Домашнее задание.

Матричные вычисления и матричное дифференцирование.

Задание №1.

Доказать: $(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $U\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $V\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $|A|\neq 0$, $|C|\neq 0$

Доказательство:

Преобразуем тождество к виду: $I_n = (A+UCV)(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1})$

$$(A+UCV)(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = I_n + UCVA^{-1} - (U+UCVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} =$$

$$= I_n + UCVA^{-1} - UC\underbrace{(C^{-1}+VA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}}_{I_m}VA^{-1} = I_n + UCVA^{-1} - UCVA^{-1} = I_n$$

$\blacksquare$

Задание №2

Упростить.

(a) $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$, $u\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2 = \langle uv^T - A, uv^T - A\rangle - \langle A,A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle - \langle A, uv^T\rangle - \langle uv^T, A\rangle +$$

$$+\langle A,A\rangle - \langle A,A\rangle = \|uv^T\|_F^2 - 2\langle A, uv^T\rangle$$

(b) $tr((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T))$, $a,u,v\in\mathbb{R}^n$ (*)

Воспользуемся тождеством Вудбери: $A = 2I_n$, $U = a$, $C = I_1$, $V = a^T$, $\det(A)\neq 0$, $\det(C)\neq 0$

$$(2I_n + aa^T)^{-1} = \frac12 I_n - \frac12 I_n a(1 + a^T\cdot \frac12 I_n \cdot a)^{-1}\cdot a^T \cdot \frac12 I_n =$$

$$= \frac12 I_n - \frac12 a(1+\frac12 a^Ta)^{-1}a^T\cdot\frac12 = \frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}$$

$$(*) = \langle I_n, (\frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta})(uv^T + vu^T)\rangle = \langle \frac12 I_n, uv^T+vu^T\rangle - \langle \frac{aa^T}{4+2a^Ta}, uv^T+vu^T\rangle =$$

представим след в виде скалярного произведения

$$= \langle \frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}, uv^T+vu^T\rangle = \langle vu^T(\frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}), I_n\rangle + \langle \frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}, vu^T\rangle =$$

$$= 2\langle \frac12 I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}, vu^T\rangle = \langle I_n - \frac{aa^T}{2+a^Ta}, vu^T\rangle = \langle u,v\rangle - \frac{\langle aa^T, vu^T\rangle}{2+\langle a,a\rangle} =$$

$$= \langle u,v\rangle - \frac{\langle a,u\rangle\langle v,a\rangle}{2+\langle a,a\rangle}$$

(c) $\sum_{i=1}^n \langle S^{-1}a_i, a_i\rangle$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^d$, $S = \sum_{i=1}^n a_ia_i^T$, $\det(S)\neq 0$

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1}a_i, a_i\rangle = \sum_{j=1}^n \langle (\sum_{i=1}^{j} a_ia_i^T)^{-1}, a_ja_j^T\rangle = \underbrace{\langle (a_1a_1^T)^{-1}, a_1a_1^T\rangle}_{1} + \underbrace{\langle (a_1a_1^T + a_2a_2^T)^{-1}, a_1a_1^T\rangle + \langle (a_1a_1^T + a_2a_2^T)^{-1}, a_2a_2^T\rangle}_{1} + \ldots + \underbrace{\langle (a_1a_1^T+\ldots+a_na_n^T)^{-1}, a_1a_1^T\rangle + \ldots + \langle (a_1a_1^T+\ldots+a_na_n^T)^{-1}, a_na_n^T\rangle}_{1} =$$

$$= \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n$$

Задание №3

Найти 1-ю и 2-ю производные

(а) $f(t) = \det(A - tI_n)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E = \{t \in \mathbb{R} : \det(A - tI_n) \neq 0\}$

$$df(t) = d(\det(A-tI_n)) = -\det(A-tI_n)\cdot\langle (A-tI_n)^{-T}, dt\cdot I_n\rangle = -\det(A-tI_n)\cdot tr((A-tI_n)^{-1})dt$$

$$\boxed{f'(t) = -\det(A-tI_n)\cdot tr((A-tI_n)^{-1})}$$

Воспользуемся тем, что $df'(t) = f''(t)\,dt$

$$df'(t) = -d(\det(A-tI_n))\cdot tr((A-tI)^{-1}) - \det(A-tI)\,d(tr((A-tI)^{-1})) =$$

$$= \det(A-tI_n)\cdot tr^2((A-tI_n)^{-1})\,dt - \det(A-tI_n)\cdot tr(-(A-tI)^{-2}\cdot dt\cdot I_n) =$$

$$= \det(A-tI_n)\cdot tr^2((A-tI_n)^{-1})\,dt + \det(A-tI_n)\cdot tr((A-tI)^{-2})\,dt$$

$$\boxed{f''(t) = \det(A-tI_n)\left(tr^2((A-tI_n)^{-1}) + tr((A-tI)^{-2})\right)}$$

(б) $f(t) = \|(A+tI_n)^{-1}b\|$, $A \in \mathbb{S}^n_+$, $b \in \mathbb{R}^n$

$$d(\|x\|) = d(\langle x,x\rangle^{1/2}) = \frac{1}{2}\langle x,x\rangle^{-\frac{1}{2}}d\langle x,x\rangle = \frac{1}{2}\|x\|^{-1}\cdot 2\langle x, dx\rangle = \|x\|^{-1}\langle x, dx\rangle$$

$$df(t) = d(\|(A+tI_n)^{-1}b\|) = \|(A+tI_n)^{-1}b\|^{-1}\langle (A+tI_n)^{-1}b, d((A+tI_n)^{-1}b)\rangle =$$

$$= \|(A+tI_n)^{-1}b\|^{-1}\langle (A+tI_n)^{-1}b, -(A+tI_n)^{-2}\cdot dt\cdot I_n\cdot b\rangle = \langle -\|(A+tI_n)^{-1}b\|^{-1}b^T(A+tI_n)^{-3}b, dt\rangle$$

$$\boxed{f'(t) = -\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}b^T\cdot(A+tI_n)^{-3}\cdot b}$$

$$df'(t) = d\left(\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\right)\cdot(-b^T(A+tI_n)^{-3}b) + \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}(-b^T d((A+tI_n)^{-3})\cdot b) =$$

$$= \frac{-1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|^2}\cdot\frac{-1\cdot(-1)}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}(b^T\cdot(A+tI_n)^{-3}\cdot b)^2_{dt} + \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}(-b^T(-3(A+tI_n)^{-4}dt)b) =$$

$$= -\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|^3}(b^T\cdot(A+tI_n)^{-3}\cdot b)^2\,dt + \frac{3}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}b^T(A+tI_n)^{-4}b\,dt$$

$$\boxed{f''(t) = \frac{3}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}b^T(A+tI_n)^{-4}b - \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}(b^T(A+tI_n)^{-3}b)^2}$$

Задание №4

Найти градиент ∇f и гессиан $\nabla^2 f$.

ⓐ $f(x) = \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, $A \in \mathbb{S}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$df(x) = \frac{1}{2} d \langle xx^T - A, xx^T - A\rangle = \frac{1}{2} d(\langle xx^T, xx^T\rangle - 2\langle xx^T, A\rangle + \langle A, A\rangle) = \frac{1}{2}(2\langle xx^T, d(xx^T)\rangle -$
$-2\langle A, d(xx^T)\rangle) = \langle xx^T - A, d(xx^T)\rangle = \langle xx^T - A, dx\cdot x^T + x(dx)^T\rangle =$
$= \langle xx^Tx - Ax, dx\rangle + \langle x^Txx^T - x^TA, (dx)^T\rangle = \langle xx^Tx - Ax, dx\rangle + \langle xx^Tx - Ax, dx\rangle =$
$= \langle 2(xx^Tx - Ax), dx\rangle$

$$\nabla f(x) = 2(xx^T - A)x$$

$d^2f(x) = 2\langle dx_1, d(xx^Tx) - d(Ax)\rangle = 2(\langle dx_1, dx_2\cdot x^Tx\rangle + \langle dx_1, \langle x, dx_2\rangle x\rangle +$
$+ \langle dx, xx^T\cdot dx_2\rangle - \langle dx_1, A dx_2\rangle) = 2(\langle x^Tx\, dx_1, dx_2\rangle + \underbrace{\langle x, dx_1\rangle\langle x, dx_2\rangle}_{\langle xx^T dx_1, dx_2\rangle} +$
$+ \langle xx^T dx_1, dx_2\rangle - \langle A dx_1, dx_2\rangle) = 2\langle (x^Tx I_n + 2xx^T - A)dx_1, dx_2\rangle$

$$\nabla^2 f(x) = 2(x^Tx I_n + 2xx^T - A)$$

ⓑ $f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}$

$df(x) = d(\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}) = d(e^{\langle x,x\rangle \ln\langle x,x\rangle}) = \{ d(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x}(\ln x + \frac{x}{x})dx = e^{x\ln x}(\ln x + 1)dx \} =$
$= \langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot 2\langle x, dx\rangle$

$$\nabla f(x) = 2\langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}\cdot(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot x$$

$d^2f(x) = 2\, d(\langle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}(\ln\langle x,x\rangle+1)x, dx_1\rangle) = 2\langle \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}(\ln\langle x,x\rangle+1)dx_2 +$
$+ x\cdot 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\cdot(\ln\langle x,x\rangle+1)^2\cdot\langle x, dx_2\rangle + x\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\cdot\frac{2\langle x, dx_2\rangle}{\langle x,x\rangle}, dx_1\rangle =$
$= \{ a = 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}(\ln\langle x,x\rangle+1),\ b = 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}(\ln(\langle x,x\rangle+1)^2 + 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle-1} \} =$
$= \langle a\,dx_2 + bx\langle x, dx_2\rangle, dx_1\rangle = \langle a\,dx_2, dx_1\rangle + b\langle x, dx_2\rangle\langle x, dx_1\rangle =$
$= \langle a\,dx_1, dx_2\rangle + \langle b\,xx^T dx_1, dx_2\rangle = \langle (a + bxx^T)dx_1, dx_2\rangle =$
$= 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}(2((\ln\langle x,x\rangle+1)^2 + \frac{1}{\langle x,x\rangle})xx^T + (\ln\langle x,x\rangle + 1)I_n)\langle dx_1, dx_2\rangle$

$$\nabla^2 f(x) = 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(2((\ln\langle x,x\rangle+1)^2 + \frac{1}{\langle x,x\rangle})xx^T + (\ln\langle x,x\rangle+1)I_n\right)$$

ⓒ $f(x) = \|Ax - b\|^p$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ $p \geq 2$

$d(\|x\|^p) = d\langle x,x\rangle^{p/2} = \frac{p}{2}\langle x,x\rangle^{\frac{p-2}{2}} d\langle x,x\rangle = \frac{p}{2}\|x\|^{p-2}\cdot 2\langle x, dx\rangle = p\|x\|^{p-2}\langle x, dx\rangle$

$df(x) = d(\|Ax - b\|^p) = p\|Ax-b\|^{p-2}\langle Ax - b, d(Ax-b)\rangle = \langle p\|Ax-b\|^{p-2}A^T(Ax-b), dx\rangle$

$$\nabla f(x) = p\|Ax-b\|^{p-2}A^T(Ax-b)$$

$d^2f(x) = d(p\|Ax-b\|^{p-2}\langle Ax-b, A dx_1\rangle) = p\cdot d(\|Ax-b\|^{p-2})\cdot\langle Ax-b, Adx_1\rangle + p\|Ax-b\|^{p-2}\langle d(Ax-b), Adx_1\rangle =$
$= p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}\langle Ax-b, Adx_2\rangle\langle Ax-b, Adx_1\rangle + p\|Ax-b\|^{p-2}\langle Adx_2, Adx_1\rangle =$

$$= p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4} \langle A^T(Ax-b)(Ax-b)^T A\, dx_1, dx_2\rangle + p\|Ax-b\|^{p-2}\langle A^T A\, dx_1, dx_2\rangle =$$

$$= \langle pA^T\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + \|Ax-b\|^{p-2}\cdot I_m\right)A\, dx_1, dx_2\rangle$$

$$\nabla f(x) = p\|Ax-b\|^{p-4}A^T\left((p-2)(Ax-b)(Ax-b)^T + \|Ax-b\|^2 I_m\right)A$$

ЗАДАНИЕ № 7

Вычислить $\lim\limits_{k\to\infty} tr\left(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}\right)$, $X \in S^n_{++}$

Решение: разложение Шура для симметрической матрицы $X = Q\Lambda Q^T$

$X^k = Q\Lambda Q^T \cdot Q\Lambda Q^T \cdot \ldots \cdot Q\Lambda Q^T = Q\Lambda^k Q^T$

Λ - диагон. м-ца

$QQ^T = Q^TQ = I$

$X^{2k} = Q\Lambda^{2k}Q^T$

$tr(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}) = tr(Q\Lambda^{-k}Q^T - (Q\Lambda^kQ^T + Q\Lambda^{2k}Q^T)^{-1}) = \{$тождество ВУДБЕРИ$\} =$

$= tr(Q\Lambda^{-k}Q^T - (Q\Lambda^{-k}Q^T - Q\Lambda^{-k}Q^TQ(\Lambda^{-2k} + Q^TQ\Lambda^{-k}Q^TQ)^{-1}Q^T \cdot Q\Lambda^{-k}Q^T)) =$

$= tr(Q\Lambda^{-k}Q^T - (Q\Lambda^{-k}Q^T - Q\Lambda^{-k}(\Lambda^{-2k} + \Lambda^{-k})^{-1}\Lambda^{-k}Q^T)) = tr(Q\Lambda^{-k}(\Lambda^{-2k} + \Lambda^{-k})^{-1}\Lambda^{-k}Q^T) =$

$= \{$св-во следа$\} = tr(\Lambda^{-k}(\Lambda^{-2k} + \Lambda^{-k})^{-1}\Lambda^{-k}) = \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i^k} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_i^{2k}} + \frac{1}{\lambda_i^k}\right)^{-1}\frac{1}{\lambda_i^k}\right) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^{2k}} \cdot \frac{\lambda_i^{2k}\cdot\lambda_i^k}{\lambda_i^k + \lambda_i^{2k}} = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{1+\lambda_i^k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} tr(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}) = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{1+\lambda_i^k} = |\{\lambda_i \mid \lambda_i < 1\}| + \frac{1}{2}|\{\lambda_i \mid \lambda_i = 1\}|$

ЗАДАНИЕ №6

Найти стационарные точки

ⓐ $f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{\sigma}{3}\|x\|^3$, $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\sigma > 0$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$df(x) = \langle c, dx\rangle + \sigma \cdot \frac{1}{3}\, d\langle x, x\rangle^{\frac{3}{2}} = \langle c, dx\rangle + \sigma\|x\|\langle x, dx\rangle = \langle c + \sigma\|x\|x, dx\rangle$

$\nabla f(x) = c + \sigma\|x\|x$

точки стац.: $\nabla f(x) = 0$

x: $\|x\|x = -\frac{1}{\sigma}c$ $\boxed{x = -\frac{c}{\sigma\|x\|}}$

ⓑ $f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle - \ln(1 - \langle b, x\rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a, b \neq 0$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, x\rangle < 1\}$

$df(x) = \langle a, dx\rangle - \frac{d(1-\langle b,x\rangle)}{1-\langle b,x\rangle} = \langle a, dx\rangle + \frac{\langle b, dx\rangle}{1-\langle b,x\rangle} = \frac{\langle(1-\langle b,x\rangle)a + b, dx\rangle}{1-\langle b,x\rangle}$

$\nabla f(x) = \frac{(1-\langle b,x\rangle)a + b}{1-\langle b,x\rangle}$ $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow (1-\langle b,x\rangle)a + b = 0$

$1 - \langle b, x\rangle = \pm\frac{\|b\|}{\|a\|}$ векторы a и b должны быть коллинеарными (ЛЗ)

по условию $\langle b, x\rangle < 1 \Rightarrow 1 - \langle b, x\rangle = \frac{\|b\|}{\|a\|}$

$\boxed{\langle b, x\rangle = 1 - \frac{\|b\|}{\|a\|}}$

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle c, x\rangle \exp(-\langle Ax, x\rangle)$, $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $A \in S^n_{++}$

$$df(x) = \langle c, dx\rangle \exp(-\langle Ax, x\rangle) - 2\langle c, x\rangle \exp(-\langle Ax, x\rangle)\cdot\langle Ax, dx\rangle =$$

$$= \langle \exp(-\langle Ax, x\rangle)\cdot(c - 2\langle c, x\rangle Ax), dx\rangle$$

$$\nabla f(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle)\cdot(c - 2\langle c, x\rangle Ax)$$

$\nabla f(x) = 0$

x: $c = 2\langle c, x\rangle Ax$

$A^{-1}c = 2\langle c, x\rangle x$

$c^T(A^{-1}c) = 2\langle c, x\rangle^2$

$\langle c, x\rangle = \sqrt{\dfrac{\langle c, A^{-1}c\rangle}{2}} \Rightarrow x = \pm \dfrac{A^{-1}c}{\sqrt{2\langle c, A^{-1}c\rangle}}$, $c \neq 0$ по усл.

ЗАДАНИЕ №5

(a) $f: S^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(X) = tr(X^{-1})$

$$df(x) = tr(d(x^{-1})) = -tr(X^{-1}d(X)X^{-1}) = -tr(X^{-2}d(X)) = -\langle X^{-2}, dX\rangle$$

$$d^2 f(X) = -d\langle X^{-2}, dX_1\rangle = 2\langle X^{-3}X^{-1}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle = 2\langle X^{-4}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle$$

X – положит. определена $\Rightarrow \exists X^{1/2}$, $X^{-T} = X^{-1}$, X^{-1} – также положит. опред.

$$D^2 f(X)[H, H] = 2\langle X^{-2}HX^{-\frac{1}{2}}, X^{-2}HX^{-\frac{1}{2}}\rangle = 2\|X^{-2}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 \geq 0$$

$H \in S^n$

(=) $\Leftrightarrow H = 0$ – не рассм.

$\Rightarrow 2\|X^{-2}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 > 0$

(б) $f: S^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(X) = (\det(X))^{1/n}$

$$df(x) = \frac{1}{n}(\det(X))^{\frac{1}{n}-1}\det(X)\cdot\langle X^{-T}, dX\rangle = \frac{1}{n}(\det(X))^{\frac{1}{n}}\langle X^{-1}, dX\rangle$$

$$d^2 f(x) = \frac{1}{n^2}(\det(x))^{\frac{1}{n}}\langle X^{-1}, dX_2\rangle\langle X^{-1}, dX_1\rangle - \frac{1}{n}(\det(x))^{\frac{1}{n}}\langle X^{-1}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle$$

$$D^2 f(X)[H, H] = \frac{1}{n}(\det(x))^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\langle X^{-1}, H\rangle^2 - \langle X^{-1}HX^{-1}, H\rangle\right)$$

X – положит. опред $\Rightarrow \frac{1}{n}(\det(x))^{\frac{1}{n}} > 0 \Rightarrow$ рассм. $\frac{1}{n}\langle X^{-1}, H\rangle^2 - \langle X^{-1}HX^{-1}, H\rangle =$

$$= \frac{1}{n}\langle I_n, X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\rangle^2 - \langle X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}, X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\rangle \leq \frac{1}{n}\|I_n\|_F^2\|X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 - \|X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 =$$

$$= \|X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 - \|X^{-\frac{1}{2}}HX^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 = 0 \Rightarrow D^2 f(x)[H, H] \leq 0$$

Задание №8

$$F(P) = N\cdot tr((I - P(P^TP)^{-1}P^T)^2 S \quad , \quad S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_i^T$$

Найти: $\nabla_P F(P)$

$$dF(P) = N\cdot tr\,(\underbrace{d((I-P(P^TP)^{-1}P^T)^2)}_{*}S)$$

$$* = -2\cdot(I - P(P^TP)^{-1}P^T)\cdot \underbrace{d(P(P^TP)^{-1}P^T)}_{**} \ominus$$

$$** = dP\cdot(P^TP)^{-1}P^T + P\,\underbrace{d((P^TP)^{-1})}_{\underset{-(P^TP)^{-1}d(P^TP)(P^TP)^{-1}}{\parallel}}P^T + P(P^TP)^{-1}d(P^T) =$$

$$= dP\cdot(P^TP)^{-1}P^T - P(P^TP)^{-1}d(P^T)\underset{P}{\wedge}(P^TP)^{-1}P^T - P(P^TP)^{-1}\underset{P^T}{\wedge}dP(P^TP)^{-1}P^T + P(P^TP)^{-1}d(P^T) =$$

$$= \{P^TP = I\} = dP\cdot P^T - Pd(P^T)PP^T - PP^TdP\cdot P^T + Pd(P^T)$$

$$\ominus -2(I-P(\overset{= I}{P^TP})^{-1}P^T)\cdot(d(P)P^T - Pd(P^T)PP^T - PP^T dP\cdot P^T + Pd(P^T)) = \{P^TP = I\} =$$

$$= -2(d(P)P^T - Pd(P^T)PP^T - PP^Td(P)\cdot P^T + Pd(P^T) \mp (PP^Td(P)P^T - P\cancel{P^TP}d(P^T)PP^T -$$

$$- P\cancel{P^TP}P^Td(P)\cdot P^T + P\cancel{P^TP}d(P^T))) = \{P^TP = I\} =$$

$$= -2(d(P)P^T - \cancel{Pd(P^T)}PP^T - PP^T\cancel{d(P)}\cdot P^T + \cancel{Pd(P^T)} \mp PP^Td(P)P^T + P\cancel{d(P^T)}PP^T +$$

$$+ PP^T\cancel{d(P)}P^T \mp \cancel{Pd(P^T)}) = -2(d(P)\cdot P^T - PP^Td(P)P^T) = -2(I - PP^T)d(P)P^T$$

$$\Rightarrow dF(P) = N\cdot tr\,(-2(I-PP^T)d(P)P^TS) = -2N\cdot\langle I, (I-PP^T)d(P)P^TS\rangle =$$

$$= \langle -2N(I-PP^T)SP, dP\rangle$$

$$\nabla_P F(P) = -2N(I - PP^T)\cdot SP$$