TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Lösungsvorschlag Übung 2

Abgabe bis Freitag, den 10.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 18 besprochen (29.04.-03.05.).
- Fällt ihr Tutorium auf einen Feiertag, besuchen Sie bitte eines der anderen Tutorien.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 2.1

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A,\ B,\ C \in \Omega$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) A, B, C unabhängig und $A \subset B \subset C \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1$,

(ii) A ist eine Ereignis mit $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1 \Longrightarrow$ für jedes $B \subset \Omega$ sind A und B unabhängig,

Lösung für Tutoriumsaufgabe 2.1

(i) Wir haben

$$A \subset B \subset C \Rightarrow A \cap B \cap C = A \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)$$

und

$$A,\ B \text{ und } C \text{ unabhängig} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

dann $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ und $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1$.

(ii) Sei $B \subset \Omega$. Wenn $\mathbb{P}(A) = 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ (weil $A \cap B$ eine Teilmenge ist und $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$), also $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Wenn $\mathbb{P}(A) = 1$, haben wir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ (weil $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ und $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$, da $\mathbb{P}(A^c) = 0$), also ist $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ auch in diesem Fall und A und B sind in beiden Fällen unabhängig.

Tutoriumsaufgabe 2.2

Seien $\Omega := \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{27}$, $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{14}{27}$, $\mathbb{P}(\{c\}) = \mathbb{P}(\{d\}) = \mathbb{P}(\{e\}) = \frac{4}{27}$ sowie

$$A := \{d, e, a\}, \qquad B := \{c, e, a\}, \qquad C := \{c, d, a\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Ereignisse nicht paarweise unabhängig sind. Prüfen Sie also die Unabhängigkeit von A und C, A und B sowie B und C.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 2.2

(i) $A \cap B \cap C = \{a\}$ und $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(a) = \frac{1}{27}$. Zu bemerken ist nur noch, dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{4+4+1}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

(ii) Gegenbeispiel: $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{a, d\}) = \frac{5}{27} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{9}{27} \cdot \frac{9}{27} = \frac{1}{9}$. Für die anderen beiden Ereignisse liefert die Rechnung das gleiche Ergebnis, daher sind auch diese nicht unabhängig.

Tutoriumsaufgabe 2.3

Im U-Bahnhof Wittenbergplatz beobachten wir einen Zug der U-Bahn-Linie U1, einen Zug der U2 und einen Zug der U3. Die U1 kommt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{10}$ pünktlich, die U2 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{10}$ und die U3 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{10}$. Dabei ist jeder Zug pünktlich unabhängig von allen anderen. Bestimmen Sie für den Fall, dass genau zwei von den drei Zügen pünktlich waren, was wahrscheinlicher ist: Die U3 war pünktlich, oder die U3 war nicht pünktlich?

Lösung für Tutoriumsaufgabe 2.3

Nach Aufgabenstellung wissen wir, dass die U-Bahnen mit den folgenden Wahrscheinleichkeiten pünktlich kommen:

$$P(U_1) = \frac{5}{10}, P(U_2) = \frac{6}{10} \quad \text{und} \quad P(U_3) = \frac{7}{10}\ .$$

Damit folgt, dass die einzelnen U-Bahnen auch mit folgender Wahrscheinlichkeit nicht pünktlich eintreffen:

$$P(U_1^c) = \frac{5}{10}, P(U_2) = \frac{4}{10} \quad \text{und} \quad P(U_3) = \frac{3}{10}\ .$$

Sei T_j das Ereignis, dass es genau j pünktliche Züge gibt. Dann erhalten wir

$$T_2 = (U_1 \cap U_2 \cap U_3^c) \cup (U_1 \cap U_2^c \cap U_3) \cup (U_1^c \cap U_2 \cap U_3)$$

(diese Zerlegung ist disjunkt) sowie

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2) &= \mathbb{P}(U_1 \cap U_2 \cap U_3^c) + \mathbb{P}(U_1 \cap U_2^c \cap U_3) + \mathbb{P}(U_1^c \cap U_2 \cap U_3) \\ &= \frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{1000} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 7}{1000} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1000} = \frac{90 + 140 + 210}{1000} = \frac{440}{1000}.\end{aligned}$$

Mittels Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_3|T_2) &= \frac{\mathbb{P}(U_3 \cap T_2)}{\mathbb{P}(T_2)} = \frac{\mathbb{P}\big((U_1^c \cap U_2 \cap U_3) \cup (U_1 \cap U_2^c \cap U_3)\big)}{\mathbb{P}(T_2)} \\ &= \frac{(5 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 4 \cdot 7)/1000}{440/1000} = \frac{(210+140)}{1000} \cdot \frac{1000}{440} = \frac{350}{440}.\end{aligned}$$

Also $\mathbb{P}(U_3|T_2) = \frac{35}{44}$ und die U3 war eher pünktlich als, dass sie nicht pünktlich war.

Tutoriumsaufgabe 2.4

Hinter einer der drei geschlossenen Türen 1, 2 und 3 befindet sich ein Auto, hinter den anderen beiden nichts. Der Teilnehmer wählt zunächst die Tür 1. Dann öffnet der Moderator eine der beiden Türen, die nicht ausgewählt sind und hinter denen sich kein Auto befindet. Der Teilnehmer kann dann entweder seine ursprüngliche Wahl behalten oder er wählt die andere Tür, die noch geschlossen ist. Er gewinnt das Auto, wenn es sich hinter dem Tür seiner Wahl befindet.

(i) Seien A_i, $i = 1, 2, 3$ und M_j $j = 2, 3$ die Ereignisse

$$A_i := \text{“das Auto befindet sich hinter der } i\text{-ten Tür”}\,,$$
$$M_j := \text{“der Moderator öffnet die } j\text{-te Tür”}\,.$$

Berechen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_i)$ und $\mathbb{P}(M_j|A_i)$.

(ii) Welche sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_i|M_j)$?

(iii) Wie würde Ihre Strategie aussehen, wenn Sie dieser Kandidat wären?

Lösung für Tutoriumsaufgabe 2.4

(i) Gemäß den Spielregeln haben wir :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}(M_2|A_1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(M_2|A_2) = 0\,, \quad \mathbb{P}(M_2|A_3) = 1\,,$$
$$\mathbb{P}(M_3|A_1) = \frac{1}{2}\,, \quad \mathbb{P}(M_3|A_2) = 1\,, \quad \mathbb{P}(M_3|A_3) = 0\,.$$

(ii) Nach der Bayes'schen Formel gilt somit:

$$\mathbb{P}(A_1|M_2) = \frac{\mathbb{P}(M_2|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(M_2)} = \frac{\mathbb{P}(M_2|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(M_2|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$
$$\frac{1/2 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(A_3|M_2) = 1 - \mathbb{P}(A_2|M_2) - \mathbb{P}(A_1|M_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1|M_2) = \frac{2}{3}.$$

Gleichweise

$$\mathbb{P}(A_1|M_3) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathbb{P}(A_2|M_3) = \frac{2}{3}$$

Und natürlich $\mathbb{P}(A_2|M_2) = \mathbb{P}(A_3|M_3) = 0$.

(iii) Der Spieler hat ein Interesse (im Sinne der Wahrscheinlichkeiten), seine Wahl nach dem Öffnen einer der Türen zu ändern.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 2.1 (3=1+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A,\ B,\ C \in \Omega$. Beweisen Sie die beiden Behauptungen:

(i) $A \cap B = \emptyset$ und A, B unabhängig $\Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 0$.

(ii) A, B unabhängig $\Longrightarrow A^c$ und B sowie A^c und B^c sind unabhängig.

Hausaufgabe 2.2 (3=2+1 Punkte)

Eine Münze mit Kopf K und Zahl Z wird dreimal geworfen und die Ergebnisse werden betrachtet. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A :=&\{(K,K,K,K)\,; \quad (K,K,Z,K)\,; \quad (K,Z,K,K)\,; \quad (K,Z,Z,K)\,; \\ &(K,K,K,Z)\,; \quad (K,K,Z,Z)\,; \quad (K,Z,K,Z)\,; \quad (K,Z,Z,Z)\}\,, \\ B :=&\{(K,K,K,K)\,; \quad (K,K,Z,K)\,; \quad (K,Z,K,K)\,; \quad (Z,K,K,K)\,; \\ &(K,K,K,Z)\,; \quad (Z,Z,Z,K)\,; \quad (K,Z,Z,K)\,; \quad (Z,Z,Z,Z)\}\,, \\ C :=&\{(K,K,K,K)\,; \quad (Z,K,Z,K)\,; \quad (Z,Z,K,K)\,; \quad (Z,Z,Z,K)\}\,. \end{aligned}$$

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um diese Ereignisse zu bewerten und zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

(ii) Bilden diese Ereignisse A, B, C eine unabhängige Familie von Ereignissen, d.h. sind A, B, C unabhängig?

Hausaufgabe 2.3 (6=2+2+1+1 Punkte)

Vor uns stehen zwei Urnen. Die erste Urne enthält drei schwarze und vier weiße Kugeln, die zweite Urne enthält zwei schwarze und fünf weiße Kugeln. Eine faire Münze wird geworfen um zu entscheiden, aus welcher Urne gezogen wird. Man zieht dann nacheinander mit Zurücklegen zwei Kugeln aus der gewählten Urne.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel schwarz ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist?

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist, falls die erste Kugel schwarz ist?

(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist, falls die Urne mit vier weißen Kugeln gewählt wurde und die erste Kugel schwarz ist?

(iv) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne mit vier weißen Kugeln gewählt wurde, falls die erste Kugel schwarz ist?

Hausaufgabe 2.4 (8=2+3+3 Punkte)

Wir betrachten die Wolfspopulation in einem Gebiet und gehen davon aus, dass das biologische Geschlecht der Welpen in jedem Rudel gleichverteilt ist. Betrachten Sie ein allgemeines Rudel mit n Welpen und die Ereignisse:

$$A := \{\text{das Rudel hat Welpen beider biologische Geschlechter.}\}$$

$B :=$ {es gibt höchstens einen Welpen mit weiblichen Geschlecht in der Familie.}

(i) Formulieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ zur Beschreibung aller möglichen solchen Rudel mit n Welpen, wobei $n \in \mathbb{N}$, und übersetzen Sie die Ereignisse A und B als Teilmengen von Ω.

(ii) Wie groß sind $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \cup B)$?

(iii) Wie groß ist $\mathbb{P}(A \cap B)$? Für welche Wert n sind die Ereignisse A und B unabhängig?