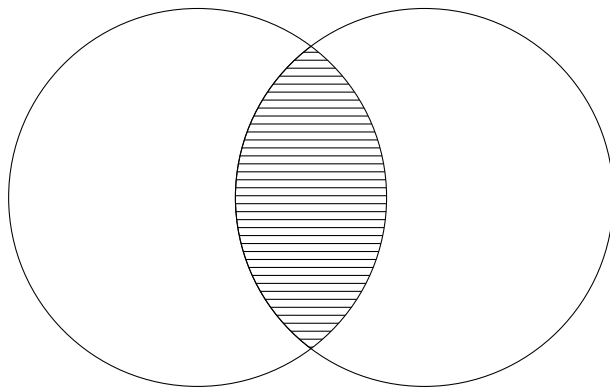


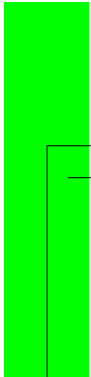
Đề thi MOBIUS 2023 - 2024

Phan Văn Hoàng



Mục lục

- 1 Làm nóng
 - 2 Bung lụa
 - 3 Bùng cháy
 - 4 Lên đỉnh
 - 5 Câu hỏi phụ
- 1 Làm nóng
 - 2 Bung lụa
 - 3 Bùng cháy
 - 4 Lên đỉnh
 - 5 Câu hỏi phụ



Đề thi



Phần thi 1

Làm nóng

Câu 1. PO_YNO_IA_

Câu 2. DE_I_AT__E

Câu 3. DI__E_EN_IAL _QUA_TI_N

Câu 4. LI__AR AL__BR_

Câu 5. C_LIN_ER

Câu 6. C_LCU__S

Câu 7. P_O_ABI_IT_

Câu 8. A_IT_M_TIC _EQ_EN_E

Câu 9. Q_ADR__ATE__L

Câu 10. T_A_EZO_D

Phần thi 2

Bung lụa

Câu 1. Tại một nhà máy xây dựng, Hoàng là công nhân của nhà máy đó và đang làm việc trên dây chuyền sản xuất bu lông và ốc.

Công việc của Hoàng được mô tả như sau:

- Hoàng đứng ở 1 đầu của băng chuyền, trên đó có 1 dây đai ốc và bu lông.
- Công việc của Hoàng là lấy từ đai ốc và bu lông ra khỏi băng chuyền.
- Nếu Hoàng lấy 1 đai ốc ra khỏi băng chuyền, Hoàng sẽ đặt nó vào xô bên cạnh.
- Nếu Hoàng lấy 1 bu lông từ băng chuyền, Hoàng sẽ lấy đai ốc từ thùng bên cạnh, gắn đai ốc và bu lông lại với nhau, rồi đưa chúng cho bộ phận lắp ráp.

Tuy nhiên, Hoàng sẽ gặp phải sự cố trong 2 trường hợp sau:

1. Hoàng lấy 1 bu lông từ băng chuyền, nhưng trong xô lại không có đai ốc nào để Hoàng gắn.
2. Không còn bu lông nào trên băng chuyền nữa, nhưng trong thùng vẫn còn đai ốc.

Giả sử ta đặt N kí hiệu cho đai ốc và B kí hiệu cho bu lông.

Hỏi trình tự đai ốc bu lông nào sau đây khi xử lí từ trái sang phải sẽ không gây ra sự cố cho Hoàng ?

- a) $N-B-B-N-N-N-N-B-B-B$ c) $N-B-N-N-B-N-N-B-B-B$
b) $N-N-B-N-N-B-B-B-B-N$ d) $N-N-B-B-N-B-N-N-N-B$

Câu 2. Dân cư của thành phố được chia làm 2 vùng, **ven** và **trung tâm**. Khảo sát cho thấy rằng sau mỗi năm có 8% người vùng ven di chuyển vào trung tâm và 7%

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

người ở trung tâm di chuyển ngược lại. Giả sử số người mới sinh ra, chết đi và ở nơi khác chuyển đến không đáng kể. Giả sử tổng số dân của thành phố là 6 triệu người và phân bố dân cư theo vùng đạt trạng thái cân bằng. Hỏi mỗi năm có bao nhiêu triệu người ở vùng ven di chuyển vào trung tâm ?

a) 0.368

c) 0.324

b) 0.224

d) 0.480

Câu 3. Hoàng chọn một số nguyên dương a, b hoặc c bất kì.

Bảo xác định giá trị của $a + \frac{b}{c}$ và có kết quả là 101.

Phúc xác định giá trị của $\frac{a}{c} + b$ và có kết quả là 68.

Trung xác định giá trị của $\frac{a+b}{c}$ và có kết quả là k .

Hỏi giá trị của k là bao nhiêu ?

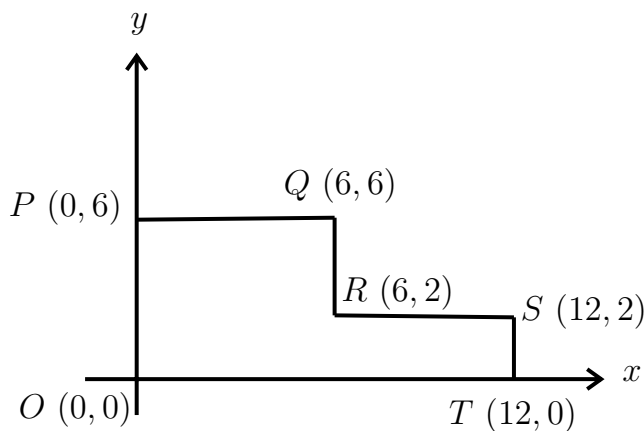
a) 13

c) 152

b) 168

d) 12

Câu 4. Xét trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta kẻ 2 đường thẳng đi qua điểm $O(0,0)$ sao cho chúng chia hình đa diện $OPQRST$ thành 3 phần có diện tích bằng nhau. Hỏi tổng độ dốc của 2 đường thẳng này bằng bao nhiêu ?



a) $\frac{35}{24}$

c) $\frac{11}{8}$

b) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{5}{4}$

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ khả vi có hàm ngược là $f^{-1}(x)$, đặt $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$. Biết $f(5) = 7$ và $f'(5) = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của $g'(7)$.

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

a) $\frac{-1}{100}$

c) $\frac{-4}{25}$

b) $\frac{4}{25}$

d) $\frac{1}{100}$

Câu 6. Có 31 chiếc ghế trong 1 lớp học. Những chiếc ghế này được xếp thành 1 vòng tròn và được đánh số từ 1 đến 31. Khi các sinh viên vào lớp học, giảng viên trong lớp sẽ xếp các sinh viên ngồi vào ghế theo trình tự sau:

1. Khi sinh viên vào lớp, sinh viên sẽ phải ngồi vào ghế được đánh số trùng với ngày sinh của mình, trừ khi chiếc ghế đó đã có người ngồi vào.
2. Nếu chiếc ghế đó đã có người ngồi thì sinh viên sẽ bắt đầu từ chiếc ghế đó, đi quanh vòng tròn theo chiều kim đồng hồ và ngồi vào chiếc ghế trống đầu tiên mà họ gặp được.

Ví dụ như Hoàng và Bảo đều sinh vào ngày 20 tháng 1, Phúc sinh vào ngày 21 tháng 1 và Trung sinh vào ngày 22 tháng 1.

- Nếu họ vào lớp theo thứ tự Hoàng, Bảo, Trung, Phúc thì Hoàng sẽ ngồi ghế số 20, Bảo ngồi ghế số 21, Trung ngồi ghế số 22 và Phúc sẽ ngồi ghế số 23.
- Còn nếu như họ vào lớp theo thứ tự Hoàng, Phúc, Trung, Bảo thì Hoàng sẽ ngồi ghế số 20, Phúc sẽ ngồi ghế số 21, Trung sẽ ngồi ghế số 22 còn Bảo sẽ ngồi ghế số 23.

Giả sử có 6 sinh viên vào lớp và ngồi như bảng dưới đây:

Sinh viên	Ngày tháng sinh	Số ghế
Phúc	11/5	13
Hoàng	12/2	12
Bảo	14/9	14
Ngọc	11/8	11
Ngân	13/4	15
Tuyền	12/7	16

Phát biểu nào sau đây **không thể đúng** ?

a) Bảo là người đầu tiên vào lớp học

c) Ngân vào lớp học sau Phúc

b) Tuyền là người cuối cùng vào lớp học

d) Hoàng vào lớp học trước Ngọc

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , $f(0) = -1$. Biết $F(x) = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) - f(x)$ và $\int_0^1 f(x) = a + be^2$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

a) $\frac{7}{64}$

c) $\frac{9}{64}$

b) $\frac{13}{32}$

d) $\frac{7}{16}$

Câu 8. Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x + 2^{a+2} < 4 \cdot 3^x + 2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tính tổng các phần tử của S .

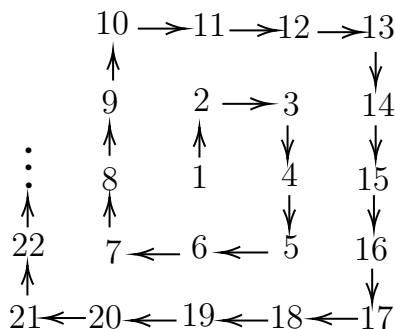
a) 204

c) 205

b) 201

d) 208

Câu 9. Một chuỗi các số được sắp xếp thành hình xoắn ốc theo chiều kim đồng hồ như hình vẽ, bắt đầu từ số 1. Nếu mô hình xoắn ốc cứ tiếp tục, hướng đi của các số 399, 400 và 401 sẽ như thế nào ?



a) $399 \rightarrow 400 \rightarrow 401$

399

↓

400

↓

c) 401

400 → 401

d) 399

401

↑

400

↑

b) 399

Câu 10. Một nhà hóa học có 3 chai thủy tinh, mỗi chai chứa hỗn hợp acid và nước:

- Chai A chứa 40 g, trong đó có 10% là acid
- Chai B chứa 50 g, trong đó có 20% là acid
- Chai C chứa 50 g, trong đó có 30% là acid

Nhà hóa học đã sử dụng 1 ít hỗn hợp từ mỗi chai để tạo ra một hỗn hợp X với khối lượng 60 g, trong đó chứa 15% là acid. Sau đó, ông ta trộn những hỗn hợp còn sót lại trong các chai để tạo ra hỗn hợp Y . Vậy trong hỗn hợp Y đó sẽ chứa bao nhiêu phần trăm là acid ?

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

a) 18.75%

c) 16.5%

b) 18.5%

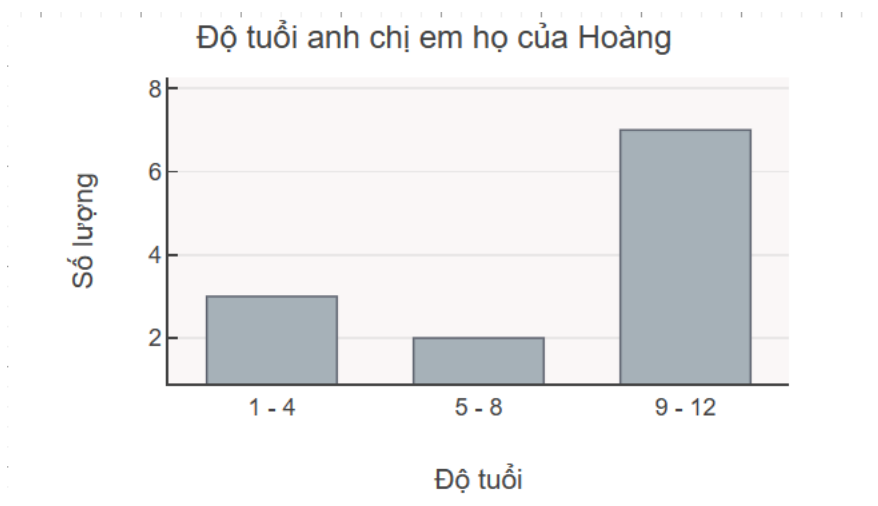
d) 17.5%

Phần thi 3

Bùng cháy

Câu 1. Một cấp số nhân có n số hạng bao gồm t_1, t_2, \dots, t_n , trong đó $t_1 t_n = 3$. Ngoài ra, tích của n số hạng đó bằng 59049 (Nghĩa là $t_1 t_2 \dots t_n = 59049$). Hãy xác định giá trị n .

Câu 2. Hoàng có 12 anh chị em họ, Anh ta bí mật viết độ tuổi của 12 anh chị em họ theo thứ tự từ bé đến lớn lên 1 tờ giấy. Sau đó Hoàng cho bạn biết độ tuổi trung bình là 8.75 và trung vị là 10. Sau đó, anh ta đã vẽ cho bạn biểu đồ dưới đây để thể hiện tuổi của anh chị em họ của Hoàng.

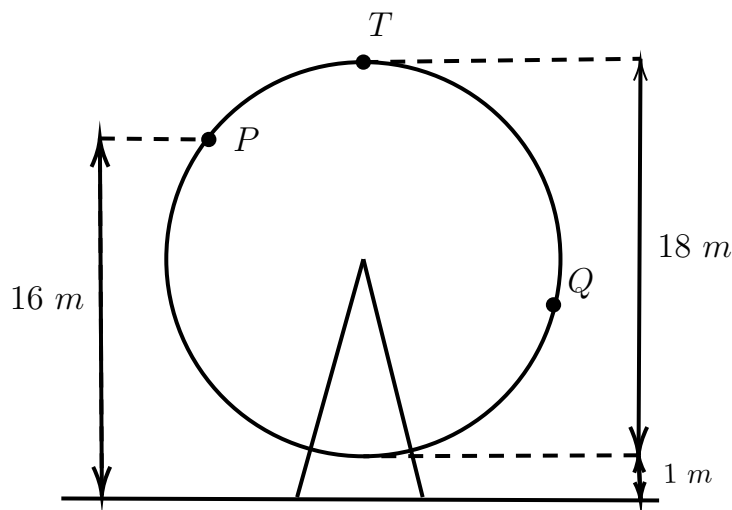


Hỏi có tất cả bao nhiêu khả năng để độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng thỏa mãn các giả thiết trên ?

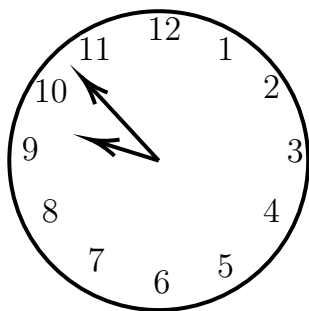
Câu 3. Trong hình vẽ, một đu quay có đường kính 18 m và quay với tốc độ không đổi. Khi Hoàng bắt đầu lên đu quay để chơi và tại điểm thấp nhất, Hoàng cách mặt đất 1 m. Khi Hoàng ở tại vị trí P cách mặt đất 16 m và đang tiếp tục đi

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

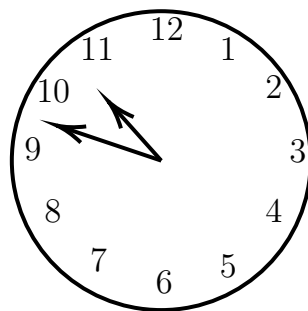
lên thì anh ta mất 4 giây để lên đến điểm cao nhất là T . Hoàng tiếp tục đi tiếp thêm 8 giây nữa thì tới vị trí điểm Q . Hãy xác định độ cao của Hoàng so với mặt đất khi Hoàng ở vị trí điểm Q .



Câu 4. Vào ngày thứ bảy tuần trước, Bảo đã tham gia cuộc thi vẽ băng rôn do CLB Học thuật tổ chức. Thời điểm Bảo bắt đầu vẽ băng rôn là vào khoảng 9 giờ sáng đến 10 giờ sáng. Khi Bảo vẽ xong thì thời điểm lúc đó là vào khoảng 10 giờ đến 11 giờ sáng cùng ngày. Tại thời điểm Bảo vẽ xong, kim giờ của đồng hồ nằm đúng vị trí của kim phút khi Bảo bắt đầu vẽ và đồng thời kim phút tại thời điểm Bảo vẽ xong cũng nằm ở đúng vị trí của kim giờ mà Bảo bắt đầu vẽ. Biết rằng Bảo đã dành ra t giờ để vẽ băng rôn. Hãy xác định giá trị của t



Trước



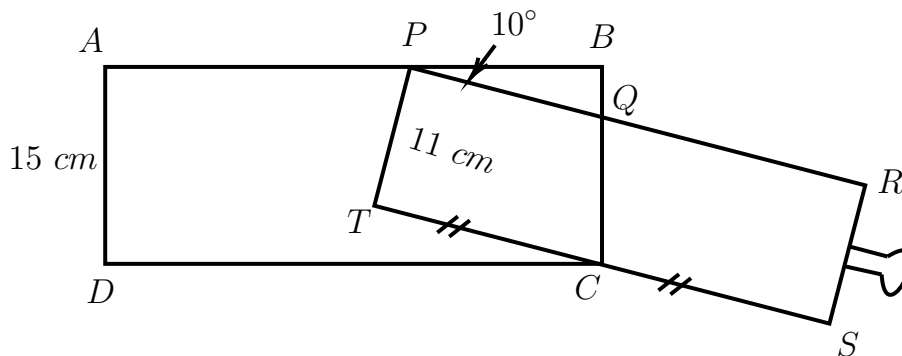
Sau

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , một con dê bắt đầu lượt đi của mình từ gốc tọa độ $(0,0)$. Ở lượt đi đầu tiên, nó bước 1 bước tới điểm $(0,1)$. Ở lượt đi số 2, nó đi được 2 bước đến điểm $(2,1)$. Ở lượt đi thứ 3, nó đi được 3 bước xuống điểm $(2,-2)$. Ở lượt đi thứ 4, nó đi được 4 bước đến điểm $(-2,-2)$. Nó cứ tiếp tục đi theo lộ trình này, sao cho ở lượt đi thứ n , nó xoay 1 góc 90° theo chiều kim đồng hồ so với hướng đi trước đó và di chuyển n bước theo hướng mới này. Sau n lượt đi, con dê đã di chuyển tổng cộng 55 bước. Hãy xác định vị trí mà con dê đã đứng ở thời điểm đó.

Câu 6. Trong hình vẽ, một ngăn kéo $PRST$ có chiều cao 11 cm nằm trong một hộp tủ $ABCD$ cao 15 cm. Ngăn kéo được kéo ra để điểm chính giữa của đáy ngăn kéo

PHẦN THI 3. BỪNG CHÁY

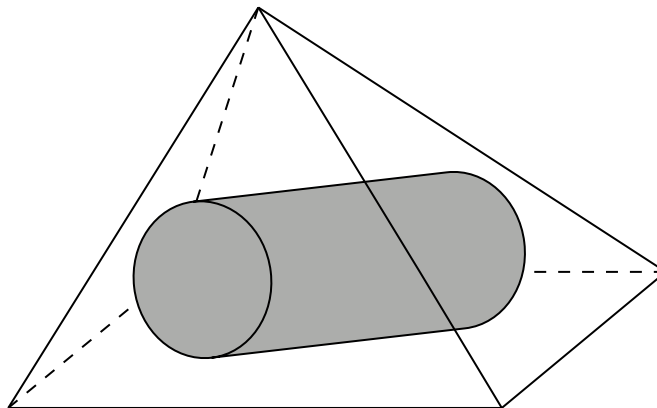
nằm ở điểm C . Ngăn kéo nghiêng sao cho cạnh trên cùng phía sau ngăn kéo chạm vào mặt trên của hộp tủ. Nếu góc hợp bởi ngăn kéo và hộp tủ là 10° , thì chiều dài của ngăn kéo $PRST$ là bao nhiêu ?(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Câu 7. Trong một giải bóng đá nam gồm 5 đội chơi, mỗi đội được chơi 20 trận đấu (tức là mỗi đội thi đấu 4 lượt, 1 lượt sẽ đá 5 trận với 4 đội còn lại). Đối với mỗi đội, mọi trận đấu đều kết thúc với kết quả thắng (W), hòa (T), hoặc thua (L). Số trận thắng, hòa, thua của mỗi đội khi kết thúc mùa giải được thể hiện trong bảng dưới đây. Hãy xác định giá trị của x, y, z .

Đội	W	L	T
A	2	15	3
B	7	9	4
C	6	12	2
D	10	8	2
E	x	y	z

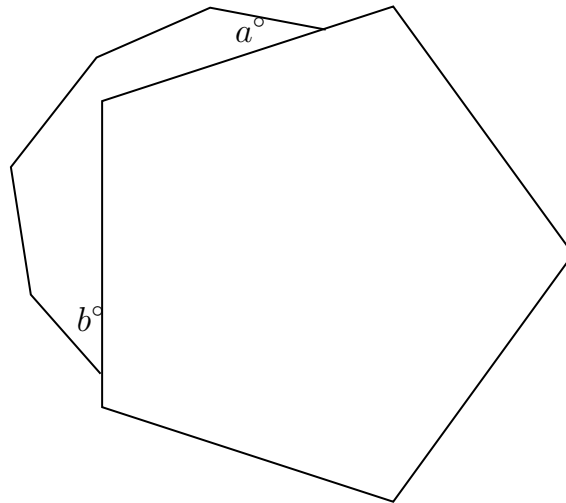
Câu 8. Một kim tự tháp Ai Cập có đáy là hình vuông có cạnh dài 20. Một hình trụ tròn có đường kính và chiều cao đều bằng 10. Giả sử hình trụ nằm ngang và nằm hoàn toàn bên trong kim tự tháp. Trục của hình trụ nằm song song và nằm ngay phía trên đường chéo của đáy kim tự tháp. Điểm chính giữa của hình trụ trùng với tâm của đáy kim tự tháp (Xem hình vẽ). Hỏi độ cao nhỏ nhất có thể đạt được của kim tự tháp là bao nhiêu ? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)



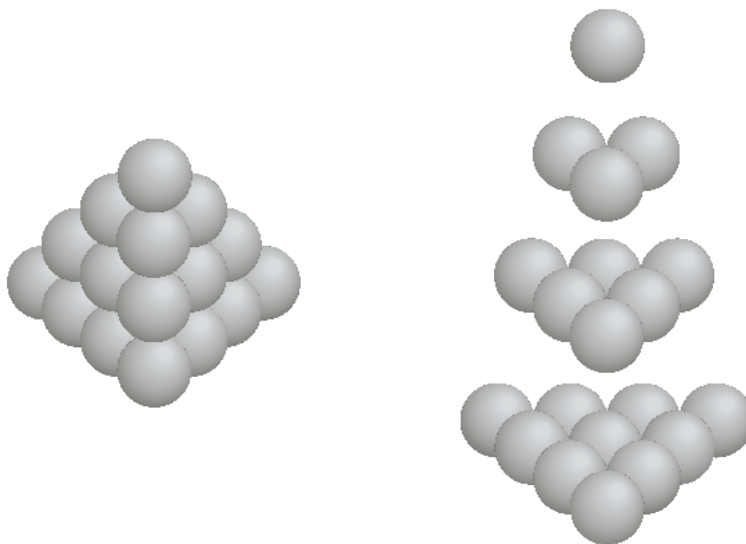
Câu 9. Một ngũ giác đều được bao quanh bởi một đa giác đều khác (như hình vẽ). Đa giác đều này có n cạnh, 5 trong số các cạnh đó hiện ra hoàn toàn hoặc chỉ

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

hiện ra một phần. Ở trong hình vẽ, tổng số đo của các góc được đánh dấu a° và b° bằng 88° . Hãy xác định n .



Câu 10. Các quả cầu được xếp chồng lên nhau để tạo thành một khối tứ diện bằng việc sử dụng các mặt của quả cầu để tạo thành các mặt hình tam giác. Cứ với một quả cầu sẽ tiếp xúc với 3 quả cầu nằm phía dưới chúng. Dưới đây là mô hình thể hiện 1 khối tứ diện được hình thành bởi 4 tầng các quả cầu và hình dạng các tầng của chúng. Một *viên ngọc* trong khối tứ diện là một quả cầu sao cho nó chỉ tiếp xúc với đúng 3 quả cầu nằm ở tầng phía trên. Ví dụ như trong sơ đồ bên dưới, chỉ có một *viên ngọc* ở tầng thứ 4, nhưng không có một *viên ngọc* nào ở 3 tầng phía trên.



Một khối tứ diện các quả cầu được hình thành bởi 13 tầng các quả cầu. Mỗi quả cầu được đánh dấu bởi một con số. Quả cầu ở tầng trên cùng được đánh dấu bởi con số 1. Đối với những quả cầu còn lại trong khối tứ diện, mỗi quả sẽ được đánh dấu bởi một con số bằng tổng của các số được đánh dấu trên các quả cầu

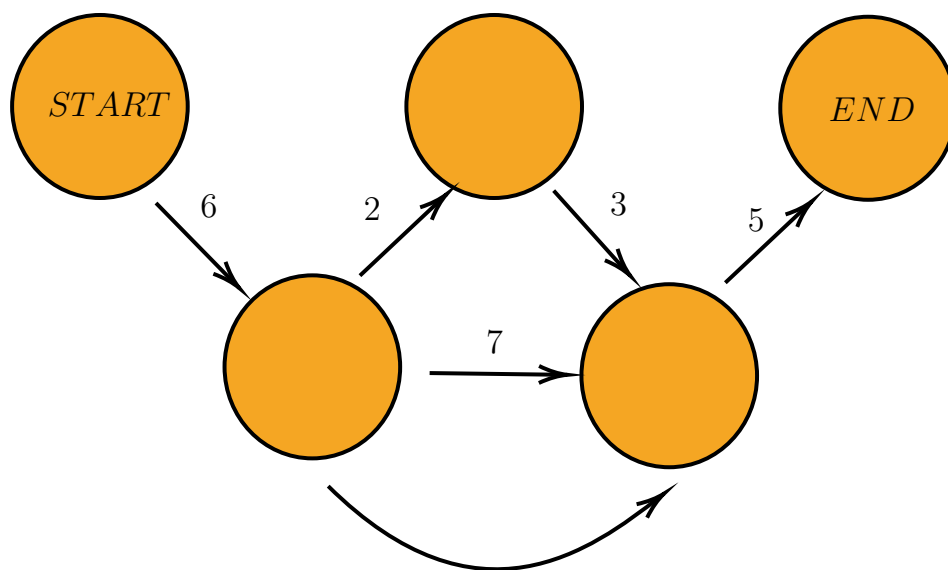
PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

nằm ở phía trên nó mà chúng tiếp xúc với nhau. Hỏi tổng các số được đánh trên tất cả các *viên ngọc* là bao nhiêu ?

Phần thi 4

Lên đỉnh

Câu 1. Hoàng đang tạo các con số dựa trên hình vẽ dưới đây:



Để có thể tạo số, Hoàng bắt đầu từ vòng tròn được kí hiệu *START*, sau đó Hoàng đi theo chiều các mũi tên cho đến khi Hoàng đến vòng tròn được kí hiệu *END*. Nếu các mũi tên mà Hoàng đi theo được đánh bởi 1 con số thì Hoàng sẽ viết chữ số đó thành 1 phần của số Hoàng cần tạo ra 1 tờ giấy. Mũi tên mà không đánh 1 con số nào tức là Hoàng đi qua mà không cần phải viết bất kì chữ số nào ra giấy.

Ví dụ như Hoàng có thể tạo ra con số 6235 và số 6775, trong những số có thể tạo được từ hình vẽ.

Hỏi có bao nhiêu chữ số có 8 chữ số mà Hoàng có thể tạo được ?

Câu 2. Có bao nhiêu chuỗi có 10 kí tự, mỗi kí tự là *A* hoặc *B* mà không bao

PHẦN THI 4. LÊN ĐÌNH

gồm chuỗi con $ABBA$?

Cho ví dụ như:

Chuỗi $AAABBBBAABB$ là chuỗi gồm 10 kí tự, mỗi kí tự là A hoặc B và không bao gồm chuỗi con $ABBA$.

Chuỗi $AAABBAAABB$ là chuỗi gồm 10 kí tự, mỗi kí tự là A hoặc B và bao gồm 1 chuỗi con $ABBA$.

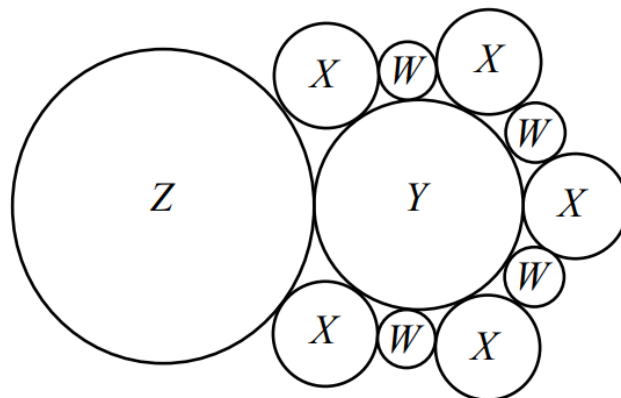
Câu 3. Hoàng và Bảo có chuyến đi thám hiểm trên 1 hòn đảo trong nhiều ngày. Để có thể có 1 nơi để ngủ và sinh hoạt, Hoàng và Bảo sẽ xây 1 ngôi nhà làm bằng những khúc gỗ. Hoàng sẽ vác 2 khúc gỗ từ trong rừng về nơi cất trữ đồ trong vòng 5 phút, và đó cũng là khoảng thời gian Hoàng từ nơi cất trữ đồ về lại khu rừng. Sau đó Bảo sẽ vác 1 khúc gỗ từ nơi cất trữ đồ đến nơi xây dựng trong vòng 2 phút và đó cũng là khoảng thời gian Bảo đi từ nơi xây dựng đến nơi cất trữ đồ. Khi Hoàng vác gỗ đến nơi cất trữ đồ, Hoàng sẽ ngay lập tức quay lại khu rừng và ngược lại.

Ngay khi có 1 khúc gỗ ở khu cất trữ đồ, Bảo sẽ ngay lập tức đến nơi cất trữ đồ, và sau đó lập tức quay lại khu xây dựng. Nếu không, Bảo vẫn sẽ đứng ở khu xây dựng để chờ.

Khi bắt đầu công việc, Hoàng đang ở trong khu rừng, còn Bảo sẽ đứng ở khu xây dựng, và tất cả khúc gỗ đều ở trong khu rừng.

Hỏi sau 40 phút, sẽ có bao nhiêu khúc gỗ được vác đến khu xây dựng sau khi công việc bắt đầu ?

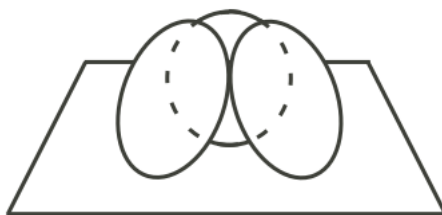
Câu 4. 11 vòng tròn tiếp xúc với nhau bao gồm 4 vòng tròn có kích thước khác nhau trong hình vẽ. Mỗi vòng tròn được kí hiệu là W có bán kính là 1, vòng tròn được kí hiệu là X có bán kính là 2, vòng tròn được kí hiệu là Y có bán kính là 4 và vòng tròn có kí hiệu là Z có bán kính r . Mỗi vòng tròn W và X tiếp xúc với 3 vòng tròn khác. Vòng tròn Y tiếp xúc với 10 vòng tròn còn lại. Vòng tròn Z tiếp xúc với 3 vòng tròn khác. Hãy xác định các số nguyên dương s và t sao cho $r = \frac{s}{t}$, trong đó $\frac{s}{t}$ là phân số tối giản.



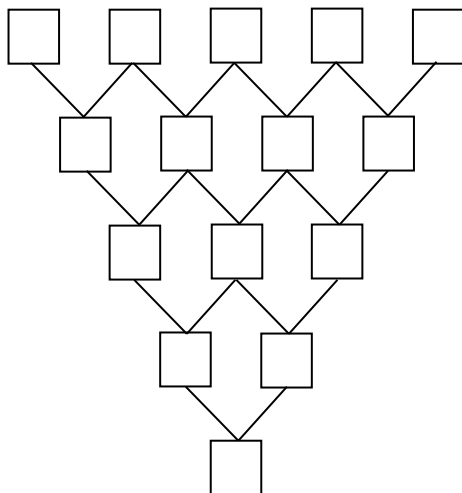
PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Câu 5. Hoàng và Bảo băng qua hồ theo đường thẳng bằng chiếc kayak chỉ có 1 chỗ ngồi. Mỗi người có thể chèo thuyền kayak với tốc độ 7 km/h và bơi với tốc độ 2 km/h. Họ bắt đầu tại cùng 1 thời điểm và cùng 1 lúc với việc Hoàng là người chèo thuyền và Bảo là người bơi qua. Một lúc sau, Hoàng dừng việc chèo thuyền kayak và ngay lập tức bắt đầu bơi. Khi Bảo bơi được đến chiếc thuyền kayak mà Hoàng đã bỏ lại (chiếc thuyền kayak không di chuyển kể từ khi Hoàng bắt đầu bơi), Bảo ngay lập tức leo lên thuyền và bắt đầu chèo thuyền đi. Họ đến phía bên kia của hồ cùng 1 lúc và cùng trong thời gian 90 phút kể từ khi họ bắt đầu băng qua. Hãy xác định khoảng thời gian mà trong 90 phút này, chiếc thuyền kayak không di chuyển.

Câu 6. Ở hình vẽ, 3 hình tròn có bán kính đều bằng 10 cùng tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với mặt phẳng (P) bên dưới chúng. Mỗi hình tròn đều tạo với mặt phẳng (P) 1 góc 45° . 3 hình tròn này tiếp xúc với nhau tại 3 điểm phân biệt. 3 điểm này đều cùng nằm trên 1 đường tròn sao cho mặt hình tròn đó song song với mặt phẳng (P). Tính bán kính của hình tròn đó.



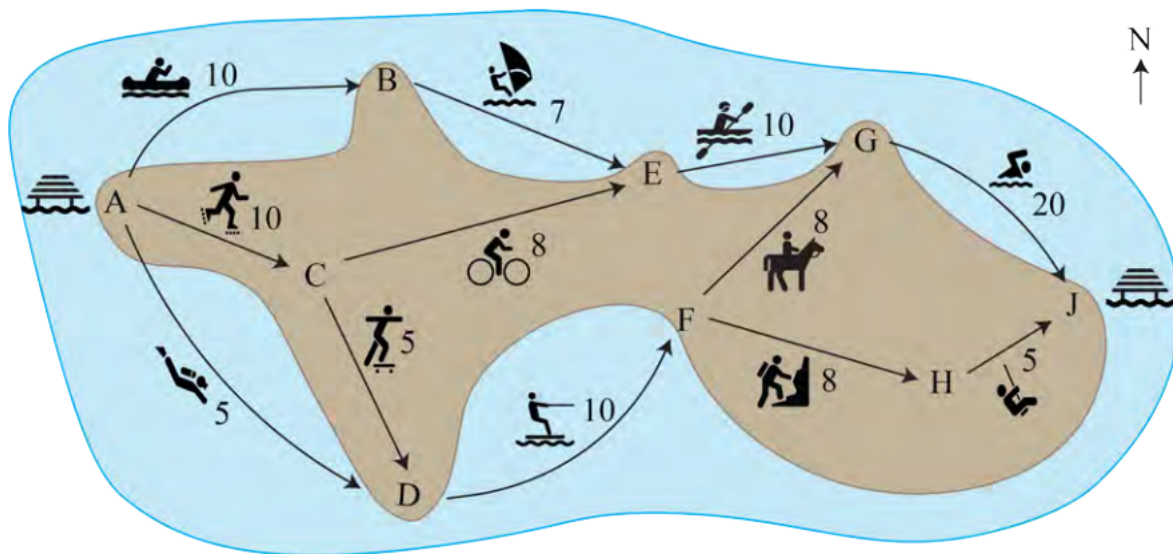
Câu 7. Năm số nguyên phân biệt được chọn từ các số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và được đặt vào các ô trống ở hàng trên cùng. Ngoài ra, mỗi ô trống không phải ở hàng trên cùng sẽ chứa tích của 2 số nguyên trong 2 hộp nằm ở hàng phía trên được liên kết với nhau (xem sơ đồ dưới). Hỏi có bao nhiêu cách chọn các số nguyên và đặt vào các ô trống hàng trên cùng sao cho số nguyên ở ô dưới cùng có giá trị là 9953280000 ?



PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Câu 8. Một công ty du lịch đang lên kế hoạch cho một chuyến đi phiêu lưu đến 1 hòn đảo nhỏ vào mỗi ngày trong tháng. Vào mỗi buổi sáng, công ty đã chuẩn bị 1 chiếc thuyền để đưa hành khách đến bến tàu nằm ở phía tây của hòn đảo. Sau đó, mỗi người sẽ chọn 1 lộ trình để khám phá hòn đảo, và trên mỗi lộ trình thì mỗi người đều phải thực hiện các hoạt động khác nhau trong suốt lộ trình. Các hoạt động cuối cùng sẽ kết thúc tại bến tàu ở phía đông hòn đảo, nơi sẽ có 1 chiếc thuyền để đưa các hành khách di chuyển về đất liền vào buổi tối cùng ngày.

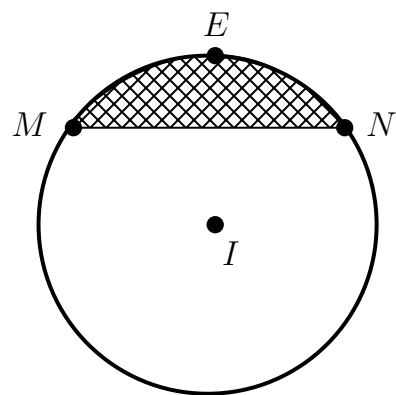
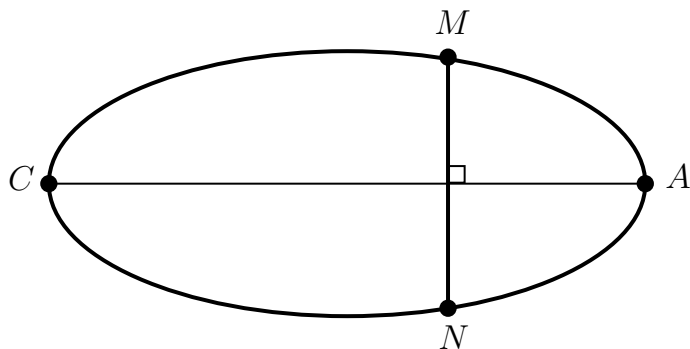
Bản đồ bên dưới hiển thị tất cả các lộ trình mà mọi người có thể khám phá hòn đảo bắt đầu từ bến tàu ở phía tây (A) và kết thúc tại bến tàu ở phía đông (J). Các hoạt động cụ thể cho từng lộ trình được hiển thị ở bên dưới, và đồng thời là số người tối đa có thể thực hiện các hoạt động đó do có sự hạn chế về các công cụ thiết bị và thời gian hoạt động.



Hỏi có tối đa bao nhiêu người có thể đi từ vị trí A đến vị trí J trong một ngày chỉ bằng các lộ trình và các hoạt động kể trên ?

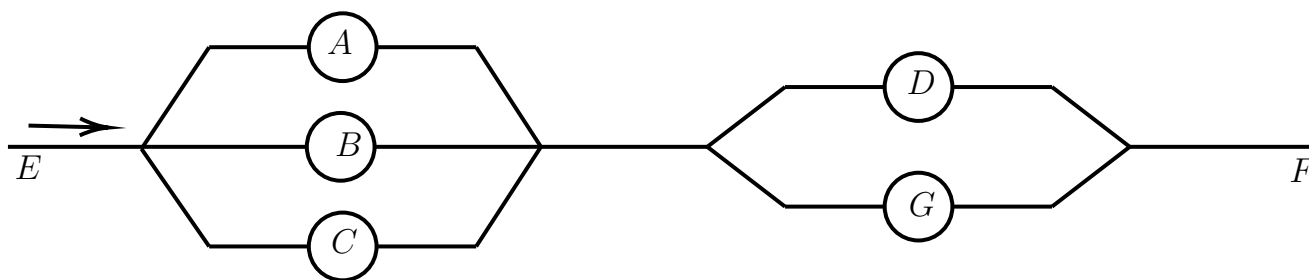
Câu 9. Sân vận động Sports Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150m, trục bé dài 90 m (xem hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt Elip (E) ở M, N (hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình b) với MN là một dây cung và góc $\angle MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu làm mái không đáng kể. Hỏi thể tích đó có giá trị bao nhiêu ? (làm tròn đến hàng đơn vị)

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH



Câu 10. Sơ đồ dưới đây là một mạng lưới cung cấp điện

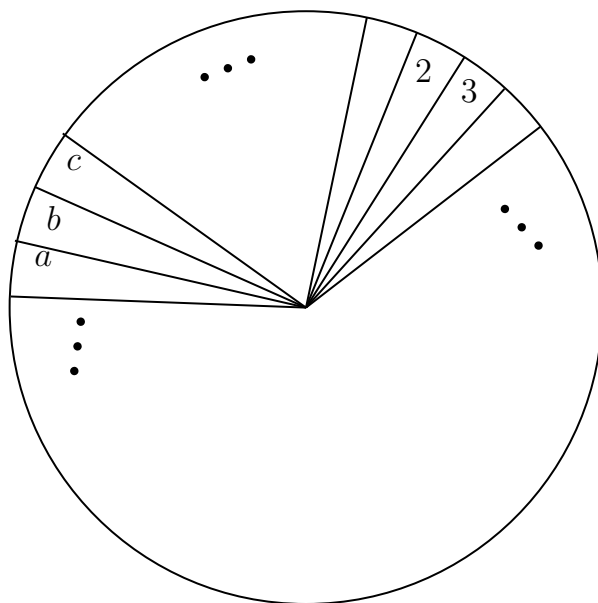
Điện được cung cấp từ E tới khu tiêu dùng F qua năm trạm biến áp A, B, C, D, G . Các trạm biến áp làm việc độc lập, xác suất để mỗi trạm biến áp A, B, C có sự cố kĩ thuật sau một thời gian hoạt động là $0,2$. Xác suất với hai trạm D, G là $0,1$. Gọi p là xác suất để khu vực F không mất điện. Giá trị của $100p$ là bao nhiêu ?(làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



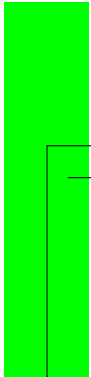
Phần thi 5

Câu hỏi phụ

Câu 1. Một chiếc đĩa tròn được chia thành 36 cánh quạt nhỏ. Trong đó, mỗi cánh quạt chứa một con số. Khi 3 cánh quạt liên tiếp chứa các số a, b và c theo thứ tự thì $b = ac$. Nếu con số 2 được chứa một trong các cánh quạt bất kì và con số ba được chứa một trong cánh quạt liền kề (như hình vẽ). Vậy tổng của 36 số trên chiếc đĩa tròn là bao nhiêu ?



Câu 2. Chọn ngẫu nhiên cặp số thực (m, n) sao cho $m^2 + n^2 \leq \frac{1}{4}$. Gọi p xác suất để đồ thị hàm số $(P): y = mx^2 + 2nx - m$ và $(Q): y = x^2$ cắt nhau. Tính giá trị của $S = 100p$.



Đáp án

Phần thi 1

Làm nóng

Câu 1. POLYNOMIAL

Câu 2. DERIVATIVE

Câu 3. DIFFERENTIAL EQUATION

Câu 4. LINEAR ALGEBRA

Câu 5. CYLINDER

Câu 6. CALCULUS

Câu 7. PROBABILITY

Câu 8. ARITHMETIC SEQUENCE

Câu 9. QUADRILATERAL

Câu 10. TRAPEZOID

Phần thi 2

Bung lụa

Câu 1. Chọn đáp án C.

Giải:

Đối với đáp án C, ta có thể kiểm tra xem mọi thứ có sai sót hay không bằng cách theo dõi trạng thái của xô đựng đai ốc và băng tải từ trái sang thông qua bảng sau:

Xô	Băng chuyền	Số lượng đưa cho bộ phận lắp ráp
trống	N-B-N-N-B-N-N-B-B-B	0
N	B-N-N-B-N-N-B-B-B	0
trống	N-N-B-N-N-B-B-B	1
N	N-B-N-N-B-B-B	1
N-N	B-N-N-B-B-B	1
N	N-N-B-B-B	2
N-N	N-B-B-B	2
N-N-N	B-B-B	2
N-N	B-B	3
N	N	4
trống	trống	5

Lựa chọn A sẽ sai sau $N - B - B$ bởi vì sẽ không có đai ốc trong xô khi gặp bu lông thứ 2.

Lựa chọn B sai vì sau $N - N - B - N - N - B - B - B - B$, sẽ không có đủ đai ốc trong xô khi gặp bu lông thứ 5.

Lựa chọn D sai vì sau khi xử lí xong băng chuyền bu lông đai ốc, sẽ vẫn còn 2 đai ốc trong xô.

Câu 2. Chọn đáp án B.

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

Giải:

Từ giả thiết, ta xét ma trận $M = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.07 \\ 0.08 & 0.93 \end{pmatrix}$

Biết rằng dân số không thay đổi đáng kể nên $X_1 = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\text{Do đó: } \begin{pmatrix} 0.92 & 0.07 \\ 0.08 & 0.93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{92a + 7b}{100} \\ \frac{8a + 93b}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow 8a - 7b = 0.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a + b = 6000000 \\ 8a - 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2800000 \\ b = 3200000 \end{cases}.$$

Vậy dân số chuyển từ vùng ven sang trung tâm là: $\frac{0,08.2800000}{1000000} = 0,224$.

Câu 3. Chọn đáp án A.

Giải:

Vì a là số nguyên dương và $a + \frac{b}{c}$ là số nguyên dương, nên $\frac{b}{c}$ cũng là số nguyên dương. Nói cách khác, b là bội của c .

Tương tự, vì $\frac{a}{c} + b$ là số nguyên dương và b là số nguyên dương nên a là bội của c .

Vì thế, ta có thể viết $a = Ac$ và $b = Bc$ với A, B là các số nguyên dương.

Do đó, $a + \frac{b}{c} = 101$ có thể viết thành $Ac + B + A + Bc = 101 + 68$ hay $A(c + 1) + B(c + 1) = 169$ nên $(A + B)(c + 1) = 169$, từ đó $c + 1$ là ước của 169.

Vì $169 = 13^2$ nên các ước số nguyên dương của 169 là 1, 13, 169.

Vì A, B, c là các số nguyên dương nên $A + B \geq 2$ và $c + 1 \geq 2$.

Vì cả $A + B$ và $c + 1$ đều không thể bằng 1, nên $A + B = c + 1 = 13$. Do đó, $\frac{a + b}{c} = \frac{Ac + Bc}{c} = A + B = 13$ và vì thế $k = 13$.

Câu 4. Chọn đáp án C.

Giải:

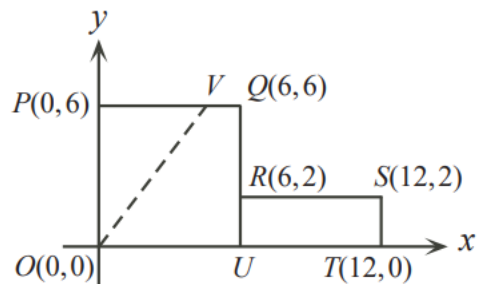
Ta gọi U là giao điểm của QR và trục Ox .

Diện tích của hình $OPQRST$ bằng tổng các diện tích $OPQU$ và $RSTU$. Do đó diện tích của $OPQRST$ bằng 48. Nếu ta chia hình này thành 3 phần có diện tích bằng nhau thì diện tích mỗi phần bằng 16.

Gọi V là điểm mà đường thẳng thứ nhất đi qua O và cắt hình. Để ý rằng diện tích OPQ bằng 1 nửa diện tích $OPQU$ nên V nằm bên trái Q trên đoạn PQ .

Vì thế, điểm V có tọa độ $(v, 6)$ với v bất kì. Bởi vì diện tích OPV bằng 16 nên $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot v = 16$ suy ra $v = \frac{16}{3}$.

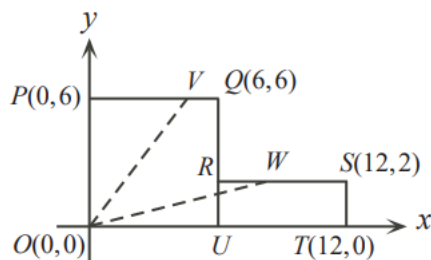
PHẦN THI 2. BUNG LỰA



Vì thế độ dốc của đoạn OV là $\frac{6}{\frac{16}{3}} = \frac{9}{8}$.

Gọi điểm W là điểm mà đường thẳng đi qua O còn lại cắt hình.

Bởi vì diện tích của OTS bằng 12 (bé hơn $\frac{1}{3}$ so với tổng) và diện tích hình thang $ORST$ bằng 18 (lớn hơn $\frac{1}{3}$ so với tổng diện tích) nên W nằm trên đoạn RS . Giả



sử điểm W có tọa độ $(w, 2)$ với w bất kì.

Ta muốn diện tích của hình thàng $WSTO$ bằng 16.

Vì thế

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(WS + OT)ST &= 16 \\ \frac{1}{2}(12 - w + 12).2 &= 16 \\ w &= 8 \end{aligned}$$

Vì thế, tọa độ điểm W là $(8, 2)$ do đó độ dốc của OW là $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Vậy, tổng độ dốc của 2 đường thẳng là $\frac{9}{8} + \frac{1}{4} = \frac{11}{8}$.

Câu 5. Chọn đáp án C.

Giải:

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ f'(x).f^{-1}'(f(x)) &= 1 \end{aligned}$$

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

Suy ra: $f^{-1'}(f(5)) = \frac{1}{f'(5)} \Rightarrow f^{-1'}(7) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$

Ngoài ra: $f(5) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 5.$

Ta có: $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{-f^{-1'}(x)}{(f^{-1}(x))^2}.$

Suy ra $g'(7) = \frac{-4}{5^2} = \frac{-4}{25}.$

Câu 6. Chọn đáp án C.

Giải:

Bảo ngồi cùng ghế có số trùng với ngày sinh của Bảo nên anh ta sẽ là người đầu tiên ngồi xuống, do đó đáp án A có thể lựa chọn đúng.

Bởi vì Tuyền ngồi ở ghế số 16, nên Tuyền đã phải di chuyển qua 4 sinh viên đã ngồi ở ghế số 12 và số 15. Ngọc ngồi ở ghế số 11 tức là Ngọc tới trước Phúc. Và bởi vì Phúc ngồi ở ghế được đánh số trong khoảng 12 tới 15, nên 5 người này sẽ tới lớp trước Tuyền. Vì thế B phải là lựa chọn đúng.

Bởi vì Ngân ngồi ở ghế số 15, điều đó dẫn đến việc các sinh viên đã phải ngồi vào các ghế số 13 và 14 khi cô ấy tới. Bởi vì Phúc đã ngồi ở ghế số 13, nó dẫn đến việc Phúc tới trước Ngân. Nên C là 1 khẳng định sai.

Hoàng và Ngọc đều ngồi vào ghế có số trùng với số của ngày sinh. Nên thứ tự của họ có thể thay thế được cho nhau. Nên đáp án D có thể là khẳng định đúng

Câu 7. Chọn đáp án B.

Giải:

Ta có: $F(x) = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{4}(2e^{2x}(2x-1) + 2e^{2x}) = \frac{1}{4}.4xe^{2x} = xe^{2x}.$

Nên $f'(x) - f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow (f(x).e^{-x})' = xe^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = \int xe^x dx = e^x(x-1) + C$ mà $f(0) = -1 \Rightarrow (-1).1 = -1 + C \Rightarrow C = 0.$

Vậy $f(x) = (x-1)e^{2x}.$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2}(x-1) \Big|_0^1 - \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{e^2}{4}.$

Vậy $S = a^3 + b^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{-1}{4}\right)^3 = \frac{13}{32}.$

Câu 8. Chọn đáp án B.

Giải:

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$6^x - 2^{x+a} + 2^{a+2} - 4.3^x < 0 \Leftrightarrow (2^x - 4)(3^x - 2^a) < 0$$

Ta có các trường hợp sau:

TH1. $\log_3 2 \leq 2$. Do a nguyên nên $a \leq 3$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$\log_3 2 < x < 2$$

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

Do $a \log_3 2 > 0$ nên hiển nhiên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên. Bất phương trình có ít nhất 1 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$a \log_3 2 < 1 \Leftrightarrow a < \log_2 3 \approx 1,6$$

Vậy $a = 1$.

TH2. $a \log_3 2 > 2$. Do a nguyên nên $a \geq 4$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$2 < x < a \log_3 2$$

Dẫn đến bất phương trình có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên, khi và chỉ khi

$$3 < a \log_3 2 \leq 13 \Leftrightarrow 4,6 \approx 3 \log_2 3 < a \leq 13 \log_2 3 \approx 20,6$$

Suy ra $5 \leq a \leq 20$.

Vậy $S = \{1; 5; 6; \dots; 20\}$ và tổng các phần tử của S là $1 + 5 + 6 + \dots + 20 = 201$.

Câu 9. Chọn đáp án C.

Giải:

Ta để ý đến quy luật sau:

		2	3		
		1	④		
			5		
	10	11	12	13	
	9	2	3	14	
	8	1	4	15	
	7	6	5	⑩⑥	
				17	
26	27	28	29	30	31
25	10	11	12	13	32
24	9	2	3	14	33
23	8	1	4	15	34
22	7	6	5	11	35
21	20	19	18	17	⑩③⑥
					37

Vì thế, nếu quy luật hình xoắn ốc này cứ tiếp tục, thì tất cả những số chính phương chẵn sẽ tuân theo quy luật sau:

PHẦN THI 2. BUNG LỰA

$$(2k)^2 - 1$$

↓

$$(2k)^2$$

↓

$$(2k)^2 + 1$$

Vì vậy, ta sẽ chọn

399

↓

400

↓

401 là kết quả bài toán vì $400 = 20^2$.

Câu 10. Chọn đáp án D.

Giải:

Chai A chứa 40 g trong đó có 10% là acid. nên nó sẽ chứa 4 g là acid và 36 g là nước.

Chai B chứa 50 g trong đó có 20% là acid, nên nó chứa 10 g acid và 40 g nước.

Chai C chứa 50 g trong đó có 30% là acid, nên nó chứa 15 g là acid và 35 g là nước.

Tổng lại, cả 3 chai sẽ chứa 140 g, trong đó có chứa 29 g là acid và 111 g là nước.

Vì thế, dung dịch X sẽ chứa 15 g là acid và 45 g là nước.

Bởi vì tổng khối lượng của 3 chai ban đầu là 140 g và khối lượng của dung dịch X là 60 g nên dung dịch Y sẽ có khối lượng 80 g.

Bởi vì tổng khối lượng acid có trong 3 chai là 29 g và acid trong dung dịch X là 15 g nên acid trong dung dịch Y sẽ là 14 g.

Vậy dung dịch Y sẽ chứa $\frac{14g}{18g} \times 100 = 17.5\%$ acid.

Phần thi 3

Bùng cháy

Câu 1. Đáp án: $n = 20$

Giả sử rằng số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $t_1 = a$ với công bội r .

Khi đó cấp số nhân có n phần tử lúc này có dạng $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$.

Bởi vì $t_1 * t_n = 3$ nên $a \cdot ar^{n-1} = 3$ hay $a^2 r^{n-1} = 3$.

Bởi vì $t_1 t_2 \dots t_{n-1} t_n = 59049$ nên $a \cdot ar \cdot ar^2 \dots ar^{n-1} = 59049 \Rightarrow a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)} = 59049$.

Bởi vì $a^2 r^{n-1} = 3$ nên $a^{2n} r^{n(n-1)} = 3^n$.

Bởi vì $a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)} = 59049$ nên $a^{2n} r^{n(n-1)} = 59049^2$.

Mà $59049 = 3^{10}$ nên $59049^2 = 3^{20} = 3^n$ do đó $n = 20$.

Câu 2. Đáp án: 37

Bởi vì có tất cả 12 độ tuổi, thì trung vị của các độ tuổi đó sẽ nằm giữa độ tuổi thứ 6 và độ tuổi thứ 7 khi 12 độ tuổi kể trên được xếp theo thứ tự tăng dần. Từ biểu đồ, ta có thể thấy độ tuổi thứ 6 và thứ 7 đều nằm trong khoảng 9 đến 12. Vì trung vị của các độ tuổi đó là 10, nên ta có thể thấy độ tuổi thứ 6 và thứ 7 lần lượt là 9 và 11, hoặc cả độ tuổi thứ 6 và 7 đều bằng 10.

Bởi vì độ tuổi trung bình của 12 độ tuổi đó là 8.75 nên tổng của 12 độ tuổi đó là $8.75 \times 12 = 105$. Ta đã biết rằng độ tuổi thứ 6 và thứ 7 có thể lần lượt là 9 và 11, hoặc cả 2 đều bằng 10. Nói cách khác, tổng của chúng là 20. Nên tổng của các độ tuổi còn lại sẽ là $105 - 20 = 85$. Từ biểu đồ, ta biết rằng 3 trong số các độ tuổi nằm giữa 1 và 4, 2 trong số các độ tuổi nằm giữa 5 và 8, và 5 độ tuổi còn lại nằm giữa 9 và 12 và cũng như lớn hơn độ tuổi thứ 7, vì độ tuổi thứ 7 có thể nhận giá trị là 10 hoặc 11.

Ta sẽ xét các trường hợp để tìm tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất có thể xảy ra là bao nhiêu.

TH1: Tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 28.

Đây là tổng lớn nhất của 5 độ tuổi nhỏ nhất, và điều đó xảy ra khi chúng nhận

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

các giá trị là 4,4,4,8,8. Do đó tổng tương ứng của 5 độ tuổi lớn nhất sẽ là $85 - 28 = 57$.

- Nếu độ tuổi thứ 7 là 10, thì 5 độ tuổi sẽ là 10,11,12,12,12 hay 11,11,11,12,12. Vì thế, sẽ có 2 khả năng để các độ tuổi kể trên thỏa mãn giả thiết.
- Nếu độ tuổi thứ 7 là 11, thì 5 độ tuổi lớn nhất sẽ chỉ có thể là 11,11,11,12,12. Vì thế, chỉ có 1 khả năng cho các độ tuổi kể trên thỏa mãn.

Chung quy lại, sẽ chỉ có $2 + 1 = 3$ khả năng để độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng thỏa mãn nếu tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 28.

TH2: Tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 27.

Điều trên xảy ra nếu các độ tuổi đó nhận giá trị là 3,4,4,8,8 hoặc 4,4,4,7,8. Tổng tương ứng của 5 độ tuổi lớn nhất sẽ là $85 - 27 = 58$.

- Nếu độ tuổi thứ 7 là 10, thì 5 độ tuổi lớn nhất có thể là 10,12,12,12,12 hoặc 11,11,12,12,12. Vì thế, chỉ có 2 khả năng cho 5 độ tuổi nhỏ nhất và 2 khả năng cho 5 độ tuổi lớn nhất. Nói cách khác, sẽ có $2 \cdot 2 = 4$ khả năng cho độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng thỏa mãn.
- Nếu độ tuổi thứ 7 là 11, thì 5 độ tuổi lớn nhất chỉ có thể là 11,11,12,12,12. Vì thế, sẽ chỉ có 2 khả năng cho 5 độ tuổi nhỏ nhất và 1 khả năng cho 5 độ tuổi lớn nhất. Nói cách khác, sẽ chỉ có 2 khả năng cho độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng.

Chung quy lại, sẽ có tất cả 6 khả năng cho độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng nếu tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 27.

TH3: Tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 26.

Điều này xảy ra nếu các độ tuổi nhỏ nhất sẽ là 2,4,4,8,8 hoặc 3,3,4,8,8, hoặc 3,4,4,7,8 hoặc 4,4,4,6,8 hoặc 4,4,4,7,7. Tổng tương ứng của 5 độ tuổi lớn nhất sẽ là $85 - 26 = 59$. Khả năng duy nhất của 5 độ tuổi lớn nhất sẽ là 11,12,12,12,12. Vì thế, sẽ có tất cả 5 khả năng cho 5 độ tuổi lớn nhất, 2 khả năng cho độ tuổi nằm ở giữa, và 1 khả năng cho 5 độ tuổi lớn nhất. Nói cách khác, sẽ có $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ khả năng cho độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng nếu tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 26.

TH4: Tổng của 5 độ tuổi nhỏ nhất là 25.

Điều này xảy ra khi các độ tuổi nhỏ nhất nhận giá trị là 1,4,4,8,8 hoặc 2,3,4,8,8 hoặc 2,4,4,7,8 hoặc 3,3,3,8,8 hoặc 3,3,4,7,8 hoặc 3,4,4,6,8 hoặc 3,4,4,7,7 hoặc 4,4,4,5,8 hoặc 4,4,4,6,7. Tổng tương ứng của 5 độ tuổi lớn nhất sẽ là $85 - 25 = 60$. Đây là tổng độ tuổi lớn nhất của 5 độ tuổi lớn nhất và điều này sẽ xảy ra khi 5 độ tuổi đó nhận giá trị là 12,12,12,12,12. Vì thế, sẽ có 9 khả năng cho 5 độ tuổi nhỏ nhất, 2 khả năng cho độ tuổi ở giữa và 1 khả năng cho 5 độ tuổi lớn nhất. Nói cách khác, sẽ có 18 khả năng cho độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng nếu tổng 5 độ tuổi nhỏ nhất là 25.

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

Tổng kết lại, sẽ có tất cả $3 + 6 + 10 + 18 = 37$ khả năng cho các độ tuổi của anh chị em họ của Hoàng.

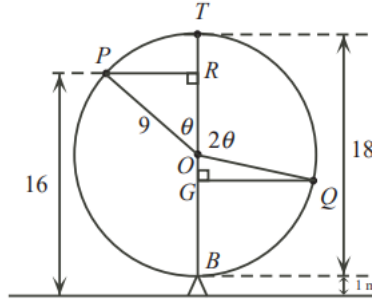
Câu 3. Đáp án: 9 m

Gọi O là tâm của đu quay và B là điểm thấp nhất của vòng tròn đu quay.

Ta có đường kính của đu quay là 18 m nên đu quay sẽ có bán kính 9 m và O sẽ cách mặt đất 1 đoạn $9 + 1 = 10$ m.

Gọi $\angle TOP = \theta$.

Do đu quay di chuyển với tốc độ không đổi nên trong vòng 8 giây, góc quay của



đu quay sẽ gấp đôi góc quay của đu quay khi đu quay quay được 4 giây. Nói cách khác, $\angle TOQ = 2\theta$.

Gọi R, G lần lượt là hình chiếu của P, Q lên TB .

Vì P cách mặt đất 16 m nên $OR = 6m$.

Vì OP là bán kính đu quay nên $OP = 9m$.

Xét $\triangle ORP$ vuông tại R , ta có $\cos \theta = \frac{OR}{OP} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Bởi vì $\cos \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, nên $\theta > 45^\circ$. tức là $2\theta > 90^\circ$, nghĩa là Q phải nằm phía dưới O theo chiều ngang. Khi đó, G cũng phải nằm dưới O .

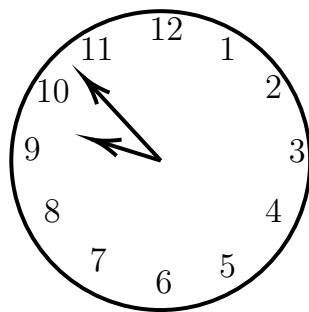
Xét $\triangle QOG$ vuông tại G , ta có $OG = OQ \cos(180 - 2\theta) = -9(2\cos^2 \theta - 1) = -9(\frac{8}{9} - 1) = 1m$.

Vì thế Q cách mặt đất $10 - 1 = 9m$.

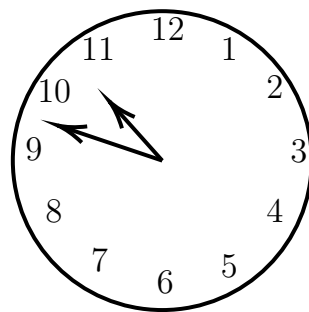
Câu 4. Đáp án: $\frac{12}{13}$

Ta biết rằng kim giờ và kim phút luôn quay với 1 tỉ lệ không đổi. Bởi vì kim giờ di chuyển bằng $\frac{1}{12}$ quãng đường mà kim giờ di chuyển trong 1 giờ, nên kim phút sẽ quay nhanh gấp 12 lần kim giờ.

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY



Trước



Sau

Giả sử rằng kim giờ di chuyển 1 góc x° từ thời điểm Bảo vẽ đến thời điểm Bảo vẽ xong. Nên kim phút sẽ di chuyển 1 góc bằng $360^\circ - x^\circ$. Bởi vì tổng của 2 góc này bằng 360° .

Bởi vì kim phút di chuyển nhanh gấp 12 lần kim giờ nên $\frac{360 - x}{x} = 12 \Rightarrow 13x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{13}$.

Trong 1 giờ thì kim giờ sẽ di chuyển 1 góc 30° .

Bởi vì kim giờ di chuyển trong t giờ, nên ta có phương trình $30t = \frac{360}{13} \Rightarrow t = \frac{12}{13}$.

Câu 5. Đáp án: (6,5)

Sau 2 lượt đi, con dê di chuyển được $1 + 2 = 3$ bước.

Sau 3 lượt đi, con dê di chuyển $1 + 2 + 3 = 6$ bước.

Sau n lượt đi, con dê di chuyển được $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bước. Khi đó $n = 10$. Vì thế ta phải xác định tọa độ của con dê sau 10 lượt đi.

Ta xét trên hoành độ x .

Bắt đầu từ điểm $(0,0)$, con dê di chuyển 2 bước với hoành độ x dương, 4 bước với hoành độ x âm, 6 bước với hoành độ x dương, 8 bước với hoành độ x âm và 10 bước với hoành độ x dương, giá trị của hoành độ x sẽ là $2 - 4 + 6 - 8 + 10 = 6$.

Tương tự, tung độ y có giá trị là $1 - 3 + 5 - 7 + 9 = 5$.

Vì thế, sau khi đi được 55 bước, con dê ở vị trí tọa độ $(6,5)$.

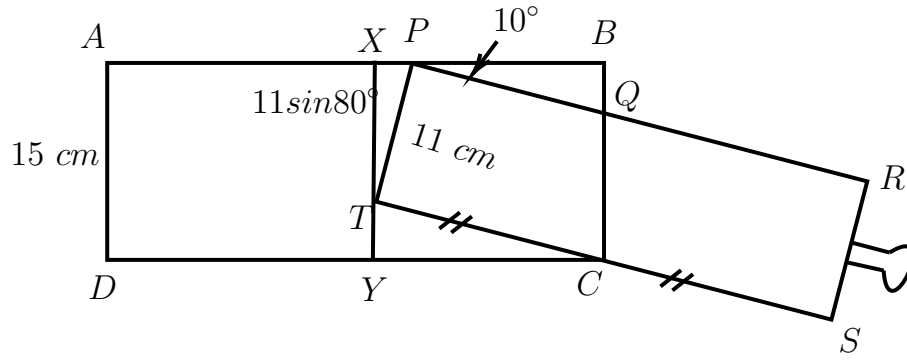
Câu 6. Đáp án: 48 cm

Ta kẻ đường thẳng đi qua T và vuông góc với AB . Đường thẳng này cắt AB tại X và CD tại Y .

Bởi vì $\angle TPR = 90^\circ$, nên $\angle XPT = 80^\circ$. Vì thế $XT = 11 \sin 80^\circ$.

Bởi vì $XY = 15$ nên $TY = 15 - 11 \sin 80^\circ$.

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY



Nhưng $\triangle XPT$ vuông tại X , nên $\angle XTP = 10^\circ$ và $\angle YTC = 80^\circ$.

$$\text{Vì thế } TC = \frac{TY}{\cos 80^\circ} = \frac{15 - 11 \sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}$$

$$\text{Vậy } TS = 2TC \approx 47.9949 \approx 48.$$

Câu 7. Đáp án: $x = 19, y = 0, z = 1$

Ta có tổng số trận cả 5 đội đã chơi trong 1 nửa mùa giải là $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 = 50$ trận đã chơi.

Trong mỗi trận đấu, sẽ không có đồng thời trận đấu vừa thua vừa hòa.

Số trận đấu được tính thua là $44 + y$ từ cột số 2, và số trận đấu được tính hòa là $\frac{1}{2}(11 + z)$. (Vì bất kì trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa thì sẽ được tính là 2 kết quả hòa).

Do đó ta suy ra:

$$50 = 44 + y + \frac{1}{2}(11 + z)$$

$$100 = 88 + 2y + 11 + z$$

$$1 = 2y + z$$

Bởi vì y và z là các số nguyên không âm, nên ta có $z = 1, y = 0$. Do đó $x = 19$ bởi vì đội E chơi 20 trận.

Câu 8. Đáp án: 22.1

Kim tự tháp Ai Cập thực chất là 1 khối tứ diện tứ giác đều có đáy là hình vuông và các cạnh bên là tam giác cân.

Độ cao nhỏ nhất của kim tự tháp để có thể chứa khối trụ nằm ngang là khi các mặt tam giác cân của khối tứ diện tiếp xúc với phần rìa ngoài của 2 đáy của khối trụ nằm ngang. Ta gọi T là đỉnh của khối tứ diện.

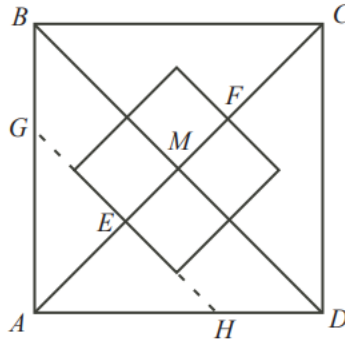
Xét mặt đáy $ABCD$ của kim tự tháp.

Gọi M là tâm hình vuông $ABCD$ và cũng là tâm của hình trụ. Hình chiếu của mặt cắt hình trụ nằm ngang tạo thành hình vuông cũng có tâm M . AC cắt hình vuông này tại E sao cho E gần A . Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB, AD lần lượt tại G, H .

$$\text{Ta dễ thấy } AM = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ mà } EM = \frac{10}{2} = 5 \text{ nên } AE = EH = HG = 10\sqrt{2} - 5$$

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

(Do $\triangle AGH$ vuông cân tại A).



Xét mặt phẳng trùng với mặt đáy hình trụ gần với A . (Giả sử hình trụ nằm trên đường chéo AC), mặt phẳng tạo với các mặt của khối tứ diện $\triangle LGH$ (trong đó L là giao điểm của mặt phẳng kẻ trên với TA).

Ta dễ thấy $\triangle LGH$ cân tại L . Gọi O là tâm mặt đáy của hình trụ ta đang xét. Đồng thời E là cũng chính là hình chiếu của O lên GH .

Ta sẽ tính độ dài đoạn LE .

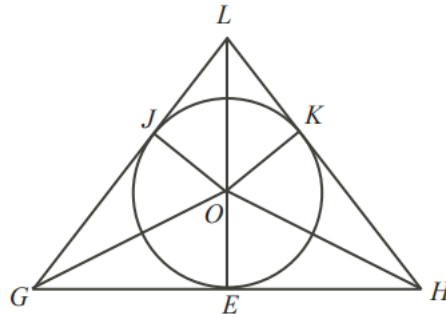
Ta đặt $\angle OIH = \alpha$.

$$\text{Vì } \triangle OIH \text{ vuông tại } I \text{ nên } \tan \alpha = \frac{OE}{EH} = \frac{5}{10\sqrt{2}-5} \Rightarrow 2 \tan \alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}-1}.$$

$$\text{Đồng thời } 1 - \tan^2 \alpha = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}-1)^2}.$$

$$\text{Ta có: } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}.$$

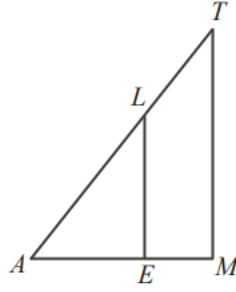
$$\triangle LEH \text{ vuông tại } E \text{ nên } \tan \angle EHL = 2 \tan \alpha = \frac{LE}{EH} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow LE = \frac{10(2\sqrt{2}-1)^2}{8-4\sqrt{2}}.$$



Gọi h là độ cao nhỏ nhất của kim tự tháp mà ta cần tính. Ta sẽ xét $\triangle AMT$.

$$\text{Ta dễ thấy } LE \parallel TM \text{ nên } \frac{LE}{TM} = \frac{AE}{AM}$$

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY



Do đó $TM = h = \frac{AM \cdot LE}{AE} = \frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1)}{2 - \sqrt{2}} \approx 22.1$.

Vậy độ cao nhỏ nhất mà kim tự tháp có thể đạt được là 22.1.

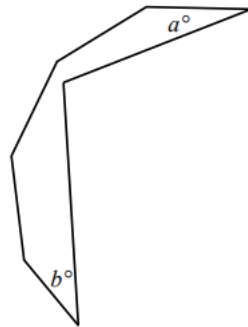
Câu 9. Đáp án: $n = 9$

Tổng các góc của một đa giác có n cạnh là $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Tức là tổng các góc trong ngũ giác sẽ là $3 \cdot 180 = 540^\circ$, nghĩa là mỗi góc trong ngũ giác đều sẽ là 108° .

Cũng như là, mỗi góc trong 1 đa giác đều n cạnh sẽ là $\frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$.

Ta xét đa giác có 7 cạnh như hình dưới: Xét tổng các góc trong đa giác có 7



cạnh, ta có phương trình:

$$4 \cdot \frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ + a^\circ + b^\circ + 360^\circ - 108^\circ = (7 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$340^\circ = \frac{n + 8}{n} \cdot 180^\circ$$

$$n = 9$$

Vậy $n = 9$ là kết quả của bài toán.

Câu 10. Đáp án: 772626

Đầu tiên, ta điền các số vào 4 tầng trên cùng.

Tầng trên cùng chỉ có 1 quả cầu nên ta đánh số là 1.

PHẦN THI 3. BÙNG CHÁY

Ở tầng thứ 2, mỗi quả cầu chỉ chạm vào 1 quả cầu ở bên trên. Mà quả cầu này được đánh số 1 nên tất cả quả cầu nằm ở tầng thứ 2 đều được đánh số 1.

1

1 1

Ở tầng thứ 3, mỗi quả cầu nằm ở đỉnh ngoài chỉ chạm 1 quả cầu nằm ở tầng thứ 2 nên các quả cầu nằm ở đỉnh ngoài đều được đánh số là 1. Các quả cầu còn lại đều chạm vào 2 quả cầu nằm ở tầng thứ 2, mà các quả cầu nằm ở tầng 2 được đánh số 1 nên các quả cầu còn lại nằm ở tầng 3 đều được đánh số 2.

1

2 2

1 2 1

Tương tự, ta có thể đánh số vào các quả cầu nằm ở tầng thứ 4

1

3 3

3 6 3

1 3 3 1

Ta sẽ định nghĩa, *quả bóng* là quả cầu mà nó không phải là *quả ngọc* (tức là những quả cầu nằm ở các cạnh ngoài của các tầng quả cầu). Trong 4 tầng đầu tiên, chỉ có quả cầu được đánh số 6 ở tầng thứ 4 là *quả ngọc*; còn những quả còn lại là *quả bóng*.

Ta có thể nhận thấy một số điều sau:

1. Các quả cầu nằm ở các đỉnh của các tầng đều được đánh số là 1.
2. Tổng các số được đánh dấu trên các quả cầu nằm ở 1 cạnh ngoài nằm ở 4 tầng đầu tiên sẽ là 1, 2, 4, 8. Do đó ta có thể đoán rằng tổng các số được đánh trên các quả cầu nằm ở 1 cạnh ngoài của tầng thứ k sẽ là 2^{k-1} .
3. Tổng các số được đánh dấu trên các quả cầu nằm trên 4 tầng đầu tiên lần lượt là 1, 3, 9, 27. Do đó ta có thể đoán rằng tổng các số được đánh dấu ở trên các quả cầu nằm ở tầng thứ k sẽ là 3^{k-1} .

Chúng ta sẽ sử dụng các điều trên để giải quyết bài toán.

Để xác định tổng của các số được đánh dấu trên *quả ngọc*, ta sẽ tính tổng các số được đánh dấu trên tất cả các quả cầu trừ cho tổng các số được đánh dấu trên các *quả bóng* (tức là những quả không phải là *quả ngọc*).

Dựa trên điều thứ (3), tổng các số được đánh dấu trên cả 13 tầng quả cầu sẽ là:

$$3^0 + 3^1 + \dots + 3^{11} + 312 = \frac{1}{2}(3^{13} - 1)$$

PHẦN THI 3. BỪNG CHÁY

Để có thể tính tổng các số được đánh trên các *quả bóng*, ta sẽ xét đến các tầng quả cầu thứ k , với $k \geq 2$ (Do tổng các số được đánh trên *quả bóng* ở tầng đầu tiên là 1).

Dựa trên điều số (2), ta có thể thấy rằng, tổng của các số được đánh dấu trên các *quả bóng* ở tầng thứ k sẽ là $3 \cdot 2^{k-1} - 3$ (Do mỗi tầng quả cầu đều là tam giác có 3 cạnh).

Vì thế, tổng các số được đánh trên các *quả bóng* sẽ là:

$$1 + (3 \cdot 2^1 - 3) + (3 \cdot 2^2 - 3) + \dots + (3 \cdot 2^{12} - 3) = 3 \cdot 2^{13} - 41$$

Vì thế, tổng các số được đánh trên các *quả ngọc* sẽ là:

$$\frac{1}{2}(3^{13} - 1) - 3 \cdot 2^{13} + 41 = 772626$$

Phần thi 4

Lên đỉnh

Câu 1. Đáp án: 9

Để ý rằng các số mà Hoàng tạo phải luôn bắt đầu từ chữ số 6 và kết thúc ở chữ số 5. Với các số 2,3,7 nằm ở giữa.

Mỗi tên được đánh số 7 với mỗi tên không đánh chữ số nào có thể cho Hoàng có thể tạo bao nhiêu chữ số 7 tùy thích ngay sau chữ số 6. Tương tự Hoàng có thể tạo bao nhiêu chữ số 7 tùy thích vào trước chữ số 5.

Các mũi tên có đánh chữ số 2 và 3 chỉ ra rằng Hoàng có thể thêm cặp số 23 vào số được tạo, cả trước và sau khi thêm số 7, Hoàng cũng có thể thêm nhiều cặp số 23, nhưng giữa các cặp phải có ít nhất 1 chữ số 7. Điều này là do khi đi theo mũi tên được đánh số 3, cách duy nhất để di chuyển quay lại trong hình vẽ là đi theo mũi tên được đánh chữ số 7.

Ta sẽ xét các cặp số 23 trong số của Hoàng tạo ra, ta cần liệt kê các số có 8 chữ số mà Hoàng có thể tạo ra.

- Số không có cặp 23: 67777775.
- Số có 1 cặp 23: 62377775; 67237775; 67772375; 67777235.
- Số có 2 cặp 23 (với chữ số 7 nằm ở giữa): 62372375; 62737235.
- Số có 2 cặp 23 (với 2 chữ số 7 nằm ở giữa): 62377235.

Vì thế, Hoàng chỉ có thể tạo ra 9 số có 8 chữ số.

Câu 2. Đáp án: 631

Có tất cả $2^{10} = 1024$ chuỗi có 10 chữ cái, mỗi chữ cái là A hoặc B .

Ta sẽ xác định số chuỗi kí tự không chứa chuỗi con $ABBA$ bằng cách lấy 1024 trừ cho số chuỗi có bao gồm 1 chuỗi con $ABBA$.

Nếu 1 chuỗi có chuỗi con $ABBA$, có tất cả 7 khả năng để có thể bắt đầu chuỗi con này ($ABBAxxxxx, xABBAxxxxx, \dots, xxxxxxABBA$).

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Có 2 cách để chọn từ 6 ô trống còn lại trong chuỗi, vì thế có tất cả $7.2^6 = 448$ lần xuất hiện của chuỗi con $ABBA$ trong tất cả 1024 chuỗi.

Nhưng điều đó không có nghĩa là sẽ có tất cả 448 chuỗi chứa 1 chuỗi con $ABBA$. Bởi vì $ABBA$ có thể xuất hiện nhiều lần trong 1 chuỗi. (Ví dụ như $ABBAABBA$ có xuất hiện chuỗi con $ABBA$ 2 lần). Nên ta phải xét các trường hợp có sự xuất hiện nhiều hơn 1 lần của $ABBA$.

Nếu 1 chuỗi bao gồm 2 chuỗi con $ABBA$ nhưng đè lên nhau, nên sẽ có 4 khả năng để chuỗi con bắt đầu là: $ABBABBAxx, xABBABBAxx, xxABBABBAx, xxxABBABBA$.

Bởi vì có 4 khả năng để chuỗi $ABBBABBA$ bắt đầu vị trí và 2 cách chọn cho các kí tự còn thiếu trong chuỗi. Nên sẽ có tất cả $4.2^3 = 32$ lần xuất hiện của chuỗi $ABBBABBA$.

Nhưng bởi vì chuỗi $ABBABBABBA$ được đếm 2 lần. Nên ta phải trừ 2 đi trong tổng số 32 chuỗi thành 30, là tổng số chuỗi có 10 kí tự mà bao gồm chính xác chuỗi $ABBABBABBA$. (Ta sẽ đếm chuỗi $ABBABBABBA$ sau).

Nếu chuỗi trên chứa 2 chuỗi con $ABBA$ và không đè lên nhau, nên nó chỉ có thể xảy ra trong các khả năng sau: $ABBAABBAxx, ABBAxABBAx, ABBAxxABBA, xABBAABBAx, xBBAxABBA, xxABBAABBA$.

Bởi vì có 6 khả năng trên và có 2 cách chọn cho 2 kí tự còn lại bị thiếu nên ta sẽ có tất cả $6.2^2 = 24$ chuỗi như trên.

Bởi vì theo như cách chọn trên sẽ chứa chuỗi con $ABBABBABBA$, nên sẽ chỉ còn có $24 - 1 = 23$ chuỗi có 10 kí tự mà chỉ bao gồm chính xác 2 chuỗi con $ABBA$ riêng biệt.

Tổng kết lại, sẽ có tất cả $448 - 23 - 30 - 2.1 = 393$ chuỗi mà bao gồm ít nhất 1 chuỗi con $ABBA$. (Vì chuỗi con $ABBABBABBA$ xuất hiện 2 lần trong chuỗi). Như vậy, ta sẽ có tất cả $1024 - 393 = 631$ chuỗi có 10 kí tự mà không bao gồm chuỗi con $ABBA$.

Câu 3. Đáp án: 7

Thời gian sớm nhất mà Hoàng có thể chuyển gỗ tới khu lưu trữ đồ là 5 phút sau khi bắt đầu công việc. Sẽ mất 10 phút để Hoàng có thể quay lại vào khu rừng, lấy 2 khúc gỗ và mang chúng đến khu lưu trữ, và cũng sẽ cần thêm 10 phút nữa để lấy 2 khúc gỗ đến khu lưu trữ. Tổng quát hóa lên, Hoàng có thể vác 2 khúc gỗ tới kho lưu trữ trong khoảng thời gian 5 phút, 15 phút, 25 phút, 35 phút sau khi bắt đầu công việc. Do đó, Hoàng chỉ có thể vác 8 khúc gỗ đến kho chứa đồ trong 40 phút đầu tiên bởi.

Bảo phải mất 4 phút để có thể rời khu xây dựng, lấy 1 khúc gỗ từ khu chứa đồ và quay lại khu xây dựng. Thời điểm sau khi bắt đầu công việc được 5 phút, Bảo sẽ chạy đến khu chứa đồ và cần 2 vòng để có thể lấy 2 khúc gỗ. Do đó, Bảo mất tổng cộng $4 + 4 = 8$ phút, do đó tại $5 + 8 = 13$ sau khi bắt đầu công việc, Bảo đã có 2 khúc gỗ ở khu xây dựng.

Bắt đầu phút thứ 15 sau khi bắt đầu công việc, Bảo sẽ cần phải mất 8 phút để mang 2 khúc gỗ từ khu chứa đồ đến khu xây dựng. Vì thế tại sau $15 + 8 = 23$ phút, đã có 4 khúc gỗ tại khu xây dựng.

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

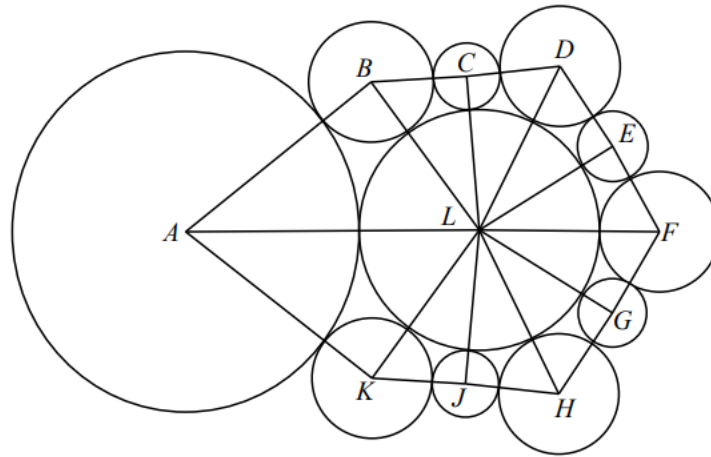
Tương tự như vậy, ở phút thứ 25, Bảo cũng lấy 2 khúc gỗ mang về khu xây dựng nên sau khi bắt đầu công việc được $25+8=33$ phút, đã có 6 khúc gỗ ở khu xây dựng.

Bắt đầu thời điểm phút thứ 35 sau khi bắt đầu công việc, Bảo sẽ đi lấy gỗ 1 lần nữa. Tại phút thứ 39 sau khi bắt đầu làm việc, Bảo đã lấy thêm 1 khúc gỗ nữa để mang đến khu xây dựng. Thế nên, Bảo sẽ không thể nhận được khúc gỗ thứ 8.

Vì thế sẽ có tất cả 7 khúc gỗ có thể mang đến khu xây dựng trong khoảng thời gian 40 phút.

Câu 4. Đáp án: $s = 25538, t = 2053$

Ta đặt $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$ lần lượt là tâm các hình trong bắt đầu từ hình tròn Z đi theo chiều kim đồng hồ.



Với 2 đường tròn tiếp xúc nhau, thì khoảng cách giữa tâm 2 hình tròn sẽ bằng tổng của 2 bán kính của 2 đường tròn. Do đó:

$$BC = CD = DE = EF = FG = GH = HJ = JK = 2 + 1 = 3$$

$$BL = DL = FL = HL = KL = 2 + 4 = 6$$

$$CL = EL = GL = JL = 1 + 4 = 5$$

$$AB = AK = r + 2$$

$$AL = r + 4$$

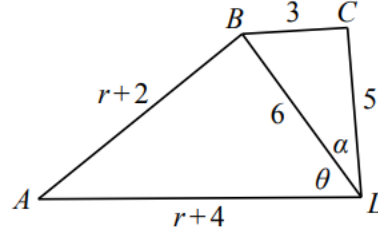
Ta cũng có các tam giác sau đây bằng nhau:

$$\triangle BLC, \triangle DLC, \triangle DLE, \triangle FLE, \triangle FLG, \triangle HLG, \triangle HLJ, \triangle KLJ$$

Đặt $\angle ALB = \theta, \angle BLC = \alpha$.

Ta xét hình sau: Áp dụng định lí cosine cho $\triangle ALB$:

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH



$$\begin{aligned} AB^2 &= AL^2 + BL^2 - 2.AL.BL.\cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{r+12}{3r+12} \end{aligned}$$

Áp dụng định lý cosine cho $\triangle BLC$, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BL^2 + CL^2 - 2.BL.CL.\cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

Bởi vì $\cos \alpha = \frac{13}{15}$, nên $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{113}{225}$.

Và đồng thời $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \frac{25087}{50625}$.

Cuối cùng: $\cos \theta = -\cos 4\alpha \Rightarrow \frac{r+12}{3r+12} = \frac{25087}{50625} \Rightarrow r = \frac{25538}{2053}$.

Do đó $s = 25538$ và $t = 2053$.

Câu 5. Đáp án: 50 phút hay $\frac{5}{6}$ giờ.

Gọi t_1 giờ là khoảng thời gian mà Hoàng là người đạp và Bảo là người bơi.

Gọi t_3 giờ là khoảng thời gian mà Hoàng là người bơi còn Bảo là người đạp.

Gọi t_2 là khoảng thời gian mà Hoàng với Bảo đều cùng bơi, chiếc thuyền kayak không chuyển động.

Gọi d là chiều dài của cái hồ.

Bởi vì Hoàng đạp với vận tốc 7 km/h và bơi với vận tốc 2 km/h, nên $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$.

Bởi vì Bảo đạp với vận tốc 7 km/h và bơi với vận tốc 2 km/h, nên $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$.

Bởi vì kayak chuyển động với vận tốc 7 km/h và không chuyển động khi cả Hoàng và Bảo đều cùng bơi, nên $7t_1 + 0t_2 + 7t_3 = d$.

Bởi vì Hoàng và Bảo đều cần 90 phút để bơi đến phía bên kia hồ, nên $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2}$.

Ta kết hợp $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$ và $7t_1 + 7t_3 = d$, ta có được $t_2 = \frac{5}{2}t_1$.

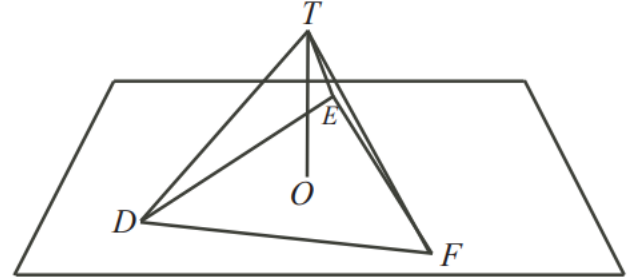
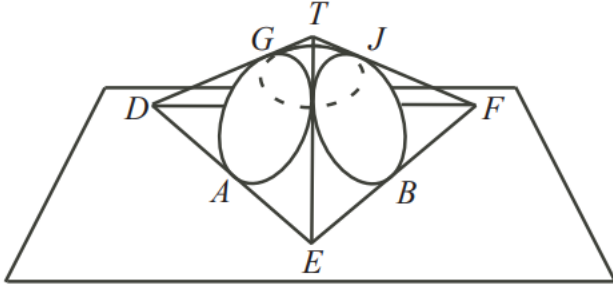
Ta kết hợp $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$ và $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$, ta có được $t_1 = t_3$.

Từ các dữ kiện trên, ta có thể suy ra được $t_1 = \frac{1}{3}$ nên $t_2 = \frac{5}{6}(h)$ hoặc $t_2 = 50$ (phút).

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Câu 6. Đáp án: 7.3

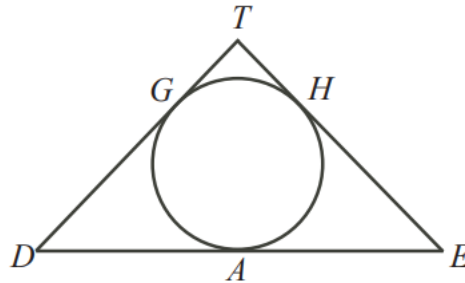
Gọi A, B, C lần lượt là 3 điểm tiếp xúc của 3 vòng tròn với mặt phẳng (P) . Cứ với mỗi 3 hình tròn này sẽ có 1 mặt phẳng chứa nó. Ta sẽ để cho 3 mặt phẳng này cùng giao nhau và giao với mặt phẳng (P) . Khi đó các giao tuyến cùng với các giao điểm được thể hiện ở hình dưới. Ta dễ thấy, $DE = EF = FD$ và A, B, C



lần lượt là 3 trung điểm của 3 đoạn thẳng này. Vì thế $\triangle DEF$ là tam giác đều, ta gọi O là điểm chính giữa của tam giác đó.

Ta gọi 3 điểm G, H, J là 3 điểm mà các vòng tròn này tiếp xúc với nhau, với G là điểm tiếp xúc của 2 vòng tròn chứa A và C , H là điểm tiếp xúc của 2 vòng tròn chứa A và B , J là điểm tiếp xúc giữa 2 vòng tròn chứa B và C . Dễ thấy $GH = HJ = JG$ và đồng thời các đường thẳng DG, EH, FJ sẽ đồng quy tại 1 điểm, ta gọi điểm đó là T , với T là điểm nằm ngay trên điểm O . Khi đó ta sẽ có được khối tứ diện tam giác đều $TDEF$ với đáy DEF là tam giác đều, các mặt bên là tam giác cân và có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Ta xét mặt tam giác $\triangle DET$, có đường tròn chứa A và tiếp xúc với 3 cạnh tam giác tại G, H, A :



Vì mặt phẳng tam giác $\triangle DET$ tạo với mặt phẳng ngang 1 góc 45° nên $\angle TAO = 45^\circ$.

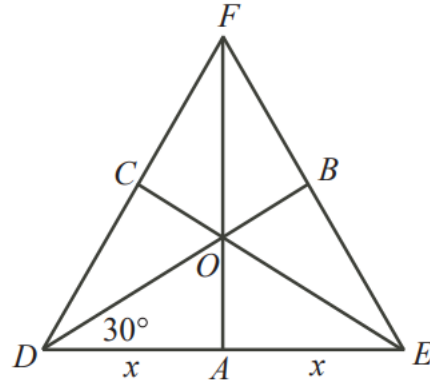
Do đó $\triangle TAO$ là tam giác vuông cân tại O , nên $TA = \sqrt{2}AO$.

Giờ ta sẽ xét mặt đáy $\triangle DEF$:

Ta đặt $DE = 2x$ nên $DA = AE = x$.

Xét $\triangle ODA$ vuông tại A , ta có $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}DA = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ và $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. Nên ta suy

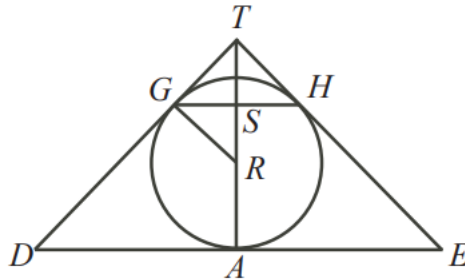
PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH



ra $TA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.

Xét lại $\triangle TAD$, ta có $TD = \sqrt{TA^2 + DA^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$.

Ta gọi R là tâm hình tròn nằm trong $\triangle DET$. $RG \perp TD$ tại G . GH cắt TA tại S .



Dễ thấy rằng $GS \parallel DA \Rightarrow \frac{SG}{TG} = \frac{AD}{TD} = \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x}$. Vì thế $SG = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}TG$.

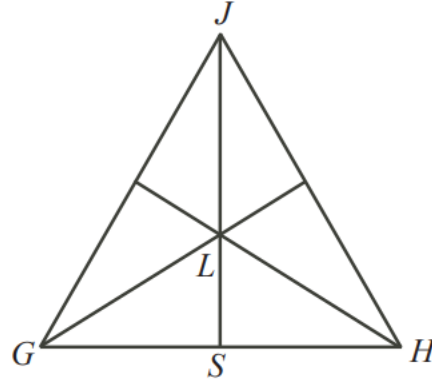
Ta có $\triangle TGR \sim \triangle TDA$ nên $\frac{TG}{GR} = \frac{TA}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x}{x}$, vì thế $TG = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $SG = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$.

Cuối cùng, ta xét $\triangle GHJ$. Dễ thấy $\triangle GHJ$ là tam giác đều.

Xét $\triangle GLS$ vuông tại S, ta có: $LG = \frac{2}{\sqrt{3}}SG = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{30} \approx 7.303$. Và đây cũng chính là bán kính của hình tròn ta cần tìm trong bài toán.

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH



Câu 7. Đáp án: 8

Giả sử các số nguyên ở hàng đầu tiên được kí hiệu theo thứ tự là a, b, c, d, e . Theo giả thiết, ta có quy luật sau: Vì thế, $ab^4c^6d^4e = 9953280000$.

a		b		c		d		e
	ab		bc		cd		de	
		ab^2c		bc^2d		cd^2e		
			ab^3c^3d		bc^3d^3e			
				$ab^4c^6d^4e$				

Sau đó ta phân tích số 9953280000 thành các thừa số nguyên tố: $9953280000 = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$. Vì thế $ab^4c^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$.

Bởi vì bên vế phải không chia hết được cho 7, nên a, b, c, d, e không thể chọn được số 7. Nên a, b, c, d, e chỉ có thể chọn các số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Bởi vì $2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^4$ bao gồm chỉ có 4 thừa số 5, nên $b = 5$ hoặc $d = 5$. Ta sẽ xét trường hợp $b = 5$ trước, bộ 5 số (a, b, c, d, e) chọn được khi $b = 5$ sẽ bằng nhau khi ta xét $d = 5$.

Với $b = 5$, ta có $ac^6d^4e = 2^{16} \cdot 3^5$, bởi vì ac^6d^4e chỉ bao gồm có 5 thừa số 3 và các giá trị a, c, d, e chia hết cho 3 đều là 3 hoặc 6, nên $d = 3$ và 1 trong a hay e bằng 6, hoặc là $d = 6$ hay 1 trong a hay e bằng 3.

TH1: $b = 5, d = 3, a = 6$

Ta có $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 2 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.

Điều đó cho ta thấy $c^6 \cdot e = 2^{16}$ và c, e nhận các giá trị $\{1, 2, 4, 8\}$.

Ta thử các giá trị vào thử thì ta nhận được $c = 4, e = 8$, nên chỉ có 1 bộ 5 số thỏa là $(6, 5, 4, 3, 8)$.

TH2. $b = 5, d = 3, e = 6$. Ta có được 1 bộ 5 số thỏa sẽ là $(8, 5, 4, 3, 6)$.

TH3. $b = 5, d = 6, a = 3$

Ta có $a \cdot c^6 \cdot d^4 \cdot e = 2^4 \cdot 3^5 \cdot c^6 \cdot e$.

Điều này cho ta thấy $c^6 \cdot e = 2^{12}$ và c, e nhận các giá trị từ $\{1, 2, 4, 8\}$.

Ta thử các giá trị vào thì chỉ có 1 bộ 5 số thỏa đó là $(3, 5, 4, 6, 1)$.

TH4. $b = 5, d = 6, e = 3$ ta cũng nhận 1 bộ 5 số thỏa là $(1, 5, 4, 6, 3)$.

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Tương tự với trường hợp $d = 5$, vậy ta sẽ có tất cả $4.2 = 8$ cách để chọn các số ở các ô trên hàng đầu tiên.

Câu 8. Đáp án: 20

Số người tối đa có thể tham quan từ địa điểm A đến địa điểm J trong 1 ngày mà chỉ sử dụng các hoạt động và lộ trình kể trên là 20 người. Ta sẽ cách khả thi để 20 người có thể tham quan từ A đến J . Sau đó ta sẽ chứng minh đây là số người tối đa có thể đi được.

20 người bắt đầu xuất phát tại A , thì 5 người sẽ đi đến điểm B , 10 người sẽ đi đến điểm C và 5 người sẽ đi đến điểm D . Số người đi sẽ được phân bổ như sau:

Địa điểm	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Số người đi	0	5	10	5	0	0	0	0	0

Từ B chỉ có 1 lộ trình đi đến E , nên tất cả mọi người ở B sẽ đến vị trí E . Từ C , 5 người sẽ đi sang E và 5 người sẽ đi sang D , nên ta có bảng sau:

Địa điểm	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Số người đi	0	0	0	10	10	0	0	0	0

Từ D , chỉ có 1 lộ trình để sang F , Tương tự đối với E , chỉ có một lộ trình đi sang G . Do đó những người ở D sẽ đi sang F và những người ở E sẽ đi sang G . Do đó ta có bảng sau:

Địa điểm	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Số người đi	0	0	0	0	0	10	10	0	0

Từ F , 5 người sẽ đi sang G , và 5 người còn lại ở F sẽ đi sang H , ta có bảng sau:

Địa điểm	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Số người đi	0	0	0	0	0	0	15	5	0

Những người ở vị trí G và H sẽ đi đến điểm J . Với cách này, sẽ có 20 người có thể di chuyển từ A đến J . Đây chỉ là 1 cách để có thể đưa 20 người từ A sang J .

Bây giờ ta phải chỉ rõ tại sao chỉ có thể có tối đa 20 người có thể di chuyển từ A đến J trong một ngày. Giả sử chúng ta tách hòn đảo này ra thành 2 vùng. Vùng phía Tây bao gồm A, B, C, D, E và vùng phía Đông bao gồm F, G, H, J . Để có thể di chuyển từ A đến J , mọi người đi từ vùng phía Tây mới qua vùng phía Đông. Tuy nhiên, chỉ có 2 cách để có thể di chuyển giữa vùng phía Tây và vùng phía Đông. Chỉ có tối đa 10 người có thể di chuyển từ E sang G và tối đa 10 người có thể di chuyển từ D sang F chỉ trong 1 ngày. Vì thế chỉ có thể có tối đa 20 người có thể di chuyển từ vùng phía Tây sang vùng phía Đông. Do đó 20 người cũng là số người tối đa có thể di chuyển từ vị trí A đến vị trí J .

PHẦN THI 4. LÊN ĐỈNH

Câu 9. Đáp án: 115586(m^3)

Ta có $2a = 150 \Rightarrow a = 75, 2b = 90 \Rightarrow b = 45$. Phương trình Elip có dạng $\frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1$.

Gọi $M(x, y) \in (E) \Rightarrow N(x, -y) \in (E) \Rightarrow MN = 2|y| = 2 \cdot \frac{45}{75} \sqrt{75^2 - x^2} = \frac{6}{5} \sqrt{75^2 - x^2}$.

Diện tích phần gạch sọc bằng:

$$\frac{1}{4}S_{(I, IM)} - S_{IMN} = \frac{1}{4}\pi IM^2 - \frac{1}{2}IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Khi đó thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân sẽ là:

$$\int_{-75}^{75} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 1115586(m^3)$$

Câu 10. Đáp án: 98.2

Gọi F là biến cố khu vực F không mất điện; A, B, C, D, G lần lượt là các biến cố trạm biến áp A, B, C, D, G gặp sự cố kĩ thuật.

Ta có: $\bar{F} = (A \cap B \cap C) \cup (D \cap G)$

Suy ra:

$$P(\bar{F}) = P(ABC) + P(DG) - P(ABCDG) = (0.2)^3 + (0.1)^2 - (0.2)^3(0.1)^2 = 0.01792$$

Do đó $P(F) = 0.98208 \Rightarrow 100p \approx 98.2$.

Phần thi 5

Câu hỏi phụ

Câu 1. Đáp án: 48

Ta biết rằng khi a, b, c là các số nằm trên các cánh quạt liên tiếp nhau thì $b = ac$. Điều đó có nghĩa rằng, nếu a, b là 2 số nằm trên 2 cánh quạt liên tiếp thì số nằm trên cánh quạt tiếp theo sẽ có giá trị $c = \frac{b}{a}$.

Bắt đầu từ các số đã cho trước là 2, 3 và đi theo chiều kim đồng hồ, ta sẽ có 1 dãy số sau:

$$2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3, \dots$$

Cứ sau mỗi 6 số hạng thì số 2, 3 sẽ xuất hiện lại lần nữa và tiếp theo đó 6 số hạng này sẽ lặp lại lần nữa.

Bởi vì ta chỉ có 36 số hạng trên chiếc đĩa, nên 6 số hạng này sẽ lặp lại 6 lần.

Bởi vì thế, tổng của 36 số này là: $6 \left(2 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = 48$.

Câu 2. Đáp án: 60.9 hoặc 61

Để đồ thị hàm số $(P) : y = mx^2 + 2nx - m$ và $(Q) : y = x^2$ cắt nhau thì phương trình $mx^2 + 2nx - m = x^2$ có ít nhất 1 nghiệm thực.

Suy ra phương trình $(m - 1)x^2 + 2nx - m = 0$ sẽ có ít nhất 1 nghiệm thực.

Ta lập $\Delta' = n^2 + m(m - 1) = n^2 + m^2 - m \geq 0$.

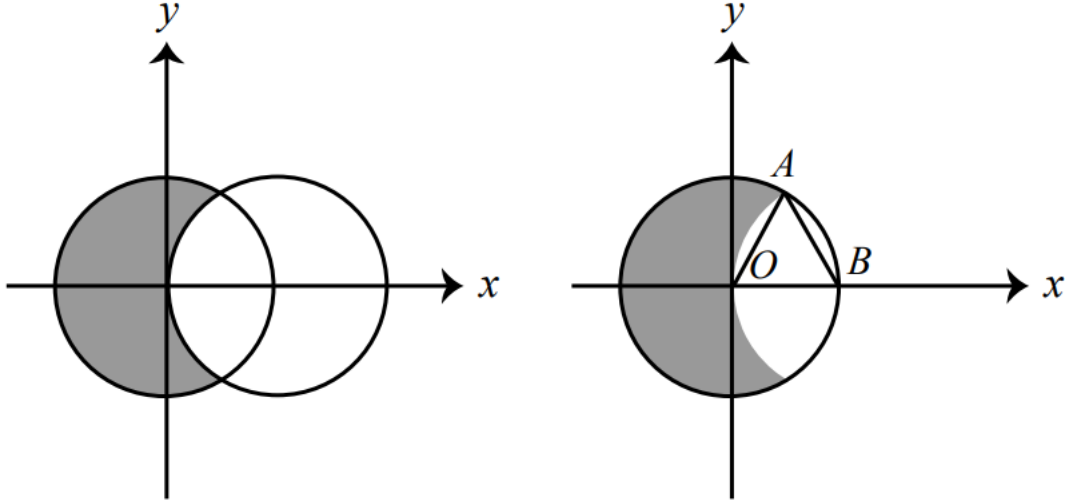
Suy ra $m^2 - m + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + n^2 \geq 0 \Rightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \geq \frac{1}{4}$. Do đó, ta cần chọn điểm

(m, n) sao cho thỏa đồng thời $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \geq \frac{1}{4}$ và $m^2 + n^2 \leq \frac{1}{4}$.

Ta có hình vẽ sau:

Ta sẽ chọn những điểm (m, n) nằm trong phần được in đậm. Do đó ta cần phải tính

PHẦN THI 5. CÂU HỎI PHỤ



diện tích của phần in đậm.

Gọi các điểm O, A, B như hình vẽ ở bên phải.

Ta đặt bán kính của 2 vòng tròn này là $r = \frac{1}{2}$.

Dễ thấy rằng $OA = AB = OB$ nên $\triangle OAB$ đều, nên góc $\angle AOB = 60^\circ$.

Do $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ nên diện tích cung tròn OAB sẽ là $S_{OAB} = \frac{1}{6}\pi r^2$.

Ngoài ra, diện tích của tam giác đều OAB sẽ là $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.

Kết luận lại, diện tích của phần được in đậm sẽ được tính bằng công thức:

$$S = \pi r^2 - 2 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \right] = \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

Vậy xác suất để chọn các điểm (m, n) sẽ là: $\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2}{\pi r^2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} \approx 0.609$.

Do đó $S = 100p = 60.9$ hay $S \approx 61$.