## Các bài toán về phép quay

### I. Lý thuyết ngắn gọn

1. Cho điểm O và góc lượng giác $\alpha$. Phép biến hình biến O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M′ sao cho OM′ = OM và góc lượng giác $(OM;OM')=\alpha$ được gọi là phép quay tâm O, $\alpha$ được gọi là góc quay

Kí hiệu: $Q_{(O;\alpha)}$

Khi $\alpha=2k\pi, k\in Z$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đồng nhất

Khi $\alpha=(2k+1)\pi, k\in Z$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đối xứng tâm O

2. Trong mặt phẳng Oxy, giả sử M (x; y) và $M'(x';y')=Q_{(O,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử M (x; y) và I (a; b) và $M'(x';y')=Q_{(I,\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x'=a+(x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha \\ y'=b+(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

3. Các tính chất của phép quay:
- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

### II. Các dạng toán về phép quay

**Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép quay**

**Phương pháp giải:** Sử dụng định nghĩa phép quay, biểu thức tọa độ của phép quay và các tính chất của phép quay

**Ví dụ 1:** Tìm ảnh của điểm A (3; 4) qua phép quay tâm O góc quay $90^\circ$

**Lời giải**

Với phép quay tâm O góc 90 độ điểm A thành A’(x; y) có tọa độ thỏa mãn:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ (OA;OA') = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2 + 4^2 = x^2 + y^2 \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Do $\alpha = 90^\circ > 0$ phép quay theo chiều dương suy ra: A’ (-4; 3)

**Ví dụ 2**: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M (2; 0) và đường thẳng d: x + 2y – 2 = 0. Xét phép quay Q tâm O góc quay $90^\circ$

a. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay Q

b. Tìm ảnh của d qua phép quay Q

**Lời giải**

a. Ta có vì $M(2;0) \in Ox \Rightarrow Q_{(O;90^\circ)}(M) = M': \begin{cases} M' \in Oy \\ OM = OM' \end{cases} \Rightarrow M'(0;2)$

b. Ta có $M(2;0) \in d$, ảnh của M qua phép quay Q theo câu a là M’ (0; 2)

Gọi d’ là ảnh của d qua Q ta có d’ là đường thẳng qua M’ và vuông góc với d

Đường thẳng d có VTPT là $\vec{n} = (1;2)$ suy ra d’ có VTPT là $\vec{n'} = (2;-1)$

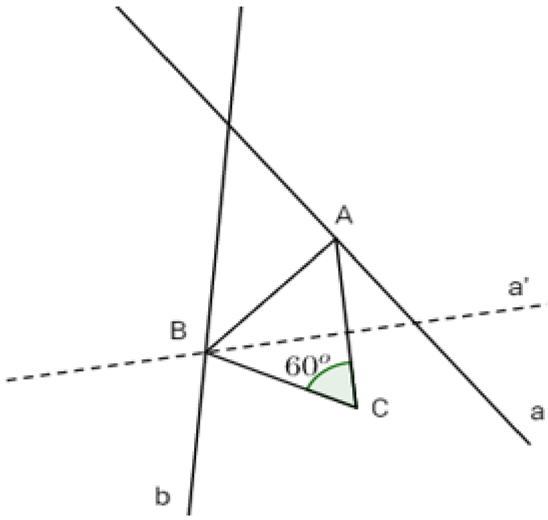
Vậy phương trình của d’ là: $2(x-0) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

**Dạng 2: Sử dụng phép quay để giải các bài toán dựng hình**

**Phương pháp giải:** Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó

**Ví dụ 3:** Cho hai đường thẳng a, b và điểm C không nằm trên chúng. Hãy tìm trên a và b lần lượt hai điểm A và B sao cho tam giác ABC là tam giác đều

**Lời giải**




Nếu xem B là ảnh của A qua phép quay tâm C góc quay 60° thì B sẽ là giao của đường thẳng b với đường thẳng a' là ảnh của a qua phép quay nói trên

Số nghiệm của bài toán là số giao điểm của đường thẳng b với đường thẳng a'

**Ví dụ 4:** Cho điểm A và hai đường thẳng $d_1, d_2$. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A sao cho $B \in d_1, C \in d_2$

Lời giải

- Dựng đường thẳng $d'_2$ là ảnh của $d_2$ qua $Q_{(A;-90^\circ)}$

- Dựng giao điểm $B = d_1 \cap d'_2$

- Dựng đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt $d_2$ tại C

Tam giác ABC là tam giác cần dựng

Nhận xét:

- Nếu $d_1, d_2$ không vuông góc thì bài toán có một nghiệm hình

- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi $d_1, d_2$ thì bài toán có vô số nghiệm hình

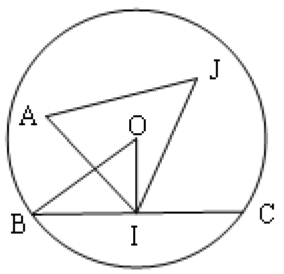
- Nếu $d_1 \perp d_2$ và A không nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi $d_1, d_2$ thì bài toán vô nghiệm hình

**Dạng 3: Sử dụng phép quay để giải các bài toán tập hợp điểm**

**Phương pháp giải:** Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó. Để tìm tập hợp điểm M′ ta đi tìm tập hợp điểm M mà $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó biến điểm M thành điểm M′, khi đó nếu $M \in (H)$ thì $M' \in (H') = Q_{(I;\alpha)}((H))$

**Ví dụ 5**: Cho đường tròn (O, R), A là một điểm cố định không trùng với tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng $120°$ .Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J

**Lời giải**




Ta có I là trung điểm của BC và cung $BC = 120°$

Nên $OI \perp BC$ và $BOI = 60°$

Xét tam giác OIB có:

$$OI = OB\cos BOI = R\cos 60° = \frac{R}{2}$$

Do đó tập hợp các điểm I là đường tròn $(\gamma)$ tâm O bán kính $\frac{R}{2}$

Mặt khác, tam giác AIJ đều nên ta có

$$\begin{cases} AJ = AI \\ \left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ}\right) = 60° \end{cases} \Rightarrow J = Q_A^{60°}\left[(\gamma)\right]$$

Mà tập hợp các điểm I là đường tròn $(\gamma)$ nên tập hợp các điểm J là hai đường tròn $(\gamma_1)$ và $(\gamma_2)$ với:

$$(\gamma_1) = Q_A^{60°}\left[(\gamma)\right]$$

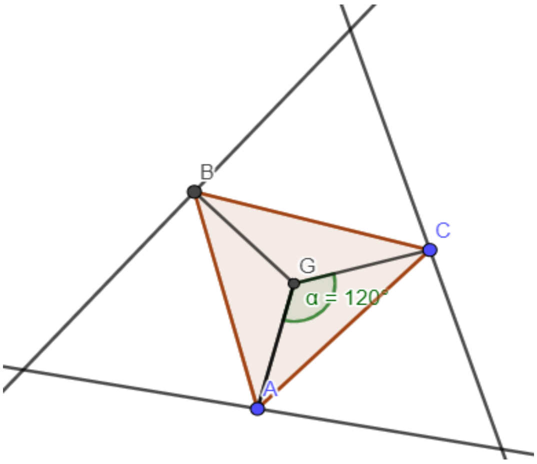
$$(\gamma_2) = Q_A^{60°}\left[(\gamma)\right]$$

$(\gamma_1)$ là đường tròn tâm $(O_1)$, bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_1 = Q_A^{60^\circ}(O)$

$(\gamma_2)$ là đường tròn tâm $(O_2)$, bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_2 = Q_A^{-60^\circ}(O)$

**Ví dụ 6**: Cho đường thẳng a và một điểm G không nằm trên a. Với mỗi điểm A nằm trên a ta dựng tam giác đều ABC có tâm G. Tìm quỹ tích các điểm B, C khi A di động trên a

**Lời giải**




Do tam giác ABC đều và có tâm G nên phép quay tâm G góc quay $120^\circ$ biến A thành B hoặc C và phép quay tâm G góc quay $240^\circ$ biến A thành B hoặc C

Mà $A \in a$ nên B, C thuộc các đường thẳng là ảnh của a trong hai phép quay nói trên

Vậy quỹ tích các điểm B, C là các đường thẳng ảnh của a trong hai phép quay tâm G góc quay $120^\circ$ và $240^\circ$

**Dạng 4: Sử dụng phép quay để giải các bài toán hình học phẳng**

**Ví dụ 7:** Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh rằng GOG' là tam giác vuông cân

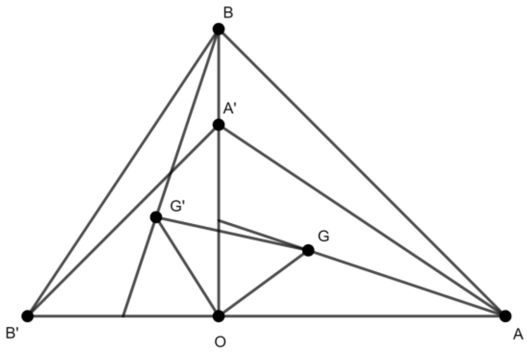
**Lời giải**

Xét phép quay Q tâm O góc quay $90^\circ$, ta có:

$\Delta OBB' = Q_O^{90^\circ}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^\circ}(G)$

$\Rightarrow GOG' = 90^\circ, OG' = OG$

Vậy, ta được tam giác GOG' là tam giác vuông cân

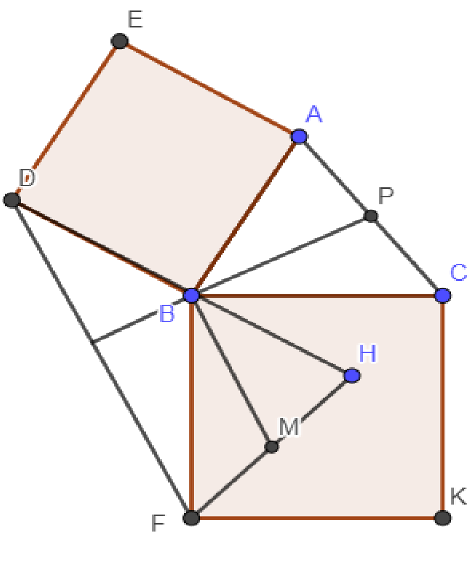



**Ví dụ 8:** Cho tam giác ABC, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm đoạn FH

a. Xác định ảnh của hai vecto $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay tâm B góc $90^\circ$

b. Chứng minh rằng DF = 2BP và DF vuông góc với BP

**Lời giải**



a. Ta có: $\begin{cases} BA = BH(= BD) \\ (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BH}) = 90° \end{cases} \Rightarrow Q_B^{90°}(A) = H; Q_B^{90°}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BH}$

$Q_B^{90°}(A) = H; Q_B^{90°}(C) = F \Rightarrow Q_B^{90°}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$

b. Vì P là trung điểm của AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay trên trung điểm M của HF

$Q_B^{90°}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}$

Mặt khác: $BM = \frac{1}{2}DE, BM // DF \Rightarrow BP = \frac{1}{2}DF; DF \perp BP$

## III. Bài tập áp dụng

**Bài 1**: Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông ABDE và ACFH. Gọi I là trung điểm của cạnh BCE

a. Chứng minh rằng AE = CD

b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AE và CD. Chứng minh rằng tam giác BIJ là một tam giác đều

**Bài 2:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định

**Bài 3:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A (3; 4). Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc $90°$

**Bài 4:** Cho hình vuông ABCD tâm O. M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc $90°$

**Bài 5:** Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng

a. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân đỉnh D

b. Chứng minh AO vuông góc với PQ và AO = PQ

**Bài 6:** Dựng tam giác đều biết ba đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành cho trước

**Bài 7:** Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm B (-3; 6). Tìm tọa độ điểm E sao cho B là ảnh của E qua phép quay tâm O góc quay $-90°$

**Bài 8:** Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay $\alpha$, $0 < \alpha \le 2\pi$ biến hình vuông trên thành chính nó?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Bài 9:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm M (2; 0) và điểm N (0; 2). Phép quay tâm O biến điểm M thành điển N, khi đó góc quay của nó là bao nhiêu?

**Bài 10:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A (3; 0). Tìm tọa độ ảnh A′ của điểm A qua phép quay $Q_O^{90°}$