Công thức giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn

I. Lí thuyết tổng hợp

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (a_1, b_1 không đồng thời bằng 0, a_2, b_2 không đồng thời bằng 0).

- Nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là cặp số (x; y) sao cho x và y đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ.

2. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ (trong đó a_1, b_1, c_1 không đồng thời bằng 0, a_2, b_2, c_2 không đồng thời bằng 0 và a_3, b_3, c_3 không đồng thời bằng 0).

- Nghiệm của hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là bộ ba số (x; y; z) sao cho x, y và z đồng thời là nghiệm của cả ba phương trình của hệ.

3. Phương pháp giải

- Muốn giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn ta thường dùng:

+ *Phương pháp thế:* Rút một ẩn theo ẩn còn lại trong một phương trình của hệ và thế vào phương trình còn lại, thu được hệ mới mà trong đó có một phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ.

+ *Phương pháp cộng đại số:* Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong các phương trình bằng nhau hoặc đối nhau. Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0. Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

- **Tổng quát:** Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là khử bớt ẩn để quy về giải hệ phương trình có ít ẩn số hơn.

Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế giống như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. Các công thức:

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ với a_1, b_1 không đồng thời bằng 0, a_2, b_2, c_2 đều khác 0. Ta có:

+ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

+ Hệ phương trình vô nghiệm khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

+ Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

- *Phương pháp thế:* (với điều kiện các phương trình có nghĩa)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ a_2x + b_2\left(\dfrac{c_1 - a_1x}{b_1}\right) = c_2 \end{cases}$$

- *Phương pháp cộng đại số:*

a. Quy tắc cộng đại số

Gồm hai bước:

+ Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

+ Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

b. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

+ Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

+ Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).

+ Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$. Tìm m thỏa mãn các yêu cầu sau:

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất;

b) Hệ phương trình có vô số nghiệm;

c) Hệ phương trình vô nghiệm.

Lời giải:

a)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{4} \neq \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{m}{2} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq 1$$

Vậy khi $m \neq 1$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

b)

Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{4} = \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} = \frac{m}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Vậy không tồn tại m để hệ đã cho có vô số nghiệm.

c)

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m}{4} = \dfrac{3}{6} \\ \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{m}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy khi m = 1 thì hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ theo hai cách.

Lời giải:

Cách 1:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 2x - 3(4 - 3x) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 2x - 12 + 9x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 11x = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = \dfrac{17}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3.\dfrac{17}{11} \\ x = \dfrac{17}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-7}{11} \\ x = \dfrac{17}{11} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x; y\right) = \left(\dfrac{17}{11}; \dfrac{-7}{11}\right)$.

Cách 2:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2).3x + (-2).y = (-2).4 \\ 3.2x - 3.3y = 3.5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2y = -8 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2y = -8 \\ -11y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2y = -8 \\ y = \dfrac{-7}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2.\dfrac{-7}{11} = -8 \\ y = \dfrac{-7}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{11} \\ y = \dfrac{-7}{11} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x; y\right) = \left(\dfrac{17}{11}; \dfrac{-7}{11}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+4y=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+4y=2 \\ y-z=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-z=-1 \\ x+4y=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ (Lấy PT (2) trừ vế theo vế PT (1))

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+z)-z=-1 \\ x+4y=2 \\ y=1+z \end{cases}$ (Thế từ PT (3) vào PT (1))

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2z-z=-1 \\ x+4y=2 \\ y=1+z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-3 \\ x+4y=2 \\ y=1+z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-3 \\ x+4y=2 \\ y=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-3 \\ x+4.(-2)=2 \\ y=-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 \\ x = 10 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (x; y; z) = {10; -2; -3}.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 7y = 6 \end{cases}$.

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ 2x - 7y = 6 \\ x - z = 3 \end{cases}$.