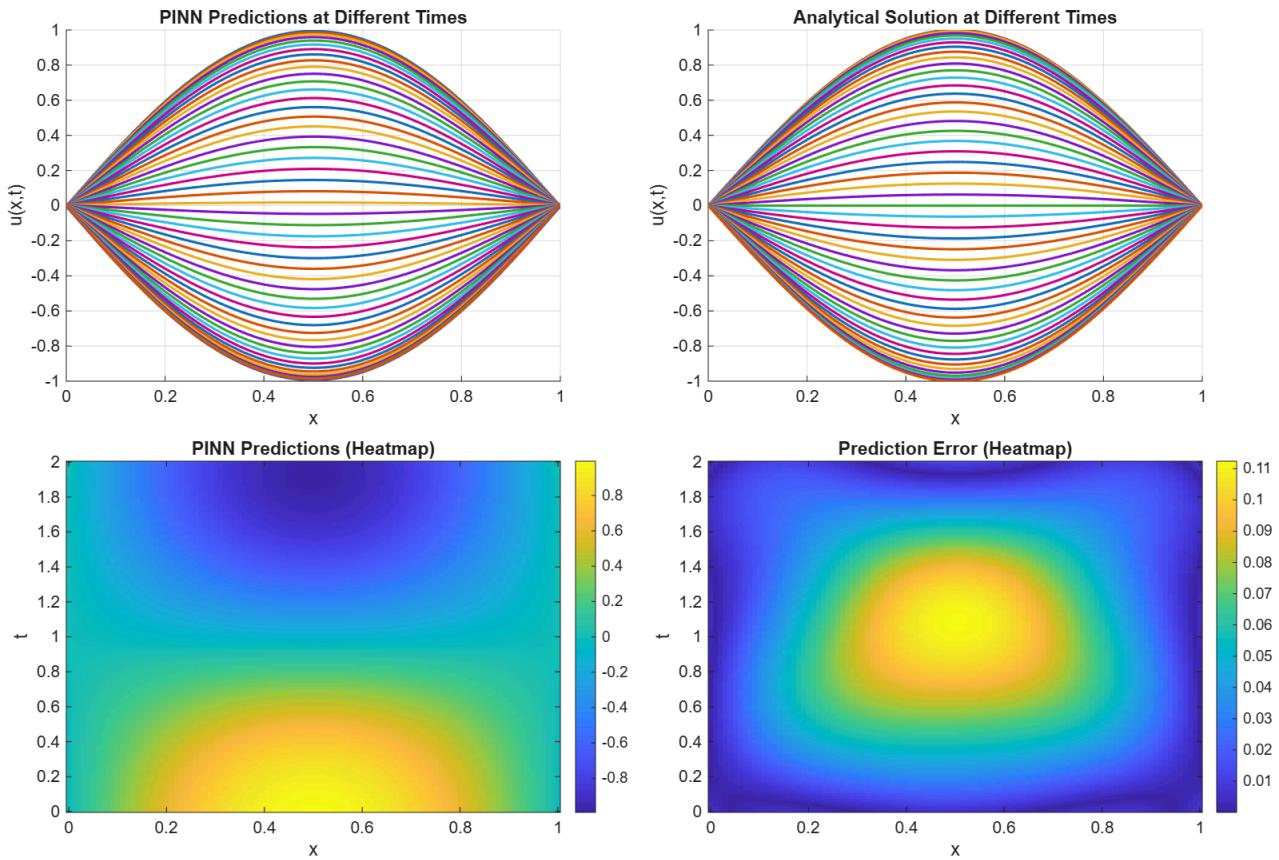
3.2 训练结果

相对误差: **8.655054e-02 ($\approx 8.66\%$)**



训练过程中损失函数显著下降，表明网络成功学习了波动方程的解。

四、预测结果



图表说明：

- **左上图**: PINN在不同时刻的预测结果
- **右上图**: 解析解在不同时刻的结果
- **左下图**: PINN预测的热力图
- **右下图**: 预测误差的热力图

五、附件

- `3220102895.mat` : PINN预测的 201×101 矩阵结果
- `wave_equation_results.png` : 预测结果可视化 (4子图)
- `train_loss.png` : 训练过程中的损失曲线