Kiểm định giả thuyết thống kê (P. 2)

Hoàng Văn Hà
University of Science, VNU - HCM
hvha@hcmus.edu.vn

Mục lục

Mục lục

Mục lục

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Phương sai σ^2 đã biết.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{1}$$

4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 1

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : \lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}\right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 < -z_\alpha\right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 > z_\alpha\right\}$

Bảng 1: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

p - giá trị (p - value)

Định nghĩa 1

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định được tính toán trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định, p - giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Dựa vào đối thuyết H_1, các bước tính p-giá trị như sau:

1. Xác định thống kê kiểm định: $T = T(X_1, \ldots, X_n)$. Tính giá trị thống kê kiểm định dựa trên mẫu $(x_1, \ldots, x_n)$, giả sử bằng a.
2. p-giá trị cho bởi

$$p = \begin{cases} \mathbb{P}(|T| > |a| | H_0), & \text{kiểm định hai phía} \\ \mathbb{P}(T < a | H_0), & \text{kiểm định một phía - bên trái} \\ \mathbb{P}(T > a | H_0), & \text{kiểm định một phía - bên phải} \end{cases} \tag{2}$$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0 nếu p-giá trị $\leq \alpha$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

• **Sử dụng *p*-giá trị (p - value):** tính *p*-giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi p -giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p - giá trị theo các trường hợp xem ở bảng 2.

Giả thuyết	***p* - giá trị**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$p = 2\left[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)\right]$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$p = \Phi(z_0)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

Bảng 2: *p*-giá trị với đối thuyết tương ứng

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Ví dụ 1 (Kiểm định 2 phía)

Một dây chuyền sản xuất kem đánh răng được thiết kế để đóng hộp những ống kem có trọng lượng trung bình là 170g. Một mẫu gồm 30 ống kem được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra định kỳ. Bộ phận điều khiển dây chuyền phải đảm bảo để trọng lượng trung bình mỗi ống kem là 170g; nếu nhiều hơn hoặc ít hơn, dây chuyền phải được điều chỉnh lại.
Giả sử trung bình mẫu của 30 ống kem là 174g và độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể $\sigma = 5.6$*g.*
Thực hiện kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa 3% để xác định xem dây chuyền sản xuất có vận hành tốt hay không?

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$
2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{174 - 170}{5.6/\sqrt{30}} = 3.91.$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$
2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$
3. Tính giá trị thống kê kiểm định
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{174 - 170}{5.6/\sqrt{30}} = 3.91.$$
4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{\alpha/2}$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \ \text{ hoặc } \ z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

- **Sử dụng *p* - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định hai phía

$$p = 2[1 - \Phi(|z_0|)] = 2[1 - \Phi(3.91)] = 2[1 - 0.9999] = 0.0001.$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.03$, ta có $p = 0.0001 < 0.03$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Ví dụ 2 (Kiểm định một phía)

Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp dịch vụ cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ *phút. Với mức ý nghĩa* 5%, *hãy kiểm định xem thời gian phục vụ của xe cấp cứu có đúng như quảng cáo hay không?*

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

Ví dụ 2 (Kiểm định một phía)

Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp dịch vụ cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ *phút. Với mức ý nghĩa* 5%, *hãy kiểm định xem thời gian phục vụ của xe cấp cứu có đúng như quảng cáo hay không?*

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết
   $H_0 : \mu = 12$: thời gian đáp ứng của dịch vụ cấp cứu đạt yêu cầu, không cần phải thay đổi.

   $H_1 : \mu > 12$: thời gian đáp ứng của dịch vụ không đạt yêu cầu, cần thay đổi.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$.
5. Kết luận: $z_0 = 2.47 > 1.645$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, bệnh viện không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH biết σ^2

- **Sử dụng p - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định một phía - bên phải

$$p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.47) = 1 - 0.9932 = 0.0068.$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.05$, ta có $p = 0.0068 < 0.05$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng bệnh viện không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: σ^2 không biết, mẫu nhỏ

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: σ^2 không biết, mẫu nhỏ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}. \tag{3}$$

   Biến ngẫu nhiên T_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 3.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: σ^2 không biết, mẫu nhỏ

Giả thuyết	**Miền bác bỏ**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : \lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2}^{n-1} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 < -t_{\alpha}^{n-1} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 > t_{\alpha}^{n-1} \right\}$

Bảng 3: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ)

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: σ^2 không biết, mẫu nhỏ

• **Sử dụng *p*-giá trị (p - value):** tính *p*-giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi p -giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p - giá trị theo các trường hợp xem ở bảng 4.

Giả thuyết	***p* - giá trị**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \lvert t_0 \rvert)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

Bảng 4: *p*-giá trị với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ)

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng:σ^2 không biết , mẫu lớn

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$.
- Khi cỡ mẫu lớn biến ngẫu nhiên

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{4}$$

sẽ hội tụ về phân phối chuẩn hóa $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó miền bác bỏ W_α hoặc p-giá trị sẽ được tính tương tự như trường hợp biết phương sai, chỉ thay thế $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ bằng Z_0 ở phương trình (4).

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

Ví dụ 3

Một công ty sản xuất pin tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình của một loại pin do công ty sản xuất ra tối thiểu bằng 240 giờ. Khảo sát một mẫu gồm 18 cục pin cho kết quả

237	242	244	262	225	218
242	258	243	234	236	228
232	230	254	220	232	240

Giả sử rằng tuổi thọ loại pin này tuân theo phân phối chuẩn.

a) *Vẽ đồ thị thân và lá cho tập dữ liệu trên. Nhận xét.*

b) *Với mức ý nghĩa 5%, ta có thể bác bỏ tuyên bố của công ty sản xuất pin hay không?*

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

Ví dụ 4

Tốc độ giới hạn trên một đoạn đường là 80 km/h. Trạm cảnh sát giao thông phụ trách đoạn đường tìm kiếm một vị trí phù hợp để đặt một camera bắn tốc độ, với mục đích kiểm soát tốc độ của các phương tiện trên đoạn đường này. Tại một địa điểm F, một mẫu gồm tốc độ của 64 phương tiện được bắn tốc độ ngẫu nhiên có trung bình là 81.5 km/h và độ lệch tiêu chuẩn 6.5 km/h. Với $\alpha = 5\%$, *hãy kiểm định xem địa điểm F có phù hợp để đặt một camera bắn tốc độ hay không?*

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

- Các bước kiểm định:
  1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

- Các bước kiểm định:
  1. Phát biểu giả thuyết:
  $$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}$$
  2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

- Các bước kiểm định:
  1. Phát biểu giả thuyết:
  $$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}$$
  2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
  3. Tính giá trị thống kê kiểm định khi σ^2 không biết và cỡ mẫu $n = 64$ (lớn)
  $$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{81.5 - 80}{6.5/\sqrt{64}} = 1.85.$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

- Các bước kiểm định:
  1. Phát biểu giả thuyết:
  $$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}$$
  2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
  3. Tính giá trị thống kê kiểm định khi σ^2 không biết và cỡ mẫu $n = 64$ (lớn)
  $$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{81.5 - 80}{6.5/\sqrt{64}} = 1.85.$$
  4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng: TH không biết σ^2

5. Kết luận: $z_0 = 1.85 > 1.65$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 80 km/h. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

- **Sử dụng p-giá trị:**

4a. Tính p-giá trị:
Với $z_0 = 2.286$, $p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$.

5a. Kết luận: $p = 0.0322 < 0.05$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 80 km/h. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

Mục lục

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- **Bài toán:**

Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ phần tử mang đặc tính A nào đó là trong tổng thể là p (p chưa biết). Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hãy kiểm định

$$(a)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α.

- Giả định:
  - Cỡ mẫu n lớn, để phân phối chuẩn xấp xỉ phân phối nhị thức tốt cần có $np_0 \geq 5$ và $n(1 - p_0) \geq 5$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

• Quan sát sự xuất hiện của biến cố "phần tử mang đặc tính A" trong n phép thử độc lập. Gọi Y là số lần xuất hiện biến cố trên thì $Y \sim B(n, p)$. Và

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

là một ước lượng không chệch cho p.

• Nếu H_0 đúng, thống kê

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$. Chọn Z_0 làm tiêu chuẩn kiểm định.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bảng 5.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2} \right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 < -z_\alpha \right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 > z_\alpha \right\}$

Bảng 5: Miền bác bỏ cho bài toán kiểm định tỷ lệ

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sử dụng *p*-giá trị: *p*-giá trị tính tương tự như bảng 2.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Ví dụ 5

Trong kỳ nghỉ lễ đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tại nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% *số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia.*
Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục An toàn giao thông với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Ví dụ 5

Trong kỳ nghỉ lễ đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tại nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia.
Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục An toàn giao thông với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{120}} = 0.045644,$$

$$z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{(67/120)-0.5}{0.045644} = 1.28.$$

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{120}} = 0.045644,$$

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{0.025} = 1.96$ hoặc tính p-giá trị

$$p = [(1 - \Phi(z_0)] = 2[1 - \Phi(1.28)] = 2(1 - 0.8977) = 0.2006.$$

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{120}} = 0.045644,$$

$$z_0 = \frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{(67/120)-0.5}{0.045644} = 1.28.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{0.025} = 1.96$ hoặc tính p-giá trị

$$p = [(1-\Phi(z_0)] = 2[1-\Phi(1.28)] = 2(1-0.8977) = 0.2006.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 1.28 < 1.96$ (hoặc $p = 0.2006 > 0.05$) nên kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Ví dụ 6

Trong điều trị một loại bệnh truyền nhiễm, một loại thuốc được biết có hiệu quả điều trị thành công 72% số ca nhiễm bệnh. Một loại thuốc mới được phát triển và thử nghiệm cho thấy có hiệu quả điều trị thành công 42 ca trong số 50 ca nhiễm bệnh. Ta có bằng chứng đủ mạnh để kết luận rằng loại thuốc mới hiệu quả hơn loại thuốc cũ hay không? Tính p - giá trị.

Mục lục

Kiểm định giả thuyết cho phương sai

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.
  - Cho trước giá trị σ_0^2, cần so sánh phương sai σ^2 với σ_0^2.

- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho phương sai

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}. \tag{5}$$

   Nếu H_0 đúng, $X_0^2 \sim \chi^2(n-1)$.

4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 6.

Kiểm định giả thuyết cho phương sai

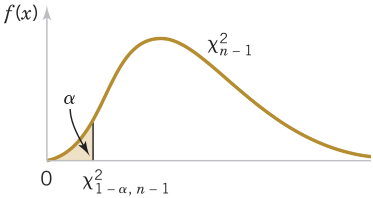
Giả thuyết	**Miền bác bỏ**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$W_\alpha = \left\{X_0^2 : X_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1} \text{ hoặc } X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right\}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$W_\alpha = \left\{X_0^2 : X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}\right\}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$W_\alpha = \left\{X_0^2 : X_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}\right\}$

Bảng 6: Miền bác bỏ cho bài toán kiểm định phương sai

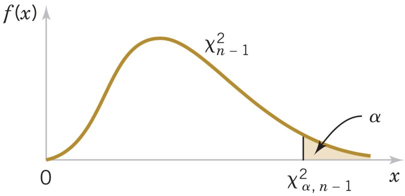
trong đó $\chi^2_{\alpha,n-1}$ là phân vị trên mức α của biến ngẫu nhiên Chi bình phương với $n-1$ bậc tự do.

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

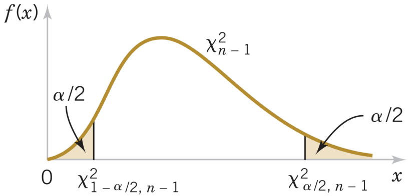
Kiểm định giả thuyết cho phương sai



Miền bác bỏ cho đối thuyết $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$



Miền bác bỏ cho đối thuyết $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$



Miền bác bỏ cho đối thuyết $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Kiểm định giả thuyết cho phương sai

Ví dụ 7

Xenical là một loại thuốc dùng để điều trị béo phì ở những người có các bệnh nền nguy hiểm như tiểu đường, huyết áp cao hoặc thừa cholesterol. Xenical hoạt động trong ruột, nó sẽ ngăn không cho cơ thể hấp thụ các chất béo từ thức ăn khi một người ăn vào. Trong một đơn thuốc tiêu chuẩn, khối lượng một viên nang Xenical được quy định là 120 mg. Mặc dù khối lượng viên nang có thể thay đổi đôi chút từ 120 mg nhưng việc giữ cho sự thay đổi tương đối nhỏ là rất quan trọng vì các lý do y tế khác nhau. Theo quy định của Hiệp hội Dược phẩm Hoa kỳ, độ lệch chuẩn của trong lượng một viên nang Xenical dưới 2 mg là chấp nhận được. Trong một xưởng sản xuất thuốc, người ta chọn một gồm 10 viên nang Xenical có trọng lượng cho bởi bảng bên dưới:

120.94	118.58	119.41	120.23	121.13
118.22	119.71	121.09	120.56	119.11

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, *hãy kiểm định xem những viên nang Xenical được sản xuất ra bởi xưởng sản xuất thuốc có đạt tiêu chuẩn hay không?*

Mục lục

Mục lục

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 đã biết.
- Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập gồm các dạng sau:

$$(a)\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}. \tag{6}$$

Nếu H_0 đúng, thống kê $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

4. Xác định miền bác bỏ: miền bác bỏ và p-giá trị tương ứng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$z_0 > z_\alpha$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai kỳ vọng

Ví dụ 8

Một công ty sản xuất sơn nghiên cứu về 1 loại phụ gia làm giảm thời gian khô của sơn. Thực hiện thí nghiệm trên 2 mẫu: mẫu thứ nhất gồm 10 mẫu vật được sơn bằng loại sơn bình thường; mẫu thứ hai gồm 10 mẫu vật được sơn với sơn có chất phụ gia mới. Trong những nghiên cứu trước, biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của thời gian khô sau khi quét sơn là 8 *phút và không thay đổi khi thêm phụ gia vào. Trung bình của mẫu 1 và 2 lần lượt là* $\bar{x} = 121$ *phút và* $\bar{y} = 112$ *phút. Với mức ý nghĩa* 5%, *hãy cho kết luận về loại sơn với chất phụ gia mới.*

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 & \text{chất phụ gia mới không có hiệu quả} \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 & \text{chất phụ gia mới có hiệu quả} \end{cases}$$

2. Mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

So sánh hai kỳ vọng

3. Tính giá trị thống kê kiểm định, với $\bar{x} = 121$, $\bar{y} = 112$ và $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$ ta có
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{121 - 112}{\sqrt{\dfrac{8^2}{10} + \dfrac{8^2}{10}}} = 2.52.$$
4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$.
5. Kết luận: Ta có $z_0 = 2.52 > 165$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, chất phụ gia có hiệu quả làm giảm thời gian khô sau khi sơn.

   Sử dụng p **- giá trị**: ta có $p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.52) = 0.0059 < 0.05$ nên bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$ và $m > 30$.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2 và σ_2^2 không biết, ta thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2 và S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi cả $n > 30$ và $m > 30$, dưới giả thuyết H_0, đại lượng

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \tag{7}$$

  sẽ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Miền bác bỏ (hoặc p - giá trị) trong trường hợp này được tính tương tự như trường hợp biết phương sai (thay thế σ_1 và σ_2 bởi S_1 và S_2).

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

Ví dụ 9

Khảo sát về chiều cao của sinh viên hai khoa Toán và CNTT: chọn ngẫu nhiên 50 *sinh viên khoa Toán, tính được chiều cao trung bình là* 163 *(cm) và độ lệch tiêu chuẩn* 5 *(cm). Đo chiều cao* 50 *khoa CNTT, có trung bình mẫu là* 166 *(cm) và độ lệch tiêu chuẩn* 8 *(cm). Với mức ý nghĩa* $\alpha = 1\%$, *hãy cho kết luận về chiều cao của sinh viên hai khoa.*

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$ hoặc $m \leq 30$.
- Ta xét hai trường hợp:

1. Trường hợp phương sai bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,
2. Trường hợp phương sai khác nhau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

So sánh hai phương sai

• Giả sử $X_1, \ldots, X_n$ và $Y_1, \ldots, Y_m$ lần lượt là hai mẫu ngẫu nhiên chọn từ hai tổng thể độc lập và có phân phối chuẩn với kỳ vọng và phương sai là (μ_1, σ_1^2) và (μ_2, σ_2^2). Ta cần kiểm định giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \tag{8}$$

• Nếu S_1^2 là phương sai mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ thì

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1). \tag{9}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1).$$

So sánh hai phương sai

• Khi đó, đại lượng

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \tag{10}$$

sẽ có phân phối $\mathcal{F}$ với $(n-1, m-1)$ bậc tự do.

• Xét biến ngẫu nhiên $F \sim \mathcal{F}(u, v)$ có hàm mật độ xác suất là $f(x)$, phân vị trên mức α của F là $f_{\alpha,u,v}$ được định nghĩa như sau

$$\mathbb{P}(F > f_{\alpha,u,v}) = \int_{f_{\alpha,u,v}}^{\infty} f(x)dx = \alpha. \tag{11}$$

• Phân vị dưới mức $1-\alpha$ của F cho bởi

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}}. \tag{12}$$

So sánh hai phương sai

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và đối thuyết $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Khi H_0 đúng, thống kê
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{13}$$
có phân phối $\mathcal{F}$ với $(n-1, m-1)$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $f > f_{\alpha/2,n-1,m-1}$ hoặc $f < f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}$.
5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha) * 100\%$ độ tin cậy. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, ta sử dụng một ước lượng chung cho cả σ_1^2 và σ_2^2 là S_p^2 gọi là phương sai mẫu chung (pooled sample variance)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}. \tag{14}$$

- Thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \tag{15}$$

có phân phối Student với $n + m - 2$ bậc tự do.

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Đặt $df = n + m - 2$, miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0 \rvert > t^{df}_{\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{df} \geq \lvert t_0 \rvert)$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t_0 < -t^{df}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t_0 > t^{df}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \geq t_0)$

- Kết luận: Bác bỏ H_0/Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Khi $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, sử dụng thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}}. \tag{16}$$

- Khi đó T_0 có phân phối Student với bậc tự do df được xác định như sau

$$df = \frac{\left[(s_1^2/n) + (s_2^2/m)\right]^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}. \tag{17}$$

- Miền bác bỏ trong trường hợp này giống như trường hợp phương sai bằng nhau, chỉ thay bậc tự do df cho bởi phương trình (17).

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai

Ví dụ 10

Tại một thành phố, ở khu vực A, người ta chọn ngẫu nhiên 17 *sinh viên và cho làm 1 bài kiểm tra để đo chỉ số IQs, thu được trung bình mẫu là* 106 *và độ lệch tiêu chuẩn bằng 10. Tại khu vực B, chỉ số IQs trung bình của một mẫu gồm 14 sinh viên bằng* 109 *với độ lệch tiêu chuẩn là* 7*. Giả sử phương sai bằng nhau. Có sự khác biệt về chỉ số IQs của sinh viên ở hai khu vực A và B hay không?* $\alpha = 0.02$.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai

Ví dụ 11

Hàm lượng thạch tín (Asen) (Đv: ppb) trong nước càng cao càng có hại cho sức khỏe. Người ta kiểm tra hàm lượng thạch tín ở hai khu vực là trung tâm thành phố Biên Hòa và khu vực gần sân bay Biên Hòa. Tại mỗi khu vực, người ta đo ngẫu nhiên hàm lượng thạch tín trong nước ứng với 10 địa điểm khác nhau. Số liệu cho bởi bảng thống kê bên dưới

Trung tâm TP	3	7	25	10	15	6	12	25	15	7
Khu vực gần sân bay	48	44	40	38	33	21	20	12	1	18

Với $\alpha = 0.05$, *hãy kiểm tra xem có sự khác biệt về hàm lượng thạch tín ở hai khu vực này.*

Mục lục

So sánh hai tỷ lệ

• Khảo sát những phần tử thỏa một tính chất A nào đó trên hai tổng thể độc lập với tỷ lệ tương ứng là p_1 và p_2. Từ hai tổng thể chọn ra hai mẫu với cỡ lần lượt là n và m. Gọi X và Y là số phần tử thỏa tính chất A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, ta có $X \sim B(n, p_1)$ và $Y \sim B(m, p_2)$.

• Bài toán: so sánh tỷ lệ p_1 và p_2.

• Bài toán kiểm định giả thuyết gồm các trường hợp sau:

$$(a) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

• Các giả định

- Hai mẫu độc lập,
- Cỡ mẫu lớn và $np_1 > 5$, $n(1 - p_1) > 5$ và $mp_2 > 5$, $m(1 - p_2) > 5$.

So sánh hai tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \tag{18}$$

với

$$\hat{P}_1 = \frac{X}{n},\ \hat{P}_2 = \frac{Y}{m},\ \hat{P} = \frac{X+Y}{n+m}.$$

Nếu H_0 đúng, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

So sánh hai tỷ lệ

3. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	***p* - giá trị**
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

4. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1 - \alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai tỷ lệ

Ví dụ 12

Một công ty sản xuất thuốc cần kiểm tra một loại thuốc có tác dụng là giảm việc xuất hiện cơn đau ngực ở các bệnh nhân. Công ty thực hiện thí nghiệm trên 400 *người, chia làm hai nhóm: nhóm 1 gồm* 200 *được uống thuốc và nhóm 2 gồm* 200 *người được uống giả dược. Theo dõi thấy ở nhóm 1 có 8 người lên cơn đau ngực và nhóm 2 có 25 người lên cơn đau ngực. Với* $\alpha = 0.05$, *hay cho kết luận về hiệu quả của thuốc mới sản xuất.*

Mục lục

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test)

- Khi hai mẫu không độc lập thì mỗi giá trị quan trắc được trong một mẫu có mối liên hệ tương ứng với một giá trị quan trắc ở mẫu thứ hai. Như vậy, ta có thể ghép cặp từng giá trị trong hai mẫu với nhau.
- Việc ghép cặp là kết quả của việc
  - quan trắc giá trị trước và sau khi thực hiện 1 thí nghiệm. Chẳng hạn như đo trọng lượng trước và sau khi thực hiện một chế độ ăn kiêng.
  - so sánh cùng 1 đặc tính.
  - thí nghiệm trên cùng 1 địa điểm.
  - thí nghiệm với cùng thời gian.

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test)

- Xét (X_{1i}, X_{2i}), với $i = 1, 2, \ldots, n$, là tập gồm n cặp giá trị quan trắc với giả sử rằng kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_1 là μ_1 và σ_1^2 và kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_2 là μ_2 và σ_2^2. X_{1i} và X_{2j} $(i \neq j)$ độc lập.
- Định nghĩa độ sai khác giữa mỗi cặp trong tập hợp các giá trị quan trắc là

$$D_i = X_{1i} - X_{2i},\ i = 1, \ldots, n \tag{19}$$

- Các D_i,$i = 1, \ldots, n$ được giả sử có phân phối chuẩn.
- Goi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test)

- Goi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{20}$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{d})^2 \tag{21}$$

- Ta cần kiểm định các giả thuyết và đối thuyết sau

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D > D_0 \end{cases}$$

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test)

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định
$$T_0 = \frac{\bar{D} - D_0}{S_D/\sqrt{n}} \tag{22}$$
thống kê T_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test)

5. Miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	p **- giá trị**
$H_1 : \mu_D \neq D_0$	$\|t_0\| > t^{n-1}_{\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \|t_0\|)$
$H_1 : \mu_D < D_0$	$t_0 < -t^{n-1}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_D > D_0$	$t_0 > t^{n-1}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

6. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha) * 100\%$ độ tin cậy. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

• Trường hợp cỡ mẫu $n > 30$, bài toán kiểm định hai mẫu phụ thuộc thực hiện tương tự như trường hợp một mẫu dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(D_1, \ldots, D_n)$.

So sánh hai mẫu không độc lập

Ví dụ 13

Một bác sĩ dinh dưỡng nghiên cứu một chế độ ăn kiêng và tập thể dục mới để làm giảm lượng đường trong máu của các bệnh nhân bị bệnh tiểu đường. 10 *bệnh nhân bị bệnh tiểu đường được chọn để thử nghiệm chương trình này, bảng kết quả bên dưới cho biết lượng đường trong máu trước và sau khi các bệnh nhân tham gia chương trình*

Trước	*268*	*225*	*252*	*192*	*307*	*228*	*246*	*298*	*231*	*185*
Sau	*106*	*186*	*223*	*110*	*203*	*101*	*211*	*176*	*194*	*203*

Số liệu được cung cấp có đủ bằng chứng để kết luận rằng chế độ ăn kiêng và tập thể dục có tác dụng làm giảm lượng đường trong máu không? $\alpha = 0.05$.

Mục lục

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

- **Bài toán:**
  - Giả sử mỗi phần tử trong một tổng thể có thể được phân loại theo hai đặc tính khác nhau, gọi là đặc tính X và đặc tính Y. X có r giá trị và Y có s giá trị. Gọi
  $$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$
  với $i = 1, \ldots, r$ và $j = 1, \ldots, s$. p_{ij} là xác suất chọn được một phần tử trong tổng thể có đặc tính X bằng i và đặc tính Y bằng j.
  - Gọi
  $$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, r,$$
  và
  $$q_j = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

p_i là xác suất chọn được một phần tử của tổng thể có đặc tính X bằng x_i,
q_j là xác suất chọn được môt phần tử của tổng thể có đặc tính Y bằng y_j.

- Ta cần kiểm định xem X có độc lập với Y hay không?
  Phát biểu giả thuyết

$$H_0 : p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s,$$

và đối thuyết

$$H_1 : \exists\,(i, j) \text{ sao cho } p_{ij} \neq p_i q_j$$

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

- Khảo sát N phần tử, ta được bảng kết quả, trong bài toán này gọi là bảng ngẫu nhiên (contingency table):

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_s	Tổng hàng
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1s}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2s}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rs}	n_r
Tổng cột	m_1	m_2	$\cdots$	m_s	N

Bảng 7

trong đó, các n_{ij} gọi là tần số thực nghiệm.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

- Ước lượng của p_i và q_j lần lượt bằng

$$\hat{p}_i = \frac{n_i}{N}, \quad i = 1, \ldots, r,$$
$$\hat{q}_j = \frac{m_j}{N}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

- Gọi N_{ij} là số phần tử có đặc tính (x_i, y_j) trong N phần tử khảo sát, thì $N_{ij} \sim B(N, p_{ij})$. Khi đó,

$$\mathbb{E}(N_{ij}) = Np_{ij} = Np_i q_j \text{ khi } H_0 \text{ đúng.}$$

Đặt
$$e_{ij} = N\hat{p}_i\hat{q}_j = \frac{n_i m_j}{N}$$

e_{ij} gọi là tần số lý thuyết.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Định lý 1 (Pearson)

Với N_{ij} *và* $E_{ij} = Np_{ij}$*, biến ngẫu nhiên*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

sẽ hội tụ theo phân phối về biến ngẫu nhiên Chi bình phương $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0: X và Y độc lập.
2. Xác định tần số thực nghiệm n_{ij} và tần số lý thuyết

$$e_{ij} = \frac{n_i m_j}{N},$$

với n_i và m_j là tổng hàng i và tổng cột j tương ứng.
Điều kiện: $e_{ij} \geq 5$.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

3. Tính thống kê kiểm định

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - N. \tag{23}$$

   Nếu H_0 đúng, thống kê Q^2 có phân phối Chi bình phương với $(r-1)(s-1)$ bậc tự do

4. Bác bỏ H_0 khi

$$Q^2 > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha). \tag{24}$$

   Nếu sử dụng p-giá trị:

$$p = \mathbb{P}\left(\chi^2_{(r-1)(s-1)} \geq Q^2\right). \tag{25}$$

   Bác bỏ H_0 khi: $p \leq \alpha$.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Ví dụ 14

Một báo cáo khoa học trong y khoa tuyên bố rằng việc sở hữu một thú cưng trong nhà (chó hoặc mèo) sẽ làm tăng khả năng sống sót của chủ nuôi mà bị đột quỵ do lên nhồi máu cơ tim. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 95 *người đã đột quỵ do đau tim được khảo sát. Dữ liệu của mỗi người khảo sát được chia làm* 2 *loại:*

- *Những người sống sót/tử vong 1 năm sau khi lên đột quỵ (do nhồi máu cơ tim).*
- *Người sống sót/tử vong có nuôi thú cưng trong nhà hay không.*

Kết quả cho bởi bảng sau

	Có nuôi thú cưng	Không nuôi thú cưng
Sống sót	28	44
Tử vong	8	15

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

1. Phát biểu giả thuyết H_0: sự sống sót/tử vong của một người sau khi bị đột quỵ do đau tim độc lập với việc nuôi thú cưng.
2. Tính tần số thực nghiệm: với $n_1 = 72,\ n_2 = 23,\ m_1 = 36,\ m_2 = 59$

$$e_{11} = \frac{n_1 m_1}{N} = \frac{72 \times 36}{95} = 27.284,$$
$$e_{12} = \frac{n_1 m_2}{N} = \frac{72 \times 59}{95} = 44.716,$$
$$e_{21} = \frac{n_2 m_1}{N} = \frac{23 \times 36}{95} = 8.716,$$
$$e_{22} = \frac{n_2 m_2}{N} = \frac{23 \times 59}{95} = 14.284.$$

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

3. Tính giá trị thống kê Q^2

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - N = \left(\frac{28^2}{27.284} + \frac{44^2}{44.716} + \frac{8^2}{8.716} + \frac{15^2}{15.284}\right) - 95 = 0.125.$$

4. Bác bỏ H_0 khi: $Q^2 > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha) = \chi^2_1(0.05)$.
   Tra bảng Chi - bình phương, ta được $\chi^2_1(0.05) = 3.841$.
   $Q^2 = 0.125$, suy ra $Q^2 < 3.841$.

   Ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 tức là sự sống sót/tử vong của một người sau khi bị đột quỵ do đau tim độc lập với việc nuôi thú cưng.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Ví dụ 15

Vé máy bay của hãng hàng không Việt Nam Airline được chia làm 3 loại: Hạng thường (C), hạng trung (B) và hạng doanh nhân (A). Hành khách đi máy bay của VN Airlines nằm trong 1 trong 2 dạng sau: bay nội địa hoặc quốc tế. Khảo sát 920 hành khách đã bay của hãng, cho kết quả sau:

	Loại chuyến bay	
Loại vé	*Nội địa*	*Quốc tế*
Hạng thường	*29*	*22*
Hạng trung	*95*	*121*
Hạng doanh nhân	*518*	*135*

Có ý kiến cho rằng hành khách mua loại vé nào (A, B, C) sẽ phụ thuộc vào việc người đó bay nội địa hay quốc tế. Với mức ý nghĩa 5%*, hãy kiểm tra ý kiến trên.*