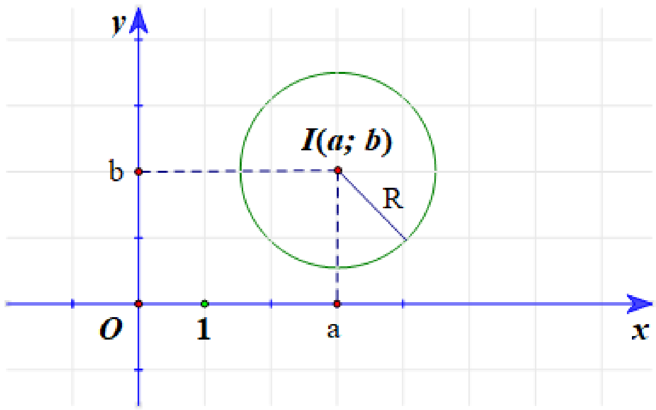
Bài 3. Đường tròn trong mặt phẳng tọa độ

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R.



Phương trình $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ được gọi là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính R.

Ví dụ: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm I(2; –3), bán kính R = 2.

b) (C) có đường kính AB với A(1; 6), B(–3; 2).

c) (C) đi qua ba điểm A(–2; 4), B(5; 5), C(6; –2).

Hướng dẫn giải

a) Đường tròn (C) có tâm I(2; –3), bán kính R = 2.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x – 2)^2 +(y + 3)^2 = 4$.

b) Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C).

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và đường kính AB nên I là trung điểm AB.

Với A(1; 6), B(–3; 2).

Suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ b = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$

Khi đó ta có tọa độ I(–1; 4).

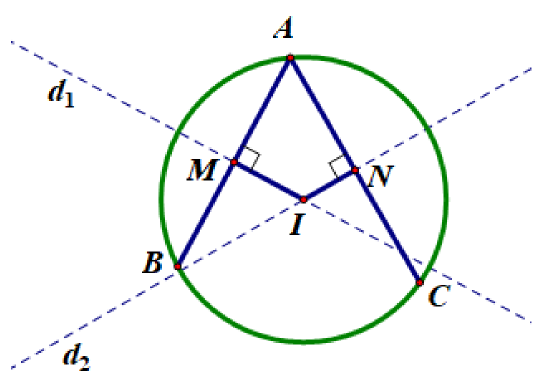
Ta có $\overrightarrow{IA} = (2;2)$.

Suy ra $R = IA = \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Đường tròn (C) có tâm I(–1; 4), bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x + 1)^2 + (y – 4)^2 = 8$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ta có M là trung điểm AB với A(–2; 4), B(5; 5).

Suy ra $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Tương tự, ta có N(2; 1).

Với A(–2; 4), B(5; 5), C(6; –2) ta có $\overrightarrow{AB} = (7;1)$, $\overrightarrow{AC} = (8;-6)$.

Đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB đi qua điểm $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (7;1)$.

Suy ra phương trình d_1: $7\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 1\left(y - \dfrac{9}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 15 = 0$.

Tương tự, ta có phương trình đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC:

$8(x - 2) - 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 5 = 0$.

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và (C) đi qua ba điểm A, B, C nên IA = IB = IC (= R).

Vì IA = IB nên I nằm trên đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB.

Tương tự, ta có I nằm trên đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC.

Vì vậy ta suy ra I là giao điểm của d_1 và d_2.

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + y - 15 = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra I(2; 1).

Với I(2; 1) và A(–2; 4) ta có $\overrightarrow{IA} = \left(-4; 3\right)$.

Suy ra $R = IA = \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{\left(-4\right)^2 + 3^2} = 5$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = 25$.

Ví dụ: Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $(x – 4)^2 + (y – 10)^2 = 9$.

b) $(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = 64$.

c) $x^2 + (y – 1)^2 = 36$.

Hướng dẫn giải

a) $(x – 4)^2 + (y – 10)^2 = 9$

Đường tròn (C) có tâm I(4; 10), bán kính $R = \sqrt{9} = 3$.

b) $(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = 64$

Đường tròn (C) có tâm I(–2; 5), bán kính $R = \sqrt{64} = 8$.

c) $x^2 + (y – 1)^2 = 36$.

Đường tròn (C) có tâm I(0; 1), bán kính $R = \sqrt{36} = 6$.

Nhận xét: Ta có $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 – 2ax – 2by + (a^2 + b^2 – R^2) = 0$.

Vậy phương trình đường tròn $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, trong đó $c = a^2 + b^2 – R^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 – c > 0$. Khi đó đường tròn (C) có tâm I(a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Ví dụ: Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Nếu là phương trình đường tròn, hãy tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 + 2x – 6y – 15 = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với a = –1, b = 3, c = –15.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 9 + 15 = 25 > 0$.

Vậy phương trình đã cho là phương trình đường tròn có tâm I(–1; 3), bán kính R = 5.

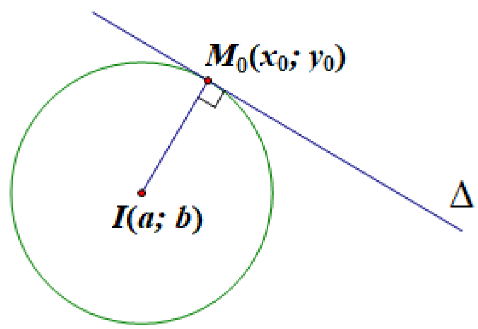
b) Ta có $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$.

Phương trình trên có dạng $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với a = –1, b = –2, c = 7.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 4 – 7 = –2 < 0$.

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm I(a; b) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn là:

$$(a – x_0)(x – x_0) + (b – y_0)(y – y_0) = 0.$$

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): $(x – 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ tại điểm M(3; –1).

Hướng dẫn giải

Ta có $(3 – 2)^2 + (–1 + 3)^2 = 5$.

Suy ra $M \in (C)$.

Đường tròn (C) có tâm I(2; –3).

Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm M(3; –1) là:

$(2 – 3)(x – 3) + [–3 – (–1)].[y – (–1)] = 0$.

⇔ –1.(x – 3) + (–2).(y + 1) = 0.

⇔ –x – 2y + 1 = 0.

Vậy phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) cần tìm là –x – 2y + 1 = 0.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

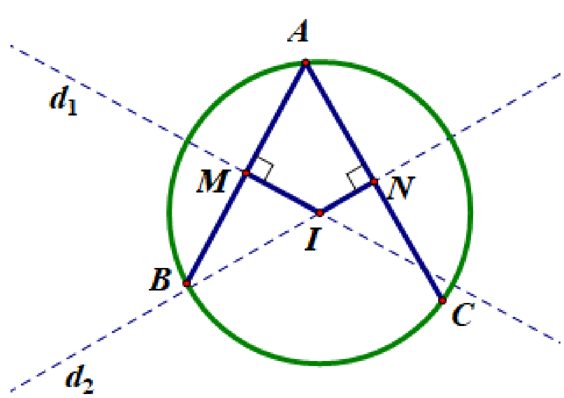
a) (C) đi qua ba điểm A(–1; 3), B(1; 4), C(3; 2).

b) (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: x – 2y + 7 = 0.

c) (C) có tâm thuộc đường thẳng d: 2x – y – 5 = 0 và đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).

Hướng dẫn giải

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ta có M là trung điểm AB với A(–1; 3), B(1; 4).

Suy ra $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có $M\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$.

Tương tự, ta có $N\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Với A(–1; 3), B(1; 4), C(3; 2) ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-1)$.

Đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (2;1)$.

Suy ra phương trình d_1: $2(x-0)+1\left(y-\dfrac{7}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y-\dfrac{7}{2}=0$.

Tương tự, ta có phương trình đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC:

$4(x-1)-1\left(y-\dfrac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x-y-\dfrac{3}{2}=0$.

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và (C) đi qua ba điểm A, B, C nên IA = IB = IC (= R).

Vì IA = IB nên I nằm trên đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB.

Tương tự, ta có I nằm trên đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC.

Vì vậy I là giao điểm của d_1 và d_2.

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - \dfrac{7}{2} = 0 \\ 4x - y - \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{6} \\ y = \dfrac{11}{6} \end{cases}$$

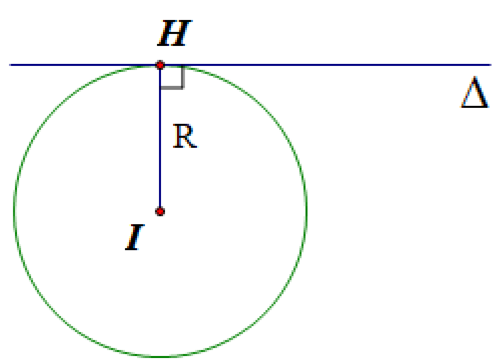
Suy ra $I\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{11}{6}\right)$.

Với $I\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{11}{6}\right)$ và A(–1; 3) ta có $\overrightarrow{IA} = \left(-\dfrac{11}{6}; \dfrac{7}{6}\right)$.

Suy ra $R = IA = \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{170}}{6}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{6}\right)^2 = \dfrac{85}{18}$.

b) (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: x – 2y + 7 = 0.

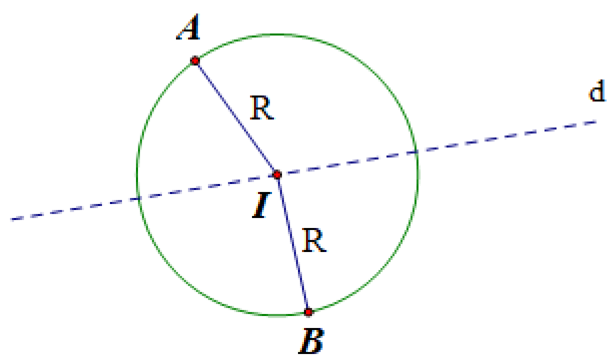


Vì (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ nên ta có:

$R = d(I, \Delta) = \dfrac{|-1-2.2+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2 = \dfrac{4}{5}$.

c) (C) có tâm thuộc đường thẳng d: 2x – y – 5 = 0 và đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).



Phương trình đường thẳng d: 2x – y – 5 = 0 ⇔ y = 2x – 5.

Giả sử I(a; b).

Vì I ∈ d nên ta có I(a; 2a – 5).

Với A(1; 2), B(4; 1) và I(a; 2a – 5) ta có:

$\overrightarrow{AI} = (a-1; 2a-7), \overrightarrow{BI} = (a-4; 2a-6)$.

Vì đường tròn (C) đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).

Ta suy ra AI = BI (= R).

⇔ $AI^2 = BI^2$.

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2a - 7)^2 = (a - 4)^2 + (2a - 6)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 28a + 49 = a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 24a + 36$

$\Leftrightarrow 2a = 2.$

$\Leftrightarrow a = 1.$

Với a = 1, ta có b = 2a – 5 = 2.1 – 5 = –3.

Suy ra I(1; –3), bán kính R = AI = $\sqrt{(1-1)^2+(2.1-7)^2}$ = 5.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Bài 2. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Nếu là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$.

d) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với a = –1, b = 2, c = 9.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 = -4 < 0$.

Vì vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

b) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với a = 3, b = –2, c = 13.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 9 + 4 – 13 = 0$.

Vì vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có $2x^2 + 2y^2 – 6x – 4y – 1 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$.

Phương trình trên có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = \frac{3}{2}$, b = 1, $c = -\frac{1}{2}$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{4} > 0$.

Vì vậy phương trình đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn có tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

d) Phương trình đã cho không có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$.

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

Bài 3. Lập phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C): $x^2 + y^2 – 2x = 0$ tại điểm M(1; 1).

b) (C): $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 4 = 0$, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ: $x + 2y + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với a = 1, b = c = 0.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 0 – 0 = 1 > 0$.

Vì vậy phương trình (C) đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn (C) có tâm I(1; 0).

Ta có $1^2 + 1^2 – 2.1 = 0$.

Suy ra M ∈ (C).

Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm M(3; –1) là:

$(1 – 3)(x – 3) + (0 + 1).(y + 1) = 0$.

$\Leftrightarrow –2.(x – 3) + y – 1 = 0$.

$\Leftrightarrow –2x + y + 5 = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $–2x + y + 5 = 0$.

b) Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = 1$, $b = –2$, $c = 4$.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 4 – 4 = 1 > 0$.

Vì vậy phương trình (C) đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn (C) có tâm I(1; –2), bán kính R = 1.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm.

Gọi k_d là hệ số góc của d.

Phương trình Δ: $x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Suy ra Δ có hệ số góc $k_\Delta = -\frac{1}{2}$.

Ta có $d \perp \Delta$.

Suy ra $k_d.k_\Delta = –1$.

$\Leftrightarrow k_d.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$

$\Leftrightarrow k_d = 2.$

Khi đó phương trình d có dạng: y = 2x + m hay 2x – y + m = 0.

Ta có d là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Ta suy ra d(I, d) = R.

$\Leftrightarrow \frac{\left|2.1-(-2)+m\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 1.$

$\Leftrightarrow \left|m+4\right| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m+4 = \sqrt{5}$ hoặc $m+4 = -\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m = -4+\sqrt{5}$ hoặc $m = -4-\sqrt{5}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến d thỏa yêu cầu bài toán có phương trình là $2x - y - 4 + \sqrt{5} = 0$ và $2x - y - 4 - \sqrt{5} = 0$.