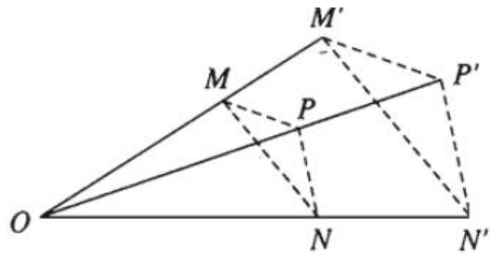
Bài 7. Phép vị tự

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa.

- Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là *phép vị tự tâm* O, tỉ số k.



Phép vị tự tâm O tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,\, k)}$.

- Nhận xét:

1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

2) Khi k = 1, phép vị tự là phép đồng nhất.

3) Khi k = -1, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.

4) $M' = V_{(O,\, k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}(M')$.

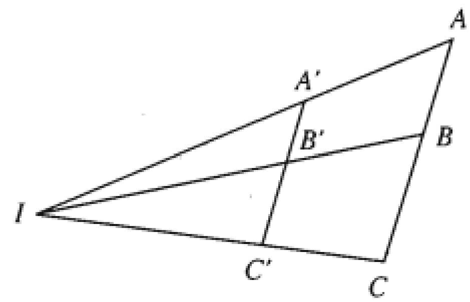
II. Tính chất

- Tính chất 1. Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M’, N’ thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và M’N’ = |k|.MN.

- Tính chất 2.

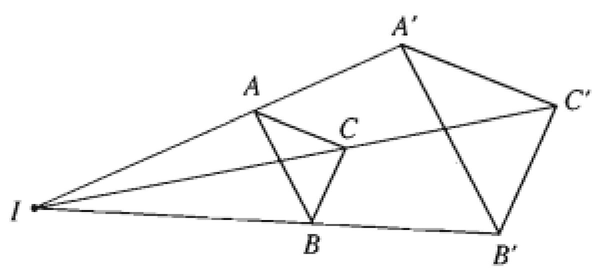
Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

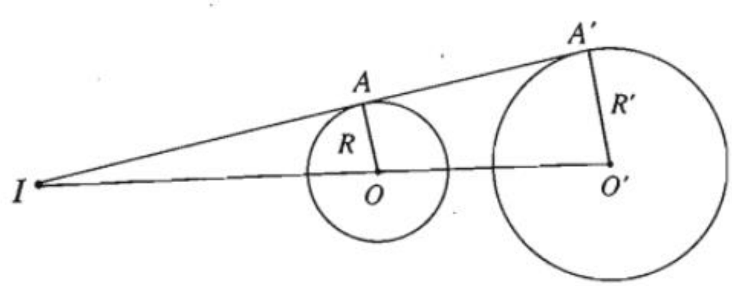


b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.



d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính |k|.R.



III. Tâm vị tự của hai đường tròn.

- **Định lí**: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

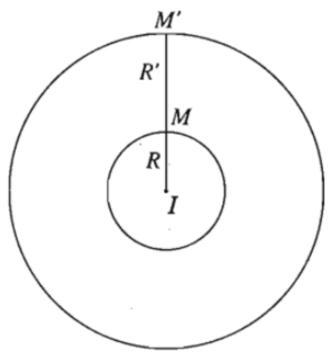
Tâm của phép vị tự được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn*.

- Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Cho hai đường tròn (I ; R) và (I’; R’) có ba trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp I trùng với I’

Khi đó, phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{-R'}{R}$ biến đường tròn (I ; R) thành đường tròn (I ; R’).

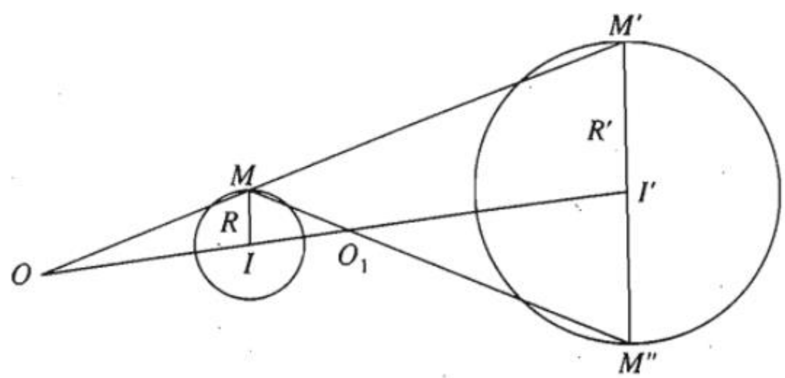


+ Trường hợp I khác I’ và R ≠ R’

Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn (I ; R), đường thẳng qua I’ song song với IM cắt đường tròn (I’ ; R’) tại M’ và M”.

Giả sử M, M’ nằm cùng phía đối với đường thẳng II’ còn M, M” nằm khác phía đối với đường thẳng II’.

Giả sử đường thẳng MM’ cắt đường thẳng II’ tại điểm O nằm ngoài đoạn thẳng II’, còn đường thẳng MM” cắt đường thẳng II’ tại điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng II’.

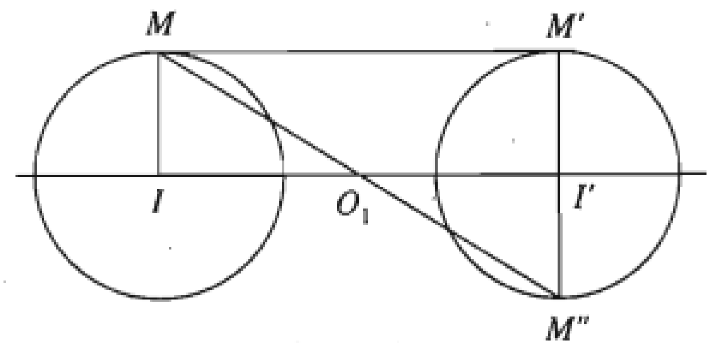


Khi đó, phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn (I ; R) thành đường tròn (I’; R’).

Ta gọi O là *tâm vị tự ngoài* còn O_1 là *tâm vị tự trong* của hai đường tròn nói trên.

+ Trường hợp I khác I' và R = R'.

Khi đó, MM' // II' nên chỉ có phép vi tự tâm O_1 tỉ số $k = \frac{-R}{R} = -1$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I' ; R'). Đây chính là phép đối xứng tâm O_1.



Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ và (C'): $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$. Xác định tâm vị tự của hai đường tròn?

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(2 ; 1),bán kính R = 1;

Đường tròn (C') có tâm I'(8 ; 4), bán kính R' = 4.

Do I $\neq$ I' và R $\neq$ R' nên có hai phép vị tự $V_{(J, 2)}$ và $V_{(J, -2)}$ biến (C) thành (C').

Gọi J(x ; y)

Với k = 2 khi đó $\overrightarrow{JI'} = 2\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=2(2-x) \\ 4-y=2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$.

Suy ra: J(– 4; – 2)

Tương tự với k = – 2, tính có J'(4; 2).

Vậy có 2 phép vị tự thỏa mãn đầu bài.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác A’B’C’ thành tam giác ABC?

Lời giải :

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}.$

Bởi vậy phép vị tự $V_{(G;\,-2)}$ biến tam giác A’B’C’ thành tam giác ABC.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M(– 2 ; 4). Phép vị tự tâm O(0 ; 0) tỉ số k = – 2 biến điểm M thành điểm nào?

Lời giải:

Nếu $V_{(O;k)} : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ thì

$$\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2x = 4 \\ y' = -2y = -8 \end{cases} \Rightarrow M'(4\,;-8).$$

Vậy điểm cần tìm là M’(4 ; – 8).

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x + y – 3 = 0. Phép vị tự tâm O(0; 0) tỉ số k = 2 biến d thành đường thẳng có phương trình là gì?

Lời giải:

Thực hiện phép vị tự tâm O(0; 0) tỉ số k = 2 biến d thành đường thẳng d’. Suy ra d’ song song hoặc trùng với d.

Do đó, d’ có dạng 2x + y + c = 0 (1)

Lấy điểm M(1 ; 1) thuộc d.

Gọi $V_{(O\,;\,2)}(M) = M'(x'\,;\,y')$

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x = 2 \\ y' = 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow M'(2\,;\,2).$$

Điểm M’ thuộc d’ nên thay tọa độ M’ vào d’ ta được :

2.2 + 2 + c = 0 nên c = – 6.

Vậy phương trình đường thẳng d’ cần tìm là 2x + y – 6 = 0.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I(– 1 ; 2) tỉ số k = 3.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm A(1; 1), bán kính R = 2.

Gọi $A'(x';y') = V_{(I;3)}(A) \Rightarrow \overrightarrow{IA'} = 3\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = 3(1+1) \\ y'-2 = 3(1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = -1 \end{cases}$

Do đó, A'(5 ; – 1)

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự V thì (C') có tâm A', bán kính R' = 3R = 6.

Vậy phương trình (C'): $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 36$.