Lösungsvorschläge zum 1. Tutorium – Logische Methoden der Informatik

Auf diesem Blatt beschäftigen wir uns mit der monadischen Prädikatenlogik der zweiten Stufe. Am Ende des Blatts betrachten wir insbesondere ein paar Beispiele für die Kodierung von Worten (und im weiteren Sinne Sprachen) in Strukturen.

Aufgabe 1

(i) Geben Sie eine MSO[$\emptyset$]-Formel $\psi(A, B, C)$ an, welche besagt, dass $A = B \setminus C$ gilt.

(ii) Sei $\sigma = \{\leq\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol $\leq$. Finden Sie eine MSO[σ]-Formel welche genau dann durch eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ erfüllt wird, wenn $\leq^{\mathcal{I}}$ durch eine lineare Ordnung gerader Länge interpretiert wird.

(iii) Sei $\tau = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Finden Sie ein $\varphi_{path}(a, b) \in$ MSO[τ], sodass $\mathcal{G} \models \varphi_{path}[u, v]$ genau dann, wenn es in $\mathcal{G}$ einen Pfad von u nach v gibt.

(iv) Sei τ die Signatur aus der vorherigen Unteraufgabe. Erstellen Sie eine MSO[τ]-Formel, welche genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{G}$ einen Kreis enthält.

(v) Sei τ die Signatur aus der vorherigen Unteraufgabe. Erstellen Sie eine MSO[τ]-Formel $\varphi(X)$, welche von einer Menge X in einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}})$ genau dann erfüllt wird, wenn X eine maximale unabhängige Menge ist. (Maximalität in diesem Kontext verlangt, dass wir keinen Knoten in die Menge hinzufügen können ohne die Eigenschaft zu verlieren.)

Lösung zu Aufgabe 1

(i) $\psi(A, B, C) \coloneqq \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B \wedge x \notin C)$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z((x \leq y \vee y \leq x) \wedge (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \wedge (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \wedge \\
&\exists X \exists Y(\min \in X \wedge \max \in Y \wedge \\
&\forall x \forall y(x < y \wedge \neg(\exists z(x < z \wedge z < y)) \rightarrow (x \in X \leftrightarrow y \in Y)) \wedge \forall x(x \in X \leftrightarrow x \notin Y))
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\varphi_{path}(x, y) \coloneqq &\forall A \forall B(\forall z(z \in A \leftrightarrow z \notin B) \wedge x \in A \wedge y \in B \ \rightarrow \\
&\exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge E(a, b)))
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
&\exists x \exists y \exists z(E(x, z) \wedge E(y, z) \wedge \forall A \forall B(z \notin A \cup B \wedge \forall w(w \neq z \rightarrow (w \in A \leftrightarrow w \notin B)) \wedge \\
&x \in A \wedge y \in B \rightarrow \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge E(a, b))))
\end{aligned}$$

(v) $\varphi(X) \coloneqq \forall x(x \in X \vee \exists y(y \in X \wedge E(x, y))) \wedge \forall x \forall z(x \in X \wedge z \in X \rightarrow \neg E(x, z))$

Aufgabe 2

Sei $\Sigma \coloneqq \{a, b, c\}$. Geben Sie MSO$[\sigma_\Sigma]$-Formeln an, welche die folgenden Sprachen definieren.

(i) a^*ac

(ii) $b(a^*bb)^*$

Lösung zu Aufgabe 2

(i) $\varphi \coloneqq P_c(max) \wedge P_a(min) \wedge \forall x(x \neq max \rightarrow P_a(x))$

(ii)

$$\begin{aligned}\varphi \coloneqq &P_b(min) \wedge P_b(max) \wedge \forall x \neg P_c(x) \wedge \\ &\exists B_0 \exists B_1 (\forall x(P_b(x) \rightarrow (x \in B_0 \leftrightarrow x \notin B_1) \wedge min \in B_1 \wedge max \in B_1)) \wedge \\ &\forall x(P_a(x) \rightarrow (\forall y(succ(y,x) \wedge P_b(y) \rightarrow y \in B_1) \wedge \forall z(succ(x,z) \wedge P_b(z) \rightarrow z \in B_0))) \wedge \\ &\forall x(P_b(x) \wedge P_b(x+1) \rightarrow (x \in B_0 \leftrightarrow x+1 \in B_1))\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei $\Sigma \coloneqq \{a, b, c\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck an welcher die selbe Sprache beschreibt wie folgende MSO$[\sigma_\Sigma]$-Formel:

$$\begin{aligned}&P_a(min) \wedge \exists X \exists Y \Big(min \in X \wedge \forall x(x \notin X \leftrightarrow x \in Y) \wedge \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in Y \rightarrow x \leq y) \wedge \\ &\forall x(x \in X \rightarrow P_a(x)) \wedge \\ &\forall y(y \in Y \rightarrow \big((\neg P_b(y) \rightarrow P_b(y-1) \wedge P_b(y+1)) \wedge (P_b(y) \rightarrow \neg P_b(y-1))\big)\Big)\end{aligned}$$

wobei $y+1$ der Nachfolger und $y-1$ der Vorgänger von y sind.

Lösung zu Aufgabe 3

$aa^*((ba+bc)^*b+\varepsilon)$