FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin
Prof. Stephan Kreutzer

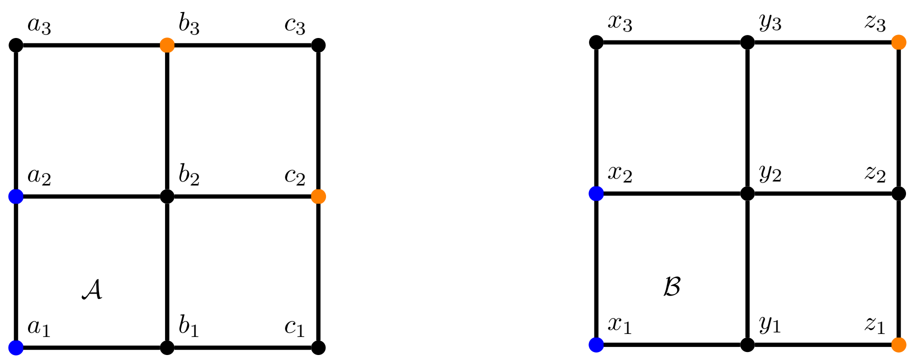
SoSe 2024
Stand: 25. April 2024

Lösungsvorschläge zur 0. freiwilligen Hausaufgabe – Logische Methoden der Informatik

Im Laufe der Vorlesung werden wir uns noch einmal mit Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen beschäftigen, da sie ein nützliches Werkzeug sind um die Ausdrucksstärke insbesondere der Prädikatenlogik erster Stufe zu analysieren. Dementsprechend soll dieses Übungsblatt als Erinnerungshilfe dienen. In erster Linie möchten wir darüber nachdenken wie sich "Distanz in Graphenäuf die ihre Unterscheidbarkeit auswirkt. Sollten Sie sich nicht mehr daran erinnern, was ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel ist, können Sie eine aktuelle Version des Logik-Skripts auf der ISIS-Seite dieses Kurses finden. Für die Zwecke dieser Vorlesung reicht es aus auf Graphen (eventuell mit Farben) zu spielen.

Hausaufgabe 1

Sei $\sigma := \{E, O, B\}$, wobei O und B zwei einstellige Relationssymbole sind und E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind durch die folgende Abbildung gegeben, wobei die orange gefärbten Knoten in der jeweiligen Interpretation von O enthalten sind und die blau gefärbten Knoten in der Interpretation von B.



(i) Geben Sie eine unterscheidende Formel für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit minimalem Quantorenrang an.

(ii) Bestimmen Sie das minimale $m \in \mathbb{N}$ für welches der Herausforderer eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ besitzt. Geben Sie eine entsprechende Gewinnstrategie für den Herausforderer an.

Lösung zu Hausaufgabe 1

(i) $\exists x \forall y (E(x, y) \rightarrow O(y))$

(ii) Das minimale m für den Herausforderer ist 2. Die Duplikatorin gewinnt das 1-Runden-Spiel, da es in beiden Graphen jeweils ungefärbte, orangene und blaue Knoten und keine doppelt gefärbten Knoten, oder Knoten mit Schleifen gibt.

Um das 2-Runden-Spiel zu gewinnen, wählt der Herausforderer zu erst c_3 und die Duplikatorin antwortet mit einem Knoten $b \in B$. In der zweiten Runde wählt der Herausforderer nun einen Nachbarn von b, welcher nicht orange gefärbt ist. Für jeden Knoten in $\mathcal{B}$ existiert ein solcher Knoten. Allerdings besitzt c_3 keine nicht-orangen Nachbarn, also kann die Duplikatorin nicht antworten und verliert.

Hausaufgabe 2

(Der wichtige Teil dieser Aussage ist zu verstehen, dass wir in EF-Spielen große Distanzen nicht mehr unterscheiden können. Außerdem ist die Aussage für die nächste Aufgabe nützlich.)

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}^+$, dass $[k] := \{0, 1, 2, \dots, k\}$ und wir definieren die Struktur $\mathcal{C}_k$ als $([k-1], E^{\mathcal{C}_k})$ mit

$$E^{\mathcal{C}_k} := \{(i, i+1 \bmod k) \mid 0 \le i < k\} \cup \{(i, i-1 \bmod k) \mid 0 \le i < k\}$$

. Seien $m, n \in \mathbb{N}^+$ beliebig und $p := 2^m$.

(i) Definieren Sie eine (sinnvolle) Hilfsfunktion $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_n} : [n] \times [n] \to \mathbb{N}$, welche den Abstand zwischen zwei Knoten in der Struktur $\mathcal{C}_n$ beschreibt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Duplikatorin das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{2p})$ gewinnt, indem Sie eine Strategie angeben für welche folgende Invariante in jeder Runde des Spiels gilt:

Invariante Seien a_i und b_i die Elemente aus $\mathcal{C}_p$ bzw. $\mathcal{C}_{2p}$ die in der i-ten Runde gewählt wurden. Am Ende der i-ten Runde gilt für alle $x, y \in [i] \setminus \{0\}$ mit $x < y$ folgende Aussage:

(1) Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_p}(a_x, a_y) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{C}_{2p}}(b_x, b_y)$, dann $\min(\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_p}(a_x, a_y), \mathrm{dist}_{\mathcal{C}_{2p}}(b_x, b_y)) \ge 2^{m-i+1}$.

(2) Es gibt einen Pfad P in C_p mit $V(P) \cap \{a_1, \dots, a_i\} = \{a_x, a_y\}$ genau dann wenn es einen entsprechenden Pfad Q in C_{2p} gibt mit $V(Q) \cap \{b_1, \dots, b_i\} = \{b_x, b_y\}$.

Lösung zu Hausaufgabe 2

(i) Wir definieren für eine Struktur die Funktion $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_n} : [n] \times [n] \to \mathbb{N}$ durch $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_k}(x, y) = \min(x - y \bmod n, y - x \bmod n)$.

(ii) Wir geben eine Strategie für die Duplikatorin an, sodass die gefragte Invariante am Ende jeder Runde gilt. Diese Strategie ist dann eine Gewinnstrategie wie wir anschließend sehen werden (überlegt euch hier schon mal warum).

Runde 1: Nachdem der Herausforderer den Knoten h_1 in der Struktur $\mathcal{H} \in \{\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{2p}\}$ gespielt hat, wählt die Duplikatorin irgendeinen Knoten d_1 aus der anderen Struktur. Die Invariante hält am Ende der Runde, da nur die Elemente $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ gespielt wurden (oBdA nehmen wir an, dass beide die 0 gespielt haben, sonst nummeriere um).

Runde 2: Sei $\mathcal{H}$ die vom Herausforderer gewählte Struktur, $\mathcal{D}$ die andere Struktur und h_2 das vom Herausforderer gespielte Element. Seien h_1, d_1 die in der ersten Runde gespielten Elemente in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{D}$.

Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) > 2^{m-1}$ spielt die Duplikatorin $d_1 + 2^{m-1} \bmod |D|$.

Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) \le 2^{m-1}$ spielt die Duplikatorin einen Knoten d_2 mit $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2)$.

Da $|D| \ge 2^m$ gibt es in beiden Fällen so einen Knoten d_2 und die Invariante hält.

Runde i: Sei $\mathcal{H}$ die vom Herausforderer gewählte Struktur, $\mathcal{D}$ die andere Struktur und h_i das vom Herausforderer gespielte Element in Runde i. Wir wählen h_x und h_y als zwei vorherig gespielte Elemente aus H—das heißt $x, y < i$—so, dass der Pfad P zwischen h_x und h_y der den Knoten h_i enthält so kurz wie möglich ist. Insbesindere liegen also auf dem Pfad P_i nur die gespielten Knoten $\{h_x, h_i, h_y\}$ und somit lagen nach Runde $(i-1)$ nur die gespielten Knoten h_x, h_y auf dem Pfad. Insebsondere ist der Pfad P nach Runde $(i-1)$ wie in der Invarianten gegeben und demnach gibt es einen Pfad Q zwischen d_x, d_y in $\mathcal{D}$ der keine weiteren gespielten Knoten enthält.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $h_x + 1 \in P$ und entsprechend $d_x + 1 \in Q$; sonst nummeriere den Kreis um.

Jetzt gilt also wegen der Invariante entweder $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y) = \mathrm{dist}_(\mathcal{D})(d_x, d_y)$ oder beide sind größer als 2^{m-i+2}.

Sei $\ell \coloneqq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_i)$ und $r = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_i, h_y)$. Falls $\min(\ell, r) > 2^{m-i+1}$—und damit $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y) \geq 2^{m-i+2}$—spielt die Duplikatorin den Knoten $d_x + 2^{m-i+1} \bmod |D|$. Sonst spielt sie $d_x + \ell \bmod |D|$ falls $\ell \leq r$ oder $d_y - r \bmod |D|$ falls $r \leq \ell$.

Per Induktion wurden alle Runden $j \in [i-1]$ mit $j > 2$ auf diese Art gespielt.

Nun beweisen wir, dass die Invariante gilt. Offensichtlich ist (2) weiterhin erfüllt (wenn nicht zeigt es per Induktion).

Es bleibt (1) zu zeigen. (1) is per Induktion für alle Knotenpaare aus Runde $(i-1)$ erfüllt. Daher reicht es alle Knotenpaare mit h_i und d_i zu analysieren. Angenommen, es gebe also einen Knoten $d_z \in D$ mit $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_i) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_z, h_i)$. Wir betrachten zu erst die Fälle $d_z \notin \{d_x, d_y\}$.

Sei R der kürzeste Pfad zwischen d_z und d_i. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $d_x \in R$, da das Argument für $d_y \in R$ analog verläuft. Jetzt spielen wir noch ein bisschen mit der Dreiecksungleichung rum: Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_x) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_z, h_x)$ gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_x) \geq 2^{m-i+2}$ durch die Invariante, und somit ist $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_i) = \mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_x) + \mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_i) \geq 2^{m-i+2} > 2^{m-i+1}$. Also folgt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_x) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_z, h_x)$, womit $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_i) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_i)$ gelten muss, damit $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_z, d_i) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_z, h_i)$. Um den Fall $d_z \notin \{d_x, d_y\}$ abzuschließen müssen wir uns also nur noch überzeugen dass die Invariante für d_x, d_y gilt.

Es bleiben also nur noch die Fälle zu betrachten, in denen $d_z = d_y$ oder $d_z = d_x$.

Falls $\min(\ell, r) > 2^{m-i+1}$ ist $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y) > 2^{m-i+2}$, und somit gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_y) \geq 2^{m-i+2}$ durch die Invariante. Nach Wahl von d_i ist $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_i) = 2^{m-i+1}$ und $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_y, d_i) \geq 2^{m-i+2} - 2^{m-i+1} \geq 2^{m-i+1}$.

Sonst gilt o.B.d.A. $r \leq 2^{m-i+1}$. ($\ell \leq 2^{m-i+1}$ folgt analog indem wir r durch ℓ und d_y durch d_x ersetzen.)

Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y) < 2^{m-i+2}$ gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_y) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y)$ durch die Invariante. Also gilt nach Wahl von d_i, dass $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_i) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_i)$ und $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_i, d_y) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_i, h_y)$.

Falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_y) \geq 2^{m-i+2}$ gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_y) \geq 2^{m-i+2}$ durch die Invariante. Nach Wahl von d_i gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_y, d_i) = \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_y, h_i)$. Des Weiteren ist $\mathrm{dist}_{\mathcal{D}}(d_x, d_i) \geq 2^{m-i+2} - 2^{m-i+1} \geq 2^{m-i+1}$ und, laut Annahme über ℓ, gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_x, h_i) \geq 2^{m-i+1}$. Also gilt die Invariante in allen Fällen.

Am Ende der m-ten Runde gilt die Invariante also immer noch.

Gewinnstrategie: Es handelt sich um eine Gewinnstrategie. Seien $a_i, a_j \in C_p$ zwei Knoten von $\mathcal{C}_p$, die in Runde i bzw. j gespielt wurden, und seien b_i, b_j die entsprechende Knoten von $\mathcal{C}_{2p}$. Es gilt $E^{\mathcal{C}_p}(a_i, a_j)$ genau dann, wenn $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_p}(a_i, a_j) = 1$, und das gleiche gilt für b_i, b_j in $\mathcal{C}_{2p}$. Wegen der Invariante gilt $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_p}(a_i, a_j) > 2^{k-k+1} = 2$ falls $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}_p}(a_i, a_j) \neq \mathrm{dist}_{\mathcal{C}_{2p}}(b_i, b_j)$. Also gilt $E^{\mathcal{C}_p}(a_i, a_j)$ genau dann, wenn $E^{\mathcal{C}_{2p}}(b_i, b_j)$. Somit gibt es einen partiellen Isomorphismus zwischen den gespielten Knoten, und die Duplikatorin gewinnt das m-Runden Spiel.

Hausaufgabe 3

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Zeigen Sie, dass der Zusammenhang eines Graphen in $\mathrm{FO}[\sigma]$ nicht definierbar ist.

Zur Erinnerung: Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls für alle $u, v \in V(G)$ ein Pfad zwischen u und v in G existiert.

Lösung zu Hausaufgabe 3

Anmerkung: Dies ist eine Beweisskizze. Die Details sind dem Leser überlassen und hauptsächlich Formalitäten. Im wesentlichen sind die Ideen des Beweises genau wie in Aufgabe 2.

Angenommen Zusammenhang wäre in FO[σ] definierbar, so würde eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ existieren welche ausschließlich von σ-Strukturen erfüllt wird, welche zusammenhängende Graphen sind. Sei m der Quantorenrang dieser Formel.

Wir werden nun zwei Graphenstrukturen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ definieren, sodass $\mathcal{G}_1$ zusammenhängend ist, $\mathcal{G}_2$ nicht zusammenhängend ist und die Duplikatorin eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ besitzt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und beweist die Aussage.

Sei C_n der Kreis der Länge n, sei $\mathcal{G}_1$ die Graphenstruktur von $C_{2^{(m+1)}}$ und sei $\mathcal{G}_2$ die Graphenstruktur von $C_{2^m} + C_{2^m}$, also der disjunkten Vereinigung zweier Kopien von C_{2^m}. Wir gehen davon aus, dass das Universum von $\mathcal{G}_1$ die Form $\{N_0, a_1, \ldots, a_{2^m-1}, S_0, a_{2^m+1}, \ldots, a_{2^{(m+1)}-1}\}$ und das Universum von $\mathcal{G}_2$ die Form $\{\tilde{N}_0, u_1, \ldots, u_{2^m-1}, \tilde{S}_0, v_1, \ldots, v_{2^m-1}\}$ besitzen, wobei $\{\tilde{N}_0, u_1, \ldots, u_{2^m-1}\}$ und $\{\tilde{S}_0, v_1, \ldots, v_{2^m-1}\}$ jeweils einen der beiden Kreise in $\mathcal{G}_2$ induzieren. Um die Notation zu erleichtern werden wir die Indizes dieser Variablen jeweils zyklisch behandeln, also ist zum Beispiel $u_{2^m+1} = \tilde{N}_0$ u.s.w. Außerdem nennen wir die zwei Kreise in $\mathcal{G}_2$ der Einfachheit halber C_1 und C_2. Der Kreis in $\mathcal{G}_1$ wird C genannt. Ferner werden wir der Einfachheit halber $i \in C$ schreiben wenn wir $a_i \in C$ meinen und analog für C_1 und C_2 wobei a_i wieder für das in der i-ten Runde gezogene Element in C steht.

Wir adaptieren nun die Strategie aus Aufgabe 2 und geben eine Strategie an, welche dieselbe Invariante wie in Aufgabe 2 erfüllt (und etwas mehr). Dazu definieren wir die Distanz genau wie in Aufgabe 2 und erweiteren sie für $u \in C_1,\ \ v \in C_2$ um $\mathrm{dist}_{\mathcal{G}_2}(u, v) = 2^m$. Die Quintessenz ist, dass ein gespielter Knoten a_i nur noch seine 2^{m-i-1} Nachbarschaft 'sehen kann', und wir also den Distanzen zu diesem Knoten nur dann Aufmerksamkeit geben müssen wenn wir in Runde k in seine 2^{m-k-1} Nachbarschaft reinspielen. *Diese Erkenntnis wird auch nochmal von Relevanz sein im Beweis des Satzes von Gaifman später in der Vorleusng.*

Runde 1: OBdA werden N_0 und $\tilde{N}_0$ gespielt (ansonsten nenne die Elemente so um). Definiere $I_N^1 := [N_0 - 2^{m-1}, N_0 + 2^{m-1}]$ als die Nordhalbkugel von C und $I_S^1 := C - I_N^1$ als die Südhalbkugel. (Intervalle sind als Teilmengen von $\mathbb{N}$ zu verstehen). Das heißt $C = I_N^1 \cup I_N^2$.[1]

Runde 2: Sei $h_2 \in \mathcal{H}$. Jetzt gibt es 4 Fälle:

1. $\mathcal{H} = C$ und $h_2 \in I_N^1$. Dann gilt $\ell := \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) \leq 2^{m-1}$ und wir spielen $d_2 = d_1 + \ell$. Setze nun $I_N^2 = [N_0 - 2^{m-2}, h_2 + 2^{m-2}] \cup [h_2 - 2^{m-2}, N_0 + 2^{m-2}]$ (diese Definition ist ein Trick um das Intervall zu definieren das vom linken Element der beiden noch 2^{m-1} nach links und vom rechten noch 2^{m-1} nach rechts geht).

2. $\mathcal{H} = C$ und $h_2 \in I_S^1$. Dann gilt $\ell := \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) \geq 2^{m-1}$ und wir spielen $d_2 = \tilde{S}_0$. Setze nun $I_N^2 = [N_0 - 2^{m-2}, N_0 + 2^{m-2}]$

3. $h_2 \in C_1$. Dann gilt $\ell := \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) \leq 2^{m-1}$ und wir spielen $d_2 = d_1 + \ell$ (bemerke dass in dem Fall $d_1 = N_0 \in C$). Setze nun $I_N^2 = [N_0 - 2^{m-2}, d_2 + 2^{m-2}] \cup [d_2 - 2^{m-2}, N_0 + 2^{m-2}]$. (Wir haben oBdA rechts von N_0 gespielt damit wir plus rechnen können)

4. $h_2 \in C_2$, dann gilt oBdA $h_2 = \tilde{S}_0$, ansonsten nenne die Elemente im Kreis zyklisch um. Dann gilt $\ell := \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(h_1, h_2) > 2^{m-1}$ und wir spielen $d_2 = S_0$. Setze $I_N^2 = [N_0 - 2^{m-2}, N_0 + 2^{m-2}]$.

(Wir waren hier etwas ungenau, es könnte sein, dass man links von d_1 spielen sollte falls h_2 links von h_1 liegt, i.e., wir müssten $d_1 - \ell$ spielen zum Beispiel. Aber man kann oBdA annehmen, dass h_1 links von h_2 liegt ansonsten zeichnen wir den Kreis neu aber gespiegelt.)

Das Intervall I_N^2 ist in Korrespondenz mit C_1 und $C - I_N^2$ mit C_2. Man bemerke, dass es zwischen einem Knoten in der "Nordhalbkugel"(es ist keine Halbkugel mehr) und einem Knoten in der 'Südhalbkugel' eine Distanz von mindestens 2^{m-1} gibt; also so dass man die Nachbarschaft dazischen nicht mehr in $m-2$ Zügen abtasten kann.

Runde i:

[1] Hier müsste man präziser sein, die Intervalle sind ja per Definition erstmal keine Graphen.

Invariante: Angenommen die Invariante aus Aufgabe 2 gilt und wir haben zusätzlich ein Interval $I_N^{i-1} = [min_{i-1} - 2^{m-(i-1)}, max_{i-1} + 2^{m-(i-1)}]$ konstruiert, so dass das Interval nicht länger ist als 2^m und die Distanz der Ränder des Intervals zu den gespielten Knoten in I_N^{i-1} jeweils mindestens $2^{m-(i-1)}$ ist (max_{i-1} und min_{i-1} stehen für die bisher am weitesten außen gespielten Knoten). Ferner soll es zwischen einem Knoten in der "Nordhalbkugel"(es ist keine Halbkugel mehr) und der 'Südhalbkugel' eine Distanz von mindestens $2^{m-(i-2)}$ geben. Weiter gilt, dass die gespielten Elemente in I_N^{i-1} genau den gespielten Elementen in C_1 entsprechen. (Diese Invariante ist wie oben bemerkt bis zur Runde 2 erfüllt und somit greift die Induktion).

Der Herausforderer spielt jetzt $h_i \in \mathcal{H}$. Es gibt wieder vier Fälle die wir in zwei Fälle gruppieren. Primär wollen wir die Nordhalbkugel in C verschieben falls H in sie reinspielt, und H imitieren falls er in C_1, C_2 spielt. Falls H in die 'Südhalbkugel' spielt, spielen wir genau so wie in Aufgabe 2 zwischen der Südhalbkugel und C_2.

- *$h_i \in I_N^{i-1}$ oder $h_i \in C_1$:* Sei h_x der am nächsten zu h_i gespielte Knoten in I_N^{i-1} respektiv in C_1 und d_x das dazugehörige Element in der jeweils anderen Struktur (also in C_1 oder I_N^{i-1} per Induktionsannahme). OBdA nehmen wir an, dass h_x links von h_i liegt [2]. Falls $\ell = \text{dist}(h_x, h_i) < 2^{m-i}$ dann spielen wir $d_i = d_x + \ell$. Falls $\ell \geq 2^{m-i}$ dann spielen wir $d_i = d_x + 2^{m-i}$. Der Leser überzeuge sich, dass in den relevanten Fällen tatsächlich $d_i \in I_N^{i-1}$ gilt (wir haben genug Platz am Rand) und wir dank der Invariante (der Teil aus Aufgabe 2) auch sonst 'genug Platz' zwischen Elementen haben um d_i zu spielen. Letztlich definieren wir nun I_N^i wie folgt: seien $min_i, max_i \in I_N^{i-1} \cap \{h_1, \ldots, h_i, d_1, \ldots, d_i\}$ das am weitesten links und am weitesten rechts gespielte Element in der Nordhalbkugel nach Runde i. Dann definieren wir $I_N^i = [min_i - 2^{m-i}, max_i + 2^{m-i}]$. Man überprüft leicht, dass dieses Interval wieder die Invariante erfüllt: nur einer der beiden min_i oder max_i ist in Runde i anders als in Runde $i-1$ da nur ein Element in I_N^{i-1} in der Runde gespielt wurde. OBdA haben wir $min_{i-1} = min_i$ und $max_i > max_{i-1}$. Dann gilt $max_i \leq max_{i-1} + 2^{m-(i-1)}$. Der neue rechte Randknoten des Intervals liegt also bei $R \leq max_i + 2^{m-i}$. Dank der Invarianten (Induktionsannahme) ist die Distanz von max_{i-1} zum nächsten gespielten Knoten in der Südhalbkuel mindestens $2^{m-(i-2)}$. Dies impliziert also dass die Distanz von R zum ersten gespielten Knoten in der Südhalbkugel mindestens 2^{m-i} sein muss. Folglich ist die Distanz von max_i zum nächsten gespielten Knoten in der Südhalbkugel $2 * 2^{m-i} = 2^{m-(i-1)}$ und die Invariante hält. Dass das Interval nicht länger ist als 2^m ist offensichltich aus der Konstruktion und dass die Distanzen wie in Aufgabe 2 erhalten bleiben zeigt man analog zu Aufgabe 2.
- *$h_i \notin I_N^{i-1}$ oder $h_i \in C_2$:* Sei h_x der am nächsten zu h_i gespielte Knoten in $C - I_N^{i-1}$ respektiv in C_2 und d_x das dazugehörige Element in der jeweils anderen Struktur (also in C_2 oder $C - I_N^{i-1}$ per Induktionsannahme). OBdA nehmen wir an, dass h_x rechts von h_i liegt. Falls $\ell = \text{dist}(h_x, h_i) < 2^{m-i}$ dann spielen wir $d_i = d_x + \ell$. Falls $\ell \geq 2^{m-i}$ dann spielen wir $d_i = d_x + 2^{m-i}$. Der Leser überzeuge sich, dass in den relevanten Fällen tatsächlich $d_i \in C - I_N^{i-1}$ gilt (wir haben genug Platz am Rand) und wir dank der Invariante (der Teil aus Aufgabe 2) auch sonst 'genug Platz' zwischen Elementen haben um d_i zu spielen. Letztlich definieren wir nun $I_N^i \coloneqq [min_{i-1} - 2^{m-i}, max_{i-1} + 2^{m-i}]$. Auch hier bleibt die Invariante erfüllt wie man analog zu oben einsehen kann.

Dies vollendet den Beweis, da man mit der Invariante nun analog zu Aufgabe 2 wieder zeigen kann, dass zwei gespielte Elemente in $\mathcal{G}_1$ Nachbarn sind genau dann wenn die jeweils gespielten Elemente in $\mathcal{G}_2$ Nachbarn sind.

[2] wir wollen plus rechnen