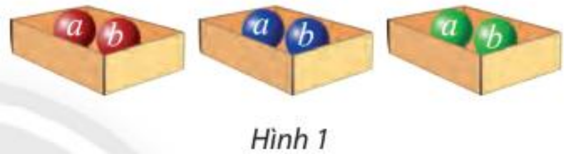
CHUYÊN ĐỀ 2. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ NHỊ THỨC NEWTON

Bài 2: Nhị thức Newton

Trang 34, 35

Khám phá 1 trang 34 Chuyên đề Toán 10:

Có ba hộp, mỗi hộp đựng hai quả cầu được dán nhãn a và b (xem Hình 1).



Hình 1

Lấy từ mỗi hộp một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để trong ba quả cầu lấy ra:

a) có 3 quả cầu dán nhãn b?

b) có 2 quả cầu dán nhãn b?

c) có 1 quả cầu dán nhãn b?

d) không có quả cầu nào dán nhãn b?

Lời giải:

a) Vì có tổng cộng 3 quả cầu dán nhãn b nên có C_3^3 = 1 cách lấy ra 3 quả cầu dán nhãn b.

b) Vì có tổng cộng 3 quả cầu dán nhãn b nên có C_3^2 = 3 cách lấy ra 2 quả cầu dán nhãn b.

c) Vì có tổng cộng 3 quả cầu dán nhãn b nên có C_3^1 = 3 cách lấy ra 1 quả cầu dán nhãn b.

d) Vì có tổng cộng 3 quả cầu dán nhãn b nên có C_3^0 = 1 cách lấy ra 1 quả cầu dán nhãn b.

Thực hành 1 trang 35 Chuyên đề Toán 10:

Hãy khai triển:

a) $(x – y)^6$;

b) $(1 + x)^7$.

Lời giải:

a) $(x - y)^6$

$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5(-y) + C_6^2x^4(-y)^2 + C_6^3x^3(-y)^3 + C_6^4x^2(-y)^4 + C_6^5x(-y)^5 + C_6^6(-y)^6$

$= x^6 - C_6^1x^5y + C_6^2x^4y^2 - C_6^3x^3y^3 + C_6^4x^2y^4 - C_6^5xy^5 + y^6$

$= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$.

b) $(1 + x)^7$

$= C_7^0 1^7 + C_7^1 1^6 x + C_7^2 1^5 x^2 + C_7^3 1^4 x^3 + C_7^4 1^3 x^4 + C_7^5 1^2 x^5 + C_7^6 1 x^6 + C_7^7 x^7$

$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$.

Hoạt động khám phá 2 trang 35 Chuyên đề Toán 10:

Từ các công thức khai triển:

$(a + b)^0 = 1$;

$(a + b)^1 = a + b$;

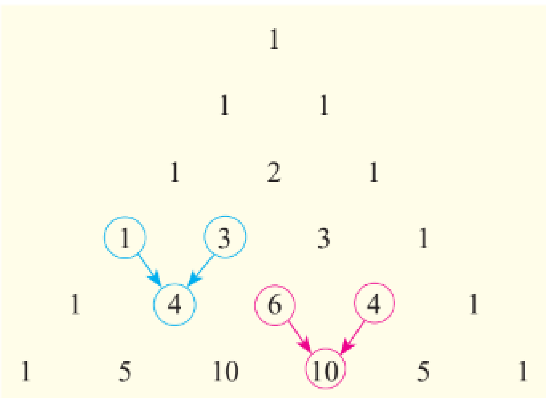
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

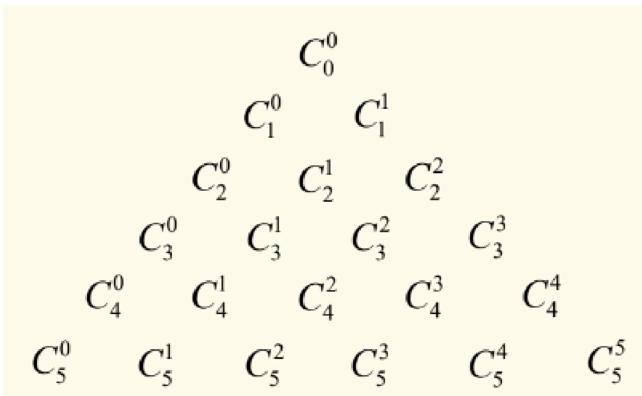
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

các hệ số được viết thành bảng số như Hình 2 sau đây. Nếu sử dụng kí hiệu tổ hợp thì nhận được bảng như Hình 3.



Hình 2



Hình 3

Từ các đẳng thức như

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_4^1 = C_4^3 = 4,$$
$$C_3^0 + C_3^1 = C_4^1, \quad C_4^2 + C_4^3 = C_5^3,$$

có thể dự đoán rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \le k \le n);$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \quad (1 \le k \le n).$$

Hãy chứng minh các công thức trên.

Gợi ý: Sử dụng công thức $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, n \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n.$

Lời giải:

+) Có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\left[n-(n-k)\right]!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vậy $C_n^k = C_n^{n-k}$.

+) $C_n^{k-1} + C_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{\frac{k!}{k}(n-k+1)!} + \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{k!\frac{(n-k+1)!}{(n-k+1)}} = \frac{k}{n+1}.\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} + \frac{n-k+1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{k}{n+1}.\frac{(n+1)!}{k!\left[(n+1)-k\right]!} + \frac{n-k+1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{k!\left[(n+1)-k\right]!}$$

$$= \frac{k}{n+1}.C_{n+1}^k + \frac{n-k+1}{n+1}.C_{n+1}^k = \left(\frac{k}{n+1} + \frac{n-k+1}{n+1}\right)C_{n+1}^k$$

$$= \frac{k+(n-k+1)}{n+1}C_{n+1}^k = \frac{n+1}{n+1}C_{n+1}^k = C_{n+1}^k.$$

Trang 37, 38

Thực hành 2 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Sử dụng tam giác Pascal, hãy khai triển:

a) $(2x + 1)^6$;

b) $(x - y)^7$.

Lời giải:

a) $(2x + 1)^6$

$$=(2x)^6+6(2x)^5 1+15(2x)^4 1^2+20(2x)^3 1^3+15(2x)^2 1^4+6(2x)1^5+1^6$$

$$=64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1.$$

b) $(x - y)^7$

$= x^7 + 7x^6(-y) + 21x^5(-y)^2 + 35x^4(-y)^3 + 35x^3(-y)^4 + 21x^2(-y)^5 + 7x(-y)^6 + (-y)^7$

$= x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$.

Thực hành 3 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Xác định hệ số của x^2 trong khai triển $(3x + 2)^9$.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$(3x + 2)^9 = C_9^0(3x)^9 + C_9^1(3x)^8 2 + ... + C_9^k(3x)^{9-k} 2^k + ... + C_9^9 2^9$.

Số hạng chứa x^2 ứng với giá trị k = 7. Hệ số của số hạng này là $C_9^7 3^2 2^7 = 41472$.

Thực hành 4 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Biết rằng trong khai triển $(x + a)^6$ với a là một số thực, hệ số của x^4 là 60. Tìm giá trị của a.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$(x + a)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5a + ... + C_6^kx^{6-k}a^k + ... + C_6^6a^6$.

Số hạng chứa x^4 ứng với giá trị k = 2. Hệ số của số hạng này là $C_6^2a^2 = 15a^2$.

Theo giả thiết, ta có $15a^2 = 60$, suy ra a = 2 hoặc a = –2.

Vậy a = 2 hoặc a = –2.

Trang 39

Thực hành 5 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$

Lời giải:

Xét khai triển:

$(1 + x)^n = = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} x + C_n^2 1^{n-2} x^2 + C_n^3 1^{n-3} x^3 + \ldots + C_n^n x^n$

$= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n.$

Thay $x = -1$ ta được:

$(1 - 1)^n = C_n^0 + C_n^1(-1) + C_n^2(-1)^2 + C_n^3(-1)^3 + \ldots + C_n^n(-1)^n$

$= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$

$\Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$

Vận dụng trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Trong hộp A có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Người ta lấy một số quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B. Có tất cả bao nhiêu cách lấy, tính cả trường hợp lấy không quả (tức không lấy quả nào)?

Lời giải:

Số cách lấy k quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B là C_{10}^k với $0 \le k \le 10$.

Như vậy có tất cả $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + ... + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$ cách.

Lại có $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + ... + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

nên có tổng cộng 1024 cách lấy.

Bài 1 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển biểu thức:

a) $(x – 2y)^6$;

b) $(3x – 1)^5$.

Lời giải:

Sử dụng tam giác Pascal, ta có:

a) $(x – 2y)^6$

$$= x^6 + 6x^5(-2y) + 15x^4(-2y)^2 + 20x^3(-2y)^3 + 15x^2(-2y)^4 + 6x(-2y)^5 + (-2y)^6$$

$$= x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 12xy^5 + 64y^6.$$

b) $(3x – 1)^5$

$$= (3x)^5 + 5(3x)^4(-1) + 10(3x)^3(-1)^2 + 10(3x)^2(-1)^3 + 5(3x)(-1)^4 + (-1)^5$$

$$= 243x^5 - 405x^4 + 270x^3 - 90x^2 + 15x - 1.$$

Bài 2 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(2 – x)^{12}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$(2 - x)^{12} = C_{12}^0 2^{12} + C_{12}^1 2^{11}(-x) + ... + C_{12}^k 2^{12-k}(-x)^k + ... + C_{12}^{12}(-x)^{12}$$

$$= C_{12}^0 2^{12} + C_{12}^1 2^{11}(-1)x + ... + C_{12}^k 2^{12-k}(-1)^k x^k + ... + C_{12}^{12}(-1)^{12} x^{12}.$$

Số hạng chứa x^{10} ứng với giá trị k = 10. Hệ số của số hạng này là $C_{12}^{10} 2^{12-10}(-1)^{10} = 264$.

Bài 3 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax + 1)^6$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$(ax + 1)^6 = C_6^0(ax)^6 + C_6^1(ax)^5 1 + ... + C_6^k(ax)^{6-k}1^k + ... + C_6^6 1^6$

$= C_6^0 a^6 x^6 + C_6^1 a^5 x^5 + ... + C_6^k a^{6-k} x^{6-k} + ... + 1.$

Số hạng chứa x^4 ứng với giá trị k = 2. Hệ số của số hạng này là $C_6^2 a^{6-2} = 15a^4$;

Số hạng chứa x^2 ứng với giá trị k = 4. Hệ số của số hạng này là $C_6^4 a^{6-4} = 15a^2$.

Theo giả thiết, ta có $15a^4 = 4 \cdot 15a^2$, suy ra a = 2 hoặc a = –2.

Vậy a = 2 hoặc a = –2.

Bài 4 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 + 3x)^n$ là 90. Tìm giá trị của n.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$(1 + 3x)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1}(3x) + ... + C_n^k 1^{n-k}(3x)^k + ... + C_n^n (3x)^n$

$= 1 + C_n^1 3x + ... + C_n^k 3^k x^k + ... + C_n^n 3^n x^n.$

Số hạng chứa x^2 ứng với giá trị k = 2. Hệ số của số hạng này là $C_n^2 3^2 = \frac{9n(n-1)}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{9n(n-1)}{2} = 90 \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \ \ (TM) \\ n = -4 \ (L) \end{array}\right.$.

Vậy n = 5.

Bài 5 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh công thức nhị thức Newton (công thức (1), trang 35) bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải:

+) Với n = 1, ta có: $(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$.

Vậy công thức đúng với n = 1.

+) Với $k \ge 1$ là một số nguyên dương tuỳ ý mà công thức đúng đúng, ta phải chứng minh công thức cũng đúng với k + 1, tức là:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1}b + ... + C_{k+1}^{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k.$$

Khi đó:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

$$= a(a+b)^k + b(a+b)^k$$

$$= a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$= \left(C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + ... + C_k^{k-1}a^2 b^{k-1} + C_k^k ab^k\right)$$

$$+\left(C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1}b^2 + ... + C_k^{k-2}a^2 b^{k-1} + C_k^{k-1}ab^k + C_k^k b^{k+1}\right)$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right)a^k b + \left(C_k^1 + C_k^2\right)a^{k-1}b^2 + ...$$

$$+\left(C_k^{k-2} + C_k^{k-1}\right)a^2 b^{k-1} + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right)ab^k + C_k^k b^{k+1}$$

$$= 1.a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 + ... + C_{k+1}^{k-1}a^2 b^{k-1} + C_{k+1}^k ab^k + 1.b^{k+1}$$

(vì $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}\ \forall 0 \le i \le k, i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$)

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1}b + ... + C_{k+1}^{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}.$$

Vậy công thức cũng đúng với n = k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Biết rằng $(3x - 1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$. Hãy tính:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$;

b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$.

Lời giải:

Có $(3x - 1)^7$

$= C_7^0(3x)^7 + C_7^1(3x)^6(-1) + C_7^2(3x)^5(-1)^2 + C_7^3(3x)^4(-1)^3$

$+C_7^4(3x)^3(-1)^4 + C_7^5(3x)^2(-1)^5 + C_7^6(3x)^1(-1)^6 + C_7^7(-1)^7$

$= 2187x^7 – 5103x^6 + 5103x^5 – 2835x^4 + 945x^3 – 189x^2 + 21x – 1.$

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

= (–1) + 21 + (–189) + 945 + (–2835) + 5103 + (–5103) + 2187 = 128.

b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$

= (–1) + (–189) + (–2835) + (–5103) = –8128.

Bài 7 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

Lời giải:

Vì tập hợp đã cho có 12 phần tử nên số tập hợp con có k phần tử của nó là: C_{12}^k.

Như vậy tổng số tập con của tập hợp này là: $C_{12}^0 + C_{12}^1 + C_{12}^2 + ... + C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$.

Lại có $C_{12}^0 + C_{12}^1 + C_{12}^2 + ... + C_{12}^{11} + C_{12}^{12} = 2^{12} = 4096$.

Vậy một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả 4096 tập hợp con.

Bài 8 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một,

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu?

Lời giải:

a) Có C_{15}^0 cách chọn ra 0 bút chì màu;

Có C_{15}^1 cách chọn ra 1 bút chì màu;

Có C_{15}^2 cách chọn ra 2 bút chì màu;

...

Có C_{15}^{15} cách chọn ra 15 bút chì màu.

Vậy có tổng cộng $C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+...+C_{15}^{14}+C_{15}^{15}=2^{15}=32768$ cách chọn ra một số bút chì màu.

b) Số cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu là: $C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+...+C_{15}^{7}+C_{15}^{8}$.

Vì $C_{15}^{0}=C_{15}^{15},\ C_{15}^{1}=C_{15}^{14},\ C_{15}^{2}=C_{15}^{13},...,\ C_{15}^{7}=C_{15}^{8}$

nên $C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+...+C_{15}^{7}=\frac{1}{2}\left(C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+...+C_{15}^{14}+C_{15}^{15}\right)=\frac{1}{2}.32768=16384$

$\Rightarrow C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+C_{15}^{2}+...+C_{15}^{7}+C_{15}^{8}=16384+6345=22819.$

Vậy có 22819 cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu.