TU Berlin - Institut für Mathematik
Sommersemester 2024
Dozent: Dr. Nikolas Tapia
Assistentin: M.Sc. Claudia Drygala

Stochastik für Informatik(er) – Lösungsvorschlag Übung 3

Abgabe bis Freitag, den 17.05.2024 um 23:59

Hinweise zur Bearbeitung des Übungsblattes:

- Das Übungsblatt enthält Haus- und Tutoriumsaufgaben.
- Die Tutoriumsaufgaben werden in den Tutorien der KW 19 besprochen (06.05.-10.05.).
- Fällt ihr Tutorium auf einen Feiertag, besuchen Sie bitte eines der anderen Tutorien.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt über ISIS in festen Gruppen von 2-3 Personen. Die Gruppen bilden sich aus Studierenden, die das gleiche Tutorium besuchen bzw. mindestens dieselbe/denselben Tutor*in haben. Laden Sie Ihre handschriftlichen Lösungen (z.B. Scan Ihrer Lösungen oder Erstellung Ihrer Lösungen über Tablet) als eine PDF-Datei bei dem enstprechenden Übungsblatt hoch. LaTeX-Abgaben sind auch willkommen (in diesem Fall die kompilierte PDF)! Achten Sie darauf, dass die Abgaben gut lesbar und verständlich verfasst sind. Bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf der Abgabe mit angeben!

Tutoriumsaufgaben

Tutoriumsaufgabe 3.1

Ein Berliner Wohnhaus bestehe aus drei Wohnungen 1, 2 und 3, deren Miete am Anfang eines Jahres jeweils mit Wahrscheinlichkeit p unabhängig voneinander erhöht wird, wobei $0 < p < 1$. Berechnen Sie:

(i) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird, jedoch die Miete der Wohnung 2 nicht,

(ii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete von genau zwei Wohnungen erhöht wird,

(iii) die Wahrscheinlichkeit, dass die Miete der Wohnungen 1 und 3 erhöht wird.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 3.1

Seien $F_j \subseteq \Omega$ die Ereignisse, dass die Miete der Wohnung j, $j = 1, 2, 3$, erhöht wird. Nach Voraussetzung sind diese unabhängig und es gelten $\mathbb{P}(F_j) = p$.

(i) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von $A_2 := F_1 \cap F_2^c \cap F_3$,

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2^c \cap F_3) = \mathbb{P}(F_1) \cdot \mathbb{P}(F_2^c) \cdot \mathbb{P}(F_3) = p^2(1 - p).$$

(ii) Sei K_2 das Ereignis, dass die Miete von genau zwei Wohnungen erhöht wird, dann gilt

$$K_2 = (F_1^c \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2^c \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3^c).$$

Die Ereignisse in Klammern sind paarweise disjunkt (gesichert durch die Komplemente) und haben jeweils dieselbe Wahrscheinlichkeit $p^2(1-p)$. Damit folgt nach den Grundregeln

$$\mathbb{P}(K_2) = 3p^2(1-p).$$

Alternativ: Sei Y die Anzahl der Wohnungen mit erhöhter Miete. Dann ist Y binomialverteilt mit Parametern $n = 3$ und p. Daraus folgt

$$\mathbb{P}(K_2) = \mathbb{P}(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) = 3p^2(1-p).$$

(iii) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von $F_1 \cap F_3$,

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_3) = \mathbb{P}(F_1) \cdot \mathbb{P}(F_3) = p^2.$$

Anmerkung:

(i) Der Faktor 3 ist genau die Anzahl der Möglichkeiten, zweimal den Zustand erhöht und einmal nicht erhöht auf die Mieten zu verteilen, d.h. $\binom{3}{2}$.

(ii) Statt mit Ereignissen läßt sich auch alles mit Indikatorfunktionen schreiben: $1_{A_2} = 1_{F_1 \cap F_2^c \cap F_3} = 1_{F_1} \cdot 1_{F_2^c} \cdot 1_{F_3}$ und analog $1_{K_2} = 1_{A_1} + 1_{A_2} + 1_{A_3}$. Im ersten Fall fehlt noch der Begriff der Unabhängigkeit für Zufallsvariablen, im Zweiten ist die Disjunktheit der Ereignisse wichtig.

Tutoriumsaufgabe 3.2

Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$. Wir definieren Zufallsvariablen X und Y durch

$$\begin{array}{lll} X(\omega_1) = 5 & X(\omega_2) = 1 & X(\omega_3) = 5 \\ Y(\omega_1) = 1 & Y(\omega_2) = 5 & Y(\omega_3) = 1 \end{array}$$

(i) Zeigen Sie, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung von X^Y.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 3.2

(i) Es gelten schonmal $X(\Omega) = \{1, 5\} = Y(\Omega)$ sowie $\{X = 1\} = \{\omega_2\} = \{Y = 5\}$ sowie $\{X = 5\} = \{\omega_1, \omega_3\} = \{Y = 1\}$. Damit gelten

$$p_X(1) = \frac{1}{2} = p_Y(5),$$
$$p_X(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = p_Y(1).$$

p_X und p_Y stimmen also überein.

(ii) X^Y kann im Prinzip die Werte 1, 5 und 5^5 annehmen

x	1	5	5^5
$p_{X^Y}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Dabei ist z.B. $\mathbb{P}(X^Y = 5^5) = \mathbb{P}(X = 5, Y = 5) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Anmerkung: Diese Zufallsvariable sind verschieden wegen z.B. $\{\omega : X(\omega) = 1\} \neq \{\omega : Y(\omega) = 1\}$, jedoch sind ihre *Verteilungen* gleich.

Tutoriumsaufgabe 3.3

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X mit $X(\Omega) = \{-1, 0, \frac{1}{4}, 1\}$ ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

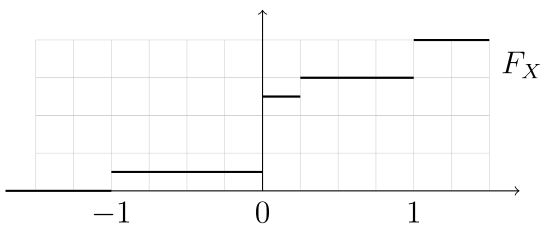
(ii) Sei $Y := X^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y in einer Tabelle dar.

(iii) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(x)$ von Y.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 3.3

(i)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \frac{1}{8} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{5}{8} & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \frac{6}{8} & \text{für } \frac{1}{4} \leq x < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

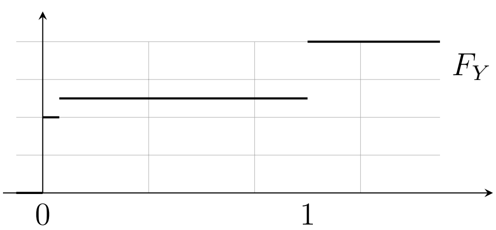


(ii) Es gilt für $y \geq 0$, $\{Y = y\} = \{X = -\sqrt{y}\} \cup \{X = \sqrt{y}\}$, also

y	0	$\frac{1}{16}$	1
$p_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

(iii)

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{16} \\ \frac{5}{8} & \text{für } \frac{1}{16} \leq x < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$



Tutoriumsaufgabe 3.4

Betrachten Sie eine Urne mit N Kugeln. $M \leq N$ Kugeln sind weiß und $N - M$ sind schwarz. Bezeichnen wir die weißen Kugeln als Elemente der Menge $\{1, \cdots, M\}$ und die schwarzen Kugeln Elemente von der Menge $\{M+1, \cdots, N\}$. Wir nehmen n Kugeln mit Zurücklegen. Sei dann $(\Omega, \mathbb{P})$ der Laplace-Raum der möglichen n Ziehungen und sei $X \colon \Omega \to \{0, \cdots, n\}$ die Anzahl der weißen Kugeln in jedem Ergebnis.

(i) Geben Sie die Wahl von Ω und die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ an.

(ii) Sei I eine Teilmenge von $\{1, \cdots, n\}$, $I = \{i_1, \cdots, i_m\}, i_1 < i_2 < \ldots i_m$ und $\omega \in \Omega$, wir bezeichnen mit ω_I den Vektor $\omega_I = (\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_m})$. Welche Möglichkeiten gibt es im Fall $n = 3$? Zeigen Sie allgemein die Identitäten zwischen Ereignissen

$$\{X = k\} = \bigcup_{I \subset \{1,\ldots,n\}\colon |I| = k} \{\omega \in \Omega \colon \omega_I \in \{1\,, \cdots, M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^{n-k}\}\,,$$

$$\{X = 0\} = \{\omega \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^n\}\,, \quad \{X = n\} = \{\omega \in \{1\,, \cdots, M\}^n\}\,.$$

(iii) Berechnen Sie die Verteilung von X.

Lösung für Tutoriumsaufgabe 3.4

(i) Um alle möglichen Ergebnisse zu beschreiben, verwenden wir ein wiederholtes Urnenexperiment mit Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachten der Reihenfolge. Das heißt, wir weisen jeder Kugel eine Nummer zu.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{1, \cdots, N\}\} = \{\omega \colon \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, N\}\}\,.$$

Die Kardinalität dieser Menge ist $|\Omega| = N^n$ und wir haben also

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{N^n}$$

(ii) Die Menge $\{1, 2, 3\}$ hat 7 nicht leere Teilmengen

$$\{1\}\,,\ \{2\}\,,\ \{3\}\,,\ \{1,2\}\,,\ \{2,3\}\,,\ \{1,3\}\,,\ \{1,2,3\}\,.$$

Damit folgt z.B.

$$\omega_{\{1,2\}} = (\omega_1, \omega_2)\,, \quad \omega_{\{1,2,3\}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Betrachten wir nun die definierten Mengen, so gilt, dass $\omega \in \{X = k\} \Leftrightarrow \exists I \neq \emptyset$ mit $|I| = k$, so dass $\omega_I \in \{1\,, \cdots, M\}^k$ oder $\omega_{I^c} \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^{n-k}$. Sei nun $k = 0$, so folgt, dass $|I| = 0 = \emptyset$. Das heißt wir betrachten das Komplementen I^c und erhalten damit

$$\omega_{I^c} \in \{M + 1\,, \cdots, N\}^{n-k} = \{M + 1\,, \cdots, N\}^{n-0} = \{M + 1\,, \cdots, N\}^n = \{X = 0\}.$$

Umgekehrt erhalten wir für $k = n$, dass $|I| = n$, sodass folgt

$$\omega_I \in \{1\,, \cdots, M\}^k = \{1\,, \cdots, M\}^n = \{X = n\}.$$

(iii) Da die Vereinigung eine disjunkte Mengenfamilie ist, haben wir

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{|\{X = k\}|}{N^n} =$$

$$= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}\colon |I|=k} \frac{|\{\omega \in \Omega \colon \omega_I \in \{1\,,\cdots,M\}^k, , \omega_{I^c} \in \{M+1\,,\cdots,N\}^{n-k}\}|}{N^n}\,.$$

Für jede Teilmenge $I \subset \{1,\cdots,n\}$ können wir die bijektive Funktion definieren

$$f_I \colon \{\omega \in \Omega \colon \omega_I \in \{1\,,\cdots,M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M+1\,,\cdots,N\}^{n-k}\} \to$$

$$\to \{\omega \colon \{1,\cdots,k\} \to \{1,\cdots,M\}\} \times \{\omega \colon \{1,\cdots,n-k\} \to \{M+1,\cdots,N\}\}$$

durch $f_I(\omega) = (\omega_I, \omega_{I^c})$. Dann hat man für jede Teilmenge $I \subset \{1,\cdots,n\}$:

$$|\{\omega \in \Omega \colon \omega_I \in \{1\,,\cdots,M\}^k, \omega_{I^c} \in \{M+1\,,\cdots,N\}^{n-k}\}|$$

$$= |\{\omega \colon \{1,\cdots,k\} \to \{1,\cdots,M\}\}||\{\omega \colon \{1,\cdots,n-k\} \to \{M+1,\cdots,N\}\}|$$
$$= M^k(N-M)^{n-k}$$

Dann erhalten wir

$$p_X(k) = \sum_{I \subset \{1,n\}\colon |I|=k} \frac{M^k(N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

und X ist Binomial verteilt mit Parameter $p = M/N$ und n.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 3.1 (3=1+2 Punkte)

Ein Elternpaar hat ein Zwillingspaar. Die Erfahrung lehrt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 64% Zwillinge das gleiche biologische Geschlecht (männlich oder weiblich) haben. Außerdem ist ein Neugeborenes ein Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 51%. Wir bezeichnen mit F_1 und F_2 die Ereignisse, dass der erste bzw. zweite Zwilling ein Mädchen ist.

(i) Formulieren Sie mit Hilfe der Ereignisse F_1 und F_2 die Informationen aus dem Aufgabentext.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$. Stellen Sie dann ein lineares Gleichung system für $\mathbb{P}(F_1|F_2)$ und $\mathbb{P}(F_1|F_2^c)$ auf und lösen Sie es anschließend.

Hausaufgabe 3.2 (6=1+2+3 Punkte)

Bei einem Verstärker mit zwei Röhren können eine oder beide Sicherungen durchbrennen, wenn eine Röhre defekt ist. Betrachten Sie die Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_i &:= \text{die Röhre } i \text{ ist defekt } (i = 1, 2)\,; \\ B_j &:= \text{die Sicherung } j \text{ brennt durch } (j = 1, 2)\,, \\ B_3 &:= B_1 \cap B_2\,. \end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B_i|A_j)$ sind in der Tabelle zusammengefasst

$\mathbb{P}(B_i\|A_j)$	A_1	A_2
B_1	0.6	0.4
B_2	0.4	0.5
B_3	0.1	0.2

Das Ereignis A_1 hat die Wahrscheinlichkeit 0.6 und A_1, A_2 sind eine Partition von Ω.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass:

(i) Beide Röhren defekt sind, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(ii) Röhre 2 defekt ist, falls beide Sicherungen durchgebrannt sind;

(iii) nur Röhre 2 defekt ist, falls mindestens eine Sicherung durchgebrannt ist.

Hinweis: Mit einer Partition einer Menge ist ihre Zerlegung in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen gemeint.

Hausaufgabe 3.3 (4=2+2 Punkte)

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable X ist in der folgenden Tabelle gegeben:

x	-4	0	4	16
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

(ii) Seien $Y := 2\sqrt{|X|}$ und $Z = (X - Y)^2$. Stellen Sie die Verteilung von Y und von Z in einer Tabelle mit den Wertebereichen dar.

Hausaufgabe 3.4 (7=1+3+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen und zeigt die Augenzahlen $\omega \in \Omega$. Diese Zahlen werden absteigend der Größe nach geordnet und man erhält das Tripel $Y(\omega)$.

(i) Bestimmen Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und den Wertebereich $Y(\Omega)$ der Zufallsvariable Y.

(ii) Berechnen Sie die Verteilung p_Y von Y und überprüfen Sie die Normierung

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} p_Y(y) = 1$$

in diesem speziellen Fall.

Hinweis: Während das Würfelwerfen ein Laplace-Experiment ist, sind die Ausgänge von Y nicht mehr gleichwahrscheinlich: $(1, 1, 1)$ kann auf genau eine Art entstehen, $(2, 2, 1)$ auf genau drei Arten und $(3, 2, 1)$ auf genau sechs. Unterteilen Sie den Wertebereich in drei Mengen A, B, C, so dass auf den Teilmengen jedes geordnete Tripel dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse in (i) und (ii) unter der Annahme, dass der Würfel n Flächen hat.