Các bài toán về phép đồng dạng

I. Lý thuyết ngắn gọn

1. Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M'; N' của chúng ta có:

$$M'N' = kMN$$

$$\begin{cases} F(M) = M' \\ F(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = kMN (k > 0)$$

2. Nhận xét:

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số k = 1

- Phép vị tự $V_{(I;k)}$ là phép đồng dạng tỉ số $|k|$

- Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được phép đồng dạng tỉ số pk

- Phép đồng dạng tỉ số k là hợp thành của một phép dời hình và một phép vị tự tỉ số k hoặc - k. Nó cũng là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k hoặc - k và một phép dời hình

3. Phép đồng dạng tỉ số k có các tính chất sau:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữ các điểm ấy

- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng có độ dài bằng a thành đoạn thẳng có độ dài bằng ka

- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là k, biến góc thành góc bằng nó

- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR

4. Hai hình đồng dạng

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

II. Các dạng bài về phép đồng dạng

Dạng 1: **Xác định ảnh của một hình qua một phép đồng dạng**

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình x + y – 2 = 0. Viết phương trình đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I (-1; -1) tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45 độ

Lời giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm I (-1; -1) tỉ số $k=\frac{1}{2}$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng x + y + c = 0

Lấy $M(1;1)\in d$

$$M'(x';y')=V_{(I;\frac{1}{2})}(M)\Rightarrow \overrightarrow{IM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow \begin{cases} x'+1=\frac{1}{2}(1+1) \\ y'+1=\frac{1}{2}(1+1) \end{cases}\Rightarrow M'(0;0)\in d_1$$

Vậy phương trình của $d_1: x+y=0$

Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45 độ là đường thẳng Oy. Vậy phương trình $d': x=0$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng d: x – y + 1 = 0. Viết phương trình d’ là ảnh của đường thẳng d qua phép đồng dạng bằng cách thực hiện qua phép vị tự tâm I (1; 1), tỉ số k = 2 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;-1)$

Giải

Ta có $M(0;1)\in d$

Qua phép vị tự tâm I, tỉ số k = 2 ta có: $V_{(I;2)}(d)=d_1$

Suy ra phương trình d_1 có dạng x – y + c = 0

Mặt khác: $V_{(I;2)}(M)=M_1(x_1;y_1)\in d_1\Rightarrow \overrightarrow{IM_1}=2\overrightarrow{IM}\Rightarrow M_1(-1;1)$

Vậy $d_1: x-y+2=0$

Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ ta có: $T_{\vec{v}}(d_1)=d_2$

Suy ra phương trình d_2 có dạng: x – y + d = 0

$M_1 \in d_1 \Rightarrow T_{\vec{v}}(M_1) = M_2(x_2; y_2) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v} \Rightarrow M_2(-2;1)$

Vậy d_2 có phương trình x – y + 3 = 0

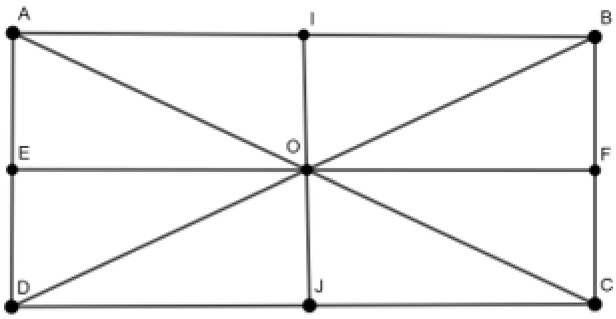
Qua phép đồng dạng đường thẳng d: x – y + 1 = 0 trở thành đường thẳng $d_2 : x - y + 3 = 0$

Dạng 2: Tìm phép đồng dạng biến hình H thành hình H'

Phương pháp giải: Tìm cách biểu thị phép đồng dạng đó như là kết quả của việc thực hiện liên tiếp các phép biến hình quen biết

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2

Giải



- Lấy đối xứng qua đường thẳng IJ

IJ là đường trung trực của AB và EF

Suy ra: $D_{IJ}(A) = B; D_{IJ}(E) = F$

$O \in IJ \Rightarrow D_{IJ}(O) = O \Rightarrow D_{IJ}(\triangle AEO) = \triangle BFO$

$\triangle BFO$ qua phép vị tự tâm B tỉ số 2

Ta có: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$

Suy ra: $C = V_{(B;2)}; d = V_{(B;2)}(O) \Rightarrow \triangle BCD = V_{(B;2)}(\triangle BFO)$

Vậy ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng theo đề bài là tam giác BCD

Ví dụ 4: Cho hai hình chữ nhật có tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài bằng $\frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng luôn có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

Giải

Giả sử ta có hai hình chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ và $\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{1}{2}$

Phép tịnh tiến $T_{\overline{AA'}}$ biến hình chữ nhật ABCD thành hình chữ nhật $A'B_1C_1D_1$

Phép quay $Q_{(A';\alpha)}$ với $\alpha=(A'B_1;A'B')$ biến hình chữ nhật $A'B_1C_1D_1$ thành hình chữ nhật $A'B_2C_2D_2$

Vì $\frac{A'D_2}{A'B_2}=\frac{A'D'}{A'B'}=\frac{1}{2}$ nên $\frac{A'D_2}{A'D'}=\frac{A'B_2}{A'B'}=\frac{A'C_2}{A'C'}$. Từ đó suy ra phép vị tự

$V_{(A';k)}$ với $k=\frac{A'D'}{A'D_2}=\frac{A'D'}{AD}$ sẽ biến hình chữ nhật thành $A'B_2C_2D_2$ thành hình chữ nhật A’B’C’D’

Vậy phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép biến hình $T_{\overline{AA}},V_{(A';k)}$ sẽ biến hình chữ nhật ABCD thành hình chữ nhật A’B’C’D’

Dạng 3: Dùng phép đồng dạng để giải toán

Phương pháp giải: Dùng các tính chất của phép đồng dạng

Ví dụ 5: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và điểm C. Tìm trên a và b các điểm A và B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.

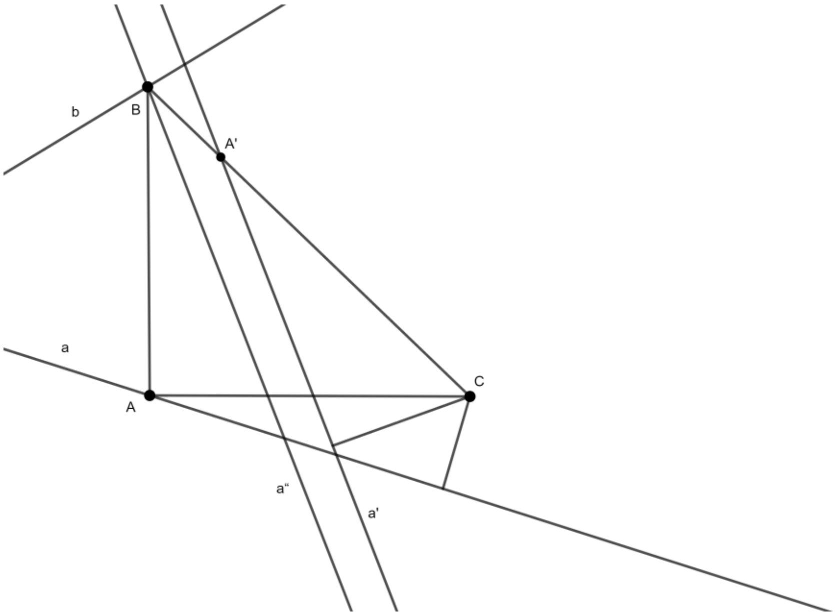
Lời giải:

Ta thấy góc lượng giác $(CA;CB)=-45^\circ$ và $\frac{CB}{CA}=\sqrt{2}$

Do đó có thể xem B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C, góc -45° và phép vị tự tâm C, tỉ số $\sqrt{2}$

Vì $A\in a$ nên $B\in aa''=F(a)$, B lại thuộc a

Do đó B là giao của a” với b



Ví dụ 6: Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCA’, CAB’, ABC’. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba tam giác đều BCA’, CAB’, ABC’. Chứng minh tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều

Lời giải:

Để chứng minh tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều ta xét các phép đồng dạng sau:

Kí hiệu $F(I,\varphi,k) = V_{(I,k)}Q_{(I;\varphi)}$ là phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I;\varphi)}$ và phép vị tự $V_{(I;k)}$. Ta xét các phép đồng dạng:

$$F_1 = F\left(C;30°;\sqrt{3}\right) \text{ và } F_2\left(B;30°;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Gọi I, J, K, H là các điểm trên CA', CA, BA', BO_3, BO_1 sao cho $CI = CO_1, CJ = CO_2, BK = BO_1, BH = AB, BE = BA'$ khi đó

$$F_1(O_1) = V_{(C;\sqrt{3})}Q_{(C;30)}(O_1) = V_{(C;\sqrt{3})}(I) = A'$$

Tương tự:

$$F_1(O_2) = V_{(C;\sqrt{3})}Q_{(C;30)}(O_2) = V_{(C;\sqrt{3})}(J) = A$$

$$F_2(A') = V_{(B;\frac{1}{\sqrt{3}})}Q_{(B;30)}(A') = V_{(B;\frac{1}{\sqrt{3}})}(E) = O_1$$

$$F_2(A) = V_{(B;\frac{1}{\sqrt{3}})}Q_{(B;30)}(A) = V_{(B;\frac{1}{\sqrt{3}})}(H) = O_3$$

Vậy $F_2F_1(O_2)=F_2(A)=O_3$ và $F_2F_1(O_1)=F_2(A')=O_1$

Mặt khác $F=F_2F_1$ là phép đồng dạng có tỉ số $k=k_1k_2=\sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=1$ và

$\varphi_1+\varphi_2=60^\circ$ nên F chính là phép quay tâm O_1 góc quay 60°

Do đó: $Q_{(O_1;60^\circ)}(O_2)=O_3$ nên tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều

III. Bài tập áp dụng

Bài 1: Chứng minh rằng hai đa giác đều có cùng số cạnh luôn đồng dạng với nhau

Bài 2: Cho hình thang ABCD có AB song song với CD, AD = a, DC = b còn hai đỉnh A, B cố định. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo

a. Tìm tập hợp các điểm c khi D thay đổi

b. Tìm tập hợp các điểm I khi c và D thay đổi như trong câu a

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD tâm I. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, CI, FC. Phép đồng dạng hợp thành bởi phép vị tự tâm C tỉ số k = 2 và phép đối xứng tâm I biến tứ giác IGHF thành:

A. AIFD

B. BCFI

C. CIEB

D. DIEA

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đồng dạng F hợp thành bởi phép vị tự tâm O (0; 0) tỉ số k = 3 và phép đối xứng trục Ox, biến đường thẳng d: x – y – 1 = 0 thành đường thẳng d’ có phương trình:

A. x - y + 3 = 0

B. x + y - 3 = 0

C. x + y + 3 = 0

D. x - y + 2 = 0

Bài 5: Cho điểm I (2; 1) điểm M (-1; 0) phép đồng dạng hợp thành bởi phép vị tự tâm I tỉ số k = -2 và phép đối xứng trục Ox biến M thành M'' có tọa độ bao nhiêu ?

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A (-2; -3) và B (4; 1). Phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Tính độ dài A'B'

Bài 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng

B. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số k = 1

C. Phép vị tự có tính chất bảo toàn khoảng cách

D. Phép vị tự không là phép dời hình

Bài 8: Cho hình vuông ABCD tâm O. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Phép dời hình nào sau đây biến tam giác AMO thành tam giác CPO?

A. Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AM}$

B. Phép đối xứng trục MP

C. Phép quay tâm A góc quay 180 độ

D. Phép quay tâm O góc quay -180 độ

Bài 9: Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình sau đây là một phép đồng dạng tỉ số k = 3

A. Phép tịnh tiến và phép đồng nhất

B. Phép tịnh tiến và phép quay

C. Phép dời hình và phép vị tự tỉ số $k = \frac{1}{3}$

D. Phép tịnh tiến và phép vị tự tỉ số k = -3

Bài 10: Phép đồng dạng F biến điểm M (x; y) thành M’ (x’; y’) thỏa mãn:
$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = -3x + y + 3 \end{cases}$$

Ảnh của điểm A (-2; 1) qua phép đồng dạng F là:

A. (6; 10)

B. (10; 6)

C. (6; -10)

D. (-6; 10)