Chương 9

Hệ phương trình vi phân và sơ lược về phương trình đạo hàm riêng

Trong giáo trình Giải tích một biến chúng ta đã sơ bộ làm quen với phương trình vi phân và biết cách giải một số phương trình đơn giản. Chương này giới thiệu sơ lược về hai phần kế tiếp của phương trình vi phân là *hệ phương trình vi phân* và *phương trình đạo hàm riêng*. Với mục đích trang bị kiến thức tối giản để học viên tìm hiểu các môn học khác và củng cố những gì đã học trong các chương trước về hàm nhiều biến, chúng ta chỉ trình bày những khái niệm cơ bản và giải một số lớp phương trình đơn giản.

9.1. Hệ phương trình vi phân

9.1.1. Khái niệm chung

Hệ phương trình vi phân là một hệ các phương trình dạng

$$y'_i = f_i(x, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, ..., n \tag{1}$$

trong đó f_i là những hàm số $(n+1)$ biến, y_i là những hàm chưa biết của biến x. Giải (hay *tích phân*) hệ trên có nghĩa là tìm tất cả các bộ n hàm số $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$ thỏa mãn (1). Nếu cho trước điểm x_0 và các giá trị $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ thì một nghiệm $y_1(x), ..., y_n(x)$ của hệ (1) thỏa mãn điều kiện (khởi đầu)

$$y_i(x_0) = b_i, \ i = 1, ..., n$$

được gọi là *nghiệm riêng* của hệ.

Nhận xét. Phương trình vi phân bậc cao luôn có thể đưa được về hệ phương trình vi phân bậc nhất.

Thí dụ. Xét phương trình vi phân cấp hai

$$y'' + y = x.$$

Chúng ta đã biết cách giải phương trình này. Nghiệm tổng quát của nó là

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x,$$

trong đó α và β là hai số bất kỳ. Nếu đặt $y_1 = y$ và $y_2 = y'$ thì phương trình tương đương với hệ phương trình sau

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = x - y_1.$$

Như vậy nghiệm tổng quát của hệ này có dạng

$$y_1(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x, \quad y_2(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x + 1,$$

với α, β là những hằng số bất kỳ.

Bằng phương pháp tương tự như cách làm trong thí dụ trên ta có thể chuyển phương trình vi phân cấp k về hệ gồm k phương trình vi phân.

Giả thiết rằng tìm được n hàm số

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, ..., c_n), \quad i = 1, ..., n,$$

trong đó $c_1, ..., c_n$ là những hằng số bất kỳ, sao cho hệ phương trình (1) nghiệm đúng. Khi ấy các hàm $\varphi_1, ..., \varphi_n$ còn được gọi là *tích phân của hệ.*

Trong thí dụ trên, các hàm sau đây là những tích phân của hệ:

$$\varphi_1(x, \alpha, \beta) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x,$$

$$\varphi_2(x, \alpha, \beta) = -\alpha \sin x + \beta \cos x + 1.$$

Tích phân đầu của hệ (1) là một hàm số $n+1$ biến $F(x, y_1, ..., y_n)$ mà khi thay nghiệm $y_1, ..., y_n$ của hệ (1) vào thì giá trị của F không đổi (với mọi x). Tầm quan trọng của tích phân đầu được lý giải bởi nhận xét sau. Giả sử biết được n tích phân đầu $F_1, ..., F_n$ sao cho định thức của ma trận Jacobi của hàm vectơ $(F_1, ..., F_n)$

theo n biến cuối $(y_1,...,y_n)$ khác không. Khi ấy theo định lý hàm ẩn, hệ phương trình

$$F_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i, \quad i = 1, ..., n$$

sẽ cho ta n hàm $y_i = y_i(x, c_1, ..., c_n), i = 1, ..., n$ là tích phân của hệ (1).

Thí dụ. Hãy giải hệ 2 phương trình vi phân:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Giải. Chúng ta cần tìm hai tích phân đầu của hệ. Lưu ý rằng hệ trên cũng bằng tỷ số

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(z-y) + \beta(x-z) + \gamma(y-x)}.$$

Bằng cách chọn $\alpha = x, \beta = y, \gamma = z$, tử số của biểu thức trên phải bằng 0 vì mẫu số bằng 0. Tức là $xdx + ydy + zdz = 0$, hay $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Như vậy nếu $y(x), z(x)$ là nghiệm của hệ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const} \quad \text{(hằng số)},$$

và ta có ngay một *tích phân đầu*

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tương tự, lấy $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ta thu được *tích phân đầu* nữa

$$F_2(x, y, z) = x + y + z.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân được cho dưới dạng hàm ẩn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1,$$
$$x + y + z = c_2,$$

trong đó c_1 và c_2 là những hằng số.

9.1.2. Hệ tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất *n* hàm số là hệ có dạng

$$y_i' = a_1^i(x)y_1 + ... + a_n^i(x)y_n, \quad i = 1, ..., n, \tag{*}$$

trong đó a_j^i là những hàm số (xác định trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$).

Giả thiết a_j^i liên tục trên *I*. Nếu ký hiệu Y là vectơ cột và A là ma trận chứa a_j^i:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \dots & a_n^1(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^n(x) & \cdots & a_n^n(x) \end{bmatrix}$$

thì hệ (*) được viết dưới dạng ma trận:

$$Y' = AY.$$

Với giả thiết về tính liên tục của các hàm hệ số a_j^i, cho trước $x_0 \in I$ và $b \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất một nghiệm $Y(x)$ của hệ (*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu $Y(x_0) = b$. Ngoài ra các nghiệm của hệ (*) tạo thành một không gian n chiều.

Thí dụ. Xét hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Đây chính là hệ phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với phương trình cấp hai $y'' + y = 0$. Ta biết nghiệm tổng quát là

$$y_1(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad y_2(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Ký hiệu $f(x) := (\cos x, -\sin x)$ và $g(x) := (\sin x, \cos x)$. Hai hàm vectơ này độc lập tuyến tính, tức là nếu có hai số a và b để $af(x) + bg(x)$ đồng nhất bằng 0 trên I thì lập tức $a = 0$, $b = 0$. Không gian căng bởi hai hàm này là không gian 2 chiều và chứa tất cả các nghiệm của hệ. Nói cách khác, mọi nghiệm của hệ phương trình vi phân đều có dạng $af(x) + bg(x)$. Muốn tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện khởi đầu, thí dụ $Y(0) = (1,0)^T$ chẳng hạn thì ta chỉ cần giải hệ phương trình

$$af(0) + bg(0) = Y(0)$$

và thu được $a = 1, b = 0$ tức là $Y(x) = f(x)$, hay cụ thể hơn $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = -\sin x$.

Phương pháp giải. Để giải hệ (*) người ta tìm giải thức của hệ, tức là một ma trận cấp $n \times n$ mà mỗi cột thứ i của nó là một nghiệm riêng của hệ (*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu

$$Y(x_0) = \boldsymbol{e}_i$$

trong đó $\boldsymbol{e}_i$ là vectơ trục đơn vị thứ i (có tọa độ i bằng 1, các toạ độ còn lại bằng 0).

Ký hiệu giải thức của (*) là $\Phi(x, x_0)$. Ta thấy mỗi hệ phương trình vi phân dạng (*) đều có một giải thức duy nhất và giải thức có những tính chất đặc biệt sau đây:

(i) Tại điểm $x = x_0$, giá trị của giải thức là ma trận đơn vị, tức là $\Phi(x_0, x_0) = I$;

(ii) Với mọi x, x_0, x_1 ta luôn có $\Phi(x, x_1) = \Phi(x, x_0).\Phi(x_0, x_1)$. Nói riêng $\Phi(x, x_0)$ khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó là $\Phi(x_0, x)$;

(iii) Nghiệm riêng của hệ (*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu $Y(x_0) = b$ được tính theo công thức $Y(x) = \Phi(x, x_0)b$.

Thí dụ. Đối với hệ phương trình vi phân trong thí dụ trước, dễ thấy hai nghiệm thỏa mãn điều kiện khởi đầu $\varphi_1(x_0) = \boldsymbol{e}_1$ và $\varphi_2(x_0) = \boldsymbol{e}_2$ là

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(x - x_0) \\ -\sin(x - x_0) \end{pmatrix} \quad , \qquad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(x - x_0) \\ \cos(x - x_0) \end{pmatrix}.$$

Vậy giải thức của hệ sẽ là ma trận

$$\Phi(x, x_0) = \begin{bmatrix} \cos(x - x_0) & \sin(x - x_0) \\ -\sin(x - x_0) & \cos(x - x_0) \end{bmatrix}$$

và nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện khởi đầu $Y(x_0) = b$ với b cho trước bất kỳ được tính theo công thức nêu trong (iii).

9.1.3. Hệ tuyến tính không thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là hệ phương trình dạng

$$Y' = A(x)Y + B(x) \qquad (**)$$

trong đó A là ma trận cấp $n \times n$, $B(x)$ là vectơ cột n tọa độ.

Giả thiết Y_0 là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất (*) và Y_p là một nghiệm nào đó của hệ không thuần nhất. Khi ấy nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất có dạng

$$Y(x) = Y_0(x) + Y_p(x).$$

Ngoài ra, nếu ta biết được giải thức $\Phi(x, x_0)$ của hệ (*), thì nghiệm của hệ không thuần nhất thỏa mãn điều kiện khởi đầu $Y(x_0) = b$ sẽ được tính theo công thức

$$Y(x) = \Phi(x, x_0)\{b + \int_{x_0}^{x} \Phi(x_0, t)B(t)dt\} \qquad (***)$$

Thí dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \text{ với } y_1(0) = 1, y_2(0) = 1.$$

Giải. Ta đã tính được giải thức của hệ thuần nhất tương ứng trong thí dụ trước với $x_0 = 0$. Áp dụng công thức (***) ta tìm được ngay

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(-t) & \sin(-t) \\ -\sin(-t) & \cos(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} dt \right\} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x + x \\ \cos x - \sin x + 1 \end{pmatrix}.$$

9.1.4. Hệ tuyến tính với hệ số không đổi

Nếu như ma trận $A(x)$ xác định hệ phương trình vi phân thuần nhất (*) là một ma trận hằng (không phụ thuộc vào x), thì giải thức của hệ (*) có dạng sau

$$\Phi(x,x_0)=e^{A(x-x_0)} \ ,$$

trong đó ma trận mũ e^{At} được cho bởi công thức

$$e^{At}=I+\frac{t}{1!}A+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\dots .$$

Với công thức trên, nghiệm của hệ (*) thỏa mãn điều kiện khởi đầu $Y(x_0)=b$ sẽ là

$$Y(x)=e^{A(x-x_0)}b \, .$$

Thí dụ. Giải hệ tuyến tính thuần nhất

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad y_1(0)=2,\, y_2(0)=3 \, .$$

Giải. Nhận xét rằng với mọi $k\geq 2$ ta có A^k đồng nhất với ma trận 0, cho nên giải thức của hệ là

$$\Phi(x,0)=e^{Ax}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\frac{x}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó nghiệm cần tìm là

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+3x \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp A là ma trận đường chéo với các phần tử $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ trên đường chéo, thì từ công thức ma trận mũ, ta thấy ngay e^{Ax} cũng là một ma trận đường chéo với các hàm $e^{\lambda_1 x},\dots,e^{\lambda_n x}$ trên đường chéo (bởi vì chuỗi $1+\frac{\lambda x}{1!}+\frac{\lambda^2x^2}{2!}+\dots$ có tổng là $e^{\lambda x}$). Nhờ vào nhận xét này mà hệ phương trình vi phân thuần nhất với ma trận hệ số A không đổi có thể giải được một cách dễ dàng nếu như A có n giá trị riêng $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ và n vectơ riêng tương ứng $\boldsymbol{h}_1,\dots,\boldsymbol{h}_n$. Thật vậy, ký hiệu H là ma trận vuông cấp $n\times n$ gồm các vectơ cột $\boldsymbol{h}_1,\dots,\boldsymbol{h}_n$ tạo nên. Từ giáo trình *Đại số tuyến tính* ta biết rằng ma trận $B:=H^{-1}AH$ là ma trận đường chéo, với các phần tử $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ trên đường chéo. Do đó nếu đổi biến $Y=HZ$ thì hệ phương trình vi phân (*) trở thành hệ

$$Z'=BZ \, .$$

Điều kiện khởi đầu $Y(x_0)=b$ sẽ chuyển thành $Z(x_0)=H^{-1}b$. Hệ phương trình vi phân với ma trận đường chéo có nghiệm

$$Z(x) = e^{B(x-x_0)}H^{-1}b\,,$$

trong đó $e^{B(x-x_0)}$ là ma trận đường chéo với $e^{\lambda_1(x-x_0)},...,e^{\lambda_n(x-x_0)}$ trên đường chéo. Từ đây ta có ngay nghiệm của hệ phương trình vi phân ban đầu đối với *Y*:

$$Y(x) = He^{B(x-x_0)}H^{-1}b\,.$$

Thí dụ. Tích phân hệ phương trình vi phân sau với $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ma trận của hệ có hai giá trị riêng 1 và -1 với hai vectơ riêng tương ứng $(1,1)$ và $(1,-1)$, viết dưới dạng hàng. Do đó ma trận biến đổi H có dạng $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dễ thấy $H^{-1} = \frac{1}{2}H$. Theo công thức trên, nghiệm của hệ sẽ là

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix} . \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

9.2. Phương trình vi phân đạo hàm riêng

9.2.1. Một số bài toán

1. Dao động của dây đàn

Giả sử sợi dây AB đặt căng song song với trục $\overrightarrow{Ox}$ trong mặt phẳng *xOu*. Khi tác động vào sợi dây một lực, nó sẽ dao động. Để nghiên cứu quy luật dao động của sợi dây, chúng ta giả sử rằng sợi dây AB khá mảnh để nó không cưỡng lại sự uốn và có lực căng tương đối lớn so với lực tác động lên dây.

Ký hiệu $u(x,t)$ là độ lệch của dây so với vị trí cân bằng $M(x)$ tại thời điểm *t*.

Coi độ dài dây không thay đổi khi dây dao động. Khi ấy, theo định luật Hooke, lực căng $\overrightarrow{T}$ tại mọi vị trí có cường độ không đổi, tức là,

$$T(x,t) = T_0 \quad \forall x \in [a,b],$$

trong đó, $T(x,t)$ là lực căng của dây tại vị trí $M(x)$.

Giả sử lực ngoài tác động lên sợi dây song song với trục $\overrightarrow{Ou}$ và phân bố trên một đơn vị dài là $F(x,t)$. Gọi $\rho(x)$ là tỷ trọng dài của sợi dây. Khi ấy khối lượng của dây trong khoảng dx là $m = \rho(x)dx$. Ký hiệu $\alpha(x)$ là góc hợp bởi trục $\overrightarrow{Ox}$ và lực căng $\overrightarrow{T}$ có hướng là hướng tiếp tuyến của sợi dây tại vị trí $M(x)$.

Theo định luật Newton: tổng các lực tác động lên sợi dây bằng khối lượng của dây nhân với gia tốc chuyển động của sợi dây, tức là $F = ma$. Chiếu đẳng thức trên lên trục $\overrightarrow{Ou}$, ta có:

$$T_0 \sin\alpha(x+dx) - T_0 \sin\alpha(x) + F(x,t)dx = \rho(x)dx.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Ta giả thiết rằng đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial x}$ đủ nhỏ. Khi ấy ta có thể viết:

$$\sin\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Vậy $T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x) + F(x,t)dx = \rho(x)dx.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$, hay

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{dx}\right] + F(x,t).$$

Cho $dx \to 0$ ta có:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t).$$

Phương trình trên gọi là *phương trình dao động* của dây.

Nếu sợi dây là đồng chất, tức là $\rho(x) = \rho_0$ ta có *phương trình truyền sóng một chiều*:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

trong đó $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}$.

Phương trình trên đã được Daniel Bernoulli, D'Alembert và Euler nghiên cứu từ thế kỷ thứ 18.

2. Dao động của màng rung

Ta sẽ xét dao động tự do của màng mỏng, căng đều theo mọi chiều. Giả sử trong trạng thái tĩnh, màng chiếm một miền G giới nội có biên trơn trong mặt phẳng *Oxy*. Chúng ta sẽ giả thiết màng rất mỏng, do đó có thể coi lực chống lại sự uốn bằng 0. Tương tự như phần trên, có thể chứng minh được rằng trong trạng thái uốn độ lệch $u = u(t,x,y)$ tại vị trí (x,y) của màng tại thời điểm t thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t).$$

Phương trình trên được gọi là *phương trình dao động* của màng, còn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \text{ với } u = u(t,x,y,z),$$

được gọi là *phương trình truyền sóng* trong không gian ba chiều.

Tổng $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ hay $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (trong trường hợp ba chiều) được gọi là *toán tử Laplace* và được ký hiệu là Δu. Như vậy, phương trình dao động của màng có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,t),$$

và phương trình truyền sóng được viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t).$$

9.2.2. Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Các bài toán trên, cũng như nhiều bài toán khác của thực tế, vật lý, kỹ thuật,... dẫn tới việc tìm một hàm $z(x_1, x_2, ..., x_n)$, biến $x_1, x_2, ..., x_n$, thoả mãn phương trình

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0.$$

Phương trình, trong đó có ít nhất một đạo hàm riêng cấp k của hàm chưa biết $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ và không có các đạo hàm riêng cấp cao hơn được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp k* của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$.

Hàm $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn phương trình trên trong một miền nào đó của biến $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là *nghiệm* hay *tích phân* của phương trình đạo hàm riêng trên miền đó.

Thí dụ. Phương trình $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5u\frac{\partial u}{\partial x}=0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 3 của hai biến (x,y); $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 1 của ba biến (x,y,z); và $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial t}=0$ cũng là phương trình đạo hàm riêng cấp 1 của hai biến (x,t).

Rất nhiều bài toán của vật lý dẫn đến các phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

Thí dụ. Phương trình mô tả *quá trình truyền nhiệt* là

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).$$

Phương trình *truyền sóng* có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t).$$

Chương này chỉ giới thiệu một số khái niệm cơ bản và cách giải một số phương trình vi phân cấp một và cấp hai đơn giản nhất. Bạn đọc muốn tìm hiểu sâu hơn cần học theo các giáo trình chuyên về phương trình đạo hàm riêng.

9.2.3. Phương trình đạo hàm riêng cấp một

Phương trình *đạo hàm riêng cấp 1* là phương trình dạng

$$F(x_1,x_2,...,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},...,\frac{\partial z}{\partial x_n})=0.$$

Phương trình *đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính* là phương trình có dạng

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=f(x_1,x_2,...,x_n,z)$$

Nếu vế phải của phương trình trên đồng nhất bằng 0, còn các hàm $X_i(x_1,x_2,...,x_n,z)$ không phụ thuộc vào z thì ta có *phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0.$$

1. Phương trình đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình:

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 . \qquad (1)$$

Giả sử rằng $X_i(x_1,x_2,...,x_n)$ xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng theo tất cả các biến ở trong một lân cận nào đó của điểm $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$.

Ta phải tìm nghiệm của phương trình trên, tức là tìm một hàm $z(x_1,x_2,...,x_n)$ xác định và khả vi liên tục trong lân cận điểm $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ sao cho nó thỏa mãn phương trình trong lân cận ấy.

Phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm hiển nhiên (nghiệm tầm thường) $z=C$, trong đó C là hằng số. Ngoài ra, ta sẽ chứng tỏ rằng nó có vô số nghiệm không tầm thường.

Cùng với phương trình đạo hàm riêng tuyến tính ta xét hệ phương trình vi phân thường đối xứng sau:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)} \qquad (2)$$

ĐỊNH LÝ. *Nếu* $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ *là tích phân khả vi liên tục của hệ* (2), *tức là*

$$d\varphi\Big|_{(2)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}X_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_2+...+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}X_n\equiv 0$$

trong một miền nào đó của biến số $x_1,x_2,...,x_n$, *thì hàm số* $z=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ *là nghiệm của phương trình* (1).

Đảo lại, nếu $z=\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ *là nghiệm của* (1), *thì* $\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ *là tích phân của hệ* (2).

Chứng minh. Nếu $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ là tích phân khả vi liên tục của hệ (2) thì hiển nhiên theo định nghĩa tích phân ta có:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}X_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_2+...+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}X_n=d\varphi\Big|_{(2)}\equiv 0,$$

chứng tỏ $z=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ là nghiệm của (1).

Đảo lại, nếu $z=\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ là nghiệm của (1) thì

$$d\psi\Big|_{(2)}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n\Big|_{(2)}=$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} X_2 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} X_n \equiv 0 .$$

Chứng tỏ $z = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tích phân của hệ (2).

Từ định lý trên ta suy ra rằng, việc giải phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất (2) tương đương với giải hệ phương trình vi phân thường đối xứng (2). Nếu biết $n-1$ tích phân độc lập, $\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\varphi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ của hệ (2) thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là

$$z = \Phi(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}) .$$

Thí dụ Muốn tìm nghiệm của $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ta chú ý rằng hệ phương trình đối xứng tương ứng có dạng $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Hệ này có 2 tích phân độc lập là $\varphi_1 = \frac{y}{x}$, $\varphi_2 = \frac{z}{x}$ chứng tỏ nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng đã cho là $u = \Phi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$.

2. Phương trình đạo hàm riêng cấp 1 tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, ..., x_n, z), \quad (3)$$

trong đó các hàm số X_i và f xác định và liên tục cùng với đạo hàm riêng cấp một của chúng theo tất cả các biến trong một lân cận nào đó của điểm $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z^0)$. Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất bằng cách đưa về hệ thuần nhất. Nghiệm của phương trình này sẽ được tìm dưới dạng một hàm ẩn

$$U(x_1, ..., x_n, z) = 0 ,$$

trong đó U là hàm khả vi liên tục theo tất cả các đối số và thỏa mãn

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x_1^0, ..., x_n^0, z^0) \neq 0 .$$

Lấy vi phân hệ thức trên theo x_i với z là hàm của $x_1, x_2, ..., x_n$ ta được

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad hay \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} : \frac{\partial U}{\partial z} .$$

Thay vào phương trình (3) ta được

$$X_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+...+X_n\frac{\partial U}{\partial x_n}+f\frac{\partial U}{\partial z}=0. \quad (4)$$

Đây là phương trình tuyến tính thuần nhất đối với hàm số U cần tìm.

Giả sử hệ phương trình đối xứng tương ứng của phương trình trên

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=...=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{f}$$

có n tích phân độc lập

$$\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n,z), \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n,z), ..., \varphi_n(x_1,x_2,...,x_n,z).$$

Khi ấy hàm số $U=\Phi(\varphi_1,...,\varphi_n)$ chính là nghiệm tổng quát của hệ phương trình (4), do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3) có dạng

$$U=\Phi(\varphi_1,...,\varphi_n)=0.$$

Thí dụ. Muốn giải phương trình $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$ ta lưu ý rằng hệ phương trình đối xứng $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{xyz}$ có ba tích phân độc lập là $\varphi_1=\frac{y}{x}, \varphi_2=\frac{z}{x}, \varphi_3=xyz-3u$. Vậy hệ đã cho có nghiệm tổng quát là

$$\Phi(\frac{y}{x},\frac{z}{x},xyz-3u)=0.$$

9.2.4. Phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Phương trình đạo hàm riêng *tuyến tính cấp 2* của hai biến độc lập (x,y) có dạng

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}+F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})=0,$$

trong đó a,b,c là những hàm khả vi liên tục tới cấp hai theo hai biến (x,y) và $a^2+b^2+c^2>0$.

1. Một số dạng đặc biệt

Dạng 1.

$$1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=F(x,y); \qquad 2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F(x,y); \qquad 3)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=F(x,y).$$

Thí dụ. Ta giải phương trình $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x - y$ bằng cách tích phân hai vế của nó theo y và thu được $\dfrac{\partial z}{\partial x} = xy - \dfrac{1}{2}y^2 + \psi(x)$. Tích phân hai vế của phương trình này theo x ta được nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}y^2 x + \int \psi(x)dx + \varphi(y),$$

trong đó $\psi(x)$ và $\varphi(y)$ là những hàm bất kì.

Dạng 2.

1) $a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d\dfrac{\partial z}{\partial x} = F(x,y)$; 2) $b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + d\dfrac{\partial z}{\partial x} = F(x,y)$;

3) $b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + e\dfrac{\partial z}{\partial y} = F(x,y)$; 4) $c\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e\dfrac{\partial z}{\partial y} = F(x,y)$.

Đây là những phương trình bậc nhất đối với biến phụ thuộc là $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ (hoặc $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$).

Thí dụ. Để giải phương trình $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial z}{\partial x} = (9x+6)e^{3x+2y}$ ta coi $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ là biến phụ thuộc, x là biến độc lập, y là hằng số, và phương trình trở thành *phương trình vi phân cấp một*: $x\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2p = (9x+6)e^{3x+2y}$. Nhân hai vế của phương trình này với x ta được $x^2\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2xp = (9x^2+6x)e^{3x+2y}$. Tích phân 2 vế theo x ta được:

$$x^2 p = \int (9x^2+6x)e^{3x+2y}dx = 3x^2 e^{3x+2y} + \phi_1(y).$$

Suy ra

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x+2y} + \frac{1}{x^2}\phi_1(y).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = e^{3x+2y} - \frac{1}{x}\phi_1(y) + \phi_2(y).$$

Dạng 3.

$$1)\quad a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial z}{\partial x}=F(x,y)\,;$$

$$2)\, b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+e\frac{\partial z}{\partial y}=F(x,y)\,.$$

Đây cũng là những phương trình đạo hàm riêng tuyến tính bậc nhất đối với p (hoặc q) và *x, y* là những biến độc lập.

Thí dụ. Ta giải phương trình $2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}=4xy^2$ bằng cách đặt $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, và phương trình này có thể được coi như là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1 không thuần nhất: $2x\frac{\partial p}{\partial x}-y\frac{\partial p}{\partial y}=4xy^2-2p$. Để giải nó theo phương pháp của Mục 9.1.3 ta lập hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dp}{4xy^2-2p}\,.$$

Dễ dàng kiểm tra, hệ này có hai tích phân độc lập là $\varphi_1=xy^2$ và $\varphi_2=\frac{p}{y^2}-2x$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình cấp một là $\frac{p}{y^2}-2x=\psi(xy^2)$. Suy ra

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+y^2\psi(xy^2)$$

và

$$z=x^2y^2+y^2\int\psi(xy^2)dx+\phi(y)=x^2y^2+\phi_1(xy^2)+\phi(y)\,.$$

Dạng 4.

$$1)\, a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+d\frac{\partial z}{\partial x}+mz=F(x,y)\,;\qquad 2)\, c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+e\frac{\partial z}{\partial y}+nz=F(x,y)\,.$$

Đây là những phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai đối với p (hoặc q) và x (hoặc y) là những biến độc lập.

Thí dụ. Phương trình $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial y}+x^2z=(x-2)e^{3x+2y}$ là phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai không thuần nhất. Nó có nghiệm là

$$z=e^{xy}\phi_1(x)+xe^{xy}\phi_2(x)+\frac{e^{3x+2y}}{x-2}\,.$$

2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Xét phương trình tuyến tính cấp hai

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)\,, \tag{*}$$

trong đó $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Dạng toàn phương

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\,.$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của phương trình (*).

Cố định điểm $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ và giả sử các hàm số $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$ và $f(x)$ được xác định trong lân cận tại điểm này. Dùng phép biến đổi $\xi_j = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{sj}\eta_s$, j=*1,...,n,* ta có thể đưa đa thức đặc trưng về dạng

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{s,l=1}^{n} a_{sl}^*\eta_s\eta_l\,.$$

Hơn nữa, từ giáo trình đại số tuyến tính ta đã biết rằng, tồn tại một phép biến đổi tuyến tính thực, không suy biến đưa dạng toàn phương $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j$ về dạng $\sum_{l=1}^{n} a_l^*\eta_l^2$ với $a_l^* = \pm 1$ hoặc 0. Số các số hạng mang dấu dương, âm, hoặc bằng 0 là bất biến đối với các phép biến đổi không suy biến. Với phép biến đổi này thì phương trình (*) trở thành

$$\sum_{l=1}^{n} a_l^*\frac{\partial^2 u}{\partial y_{2l}^2} = F(y_1,...,y_n,u,\frac{\partial u}{\partial y_1},...,\frac{\partial u}{\partial y_n}) \tag{**}$$

với $a_l^* = \pm 1$ hoặc 0.

Dạng (**) được gọi là *dạng chính tắc* của phương trình (*) tại điểm x^0. Dựa trên dạng chính tắc này người ta phân loại phương trình tuyến tính cấp hai ra các dạng cơ bản sau:

1) Phương trình (*) tại điểm x^0 được gọi là *elliptic* nếu tất cả các hệ số trong (**) khác không và mang cùng một dấu, tức là $a_l^* = 1$ hoặc $a_l^* = -1$ với mọi l = *1,...,n*.

2) Phương trình (*) tại điểm x^0 được gọi là *hyperbolic* nếu tất cả các hệ số trong (**) khác không và có một số hạng trái dấu với $n-1$ số hạng còn lại.

3) Phương trình (2.1) tại điểm x^0 được gọi là *parabolic* nếu có một hệ số $a_{l_0}^*$ nào đó trong (2.3) bằng không, tất cả các số hạng còn lại cùng dấu và hệ số của số hạng $\dfrac{\partial u}{\partial y_{i_0}}$ khác không.

Như vậy để nghiên cứu phương trình (*) người ta chỉ cần tập trung nghiên cứu các lớp phương trình *elliptic*, *hyperbolic* và *parabolic*.