

5. Vorlesung: Diskrete Zufallsvariablen

Nikolas Tapia

29. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

Definition 5.1

Ein allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bestehend aus einer beliebigen Ergebnismenge Ω , einer Klasse von "geeigneten" Ereignissen \mathcal{A} und einer Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} , die die Axiomen von Kolmogorov erfüllt.

Ergebnismenge
↓
Maß

Anmerkung 1

Wir annehmen stets, dass alle Ereignisse von Interesse "geeignet" sind.

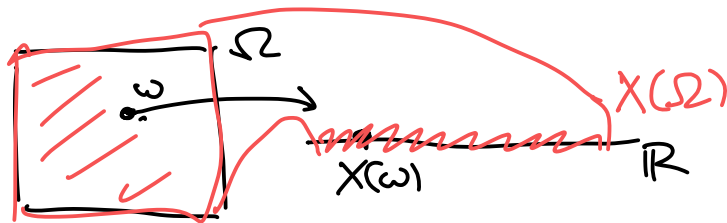
Definition 5.2

Eine **Zufallsvariable** ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Das Bild $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir den **Wertebereich** von X .

Definition 5.3

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, wenn ihr Wertebereich endlich oder abzählbar unendlich ist.



Definition 5.4

Sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $E \subset \mathbb{R}$. Dann, das Urbild

$$X^{-1}(E) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \subseteq \Omega.$$

ist ein Ereignis.

Definition 5.5

Wir verwenden folgende Kurzschreibweise:

$$\{X \in E\} := X^{-1}(E)$$

$$\{X = x\} := X^{-1}(\{x\})$$

$$\{X \leq x\} := X^{-1}((-\infty, x])$$

$$\mathbb{P}(X \in E) := \mathbb{P}(X^{-1}(E))$$

$$\mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) := \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, x])). \text{ usw.}$$

Definition 5.6

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariable und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von n Variable.
Dann ist $f(X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(X_1, \dots, X_n)(\omega) := f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

wieder eine Zufallsvariable.

Bsp: $\Omega = \{ (1,1), \dots, (6,6) \}$ 2-fach Würfeln.

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &:= \omega_1 & S(\omega) &= \omega_1 + \omega_2 = g(X_1, X_2), \quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ X_2(\omega) &:= \omega_2 & f(x) &:= x^2 & Z &:= f(X_1) = X_1^2 \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion

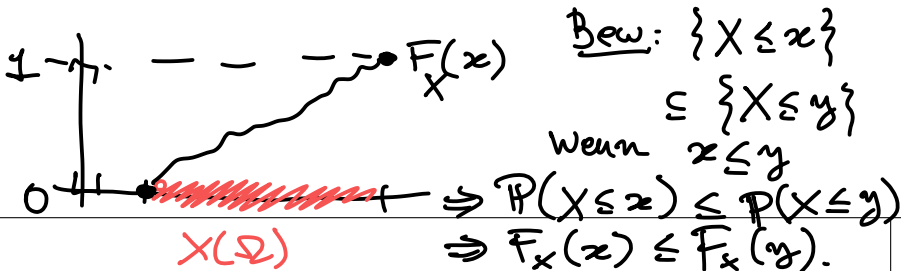
Definition 5.7

Sei X eine (allg.) Zufallsvariable. Die **kumulative Verteilungsfunktion** F_X von X ist definiert als

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) \leq x\})$$

Aussage 5.1

Die kumulative Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X ist monoton steigend.



Aussage 5.2

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\mathbb{P}(X \in (a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Bew:

$1. \{X > x\} = \{X \leq x\}^c$ $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$ $\Rightarrow \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$	$2. \{X \in (a, b]\}$ $= \{a < X \leq b\}$ $= \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(X \in (a, b])$ $= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$ $\stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(X \in (a, b]) = \downarrow$
---	--

Verteilung einer diskreten Zufallsvariable

Definition 5.8

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die **Verteilung** (oder Wahrscheinlichkeitsfunktion) von X ist die Funktion

$$p_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad p_X(x) := \mathbb{P}(X = x).$$

Anmerkung 1

Die *Verteilung* einer *diskrete* Zufallsvariable sollte nicht mit der *kumulative Verteilungsfunktion* einer *beliebigen* Zufallsvariable verwechselt werden.

Aussage 5.3

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann gilt

1. $\sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1,$
2. $F_X(x) = \sum_{y \leq x} p_X(y).$

Bew: $X^{-1}(\omega) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X=x\}$ 2. $\{X \leq x\} = \bigcup_{y \leq x} \{X=y\}$

$\Rightarrow 1 = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x)$ $P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X=y)$

$\Rightarrow F_X(x) = \sum_{y \leq x} p_X(y)$

$$\Omega = \{(1,1), \dots, (6,6)\}, \quad \text{ZV } S(\omega) := \omega_1 + \omega_2$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36} \Rightarrow \text{LR.} \quad \left| \quad S(\Omega) = \{2, \dots, 12\}\right.$$

Verteilung? $P_S(k), k \in S(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P_S(2) &= \mathbb{P}(S=2) \\ &= \mathbb{P}(\{(1,1)\}), \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned} \quad \begin{aligned} P_S(3) &= \mathbb{P}(S=3) \\ &= \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1)\}) \\ &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

S nicht gleichverteilt.



k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
$p_X(k)$ \approx	$\frac{1}{36}$ 0,027	$\frac{1}{18}$ 0,055	$\frac{1}{12}$ 0,083	$\frac{1}{9}$ 0,111	$\frac{5}{36}$ 0,138	$\frac{1}{6}$ 0,166	$\frac{5}{36}$ 0,138	$\frac{1}{9}$ 0,111	$\frac{1}{12}$ 0,083	$\frac{1}{18}$ 0,055	$\frac{1}{36}$ 0,027

X heißt gleichverteilt, falls $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$
und

$$P_X(k) = \frac{1}{n}$$

z.B.:

$$X(\Omega) = \left\{ \overset{1}{\bigcirc}, \overset{2}{\triangle}, \overset{3}{\square}, \overset{4}{*} \right\} \dots$$

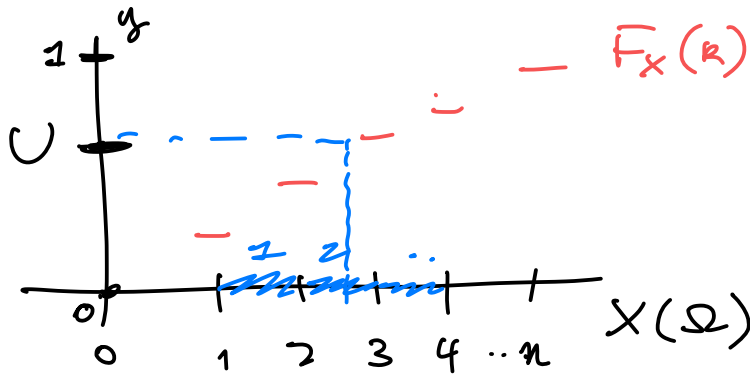
$X(\Omega) = [0, 1]$, $P_X(x)$ nicht def.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = x.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \in (a, b]) = b - a, \quad \forall (a, b] \subseteq [0, 1]$$

X ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.

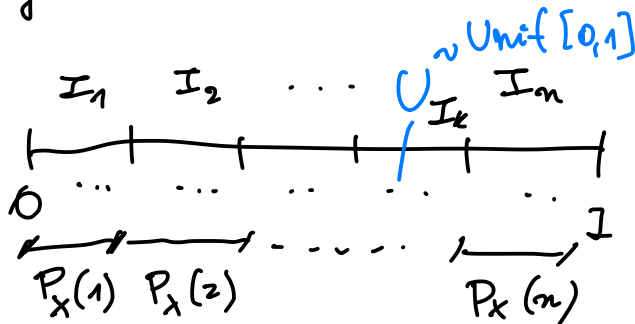
Simulation von Zufallsvariablen mit endlichem Wertebereich



Simulation von Zufallsvariablen mit endlichem Wertebereich

Im allg.

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\},$$



$$\Rightarrow X = k \text{ falls } U \in I_k$$

Definition 5.9

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen: **Erfolg** und **Misserfolg**.

Ein **wiederholtes Bernoulli-Experiment** besteht aus unabhängigen Bernoulli-Experimenten, bei dem die Wahrscheinlichkeiten für Erfolg und Misserfolg in jeder Ausführung gleich sind.

Bernoulli-Verteilung

Definition 5.10

Eine Zufallsvariable X heißt **Bernoulli-verteilt** mit Parameter $p \in [0, 1]$, falls $X(\Omega) = \{0, 1\}$ und $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

↑ ↑
Misserfolg Erfolg.

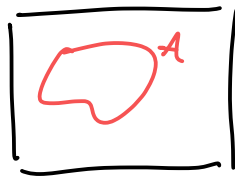
$$\Omega = \{K, Z\}, X = 11_K(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = Z \\ 1 & \omega = K \end{cases}$$

$$P(X=1) = P(K) = 1/2 \quad X(\Omega) = \{0, 1\},$$

$$P(X=0) = P(Z) = 1/2$$

X Bernoulli-verteilt, mit param. $1/2$

Im allg. $P(K) = p \Rightarrow X \sim \text{Bernoulli}(p)$,



$$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fläche von } A \\ \leftarrow \text{Fläche von } \Omega. \end{array}$$

\leftarrow Indikatorfkt.

$$X = \mathbb{1}_A = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\{\omega : \omega \in A\}) \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} = p \end{aligned}$$

$$P(X=0) = 1 - p$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Bern}(p).$$

Definition 5.11

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Eine Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit Parametern n und p , falls $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ und

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

X ist die Anzahl Erfolg bei einem wiederholten Bernoulli-Experiment.

Beisp: Falls $n=1$: $p^k (1-p)^{1-k}$, $k=0, 1$.

Falls $n=2$: $\binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}$, $k=0, 1, 2$.

$$P_X(2) = p^2 = P((\text{Erfolg}, \text{Erfolg}))$$

Aussage 5.4

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in [0, 1]$. Dann ist die Zufallsvariable $Y := X_1 + \dots + X_n$ binomialverteilt mit Parametern n und p .

$Y \sim \text{Anzahl der Erfolg.}$

Anzahl k ? $X_i = 1_{\{\text{Kopf im } i\text{-te Versuch}\}}$
 bei n Versuche. $\sim \text{Bernoulli}(1/2)$
 //

$$Y = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Binomial}(n, 1/2)$$

$$P_Y(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$