Oblig – TMA4106

Vanja Bjørnevik

Standardprosjekt

Oppgave 1: Numerisk derivasjon

Testet å numerisk derivere uttrykket $f(x) = e^x$ med ulike h.

Til å begynne med ser man at jo mindre h blir, jo mer nøyaktig blir den deriverte. Men når h blir mindre enn $1.0 * 10^{-8}$ begynner den numeriske derivasjonen å gi et høyere tall. For eksempel ved $h = 1.0 * 10^{-12}$, gir den numeriske derivasjonen et resultat som er 0.001 for høyt. Enda lavere h gir enda mer unøyaktige svar. Når $h = 1.0 * 10^{-15}$ ser man at numeriske resultatet ikke lenger er tilnærmet likt den faktiske deriverte.

$f(x) = e^x$	
$h = 0.00000001$	$= 1 \times 10^{-8}$
$\frac{f(1.5+h) - f(1.5)}{h}$	$= 4.481689064$
$f'(1.5)$	$= 4.48168907$

Figur 1: Derivasjon med lavest mulig h, som fortsatt er riktig

$f(x) = e^x$	
$h = 0.000000000001$	$= 1 \times 10^{-12}$
$\frac{f(1.5+h) - f(1.5)}{h}$	$= 4.482636484$
$f'(1.5)$	$= 4.48168907$

Figur 2: Derivasjon med lavere h, som gir unøyaktig resultat

$f(x) = e^x$	
$h = 0.000000000000001$	$= 1 \times 10^{-15}$
$\frac{f(1.5+h) - f(1.5)}{h}$	$= 5.329070518$
$f'(1.5)$	$= 4.48168907$

Figur 3: Derivasjon med lav h som gir veldig unøyaktig resultat

Oppgave 2: Numerisk derivasjon der man deler på 2h

Med formelen $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, er stigningstallet mye nærmere den sanne deriverte. Man kan også observere at ved å minke h ved å dele på 10, vil feilen deles på 100 istedenfor 10.

$f(x) = e^x$	
$h = 0.01$	$= 0.01$
$\frac{f(1.5+h) - f(1.5)}{h}$	$= 4.504172398$
$\frac{f(1.5+h) - f(1.5-h)}{2h}$	$= 4.481763766$
$f'(1.5)$	$= 4.48168907$

Figur 4: Numerisk derivasjon med alternativ formel

Hvis man ser på taylorutviklingen av f i punktet x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots$$

Og så tenker at vi kan trekke fra $f(x)$ fra denne og dele alt på h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots$$

Der $f'(x)$ gir den sanne deriverte, og resten av leddene gir oss feilen. Ved lave verdier for h, får man et mye mer nøyaktig svar fordi feilen blir mindre. Hvis vi i tillegg deler alle leddene på to, vil feilen bli betydelig lavere slik at når h minker vil vi raskere gå mot nøyaktige svar for $f'(x)$.

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h)}{2h} - \frac{f(x-h)}{2h}$$

$$= \left(\frac{f(x)}{2h} + \frac{f'(x)}{2} + \frac{f''(x)}{4}h + \frac{f'''(x)}{12}h^2 + \cdots\right)$$

$$-\left(\frac{f(x)}{2h} - \frac{f'(x)}{2} + \frac{f''(x)}{4}h - \frac{f'''(x)}{12}h^2 + \cdots\right)$$

$$= f'(x) + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots$$

Oppgave 3:

$$\frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

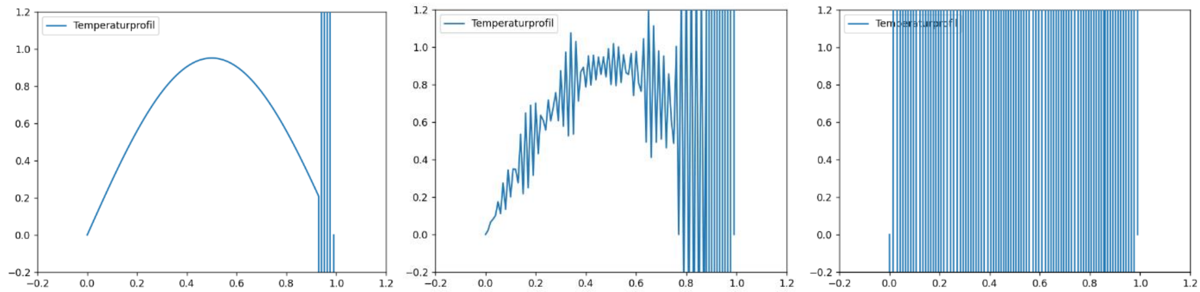
Med denne formelen er det fortsatt rundt $h = 1.0 * 10^{-8}$ at svaret vender fra å minke til å øke, men med $h = 1.0 * 10^{-15}$ er svaret mer nøyaktig enn med normal numerisk derivasjon.

Dersom man skal taylorrekkeutvikle denne, vil metoden være lik som i oppgave 2. Siden det ville tatt veldig lang tid å skrive ned, kan man heller kort forklare resultatet man forventer. Ettersom vi har to par med taylorrekker som er like med unntak av at det er pluss i den ene og minus i den andre, vil vi få samme kanselleringer som i oppgave 2. Forskjellen med denne, er at vi her vil kansellere flere ledd, slik at det første «feil-leddet» vil være et lavere tall enn i oppgave 2, og vi får et mer nøyaktig resultat.

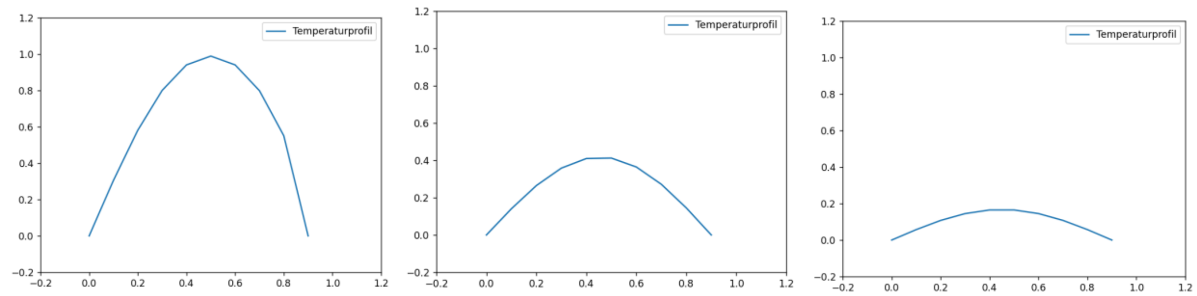
Figur 5: Det sies at Hiortfjellet i Longyearbyen ser ut som en gorilla. Jeg syns det ser mer ut som en bavian.

Oppgave 4: Løsning av varmelikningen med Eulers eksplisitte metode

De tre figurene viser utviklingen av temperaturprofilen, når h = 0.01 og k = 0.001. Den første er tidlig i simuleringen, og de neste viser endringene.



De tre neste figurene viser utviklingen med h = 0.1 og k = 0.001. Det gir en riktig simulering av varmelikningen.

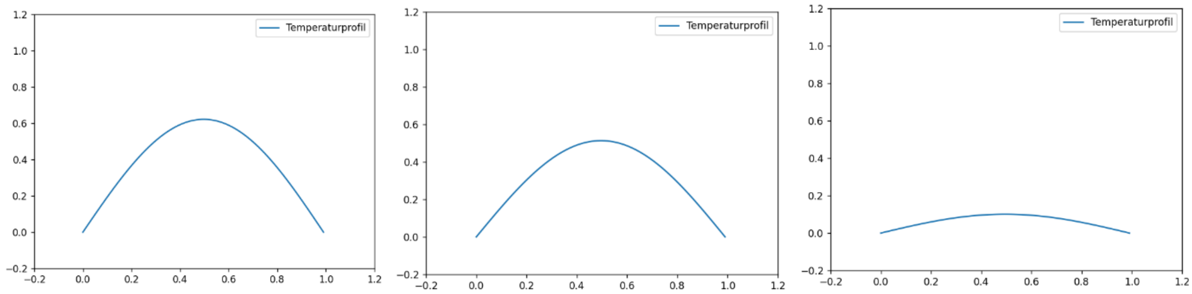


H angir oppløsning i temperaturmålingene, så en større h vil gi en mer «hakkete» eller unøyaktig graf. Man får ustabile svingninger dersom h er for liten.

K er gitteravstanden på tidsaksen, altså angir den tidsrommet mellom hver simulering. Simuleringen blir tregere av å ha en lav k, men man ser samtidig utviklingen mer nøyaktig.

Oppgave 5: Eulers implisitte metode

Figurene viser simuleringen med h = k = 0.01. Eulers implisitte metode gir mer stabile simuleringer, der man kan endre k og h uten at grafen viser svingninger.



Oppgave 6: Crank Nicolson

Simuleringene med Crank Nicolson gir enda mer nøyaktige simuleringer enn både eksplisitt og implisitt euler. Det kan man se fra grafene under, der varmelikningen er plottet med Euler implisitt, Crank-Nicolson og en analytisk løsning ved tre gitte tidspunkter. I første bilde, ved t = 0.05, ser det ut til at den implisitte er likest den analytiske, men det blir tydelig ved senere tidspunkter at crank-nicolson er mest nøyaktig.