TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Lösungsvorschlag Übung 1

Abgabe bis Freitag, den 03.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 17 besprochen (22.04.-26.04.).
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 1.1

Sei eine Urne mit 9 Kugeln gegeben, welche von 1 bis 9 nummeriert sind. Es wird zufällig eine Kugel gezogen. Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse. Seien nun die folgenden Ereignisse als Teilmenge von Ω definiert:

- $A = \{\text{Ergebnis ist mindestens } 4\}$,
- $B = \{\text{Ergebnis ist höchstens } 8\}$,
- $C = \{\text{Ergebnis ist gerade}\}$;

Durch Mengenoperationen können wir neue Ereignisse beschreiben. Geben Sie die folgenden Ereignisse durch Auflisten ihrer Elemente an:

(i) Ω

(ii) $A \cap B$

(iii) $B \cup C$

(iv) $(A^c \cup B^c) \cap C$

Lösung für Tutoriumsaufgabe 1.1

Die Menge aller möglichen Ergebnisse ist $\Omega = \{1, \cdots, 9\}$. Weiter gilt für die Ereignisse:

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{1, \cdots, 8\}, \quad C = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Damit erhalten wir

(i) $\Omega = \{1, \cdots, 9\}$

(ii) $A \cap B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $B \cup C = B$

(iv) Beginnend mit den Identitäten $A^c = \{1, 2, 3\}$, $B^c = \{9\}$, folgt

$$(A^c \cup B^c) \cap C = \{1, 2, 3, 9\} \cap C = \{2\}.$$

Tutoriumsaufgabe 1.2

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. es gelten

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq \Omega$, (*Positivität*)
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ (*Additivität*).
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ falls $B \subseteq A \subseteq \Omega$,

(ii) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ für $A, B \subseteq \Omega$,

Lösung für Tutoriumsaufgabe 1.2

(i) Die Behauptung folgt aus der Additivität wegen

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(B \cup (A \setminus B)\big) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$$

wegen der Disjunktheit der beiden Ereignisse nach Subtraktion von $\mathbb{P}(B)$. Die Ungleichheit ist eine Folge der Positivität $\mathbb{P}(A \setminus B) \geq 0$.

(ii) Wegen Monotonie impliziert $A \subseteq \Omega$ die Ungleichheit $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Außerdem folgt die Gleichheit $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ aus der Rechnung

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) = 2\mathbb{P}(\emptyset).$$

(iii) Wegen $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ und $A \cap B \subseteq B$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

nach Teil (i). **Anmerkung:** Die hier vorgestellten Berechnungen zusammen mit der Identität

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

sind nicht nur einfache algebraische Manipulationsübungen, sondern echte Theoreme, die uns helfen, die Wahrscheinlichkeit einiger Ereignisse A zu berechnen, für die die Verwendung nur der Definition sehr kompliziert ist (siehe Tutoriumaufgabe 1.4).

Tutoriumsaufgabe 1.3

Wir betrachten das Experiment, das aus dem Werfen zweier fairer, unterscheidbarer Würfel besteht.

(i) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an.

(ii) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch Teilmengen von Ω und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

a) Die Augensumme ist größer oder gleich 9.

b) Die Augensumme ist ungerade.

c) Die Augenzahlen beider Würfel sind gerade.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 1.3

(i) Wie im Buch erklärt, ist der natürliche Ergebnisraum zur Beschreibung des Wurfs zweier Würfel wie folgt:

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq 6\} = \{1, \cdots, 6\} \times \{1, \cdots, 6\}.$$

Wir schreiben ein Ergebnis als Paar (i, j), wobei i das Ergebnis des ersten Würfelwurfs bezeichnet und j das Ergebnis des zweiten Würfels. Da die Würfel fair sind, ist der Wahrscheinlichkeitsraum der Laplace-Raum von Ω d.h.

$$\mathbb{P}\big((i,j)\big) = \frac{1}{36}, \quad 1 \leq i, j \leq 6, \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

(ii) a) Das gesuchte Ereignis ist gegeben durch $A_1 = \{(i,j) \in \Omega : i + j \geq 9\}$. Eine praktische Möglichkeit, alle Elemente zu identifizieren, ist die folgende Summentabelle:

$i+j$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Kardinalität von A_1 ist also gleich der Anzahl der Elemente in der Tabelle mit einem Wert größer oder gleich 9. Eine direkte Berechnung impliziert daher

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \tfrac{10}{36} = \tfrac{5}{18} \end{aligned}$$

b) Das gesuchte Ereignis ist $A_2 = \{(i,j) \in \Omega : i + j \text{ ungerade}\}$. Wir können $\mathbb{P}(A_2)$ mit zwei Methoden berechnen. Die erste ist, wieder die Summentabelle zu verwenden und eine elementare Rechnung zu benutzen. Auf diese Weise erhalten wir $\mathbb{P}(A_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Der zweite Weg ist etwas mathematischer und basiert nur auf arithmetischen Überlegungen. Wir führen die Funktion $f\colon \Omega \to \Omega$ ein, definiert durch

$$f(i,j) = (i, 7-j)$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Funktion f eine bijektive Funktion ist mit $f^{-1} = f$. Außerdem ist für jedes Element $(i,j) \in A_2$ die Summe der Komponenten von $f(i,j)$ eine gerade Zahl. Nämlich

$$i + 7 - j = i + j + 7 - 2j = \text{ungerade} + 7 - \text{gerade} = \text{gerade}$$

Aus dieser Eigenschaft leiten wir ab, dass $f(A_2) = A_2^c$. Da f bijektiv ist, erhalten wir $|A_2^c| = |f(A_2)| = |A_2|$ und dann

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(f(A_2)) = \mathbb{P}(A_2^c) = 1 - \mathbb{P}(A_2)$$

darum haben wir $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$.

c) Das gesuchte Ereignis $A_3 = \{(i,j) \in \Omega : i,j \ \text{ gerade}\}$ ist die Menge der geraden Paare, d. h. $A_3 := \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$. Darum erhalten wir $\mathbb{P}(A_3) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$

Tutoriumsaufgabe 1.4

Wir betrachten die Geburtstage von $N > 1$ zufällig ausgewählten Schülern in einer Klasse. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeiten, an einem der $\{1, \cdots, 365\}$ Tage des Jahres Geburtstag zu haben, gleichverteilt sind. Wir möchten die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnen, dass mindestens zwei verschiedene Schüler haben am gleichen Tag Geburtstag haben. Das Ereignis bezeichnen wir als A.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ für $A \subset \Omega$ zu formulieren.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ durch die Rechnung von $\mathbb{P}(A^c)$. Für welchen Wert von N ist diese Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$? Dieser Wert ist kleiner, als man denken könnte! Das nennt sich auch das *Geburtstags-Paradoxon*.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 1.4

Entsprechend der im Text enthaltenen Hypothese, ist der Wahrscheinlichkeitsraum ein Laplace-Raum einer endlichen Ergebnismenge Ω.

(i) Um alle möglichen Ergebnisse zu beschreiben, verwenden wir ein wiederholtes Urnenexperiment mit Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachten der Reihenfolge. Das heißt, wir weisen jeder Person eine Nummer zu.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_N)\colon \omega_i \in \{1, \cdots, 365\}\} = \{\omega\colon \{1, \cdots, N\} \to \{1, \cdots, 365\}\}.$$

Zu jedem $\omega \in \Omega$ assoziieren wir die Liste der Geburtstage als eine Funktion. Die Kardinalität dieser Menge ist $|\Omega| = 365^N$ und wir haben also

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{365^N}$$

A ist das Ereignis "mindestens zwei verschieden Schüler haben am gleichen Tag Geburtstag". Die entsprechende Formel lautet

$$A = \bigcup_{i \neq j = 1}^{N} \{\omega \in \Omega \colon \omega_i = \omega_j\}$$

(ii) A^c ist das Ereignis "alle Schüler haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag". Die Formel dazu

$$A^c = \bigcap_{i \neq j = 1}^{N} \{\omega \in \Omega \colon \omega_i \neq \omega_j\}$$

Interpretieren wir ω als Funktion, haben wir die Gleichheit

$$A^c = \{\omega \colon \{1, \cdots, N\} \to \{1, \cdots, 365\}, \text{injektiv}\}$$

Das heißt, A^c entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen in der Urne und wir wissen, dass dann gilt

$$|A^c| = \frac{365!}{(365 - N)!}\,.$$

Dann erhalten wir

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365!}{365^N(365 - N)!}\,, \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{365!}{365^N(365 - N)!}\,.$$

Man kann also numerisch den ersten Wert von N bestimmen, für den $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$ gilt. Wir finden $N = 23$.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 1.1 (4=0.5+0.5+0.5+0.5+1+1 Punkte)

Sie haben einen Fahrsimulator gebaut, welcher 3 Monitore besitzt. Auf einem Event für künstliche Intelligenz im autonomen Fahren dürfen Sie den Fahrsimulator vorstellen und hoffen dabei, dass die Präsentation erfolgreich verläuft. Ihre größte Sorge ist, dass einer oder mehrere der Monitore ausfallen könnten. Sei $A_j,\ j \in \{1,2,3\}$ das Ereignis, dass der Monitor j am Tag der Präsentation defekt ist. Drücken Sie die möglichen nachfolgenden Ereignisse durch A_1, A_2, A_3 mithilfe von Mengenoperationen aus:

(i) mindestens ein Monitor ist defekt

(ii) kein Monitor ist defekt

(iii) höchstens ein Monitor ist defekt

(iv) mindestens ein Monitor ist nicht defekt

(v) genau ein Monitor ist defekt

(vi) genau zwei Monitore sind defekt

Hausaufgabe 1.2 (6=2+2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$:

(i) Seien $A, B, C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(ii) Seien A und B zwei Ereignisse, für die gilt: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(C \cap A) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 1$ für $A, B, C \subseteq \Omega$. In welchem Fall liegt die Identität vor, d.h. wann gilt die Gleichheit ("=")?

Hausaufgabe 1.3 (4=1+2+1 Punkte)

Bei einem Würfelspiel werden in jedem Durchgang drei faire Würfel geworfen und der Spieler gewinnt, wenn die Summe strikt größer als 10 ist.

(i) Geben Sie einen möglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um eine Spielrunde zu beschreiben wobei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$. Formulieren Sie das Ereignis $A \subset \Omega$, dass der Spieler die Runde gewinnt.

(ii) Sei $g\colon \Omega \to \Omega$ eine bijektive Funktion, die definiert ist durch

$$g((\omega_1, \omega_2, \omega_3)) = (7 - \omega_1, 7 - \omega_2, 7 - \omega_3)\,.$$

Zeigen Sie, dass $g(A) = A^c$.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$.

Hausaufgabe 1.4 (6=1+2+3 Punkte)

Wir werfen gleichzeitig zwei faire n-seitige Würfel $n > 1$ und wollen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \subset \Omega$ berechnen, dass der erste Würfel ein (strikt) höheres Ergebnis liefert als der zweite.

(i) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ für ein Ereignis $A \subset \Omega$ zu formulieren.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Partition (Zerlegung) $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, wobei

$$B_k = \{(i,j) \in \Omega \colon j = k\}$$

und schreiben Sie A als Vereinigung von disjunkten Ereignissen.

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse, indem Sie zwei verschiedene Würfel betrachten: Der erste Würfel hat n Flächen und der zweite Würfel hat m Flächen, wobei $m > n$.