Bài 5. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

Bài 3.1 trang 32 SBT Toán 10 Tập 1:

Tính giá trị của biểu thức:

a) A = sin45° + 2sin60° + tan120° + cos135°;

b) B = tan45° . cot135° – sin30° . cos120° – sin60° . cos150°;

c) C = $\cos^2 5° + \cos^2 25° + \cos^2 45° + \cos^2 65° + \cos^2 85°$;

d) D = $\dfrac{12}{1+\tan^2 73°}$ – 4tan75° . cot105° + $12\sin^2 107°$ – 2tan40° . cos60° . tan50°;

e) E = 4tan32° . cos60° . cot148° + $\dfrac{5\cot^2 108°}{1+\tan^2 18°}$ + $5\sin^2 72°$.

Lời giải:

a) A = sin45° + 2sin60° + tan120° + cos135°

Ta có sin 45° = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; sin 60° = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

tan 120° = $-\sqrt{3}$; cos 135° = $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó A = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

= $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

= 0.

Vậy A = 0.

b) B = tan45° . cot135° – sin30° . cos120° – sin60° . cos150°

Ta có tan45° = 1; cot135° = –1;

sin30° = $\frac{1}{2}$; cos120° = $-\frac{1}{2}$;

sin60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos150° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó B = 1 . (–1) – $\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

= –1 + $\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{4}$ = 0.

Vậy B = 0.

c) C = $\cos^2 5°$ + $\cos^2 25°$ + $\cos^2 45°$ + $\cos^2 65°$ + $\cos^2 85°$

Ta có cos45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

cos5° = cos(90° – 85°) = sin85°;

cos25° = cos(90° – 65°) = sin65°.

Do đó: $\cos^2 5°$ = $\sin^2 85°$; $\cos^2 25°$ = $\sin^2 65°$.

Khi đó C = $\sin^2 85°$ + $\sin^2 65°$ + $\frac{1}{2}$ + $\cos^2 65°$ + $\cos^2 85°$

C = ($\sin^2 85°$ + $\cos^2 85°$) + ($\sin^2 65°$ + $\cos^2 65°$) + $\frac{1}{2}$

= 1 + 1 + $\frac{1}{2}$ = $\frac{5}{2}$.

Vậy C = $\frac{5}{2}$.

d) D = $\frac{12}{1+\tan^2 73°}$ – 4tan75° . cot105° + 12sin^{2}107° – 2tan40° . cos60° . tan50°

Ta có 1 + tan^{2}73° = 1 + $\frac{\sin^2 73°}{\cos^2 73°}$

$= \frac{\cos^2 73°}{\cos^2 73°} + \frac{\sin^2 73°}{\cos^2 73°}$

$= \frac{\cos^2 73° + \sin^2 73°}{\cos^2 73°} = \frac{1}{\cos^2 73°}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^2 73°} = \cos^2 73°$

$\Rightarrow \frac{12}{1+\tan^2 73°} = 12\cos^2 73°$

Khi đó:

D = 12cos^{2}73° – 4 . tan(180° – 105°) . cot105° + 12sin^{2}107° – 2tan(90° – 50°) . cos60° . tan50°

= 12cos^{2}73° – 4(–tan105°) . cot105° + 12sin^2 107° – 2cot50° . cos60° . tan50°

= 12cos^2 73° + 12sin^2 73° + 4tan105° . cot105° – 2cot 50° . tan 50° . cos 60°

= 12(cos^2 73° + sin^2 73°) + 4.1 – 2.1.cos60°

= 12 + 4 – 2. $\frac{1}{2}$ = 15.

Vậy D = 15.

e) $E = 4\tan 32° \,.\, \cos 60° \,.\, \cot 148° + \dfrac{5\cot^2 108°}{1+\tan^2 18°} + 5\sin^2 72°$

Ta có $1 + \tan^2 18° = 1 + \dfrac{\sin^2 18°}{\cos^2 18°}$

$= \dfrac{\cos^2 18°}{\cos^2 18°} + \dfrac{\sin^2 18°}{\cos^2 18°}$

$= \dfrac{\cos^2 18° + \sin^2 18°}{\cos^2 18°}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 18°}$

$\Rightarrow \dfrac{5\cot^2 108°}{1+\tan^2 108°} = 5\cot^2 108° \,.\, \cos^2 18°$

$= 5[\cot(180° - 72°)]^2 \,.\, \cos^2 18°$

$= 5.(-\cot 72°)^2 \,.\, \cos^2 18°$

$= 5.\cot^2 72° \,.\, \cos^2 18°$

Khi đó:

$E = 4\tan 32° \,.\, \cos 60° \,.\, \cot(180° - 32°) + 5\cot^2 72° \,.\, \cos^2 18° + 5[\sin(90° - 18°)]^2$

$= 4\tan 32° \,.\, \cos 60° \,.\, (-\cot 32°) + 5\cot^2 72° \,.\, \cos^2 18° + 5\cos^2 18°$

$= -4\cos 60° + 5\cos^2 18° \,.\, (\cot^2 72° + 1)$

$= -4 \,.\, \dfrac{1}{2} + 5\cos^2 18° \,.\, \dfrac{1}{\sin^2 72°}$

$= -2 + 5\cos^2 18° \cdot \dfrac{1}{\left[\sin\left(90° - 18°\right)\right]^2}$

$= -2 + 5\cos^2 18° \cdot \dfrac{1}{\cos^2 18°}$

$= -2 + 5 = 3.$

Vậy E = 3.

Bài 3.2 trang 32 SBT Toán 10 Tập 1:

Cho góc α, 90° < α < 180° thỏa mãn $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$F = \frac{\tan\alpha + 2\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}.$$

Lời giải:

Do 90° < α < 180° nên sinα > 0, cosα < 0.

Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$.

Mà cos α < 0 nên $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{7}{16}} = \dfrac{-\sqrt{7}}{4}$.

Khi đó:

• $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{-\sqrt{7}}{4} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{-\sqrt{7}} = \dfrac{-3}{\sqrt{7}}$.

• cot α = 1 : tan α = $\frac{-\sqrt{7}}{3}$.

Khi đó F = $\dfrac{\dfrac{-3}{\sqrt{7}}+2.\dfrac{-\sqrt{7}}{3}}{\dfrac{-3}{\sqrt{7}}+\dfrac{-\sqrt{7}}{3}}$

$= \dfrac{\dfrac{-3}{\sqrt{7}}-\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}{\dfrac{-3}{\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{\dfrac{-9-14}{3\sqrt{7}}}{\dfrac{-9-7}{3\sqrt{7}}}$

$= \frac{-23}{3\sqrt{7}}:\frac{-16}{3\sqrt{7}} = \frac{23}{16}$

Vậy F = $\frac{23}{16}$.

Bài 3.3 trang 33 SBT Toán 10 Tập 1:

Cho góc α thỏa mãn 0° < α < 180°, tanα = 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) G = 2sin α + cos α;

b) H = $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

Lời giải:

Do 0° < α < 180° nên sinα > 0.

Mà tanα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ = 2 > 0 nên sin α và cos α cùng dấu, do đó cosα > 0.

Do $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ nên $\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha$

Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow 4\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow 5\cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$

Do $\cos\alpha > 0$ nên $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

a) $G = 2\sin\alpha + \cos\alpha$

$= 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Vậy $G = \sqrt{5}$.

b) $H = \dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

$$= \frac{2.\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}}.\sqrt{5} = 5$$

Vậy H = 5.

Bài 3.4 trang 33 SBT Toán 10 Tập 1:

Cho góc α thỏa mãn 0° < α < 180°, tanα = $\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha.\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos\alpha - 4\cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}.$$

Lời giải:

Do 0° < α < 180° nên sinα > 0.

Mà tanα = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2} > 0$ nên sinα và cosα cùng dấu, do đó cosα > 0.

Chia cả tử và mẫu của K cho $\cos^3\alpha$ ta được:

$$K = \frac{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\sin\alpha.\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{2\sin^2\alpha.\cos\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{4\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}$$

$$= \frac{\tan^3\alpha + \tan\alpha + 2\tan^2\alpha - 4}{\tan\alpha.\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\tan^3\alpha + \tan\alpha + 2\tan^2\alpha - 4}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\tan\alpha - 1\right)}$$

$$= \frac{\tan^3\alpha + \tan\alpha + 2\tan^2\alpha - 4}{\left(\tan^2\alpha + 1\right).\left(\tan\alpha - 1\right)}$$

$$= \frac{\tan^3\alpha + \tan\alpha + 2\tan^2\alpha - 4}{\tan^3\alpha + \tan\alpha - \tan^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 + \sqrt{2} + 2\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4}{\left(\sqrt{2}\right)^3 + \sqrt{2} - \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 - 4}{2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 - 1}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 3} = \frac{3\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$$

Vậy K = 2 + $\sqrt{2}$.

Bài 3.5 trang 33 SBT Toán 10 Tập 1: Chứng minh rằng:

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$;

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$;

c*) $\sqrt{\sin^4\alpha+6\cos^2\alpha+3}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}=4$.

Lời giải:

a) Ta có $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

$\Rightarrow 1^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$

$\Rightarrow \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$

Vậy $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$.

b) Ta có $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$\Rightarrow 1^3 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha \,.\, 1$

$\Rightarrow \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$

Vậy $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$.

c) Xét $\sin^4\alpha + 6\cos^2\alpha + 3$

$= \sin^4\alpha + 6(1 - \sin^2\alpha) + 3$

$= \sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha + 9$

$= (\sin^2\alpha - 3)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\sin^4\alpha+6\cos^2\alpha+3}=\sqrt{\left(\sin^2\alpha-3\right)^2}$

$= |\sin^2\alpha - 3| = 3 - \sin^2\alpha$

(do $0 \le \sin^2\alpha < 1$ nên $\sin^2\alpha - 3 < 0$).

Xét $\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha$

$= \cos^4\alpha + 4(1 - \cos^2\alpha)$

$= \cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 4$

$= (\cos^2\alpha - 2)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha} = \sqrt{\left(\cos^2\alpha - 2\right)^2}$

$= |\cos^2\alpha - 2| = 2 - \cos^2\alpha$

(do $0 \le \cos^2\alpha < 1$ nên $\cos^2\alpha - 2 < 0$).

$\Rightarrow \sqrt{\sin^4\alpha + 6\cos^2\alpha + 3} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$

$= 3 - \sin^2\alpha + 2 - \cos^2\alpha$

$= 5 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$= 5 - 1$

$= 4.$

Vậy $\sqrt{\sin^4\alpha + 6\cos^2\alpha + 3} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha} = 4$.

Bài 3.6 trang 33 SBT Toán 10 Tập 1: Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90° - \phi - \left|\cos\left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m\right)180°\right)\right| . 23,5°$$

trong đó m = 0 nếu $1 \le N \le 172$, m = 1 nếu $173 \le N \le 355$, m = 2 nếu $356 \le N \le 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20°$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Lời giải:

Tháng 10 và tháng 12 có 31 ngày; tháng 11 có 30 ngày.

Nên từ 10/10 đến hết tháng 10 còn 21 ngày.

Do đó ngày 10/10 trong năm không nhuận là ngày thứ: 365 – 21 – 30 – 31 = 283 trong năm đó.

Vì $173 \le N = 283 \le 355$ nên m = 1.

Góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20°$ là:

$$90° - 20° - \left|\cos\left(\left(\frac{2(283+10)}{365} - 1\right)180°\right)\right| . 23,5°$$

$\approx 70° - |\cos 109°| . 23,5°$

$\approx 70° - 7,65°$

$\approx 62,35°$

Vậy góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20°$ khoảng $62,35°$.

b) Học sinh tự thực hiện việc đo và tính theo công thức để so sánh.

Lưu ý tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90° - \phi - \left|\cos\left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m\right)180°\right)\right| . 23,5°$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \le N \le 172$, $m = 1$ nếu $173 \le N \le 355$, $m = 2$ nếu $356 \le N \le 365$.