

Chuyên đề Đạo hàm cấp hai - Toán 11

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý:

+ Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.

+ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$). Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Ví dụ 1. Với $y = 7x^4 + 8x + 12$. Tính $y^{(5)}$

Lời giải

Ta có: $y' = 28x^3 + 8$, $y'' = 84x^2$, $y''' = 168x$, $y^{(4)} = 168$, $y^{(5)} = 0$.

Vậy $y^{(5)} = 0$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động xác định bởi phương trình $s = f(t)$, trong đó $s = f(t)$ là một hàm số có đạo hàm đến cấp hai. Vận tốc tức thời tại t của chuyển động là $v(t) = f'(t)$.

Lấy số gia Δt tại t thì $v(t)$ có số gia tương ứng là Δv

Tỉ số $\Delta v / \Delta t$ được gọi là gia tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian Δt .

Nếu tồn tại: $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v / \Delta t = \gamma t$.

Ta gọi $v'(t) = \gamma t$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .

Vì $v(t) = f'(t)$ nên: $\gamma t = f''(t)$.

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t .

Ví dụ 2. Tính gia tốc tức thời của sự rơi tự do $s = 12gt^2$.

Lời giải

Ta có: $s' = gt$.

Gia tốc tức thời của sự rơi tự do là: $\gamma = s''(t) = s'(t) = g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

Vậy gia tốc tức thời của sự rơi tự do là: $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

B. Bài tập

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Hàm số $y = (2x + 5)^5$ có đạo hàm cấp 3 bằng :

A. $y''' = 80(2x + 5)^3$.

B. $y''' = 480(2x + 5)^2$.

C. $y''' = -480(2x + 5)^2$.

D. $y''' = -80(2x + 5)^3$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = 5(2x+5)^4 \cdot 2 = 10(2x+5)^4 ;$$

$$y'' = 10 \cdot 4 \cdot (2x+5)^3 \cdot (2x+5)' = 80(2x+5)^3 ;$$

$$y''' = 80 \cdot 3 \cdot (2x+5)^2 \cdot (2x+5)' = 480(2x+5)^2 .$$

Chọn đáp án B

Bài 2: Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

$$\text{A. } y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} . \quad \text{B. } y'' = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

$$\text{C. } y'' = -\frac{1}{\cos^2 x} . \quad \text{D. } y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} .$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} ;$$

$$y'' = -\frac{1}{\cos^4 x} \cdot (\cos^2 x)' = -\frac{2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

Chọn đáp án D

Bài 3: Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp 2 bằng :

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}.$

B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$

C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}.$

D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}.$

Lời giải:

Ta có: $y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2};$

$$y'' = \frac{1' \cdot (1-x)^2 - 1 \cdot [(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{0 - 1 \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Chọn đáp án B

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = (x + 1)^3$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. 6

B. 3

C. 12

D. 24

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) = 3(x+1)^2; f''(x) = 6(x+1) \Rightarrow f''(0) = 6.$$

Chọn đáp án A

Bài 5: Cho hàm số $f(x) = \sin 3x + x^2$. Giá trị $f'(\pi/2)$ bằng

A. 0

B. -1

C. -2

D. 5

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x + 2x$;

$$f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 3 + 2 = -1.$$

Chọn đáp án B

Bài 6: Cho hàm số $f(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $[-1; 2]$.

B. $(-\infty]$.

C. $\{-1\}$.

D. \emptyset .

Lời giải:

Ta có : $f'(x) = 15(x+1)^2 + 4$;

$$f''(x) = 30(x+1)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Chọn đáp án C

Bài 7: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; S tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 2$.
- B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18$ m/s.
- C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12$ m/s².
- D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Lời giải:

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t

$$s' = (t^3 - 3t^2 - 9t + 2)' = 3t^2 - 6t - 9$$

$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Chọn đáp án C

Bài 8: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; S tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 18$ m/s².
- B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 9$ m/s².

D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3\text{s}$ là $v = 24\text{ m/s}$.

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s''(4) = 18$$

$t = 4s$ là $a = 18m / s^2$.

Bài 9: Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

$$y' = \left(\frac{x}{x-2} \right)' = \frac{1 \cdot (x-2) - x \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} ;$$

$$y''' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}$$

Chọn đáp án D

Bài 10: Hàm số $y = (x^2 + 1)^3$ có đạo hàm cấp ba là:

A. $y''' = 12(x^2 + 1)$.

B. $y''' = 24(x^2 + 1)$.

C. $y''' = 24(5x^2 + 3)$.

D. $y''' = -12(x^2 + 1)$.

Lời giải:

Ta có:

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 ; y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

$$y'' = 30x^4 + 36x^2 + 6 ;$$

$$y''' = 120x^3 + 72x = 24(5x^2 + 3).$$

Chọn đáp án C

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Hàm số

A. $y'' = 0$.

B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$.

C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$.

D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

có đạo hàm cấp hai bằng?

Lời giải:

Ta có:

$$y' = (\sqrt{2x+5})' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$y'' = -\frac{(\sqrt{2x+5})'}{2x+5} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}.$$

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-3}$. Khi đó $y''' = ?$

Lời giải:

Ta có:

$$y' = -\frac{1}{(x-3)^2}; \quad y'' = -\frac{0.(x-3)^2 - 1.[(x-3)^2]'}{(x-3)^4} = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$$y''' = \frac{0.(x-3)^3 - 2.3(x-3)^2}{(x-3)^6} = -\frac{6}{(x-3)^4} \Rightarrow y'''(1) = -\frac{3}{8}.$$

Bài 3: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Tính $y'''(\frac{\pi}{3})$, $y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$

Lời giải:

Ta có : $y' = 2 \cos 2x$; $y'' = -4 \sin 2x$

$$y''' = -8 \cos 2x, \quad y^{(4)} = 16 \sin 2x$$

Suy ra :

$$y'''(\frac{\pi}{3}) = -8 \cos \frac{2\pi}{3} = 4; \quad y^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 16 \sin \frac{\pi}{2} = 16.$$

Bài 4: Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là?

Lời giải:

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5$$

$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

Bài 15: Hàm số $y = x\sqrt{x^2 + 1}$ có đạo hàm cấp 2 bằng?

Lời giải:

$$\text{Ta có: } y' = \sqrt{x^2 + 1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} ;$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{4x\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 + 1) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 + 1)x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

Bài 6:

a. Cho $f(x) = (x + 10)^6$. Tính $f'(2)$

b. Cho $f(x) = \sin 3x$.

Tính $f'(-\frac{\pi}{2})$, $f'(0)$, $f'(\frac{\pi}{18})$

Lời giải:

a. Ta có: $f(x) = 6(x + 10)^5$

$$f'(x) = 30(x + 10)^4$$

$$f'(2) = 30.12^4 = 622.080$$

b. Ta có: $f(x) = 3\cos 3x$

$$f'(x) = -9\sin 3x$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\left(\frac{3\pi}{18}\right) = -\frac{9}{2}$$

Bài 7 Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a. $y = \frac{1}{1-x}$

b. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

c. $y = \tan x$;

d. $y = \cos^2 x$;

Lời giải:

a. $y' = -\frac{1}{(1-x)^2}$

$$y'' = -\frac{[(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

b. $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

$$y'' = \frac{-[2\sqrt{(1-x)^3}]'}{4(1-x)^3} = \frac{2.3(1-x)^2}{4.2(1-x)^3\sqrt{(1-x)^3}} = \frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$$

c. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$$y'' = (1 + \tan^2 x)' = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

d. $y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cdot \cos x = -\sin 2x$

$$y'' = -2\cos 2x.$$

Bài 8 a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f'(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin \frac{1}{3}x$. Tính $f'(-\pi/2)$, $f'(0)$, $f'(\pi/8)$.

Bài 9 Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 11 - x$

b) $y = 11 - x$

c) $y = \tan \frac{1}{2}x$

d) $y = \cos 2 \frac{1}{3}x$

Bài 10 Tìm các đạo hàm sau:

a. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$ b. $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$

c. $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$ d. $y = \left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1)$

e. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ f. $y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$

$$a. y' = x^2 - x + 1$$

$$b. y' = \left[\frac{1}{x^4} \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) \right]'$$

$$= \left(\frac{1}{x^4} \right)' \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) + \frac{1}{x^4} (6x^2 - 8x + 5)$$

$$= -\frac{2}{x^5} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}$$

$$c. y' = \left[\frac{3x}{4} - \frac{6}{4} + \frac{7}{4x} \right]' = \frac{3}{4} - \frac{7}{4x^2} = \frac{3x^2 - 7}{4x^2}$$

$$d. y' = \left[\left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1) \right]'$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x \right) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - 3$$

$$e. y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$f. y' = \frac{(-2x + 7)(x^3 - 3x) - (2x - 3)(-x^2 + 7x + 5)}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - 10x + 15}{x^2(x - 3)^2}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = 2\sqrt{x} \sin x - \frac{\cos x}{x}$$

$$b. y = \frac{3 \cos x}{2x+1}$$

$$c. y = \frac{t^2 + 2 \cos t}{\sin t}$$

$$d. y = \frac{2 \cos \varphi - \sin \varphi}{3 \sin \varphi + \cos \varphi}$$

$$e. y = \frac{\tan x}{\sin x + 2}$$

$$f. y = \frac{\cot x}{2\sqrt{x}-1}$$

Bài 2

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3)f'(3)$.

Bài 3 Hàm số $y = (2x+5)^5$ có đạo hàm cấp 3 bằng?

Bài 4 Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp 2 bằng?

$$y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$$

Bài 5 Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp 2 bằng?

Bài 6 Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Giá trị $f'(0)$ bằng?

Bài 7 Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Giá trị $f'(\pi/2)$ bằng?

Bài 8 Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; S tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng ?

Bài 9 Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; S tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

$$y'''(\frac{\pi}{3}), y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$$

Bài 10 Cho hàm số $y = \sin 2x$. Tính