UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Vanja Kalaković

Slika lastnih vrednosti matrik

Projekt pri predmetu matematika z računalnikom

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2025/2026

Kazalo

1 Uvod

Namen projekta je bil raziskati lastnosti razreda naključnih matrik, imenovanih bohemske matrike, ter iz njihovih lastnih vrednsoti ustvariti umetniško sliko. V projektu združimo elemente linearne algebre, kompleksne analize in računalniške umetnosti. Kjučna ideja je, da z naključno generiranimi matrikami določenih struktur dobimo množico kompleksnih lastnih vrednsoti, ki v kompleksni ravnini tvorijo zanimive vzorce. Z dodatkom simetrije in nekaj rotacij lahko ta vzorec razširimo v popolnoma umetniško sliko.

2 Bohemske matrike

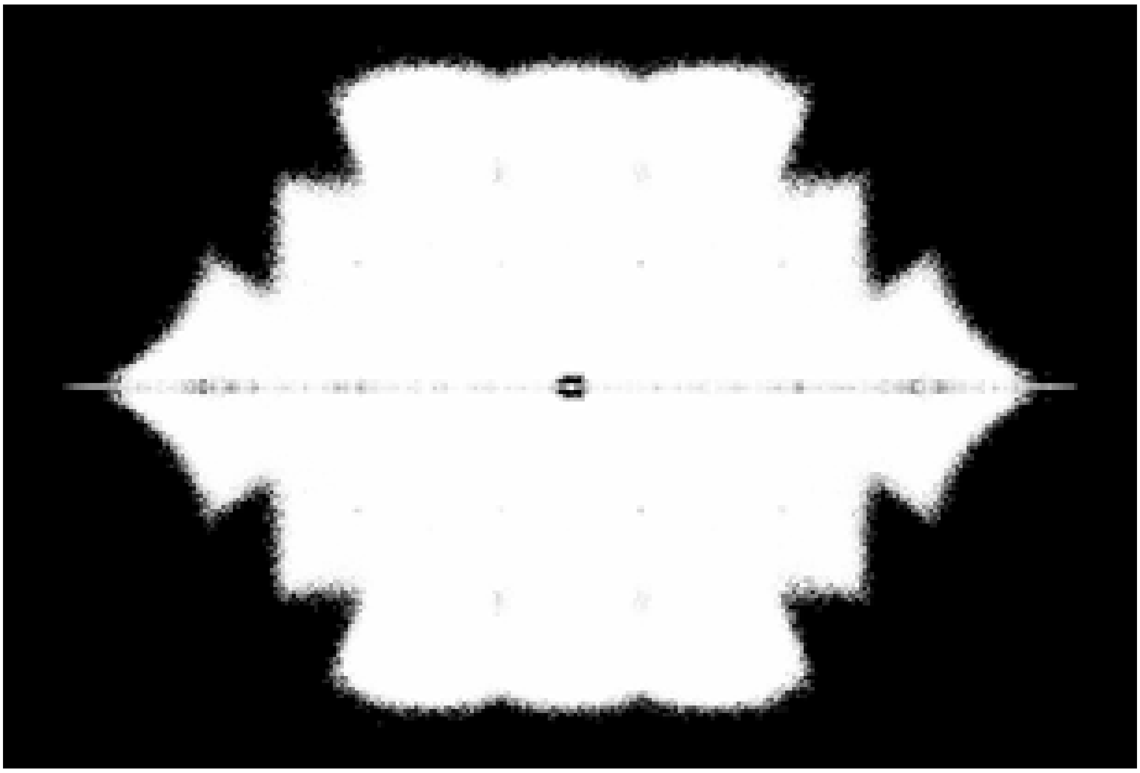
Bohemske matrike so matrike, katerih elementi so iz majhnega diskretnega nabora vrdnsoti. V projektu uporabljamo nabor vrednsoti: $\{-1, 0, 1\}$. Za vsako generiranje matrike izberemo naključno dimenzijo n med 8 in 14, nato pa skonstruiramo matriko s specifično strukturo. Začnemo z tridiagonalno Toeplitz matriko, pri čemer za glavno diagonalo, superdiagonalo in subdiagonalo iz množice $\{-1, 0, 1\}$ naključno izberemo po en koeficient. Tako dobljena matrika ima obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{bmatrix},$$

kjer so a, b in c naključno izbrane vrednsoti it $\{-1, 0, 1\}$. D dobimo bolj zanimiv vzorec, matriki dodamo še drugi in tretjo poddiagonalo. Na vsako od teh diagonal damo naključno izbrane elemente iz množice $\{-1, 0, 1\}$, medtem ko vse preostel elemente pustimo enkae nič.

3 Izračun lastnih vrednsoti

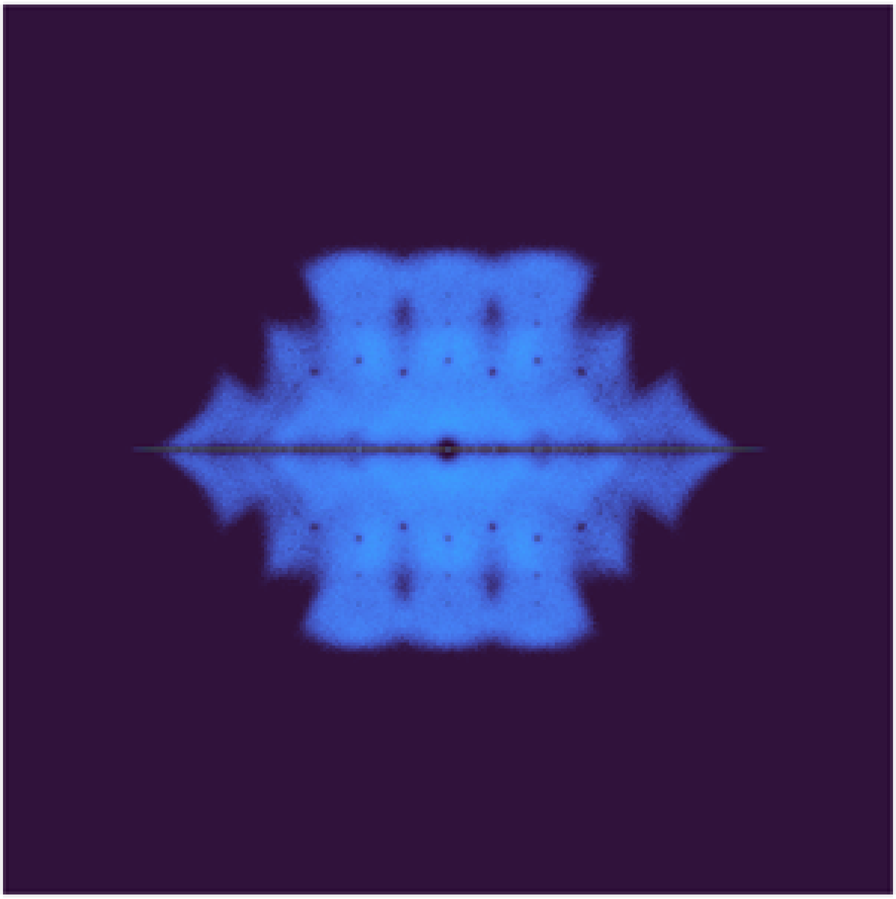
Za vsako tako generirano matriko izračunamo lastne vrednsoti. Pri tem si pomagamo s knjižnjico NumPy, ki vsebuje zanesljive in optimizirane metode za računanje lastnih vrednsoti. Postopek ponovimo za 500 000 naključnih matrik, vse dobljene vrednsoti sproti shranimo v enoten seznam. Tako zbrane vrednsoti nato prikažemo v kompleksni ravnini in dobimo



Slika 1: Latne vrednsoti 500000 matrik v kompleksni ravnini.

4 Histogram

Ker imamo na voljo izjemno veliko število lastnih vrednosti, bi navaden scatter-plot hitro postal neuporaben: točke bi se prekrivale in ustvarile zgolj gosto, temno sliko brez jasnih podrobnosti. Zato raje izberemo 2D histogram, ki kompleksno ravnino razdeli na zelo fino mrežo velikosti 4500×4500. Vsaka celica hrani informacijo o tem, koliko lastnih vrednosti pade vanjo, kar nam omogoča, da gostoto točk opazujemo kot zvezno porazdelitev. Na ta način se hitro pokažejo območja z izrazito visoko koncentracijo lastnih vrednosti ter območja, kjer se lastne vrednosti pojavljajo redkeje. Vendar pa taka porazdelitev ni enakomerno razporejena, blizu središča je gostota zelo velika, proti robovom pa hitro pada. Če bi podatke prikazali neposredno, bi bila struktura histograma preveč kontrastna, sredica bi bila presvetla, robovi pa skoraj popolnoma temni. Da bi se temu izognili, podatke najprej logaritmično pretvorimo. Logaritem zgladi razmerje med majhnimi in velikimi vrednostmi, majhne vrednosti bolj poudari, zelo velike pa nekoliko stisne. Tako dobimo bolj uravnotežen prikaz, v katerem so jasno vidne tudi fine strukture daleč od središča. Poleg tega histogram normaliziramo, da posamezni ekstremi ne izničijo celotnega kontrasta slike. S clippingom odstranimo vrednosti, ki so izven želenega razpona, kar prepreči, da bi pretirano svetle točke zasenčile preostanek slike. Nazadnje uporabimo še gamma korekcijo, s katero nadzorujemo, kako močno so poudarjene subtilne razlike v gostoti. Gamma korekcija nam omogoča, da povsem nežne vzorce, ki bi sicer ostali skriti, jasno izpostavimo. Skupaj ti postopki naredijo histogram pregleden, vizualno bogat in primeren za nadaljnjo obdelavo.

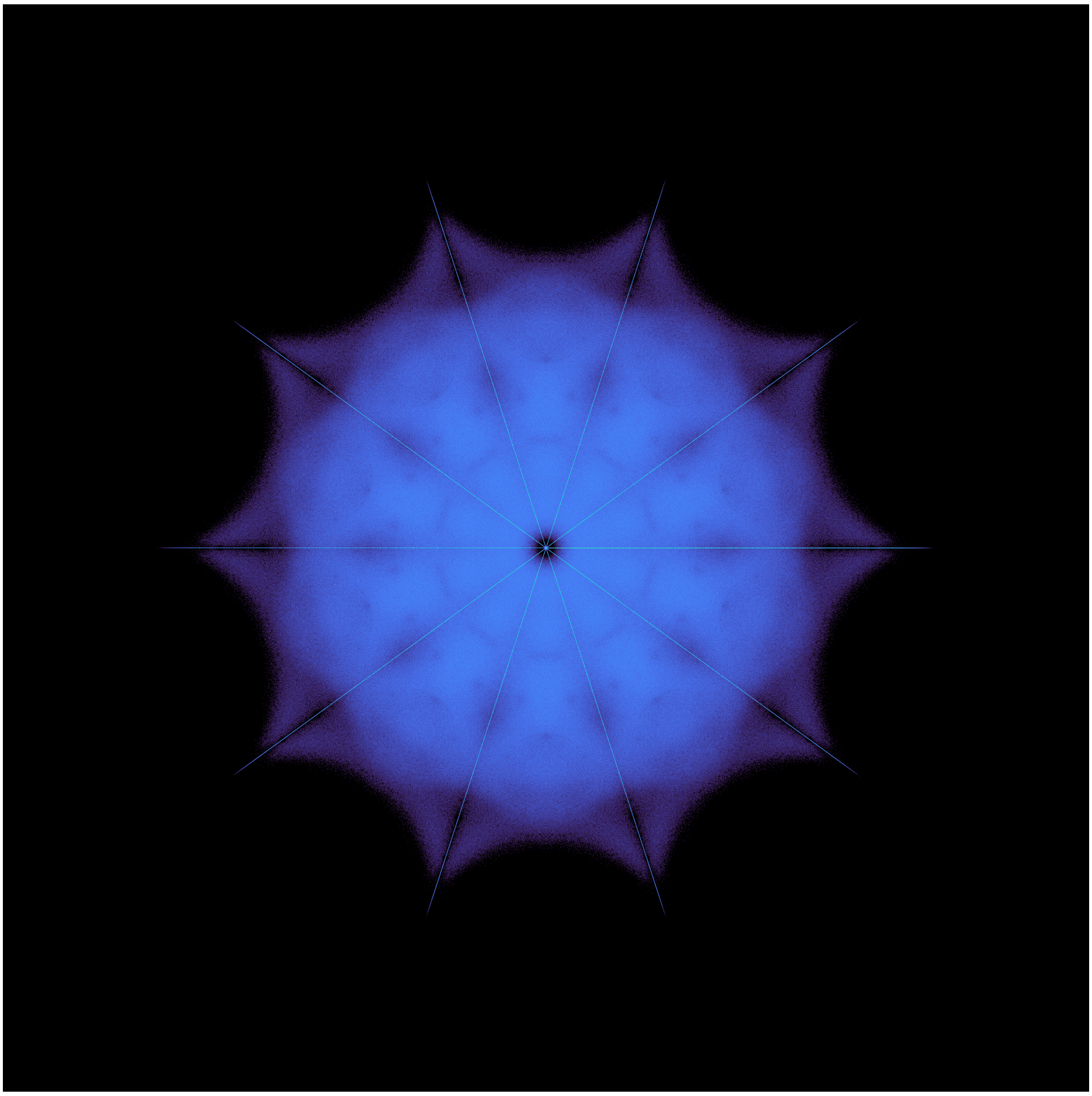


Slika 2: Histogram lastnih vrednosti.

5 Transformacije

Da bi bil končni prikaz resnično estetsko dovršen in ne le matematično zanimiv, na dobljenih podatkih uporabimo še tri transformacije.

1. Za 10-krako simetrijo zavrtimo vse točke za kote $\theta_k = \frac{2\pi k}{10}$, kjer $k = 0, \ldots, 9$.

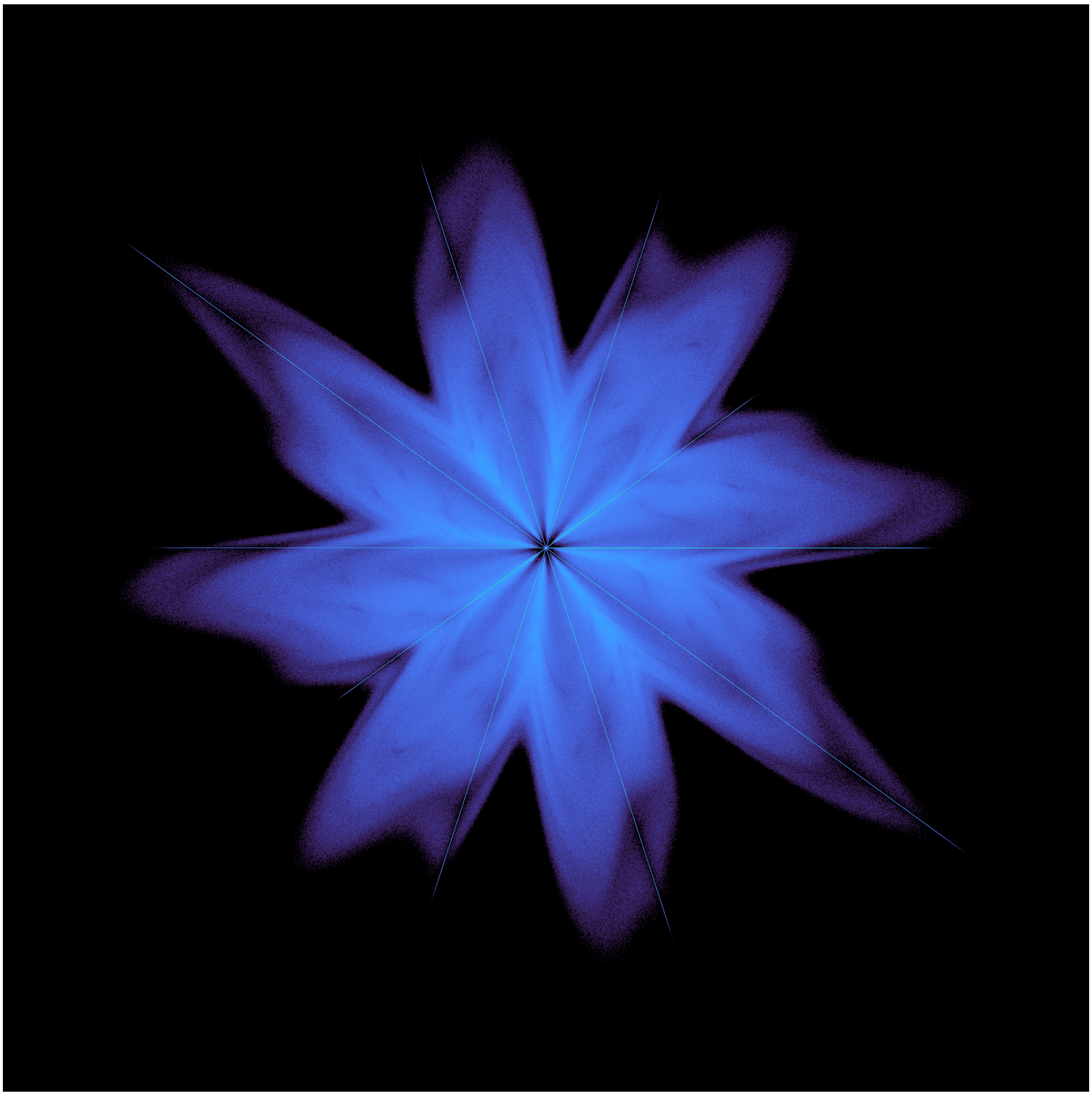


Slika 3: 10-kraka simetrija.

2. Za radialno popačenje ali warp mormao naprej kompleksna števila pretvoriti v polarne koordinate (r, θ) in nato radij popačimo z

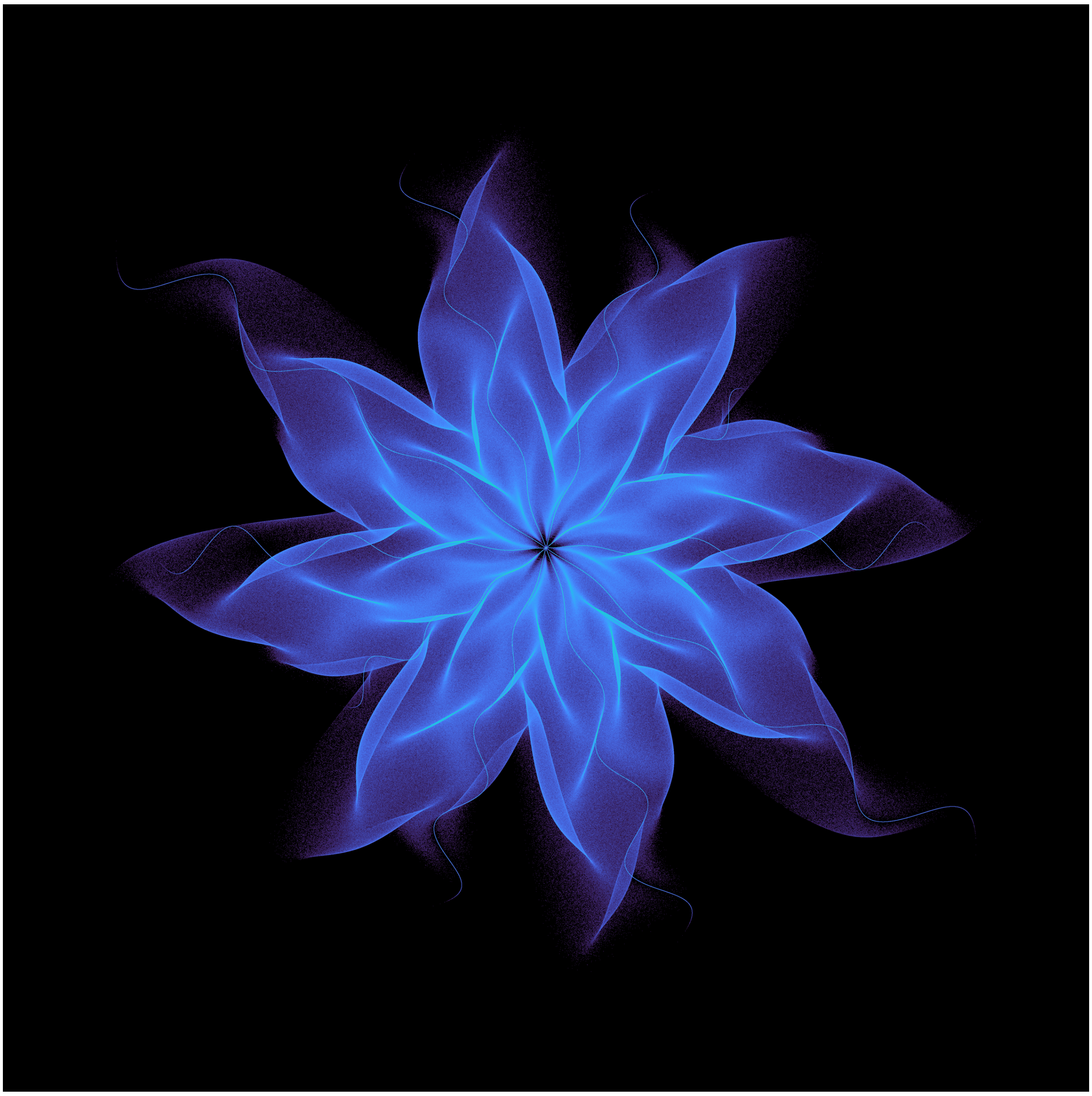
$$r2 = r \cdot (1 + 0.28 \cdot sin(8\theta) + 0.12 \cdot sin(16\theta))$$

.



Slika 4: Radialno popačenje.

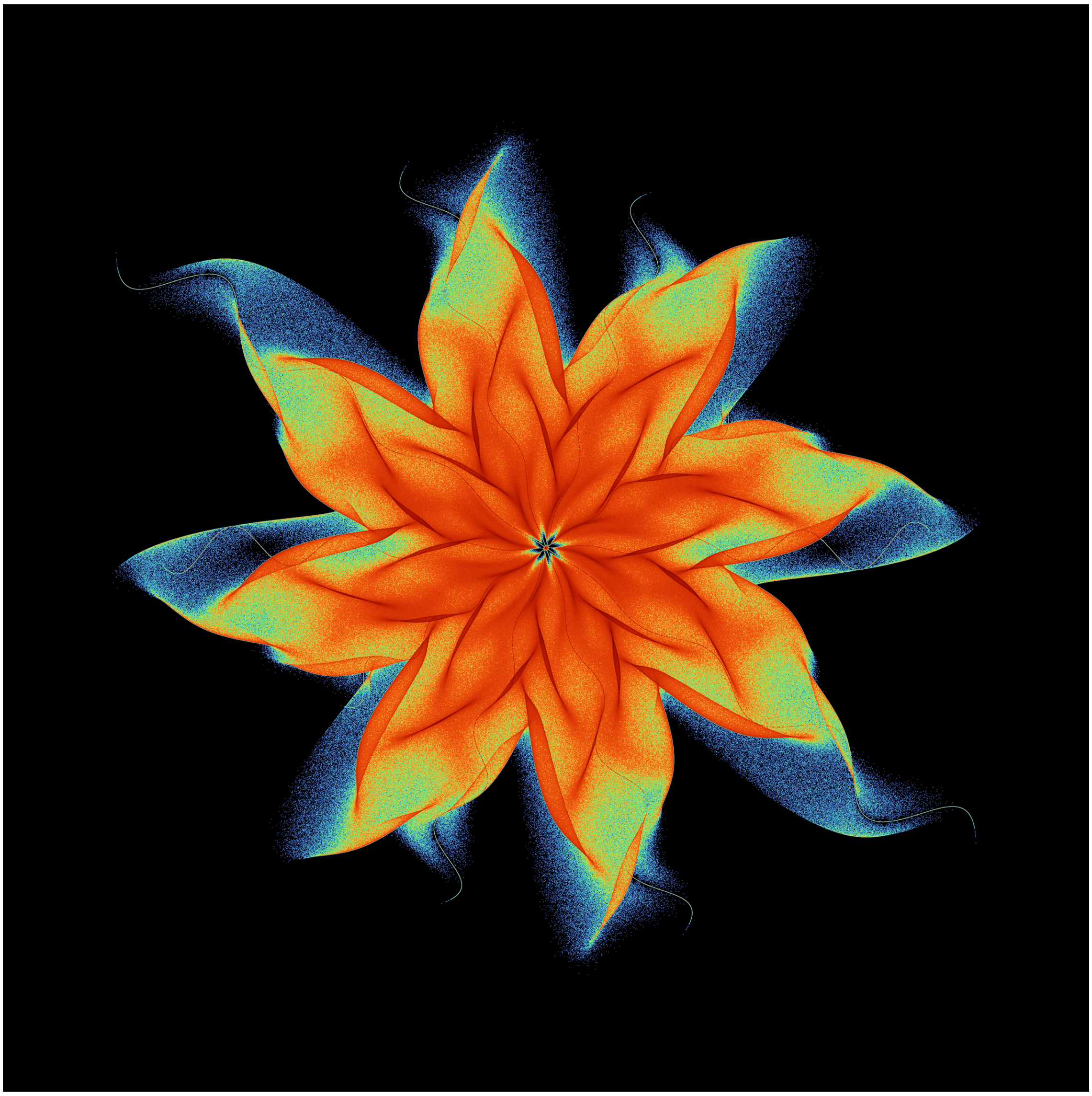
3. Na koncu dodamo še majhen spiralni zasuk $t_2 = t + 0.07 \cdot sin(6r)$.



Slika 5: Spiralni zasuk.

6 Končna slika

Na koncu parametre po potrebi nekoliko prilagodimo, da dobimo končno sliko v obliki, ki nam najbolj ustreza. Jaz sem pri tem dobila tole končno sliko.



Slika 6: Končna slika generirana z 500000 matrikami.

7 Zaključek

Projekt lepo pokaže, da lahko navidez dokaj preproste matrike vodijo do zelo lepih in zanimivih vzorcev. Z računanjem lastnih vrednsoti bohemskih matrik smo ustvarili velik spekter lastnih vrednsoti, ki v kompleksni ravnini tvori zanimiv vzorec. Z dodatnimi transformacijami smo algebraični objekt preoblikovali v estesko dovršeno rožo, pri čemer nam histogram in prilagojena barvna mapa omogočata, da se te strukture izrišejo jasno. Ključno sporočilo projekta je, da matematika ni zgolj orodje za reševanje tehničnih problemov ampak tudi bogat vir navdiha za ustvarjanje umetnin. S pravilo izbiro lahko celo majhen, diskreten razred matrik ustvari raznolike vzorce, ki spominjajo na prave umetniške slike.

Literatura

[1] Robert M. Corless. Bohemian matrices gallery. `http://www.bohemianmatrices.com/gallery/`. [ogled 21. 11. 2025].

[2] GeeksforGeeks. Numpy `linalg.eig()` method in python. `https://www.geeksforgeeks.org/numpy-linalg-eig-method-in-python/`, 2020. [ogled 21. 11. 2025].

[3] Robert M. Gray. Toeplitz and circulant matrices: A review. `https://www.researchgate.net/publication/2394753_Toeplitz_and_Circulant_Matrices_A_Review`, 2001. [ogled 21. 11. 2025].