

Chuyên đề Phép tịnh tiến - Toán 11

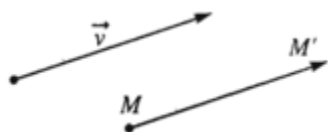
A. Lý thuyết

I. Định nghĩa.

- **Định nghĩa:** Trong mặt phẳng, cho vector \vec{v} . Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là *phép tịnh tiến* theo vector \vec{v} .

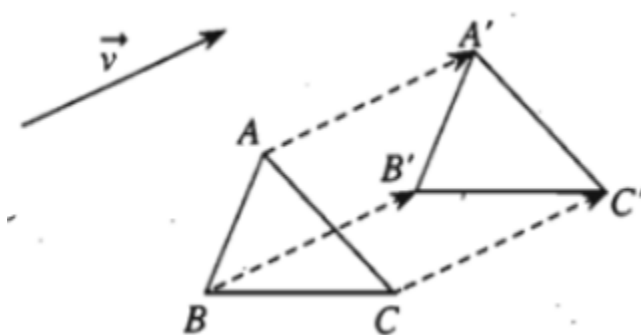
- Phép tịnh tiến theo vector thường được kí hiệu là được gọi là *vector tịnh tiến*.

Vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



- Phép tịnh tiến theo vector – không chính là *phép đồng nhất*.

- **Ví dụ 1.** Cho hình vẽ sau:



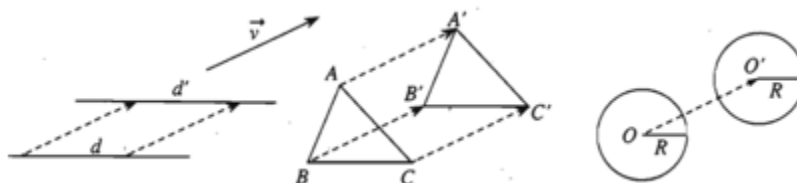
Ta có: $T_{\vec{v}}(A) = A'$; $T_{\vec{v}}(B) = B'$; $T_{\vec{v}}(C) = C'$.

II. Tính chất

- **Tính chất 1.** Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$; $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

- **Tính chất 2.** Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



III. Biểu thức tọa độ.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vector $\vec{v} \rightarrow (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$ ta có $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm M qua tịnh tiến theo vector $\vec{v} \rightarrow$.

Khi đó:

$$\vec{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow x' - x = a \quad y' - y = b \Rightarrow x' = x + a \quad y' = y + b$$

đây chính là *biểu thức tọa độ* của phép tịnh tiến $T_{\vec{v} \rightarrow}$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1; -2)$. Phép tịnh tiến theo vector biến A thành điểm A' có tọa độ là bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi tọa độ điểm $A' = (x'; y')$.

$$\overrightarrow{AA'} = (x' - 1; y' + 2)$$

$$T_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 1)$$

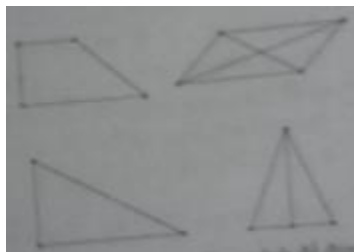
Vậy tọa độ điểm $A'(2; 1)$.

B. Bài tập

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Trong mặt phẳng, hình nào sau đây có trục đối xứng?

- A. hình thang vuông
- B. hình bình hành
- C. hình tam giác vuông không cân
- D. hình tam giác cân



Lời giải:

Đáp án: D

Tam giác cân có trục đối xứng là đường cao (cũng là trung trực, phân giác).

Bài 2: Trong mặt phẳng, cho hình thang cân ABCD có $AD = BC$. Tìm mệnh đề đúng :

A. có phép đối xứng trục biến $AD \rightarrow$ thành $BC \rightarrow$ nên $AD \rightarrow = BC \rightarrow$

B. có phép đối xứng trục biến $AC \rightarrow$ thành $BD \rightarrow$ nên $AC \rightarrow = BD \rightarrow$

C. có phép đối xứng trục biến AB thành CD nên $AB \parallel CD$

D. có phép đối xứng trục biến DA thành CB nên $DA = CB$

Lời giải:

Đáp án: D

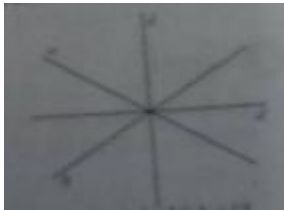
Bài 3: Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng a và b tạo với nhau góc 60° . Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b .

A. một

B. hai

C. ba

D. bốn



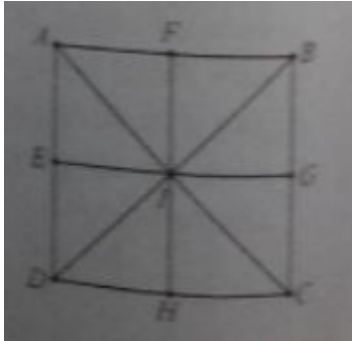
Lời giải:

Đáp án: B

Hai đường phân giác của góc tạo bởi a và b .

Nhận xét: Giả thiết góc 60° chỉ để gây nhiễu

Bài 4: Cho hình vuông ABCD tâm I. gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh DA, AB, BC, CD. Phép đối xứng trục AC biến:



A. $\triangle IED$ thành $\triangle IGC$

B. $\triangle IFB$ thành $\triangle IGB$

C. $\triangle IBG$ thành $\triangle IDH$

D. $\triangle IGC$ thành $\triangle IFA$

Lời giải:

Đáp án: C

Tìm ảnh của từng điểm qua phép đối xứng trục AC: điểm I biến thành I; B thành D; G thành H. Chọn đáp án C

Bài 5: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(-1;3)$. Phép đối xứng trục Ox biến M thành M' thì tọa độ M' là:

A. $M'(-1;3)$

B. $M'(1;3)$

C. $M'(-1;-3)$

D. $M'(1;-3)$

Lời giải:

Đáp án: C

$(x' = x; y' = -y)$. Chọn đáp án C

Bài 6: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $x - 2y + 4 = 0$.
Phép đối xứng trục Ox biến d thành d' có phương trình:

A. $x - 2y + 4 = 0$

B. $x + 2y + 4 = 0$

C. $2x + y + 2 = 0$

D. $2x - y + 4 = 0$

Lời giải:

Đáp án: B

Phép đối xứng trục Ox có

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

thay vào phương trình d được $x' + 2y' + 4 = 0$ hay $x + 2y + 4 = 0$. Chọn đáp án B

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình:

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 6$. Phép đối xứng trục Oy biến (C) thành (C') có phương trình

A. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 36$

B. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 6$

C. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$

D. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 6$

Lời giải:

Đáp án: B

Phép đối xứng trục Oy biến tâm $I(3;1)$ của (C) thành $I'(-3;1)$; bán kính không thay đổi. Chọn đáp án B.

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Điểm M là ảnh của điểm nào trong bốn điểm sau qua phép đối xứng trục Oy?

A. $A(3;2)$

B. $B(2; -3)$

C. $C(3;-2)$

D. $D(-2;3)$

Lời giải:

Đáp án: D

Bài 9: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Tam giác đều có vô số trục đối xứng

B. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là đường tròn

C. Hình gồm hai đường thẳng vuông góc có vô số trục đối xứng

D. Hình tròn có vô số trục đối xứng

Lời giải:

Đáp án: D

Phương án A. Tam giác đều chỉ có ba trục đối xứng là ba đường cao.

Phương án B. Đường thẳng cũng có vô số trục đối xứng (là đường thẳng bất kì vuông góc với đường thẳng đã cho).

Phương án C. Hình gồm hai đường thẳng vuông góc có bốn trục đối xứng (là chính hai đường thẳng đó và hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng đó).

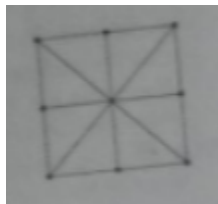
Bài 10: Trong mặt phẳng, hình vuông có mấy trục đối xứng?

A. một

B. hai

C. ba

D. bốn



Lời giải:

Đáp án: D

Hai đường chéo và hai đường trung bình.

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - 8y + 11 = 0$.

Phép đối xứng trục Oy biến d thành d' có phương trình?

Lời giải:

Phép đối xứng trục Oy có:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình d ta được $-2x' - 8y' + 11 = 0$ hay $2x + 8y - 11 = 0$

Bài 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x-2y+2=0$ và đường thẳng l có phương trình : $x - y + 1 = 0$. Phép đối xứng trục l biến d thành d' có phương trình

Lời giải:

Gọi giao điểm của d và l là điểm I. Tọa độ điểm I là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$$

Lấy A(4; 3) thuộc d. Phương trình đường thẳng a qua A và vuông góc với đường thẳng l có vectơ chỉ phương là: $\vec{u_a} = \vec{n_l} = (1;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_a} = (1;1)$

Phương trình đường thẳng a: $1(x-4) + 1.(y-3) = 0$ hay $x + y - 7 = 0$

Gọi H là giao điểm của a và l. Tọa độ H là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow H(3;4)$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua H. Khi đó, H là trung điểm của AA'.

Suy ra:
$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 5 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 5)$$

Phương trình đường thẳng IA' : đi qua $I(0; 1)$ và có vectơ chỉ phương $IA' \rightarrow (2; 4) \Rightarrow n \rightarrow (2; -1)$.

Phương trình IA' : $2(x - 0) - 1(y - 1) = 0$ hay $2x - y + 1 = 0$ chính là phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua l .

Bài 3: Cho hai điểm A, B cùng phía với đường thẳng d . gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên đường thẳng d . Tìm vị trí điểm C trên d để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Lời giải:

Lấy A'' đối xứng với A qua d .

Chu vi tam giác $ABC = AB + AC + BC = AB + CA'' + CB$

Vì độ dài AB không đổi nên để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi và chỉ khi $CA'' + CB$ nhỏ nhất.

Lại có: $CA'' + CB \geq A''B$

Do đó, để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi và chỉ khi $CA'' + CB = A''B$. Khi đó: B, C, A'' thẳng hàng.

Bài 4: Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến một hình chữ nhật thành chính nó?

Lời giải:

Hai đường thẳng đi qua tâm hình chữ nhật và vuông góc với hai cặp cạnh đối diện của nó.

Bài 5: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Phép đối xứng trục Oy biến d thành d' có phương trình?

Lời giải:

Phép đối xứng trục Oy có:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình d ta được $-x' + y' - 2 = 0$ hay $-x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

Bài 6: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) có phương trình : $y = 6x^2 - 3x + 13$.

Phép đối xứng trục Ox biến (P) thành (P') có phương trình:

Lời giải:

Phép đối xứng trục Ox có:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình (P) ta được : $-y' = 6x'^2 - 3x' + 13$ hay $y = -6x^2 + 3x - 13$

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$. Phép đối xứng trục Oy biến (C) thành (C') có phương trình:

Lời giải:

Phép đối xứng qua trục Oy có :

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình (C) ta được $x'^2 + y'^2 + 4x' + 5y' + 1 = 0$ hay $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$

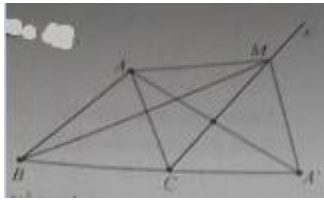
Bài 8: Trên tia phân giác ngoài Cx của góc C của tam giác ABC lấy điểm M không trùng với C. tìm mệnh đề đúng nhất:

Lời giải:

Lấy A' đối xứng A qua Cx . Ta có:

$$MA + MB = MA' + MB > BA' = CB + CA' = CB + CA$$

Nhận xét: Bất đẳng thức tam giác: Trong một tam giác bất kì luôn có tổng hai cạnh lớn hơn cạnh thứ ba (chú ý giả thiết : M không trùng với C).



Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = 4x^2 - 7x + 3$. Phép đối xứng trục Oy biến (P) thành (P') có phương trình?

Lời giải:

Phép đối xứng trục Oy có:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình (P) được $y = 4x'^2 + 7x' + 3$ hay $y = 4x^2 + 7x + 3$

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1; -2)$ và $B(3; 1)$. Tìm ảnh của A, B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

Lời giải:

+ $A'(x_1; y_1)$ đối xứng với $A(1; -2)$ qua trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -(-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A'(1; 2).$$

+ $B'(x_2; y_2)$ đối xứng với $B(3; 1)$ qua trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow B'(3; -1).$$

* Qua phép đối xứng trục Ox , biến điểm A và B lần lượt thành 2 điểm A' và B' . Nên biến đường thẳng AB thành đường thẳng $A'B'$.

+ Đường thẳng $A'B'$ đi qua $A'(1;2)$ và nhận vectơ chỉ phương là $A'B' \rightarrow (2, -3)$ nên vectơ pháp tuyến là: $(3; 2)$

Phương trình đường thẳng $A'B'$ là:

$$3(x-1) + 2(y-2) = 0 \text{ hay } 3x + 2y - 7 = 0$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy .

Bài 2 Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng ?

Bài 3 Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(1; -2)$ và $B(3; 1)$. Tìm ảnh của A , B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox .

Bài 4 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy .

Bài 5 Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng?



Bài 6 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm . Điểm M (2;3) là ảnh của điểm nào trong bốn điểm sau qua phép đối xứng trục ?

Bài 7 Trong mặt phẳng Oxy cho A(1; -2) và B(3; 1). Tìm ảnh của A, B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

Bài 8 Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng a và b tạo với nhau góc 60^0 . Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b.

Bài 9 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $x - 2y + 4 = 0$. Phép đối xứng trục Ox biến d thành d' có phương trình

Bài 10 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2;3). Điểm M là ảnh của điểm nào trong bốn điểm sau qua phép đối xứng trục Oy?