Bài 5. Khoảng cách

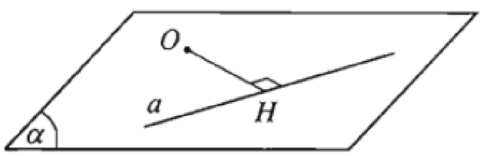
A. Lý thuyết.

I. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, một mặt phẳng.

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

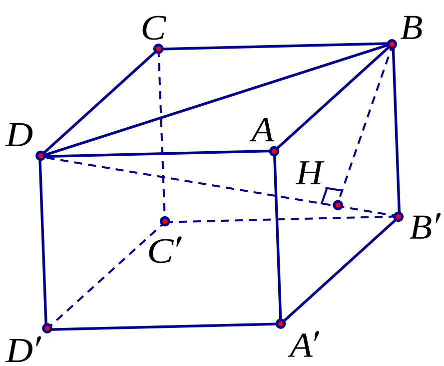
Cho điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O; a), gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên a. Khi đó, khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.

Kí hiệu: d(O; a).



Ví dụ 1. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách từ B tới đường thẳng DB'.

Lời giải:



Từ giả thuyết ta suy ra: $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu của B lên DB' ta có: BH = d (B, DB').

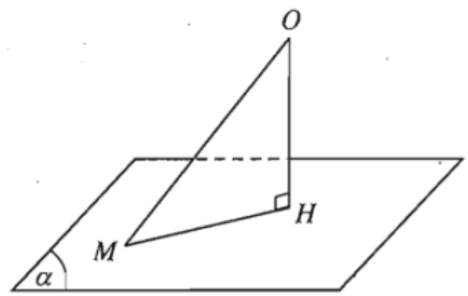
Xét tam giác BB'D vuông tại B ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

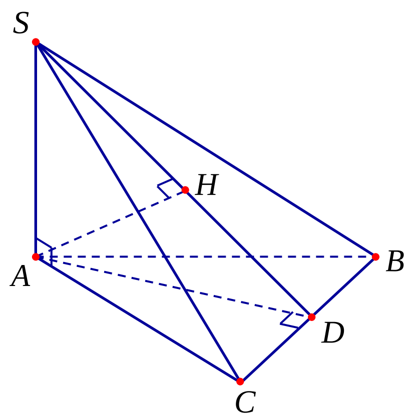
2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm O và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)* và được kí hiệu là d(O; (α)).



Ví dụ 2. Cho hình chóp S. ABC có $SA \perp (ABC)$, ΔABC là tam giác đều cạnh a và tam giác SAB cân. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải:



Gọi D là trung điểm BC. Do tam giác ABC đều nên $AD \perp BC$ (1).

Trong tam giác SAD, kẻ $AH \perp SD$ (2).

Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AD \perp BC \\ SA \cap AD = \{A\} \end{cases}$ (3).

$\Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD)$

Từ (2) và (3), ta suy ra AH vuông góc với (SBC) nên d(A ; (SBC))= AH.

Theo giả thiết, ta có SA = AB = a, $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).

Tam giác SAD vuông nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2}.$$

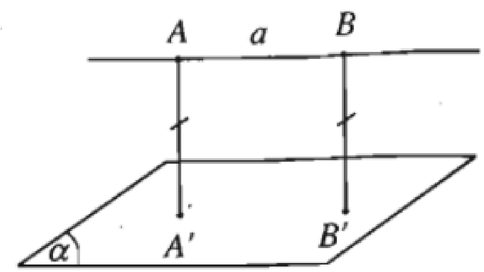
$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

II. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song.

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.

- Định nghĩa: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu là d(a; (α)) .

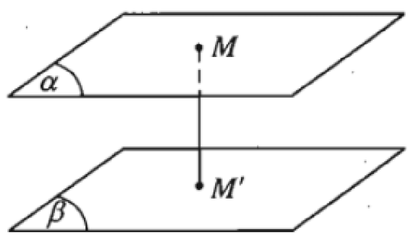


2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

- Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

- Kí hiệu: d((α); (β)).

Như vậy: d((α); (β)) = d(M; (β)) = d(M’; (α)).

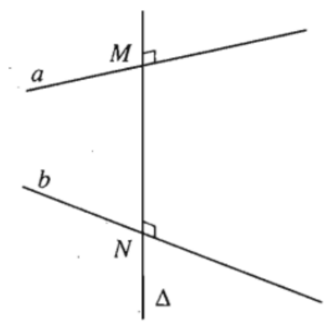


III. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau.

1. Định nghĩa.

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M; N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



2. Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

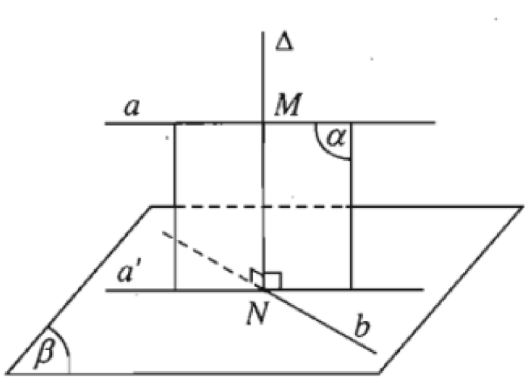
- Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a; a’ là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (β).

Vì a// (β) nên a// a’. Do đó; a’ cắt b tại 1 điểm là N

Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và a’; Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với (β). Khi đó, (α) vuông góc (β).

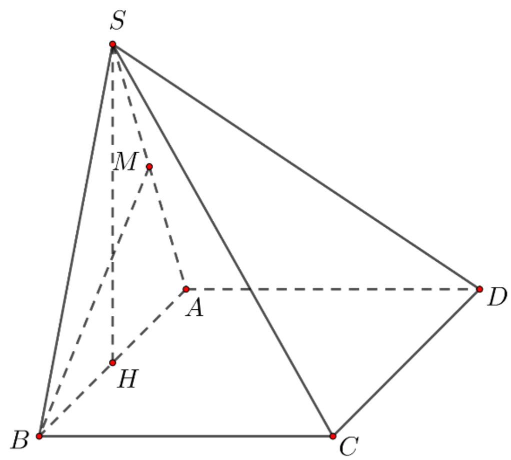
Như vậy.Δ nằm trong (α) nên cắt đường thẳng a tại M và cắt đường thẳng b tại N.Đồng thời, Δ vuông góc với cả a và b.

Do đó, Δ là đường vuông góc chung của a và b.



Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

Lời giải :



Do $\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)$ và $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)$.

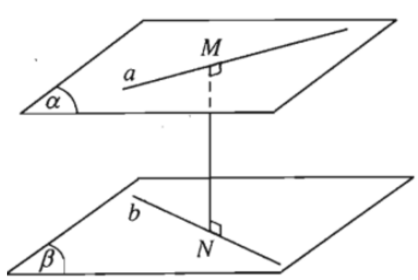
Vì tam giác SAB đều nên gọi M là trung điểm của SA thì $BM\perp SA$ nên BM là đoạn vuông góc chung của BC và SA.

Vậy $d\left(SA;BC\right)=BM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Nhận xét

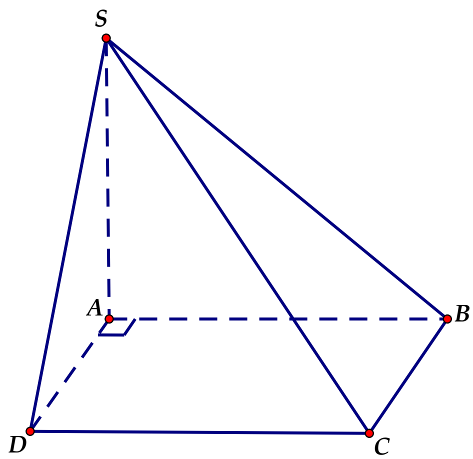
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SA= a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

Lời giải :



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DA$.

Vì $\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD \,//\, AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases}$

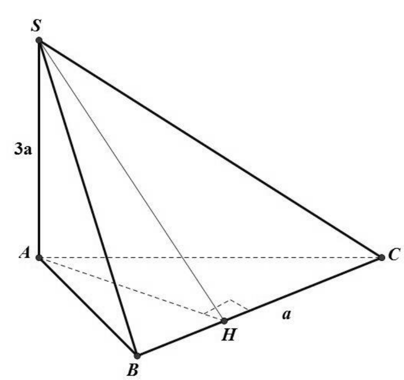
Suy ra: CD // (SAB) nên :

d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = a,

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình chóp tam giác S.ABC với SA vuông góc với (ABC) và SA = 3a. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2$; BC = a. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

Lời giải:



Kẻ AH vuông góc với BC

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \Rightarrow AH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{4a^2}{a} = 4a$

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Lại có: $AH \perp BC$ nên BC ⊥ (SAH)

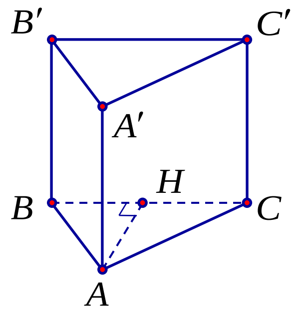
Suy ra: $SH \perp BC$ và khoảng cách từ S đến BC chính là SH .

+ Ta có tam giác vuông SAH vuông tại A nên ta có

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$

Bài 2. Cho hình lăng trụ đứng ABC. A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B') là:

Lời giải:



Ta có AA'//(BCC'B') nên khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B') cũng chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCC'B').

Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

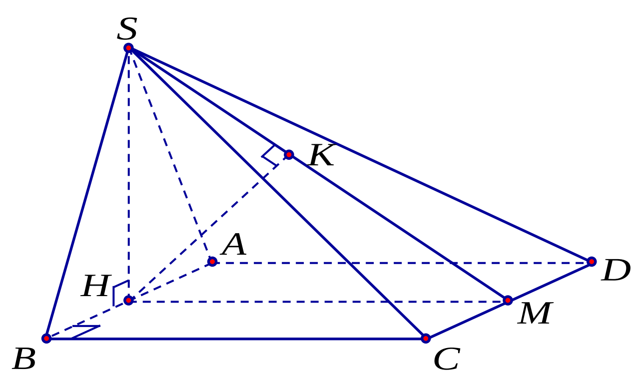
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{BC^2 - AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B') bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABCD). Tính khoảng cách từ B đến (SCD).

Lời giải:



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Suy ra HM =1, $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $SM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD) nên $SH \perp (ABCD)$.

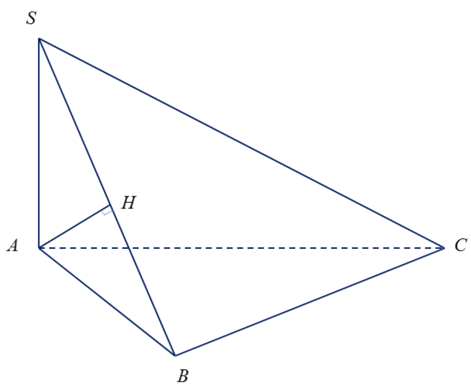
Vì AB//CD nên AB// (SCD).

Do đó d (B; (SCD)) = d(H; (SCD)) = HK với $HK \perp SM$ trong (SHM).

Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác vuông tại B, AB = SA= a. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Khoảng cách giữa AH và BC bằng:

Lời giải:



Ta có $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp HB$.

$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (nên $BC \perp BH$).

Do đó, d(BC, AH) = HB.

Tam giác SAB vuông cân tại A, AH là đường cao

$\Rightarrow BH = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy $d(BC, AH) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.