Obligatorisk innlevering i matematikk 1

Tuva er en friluftsentusiast og bruker enhver anledning hun har til å gå på ski. Nå planlegger hun en skitur fra Barentsburg til Longyearbyen. Hun vil helst gå på isbre og langs Van Mijenfjorden, og planlegger derfor å bruke 9 dager på turen. Tuva tenkte å dra i april. Da er det midnattssol slik at hun lettere kan følge med etter isbjørn. Hun går alene og skal derfor å bruke snublebluss istedenfor å stå isbjørnvakt om nettene, men hun syns det er fint å kunne se mest mulig likevel. Det begynner også å bli mildere, og hun håper å kunne gå i sola etter de mange månedene med mørketid på Svalbard. Hun regner med at temperaturen stort sett holder seg mellom 0 og -15 grader.

På Svalbard finnes en museparasitt, som sannsynligvis har spredd seg mer som følge av klimaendringer. Den spres av mus som lever under snøen, og de siste årene kommer det stadig mer nedbør i den arktiske ørkenen. Mennesker smittes ved at de får i seg eggene til musene. Eggene kan befinne seg på bakken og i vannet og derfor også smitte over på snøen.

Når Tuva skal gå i 9 dager må hun skaffe drikkevann underveis, og det gjør hun ved å smelte snø. For å være helt trygg fra museparasitt vil hun koke smeltevannet slik at alle eggene dør, før hun drikker det. Men når alt vannet varmes opp til 100 grader tar det litt tid før Tuva vil drikke det. Hun mener vannet må kjøles ned til 50 grader før hun vil drikke det, og lurer derfor på hvor lang tid det tar fra hun koker opp vannet til hun kan drikke det.

Når Tuva har vært på tur tidligere har vannet i drikkeflaska hennes ofte fryst før hun får drukket det opp. Det er veldig upraktisk når hun skal være på tur så lenge, fordi da må hun bruke kveldene sine på å tine vannflasker. Hun vil derfor også finne ut hvor lang tid hun har på seg før vannet når 0 grader og hun burde ha drukket det opp.

Tuva har lært seg Newtons avkjølingslov, og vil bruke denne til å regne ut hvor lang tid vannet bruker på å kjøles ned. Men for å bruke denne må hun finne en verdi for proporsjonalitetskonstanten. Tuva gjør et eksperiment på kjøkkenet, der hun heller kokende vann på en plastflaske som rommer 0.5L, og lar det kjøle seg ned til romtemperatur. Hun mener at hvis hun kan regne ut konstanten fra dette eksperimentet, kan hun bruke den samme konstanten til å regne ut hvordan vannet avkjøles også ute i det arktiske klimaet.

Figur 1: Oppsett for eksperimentet

I det hun putter termometeret oppi flaska er allerede vannet kjølt ned til 92 grader. Tuva loggfører temperaturen de neste tre timene. Målingene som er gjort ligger som et vedlegg: Tabell 1Tabell 1. Temperaturen i rommet der hun gjør eksperimentet er 21 grader, og etter tre timer har vannet en temperatur på 29 grader. Hun bruker disse målingene til å regne ut en verdi for proposjonalitetskonstanten, og får omtrent k = 0.012.

Tuva starter med å sette opp differensiallikningen, der T er temperaturen på vannet, k er proporsjonalitetskonstanten, og T_r er temperaturen i rommet. Hun setter også $T(0) = T_0$.

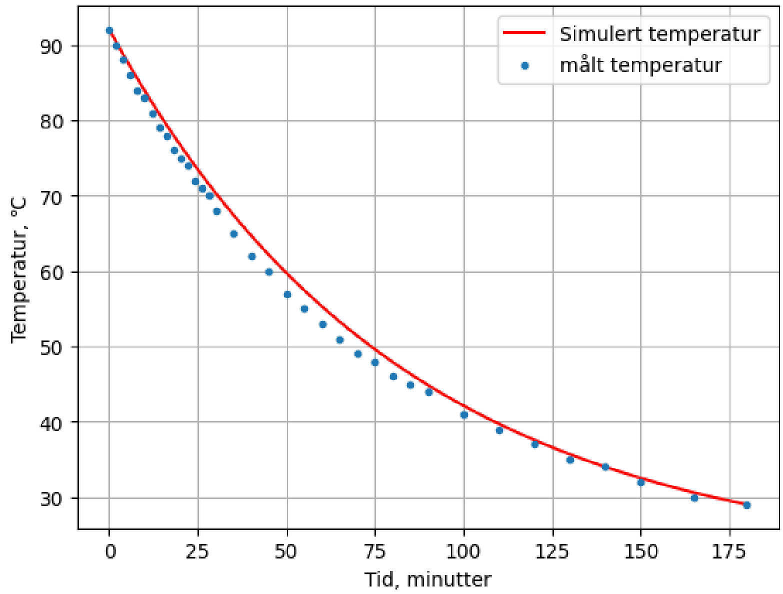
$$\dot{T}(t) = -k(T(t) - T_r)$$

Hun starter med å løse differensiallikningen, og deretter løse for k:

$$T(t) = (T_0 - T_r)e^{-kt} + T_r$$

$$k = -\frac{1}{t} * \ln \frac{T(t) - T_r}{T_0 - T_r}$$

Tuva lager et program i python som plotter punktene for den målte temperaturen. I tillegg skriver hun inn formelen hun fant for proporsjonalitetskonstanten. Denne blir brukt til å simulere en graf for temperaturen uttrykt av Newtons avkjølingslov, med Eulers eksplisitte metode. Python-koden er lagt ved som et vedlegg: Figur 3Figur 3.



Figur 2: Grafer for temperaturen

Tuva er fornøyd med eksperimentet sitt. Hun synes det er god korrelasjon mellom de målte punktene sine og den simulerte grafen, og hun bruker konstanten hun fant til å regne videre. Hun antar at det stort sett er rundt -10 grader når hun er på tur, og vil finne ut når hun kan drikke vannet sitt. Først vil hun regne ut når vannet er nedkjølt til 50 grader. Hun bruker den samme formelen, og vil finne t når $T(t) = 50$. Hun bruker de samme tallverdiene og en grafisk kalkulator, og finner ut at temperaturen i vannet er 50 grader etter omtrent 44 minutter. Hun gjør det samme med $T(t) = 0$, og finner ut at hun at vannet fryser etter omtrent 193 minutter

$$T(t) = (T_0 - T_r)e^{-kt} + T_r$$

Tuva tenker at hvis vannet fryser etter bare litt over tre timer må hun stoppe veldig ofte for å koke nytt vann. Hun konkluderer derfor med at det er lurt å heller bruke store vannflasker enn mange små, og å prøve å isolere vannflaskene for eksempel i soveposen, slik at hun kan gå i flere timer før vannet fryser. Hvis hun skulle gjort det samme eksperimentet på nytt med en større flaske eller en bedre isolert flaske, vet hun at Newtons avkjølingslov ville hatt en lavere proporsjonalitetskonstant.

Tuva vil helst kunne koke opp vann når hun står opp, og deretter gå på ski i minst 8 timer før vannet fryser. Hun vil derfor finne ut hvilken proporsjonalitetskonstant vannet burde hatt for å få det til, slik at hun kan fortsette å eksperimentere med å isolere vannflaskene sine. Derfor setter hun opp følgende uttrykk:

$$T(t) = (T_0 - T_r)e^{-kt} + T_r = 0$$

$$T(60 * 8) = (92 - (-10))e^{-k(60*8)} - 10 = 0$$

$$102e^{-k(60*8)} = 10$$

$$\ln \frac{10}{102} = -480k$$

$$k = -\frac{1}{408} * \ln \frac{10}{102}$$

$$k = 0.00569$$

Det neste steget for Tuva blir å finne en kreativ løsning på hvordan hun skal få det til. Men Tuva har vært på tur i kulda før, og har troa på at hun skal få til å finne tilstrekkelig isolasjon for vannflaskene på skituren.

Vedlegg:

Figur 3: Python-koden som plotter grafer for temperaturen i vannet:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

temp_file = []
time_file = []

with open ('Verdier_oblig.csv', 'r') as file:
    next(file)      # hopper over overskriftene

    for line in file:                   # lager lister med verdiene fra tabellen
        line = line.replace('\n', '')       # fjerner linjeskift
        line = line.split(',')              # deler linjen i to strings
        time_file.append(int(line[0]))
        temp_file.append(int(line[1]))

T_rom = 21
T_0 = temp_file[0]
time = time_file[0]
temp = T_0

temp_sim = [T_0]
time_sim = [time]

h = 0.001       # tidssteg
k = -(1/time_file[-1]) * np.log((temp_file[-1] - T_rom) / (temp_file[0] - T_rom))
print(k)
```

```

while time < time_file[-1]:                 # simulerer like lenge som målingene
    temp -= k * h * (temp - T_rom)      # Newtons avkjølingslov
    time += h
    temp_sim.append(temp)
    time_sim.append(time)

plt.plot(time_sim, temp_sim, 'r')
plt.plot(time_file, temp_file, '.')
plt.xlabel('Tid, minutter')
plt.ylabel(f'Temperatur, ' u'\u2103')
plt.legend(['Simulert temperatur', 'målt temperatur'])
plt.grid()
plt.show()


```

Tabell 1: Målinger for temperaturen

Tid	Temperatur
0	92
2	90
4	88
6	86
8	84
10	83
12	81
14	79
16	78
18	76
20	75
22	74
24	72
26	71
28	70
30	68
35	65
40	62
45	60
50	57
55	55
60	53
65	51
70	49
75	48
80	46
85	45
90	44
100	41
110	39
120	37
130	35
140	34
150	32
165	30
180	29