

Dạng 4: Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải bài tập

1. Lý thuyết

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

2. Các dạng toán

Dạng 4.1: Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

a. Phương pháp giải:

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 > 2x + 19 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 > 2x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 2x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là: $S = (8; +\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3(x - 3) \\ \frac{2 - x}{2} < x - 3 \\ \sqrt{x - 3} \geq 2 \end{cases}.$$

Hướng dẫn:

ĐKXD: $x \geq 3$.

Ta có:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3(x - 3) \\ \frac{2 - x}{2} < x - 3 \\ \sqrt{x - 3} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 3x - 9 \\ 2 - x < 2x - 6 \\ x - 3 \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq -8 \\ -3x < -8 \\ x \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x > \frac{8}{3} \\ x \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \leq x \leq 8 \text{ (t/m).}$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = [7; 8]$.

Dạng 4.2: Xác định tham số m để hệ bất phương trình có nghiệm, vô nghiệm

a. Phương pháp giải:

Ta giải từng bất phương trình của hệ theo tham số m. Sau đó, biện luận bất phương trình có nghiệm hay vô nghiệm dựa vào giao của các tập nghiệm:

- +) Hệ bất phương trình có nghiệm khi giao của các tập nghiệm khác rỗng.
- +) Hệ bất phương trình vô nghiệm khi giao của các tập nghiệm bằng rỗng.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - m < 2 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $2x - 1 > 0$ có tập nghiệm $S_1 = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $x - m < 2$ có tập nghiệm $S_2 = (-\infty; m + 2)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m + 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 4 > x + 9 \\ 1 - 2x \leq m - 3x + 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Hướng dẫn:

$$+ \text{ Bất phương trình } 3x + 4 > x + 9 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$\text{Tập nghiệm bất phương trình là } S_1 = \left(\frac{5}{2}; +\infty \right).$$

$$+ \text{ Bất phương trình } 1 - 2x \leq m - 3x + 1 \Leftrightarrow x \leq m$$

$$\text{Tập nghiệm bất phương trình là } S_2 = (-\infty; m].$$

$$\text{Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì } S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}.$$

3. Bài tập tự luyện:

3.1 Tự luận

$$\text{Câu 1: Giải hệ bất phương trình } \begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases}.$$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

$$\text{Câu 2: Giải hệ bất phương trình } \begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}.$$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; \frac{4}{5}\right).$$

Câu 3: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{4x+3}{2x-5} < 6 \\ \frac{x-1}{x+3} > 2 \end{cases}.$

Hướng dẫn:

Ta có: $\begin{cases} \frac{4x+3}{2x-5} < 6 \\ \frac{x-1}{x+3} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+3}{2x-5} - 6 < 0 \\ \frac{x-1}{x+3} - 2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+3-12x+30}{2x-5} < 0 \\ \frac{x-1-2x-6}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-8x+33}{2x-5} < 0 \\ \frac{-x-7}{x+3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{33}{8}; +\infty\right) \\ x \in (-7; -3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; -3).$$

Câu 4: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+2 > 2x+3 \\ 1-x > 0 \end{cases}.$

Hướng dẫn:

Ta có: $\begin{cases} 3x+2 > 2x+3 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$

Vậy tập nghiệm bất phương trình trên là $S = \emptyset$.

Câu 5: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $3(x - 6) < -3$ có tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 5)$.

Bất phương trình $\frac{5x + m}{2} > 7$ có tập nghiệm $S_2 = \left(\frac{14 - m}{5}; +\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{14 - m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -11$.

Câu 6: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx - 1) < 2 \\ m(mx - 2) \geq 2m + 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn:

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m + 2 \\ m^2x \geq 4m + 1 \end{cases}$.

• Với $m = 0$, hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

• Với $m \neq 0$, hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \frac{m + 2}{m^2} \\ x \geq \frac{4m + 1}{m^2} \end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m + 2}{m^2} > \frac{4m + 1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Vậy $0 \neq m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

$\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $2x - 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = [2; +\infty)$.

Bất phương trình $x - m \leq 0 \Leftrightarrow x \leq m$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = (-\infty; m]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử. Suy ra $m = 2$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} m^2x \geq 6 - x \\ 3x - 1 \leq x + 5 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $m^2x \geq 6 - x \Leftrightarrow (m^2 + 1)x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{m^2 + 1}$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = \left[\frac{6}{m^2 + 1}; +\infty \right)$.

Bất phương trình $3x - 1 \leq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 3$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = (-\infty; 3]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử, suy ra $\frac{6}{m^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 9: Tìm m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 7 \geq 8x + 1 \\ m + 5 < 2x \end{cases}$$
 vô nghiệm.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $2x + 7 \geq 8x + 1 \Leftrightarrow -6x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 1$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = (-\infty; 1]$.

Bất phương trình $m + 5 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{m + 5}{2}$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = \left(\frac{m+5}{2}; +\infty \right)$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow 1 \leq \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \geq -3$.

Câu 10: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$ vô nghiệm.

Hướng dẫn:

Bất phương trình $(x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 7x + 1$

$\Leftrightarrow -6x + 9 \geq 7x + 1 \Leftrightarrow 8 \geq 13x \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13}$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13} \right]$.

Bất phương trình $2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5}$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = \left[\frac{2m-8}{5}; +\infty \right)$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

3.2 Trắc nghiệm:

Câu 1: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx + 2m > 0 \\ \frac{2x+3}{5} > 1 - \frac{3x}{5} \end{cases}$. Xét các mệnh đề sau:

(I) Khi $m < 0$ thì hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

(II) Khi $m = 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là \mathbb{R} .

(III) Khi $m \geq 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty \right)$.

(IV) Khi $m > 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn:

Chọn C.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} mx + 2m > 0 \\ \frac{2x+3}{5} > 1 - \frac{3x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > -2m \\ x > \frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Với } m < 0 \text{ thì } \begin{cases} mx > -2m \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Với } m = 0 \text{ thì } \begin{cases} mx > -2m \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Với } m > 0 \text{ thì } \begin{cases} mx > -2m \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}.$$

Vậy (I) và (IV) đúng; (II) và (III) sai.

Câu 2: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi:

A. $m \leq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m < -1$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn:

Chọn A.

$$\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 4 \\ x < m-1 \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $m-1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 3: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

B. $S = [-2; 4]$.

C. $S = [2; 4]$.

D. $S = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn:

Chọn B.

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = [-2; 4]$.

Câu 4: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{4x+5}{6} < x-3 \\ 2x+3 > \frac{7x-4}{3} \end{cases}$ là:

A. $\left(\frac{23}{2}; 13\right)$.

B. $(-\infty; 13)$.

C. $(13; -\infty)$.

D. $\left(-\infty; \frac{23}{2}\right)$.

Hướng dẫn:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{4x+5}{6} < x-3 \\ 2x+3 > \frac{7x-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-23 > 0 \\ x-13 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{23}{2} \\ x < 13 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{23}{2}; 13\right).$$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 5 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

A. $m < -15$.

B. $m \geq -15$.

C. $m > -15$.

D. $m \leq -15$.

Hướng dẫn:

Chọn C.

$$\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 15 \\ 5x+m > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > \frac{10-m}{5} \end{cases}$$

$$\text{Hệ bất phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{10-m}{5} < 5 \Leftrightarrow 10-m < 25 \Leftrightarrow m > -15.$$

Câu 6: Tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases}$

bằng:

A. 21.

B. 28.

C. 27.

D. 29.

Hướng dẫn:

Chọn A.

$$\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x^2 < x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = (-1; 7)$.

Suy ra các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 21.

Câu 7: Giá trị $x = -2$ là nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x - 3 < 1 \\ 3 + 4x > -6 \end{cases}.$

B. $\begin{cases} 2x - 5 < 3x \\ 4x - 1 > 0 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} 2x - 4 > 3 \\ 1 + 2x < 5 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} 2x - 3 < 3x - 5 \\ 2x - 3 > 1 \end{cases}.$

Hướng dẫn:

Chọn A.

Thay $x = -2$ và từng hệ bất phương trình của các đáp án, ta được đáp án A thỏa mãn.

Câu 8: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} mx \leq m - 3 \\ (m + 3)x \geq m - 9 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

A. $m = -2$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = -1$

Hướng dẫn:

Chọn B.

+) Với $m = 0$, hệ bất phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} 0x \leq -3 \\ x \geq -3 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

+) Với $m = -3$, hệ bất phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 0x \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Do đó hệ không có nghiệm duy nhất.

+) Với $m \neq 0; m \neq -3$, hệ bất phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} x \leq \frac{m-3}{m} \\ x \geq \frac{m-9}{m+3} \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $\frac{m-3}{m} = \frac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 > x - 2 \end{cases}$$
 là

A. $(-3; 2)$.

B. $(-\infty; 3)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-3; +\infty)$.

Hướng dẫn:

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 > x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2.$

Câu 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \\ mx+1 > (m-2)x+m \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m=3$.

B. $m \geq 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \leq 3$.

Hướng dẫn:

Chọn B.

+ Bất phương trình $3x+5 \geq x-1 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = [-3; +\infty)$

+ Bất phương trình $(x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 2x + 1 + 9$

$\Leftrightarrow 4x + 4 \leq -2x + 1 + 9 \Leftrightarrow 6x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 1$

\Rightarrow Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = (-\infty; 1]$

Suy ra $S_1 \cap S_2 = [-3; 1]$.

+ Bất phương trình $mx + 1 > (m - 2)x + m \Leftrightarrow mx + 1 > mx - 2x + m$

$$\Leftrightarrow 1 > -2x + m \Leftrightarrow 2x > m - 1 \Leftrightarrow x > \frac{m-1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Tập nghiệm của bất phương trình là } S_3 = \left(\frac{m-1}{2}; +\infty \right)$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$.