Công thức tìm hệ số trong khai triển

1. Tổng hợp lý thuyết

Xét khai triển: (với a,b là các hệ số; x,y là biến)

$$(ax+by)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ax)^{n-k}(by)^k$$
$$=C_n^0a^nx^n+C_n^1a^{n-1}b.x^{n-1}y+C_n^2a^{n-2}b^2.x^{n-2}y^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}.xy^{n-1}+C_n^nb^ny^n$$

- Số hạng thứ k + 1 của khai triển: $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^kx^{n-k}y^k$

- Hệ số của số hạng thứ k + 1 của khai triển: $C_n^ka^{n-k}b^k$

2. Các công thức

* Với khai triển $(ax^p + bx^q)^n$ (p,q là các hằng số)

Ta có: $\left(ax^p+bx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(ax^p\right)^{n-k}\left(bx^q\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^kx^{np-pk+qk}$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa mãn: np – pk + qk = m

Từ đó tìm $k=\dfrac{m-np}{q-p}$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^ka^{n-k}.b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

* Với khai triển $P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n$ (p,q là các hằng số)

Ta có: $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(bx^p\right)^{k-j}\left(cx^q\right)^j$$

Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m.

* Chú ý:

- Nếu k không nguyên hoặc k > n thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.
- Nếu hỏi hệ số không chứa x tức là tìm hệ số chứa x^0.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển: $(1 – 2x)^{15}$

Lời giải

Khai triển: $(1-2x)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(-2x)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(-2)^kx^k$

Cần tìm hệ số của x^9 nên k = 9.

Vậy hệ số của x^9 trong khai triển là: $C_{15}^{9}\left(-2\right)^{9}=-2562560$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số không chứa x trong khai triển: $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$

Lời giải

Khai triển:

$$\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k\left(2x\right)^{6-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}C_6^k 2^{6-k}x^{6-k}\left(-1\right)^k\left(x^{-2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{6}C_6^k 2^{6-k}\left(-1\right)^k x^{6-3k}$$

Cần tìm hệ số không chứa x nên $6-3k=0\Leftrightarrow k=2$

Vậy hệ số không chứa x trong khai triển là: $C_6^2 2^{6-2}.\left(-1\right)^2=240$.