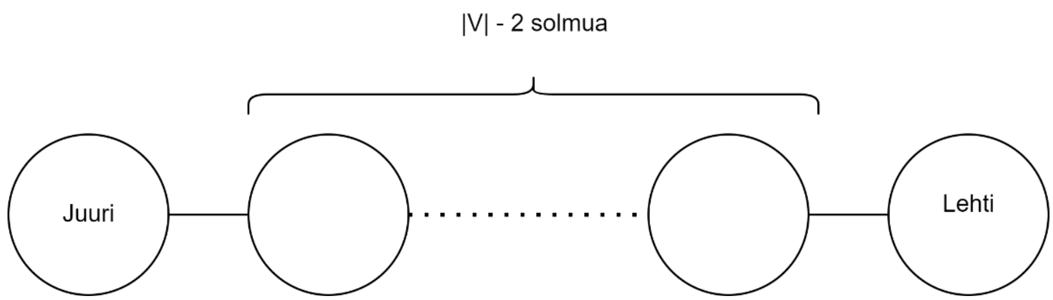
MAT.APP.270 Kevät 2024
Harjoitus 2:

1. **Puun lehti on solmu, johon liittyy vain yksi kaari. Osoita seuraava väittämä todeksi:**
   Jos graafi T = (V, E) on puu ja |V | ≥ 2, niin T: ssä on ainakin kaksi lehteä.

Puu on äärellinen graafi, joka on kytketty ja siinä pätee $|E| = |V| - 1$, eli kaarien lukumäärän on oltava yksi vähemmän kuin solmujen lukumäärä.

Tehdään vastaoletus, että graafissa T on vain yksi lehti. Nyt koska tiedetään T:ssä olevan |V| määrä solmuja ja yksi lehti niin T:ssä on oltava |V|-1 solmua ja meillä on yhteensä |V|-1 kaarta yhdistämään nämä solmut. Tästä muodostuu polku puun juuresta sen yhteen lehteen. Yksittäisestä polusta seuraa, että niin ensimmäisellä kuin viimeisellä solmulla on vain yksi kaari, joka tekee niistä molemmista lehti solmuja. Siis johtuen lehden määritelmästä on puulla jonka |V| ≥ 2 on aina vähintään kaksi lehteä.



2. **Sanotaan että graafi G = (V, E) on kaksiosainen, jos voidaan löytää kaksi solmujoukkoa V1 ja V2 siten, että:**
   (a) V = V1 ∪ V2 ja V1 ∩ V2 = ∅, eli, jokainen solmu kuuluu tasan toiseen joukoista.
   (b) Jokaisen kaaren (u, v) päät ovat eri joukoissa, eli joko u ∈ V1 ja v ∈ V2 tai u ∈ V2 ja v ∈ V1.
   Osoita induktiolla, että jokainen puu on kaksiosainen.

Perusaskel:
Olkoon kaksi solmua u ja v. Solmut u ja v on yhdistetty kaarella ja u ∈ V1 ja v ∈ V2. Eli puu on kaksiosainen.

Induktioaskel:

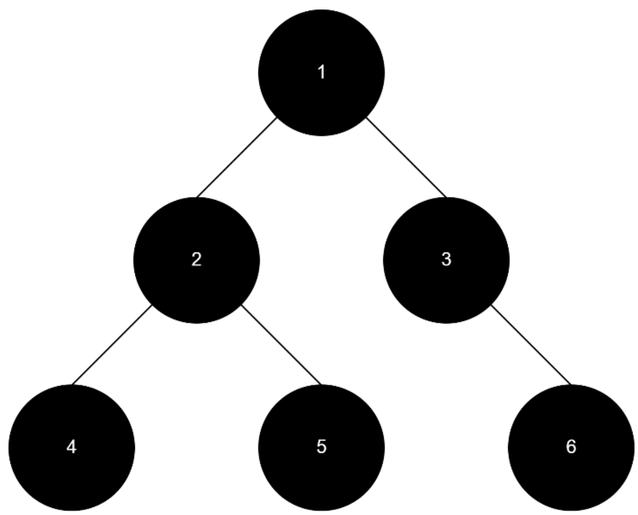
Induktio-oletus: Puu, jolla on k solmua, on kaksijakoinen.

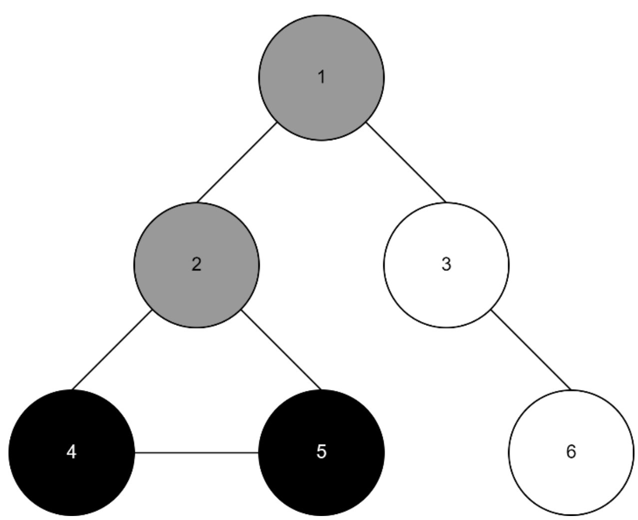
Induktioväite: Puu, jolla on k + 1 solmua on kaksijakoinen. Jos puusta otetaan pois yksi lehti, eli solmu johon liittyy vain yksi kaari, jää jäljelle puu, jossa on k solmua. Induktio-oletuksesta tiedetään puun, jolla on k solmua olevan kaksijakoinen. Mikä tarkoittaa, että siinä olevat solmut voidaan jakaa kahteen joukkoon V1 ja V2. Kun nyt lisätään takaisin poistettu lehtisolmu ja tiedetään että sillä on vain yksi kaari jonka toisessa päässä olevan solmun joukko tiedetään, voidaan uusi lehtisolmu lisätä toiseen joukkoon, jolloin puu on edelleen kaksijakoinen.

Eli induktiolla, voidaan todeta, että jokainen puu on kaksijakoinen.

3. **Muokkaa DFS-algoritmia niin että se tunnistaa mikäli graafissa on suunnattu ei-triviaali silmukka. Laadi kaksi testitapausta, joista toisessa on silmukka ja toisessa ei. Graafien tulisi olla kytkettyjä ja niissä tulisi olla vähintään neljä ja korkeintaan kuusi solmua. Piirrä tai muutoin anna graafit vastaukseksi viikon palautukseen kirjallisessa muodossa. Kerro vastauksessasi minkä värisiä mitkäkin graafisi solmuista ovat sillä hetkellä, kun silmukan olemassaolo voidaan todentaa. Älä palauta koodia, vaan kerro vain mihin kohtaa teit ja mitä muutoksia.**

Oletetaan että DFS-algoritmi etenee solmuissa nousevassa järjestyksessä.





Ensimmäisessä graafissa DFS-algoritmi vierailee kaikissa solmuissa eikä löydä silmukkaa. Toisessa graafissa DFS-algoritmi ehtii tutkia kokonaan vain solmut 4 ja 5 ennen kuin löytää silmukan. Jättäen solmut 1 ja 2 harmaiksi. Eikä se pääse edes aloittamaan solmujen 3 ja 6 tutkimista jättäen ne valkoisiksi.

Muutos mikä koodiin pitää tehdä on, että ennen kuin ollaan menossa vierailemaan seuraavaan solmuun on tarkastettava joko se solmu löytyy algoritmin läpikäymästä polusta ja jos löytyy, niin on löytynyt silmukka ja voidaan palata takaisin.

4. Olkoon suuntaamattomassa graafissa G = (V, E) seuraavanlainen silmukka:
$\sigma = x_0, x_1, \ldots, x_k$
Missä luonnollisesti $x_0 = x_k$. Oletetaan että k ≥ 3. Osoita että
$d(x_0, x_i) \leq \min\{i, k - i\}$

On kaksi tapausta mitä pitää tarkastella.

Tapaus 1: $i \leq \frac{k}{2}$

Tässä tapauksessa x_i on lähempänä x_0, kun liikutaan silmukkaa oikeaan suuntaan, jolloin etäisyys silmukoiden x_0 ja x_i välillä on i ja $i \leq \min\{i, k - i\}$ pitää paikkansa.

Tapaus 2: $i > \frac{k}{2}$

Toisessa tapauksessa x_i on lähempänä x_0, kun liikutaan silmukkaa ”väärään” suuntaan, jolloin etäisyys silmukoiden x_0 ja x_i välillä on k – i ja $k - i \leq \min\{i, k - i\}$ pitää paikkansa.

Kun molemmat tapaukset yhdistetään voidaan sanoa että $d(x_0, x_i) \leq \min\{i, k - i\}$ pitää paikkansa kaikille i:n arvoille kun i saa arvoja väliltä [1, k-1], kun tiedetään että k ≥ 3.

5. Keksi mielekkäitä väittämiä DFS-Visit:in rivejä 6-7 (eli rivien välissä) ja 7-8 varten. Näiden tilapredikaattien tulisi ilmaista jotain mielekästä solmun ja sen naapureiden väreistä. (Tarvittaessa kertaa tilapredikaatit liitteestä A, mutta väitteiden ei ole pakko olla logiikan kaavoja)

6-7:

Jos seuraava solmu on harmaa, on löydetty silmukka.

Jos vierailtu solmu on nyt musta, graafi ei jatku sen solmun kautta enää vierailemattomiin valkoisiin solmuihin.

7-8:

Solmun kautta enää vierailemattomiin valkoisiin solmuihin ja se voidaan merkitä mustaksi.

6. **Todista: Graafi on puu, jos ja vain jos kahden eri solmun välillä on tarkalleen yksi yksinkertainen suuntaamaton polku.**

On olemassa graafi G, jonka oletetaan olevan puu. Tiedetään että puun on oltava kytketty eikä siinä ole yhtäkään sykliä. Koska G:n on oltava kytketty, on löydyttävä vähintään yksi polku minkä tahansa G:n kahden solmun väliltä. Koska G ei saa pitää sisällään silmukoita ei voi löytyä useampia kuin yksi yksinkertainen suuntaamaton polku puun kahden solmun välillä. Näin ollen puun ominaisuuksien perusteella väittämän on pidettävä paikkansa.