Gegenbeispiel zur Unabhängigkeit von 3 Ereignissen

Nikolas Tapia

22. April 2024

In der 3. Vorlesung haben wir gesehen, dass im Allgemein bei drei Mengen die Unabhängigkeit von allen möglichen Schnittmengen abhängt. Hier ein Gegenbeispiel:

Betrachten wir zwei faire Würfel, die ein nach dem anderen geworfen werden. Das geeignete Wahrscheinlichkeitsraum ist $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ mit Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$. Also es handelt sich um einen Laplace-Raum.

Seien A, B, C folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned}
A &:= \{\text{die Summe der Augenzahlen ist genau 7}\}, \\
&= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \\
B &:= \{\text{die Augenzahl des ersten Würfels ist genau 3}\}, \\
&= \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}, \\
C &:= \{\text{die Augenzahl des zweiten Würfels ist genau 4}\} \\
&= \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}.$$

Einerseits sind diese Menge paarweise unabhängig, denn mit

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(3,4)\}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Anderseits sind sie nicht unabhängig, denn

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Im demselben Wahrscheinlichkeitsraum betrachten wir nun die Ereignisse A', B', C' mit:

$$\begin{aligned}
A' &:= \{\text{die erste Augenzahl ist 1, 2 oder 3}\}, \\
B' &:= \{\text{die erste Augenzahl ist 3, 4 oder 5}\}, \\
C' &:= \{\text{die Summe der Augenzahlen ist genau 9}\}.
\end{aligned}$$

Wir sehen eben, dass

$$\mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(B') = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C') = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

und

$$\mathbb{P}(A' \cap B' \cap C') = \mathbb{P}(\{(3,6)\}) = \frac{1}{36}.$$

Jedoch sind A', B', C' nicht paarweise unabängig, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A' \cap B') = \frac{6}{36} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B'), \\
\mathbb{P}(A' \cap C') = \frac{3}{36} \neq \frac{1}{18} = \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(C'), \\
\mathbb{P}(B' \cap C') = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = \mathbb{P}(B')\mathbb{P}(C').
\end{aligned}$$