BÀI ÔN TẬP CHƯƠNG V

A. LÝ THUYẾT

I. Đạo hàm tại một điểm

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và x_0 thuộc (a; b). Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số y= f(x) tại điểm x_0 và được kí hiệu là f'(x_0). Vậy $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$

* Chú ý:

Đại lượng Δx = x- x_0 được gọi là số gia của đối số tại x_0.

Đại lượng Δy= f(x) – f(x_0)= f(x_0 + Δx) – f(x_0) được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Như vậy: $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta có quy tắc sau đây:

+ Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 tính:

Δy= f(x_0 + Δx) – f(x_0) .

+ Bước 2: Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$..

+ Bước 3: Tìm $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-3}$, có Δx là số gia của đối số tại $x=2$. Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ bằng bao nhiêu.

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 = 2. Ta có:

$$\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = \sqrt{2.(2+\Delta x) - 3} - \sqrt{2.2-3} = \sqrt{2\Delta x + 1} - 1$$

Khi đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2\Delta x + 1} - 1}{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2\Delta x+1}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2\Delta x+1}-1\right).\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)}{\Delta x.\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x.\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2\Delta x+1}+1} = 1.$$

Vậy f'(2) = 1.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

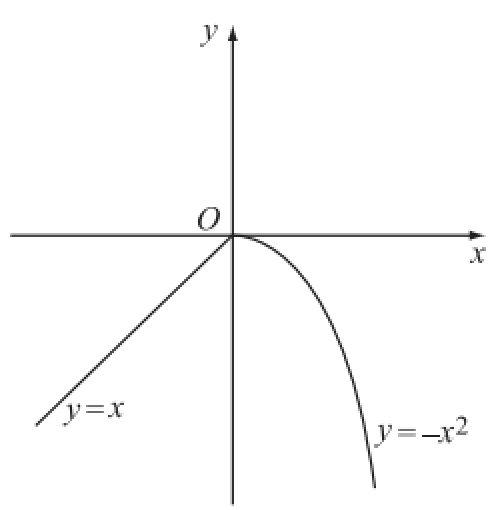
Định lý 1. Nếu hàm số y= f(x) có đạo hàm tại x0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý:

+ Nếu hàm số y= f(x) gián đoạn tại x0 thì hàm số không có đạo hàm tại điểm đó.

+ Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

Ví dụ 2. Chẳng hạn hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \ge 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục tại x = 0 nhưng không có đạo hàm tại đó. Ta nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liền, nhưng bị gãy tại điểm O(0;0) như hình vẽ sau:



Hình 62

4. Ý nghĩa của đạo hàm

a) Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

+) Định lí: Đạo hàm của hàm số y= f(x) tại điểm $x = x_0$ là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số y= f(x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

+) Định lí: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$y – y_0= f'(x_0) (x- x_0)$ trong đó $y_0= f(x_0)$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 – 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ x = 3.

Lời giải

Bằng định nghĩa ta tính được: y'(3) = 9.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là 9.

Ta có: y(3) = 2.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm có hoành độ x = 3 là:

y = 9(x – 3) + 2 = 9x – 27 + 2 = 9x – 25.

b) Ý nghĩa vật lý của đạo hàm:

+) Vận tốc tức thời:

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: s= s(t); với s= s(t) là một hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời tại thời điểm t0 là đạo hàm của hàm số s= s(t) tại t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

+) Cường độ tức thời:

Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: Q= Q(t) (là hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t0 là đạo hàm của hàm số Q= Q(t) tại t_0: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Ví dụ 4. Một xe máy chuyển động theo phương trình : $s(t)= t^2 + 6t+ 10$ trong đó t đơn vị là giây; s là quãng đường đi được đơn vị m. Tính vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t= 3.

Lời giải

Phương trình vận tốc của xe là v(t)=s' (t)=2t+6 (m/s)

⇒ Vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t= 3 là:

V(3)= 2.3+ 6 = 12 (m/s)

Chọn A.

II. Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số y = f(x) được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a; b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó ta gọi hàm số f': $\left(a;b\right) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'\left(x\right)$$

là đạo hàm của hàm số y = f(x) trên khoảng (a;b), kí hiệu là y' hay f'(x).

Ví dụ 5. Hàm số y = x^2 – 2x có đạo hàm y' = 2x – 2 trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Hàm số $y=\frac{2}{x}$ có đạo hàm $y'=-\frac{2}{x^2}$ trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

III. Đạo hàm của một hàm số thường gặp

1. Định lý 1

Hàm số y = x^n $\left(n\in\mathbb{N},n>1\right)$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $(x^n)' = n.x^{n-1}$.

2. Định lý 2

Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1.

a) Tính đạo hàm y = x^3;

b) Tính đạo hàm $y=\sqrt{x}$ tại x = 5.

Lời giải

a) Ta có: y' = $3x^2$;

b) Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Đạo hàm của hàm số tại x = 5 là: $y'\left(5\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

IV. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

1. Định lí 3

Giả sử u = u(x), v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định, ta có:

(u + v)' = u' + v';

(u – v)' = u' – v';

(uv)' = u'.v + u.v';

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$ $v = v(x) \neq 0$.

2. Hệ quả

Hệ quả 1. Nếu k là một hằng số thì (ku)' = k.u'.

Hệ quả 2. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 2x^2 + 3x + 6$;

b) $y = (x^2 + 1)(2x - 3)$;

c) $y = \frac{7x^2}{x - 1}$.

Lời giải

a) $y = x^5 - 2x^2 + 3x$

$\Rightarrow y' = (x^5 - 2x^2 + 3x)'$

$= (x^5)' - (2x^2)' + (3x)'$

$= 5x^4 - 4x + 3$.

b) $y = (x^2 + x).2x$

$\Rightarrow y' = (x^2 + x)'.2x + (x^2 + 1)(2x)'$

$= [(x^2)' + x'].2x + (x^2 + 1).2$

$= (2x + 1).2x + 2x^2 + 2$

$= 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2$

$= 6x^2 + 2x + 2$.

c) $y=\dfrac{7x^2}{x-1}$

$$\Rightarrow y=\frac{\left(7x^2\right)'\left(x^3-2x\right)-7x^2\left(x^3-2x\right)'}{\left(x^3-2x\right)^2}$$

$$=\frac{14x\left(x^3-2x\right)-7x^2\left(2x^2-2\right)}{\left(x^3-2x\right)^2}$$

$$=\frac{14x^4-28x^2-14x^2+14x}{\left(x^3-2x\right)^2}$$

$$=\frac{-28x^2+14x}{\left(x^3-2x\right)^2}.$$

V. Đạo hàm hàm hợp

Định lý 4. Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm x là u_x' và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là y_x' thì hàm hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là: $y_x'=y_u'.u_x'$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số: $y=\sqrt{x^2+2x}$

Lời giải

Đặt $u=x^2+2x$ thì $y=\sqrt{u}$

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{\left(x^2+2x\right)'}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}.$$

VI. Đạo hàm hàm lượng giác

1. Giới hạn $\dfrac{\sin x}{x}$

Định lý 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ví dụ 1. Tính $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x-1\right)}{x^2-1}$

Lời giải

Đặt x – 1 = t.

Khi x tiến đến 1 thì t tiến đến 0.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}.\frac{1}{t+2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}.\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Đạo hàm của hàm số y = sinx

Định lý 2.

Hàm số y = sinx có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và (sinx)’ = cosx.

Chú ý:

Nếu y = sinu và u = u(x) thì: (sinu)’ = u’.cosu

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left[\sin(2x+3)\right]^2$

Lời giải

$$y'=2\left[\sin(2x+3)\right]'.\sin(2x+3)=2\left[\cos(2x+3).(2x+3)'\right].\sin(2x+3)$$

$$y'=4\cos(2x+3).\sin(2x+3).$$

3. Đạo hàm của hàm số y = cosx

Định lý 3.

Hàm số y = cosx có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và (cosx)’ = - sinx.

Chú ý:

Nếu y = cosu và u = u(x) thì: (cosu)’ = - u’.sinu

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ tại $x=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x$

$$\Rightarrow y'=(\cos u)'=-u'.\sin u=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Thay $x=\frac{\pi}{3}$ vào y’ ta được:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị của đạo hàm của hàm số tại $x=\frac{\pi}{3}$ là $\frac{1}{2}$.

4. Đạo hàm của hàm số y = tanx

Định lý 4.

Hàm số y = tanx có đạo hàm tại mọi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và (tanx)’ = $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Chú ý:

Nếu y = u và u = u(x) thì: (tanu)’ = $\frac{u'}{\cos^2 u}$.

Ví dụ 4. Tính đạo hàm $y=\sqrt{2+\tan x}$

Lời giải

Đặt u = 2 + tanx

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{2+\tan x\ '}{2\sqrt{2+\tan x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{2+\tan x}}=\frac{1}{2.\cos^2 x\sqrt{2+\tan x}}.$$

5. Đạo hàm của hàm số y = cotx

Định lý 5.

Hàm số y = cotx có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và (cotx)’ = $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Chú ý:

Nếu y = u và u = u(x) thì: (cotu)’ = $-\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm y = cot x^2.

Lời giải

y’ = (cot x^2)’ = (x^2)’.$-\frac{1}{\sin^2 x^2}=-\frac{2x}{\sin^2 x^2}$.

6. Bảng quy tắc tính đạo hàm tổng hợp:

Đạo hàm của hàm f(x) với x là biến số	Đạo hàm của hàm f(u) với u là một hàm số
(c)’ = 0	(c)’ = 0
(x)’ = 1	(u)’ = u’
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
(sinx)’ = cosx	(sinu)’ = u’.cosu
(cosx)’ = - sinx	(cosu)’ = -u’. sinx
$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$

VII. Đạo hàm cấp hai

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm tại mỗi điểm x ∈ (a;b). Khi đó, hệ thức y’ = f’(x) xác định một hàm số mới trên khoảng (a; b). Nếu hàm số y’ = f’(x) lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y’ là đạo hàm cấp hai của hàm số y = f(x) và kí hiệu là y” hoặc f”(x).

Chú ý:

+ Đạo hàm cấp 3 của hàm số y = f(x) được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y”’ hoặc f”’(x) hoặc $f^{(3)}(x)$.

+ Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp n – 1 , kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ (n ∈ N, n ≥ 4). Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của f(x), kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Ví dụ 1. Với $y = 7x^4 + 8x + 12$. Tính $y^{(5)}$

Lời giải

Ta có: $y' = 28x^3 + 8$, $y'' = 84x^2$, $y''' = 168x$, $y^{(4)} = 168$, $y^{(5)} = 0$.

Vậy $y^{(5)} = 0$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động xác định bởi phương trình s = f(t), trong đó s = f(t) là một hàm số có đạo hàm đến cấp hai. Vận tốc tức thời tại t của chuyển động là v(t) = f'(t).

Lấy số gia Δt tại t thì v(t) có số gia tương ứng là Δv.

Tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ được gọi là gia tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian Δt. Nếu tồn tại: $v'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\gamma(t)$.

Ta gọi $v'(t)=\gamma(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

Vì v(t) = f'(t) nên: $\boxed{\gamma(t)=f''(t)}$.

Đao hàm cấp hai f''(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s = f(t) tại thời điểm t.

Ví dụ 2. Tính gia tốc tức thời của sự rơi tự do $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Lời giải

Ta có: $s'=gt$.

Gia tốc tức thời của sự tơi tự do là: $\gamma=s''(t)=s'(t)=g\approx 9{,}8\ (m/s^2)$.

Vậy gia tốc tức thời của sự rơi tự do là: $g\approx 9{,}8m/s^2$.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số: $y=f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}$ (C)

a) Hãy tính đạo hàm bằng định nghĩa của hàm số đã cho tại x = 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số (C) tại điểm A(1;-2).

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$. Ta có:

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\frac{(1+\Delta x)^2+1+\Delta x}{1+\Delta x-2}-\frac{1^2+1}{1-2}$$

$$=\frac{\Delta x^{\,2}+2\Delta x+1+1+\Delta x}{\Delta x-1}+2$$

$$=\frac{\Delta x^{\,2}+3\Delta x+2}{\Delta x-1}+2$$

$$=\frac{\Delta x^{\,2}+3\Delta x+2}{\Delta x-1}+\frac{2\Delta x-2}{\Delta x-1}$$

$$=\frac{\Delta x^{\,2}+5\Delta x}{\Delta x-1}$$

Khi đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{\Delta x^{\,2}+5\Delta x}{\Delta x-1}}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{\Delta x\ \ \Delta x+5}{\Delta x-1}}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x+5}{\Delta x-1}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+5}{\Delta x-1}=-5.$$

Vậy f’(1) = - 5.

b) Bằng định nghĩa ta tính được: y’(1) = -5.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là -5.

Ta có: y(1) = - 2.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm A(1;-2) là:

y = -5(x – 1) - 2 = -5x + 5 - 2 = -5x + 3.

Bài 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1^{\ 2}\ \text{khi } x\geq 0 \\ x+1^{\ 2}\ \text{khi } x<0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại x = 0 nhưng liên tục tại điểm đó.

Lời giải

Ta có f(0) = 1.

Trước hết, ta tính giới hạn bên phải của tỉ số $\dfrac{f\ \ x\ -f\ \ 0}{x-0}$. Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-2)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2.\ (\text{với } x\neq 0)$$

Giới hạn bên trái của tỉ số $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, ta có:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2.$$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Điều này chứng tỏ hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 0.

Ta có: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)^2=1$

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)^2=1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)^2=1$

Do đó hàm số liên tục tại x = 1.

Vậy hàm số liên tục tại x = 1 nhưng không có đạo hàm tại x = 1.

Bài 3. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số Q(t) = $2t^2$ + t, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm t = 4s.

Lời giải

Cường độ dòng điện tại t = 4 là: I(4) = Q'(4).

Đạo hàm của hàm Q(t) tại t = 4 bằng 17.

Vậy cường độ dòng điện tại t = 4 là 17 A.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số:

a) $y=\sqrt{2x+1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$;

b) y = x^3 + 2x tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x_0+1}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x_0+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x_0+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x_0+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x_0+1}}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x_0+1}=3$

$\Leftrightarrow 2x_0+1=9$

$\Leftrightarrow x_0=4\Rightarrow y(4)=\sqrt{2.4+1}=3$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số đã cho là:

$y=\dfrac{1}{3}(x-4)+3=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}+3=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-(2^3+2.2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-12}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+6)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+6)=14$

Ta có y(2) = 12.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho là:

y = 14(x – 2) + 12 = 14x – 28 + 12 = 14x – 16.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho là y = 14x – 16.

Bài 5. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y=x^3-3x^2+2x+1$

2. $y=-x^3+3x+1$

3. $y=\dfrac{x^4}{4}-x^2+1$

4. $y=-2x^4+\frac{3}{2}x^2+1$

5. $y=\frac{2x+1}{x-3}$

6. $y=\frac{x^2-2x+2}{x+1}$

Lời giải

1. Ta có: $y'=\left(-x^3+3x+1\right)'=3x^2-6x+2$

2. Ta có: $y'=\left(-x^3+3x+1\right)'=-3x^2+3$

3. Ta có: $y'=\left(\frac{x^4}{4}-x^2+1\right)'=x^3-2x$

4. Ta có: $y'=\left(-2x^4+\frac{3}{2}x^2+1\right)'=-8x^3+3x$

5. Ta có: $y'=\frac{(2x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2}=\frac{-7}{(x-3)^2}$

6. Ta có: $y'=\frac{(x^2-2x+2)'(x+1)-(x^2-2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{\left(x+1\right)^2}.$$

Bài 6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=\left(x^7+x\right)^2$

b) $y=\sqrt{2x^2+3x+1}$

Lời giải

a) Đặt u = $(x^7 + x)^2$

$\Rightarrow y'(u)=2\left(x^7+x\right)\left(x^7+x\right)'=2\left(x^7+x\right)\left(7x+1\right).$

b) Đặt u = $2x^2 + 3x + 1$

$$\Rightarrow y'(u)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{\left(2x^2+3x+1\right)'}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}=\frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}$$

Bài 7. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{32}$ và $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10\sqrt{3}$. Giải bất phương trình f'(x) > g'(x).

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \ 2x^3 - x^2 + \sqrt{32}\ ' = 6x^2 - 2x$

$$g'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10\sqrt{3}\right)' = x^2 + x$$

Xét bất phương trình: f'(x) > g'(x)

$\Leftrightarrow 6x^2 - 2x > x^2 + x$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $-\infty;0 \ \cup \left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Bài 8. Cho f(x) = $x^5 + x^3 - 2x - 3$. Chứng minh rằng:

f'(1) + f'(-1) = -4f(0).

Lời giải

Ta có: f'(x) = $(x^5 + x^3 - 2x - 3)' = 5x^4 + 3x^2 - 2$.

Khi đó:

f'(1) = $5.1^4 + 3.1^2 - 2 = 5 + 3 - 2 = 6$.

f'(-1) = $5.(-1)^4 + 3.(-1)^2 - 2 = 5 + 3 - 2 = 6$.

f(0) = $0^5 + 0^3 - 2.0 - 3 = 0 + 0 - 0 - 3 = -3$.

$\Rightarrow$ f'(1) + f'(-1) = 6 + 6 = 12 và -4f(0) = -4.(-3) = 12.

Vậy f'(1) + f'(-1) = -4f(0).

Bài 9. Tính các đạo hàm sau:

a) $y = \sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}$

b) $y=-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}\cot x$

c) $y=\cos^2\ \sin^3 x$

d) $y=\dfrac{x}{\sin x}$

Lời giải

a) $y'=\dfrac{3\tan^2 x+\cot 2x\ '}{2\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}=\dfrac{6\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{2}{\sin^2 2x}}{2\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}=\dfrac{\dfrac{6\sin x}{\cos^3 x}-\dfrac{1}{2.\sin^2 x.\cos^2 x}}{2\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$

b) $y'=\left(-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}\cot x\right)'=\dfrac{\sin x.3\sin^3 x+\cos x.9.\sin^2 x.\cos x}{3\sin^3 x\ ^2}-\dfrac{4}{3\sin^2 x}$

$=\dfrac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{3\sin^4 x}-\dfrac{4}{3\sin^2 x}=\dfrac{3\cos^2 x-3\sin^2 x}{3\sin^4 x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x}$.

c) $y'=\ \cos^2\ \sin^3 x\ \ '=2.\cos\ \sin^3 x\ .\left[\cos\ \sin^3 x\ \right]'=2.\cos\ \sin^3 x\ .\left[\cos\ \sin^3 x\ \right]'$

$=2.\cos\ \sin^3 x\ .\left[-\sin\ \sin^3 x\ \right]\ \sin^3 x\ '=-2.\cos\ \sin^3 x\ .\sin\ \sin^3 x\ \ 3\sin^2 x.\cos x$

$=-6.\cos\ \sin^3 x\ .\sin\ \sin^3 x\ \ \sin^2 x.\cos x$

d) $y'=\dfrac{x'.\sin x-x.\ \sin x\ '}{\sin x\ ^2}=\dfrac{\sin x-x.\cos x}{\sin x\ ^2}$.

Bài 10. Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x.

a) $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$

b) $y=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$

Lời giải

a) $y'=\ \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\ '$

$=6\sin^5 x\cos x-6\cos^5 x.\sin x+6\sin x\cos^3 x-6\sin^3 x\cos x$

$=6\sin x\cos x\ \sin^4 x-\cos^4 x\ +6\sin x\cos x\ \cos^2 x-\sin^2 x$

$= 6\sin x\cos x\ \ \sin^2 x - \cos^2 x\ \ \ \sin^2 x + \cos^2 x\ \ + 6\sin x\cos x\ \ \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 6\sin x\cos x\ \ \sin^2 x - \cos^2 x\ \ + 6\sin x\cos x\ \ \cos^2 x - \sin^2 x$

$= -6\sin x\cos x\ \ \cos^2 x - \sin^2 x\ \ + 6\sin x\cos x\ \ \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 0$

b) $y' = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x\right)'$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

$-2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 4\sin x\cos x$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin 2x$

$= -2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin 2x - 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sin 2x - 2\sin 2x$

$= \sin 2x + \sin 2x - 2\sin 2x$

$= 0$

Bài 11. Tìm f’(2) biết f(x) = x^2.sin(x – 2).

Lời giải

Ta có : f’(x) = 2x.sin(x – 2) + x^2cos(x – 2)

Khi đó: f’(2) = 2.2.sin(2 – 2) + 2^2.cos(2 – 2)

= 4.0 + 4.1

= 0 + 4

= 4.

Vậy f’(2) = 4.

Bài 12. Tính đạp hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) y = sin5x.cos2x;

b) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$;

c) y = (1 – x^2)cosx;

d) y = $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$.

Lời giải

a) y’ = (sin5x.cos2x)’ = 5cos5x.cos2x – 2sin5x.sin2x

$\Rightarrow$ y” = (5cos5x.cos2x – 2sin5x.sin2x)’

= - 25sin5x.cos2x – 10cos5xsin2x – 10cos5xsin2x – 4sin5x.cos2x.

$$\text{b) } y'=\ x\sqrt{x^2+1}\ ' = x'\sqrt{x^2+1}+x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y''=\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{4x\sqrt{x^2+1}-\ 2x^2+1\ .\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\ ^2}=\frac{2x^3+3x}{\sqrt{x^2+1}\ ^3}.$$

c) y’ = [(1 – x^2)cosx]’ = -2x.cosx – (1- x^2).sinx

$\Rightarrow$ y” = [-2x.cosx – (1- x^2).sinx]’ = -2cosx + 2xsinx + 2xsinx – (1 – x^2).cosx.

$$\text{d) } y'=\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)'=\frac{2\ \ x^2+x-2\ -\ 2x+1\ \ 2x+1}{x^2+x-2\ ^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4-4x^2-4x-1}{x^2+x-2\ ^2}=\frac{-2x^2-2x-5}{x^2+x-2\ ^2}$$

$$y''=\left[\frac{-2x^2-2x-5}{x^2+x-2\ ^2}\right]'=\frac{-4x-2\ \ x^2+x-2\ ^2-\ -2x^2-2x-5\ 2.\ x^2+x-2\ \ 2x+1}{x^2+x-2\ ^4}$$

Bài 13. Cho hàm số y = $(3x – 4)^6$. Tính y”(2) và $y^{(4)}(2)$.

Lời giải

Ta có: y’ = $6(3x – 4)^5.3 = 18(3x – 4)^5$

$\Rightarrow y''=18.5(3x-4)^4.3=270(3x-4)^4$

$\Rightarrow y'''=270.4.(3x-4)^3.3=3240(3x-4)^3$

$\Rightarrow y^{(4)}=3240.3.(3x-4)^2.3=29160(3x-4)^2$

Khi đó, ta có:

$y''\left(2\right) = 270(3.2 - 4)^4 = 4320;$

$y^{(4)}\left(2\right) = 29160(3.2 - 4)^2 = 116640.$

Vậy y''(2) = 4320 và $y^{(4)}(2)$ = 116640.