Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Predstavitev 4-ciklov v snarkih

Eva Strašek in Vanja Kalaković

Mentorja: Janoš Vidali, Riste Škrekovski

Predmet: Finančna matematika

Ljubljana, 2023

1 Uvod

Definicija: Stopnja vozlišča v v grafu G (oznaka je $deg_G(v)$) je enaka številu povezav grafa G, ki imajo vozlišče v za svoje krajišče, pri čemer štejemo zanke dvakrat.

Definicija: Če so vsa vozlišča grafa G enake stopnje k, pravimo, da je graf **k-regularen**; 3-regularnim grafom pravimo tudi **kubični grafi**.

Definicija: Graf je **povezan**, če za poljubni vozlišči obstaja pot med njima, sicer je graf **nepovezan**.

Definicija: **Komponenta** grafa G je maksimalen povezan podgraf grafa G.

Definicija: Vozlišče $v \in V(G)$ je **prerezano vozlišče**, če ima podgraf G - v več komponent kot graf G.

Definicija: Povezavi, ki ima za krajišči prerezani vozlišči, pravimo **prerezana povezava** ali **most**.

Definicija: **Kromatično število** grafa G (oznaka χ(G)) je najmanjše število barv, ki jihpotrebujemo, da vozlišča grafa pobarvamo tako, da so vsa sosednja vozlišča pobarvana paroma različno.

Definicija: **Kromatični indeks** grafa G je število χ'(G), ki predstavlja najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za barvanje povezav grafa G tako, da so sosednje povezave pobarvane paroma različno.

Vizingov izrek: Za enostaven graf G z maksimalno stopnjo Δ(G) velja Δ(G) $\leq$ χ'(G) $\leq$ Δ(G) + 1.

Definicija: Če so vsa vozlišča $v_0, v_1, \ldots, v_k$ različna, govroimo o poti, v primeru, ko pa so vsa vozlišča različna, razen $v_0 = v_k$, imamo opravka z **obhodom**. Dolžini najkrajšega obhoda v grafu G pravimo **notranji obseg**.

Definicija: Naj bo A množica prerezanih povezav moči 3 in G graf.
Če G - A predstavlja dve komponenti, ki vsebujeta cikel, pravimo da je A ciklični prerez.

Definicija: **Ciklična povezavna povezanost** grafa G (zapis λ_c(G)) je velikost najmanjšega cikličnega prereza grafa G. Pravimo, da je G ciklično kpovezavno povezan, če je $\lambda_c(G) \geq k$. Ali drugače, grafu G moramo odstraniti najmanj k-povezav, da nam ta razpade na dve komponenti, ki vsebujeta cikel.

Definicija: Snark je ciklično 4-povezavno povezan kubičen graf z notranjim obsegom vsaj 5 in kromatičnem indeksom 4.

2 Načrt dela

Naloga:

Želimo preveriti, ali (in kdaj) uvedba 4-ciklov v snark ohranja kromatični indeks(tj. kromatični indeks ostane 4). Uvedbo 4-cikla lahko izvedemo vsaj na dva načina:

1. Vzemite dva robova ab in cd v G in ju dvakrat razdelite, tako da dobite pot au1u2b iz roba ab in pot cv1v2d iz roba cd. Nato povežite u1 z v1 in u2 z v2.

2. Naj bo ab rob v G in a1, a2 druga dva soseda a, in naj bosta b1, b2 druga dva soseda b. Zdaj odstranimo vrhova a, b in povežemo a1 z b1 in a2 z b2.

Načrt:

Najprej bova prenesli majše snarke iz House Of Graphs na katerih bova preverjali ohranjanje kromatičnega indeksa. Nato bova napisali program, ki bo na prenesenih snarkih uvedel 4-cikle na zgoraj opisana načina.
Novo nastale snarke bova potem shranili in s programom izračunali nove kromatične indekse, kjer bova izločili tiste ki so različni od 4.
Na ta način bova ugotovili ali uvedba 4-cikla v snark ohrani kromatični indeks in v katerih primerih to drži. Pri tem si bova pomagali z naslednjo lemo:

Lema: Naj bo graf G' dobljen tako, da kubičnemu grafu G dodamo vozlišča a_1, a_2 in a_3, a_4 zaporedno na povezavi $e_1 = u_1v_1$ in $e_2 = u_2v_2$ ter povezave a_1a_4 in a_2a_3. Če je χ'(G') = 4, potem je χ'(G) = 4.