

Bài 4. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A. Lý thuyết

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

Ví dụ:

$$\begin{cases} x + 2y < 9 \\ y - 2x > 9 \end{cases}$$
 là một hệ bất phương trình hai ẩn gồm 2 bất phương trình $x + 2y < 9$ và $y - 2x > 9$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 5 \\ x - y > 4 \end{cases}$$
 không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bởi $x^2 + y^2 < 5$ là bất phương trình bậc hai 2 ẩn.

- Cho hệ bất phương trình hai ẩn
$$\begin{cases} x + y > 9 \\ x - y < 9 \end{cases}$$

Cặp $(x; y) = (10; 2)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 9$ và cũng là nghiệm của bất phương trình $x - y < 9$. Nên cặp $(x; y) = (10; 2)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

- Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:
 - + Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
 - + Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$$

:

Bước 1: Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ và gạch bỏ phần miền còn lại.

- Đường thẳng $x = 0$ là trục tọa độ Oy.
- Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy nằm bên phải trục Oy.

Bước 2: Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox.

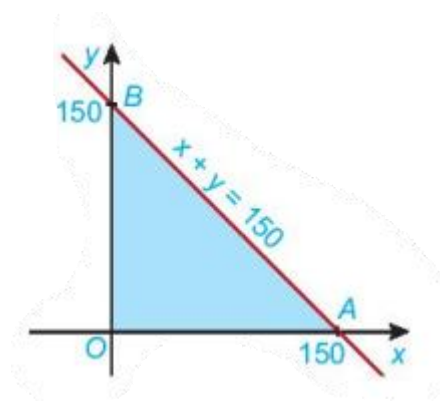
Bước 3: Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$:

- Vẽ đường thẳng d: $x + y = 150$.

- Vì $0 + 0 \leq 150$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 150$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O .

Từ đó ta có miền nghiệm tô màu xanh chính là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Nhận xét: Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là tọa độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$, tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

Ví dụ: Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y \leq 120 \end{cases} \quad \text{và}$$

$F(x; y) = 3,5x + 2y$. Tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$.

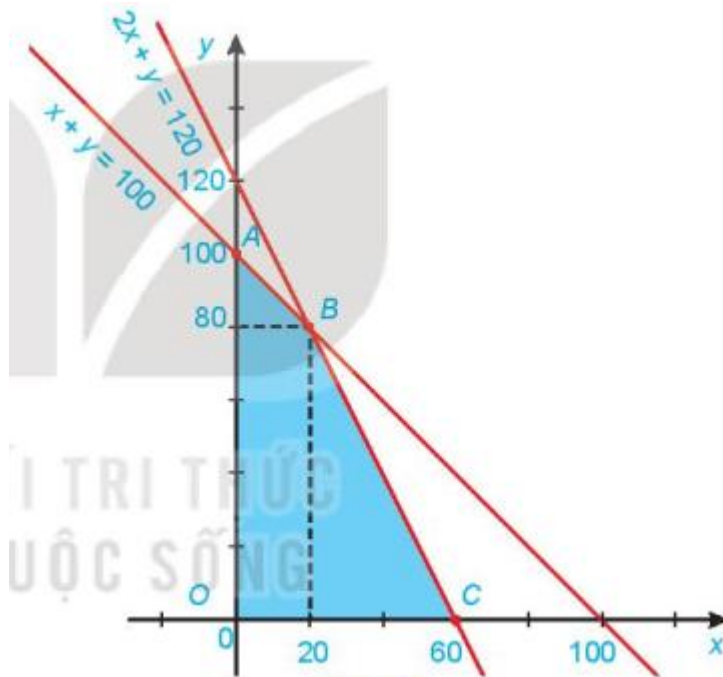
Hướng dẫn giải:

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$.
- Đường thẳng $x = 0$ là trục tọa độ Oy.
- Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy nằm bên phải trục Oy.
- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox.
- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 100$:
 - + Vẽ đường thẳng $d_1: x + y = 100$.
 - + Vì $0 + 0 \leq 100$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 100$.
- Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 chứa gốc tọa độ O.
- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 120$:
 - + Vẽ đường thẳng $d_2: 2x + y = 120$.
 - + Vì $2 \cdot 0 + 0 \leq 120$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 120$.
- Do đó, miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 120$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 chứa gốc tọa độ O.

Từ đó ta có miền nghiệm tô màu xanh chính là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Miền nghiệm là miền tứ giác OABC với $O(0;0)$, $A(0;100)$, $B(20;80)$ và $C(60;0)$.



Bước 2: Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của tứ giác

$$F(O) = 0; F(A) = 200; F(B) = 230; F(C) = 210.$$

Bước 3: So sánh các giá trị thu được ở Bước 2, kết luận giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ là 230.

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập tự luận

Bài 1. Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$$a) \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$c) 2x + y > 0$$

$$d) \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y > 10^{10} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có 2 bất phương trình $x < 0$ và $y > 0$ đều là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có bất phương trình $x^2 < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- $2x + y > 0$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chỉ có một bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y > 10^{10} \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có 2 bất phương trình $x - y < 0$ và $x + y > 10^{10}$ đều là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vậy có hệ $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y > 10^{10} \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ 2x + y \leq 180 \end{cases}$

a) Tìm 2 nghiệm của hệ trên.

b) Cho $F(x; y) = 2x + 2y$. Tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$.

Hướng dẫn giải

a) Chọn $(x; y) = (1; 1)$.

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào bất phương trình $x \geq 0$ ta được $1 \geq 0$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$.

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào bất phương trình $y \geq 0$ ta được $1 \geq 0$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$.

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào bất phương trình $x + y \leq 120$ ta được $1 + 1 \leq 120$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 120$.

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào bất phương trình $2x + y \leq 180$ ta được $2 \cdot 1 + 1 \leq 180$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 180$.

Vậy $(x; y) = (1; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ 2x + y \leq 180 \end{cases}.$$

Tương tự ta chọn được $(x; y) = (2; 2)$ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ

đã cho. Do đó $(2; 2)$ là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ 2x + y \leq 180 \end{cases}.$$

Vậy 2 nghiệm của hệ trên là $(1; 1)$ và $(2; 2)$.

b)

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$.

+ Đường thẳng $x = 0$ là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy nằm bên phải trục Oy.

- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox .

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 120$:

+ Vẽ đường thẳng $d_1: x + y = 120$.

+ Vì $0 + 0 \leq 120$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 120$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 120$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 chứa gốc tọa độ O .

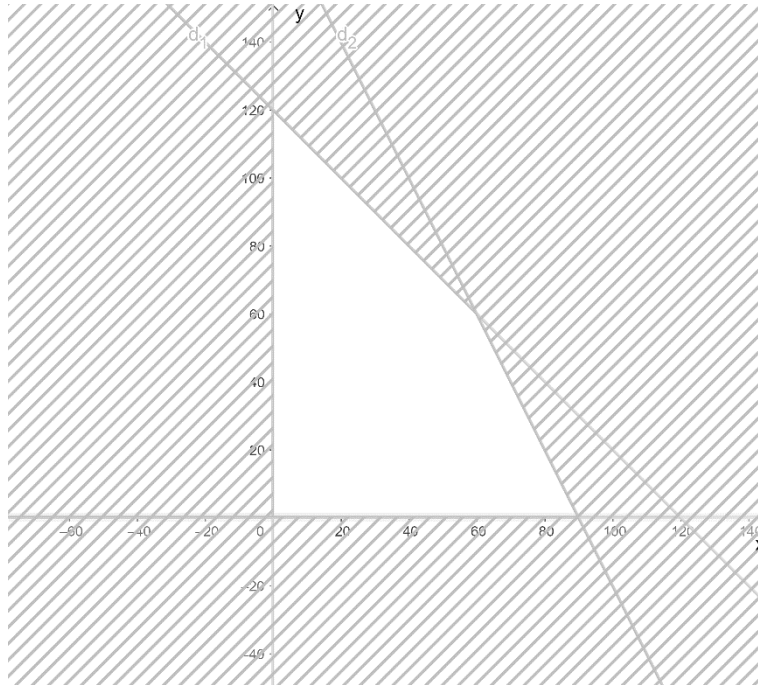
- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 180$:

+ Vẽ đường thẳng $d_2: 2x + y = 180$.

+ Vì $2 \cdot 0 + 0 \leq 180$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 180$.

Do đó, miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 180$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 chứa gốc tọa độ O .

Từ đó ta có miền nghiệm không bị gạch chính là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2y < 0 \\ x - 4y > -6 \end{cases}$. Hỏi đây có phải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không? Khi cho $y = 0$, x có thể nhận các giá trị nguyên nào?

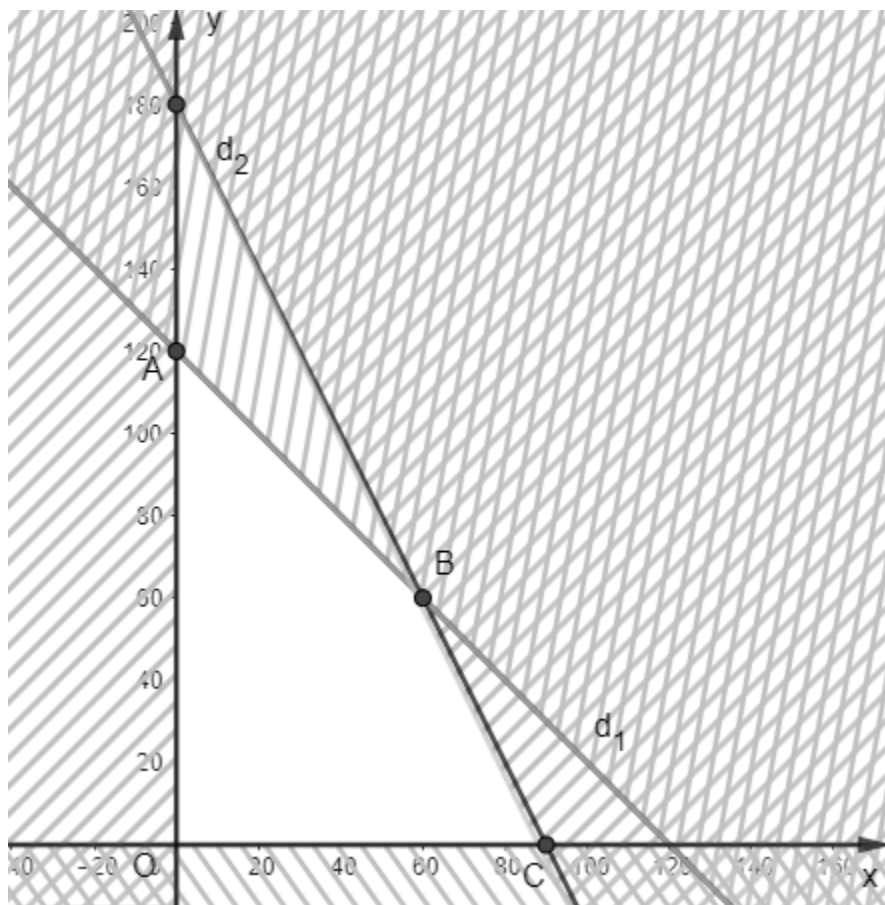
Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x + 2y < 0 \\ x - 4y > -6 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bởi vì có 2 bất phương trình $x +$

$2y < 0$ và $x - 4y > -6$ là bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Khi $y = 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} x < 0 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < x < 0$

Vậy x có thể nhận các giá trị nguyên là: $\{-5; -4; -3; -2; -1\}$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác OABC với:

$O(0;0)$, $A(0;120)$, $B(60;60)$, $C(90;0)$.

Ta có: $F(O) = 0$; $F(A) = 240$; $F(B) = 240$; $F(C) = 180$.

Vậy giá trị lớn nhất của $F(x;y)$ là 240 khi $(x;y) = (60;60)$ hoặc $(0;120)$.

B2. Bài tập trắc nghiệm

Bài 4. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hệ $\begin{cases} x + y \geq -1 \\ y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn;

B. Hệ $\begin{cases} x \geq 1 + y \\ 5x + y < 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn;

C. Hệ $\begin{cases} x + 1 + y > 0 \\ x^2 + y < 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn;

D. Hệ $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y < 7 \\ x + 3y \leq 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn;

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

+ Vì $\begin{cases} x + y \geq -1 \\ y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ chứa bất phương trình bậc hai $y^2 - 1 \leq 0$ nên hệ này không phải là

hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Do đó khẳng định A đúng.

+ Vì $\begin{cases} x \geq 1 + y \\ 5x + y < 0 \end{cases}$ chứa hai bất phương trình $x \geq 1 + y$ và $5x + y < 0$ đều là các bất

phương trình bậc nhất hai ẩn, nên hệ này là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Do đó khẳng định B đúng.

+ Vì $\begin{cases} x + 1 + y > 0 \\ x^2 + y < 0 \end{cases}$ chứa bất phương trình bậc hai $x^2 + y < 0$ nên hệ này không phải

là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Do đó khẳng định C sai.

+ Vì $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y < 7 \\ x + 3y \leq 0 \end{cases}$ chứa hai bất phương trình $\frac{1}{2}x + y < 7$ và $x + 3y \leq 0$ đều là các

bất phương trình bậc nhất hai ẩn nên hệ này là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Do đó khẳng định D đúng.

Vậy ta chọn đáp án C.

Bài 5. Cặp số $(0; -3)$ là nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

$$A. \begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + 3y \leq 3x - 4 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} 2x - y > 0 \\ 2x + y > 1 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} -x - 4y > -3 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 5y \geq -1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

+ Ta có: $0 - (-3) = 3 > 1$ và $0 + 3 \cdot (-3) < 3 \cdot 0 - 4$ ($-9 < -4$) là mệnh đề đúng.

Do đó cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của bất phương trình $x - y \leq -1$.

Vậy nên cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + 3y \leq 3x - 4 \end{cases}$.

+ Ta có: $2 \cdot 0 - (-3) = 3 > 0$ và $2 \cdot 0 + (-3) = -3 < 1$.

Do đó cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của bất phương trình $2x + y > 1$.

Vậy nên cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ 2x + y > 1 \end{cases}$.

+ Ta có: $-0 - 4 \cdot (-3) = 12 > -3$ và $2 \cdot 0 + (-3) = -3 < 2$.

Do đó cặp số $(0; -3)$ là nghiệm của cả hai bất phương trình $-x - 4y > -3$ và $2x + y \leq 2$.

Vậy nên cặp số $(0; -3)$ là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x - 4y > -3 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$.

+ Ta có: $2 \cdot 0 - (-3) = 3 > -3$ và $5 \cdot (-3) = -15 < -1$.

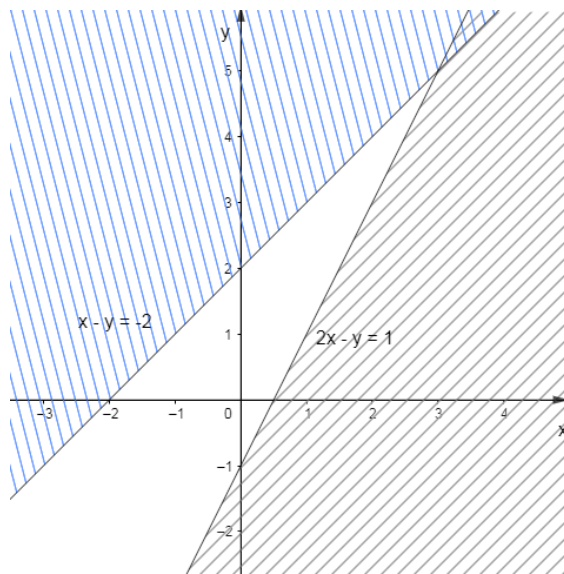
Do đó cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của cả hai bất phương trình $2x - y \leq -3$ và $5y \geq -1$.

Vậy nên cặp số $(0; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 5y \geq -1 \end{cases}$.

Vậy nên cặp số $(0; -3)$ là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x - 4y > -3 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$.

Do đó ta chọn đáp án C.

Bài 6. Miền không gạch chéo trong hình vẽ dưới đây (không chứa bờ), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x - y \geq -2 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y > -2 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y < -2 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y < -2 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Đường thẳng $x - y = -2$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

Xét điểm $O(0; 0)$, ta có: $0 - 0 = 0 > -2$.

Mặt khác điểm O thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình cần tìm. Do đó ta có bất phương trình thứ nhất của hệ là $x - y > -2$.

Đường thẳng $2x - y = 1$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

Xét điểm $O(0; 0)$, ta có: $2.0 - 0 = 0 < 1$.

Mặt khác điểm O thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình cần tìm. Do đó ta có bất phương trình thứ hai của hệ là $2x - y < 1$.

Suy ra hệ cần tìm là:
$$\begin{cases} x - y > -2 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$$

Ta chọn đáp án B.