2. Übung	**Digitale Systeme** Quality and Usability Lab	SoSe 20

Gesetze der Schaltalgebra

Kommutativgesetze $a \cdot b = b \cdot a$ $a + b = b + a$	**Distributivgesetze** $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	**Assoziativgesetze** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $a + (b + c) = (a + b) + c$
Idempotenzgesetze $a \cdot a = a$ $a + a = a$	**Komplementgesetze** $a \cdot \overline{a} = 0$ $a + \overline{a} = 1$	**Negation der Negation** $\overline{\overline{a}} = a$
0-1-Gesetze $a \cdot 1 = a$ $a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$ $a + 0 = a$	**Resolutionsregel** $(a + b) \cdot (\overline{b} + c) = (a + b) \cdot (\overline{b} + c) \cdot (a + c)$ **Konsensusregel** $a \cdot b + \overline{b} \cdot c = a \cdot b + \overline{b} \cdot c + a \cdot c$	
De Morgansche Regeln $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$	**Absorptionsgesetze** $a + (a \cdot b) = a$ $a + (\overline{a} \cdot b) = a + b$ $(a \cdot b) + (a \cdot \overline{b}) = a$	$a \cdot (a + b) = a$ $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$ $(a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$

Vorrangsregeln

- geklammerte Verknüpfungen haben Vorrang vor Negation
- Negation hat Vorrang vor Konjunktion
- Konjunktion hat Vorrang vor allen anderen Operationen
- Negationszeichen über mehrere Variable oder Konstante, gelten diese als geklammert und die Negation gilt für den Klammerausdruck.
- mehreren aufeinanderfolgenden zweistelligen Grundverknüpfungen gleicher Vorrangstufe, werden von links nach rechts abgearbeitet
- Das Konjunktionszeichen kann weggelassen werden, wenn keine Verwechslungen mit anderen Variablen möglich sind.

Aufgabe 1 - Aufstellen von Wahrheitstabellen

Stellen Sie die Wahrheitstabellen für die folgenden booleschen Gleichungen auf.

a) $f(x_2, x_1, x_0) = f(\mathbf{x}) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot \overline{x_1} + x_1 \cdot \overline{x_0}$ → Disjunktive Normalform (DNF)

Lösung

Eintragen aller Eingangskombinationen, so dass das „Dezimale Äquivalent" ($d(x_2x_1x_0)$) aufsteigend ist.

$\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 = 1 \to m_1$

$\;0 \quad 0 \quad 1$

$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot (x_0) = 1 \to m_{4,5}$

$\;1 \quad 0 \quad 0/1$

$x_1 \cdot \overline{x_0} = 1 \to m_{2,6}$

$0/1 \quad 1 \quad 0$

$\delta(x_2x_1x_0)$	x_2	x_1	x_0	$f(\mathbf{x})$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

b) $g(x_2, x_1, x_0) = g(\mathbf{x}) = (\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0) \cdot (x_2 + \overline{x_1}) \cdot (x_1 + x_0)$ → Konjunktive Normalform (KNF)

Lösung

$\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0 = 0 \to m_6$

$\;1 \quad 1 \quad 0$

$x_2 + \overline{x_1} = 0 \to m_{2,3}$

$\;0 \quad 1 \quad 0/1$

$x_1 + x_0 = 0 \to m_{0,4}$

$0/1 \quad 0 \quad 0$

$\delta(x_2x_1x_0)$	x_2	x_1	x_0	$g(\mathbf{x})$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Aufgabe 2 - Äquivalenzbeweis mittels Wahrheitstabelle

Stellen Sie eine **gemeinsame** Wahrheitstabelle für die folgenden booleschen Gleichungen auf und führen Sie einen Äquivalenzvergleich durch.

x_1	x_0	$x_0 \rightarrow x_1$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

a) $f(x_1, x_0) = f(\mathbf{x}) = x_0 \rightarrow x_1$ und $g(x_1, x_0) = g(\mathbf{x}) = x_1 + \overline{x_0}$

Implikation

Lösung

$g(x)$

DNF: $x_1 = 1$ $\overline{x_0}$ 0

KNF $x_1 + \overline{x_0} = 0$
0 1

$\delta(x_1x_0)$	x_1	x_0	$f(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{x})$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
2	1	0	1	1
3	1	1	1	1

Äquivalenzbeweis (Begründung):
Jede Eingangsbelegung führt zur gleichen Ausgabe, demnach sind f(x) und g(x) äquivalent

b) $h(x_2, x_1, x_0) = h(\mathbf{x}) = \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1$ und $i(x_2, x_1, x_0) = i(\mathbf{x}) = (x_2 + x_0) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})$

Lösung

$h(x)$ $\overline{x_1}$ x_0 x_2 x_1
0 1 1 1

$i(x)$ $x_2 + x_0$ $x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
0 0 0 1 1

$\delta(x_2x_1x_0)$	x_2	x_1	x_0	$h(\mathbf{x})$	$i(\mathbf{x})$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1

Äquivalenzbeweis (Begründung):
für die Eingangskombination 1,0,0 liefern h(x) und i(x) unterschiedliche Ergebnisse, sie sind daher nicht äquivalent.

Aufgabe 3 - Vereinfachung von boolschen Funktionen mittels algebraischer Umformung

Vereinfachen Sie mit Hilfe der obigen Gesetze der Schaltalgebra die folgenden Funktionen soweit wie möglich (nur Literale, UND- und ODER-Gatter zulässig). Geben Sie in jedem Schritt die verwendete(n) Äquivalenzregel(n) an.

a) $f(x_1, x_0) = (\overline{x_0} + 0) \cdot x_1 \cdot 1$

Lösung

$f(x_1, x_0) = (\overline{x_0} + 0) \cdot x_1 \cdot 1$

$= \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot 1$ (0-1-Gesetz)

$= \overline{x_0} \cdot x_1$ (0-1-Gesetz)

b) $g(x_1, x_0) = x_1 \cdot x_1 + x_0 + x_0$

Lösung

$g(x_1, x_0) = x_1 \cdot x_1 + x_0 + x_0$

$= x_1 + x_0 + x_0$ (Idempotenz)

$= x_1 + x_0$ (Idempotenz)

c) $h(x_1, x_0) = \overline{\overline{\overline{x_1}}} \cdot \overline{\overline{x_0}}$

Lösung

$h(x_1, x_0) = \overline{\overline{\overline{x_1}}} \cdot \overline{\overline{x_0}}$

$= \overline{x_1} \cdot \overline{\overline{\overline{x_0}}}$ (Negation d. Negation)

$= \overline{x_1} \cdot x_0$ (N. N.)

d) $i(x_2, x_1, x_0) = \overline{\overline{x_0} \cdot x_1 + x_2 + x_1}$

Lösung

$i(x_2, x_1, x_0) = \overline{\overline{x_0} \cdot x_1 + x_2 + x_1}$

$= \overline{((\overline{x_0} \cdot x_1) + x_1) + x_2}$ (Komm. + Vorrang)

$= \overline{x_1 + x_2}$ (Absorption + Vorrang)

$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ (de Morgan)

e) $j(x_1, x_0) = x_1 + (x_1 \cdot (x_1 + x_0)) \cdot x_0$

Lösung

$$\begin{aligned} j(x_1, x_0) &= x_1 + (x_1 \cdot (x_1 + x_0)) \cdot x_0 \\ &= x_1 + (x_1 \cdot x_0) && \text{(Absorbtion)} \\ &= x_1 && \text{(Abs. + Vorrang)} \end{aligned}$$

f) $k(x_2, x_1, x_0) = \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}}$

Lösung

$$\begin{aligned} k(x_2, x_1, x_0) &= \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}} \\ &= \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2}} && \text{(Idempotenz)} \\ &= \overline{x_0} + \overline{\overline{x_1 + x_2}} && \text{(De Morgan)} \\ &= x_0 + x_1 + x_2 && \text{(N. d. N. 2x.)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 - Herleitung einiger Absorptionsgesetze

Überführen Sie mit Hilfe der obigen Gesetze der Schaltalgebra die nachfolgenden Ausdrücke ineinander. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete(n) Äquivalenzregel(n) an.

a) $(a \cdot b) + (a \cdot \bar{b}) = a$

Lösung

$(a \cdot b) + (a \cdot \bar{b}) = a \cdot (b + \bar{b})$ (Distributiv)

$= a \cdot 1$ (Komplement)

$= a$ (0-1-Gesetz)

b) $a + (\bar{a} \cdot b) = a + b$

Lösung

$\overset{a}{a} + (\overset{b}{\bar{a}} \cdot \overset{c}{b}) = (\overset{a}{a} + \overset{b}{\bar{a}}) \cdot (\overset{a}{a} + \overset{c}{b})$ (Distributiv)

$= 1 \quad a + b$ (Komplement)

$= a + b$ (0-1-Regel)

c) $a \cdot (a + b) = a$

Lösung

$a \cdot (a + b) = (a+0)(a+b)$ ( )

$= (a + b \cdot \bar{b})(a+b)$ ( )

$= (a+b)(a+\bar{b})(a+b)$ ( )

$= (a+b)(a+b)(a+\bar{b})$ ( )

$= (a+b)(a+\bar{b})$ ( )

$= a + (b \cdot \bar{b})$ ( )

$= a + 0$ ( )

$= a$ ( )

Aufgabe 5 - De Morgansche Regel

Vereinfachen Sie mit Hilfe der De Morganschen Regel die folgenden Funktionen soweit wie möglich (nur Literale, UND- und ODER-Gatter zulässig).

a) $f(x_2, x_1, x_0) = \overline{\overline{x_0} \cdot x_1 + x_2 + x_1}$

Lösung

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{\overline{x_0} \cdot x_1 + x_2 + x_1}$$

$= (x_0 + \overline{x_1}) \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1}$

$= x_0 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

$= \overline{x_1} \cdot (x_0 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_2})$

$= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot (x_0 + 1))$

$= \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \cdot 1$

$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

b) $f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}$

Lösung

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}$$

$= \overline{x_0} \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1})$

$= \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1}$

$= \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

c) $f(x) = \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}}$

Lösung

$$f(x) = \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_1 + x_2 + x_1}}$$

$= x_0 + (x_1 + x_2 + x_1)$

$= x_0 + (x_1 + x_2)$

$= x_0 + x_1 + x_2$

Aufgabe 6 - Äquivalenzbeweis durch algebraische Umformung

Überprüfen Sie mittels algebraischer Umformung, ob die folgenden Funktionspaare zueinander äquivalent sind. Falls die Funktionen nicht äquivalent sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $f(x_1, x_0) = f(\mathbf{x}) = x_1 + (x_0 + x_1)$ und $g(x_1, x_0) = g(\mathbf{x}) = (x_1 + x_0) \cdot x_1$

Lösung

$f(\mathbf{x}) = x_1 + (x_0 + x_1)$

$= x_1 + x_0 + x_1$

$= x_0 + x_1$

$=$

$\neq$

$g(\mathbf{x}) = (x_1 + x_0) \cdot x_1$

$= x_1$

$=$

$=$

Äquivalenzbeweis (Begründung):

für $x_1 = 0$ und $x_0 = 1$ liefern $f(x)$ und $g(x)$ unterschiedliche Ergebnisse

b) $h(x_2, x_1, x_0) = h(\mathbf{x}) = (x_2 + \overline{x_1}) \cdot (x_1 + x_0)$ und $i(x_2, x_1, x_0) = i(\mathbf{x}) = \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1$

Lösung

$h(\mathbf{x}) = (x_2 + \overline{x_1}) \cdot (x_1 + x_0)$

$= (x_2 + \overline{x_1}) \cdot x_1 + (x_2 + x_1) x_0$

$= x_2 \cdot x_1 + (x_2 + \overline{x_1}) \cdot x_0$

$= x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_0 + \overline{x_1} \cdot x_0$

$=$

$=$

$i(\mathbf{x}) = \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1$

$=$ ↓ Konsensusregel

$= \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1 + x_0 \cdot x_2$

$= x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_0 + \overline{x_1} \cdot x_0$

$=$

$=$

Äquivalenzbeweis (Begründung):

nach der Umformung sind $h(x)$ und $i(x)$ identisch und demnach äquivalent