

Bài 1. Quy tắc đếm

A. Lý thuyết

I. Quy tắc cộng

- **Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

- Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn và không giao nhau thì:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- **Chú ý:** Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

- **Ví dụ 1.** Một lớp học có 21 bạn nữ và 19 bạn nam. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một bạn để làm lớp trưởng. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải:

+ Trường hợp 1. Giáo viên chọn 1 bạn nam: có 19 cách.

+ Trường hợp 2. Giáo viên chọn 1 bạn nữ: có 21 cách

Theo quy tắc cộng, giáo viên sẽ có: $19 + 21 = 40$ cách chọn 1 bạn làm lớp trưởng.

- **Ví dụ 2.** Bạn Lan có 10 quyển sách khác nhau; 12 chiếc bút khác nhau và 5 cục tẩy khác nhau. Bạn Lan cần chọn một món đồ để đem tặng Hoa. Hỏi bạn Lan có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải:

Bạn Lan có thể chọn:

+ Một quyển sách: có 10 cách chọn

+ Một chiếc bút: có 12 cách chọn.

+ Một cục tẩy: có 5 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, bạn Lan có: $10 + 12 + 5 = 27$ cách chọn.

II. Quy tắc nhân

- **Quy tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

- **Chú ý:** Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

- **Ví dụ 3.** Cho tập $A = \{1; 3; 4; 5; 6\}$. Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số đôi một khác nhau từ tập A ?

Lời giải:

Để tạo ra một số tự nhiên có 2 chữ số đôi một khác nhau từ tập A , ta phải thực hiện liên tiếp hai hành động:

- Hành động 1: Chọn chữ số hàng chục có 5 cách.

- Hành động 2. Chọn chữ số hàng đơn vị. Ứng với mỗi cách chọn chữ số hàng chục, ta có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị (vì chữ số hàng chục khác chữ số hàng đơn vị).

Theo quy tắc nhân, số các số tự nhiên thỏa mãn đầu bài là: $5.4 = 20$ số.

- **Ví dụ 4.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 10 món, 1 loại quả tráng miệng trong 6 loại quả tráng miệng và 1 nước uống giải khát trong 4 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

Lời giải:

Để chọn một thực đơn, ta cần thực hiện liên tiếp ba hành động:

- Chọn 1 món ăn trong 10 món có 10 cách.

- Chọn 1 loại quả tráng miệng trong 6 loại quả tráng miệng có 6 cách.

- Chọn 1 nước uống trong 4 loại nước uống có 4 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách cách chọn thực đơn là $10.6.4 = 240$ cách.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Lớp 11A có 43 học sinh, trong đó có 11 học sinh giỏi nữ, 7 học sinh giỏi nam. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh giỏi của lớp gồm 1 nam và 1 nữ để tham gia đại hội chi đoàn. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách lựa chọn ?

Lời giải:

Để lựa chọn được hai bạn thỏa mãn yêu cầu, ta chia làm hai công việc liên tiếp:

Công việc 1: Chọn một học sinh giỏi nữ, có 11 cách thực hiện.

Công việc 2: Chọn một học sinh giỏi nam, có 7 cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc nhân, sẽ có $11.7 = 77$ cách lựa chọn.

Bài 2. Trên bàn có 5 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 5; 4 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 4; 2 viên bi vàng được đánh số từ 1 đến 2.

a) Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 1 viên bi?

b) Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra ba viên bi khác màu ?

Lời giải:

a) Để chọn 1 viên bi ta có các trường hợp sau:

- Chọn 1 viên bi xanh có 5 cách.

- Chọn 1 viên bi đỏ có 4 cách.

- Chọn 1 viên bi vàng có 2 cách.

Theo quy tắc cộng có $5 + 4 + 2 = 11$ cách lấy ra một bi.

b) Để lấy ra ba viên bi khác màu ta có 3 hành động liên tiếp cần thực hiện:

Bước 1: Chọn 1 viên bi xanh bất kì: có 5 cách thực hiện.

Bước 2: Chọn 1 viên bi đỏ bất kì: có 4 cách thực hiện.

Bước 3: Chọn 1 viên bi vàng bất kì: có 2 cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc nhân có: $5.4.2 = 40$ cách chọn.

Bài 3. Một căn phòng được trang bị 6 bóng đèn. Để phòng có ánh sáng cần ít nhất một bóng đèn phải được bật. Hỏi có bao nhiêu cách bật, tắt các bóng đèn để căn phòng có ánh sáng ?

Lời giải:

Với mỗi bóng đèn ta có hai sự lựa chọn trạng thái là bật hoặc tắt.

Như vậy, theo quy tắc nhân sẽ có $2^6 = 64$ cách lựa chọn bật, tắt các bóng đèn đó.

Tuy nhiên có một trạng thái duy nhất là khi cả 6 bóng đèn đều tắt thì phòng không có ánh sáng.

Vậy để phòng có ánh sáng thì có $64 - 1 = 63$ cách bật, tắt các bóng đèn để căn phòng có ánh sáng.

Bài 4. Từ các chữ số 1; 2; 3; 5; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 200?

Lời giải:

+ Trường hợp 1: Số cần lập có 1 chữ số: có 5 số thỏa mãn là 1; 2; 3; 5; 9.

+ Trường hợp 2: Số cần lập có 2 chữ số.

Chọn chữ số hàng chục có: 5 cách.

Chọn chữ số hàng đơn vị có: 5 cách

Theo quy tắc nhân có: $5.5 = 25$ số thỏa mãn.

+ Trường hợp 3: Số cần lập có 3 chữ số.

Chọn chữ số hàng trăm có 1 cách (chữ số hàng trăm phải là 1) – vì số cần lập nhỏ hơn 200.

Chọn chữ số hàng chục có: 5 cách.

Chọn chữ số hàng đơn vị có: 5 cách

Theo quy tắc nhân có: $1.5.5 = 25$ số thỏa mãn.

Suy ra; số các số thỏa mãn đầu bài là: $5 + 25 + 25 = 55$ số.