Nghiên cứu ảnh hưởng của khu bảo tồn đối với hệ sinh thái chuỗi thức ăn

Giảng viên hướng dẫn: TS.Nguyễn Phương Thùy
Sinh viên thực hiện: Tạ Gia Khiêm

Viện Toán Ứng dụng và Tin học
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

14/03/2023

Yêu cầu thực tập

Nghiên cứu tìm hiểu mô hình chuỗi thức ăn 3 loài dưới sự ảnh hưởng của khu bảo tồn sử dụng hệ phương trình vi phân dựa trên luận án tiến sĩ *"Modelling, dynamics and analysis of multi-species systems with prey refuge"* của Jawad. Chứng minh tính tồn tại nghiệm, tính bị chặn và ổn định của nghiệm trên lý thuyết, đồng thời có kết quả số để kiểm chứng tính đúng đắn của lý thuyết đã nêu ra.

Mục lục

Giới thiệu

Xét mô hình chuỗi thức ăn chứa một loài mồi, một loài thú đứng giữa và thú đứng đầu chuỗi thức ăn có thể được miêu tả bằng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1x_1 + \sigma_2x_2 - \beta_1x_1y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1x_1 - \sigma_2x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2x_1y - \beta_0y - \gamma_1yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2yz - \alpha_0z. \end{cases} \tag{1}$$

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \beta_1 x_1 y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2 x_1 y - \beta_0 y - \gamma_1 yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2 yz - \alpha_0 z. \end{cases}$$

r_1, r_2: tỷ lệ tăng trưởng của loài mồi trong môi trường hoang dã và khu bảo tồn.

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right)-\sigma_1x_1+\sigma_2x_2-\beta_1x_1y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right)+\sigma_1x_1-\sigma_2x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2x_1y-\beta_0y-\gamma_1yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2yz-\alpha_0z. \end{cases}$$

k_1, k_2: tương ứng là sức chứa loài mồi trong môi trường hoang dã và khu vực bảo tồn.

Giới thiệu

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \beta_1 x_1 y, \\ \frac{dx_2}{dt} & = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2, \\ \frac{dy}{dt} & = \beta_2 x_1 y - \beta_0 y - \gamma_1 yz, \\ \frac{dz}{dt} & = \gamma_2 yz - \alpha_0 z. \end{cases}$$

σ_1: hệ số tỷ lệ di cư của loài mồi từ môi trường hoang dã đến khu bảo tồn.
σ_2: hệ số tỷ lệ di cư của loài mồi từ khu vực bảo tồn đến môi trường hoang dã.

Giới thiệu

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \beta_1 x_1 y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2 x_1 y - \beta_0 y - \gamma_1 yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2 yz - \alpha_0 z. \end{cases}$$

β_1: tỉ lệ săn loài mồi của loài thú đứng giữa chuỗi thức ăn trong môi trường hoang dã.
β_2: tỷ lệ chuyển đổi thức ăn từ loài mồi thành loài thú đứng giữa chuỗi thức ăn.

Giới thiệu

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1x_1 + \sigma_2x_2 - \beta_1x_1y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1x_1 - \sigma_2x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2x_1y - \beta_0y - \gamma_1yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2yz - \alpha_0z. \end{cases}$$

γ_1: tỷ lệ săn loài thú đứng giữa của loài thú đứng đầu chuỗi thức ăn.
γ_2: tỷ lệ chuyển đổi thức ăn từ loài thú đứng giữa thành loài thú đứng đầu chuỗi thức ăn.

Các tham số của mô hình (1) có ý nghĩa như sau:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \beta_1 x_1 y, \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_2 x_1 y - \beta_0 y - \gamma_1 yz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_2 yz - \alpha_0 z. \end{cases}$$

β_0, α_0: tương ứng là tỷ lệ chết của loài thú đứng giữa và loài thú đứng đầu chuỗi thức ăn.

Nội dung

Sự tồn tại của điểm cân bằng

Mô hình chuỗi thức ăn thú mồi với khu bảo tồn cho bởi hệ (1) có bốn điểm cân bằng không âm như sau:

- $F_0 = (0, 0, 0, 0)$ là điểm cân bằng tầm thường.
- $F_1 = (\hat{x_1}, \hat{x_2}, 0, 0)$ là điểm cân bằng không có thú đứng giữa chuỗi thức ăn.
- $F_2 = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y}, 0)$ là điểm cần bằng không có thú đứng đầu chuỗi thức ăn.
- $F_3 = (x_1^*, x_2^*, y^*, z^*)$ là điểm cân bằng dương.

Sự tồn tại của điểm cân bằng không có thú

Điểm cân bằng $F_1(\hat{x_1}, \hat{x_2}, 0, 0)$ tồn tại ở phần trong của $\mathbb{R}^2_+$ trên mặt không có thú Ox_1x_2 khi và chỉ khi $\hat{x_1}$ và $\hat{x_2}$ là nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} r_1\left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 + \frac{\sigma_2 x_2}{x_1} & = 0, \\ r_2\left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - \sigma_2 + \frac{\sigma_1 x_1}{x_2} & = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ (2),

$$x_2 = \frac{1}{\sigma_2}\Big[\frac{r_1 x_1^2}{k_1} - (r_1 - \sigma_1)x_1\Big]. \tag{3}$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng không có thú

Thay x_2 vào phương trình thứ hai của hệ (2), ta thu được:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0 \tag{4}$$

với

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_2 r_1^2}{k_2 \sigma_2^2 k_1^2} \geq 0; & b &= \frac{-2r_1 r_2 (r_1 - \sigma_1)}{k_2 k_1 \sigma_2^2} < 0; \\ c &= \frac{r_2 (r_1 - \sigma_1)^2}{k_2 \sigma_2^2} - \frac{r_1 (r_2 - \sigma_2)}{k_1 \sigma_2}; & d &= \frac{(r_1 - \sigma_1)(r_2 - \sigma_2)}{\sigma_2} - \sigma_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Theo định luật dấu Decartes, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x_1 = \hat{x}_1$ nếu và chỉ nếu:

$$\frac{r_2 (r_1 - \sigma_1)^2}{k_2 \sigma_2^2} < \frac{r_1 (r_2 - \sigma_2)}{k_1 \sigma_2}, \ (r_1 - \sigma_1)(r_2 - \sigma_2) < \sigma_1 \sigma_2.$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng không có thú

Khi đã có giá trị của $\hat{x_1}$, ta có thể thu được x_2 qua phương trình (3). Do $\hat{x_2} > 0$ nên ta có điều kiện sau:

$$\hat{x_1} > \frac{k_1}{r_1}(r_1 - \sigma_1). \tag{6}$$

Tương tự, ta có thể xác định được giá trị của $\hat{x_1}$:

$$\hat{x_1} = \frac{1}{\sigma_1}\left[\frac{r_2\hat{x_2}^2}{k_2} - (r_2 - \sigma_2)\hat{x_2}\right].$$

Với $\hat{x_2}$ là nghiệm dương xác định của phương trình 2 sao cho:

$$\hat{x_2} > \frac{k_2}{r_2}(r_2 - \sigma_2). \tag{7}$$

Các điều kiện (6) và (7) là các điều kiện cần cho sự tồn tại của điểm cân bằng không có thú F_1 tại phần trong của $\mathbb{R}^2_+$.

Sự tồn tại của điểm cân bằng không phụ thuộc vào thú đứng đầu

Điểm cân bằng F_2 nằm trong phần trong của $\mathbb{R}^3_+$ của mặt không có thú x_1x_2y khi và chỉ khi $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ và $\overline{y}$ là nghiệm dương của hệ sau:

$$\begin{cases} r_1\left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 + \frac{\sigma_2 x_2}{x_1} - \beta_1 y = 0, \\ r_2(1 - \frac{x_2}{k_2}) - \sigma_2 + \frac{\sigma_1 x_1}{x_2} = 0, \\ \beta_2 x_1 - \beta_0 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng không phụ thuộc vào thú đứng đầu

Giải hệ trên ta được:

$$
\begin{aligned}
\overline{x_1} &= \frac{\beta_0}{\beta_2}, \\
\overline{x_2} &= \frac{k_2}{2r_2\beta_2}\Big[k_2\beta_2(r_2-\sigma_2)+\sqrt{k_2^2\beta^2(r_2-\sigma_2)^2+4r_2k_2\beta_0\beta_2\sigma_1}\Big], \\
\overline{y} &= \frac{\beta_2}{\beta_0\beta_1}\Big[\frac{\beta_0(r_1-\sigma_1)}{\beta_2}-\frac{r_1\beta_0^2}{k_1\beta_2^2}+\sigma_2\overline{x_2}\Big].
\end{aligned} \tag{9}
$$

Để $\overline{y} > 0$, điều kiện sau cần thỏa mãn:

$$
\frac{\beta_0(r_1-\sigma_1)}{\beta_2}+\sigma_2\overline{x_2} > \frac{r_1\beta_0^2}{k_1\beta_2^2}. \tag{10}
$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng dương

Điểm cân bằng dương F_3 nằm trong phần trong của $\mathbb{R}^4_+$ khi và chỉ khi x_1^*, x_2^*, y^* và z^* là nghiệm dương của hệ sau:

$$\begin{cases} r_1\left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \sigma_1 + \frac{\sigma_2 x_2}{x_1} - \beta_1 y = 0, \\ r_2(1 - \frac{x_2}{k_2}) - \sigma_2 + \frac{\sigma_1 x_1}{x_2} = 0, \\ \beta_2 x_1 - \beta_0 - \gamma_1 z = 0, \\ \gamma_2 y - \alpha_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Giải hệ này ta được:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{k_2}{2r_2}\left[(r_2 - \sigma_2) + \sqrt{(r_2 - \sigma_2)^2 + \frac{4r_2\sigma_1 x_1}{k_2}}\right], \\ y &= \frac{\alpha_0}{\gamma_2}, \\ z &= \frac{\beta_2 x_1 - \beta_0}{\gamma_1}. \end{aligned}$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng dương

Thay x_2 và y vào phương trình đầu tiên của hệ (11), ta thu được phương trình sau:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0. \tag{12}$$

với:

$$\begin{aligned}
a &= \Big(\frac{-r_1^2}{k_1}\Big) < 0,\\
b &= \frac{2r_1}{k_1}\Big((r_1 - \sigma_1) - \frac{\beta_1\alpha_0}{\gamma_2}\Big),\\
c &= -\frac{2r_1}{k_1}\Big(\frac{\gamma_2 k_2}{2r_2}(r_2 - \sigma_2)\Big) + \Big((r_1 - \sigma_1) - \frac{\beta_1\alpha_0}{\gamma_2}\Big)^2,\\
d &= -\Big[\frac{\sigma_2 k_2}{r_2}(r_2 - \sigma_2)\big((r_1 - \sigma_1) - \frac{\beta_1\alpha_0}{\gamma_2}\big) + \frac{\sigma_1\sigma_2^2 k_2}{r_2}\Big].
\end{aligned} \tag{13}$$

Sự tồn tại của điểm cân bằng dương

Sử dụng luật dấu Decartes, phương trình (12) có ít nhất một nghiệm dương $x_1 = x_1^*$ nếu:

$$r_1 - \sigma_1 > \frac{\beta_1 \alpha_0}{\gamma_2}. \tag{14}$$

Để $z^* > 0$, ta cần điều kiện:

$$\beta_2 x_1^* > \beta_0. \tag{15}$$

Nội dung

1. Giới thiệu mô hình
2. Phân tích mô hình
    - Sự tồn tại của điểm cân bằng
    - Tính bị chặn của điểm cân bằng
    - Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng
3. Mô phỏng minh họa bằng kết quả số

Tính bị chặn

Bổ đề 1 (bổ đề Gronwall)

Giả sử x(t) là một hàm số liên tục không âm trên $\mathbb{R}$. Nếu tồn tại các hằng số $b, a \neq 0$ sao cho:

$$x' \leq ax + b; \; x(0) = x_0,$$

thì ta có:

$$x(t) \leq x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

Tính bị chặn

Định lý 1

Giả sử $\beta_1 \geq \beta_2$ và $\gamma_1 \geq \gamma_2$, khi đó mọi nghiệm của hệ (1) trong $\mathbb{R}^4_+$ bị chặn.

Nội dung

1. Giới thiệu mô hình
2. Phân tích mô hình
   - Sự tồn tại của điểm cân bằng
   - Tính bị chặn của điểm cân bằng
   - Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng
3. Mô phỏng minh họa bằng kết quả số

Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng

Ở phần này, tính ổn định của hệ (1) tại lân cận của các điểm cân bằng được phân tích sử dụng phương pháp Lyapunov thứ nhất.
Ma trận Jacobian của hệ (1) tại một điểm bất kỳ được cho bởi:

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & \sigma_2 & -\beta_1 x_1 & 0 \\ \sigma_1 & j_{22} & 0 & 0 \\ \beta_2 y & 0 & j_{33} & -\gamma_1 y \\ 0 & 0 & \gamma_2 z & \gamma_2 y - \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Trong đó:

$$j_{11} = r_1 - \sigma_1 - \frac{2 r_1 x_1}{k_1} - \beta_1 y,$$

$$j_{22} = \sigma_1 r_2 - \sigma_2 - \frac{2 s_2 x_2}{k_2},$$

$$j_{33} = \beta_2 x_1 - \beta_0 - \gamma_1 z.$$

Tính ổn định địa phương của F_0

Định lý 2

Điểm cân bằng suy biến $F_0 = (0, 0, 0, 0)$ là điểm không ổn định trong $\mathbb{R}^4_+$.

Tính ổn định địa phương của F_1

Định lý 3

Điểm cân bằng không có thú $F_1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0, 0)$ là ổn định tiệm cận địa phương trong $\mathbb{R}^4_+$ nếu điều kiện:

$$\beta_2 \hat{x}_1 < \beta_0 \tag{16}$$

được thỏa mãn.

Định lý 4

Điểm cân bằng không có thú đứng đầu $F_2 = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y}, 0)$ là ổn định tiệm cận địa phương trong $\mathbb{R}^4_+$ nếu điều kiện:

$$\gamma_2 \overline{y} < \alpha_0 \tag{17}$$

được thỏa mãn.

Định lý 5

Giả sử điểm cân bằng $F_3 = (x_1^*, x_2^*, y^*, z^*)$ của hệ (1) tồn tại, khi đó, F_3 là ổn định tiệm cận địa phương trong R_+^4.

Tính ổn định địa phương của F_3

Chứng minh: Ma trận Jacobian của hệ (1) tại điểm $F_3 = (x_1^*, x_2^*, y^*, z^*)$ được cho bởi:

$$J(F_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

với:

$$a_{11} = -\left(\frac{\sigma_2 x_2^*}{x_1^*} + \frac{r_1 x_1^*}{k_1}\right) < 0; \quad a_{12} = \sigma_2 > 0; \quad a_{13} = -\beta_1 x_1^* < 0;$$

$$a_{21} = \sigma_1 > 0; \quad a_{22} = -\left(\frac{\sigma_1 x_1^*}{x_2^*} + \frac{r_2 x_2^*}{k_2}\right) < 0; \quad a_{31} = \beta_2 y^* > 0;$$

$$a_{34} = -\gamma_1 y^* < 0; \quad a_{43} = \gamma_2 z^*.$$

Tính ổn định địa phương của F_3

Phương trình đặc trưng của $J(F_3)$ được cho bởi:

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0.$$

Các hệ số của phương trình đặc trưng được cho bởi:

$$A_1 = -M_1 > 0, A_2 = M_2 + M_3 > 0, A_3 = a_{11}M_4 - a_{22}M_3, A_4 = -M_2M_4,$$

với,

$$M_1 = a_{11} + a_{22} < 0, M_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$
$$M_3 = -a_{13}a_{31} - a_{34}a_{43} > 0, M_4 = a_{34}a_{43} < 0.$$

Theo tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, mọi trị riêng của $J(F_3)$ có phần thực âm do $A_1 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0$ và $\Delta > 0$. Do đó, F_3 ổn định tiệm cận địa phương trong R^4_+ (đpcm).

Mô phỏng minh họa bằng kết quả số

Ta sẽ thực hiện các mô phỏng số để tìm ra các tham số quan trọng ảnh hưởng đến mô hình. Hệ (1) được giải số sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4.
Ta chọn bộ tham số sau:

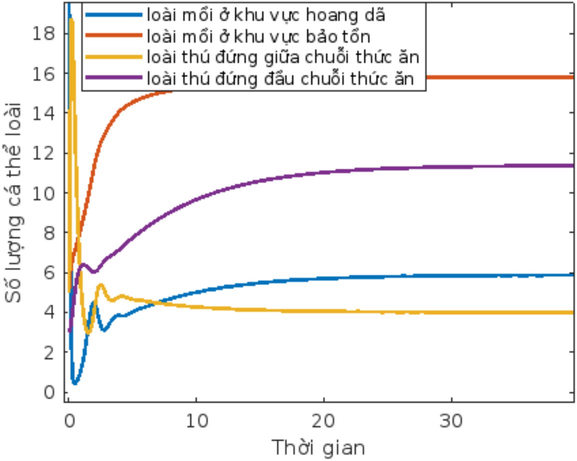
$$r_1 = 2.9; r_2 = 1.4; k_1 = 60; k_2 = 25; \sigma_1 = 0.5;$$
$$\sigma_2 = 0.7; \beta_1 = 1.0; \beta_2 = 0.8; \beta_0 = 0.15; \gamma_1 = 0.4;$$
$$\gamma_2 = 0.1; \alpha_0 = 0.4; x_1(0) = 20; x_2(0) = 5; y(0) = 5; z(0) = 3;$$

Sử dụng bộ tham số này, ta thu được điểm cân bằng dương

$$F_3 = (5.87, 15.82, 3.99, 11.38).$$

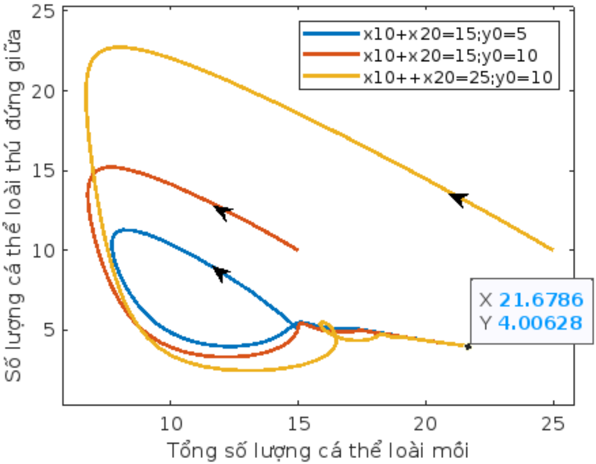
Mô phỏng minh họa bằng kết quả số

Kết quả được cho trong hình 1.



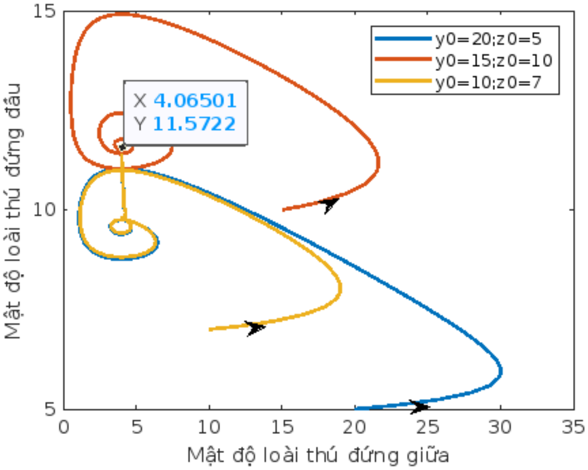
Hình: Số lượng các loài theo thời gian

Sự phụ thuộc của loài mồi và loài thú đứng giữa chuỗi thức ăn



Hình: Sự phụ thuộc của loài mồi và loài thú đứng giữa chuỗi thức ăn

Sự phụ thuộc của loài thú đứng giữa và đứng đầu chuỗi thức ăn



Hình: Sự phụ thuộc của loài thú đứng đầu và loài thú đứng giữa chuỗi thức ăn

Kết luận

Trong quá trình thực tập em đã thực hiện được những công việc sau:

- Hiểu và trình bày được mô hình bài toán.
- Chứng minh và tìm điều kiện về tính tồn tại, tính bị chặn và tính ổn định địa phương của bài toán.
- Tự tìm một bộ số liệu phù hợp, chạy mô phỏng bằng Matlab chứng minh tính đúng đắn của lý thuyết.

Hướng phát triển

Định hướng trong tương lai:

- Tiếp tục nghiên cứu về tính ổn định toàn cục của bài toán.
- Tìm hiểu các mô hình bài toán khác liên quan.

Tài liệu tham khảo

[1] Warder Clyde Allee. Animal aggregations. *The Quarterly Review of Biology*, 2(3):367–398, 1927.
[2] Shireen Jawad. *Modelling, dynamics and analysis of multi-species systems with prey refuge*. PhD thesis, Brunel University London, 2018.
[3] Vito Volterra. *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*. Nature, 119(2983):12–13, 1927. 17

Em xin cảm ơn thầy cô và mọi người đã lắng nghe!