

## 2. Vorlesung: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nikolas Tapia

18. April 2024, Stochastik für Informatik(er)

### Definition 1

Ein **Laplace-Raum** ist ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, d.h.  $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$  für alle  $\omega \in \Omega$ .

### Aussage 1

In einem Laplace-Raum ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A \subset \Omega$  gegeben durch

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Dabei ist  $|A|$  die Anzahl der Elemente in  $A$ .

Bew:  $A \subset \Omega$ :  $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\} = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \dots + \mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{|\Omega|} + \dots + \frac{1}{|\Omega|} = \frac{k}{|\Omega|} \quad \square$$



$$\Omega = \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}(1) : \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

$$A = \{\omega = w : w \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6\}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{\omega = w \neq 4\} = \{1, 2, 3, 5, 6\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\Omega_2 = \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6) \}.$$

$$|\Omega_2| = 36 = 6^2$$

$$A = \{ \omega : \omega \text{ Pasch} \} = \{ (1,1), (2,2), \dots, (6,6) \}$$

$$= |A| = 6$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{1}{6}$$

## Wiederholtes Zufallsexperiment

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit  $k$  möglichen Ergebnissen. (1-fach Z.E.)

Wiederholen wir das Experiment  $n$ -mal unter gleichbleibenden Bedingungen.

Wir bezeichnen mit  $\Omega_n$  die Menge aller möglichen Folgen des  $n$ -fach wiederholten Experiments, d.h.

$$\Omega_n := \{\omega = \underbrace{(\omega_1, \dots, \omega_n)}_{\substack{\text{k} \quad \text{Mögl.} \\ \text{Mögl.}}} : \omega_i \in \Omega\}.$$

Dann gilt  $|\Omega_n| = k^n$ .

Element aus  $\Omega_n$  bezeichnen wir mit  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , ein geordnetes Tupel.

$$\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}$$

$$\Omega_2 = \{(1,1), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\}, |\Omega_2| = 36$$

$$\Omega_3 = \{(1,1,1), (1,1,2), \dots\}, |\Omega_3| = 6^3$$

$$\vdots$$

$$\Omega_n = \{(w_1, \dots, w_n) : w_i \in \Omega\}$$

$$|\Omega_n| = 6^n \quad \underline{\text{LR.}}$$

## Ein geeignetes Raum konkret angeben

Oft möglich, oft nicht sinnvoll.

**Alternativen**

- Wahrscheinlichkeiten statistisch schätzen.
- Modellierung über Teilexperimenten, oft im Form von *Urnenmodellen*.
- Zufallsvariable durch ihre **Verteilung** definieren.  $\rightarrow$  in 2 Woche.

## Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

$\mathbb{P}$  ist sehr oft nicht direkt messbar.

Die **absolute Häufigkeit**  $H_n(\omega_i)$  von  $\omega_i \in \Omega$  ist die Anzahl der Realisierungen, in denen  $\omega_i$  bei  $n$  Versuchen auftritt.

Die **relative Häufigkeit**  $h_n(\omega_i) := \frac{H_n(\omega_i)}{n}$  von  $\omega_i$  ist der Anteil der Realisierungen, in denen  $\omega_i$  bei  $n$  Versuchen auftritt.

Die relative Häufigkeit  $h_n(\omega_i)$  ist ein Näher für die theoretische Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\omega_i)$ .



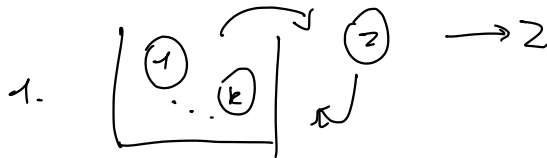
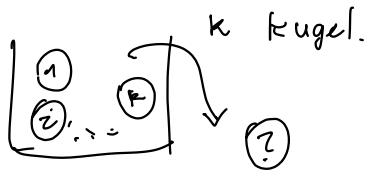
$$X_1, \dots, X_n$$



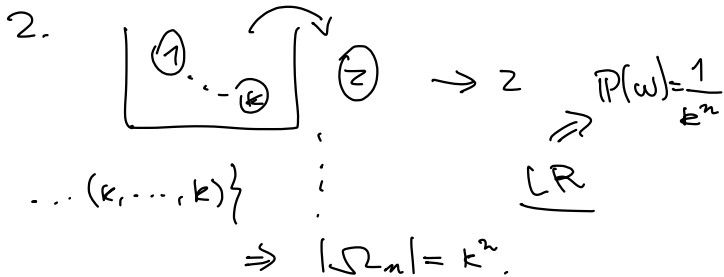
$$Z_1, \dots, Z_n = \begin{cases} 0 & \sim \\ 1 & X_i \in O \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X \in O) \approx \frac{\sum Z_i}{n} \quad (n \rightarrow \infty, \mathbb{P}(X \in O) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum Z_i}{n})$$




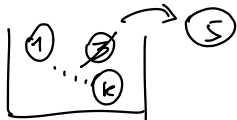


$$\Omega_1 = \{1, \dots, k\}$$



$$\Omega_n = \left\{ \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n, \dots, (k, \dots, k) \right\}$$

1.   $k$  Mögl.

2.   $k-1$  Mögl.

3.   $k-2$  Mögl.  
⋮

$$n \leq k$$

$$k(k-1) \dots (k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} = |\Omega|$$

$$P(\omega) = \frac{(k-n)!}{k!}$$

1.  $\boxed{1 \dots k}$   $\textcircled{?}$   $k$  Mögl.

2.  $\boxed{1 \dots k}$   $k-1$  Mögl.

$$\begin{aligned} \underline{(1, 3, 11)} &= \underline{(3, 11, 1)} \\ &= \underline{(11, 3, 1)} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{(1, 3, 11)} &= \underline{(3, 11, 1)} \\ &= \underline{(11, 3, 1)} \end{aligned}} \right\} \text{Permutation}$$

$$= \{1, 3, 11\}$$

$$\Omega = \{(w_1, \dots, w_n) : w_i \in \Omega, w_1 < \dots < w_n\}.$$

$$|\Omega| = \frac{k!}{(k-n)!n!} = \binom{k}{n} \stackrel{\text{LR}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(w) = \frac{1}{\binom{k}{n}}.$$

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$$\mathbb{P}(1) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} \quad (\text{LR}).$$

$A = \{\omega : \omega \text{ ist gerade}\} \rightarrow \text{Zusatz Info}$

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

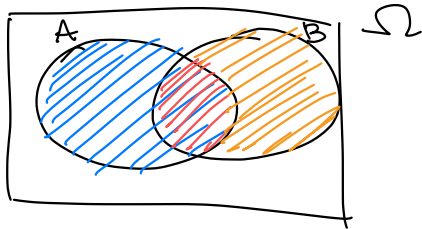
$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3}$$

(nicht LR).

## Definition 2

Seien  $A, B \subset \Omega$  Ereignisse mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B**, ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{blue oval}}{\text{rectangle}} \rightarrow \Omega$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\text{red oval}}{\text{orange oval}}$$

Bemk:  $\mathbb{P}(\cdot|B)$   
ist W'keit ~~map~~

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega|B) &= \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \end{aligned}$$

## Definition 2

Seien  $A, B \subset \Omega$  Ereignisse mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Die **bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$** , ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\Omega|B) &= \mathbb{P}(\Omega \cap B) \\ &= \mathbb{P}(B) < 1 \end{aligned} \quad \times \quad \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{2. Axiom von} \\ \text{Kolmogorov.} \end{array}$$



$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$$\mathbb{P}(1) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$$

$$A = \{\omega: \omega \text{ ist gerade}\}$$

$$B = \{\omega: \omega \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{4, 6\})}{\mathbb{P}(\{2, 4, 6\})} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$$\begin{aligned}
 C &= \{ \omega : \omega \leq 3 \}, & \mathbb{P}(C|A) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
 & & &= \frac{\mathbb{P}(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\})}{\mathbb{P}(\{2, 4, 6\})} \\
 & & &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

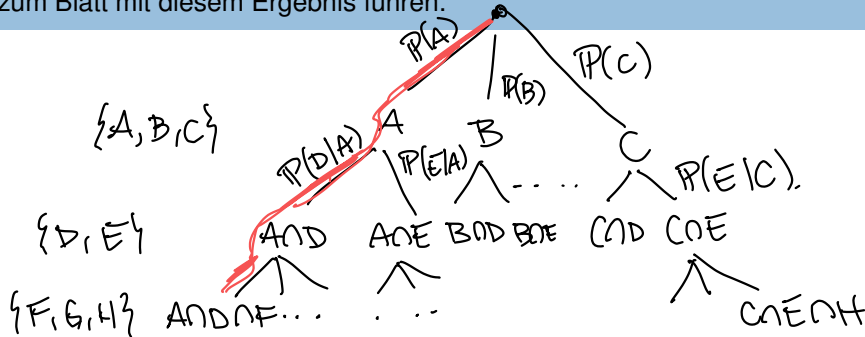
$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(C|A)$$



## Multiplikationsregel

## Aussage 2

In einem mehrstufigen Experiment berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch **Multiplikation** der Wahrscheinlichkeiten entlang der Kanten, die zum Blatt mit diesem Ergebnis führen.



$$P(A \cap D \cap F) = P(F|AND)P(D|A)P(A) \quad \text{usw.}$$