Kiểm định giả thuyết thống kê (P. 1)

Hoàng Văn Hà
University of Science, VNU - HCM
hvha@hcmus.edu.vn

Mục lục

Định nghĩa

Định nghĩa 1

Giả thuyết thống kê là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay chấp nhận một giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Ví dụ 1

Giám đốc một nhà máy sản xuất bo mạch chủ máy vi tính tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình của một bo mạch chủ do nhà máy sản xuất ra là 5 *năm; đây là một giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên* $X =$ *tuổi thọ của một bo mạch chủ. Để đưa ra kết luận là chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên, ta cần dựa vào mẫu điều tra và quy tắc kiểm định thống kê.*

Giả thuyết không và đối thuyết

Định nghĩa 2

Trong bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết cần được kiểm định gọi là Giả thuyết không (null hypothesis), ký hiệu là H_0. Mệnh đề đối lập với H_0 gọi là đối thuyết (alternative hypothesis), ký hiệu là H_1 (hoặc H_a).

Xét bài toán kiểm định tham số, giả sử ta quan trắc mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \dots, X_n)$ từ biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất $f(x;\theta)$ phụ thuộc vào tham số θ. Gọi Θ là không gian tham số, và Θ_0 và Θ_0^c là hai tập con rời nhau của Θ sao cho $\Theta_0 \cup \Theta_0^c = \Theta$. Giả thuyết (giả thuyết không) và đối thuyết của bài toán có dạng như sau

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_0^c \end{cases} \tag{1}$$

Cách đặt giả thuyết

Tổng quát, một bài toán kiểm định giả thuyết cho tham số θ sẽ có một trong 3 dạng dưới đây (θ_0 là giá trị kiểm định đã biết):

Hai phía:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Một phía bên trái:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \quad (\text{hoặc } \theta \geq \theta_0) \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Một phía bên phải:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \quad (\text{hoặc } \theta \leq \theta_0) \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Giả thuyết không và đối thuyết

Ví dụ 2

1. *Gọi μ là độ thay đổi trung bình trong huyết áp của một bệnh nhân sau khi dùng thuốc. Bác sĩ điều trị cần quan tâm đến giả thuyết sau:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 & \textit{Không có ảnh hưởng của thuốc lên huyết áp của bệnh nhân} \\ H_1 : \mu \neq 0 & \textit{Có ảnh hưởng của thuốc lên huyết áp của bệnh nhân} \end{cases}$$

2. *Một khách hàng quan tâm đến tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng mua của một nhà cung cấp. Giả sử tỷ lệ sản phẩm kém tối đa được phép là 5%. Khách hàng cần quan tâm đến giả thuyết sau:*

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 & \textit{Tỷ lệ sản phẩm kém ở mức chấp nhận được} \\ H_1 : p > 0.05 & \textit{Tỷ lệ sản phẩm kém cao hơn mức cho phép} \end{cases}$$

Cách đặt giả thuyết

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.
3. Giả thuyết được đặt ra sao cho nếu nó đúng thì ta sẽ xác định được quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên được chọn làm tiêu chuẩn kiểm định.
4. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. *"Cái chưa biết"* là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. *"Cái đã biết"* là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.
5. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"* hoặc *"bằng nhau"*.

Miền bác bỏ - Tiêu chuẩn kiểm định

Định nghĩa 3

Xét bài toán kiểm định giả thuyết có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Giả sử rằng H_0 đúng, từ mẫu ngẫu nhiên $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ chọn hàm $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ sao cho với số $\alpha > 0$ bé tùy ý ta có thể tìm được tập hợp W_α thỏa điều kiện

$$\mathbb{P}(T \in W_\alpha) = \alpha. \tag{2}$$

Tập hợp W_α gọi là miền bác bỏ (rejection/critical region) của giả thuyết H_0 và phần bù W_α^c gọi là miền chấp nhận (acceptance region). Đại lượng ngẫu nhiên $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ gọi là thống kê kiểm định (test statistic). Giá trị α gọi là mức ý nghĩa (significance level) của bài toán kiểm định.

Miền bác bỏ - Tiêu chuẩn kiểm định

Thực hiện quan trắc dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ ta thu được mẫu thực nghiệm $(x_1, \ldots, x_n)$. Từ mẫu thực nghiệm này, ta tính được giá trị của T là $t = T(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)$.

- Nếu $t \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết H_0.
- Nếu $t \in W_\alpha^c$ thì ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sai lầm loại I và loại II

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

a. Sai lầm loại I: là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Sai lầm loại I ký hiệu là α, chính là mức ý nghĩa của kiểm định.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha | H_0\right). \tag{3}$$

b. Sai lầm loại II: là sai lầm mắc phải khi ta chấp nhận giả thuyết H_0 trong khi thực tế H_0 sai. Sai lầm loại II ký hiệu là β.

$$\beta = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha^c | H_1\right). \tag{4}$$

Sai lầm loại I và loại II

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Không bác bỏ H_0	Không có sai lầm $(1-\alpha)$	Sai lầm loại II β
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I α	Không có sai lầm $(1-\beta)$

Sai lầm loại I và loại II

Ví dụ 3

Khảo sát tốc độ cháy của một loại nhiên liệu rắn dùng để đẩy tên lửa ra khỏi giàn phóng. Giả sử biến ngẫu nhiên X *= tốc độ cháy của nhiên liệu (cm/s) có phân phối chuẩn với kỳ vọng* μ *và độ lệch chuẩn* $\sigma = 2.5$*.*
Ta cần kiểm định giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu \neq 50 \end{cases}$$

Vì $\bar{X}$ *là một ước lượng điểm tự nhiên của* μ*, nên có vẻ hợp lý để chấp nhận* H_0 *nếu* $\bar{X}$ *không quá xa* $\mu_0 = 50$*. Giả sử miền bác bỏ có dạng* $\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) : |\bar{X} - 50| > 1.5\}$*, tức là bác bỏ* H_0 *khi:* $\bar{X} < 48.5$ *hoặc* $\bar{X} > 51.5$*. Các giá trị* 48.5 *và* 51.5 *gọi là giá trị tới hạn (critical value). Giả sử khảo sát mẫu ngẫu nhiên cỡ* $n = 10$*, ta tìm xác suất sai lầm loại I:*

$$\alpha = \mathbb{P}(\textit{Bác bỏ } H_0 \textit{ khi } H_0 \textit{ đúng}).$$

Sai lầm loại I và loại II

Ta có,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}(\bar{X} < 48.5|\mu = 50) + \mathbb{P}(\bar{X} > 51.5|\mu = 50) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 50}{2.5/\sqrt{10}} < \frac{48.5 - 50}{2.5/\sqrt{10}}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 50}{2.5/\sqrt{10}} < \frac{51.5 - 50}{2.5/\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z < -1.90) + \mathbb{P}(Z > 1.90) = 0.0287 + 0.0287 = 0.0574.
\end{aligned}
$$

nghĩa là có 5.74% số mẫu ngẫu nhiên khảo sát được sẽ dẫn đến kết luận bác bỏ giả thuyết $H_0 : \mu = 50$ (cm/s) khi tốc độ cháy trung bình thực sự là 50 (cm/s).

Ta có thể giảm sai lầm α bằng cách mở rộng miền chấp nhận. Giả sử với cỡ mẫu $n = 10$, miền chấp nhận là $48 \leq \bar{x} \leq 52$, khi đó giá trị của α là

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{48 - 50}{2.5/\sqrt{10}}\right) + \mathbb{P}\left(Z > \frac{52 - 50}{2.5/\sqrt{10}}\right) \\
&= 0.0057 + 0.0057 = 0.0114.
\end{aligned}
$$

Sai lầm loại I và loại II

Cách thứ hai để giảm α là tăng cỡ mẫu khảo sát, giả sử cỡ mẫu $n = 16$, ta có $\sigma/\sqrt{n} = 2.5/\sqrt{16} = 0.625$. Với miền bác bỏ là $\bar{X} < 48.5$ hoặc $\bar{X} > 51.5$, ta có

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}(\bar{X} < 48.5|\mu = 50) + \mathbb{P}(\bar{X} > 51.5|\mu = 50)\\ &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{48.5 - 50}{0.625}\right) + \mathbb{P}\left(Z > \frac{51.5}{0.625}\right)\\ &= 0.0082 + 0.0082 = 0.0164.\end{aligned}$$

Xác suất sai lầm loại II β được tính như sau

$$\beta = \mathbb{P}(\text{Không bác bỏ } H_0 \text{ khi } H_0 \text{ sai}).$$

Để tính β, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể cho μ trong đối thuyết H_1.

Sai lầm loại I và loại II

Giả sử với cỡ mẫu $n = 10$, miền chấp nhận của giả thuyết H_0 là $48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5$ trong khi giá trị thực sự của $\mu = 52$. Sai lầm β cho bởi

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}(48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5 | \mu = 52) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{48.5 - 52}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{\bar{X} - 52}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{51.5 - 52}{2.5/\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathbb{P}(-4.43 \leq Z \leq -0.63) = \mathbb{P}(Z \leq -0.63) - \mathbb{P}(Z \leq -4.43) \\
&= 0.2643 - 0.0000 = 0.2643.
\end{aligned}$$

Giả sử giá trị thực sự $\mu = 50.5$, khi đó

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}(48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5 | \mu = 50.5) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{48.5 - 50.5}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{\bar{X} - 50.5}{2.5/\sqrt{10}} \leq \frac{51.5 - 50.5}{2.5/\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathbb{P}(-2.53 \leq Z \leq 1.27) = 0.8980 - 0.0057 = 0.8923.
\end{aligned}$$

Sai lầm loại I và loại II

Tương tự α, tăng cỡ mẫu sẽ làm giảm sai lầm β, với cỡ mẫu $n = 16$ và miền chấp nhận là $48 < \bar{X} < 52$, ta tính được $\beta = 0.229$.
Bảng 1 tổng kết sai lầm lầm loại I và loại II với miền chấp nhận và cỡ mẫu khác nhau

Miền chấp nhận	n	α	β với $\mu = 52$	β với $\mu = 50.5$
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	10	0.0574	0.2643	0.8923
$48 < \bar{x} < 52$	10	0.0114	0.5000	0.9705
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	16	0.0164	0.2119	0.9445
$48 < \bar{x} < 52$	16	0.0014	0.5000	0.9918

Bảng 1: Sai lầm loại I và loại II

Sai lầm loại I và loại II - Nhận xét

1. Ta có thể giảm kích thước của miền bác bỏ (tương ứng tăng kích thước miền chấp nhận), và xác suất sai lầm loại I α bằng cách chọn những điểm tới hạn thích hợp.
2. Xác suất sai lầm loại I và loại II có liên quan với nhau. Với một cỡ mẫu cố định, việc giảm sai lầm loại này sẽ làm tăng sai lầm loại kia.
3. Cố định các điểm tới hạn, tăng cỡ mẫu n sẽ làm giảm xác suất sai lầm loại I α và loại II β.
4. Nếu H_0 sai, sai lầm β sẽ tăng khi giá trị thực của tham số tiến gần đến giá trị được phát biểu trong giả thuyết H_0.

Một số ký hiệu và định nghĩa

Định nghĩa 4

Gọi $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ và W_α lần lượt là thống kê kiểm định và miền bác bỏ của một bài toán kiểm định giả thuyết liên quan đến tham số θ. Độ mạnh (power) của kiểm định là xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 khi đối thuyết H_1 đúng, ký hiệu π:

$$\pi = \mathbb{P}(T \in W_\alpha | H_1) = 1 - \mathbb{P}(T \in W_\alpha^c | H_1) = 1 - \beta.$$

Một thống kê kiểm định tốt sẽ có độ mạnh cao.

Một số ký hiệu và định nghĩa

Định nghĩa 5

Xét bài toán kiểm định giả thuyết thống kê có giả thuyết H_0, đối thuyết H_1, miền bác bỏ W_α và miền chấp nhận W_α^c. α và β lần lượt là sai lầm loại I và loại II của bài toán kiểm định. Cố định giá trị α nhỏ, trong tất cả các thống kê kiểm định $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ có cùng mức sai lầm α thì thống kê kiểm định nào có độ mạnh $\pi = 1 - \beta$ lớn nhất thì được gọi là kiểm định có độ mạnh lớn nhất (most powerful test).

- **Kiểm định có độ mạnh lớn nhất:** làm sao xác định được miền bác bỏ của một kiểm định có độ mạnh lớn nhất có mức ý nghĩa α?
  $\Rightarrow$ sử dụng bổ đề Neyman-Pearson.

Bổ đề Neyman-Pearson

Định lý 1 (Bổ đề Neyman-Pearson)

Xét bài toán kiểm định giả thuyết đơn (simple hypothesis) có $H_0 : \theta = \theta_0$ *và* $H_1 : \theta = \theta_1$. *Gọi* $L(\theta|\mathbf{x})$ *là hàm hợp lý (likelihood function) dựa trên mẫu ngẫu nhiên* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ *được chọn từ phân phối* $\mathbb{P}_\theta$. *Nếu tồn tại một hằng số dương* C *và tập con* $W \subset \mathbb{R}^n$ *sao cho:*

1. $\dfrac{L(\theta_0|\mathbf{x})}{L(\theta_1|\mathbf{x})} \leq C$ *với* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$,
2. $\dfrac{L(\theta_0|\mathbf{x})}{L(\theta_1|\mathbf{x})} > C$ *với* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W^c$,
3. $\mathbb{P}\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in W; \theta_0\right] = \alpha$,

thì kiểm định với miền bác bỏ W *sẽ có độ mạnh lớn nhất. Ta gọi* α *là độ lớn (size) của kiểm định và* W *là miền bác bỏ tốt nhất với độ lớn* α.

Bổ đề Neyman-Pearson - ví dụ

Ví dụ 4

Xét $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên chọn từ tổng thể có phân phối Poisson với trung bình λ. Tìm kiểm định có độ mạnh lớn nhất cho giả thuyết $H_0 : \lambda = 2$ và đối thuyết $H_1 : \lambda = 1/2$.

- Hàm khối xác suất của $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ là: $p(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$
- Hàm hợp lý là

$$L(\lambda|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \lambda^m e^{-\lambda n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right)^{-1}, \quad \text{với } m = \sum_{l=1}^{n} x_i.$$

- Với $\lambda = 2$,

$$L(2|\mathbf{x}) = 2^m e^{-2n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right)^{-1}.$$

Bổ đề Neyman-Pearson - ví dụ

- Với $\lambda = 1/2$,

$$L(1/2|\mathbf{x}) = (1/2)^m e^{-n/2} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right)^{-1}.$$

- Theo bổ đề Neyman-Pearson, miền bác bỏ thỏa

$$\frac{L(2|\mathbf{x})}{L(1/2|\mathbf{x})} = \frac{2^m e^{-2n}}{(1/2)^m e^{-n/2}} = 4^m e^{-\frac{3n}{2}} \leq C.$$

- Lấy Logarit 2 vế, ta được

$$m \log(4) - \frac{3n}{2} \leq \log(C) \Rightarrow m \leq \frac{\log(C) + (3n/2)}{\log(4)}.$$

- Đặt $C' = \frac{\log(C)+(3n/2)}{\log(4)}$. Vậy miền bác bỏ sẽ có dạng:

$$W = \left\{ (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq C' \right\}.$$

Kiểm định tỷ lệ hợp lý (Likelihood Ratio Test)

Xét bài toán kiểm định giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

trong đó θ là tham số chưa biết của tổng thể nhận giá trị trong không gian tham số Θ, $\Theta_0 \subset \Theta$. Xét mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ và hàm hợp lý $L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = L(\theta|\boldsymbol{x})$.

Định nghĩa 6

Tỷ lệ hợp lý (likelihood ratio) cho kiểm định thống kê với giả thuyết $H_0 : \theta \in \Theta_0$ và đối thuyết $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ được định nghĩa bởi

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\boldsymbol{x})}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta|\boldsymbol{x})}. \tag{5}$$

Chú ý rằng $0 \leq \lambda(\boldsymbol{x}) \leq 1$.

Kiểm định tỷ lệ hợp lý

Gọi $\hat{\theta}_0$ và $\hat{\theta}$ lần lượt là các ước lượng hợp lý cực đại của tham số θ xác định trên các không gian tham số Θ_0 và Θ. Khi đó, tỷ lệ hợp lý được xác định bởi

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{L(\hat{\theta}_0|\boldsymbol{x})}{L(\hat{\theta}|\boldsymbol{x})}. \tag{6}$$

Khi đó, miền bác bỏ cho bài toán kiểm định tỷ lệ hợp lý sẽ có dạng

$$W = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \lambda(\boldsymbol{x}) \leq C\right\}.$$

Hằng số C được chọn sao cho kiểm định có mức ý nghĩa cho trước bằng α.

Kiểm định tỷ lệ hợp lý - ví dụ

Ví dụ 5

Xét $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Giả sử σ^2 đã biết. Với mức ý nghĩa α, thực hiện kiểm định $H_0 : \mu = \mu_0$ và $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Hãy tìm một kiểm định tỷ lệ hợp lý.

- Với σ^2 đã biết, hàm hợp lý có dạng

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\}.$$

- Các không gian tham số: $\Theta_0 = \{\mu_0\}$, $\Theta_0^c = \mathbb{R} \backslash \{\mu_0\}$. Khi đó,

$$L(\mu_0|\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 \right\}.$$

- Ước lượng hợp lý cực đại của μ là $\hat{\mu} = \bar{x}$. Do đó,

$$L(\hat{\mu}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right\}.$$

Kiểm định tỷ lệ hợp lý - ví dụ

- Tỷ lệ hợp lý được cho bởi

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L(\mu_0|\mathbf{x})}{L(\hat{\mu}|\mathbf{x})} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = e^{-n(\bar{x}-\mu_0)^2/(2\sigma^2)}.$$

- Bác bỏ H_0 khi $\lambda(\mathbf{x}) \leq C$, tương đương với

$$-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2 \leq \log(C) \Rightarrow \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2/n} \geq 2\log(C).$$

Suy ra: $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq 2\log(C) = C_1.$

- Tìm C_1: ta có nhận xét rằng nếu H_0 đúng,

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Kiểm định tỷ lệ hợp lý - ví dụ

- Với mức ý nghĩa α cho trước

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq C_1\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq C_1\right) = \alpha,$$

hay

$$\mathbb{P}(Z \leq -C_1) + \mathbb{P}(Z \geq C_1) = \alpha.$$

- Ta tính được $C_1 = z_{\alpha/2}$: phân vị trên mức $\alpha/2$ của $\mathcal{N}(0,1)$.
- Vậy miền bác bỏ cho bài toán kiểm định $H_0 : \mu = \mu_0$ và $H_1 : \mu \neq \mu_0$ là

$$W_\alpha = \left\{\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right\}.$$