

Dạng 1: Góc và cung lượng giác

1. Lý thuyết

a. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn:

* **Đơn vị radian:** Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian. 1 radian còn viết tắt là 1 rad.

Vì tính thông dụng của đơn vị radian người ta thường không viết radian hay rad sau số đo của cung và góc.

* **Độ dài cung tròn. Quan hệ giữa độ và radian:**

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \text{ suy ra } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \text{ và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

* **Độ dài cung tròn**

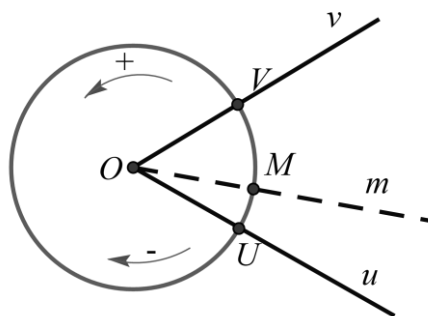
Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì độ dài $l = R\alpha$.

b. Góc và cung lượng giác:

* **Đường tròn định hướng:** Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều dương (cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm).

* **Góc, cung lượng giác và số đo của chúng.**

Cho đường tròn định hướng tâm O và hai tia Ou, Ov lần lượt cắt đường tròn tại U và V. Tia Om cắt đường tròn tại M, tia Om chuyển động theo một chiều (âm hoặc dương) quay quanh O khi đó điểm M cũng chuyển động theo một chiều trên đường tròn.



- Góc lượng giác: Tia Om quay xung quanh gốc O từ vị trí Ou đến vị trí Ov. Ta nói tia O đã tạo ra một góc lượng giác có tia đầu là Ou, tia cuối là Ov. Kí hiệu (Ou, Ov)

- Cung lượng giác: Điểm M chuyển động theo một chiều từ điểm U đến trùng với điểm V thì ta nói điểm M đã vạch nên một cung lượng giác có điểm đầu U, điểm cuối V. Kí hiệu là \widehat{UV}

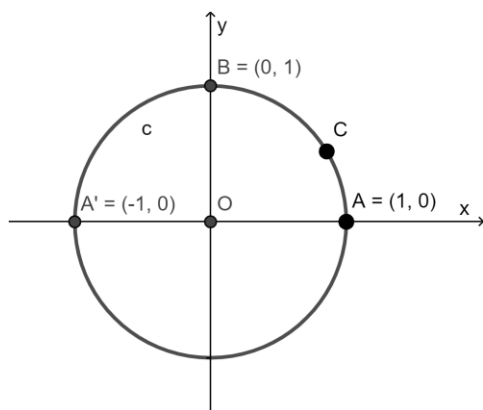
- Số đo cung lượng giác:

+) Số đo của một cung lượng giác \widehat{UV} ($U \neq V$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung \widehat{UV} là $sđ\widehat{UV}$

+) Nếu một cung lượng giác có số đo α° (hay $\alpha \text{ rad}$) thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo dạng $\alpha^\circ + k360^\circ$ (hay $\alpha + k2\pi$) với $k \in \mathbb{Z}$.

+) Số đo của góc lượng giác (OU, OV) là số đo của cung lượng giác \widehat{UV} tương ứng

c. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác:



Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có tâm O bán kính $R = 1$ trong hệ tọa độ Oxy. Ta lấy điểm A(1; 0) là điểm gốc của đường tròn đó.

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo bằng α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm gốc là điểm A(1;0) và điểm ngọn C sao cho $sđ\widehat{AC} = \alpha$.

2. Các dạng bài

Dạng 1.1: Cách đổi độ sang radian và radian sang độ

a. Phương pháp giải:

* Đổi độ sang radian:

Áp dụng lý thuyết: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, ta suy ra: $\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

* Đổi radian sang độ:

Áp dụng lý thuyết: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, ta suy ra $\beta \text{ rad} = \left(\beta \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ$

Chú ý: Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Đổi số đo của các góc sau sang radian

a. 180°

b. $22^\circ 30'$

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức: $\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

a. $180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \pi$

b. $22^\circ 30' = 22,5^\circ = 22,5 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 2: Đổi số đo của các góc sau sang độ:

a. $\frac{2\pi}{5}$

b. $\frac{\pi}{9}$

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức: $\beta \text{ rad} = \left(\beta \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ$

a. $\frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \left(\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 72^\circ$

b. $\frac{\pi}{9} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 20^\circ$

Dạng 1.2: Cách tính độ dài cung tròn

a. Phương pháp giải:

Áp dụng công thức: $l = R\alpha$, trong đó: l là độ dài cung tròn, R là bán kính đường tròn, α là số đo bằng rad của cung.

Trường hợp α có số đo bằng độ, ta có công thức: $l = R \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180}$

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$. Tìm độ dài cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

Hướng dẫn:

Độ dài cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ là: $l = R\alpha = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 5 \text{ cm}$

Ví dụ 2: Một đường tròn có bán kính $R = 10 \text{ cm}$. Tìm độ dài cung tròn có số đo bằng 40° trên đường tròn.

Hướng dẫn:

Độ dài của cung tròn có số đo bằng 40° là: $l = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 40}{180} \cdot 10 \approx 7 \text{ cm}$.

3. Bài tập tự luyện

a. Tự luận

Câu 1: Tìm số đo theo đơn vị radian của góc 315° .

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } 315^\circ = \frac{315}{180} \cdot \pi = \frac{7\pi}{4} \text{ (radian)}.$$

Câu 2: Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$

Hướng dẫn:

$$\text{Để } 10\pi < a < 11\pi \text{ thì } \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \Rightarrow k = 5.$$

Câu 3: Góc có số đo $\frac{\pi}{24}$ đổi sang độ là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{24} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 7,5^\circ = 7^\circ 30'.$$

Câu 4: Đổi góc $63^\circ 48'$ bằng (với $\pi = 3,1416$) sang radian

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có } 63^\circ 48' = 63,8^\circ = \frac{63,8 \times 3,1416}{180} \approx 1,114 \text{ rad}$$

Câu 5: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57 cm và kim phút dài 13,34 cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

Đồng hồ chỉ 6 giờ đúng thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo π nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{30}{60 \cdot 6} \pi = \frac{1}{12} \pi$, suy ra độ dài cung tròn mà nó vạch

$$\text{lên là: } l = R\alpha = 10,57 \times \frac{\pi}{12} \approx 2,77 \text{ cm}$$

Câu 6: Trên đường tròn bán kính $r = 15$ cm, tìm độ dài của cung có số đo 50° .

Hướng dẫn:

$$l = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180} = 15 \cdot \frac{\pi \cdot 50}{180} = \frac{25\pi}{6} \approx 13,09 \text{ cm.}$$

Câu 7: Cung tròn bán kính bằng 8,43 cm có số đo 3,85 rad có độ dài là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

Độ dài cung tròn là $l = R\alpha = 8,43 \times 3,85 = 32,4555 \text{ cm.}$

Câu 8: Cho $a = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Tìm giá trị của k để $a \in (19; 27)$.

Hướng dẫn:

$$19 < \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) < 27$$

$$\Leftrightarrow 19 - \frac{\pi}{3} < k2\pi < 27 - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2,86 < k < 4,13$$

$$\Leftrightarrow k = \{3; 4\}$$

Câu 9: Đổi góc có số đo $-\frac{3\pi}{16}$ sang số đo độ.

Hướng dẫn:

$$\text{Vì } 1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \text{ nên } \frac{-3\pi}{16} = \left(\frac{-3\pi}{16} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{-135}{4}\right)^\circ = -33,75^\circ = -33^\circ 45'.$$

Câu 10: Cho đường tròn có bán kính 6 cm. Tìm số đo theo đơn vị rad của cung có độ dài là 3 cm.

Hướng dẫn:

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha$ với α có số đo bằng rad nên ta

$$\text{có: } \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ (rad).}$$

b. Trắc nghiệm:

Câu 1: Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{7\pi}{4}$?

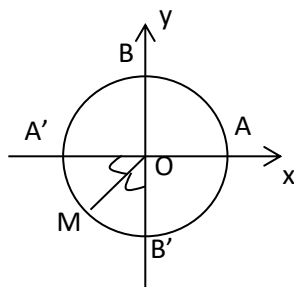
A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. $-\frac{3\pi}{4}$.

Câu 2: Cung α có mút đầu là A và mút cuối là M thì số đo của α là:



A. $\frac{3\pi}{4} + k\pi$.

B. $-\frac{3\pi}{4} + k\pi$.

C. $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

D. $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 3: Góc $\frac{\pi}{9}$ có số đo bằng độ là:

A. 18° .

B. 36° .

C. 20° .

D. 12° .

Câu 4: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

A. 60^0 .

B. 30^0 .

C. 40^0 .

D. 50^0 .

Câu 5: Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\frac{\pi}{15}$.

A. 4,19 cm.

B. 4,17 cm.

C. 95,49 cm.

D. 95,50 cm.

Đáp án:

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5
A	D	C	D	A