Bài 3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

A. Lý thuyết

1. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

Để giải tam giác, ta thường sử dụng một cách hợp lí các hệ thức lượng như: định lí sin, định lí côsin và các công thức tính diện tích tam giác.

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC biết AB = 45, AC = 32 và $\hat{A} = 60°$.

Hướng dẫn giải

+) Theo định lí côsin ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 45^2 + 32^2 - 2.45.32.\cos 60°$

$\Rightarrow BC^2 = 1609$.

$\Rightarrow BC \approx 40,11$.

+) Theo định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$

$\Rightarrow \frac{40,11}{\sin 60°} = \frac{32}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin B = \frac{32.\sin 60°}{40,11} \approx 0,69$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 44°$ (không thể xảy ra trường hợp $\hat{B} \approx 136°$ do $\hat{A} + \hat{B} > 180°$)

Xét tam giác ABC có $\hat{A} = 60°, \hat{B} = 44°$ ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow C = 180° - A - B$

$\Rightarrow C = 180° - 60° - 44° = 76°$

Vậy $BC \approx 40,11$; $B \approx 44°$ và $C \approx 76°$.

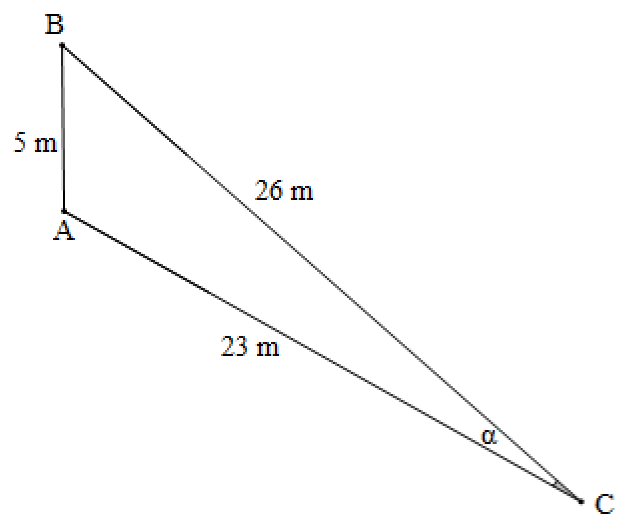
2. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

Ví dụ 2. Một khung thành bóng đá rộng 5 mét. Một cầu thủ đứng ở vị trí cách cột dọc khung thành 26 mét và cách cột còn lại 23 mét, sút vào khung thành. Tính góc nhìn của cầu thủ tới hai cột khung thành trên.

Hướng dẫn giải

Vị trí cầu thủ C và khung thành AB được mô tả như hình vẽ dưới đây:



Gọi α là góc nhìn của cầu thủ C tới hai cột khung thành A và B, tức là $\alpha = ACB$.

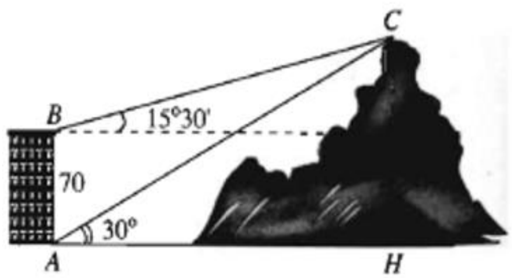
Áp dụng hệ quả định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC} = \frac{23^2 + 26^2 - 5^2}{2.23.26} \approx 0,9866$$

Suy ra α ≈ 9°23'.

Vậy góc nhìn của cầu thủ tới hai cột khung thành là khoảng 9°23'.

Ví dụ 3. Từ hai vị trí A và B của một toà nhà, người ta quan sát đỉnh C của một ngọn núi. Biết rằng độ cao AB = 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30°, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc 15°30'. Tính độ cao của ngọn núi.



Hướng dẫn giải

Ta có $BAC = BAH - CAH \Rightarrow BAC = 90° - 30° = 60°$.

$ABC = 90° + 15°30' = 105°30'$

Xét tam giác ABC ta có:

$BAC + ABC + ACB = 180°$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow ACB = 180° - BAC - ABC$

$\Rightarrow ACB \approx 180° - 60° - 105°30' = 14°30'$

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AC}{\sin ABC} = \dfrac{AB}{\sin ACB}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\sin 105°30'} = \frac{70}{\sin 14°30'}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{70.\sin 105°30'}{\sin 14°30'}$$

$\Rightarrow$ AC ≈ 269,4 (m)

Tam giác ACH vuông tại H ta có: $CH = AC.\sin CAH \approx 269,4.\sin 30^\circ \approx 134,7\left(m\right)$

Vậy ngọn núi cao khoảng 134,7 m.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải tam giác ABC biết AC = 16, $A = 60^\circ$ và $B = 50^\circ$.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $A = 60^\circ, B = 50^\circ$ ta có:

$A + B + C = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow C = 180^\circ - A - B$

$\Rightarrow C = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$

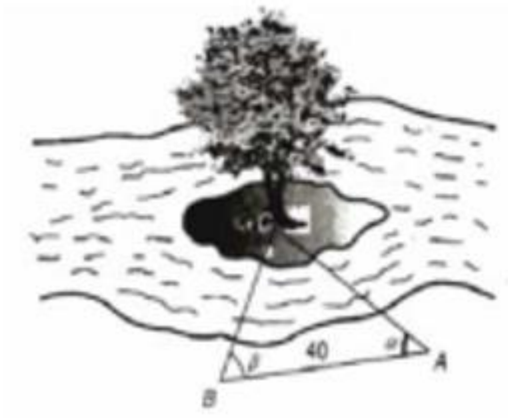
Theo định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{16}{\sin 50^\circ} = \frac{AB}{\sin 70^\circ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{16.\sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 18,1 \\ AB = \dfrac{16.\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 19,6 \end{cases}$$

Vậy $C = 70^\circ, BC \approx 18,1$ và AB ≈ 19,6.

Bài 2. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B đều có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách AB = 40 m, $A = 45^\circ$ và $B = 70^\circ$. Tính khoảng cách AC.



Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $A = 45^\circ, B = 70^\circ$ ta có:

$A + B + C = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow C = 180^\circ - A - B$

$\Rightarrow C = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ$

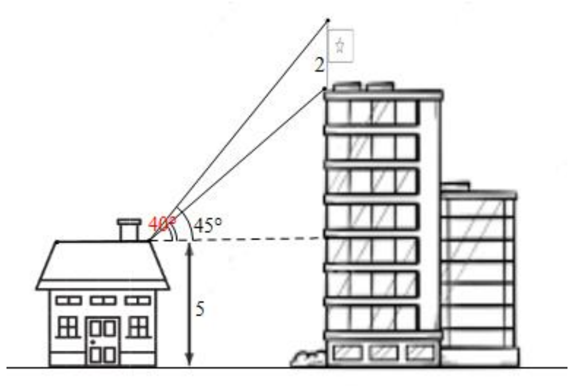
Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 70^\circ} = \frac{40}{\sin 65^\circ}$

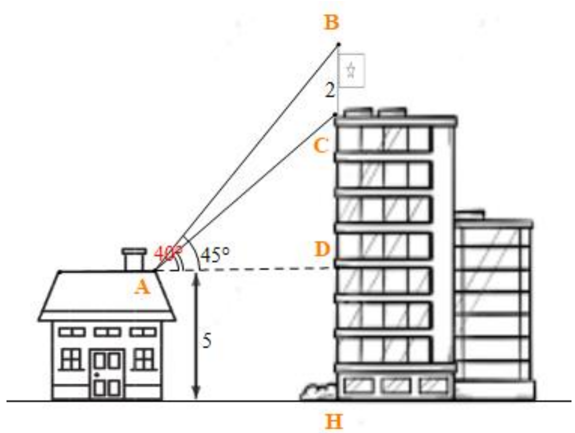
$\Rightarrow AC = \frac{40.\sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 41,47\left(m\right)$

Vậy khoảng cách từ A trên bờ sông đến gốc cây C khoảng 41,47 m.

Bài 3. Trên nóc một toà nhà có một cột cờ cao 2 m. Từ vị trí quan sát A cao 5 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột cờ dưới góc 45° và 40° so với phương nằm ngang (hình vẽ). Tìm chiều cao của toà nhà.



Hướng dẫn giải



Từ hình vẽ ta có $BAC = 45° - 40° = 5°$ và $ABD = 180° - (BAD + ADB)$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

Do đó $ABD = 45°$.

Suy ra: $ABC = ABD = 45°$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC có: $\dfrac{BC}{\sin BAC} = \dfrac{AC}{\sin ABC}$

Suy ra $AC = \dfrac{BC.\sin ABC}{\sin BAC} = \dfrac{2.\sin 45°}{\sin 5°} \approx 16,2\left(m\right)$

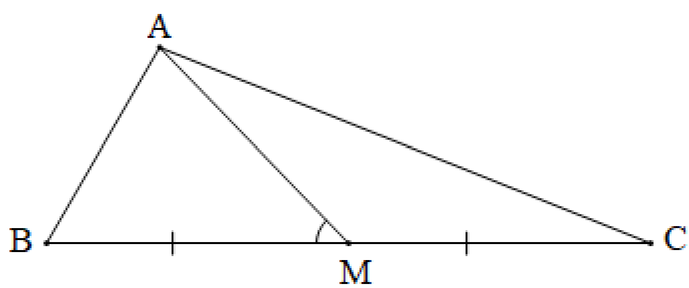
Trong tam giác vuông ADC có $CD = AC.\sin CAD \approx 16,2.\sin 40° \approx 10,4\left(m\right)$.

Do đó CH = CD + DH ≈ 10,4 + 5 ≈ 15,4 (m).

Vậy chiều cao của toà nhà là khoảng 15,4 m.

Bài 4. Tam giác ABC có AB = 3, BC = 8, M là trung điểm của BC, $\cos AMB = \dfrac{5\sqrt{13}}{26}$ và AM > 3. Tính AM và giải tam giác ABC biết tam giác ABC là tam giác tù.

Hướng dẫn giải



Vì M là trung điểm của BC nên $BM = MC = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}.8 = 4$.

Xét tam giác ABM, áp dụng hệ quả định lí côsin ta có:

$$\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2.AM.BM}$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{AM^2 + 4^2 - 3^2}{2.AM.4}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 + 7 = \frac{40\sqrt{13}}{26}AM$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM = \sqrt{13} > 3\left(tm : AM > 3\right) \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3\left(ktm : AM > 3\right) \end{array}\right.$$

Do đó $AM = \sqrt{13}$.

Vì $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180°$.

Suy ra $\cos\widehat{AMC} = -\cos\widehat{AMB} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Xét tam giác AMC, áp dụng định lí côsin ta có:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2.AM.CM.\cos\widehat{AMC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + 4^2 - 2.\sqrt{13}.4.\left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)$$

$\Rightarrow AC^2 = 49$

$\Rightarrow AC = 7$.

Xét tam giác ABM có AB = 3, BM = 4, $AM = \sqrt{13}$ áp dụng định lí côsin ta có:

$$\cos\widehat{ABM} = \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{2.AB.BM}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABM} = \frac{3^2 + 4^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2.3.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABM} = 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 60°.$$

Xét tam giác ABC, áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{8}{\sin BAC} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$

$\Rightarrow \sin BAC = \frac{8.\sin 60^\circ}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\Rightarrow BAC \approx 82^\circ$ hoặc $BAC \approx 98^\circ$

Mà tam giác ABC là tam giác tù nên $BAC \approx 98^\circ$.

Xét tam giác ABC ta có:

$BAC + ABC + ACB = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow ACB = 180^\circ - BAC - ABC$

$\Rightarrow ACB \approx 180^\circ - 98^\circ - 60^\circ = 22^\circ$.

Vậy $AM = \sqrt{13}, AC = 7, ABC = 60^\circ, BAC \approx 98^\circ$ và $ACB \approx 22^\circ$.