1	2	3	4	Σ
3	4	4	3	14

lau

Hausarbeit im Modul „Stochastik für Informatik“

Hausaufgabe 1

Van Hoa Nguyen, Valentin Louis Heine und Joshua Kobschätzki
0483979, 0481925, 0483038

2. Mai 2024

Hausaufgabe 1.1 $\boxed{3/4}$

(i) mindestens ein Monitor ist defekt: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

(ii) kein Monitor ist defekt: $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

(iii) höchstens ein Monitor ist defekt:
$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$

(iv) mindestens ein Monitor ist defekt: $A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c$

(v) genau ein Monitor ist defekt: $(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)$ f

(vi) genau zwei Monitore sind defekt: $(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3)$

Hausaufgabe 1.2 $\boxed{4/6}$

(i) Seien $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) && |\text{Ausklammern von } A \cup B \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) && |\text{Rechenregel 4} \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) && |\text{Rechenregel 4, } \mathbb{P}(A \cup B) \\
&- \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) && | \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) && |\text{Regel 4, } \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&- \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

(ii) Seien A und B zwei Ereignisse, für die gilt: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, das für $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$

Wir zeigen zunächst einmal, dass die De Morgan Regel $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ für $A, B \subseteq \Omega$ gilt.

$$\left.\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\iff x \notin A \cap B \\ &\iff x \notin A \text{ oder } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ oder } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cup B^c \end{aligned}\right\}$$

unnötig hier.

$\square$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbb{P}((A \cap B)^c) && |\text{Rechenregel 3} \\ &= 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) && |\text{De Morgan} \\ &= 1 - (\underbrace{\mathbb{P}(A^c)}_{0{,}5} + \underbrace{\mathbb{P}(B^c)}_{0{,}5} - \mathbb{P}(A^c \cap B^c)) && |\text{Rechenregel 4 einsetzen} \\ &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c) && |\text{Zusammenfassen} \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(C \cap A) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 1$ für $A, B, C \subseteq \Omega$. In welchem Fall liegt die Identität vor, d. h. wann gilt die Gleichheit ("=")?

das ist z.z. $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(C \cap A) &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 1 \\ 1 &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) \end{aligned}$$

Für den Beweis verwenden wir die bereits bewiesene Aussage aus (i), die wir umstellen und einsetzen.

-1 Das sollt ihr nicht herleiten. Ihr sollt damit die Ungleichung zeigen

$$1 \geq \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

falsch -1

Wenn $(A \cap B \cap C) = \emptyset$ und $(A \cup B \cup C) = \Omega$, dann liegt die Identität vor, da $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Es folgt $1 \geq \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, da $0 \leq \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq 1$ und $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq 1$. Die Differenz beider Wahrscheinlichkeiten kann nicht größer als 1 werden.

Somit folgt die Aussage.

Hausaufgabe 1.3

4/4

(i)

$$\Omega = \{1, ..., 6\}^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{216}$$

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \geq 11\}$$

(ii) f.a. $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in A$ gilt, dass die Augensumme zwischen 11 und 18 ist, somit gilt f.a. $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ist die Augensumme a von $g((\omega_1, \omega_2, \omega_3))$ mit $3 \leq a \leq 10$, da die hübsch

Funktion $g((\omega_1, \omega_2, \omega_3))$ ein Element ausgibt mit der Augensumme $(21 - a)$. Es folgt $g(A) \cap A = \emptyset$. Umgekehrt da jedes Element in A^c maximal die Augensumme 10 und hat und $21 - 10 = 11$ ist, folgt $g(A^c) \cap A^c = \emptyset$. Da g eine bijektive Funktion ist gilt das $g(A) \cup g(A^c) = \Omega$ und $g(A) \cap g(A^c) = \emptyset$ somit muss $g(A)$ jedes Element in A^c abdecken, da $g(A^c) \cap A^c = \emptyset$, somit folgt $g(A) = A^c$. $\square$

(iii) Da es sich hier um einen Laplace Raum handelt gilt $|A| = \frac{|\Omega|}{2} \implies \mathbb{P}(A) = 0,5$. Es ist ersichtlich, dass wenn $|A| = |A^c| \implies \frac{|\Omega|}{2} = |A|$, da $A \cap A^c = \emptyset$ und $A \cup A^c = \Omega$.

$|A| = |A^c|$ gilt aus (ii) da eine Bijektion zwischen A und A^c existiert. Somit ist $\mathbb{P}(A) = 0,5$ ✓

Hausaufgabe 1.4 $\boxed{3/6}$

(i)

$$\Omega = \{1, \ldots, n\}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \ldots, n\}\} \checkmark$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n^2} \checkmark$$

A = ... ? −0,5

(ii) $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, wobei

$$A_k = \{(k, j) \in \Omega \mid k > j\}, \ k = 1, \ldots, n$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (k - 1)$$

(✓) Erklärung? −0,5

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k - 1}{n^2} = \frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2} = \frac{(n-1) \cdot n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

Begründung? −0,5

(iii) Wir nehmen an, dass es keinen 0-seitigen Würfel gibt, also $n, m \geq 1$ und aus der Aufgabenstellung gilt $m > n$.

(a)

$$\Omega = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \checkmark$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{1}{m \cdot n} \checkmark$$

(b) $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, wobei

A = ... ? −0,5

$$A_k = \{(k, j) \in \Omega \mid k > j\}, \ k = 1, \ldots, n$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (k - 1)$$

✓ Begründung? −1

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (k - 1)}{m \cdot n} = \frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{m \cdot n} = \frac{(n-1) \cdot n}{2 \cdot m \cdot n} = \frac{n-1}{2m} \checkmark$$