Ôn tập chương IX

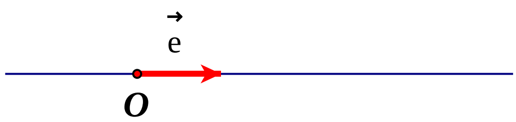
A. Lý thuyết

1. Tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ

1.1. Trục tọa độ

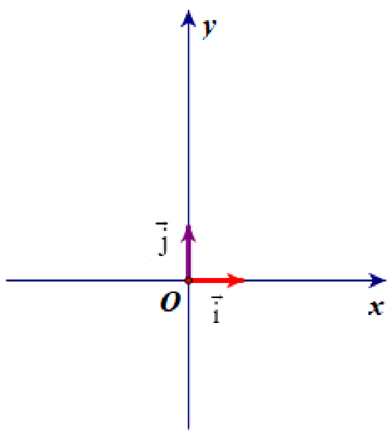
Trục tọa độ (gọi tắt là ***trục***) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O (gọi là ***điểm gốc***) và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị của trục.

Ta kí hiệu trục đó là $\left(O;\vec{e}\right)$.



1.2. Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ gồm hai trục $\left(O;\vec{i}\right)$ và $\left(O;\vec{j}\right)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là ***gốc tọa độ.*** Trục $\left(O;\vec{i}\right)$ được gọi là ***trục hoành*** và kí hiệu là Ox, trục $\left(O;\vec{j}\right)$ được gọi là ***trục tung*** và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy. Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ còn được kí hiệu là Oxy.



Chú ý: Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là *mặt phẳng tọa độ Oxy*, hay gọi tắt là *mặt phẳng Oxy*.

1.3. Tọa độ của một vectơ

Trong mặt phẳng Oxy, cặp số (x; y) trong biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ được gọi là ***tọa độ của vectơ*** $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ:

+) Cho $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Ta có cặp số (3; 2) là tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

Ta kí hiệu là $\vec{a} = (3; 2)$.

Trong đó 3 là hoành độ của vectơ $\vec{a}$ và 2 là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

+) Cho $\vec{p} = -5\vec{j} = 0\vec{i} - 5\vec{j}$.

Ta có cặp số (0; –5) là tọa độ của vectơ $\vec{p}$.

Ta kí hiệu là $\vec{p} = (0; -5)$.

Trong đó 0 là hoành độ của vectơ $\vec{p}$ và –5 là tung độ của vectơ $\vec{p}$.

Chú ý:

• $\vec{a} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Nếu cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Ví dụ:

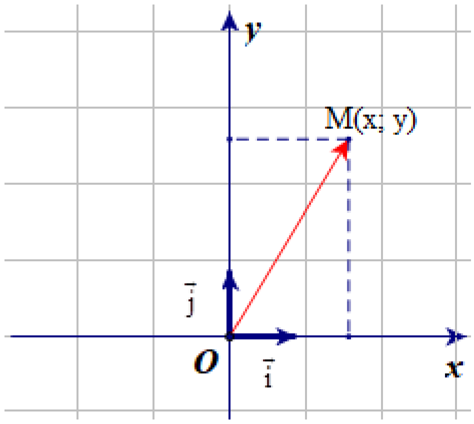
+) Ta có $\vec{h} = (-1; 7) \Leftrightarrow \vec{h} = -1.\vec{i} + 7\vec{j} = -\vec{i} + 7\vec{j}$.

+) Ta có $\vec{a}=(x;y)$ và $\vec{b}=(2;-4)$. Khi đó $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$.

Nghĩa là, $\vec{a}=(2;-4)$.

1.4. Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***tọa độ của điểm*** M.



Nhận xét:

• Nếu $\overrightarrow{OM}=(x;y)$ thì cặp số (x; y) là tọa độ của điểm M, kí hiệu M(x; y), x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của điểm M.

• M(x; y) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Ví dụ:

+) Nếu $\overrightarrow{OM}=(-3;8)$ thì cặp số (–3; 8) là tọa độ của điểm M.

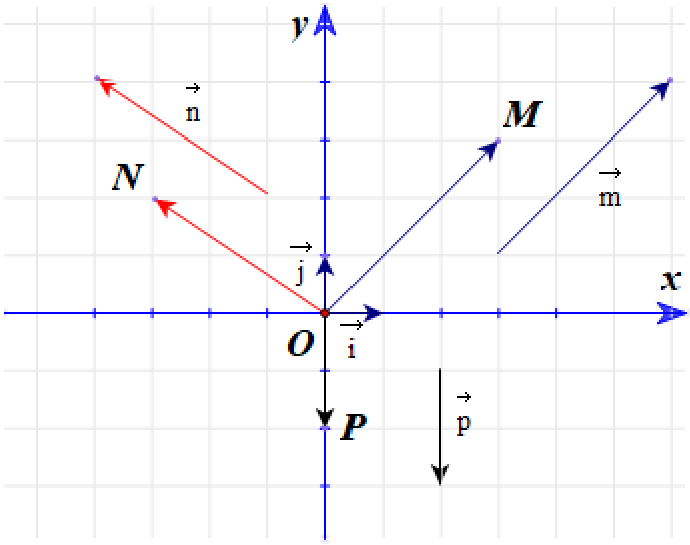
Ta kí hiệu là M(–3; 8).

Trong đó –3 là hoành độ của điểm M và 8 là tung độ của điểm M.

+) Cho điểm M(4; 9) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=4\vec{i}+9\vec{j}$.

Chú ý: Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M. Khi đó ta viết $M(x_M; y_M)$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm M, N, P được biểu diễn như hình bên.



a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ và các điểm M, N, P.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

+) $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

+) $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

+) $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j}$.

Vậy $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j}$.

b) Từ kết quả ở câu a), ta có:

+) $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (3;3)$

$\Rightarrow \vec{m} = \overrightarrow{OM} = (3;3)$ và M(3; 3).

+) $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = (-3;2)$

$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{ON} = (-3;2)$ và N(–3; 2).

+) $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (0;-2)$

$\Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{OP} = (0;-2)$ và P(0; –2).

Vậy $\vec{m} = (3;3)$, $\vec{n} = (-3;2)$, $\vec{p} = (0;-2)$ và M(3; 3), N(–3; 2), P(0; –2).

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và số thực k. Khi đó:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;a_2 + b_2)$;

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;a_2 - b_2)$;

(3) $k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$;

(4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

Ví dụ: Cho hai vectơ $\vec{a} = (10;-8)$, $\vec{b} = (2;5)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $\vec{a} + 4\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $2\vec{a}.(-4\vec{b})$.

Hướng dẫn giải

a) Với $\vec{a} = (10;-8)$, $\vec{b} = (2;5)$ ta có:

+) $\vec{a}+\vec{b}=(10+2;-8+5)=(12;-3)$;

+) $\vec{a}-\vec{b}=(10-2;-8-5)=(8;-13)$;

+) $2\vec{a}=(2.10;2.(-8))=(20;-16)$;

+) $4\vec{b}=(4.2;4.5)=(8;20)$.

Ta suy ra $\vec{a}+4\vec{b}=(10+8;-8+20)=(18;12)$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=(12;-3)$, $\vec{a}-\vec{b}=(8;-13)$, $2\vec{a}=(20;-16)$, $\vec{a}+4\vec{b}=(18;12)$.

b) Với $\vec{a}=(10;-8)$, $\vec{b}=(2;5)$ ta có:

+) $\vec{a}.\vec{b}=10.2+(-8).5=20-40=-20$;

+) Từ kết quả câu a), ta có $2\vec{a}=(20;-16)$ và $4\vec{b}=(8;20)$.

Ta suy ra $2\vec{a}=(20;-16)$ và $-4\vec{b}=(-8;-20)$.

Khi đó ta có $2\vec{a}.(-4\vec{b})=20.(-8)+(-16).(-20)=-160+320=160$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=-20$ và $2\vec{a}.(-4\vec{b})=160$.

3. Áp dụng của tọa độ vectơ

3.1. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm A(x_A; y_A), B(x_B; y_B). Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Ví dụ: Cho ba điểm A(2; 5), B(–1; 1), C(5; –7). Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$

.

Hướng dẫn giải

Với A(2; 5), B(–1; 1), C(5; –7) ta có:

• $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (5 - 2; -7 - 5) = (3; -12)$.

• $\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C; y_B - y_C) = (-1 - 5; 1 - (-7)) = (-6; 8)$.

• $\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B; y_A - y_B) = (2 - (-1); 5 - 1) = (3; 4)$.

Vậy $\overrightarrow{AC} = (3; -12)$, $\overrightarrow{CB} = (-6; 8)$, $\overrightarrow{BA} = (3; 4)$.

3.2. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Cho hai điểm A(x_A; y_A) và B(x_B; y_B). Tọa độ trung điểm M(x_M; y_M) của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho ΔABC có A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C). Tọa độ trọng tâm G(x_G; y_G) của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ: Cho ΔDEF có tọa độ các đỉnh là D(3; 1), E(5; 8), F(9; 4).

a) Tìm tọa độ trung điểm H của cạnh EF.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔDEF.

Hướng dẫn giải

a) Với E(5; 8), F(9; 4):

Vì H là trung điểm của cạnh EF.

Ta suy ra $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{5+9}{2} = 7 \\ y_M = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$

Vậy H(7; 6).

b) Với D(3; 1), E(5; 8), F(9; 4):

Vì G là trọng tâm của ΔDEF.

Ta suy ra $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_D + x_E + x_F}{3} = \dfrac{3+5+9}{3} = \dfrac{17}{3} \\ y_G = \dfrac{y_D + y_E + y_F}{3} = \dfrac{1+8+4}{3} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{17}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$.

3.3. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm A(x_A; y_A), B(x_B; y_B). Ta có:

• $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;

• $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương ⇔ $a_1b_2 – a_2b_1 = 0$;

• $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;

• $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;

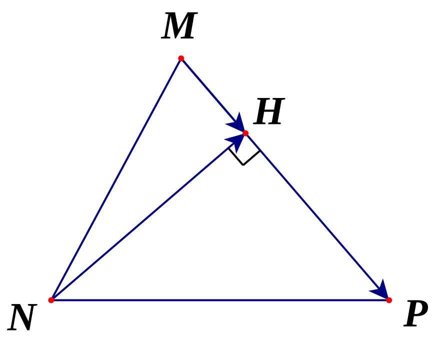
• $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔMNP có M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8).

a) Tìm tọa độ H là chân đường cao của ΔMNP kẻ từ N.

b) Giải tam giác MNP.

Hướng dẫn giải



a) Với M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8).

Gọi H(x; y).

Ta có:

+) $\overrightarrow{NH}=\left(x-\left(-3\right);y-\left(-2\right)\right)=\left(x+3;y+2\right)$.

+) $\overrightarrow{MH}=\left(x-2;y-1\right)$.

+) $\overrightarrow{MP}=\left(7-2;-8-1\right)=\left(5;-9\right)$

Vì H(x; y) là chân đường cao của ΔMNP kẻ từ N nên ta có NH ⊥ MP.

Ta suy ra $\overrightarrow{NH}\perp\overrightarrow{MP}$.

Do đó $\overrightarrow{NH}.\overrightarrow{MP}=0$.

⇔ (x + 3).5 + (y + 2).(–9) = 0.

⇔ 5x – 9y – 3 = 0 (1).

Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{MH},\overrightarrow{MP}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ (x – 2).(–9) – (y – 1).5 = 0.

$\Leftrightarrow$ –9x – 5y + 23 = 0 (2).

Từ (1), (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5x-9y-3=0 \\ -9x+5y+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{24}{7} \\ y=\dfrac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{11}{7}\right)$.

b) Với M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8) ta có:

+) $\overrightarrow{MN}=\left(-5;-3\right)$ và $\overrightarrow{NM}=\left(5;3\right)$

$\Rightarrow MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(-5\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{34}$.

+) $\overrightarrow{MP}=\left(5;-9\right)$.

$\Rightarrow MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{5^2+\left(-9\right)^2}=\sqrt{106}$.

+) $\overrightarrow{NP}=\left(10;-6\right)$.

$\Rightarrow NP=\left|\overrightarrow{NP}\right|=\sqrt{10^2+\left(-6\right)^2}=2\sqrt{34}$.

+) $\cos M=\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=\dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}{MN.MP}=\dfrac{-5.5+\left(-3\right).\left(-9\right)}{\sqrt{34}.\sqrt{106}}\approx 0,033$.

Suy ra $M\approx 88°7'$.

+) $\cos N=\cos\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}\right)=\dfrac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP}=\dfrac{5.10+3.\left(-6\right)}{\sqrt{34}.2\sqrt{34}}=\dfrac{8}{17}$.

Suy ra $N\approx 61°56'$.

+) Ta có $M + N + P = 180°$ (định lí tổng ba góc của một tam giác).

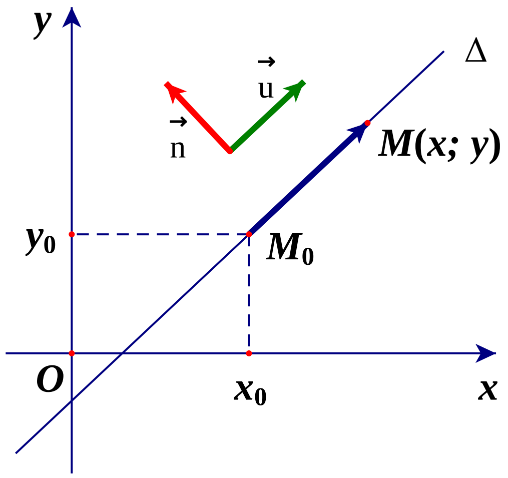
$P = 180° - M - N \approx 180° - 88°7' - 61°56' = 29°57'$.

Vậy $MN = \sqrt{34}$, $MP = \sqrt{106}$, $NP = 2\sqrt{34}$,

$M \approx 88°7'$, $N \approx 61°55'$, $P \approx 29°57'$.

4. Phương trình đường thẳng

4.1. Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng



Vectơ $\vec{u}$ được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

Chú ý:

• Nếu đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ thì Δ sẽ nhận $\vec{u} = (b; -a)$ hoặc $\vec{u} = (-b; a)$ là một vectơ chỉ phương.

• Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

• Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của Δ.

Ví dụ:

a) Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$. Tìm một vectơ pháp tuyến của d.

b) Cho đường thẳng d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;7)$. Tìm ba vectơ chỉ phương của d'.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

Suy ra d cũng có vectơ chỉ phương $3\vec{u} = (2;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$.

Vậy d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$.

b)

• d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;7)$.

Suy ra d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-7;3)$; $-\vec{u} = (7;-3)$.

• d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-7;3)$.

Suy ra d' cũng có vectơ chỉ phương $2\vec{u} = (-14;6)$.

Vậy ba vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u} = (-7;3)$; $-\vec{u} = (7;-3)$; $2\vec{u} = (-14;6)$.

4.2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, ta gọi:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (\text{với } u_1^2 + u_2^2 > 0, t \in \mathbb{R})$$

là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Chú ý: Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ và ngược lại.

Ví dụ:

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M(1; 3) và nhận $\vec{u} = (2;9)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Trong các điểm A(2; 5), B(3; 12), C(–4; 6) thì điểm nào thuộc đường thẳng d?

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;9)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 9t \end{cases}$.

b)

• Thay tọa độ điểm A vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$\begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ 5 = 3 + 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{2}{9} \end{cases}$ (vô lý).

Khi đó A(2; 5) ∉ d.

• Thay tọa độ điểm B vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$$\begin{cases}3=1+2t\\12=3+9t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=1\end{cases}\Leftrightarrow t=1.$$

Khi đó B(3; 12) ∈ d.

• Thay tọa độ điểm C vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$$\begin{cases}-4=1+2t\\6=3+9t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{-5}{2}\\t=\dfrac{1}{3}\end{cases}\text{ (vô lý).}$$

Khi đó C(–4; 6) ∉ d.

Vậy chỉ có điểm B thuộc đường thẳng d.

4.3. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng: ax + by + c = 0, với a và b không đồng thời bằng 0.

Chú ý:

• Mỗi phương trình ax + by + c = 0 (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$.

• Khi cho phương trình đường thẳng ax + by + c = 0, ta hiểu a và b không đồng thời bằng 0.

Ví dụ: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm H(2; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;-1)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm K(5; –8) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-4)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M(6; 3), N(9; 1).

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm H(2; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(-2; -1\right)$ nên ta có phương trình tổng quát của Δ là: –2(x – 2) – 1(y – 1) = 0

⇔ –2x – y + 5 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là –2x – y + 5 = 0.

b) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(3; -4\right)$ nên Δ nhận $\vec{n} = \left(4; 3\right)$ làm vectơ pháp tuyến.

Đường thẳng Δ đi qua điểm K(5; –8) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(4; 3\right)$ nên ta có phương trình tổng quát của Δ là: 4(x – 5) + 3(y + 8) = 0

⇔ 4x + 3y + 4 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là 4x + 3y + 4 = 0.

c) Với M(6; 3), N(9; 1) ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(3; -2\right)$.

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = \left(3; -2\right)$ nên Δ nhận $\vec{n} = \left(2; 3\right)$ làm vectơ pháp tuyến.

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(6; 3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(2; 3\right)$ nên phương trình tổng quát của Δ là: 2(x – 6) + 3(y – 3) = 0

⇔ 2x + 3y – 21 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là 2x + 3y – 21 = 0.

Nhận xét:

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ có dạng:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \text{ (với } x_B \neq x_A,\ y_B \neq y_A\text{).}$$

• Nếu đường thẳng Δ cắt trục Ox và Oy tại A(a; 0) và B(0; b) (a, b khác 0) thì phương trình Δ có dạng:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (1).$$

Phương trình (1) còn được gọi là *phương trình đoạn chắn.*

Ví dụ:

+) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm P(2; 5), Q(1; 8).

Suy ra phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-5}{8-5} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{3}$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{3}$.

+) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm X(–4; 0) và Y(0; 5).

Vậy phương trình đoạn chắn của Δ: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$.

4.4. Liên hệ giữa đồ thị hàm số bậc nhất và đường thẳng

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = kx + y_0$ ($k \neq 0$) là một đường thẳng d đi qua điểm $M(0; y_0)$ và có hệ số góc k. Ta có thể viết: $y = kx + y_0 \Leftrightarrow kx - y + y_0 = 0$.

Như vậy, đồ thị hàm bậc nhất $y = kx + y_0$ là một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(k;-1)$ và có phương trình tổng quát là $kx - y + y_0 = 0$. Đường thẳng này không vuông góc với Ox và Oy.

Ngược lại, cho đường thẳng d có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ với a và b đều khác 0, khi đó ta có thể viết: $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Leftrightarrow y = kx + y_0$.

Như vậy d là đồ thị của hàm bậc nhất y = kx + y_0 với hệ số góc $k = -\frac{a}{b}$ và tung độ gốc $y_0 = -\frac{c}{b}$.

Ví dụ:

+) Cho đường thẳng d có phương trình: y = 2x + 1 ⇔ 2x – y + 1 = 0.

Ta suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (2; -1)$.

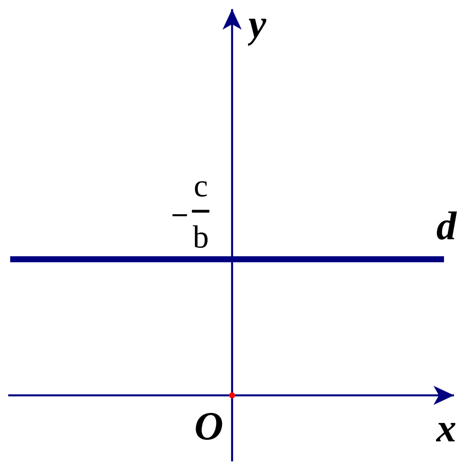
+) Cho đường thẳng d' có phương trình: x + 5y – 2 = 0 ⇔ $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.

Khi đó ta có d là đồ thị của hàm bậc nhất y = kx + y_0, với hệ số góc $k = -\frac{1}{5}$ và tung độ gốc $y_0 = \frac{2}{5}$.

Chú ý:

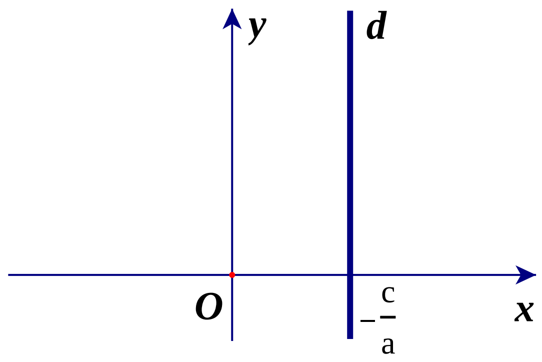
• Nếu a = 0 và b ≠ 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành $y = -\frac{c}{b}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$.



• Nếu b = 0 và a ≠ 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành $x = -\frac{c}{a}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a};0\right)$.



Trong cả hai trường hợp trên, đường thẳng d không phải là đồ thị của hàm số bậc nhất.

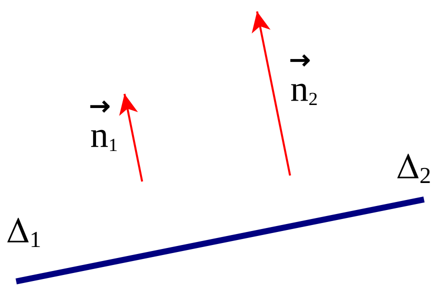
5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $(a_1^2 + b_1^2 > 0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$ và đường thẳng Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_2^2 + b_2^2 > 0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.

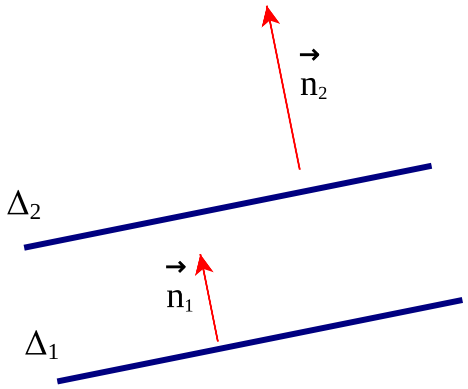
Ta có thể dùng phương pháp tọa độ để xét vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2 như sau:

– Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tùy ý trên Δ_1.

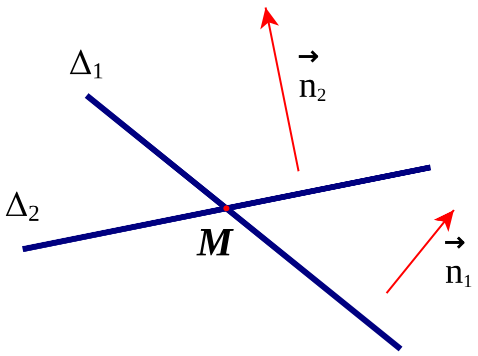
+ Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.



+ Nếu P ∉ Δ_2 thì Δ_1 // Δ_2.

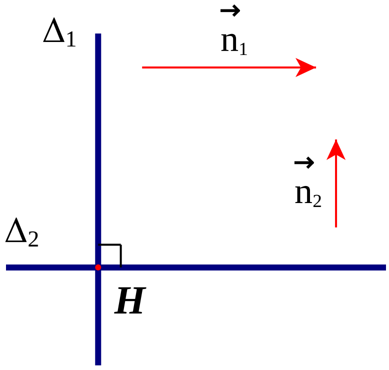


– Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm M(x_0; y_0) với (x_0; y_0) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.



Chú ý:

a) Nếu $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.



b) Để xét hai vectơ $\vec{n}_1(a_1;b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2;b_2)$ cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$:

+ Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ thì hai vectơ cùng phương.

+ Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hai vectơ không cùng phương.

Trong trường hợp tất cả các hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 đều khác 0, ta có thể xét hai trường hợp:

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ cùng phương.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ không cùng phương.

Ví dụ: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) Δ_1: $4x - 10y + 1 = 0$ và Δ_2: $x + y + 2 = 0$.

b) Δ_1: $12x - 6y + 6 = 0$ và Δ_2: $2x - y + 5 = 0$.

c) Δ_1: $8x + 10y - 12 = 0$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

d) Δ_1: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 4t' \\ y = 2 + 5t' \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Δ_1: $4x - 10y + 1 = 0$ và Δ_2: $x + y + 2 = 0$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4;-10)$ và $\vec{n}_2 = (1;1)$.

Ta có $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm M.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 10y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Δ_1: $12x - 6y + 6 = 0$ và Δ_2: $2x - y + 5 = 0$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (12;-6)$ và $\vec{n}_2 = (2;-1)$.

Ta có $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn $M(0; 1) \in \Delta_1$.

Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng Δ_2, ta được: $2.0 - 1 + 5 = 4 \neq 0$.

Suy ra $M(0; 1) \notin \Delta_2$.

Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.

c) Δ_1: $8x + 10y - 12 = 0$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (8;10)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (5;-4)$.

Suy ra Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (4;5)$.

Ta có $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn M(–6; 6) ∈ Δ_2.

Thế tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng Δ_1, ta được: 8.(–6) + 10.6 – 12 = 0.

Suy ra M(–6; 6) ∈ Δ_1.

Vậy $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

d) Δ_1: $\begin{cases} x=-1-5t \\ y=2+4t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x=-6+4t' \\ y=2+5t' \end{cases}$

• Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(-5;4)$.

Suy ra Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(4;5)$.

• Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(4;5)$.

Suy ra Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(5;-4)$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(4;5)$ và $\vec{n}_2=(5;-4)$.

Ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_2$ = 4.5 + 5.(–4) = 0.

Suy ra $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Do đó $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Δ_1 đi qua điểm A(–1; 2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(4;5)$.

Suy ra phương trình tổng quát của Δ_1: 4(x + 1) + 5(y – 2) = 0 ⇔ 4x + 5y – 6 = 0.

Tương tự, ta tìm được phương trình tổng quát của Δ_2: 5x – 4y + 38 = 0.

Gọi M(x; y) là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

Suy ra tọa độ điểm M thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 6 = 0 \\ 5x - 4y + 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{166}{41} \\ y = \dfrac{182}{41} \end{cases}$$

Khi đó ta có tọa độ là $M\left(-\dfrac{166}{41};\dfrac{182}{41}\right)$.

Vậy Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau tại điểm $M\left(-\dfrac{166}{41};\dfrac{182}{41}\right)$.

6. Góc giữa hai đường thẳng

6.1. Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

• Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2.

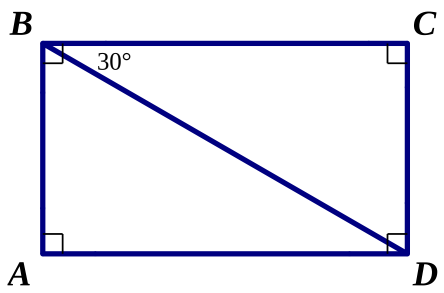
• Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Ta quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Như vậy góc α giữa hai đường thẳng luôn thỏa mãn: $0° \le \alpha \le 90°$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\Delta_1, \Delta_2\right)$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Ví dụ: Cho hình chữ nhật ABCD có $CBD = 30°$.



Tính các góc: (BD, BC), (AB, AD), (AD, BC), (AB, BD).

Hướng dẫn giải

Ta có:

+) $CBD = 30°$. Suy ra (BD, BC) = 30°.

+) Vì AB ⊥ AD nên (AB, AD) = 90°.

+) Vì AD // BC nên (AD, BC) = 0°.

+) Ta có $ABD + DBC = 90°$ (Vì AB ⊥ BC).

$\Leftrightarrow ABD = 90° - DBC = 90° - 30° = 60°$.

Vì $ABD = 60°$ nên (AB, BD) = 60°.

Vậy (BD, BC) = 30°, (AB, AD) = 90°, (AD, BC) = 0°, (AB, BD) = 60°.

6.2. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (a_1; b_1), \vec{n}_2 = (a_2; b_2)$.

Ta có công thức: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Nhận xét: Nếu Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$.

Chú ý: Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hai vectơ pháp tuyến vuông góc. Do đó:

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow k_1k_2 = -1.$$

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích các hệ số góc bằng –1 thì vuông góc với nhau.

Ví dụ: Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $x - 2y + 5 = 0$ và d_2: $3x - y = 0$.

b) d_1: $4x + 3y - 21 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = -1 + 8t \end{cases}$

c) d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) d_1: $x - 2y + 5 = 0$ và d_2: $3x - y = 0$

d_1, d_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; -2), \vec{n}_2 = (3; -1)$.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|1.3 + (-2).(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}.\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $(d_1, d_2) = 45°$.

Vậy $(d_1, d_2) = 45°$.

b) d_1: 4x + 3y – 21 = 0 và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = -1 + 8t \end{cases}$

d_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (4;3)$.

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-6;8)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (8;6)$.

Ta có $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$.

Suy ra $\vec{n}_2$ // $\vec{n}_1$.

Vậy $(d_1, d_2) = 0°$.

c) d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$

d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (-1;2), \vec{u}_2 = (-4;-2)$.

Ta có $\vec{u}_1.\vec{u}_2$ = (–1).(–4) + 2.(–2) = 0.

Suy ra $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Vậy $(d_1, d_2) = 90°$.

7. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình ax + by + c = 0 ($a^2 + b^2 > 0$) và điểm $M_0(x_0; y_0)$. ***Khoảng cách*** từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi công thức: $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ví dụ: Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau:

a) A(3; 4) và Δ: 4x + 3y + 1 = 0.

b) B(1; 2) và d: 3x – 4y + 1 = 0.

Hướng dẫn giải

a) Với A(3; 4) và Δ: 4x + 3y + 1 = 0 ta có:

$$d(A,\Delta)=\frac{|4.3+3.4+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng 5.

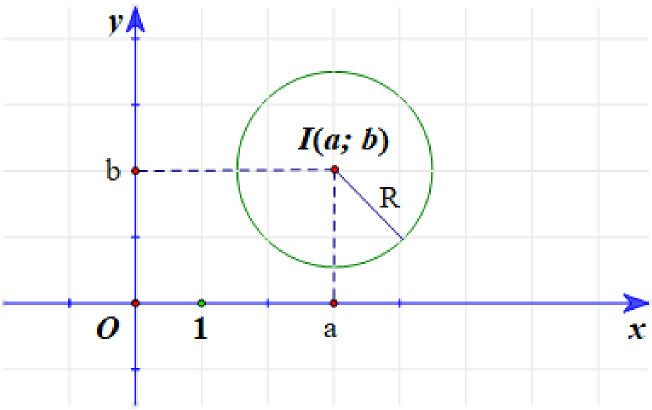
b) Với B(1; 2) và d: 3x – 4y + 1 = 0 ta có:

$$d(B,d)=\frac{|3.1-4.2+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{4}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d bằng $\frac{4}{5}$.

8. Phương trình đường tròn

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R.



Phương trình $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ được gọi là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính R.

Ví dụ: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm I(2; –3), bán kính R = 2.

b) (C) có đường kính AB với A(1; 6), B(–3; 2).

c) (C) đi qua ba điểm A(–2; 4), B(5; 5), C(6; –2).

Hướng dẫn giải

a) Đường tròn (C) có tâm I(2; –3), bán kính R = 2.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

b) Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C).

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và đường kính AB nên I là trung điểm AB.

Với A(1; 6), B(–3; 2).

Suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ b = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$

Khi đó ta có tọa độ I(–1; 4).

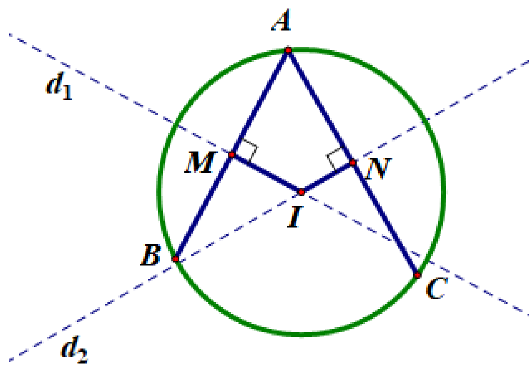
Ta có $\overrightarrow{IA} = (2;2)$.

Suy ra $R = IA = \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Đường tròn (C) có tâm I(–1; 4), bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ta có M là trung điểm AB với A(–2; 4), B(5; 5).

Suy ra $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Tương tự, ta có N(2; 1).

Với A(–2; 4), B(5; 5), C(6; –2) ta có $\overrightarrow{AB} = (7;1)$, $\overrightarrow{AC} = (8;-6)$.

Đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB đi qua điểm $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (7;1)$.

Suy ra phương trình d_1: $7\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{9}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 7x+y-15=0$.

Tương tự, ta có phương trình đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC:

$8(x-2)-6(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x-3y-5=0$.

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và (C) đi qua ba điểm A, B, C nên IA = IB = IC (= R).

Vì IA = IB nên I nằm trên đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB.

Tương tự, ta có I nằm trên đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC.

Vì vậy ta suy ra I là giao điểm của d_1 và d_2.

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + y - 15 = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra I(2; 1).

Với I(2; 1) và A(–2; 4) ta có $\overrightarrow{IA} = \left(-4; 3\right)$.

Suy ra $R = IA = \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{\left(-4\right)^2 + 3^2} = 5$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = 25$.

Ví dụ: Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $(x – 4)^2 + (y – 10)^2 = 9$.

b) $(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = 64$.

c) $x^2 + (y – 1)^2 = 36$.

Hướng dẫn giải

a) $(x – 4)^2 + (y – 10)^2 = 9$

Đường tròn (C) có tâm I(4; 10), bán kính $R = \sqrt{9} = 3$.

b) $(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = 64$

Đường tròn (C) có tâm I(–2; 5), bán kính $R = \sqrt{64} = 8$.

c) $x^2 + (y - 1)^2 = 36$.

Đường tròn (C) có tâm I(0; 1), bán kính $R = \sqrt{36} = 6$.

Nhận xét: Ta có $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$.

Vậy phương trình đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$. Khi đó đường tròn (C) có tâm I(a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Ví dụ: Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Nếu là phương trình đường tròn, hãy tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = -1$, $b = 3$, $c = -15$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 9 + 15 = 25 > 0$.

Vậy phương trình đã cho là phương trình đường tròn có tâm I(–1; 3), bán kính R = 5.

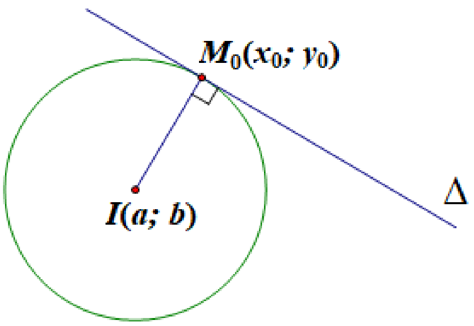
b) Ta có $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$.

Phương trình trên có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = -1$, $b = -2$, $c = 7$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 7 = -2 < 0$.

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

9. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm I(a; b) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn là:

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0.$$

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ tại điểm M(3; –1).

Hướng dẫn giải

Ta có $(3 - 2)^2 + (-1 + 3)^2 = 5$.

Suy ra M ∈ (C).

Đường tròn (C) có tâm I(2; –3).

Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm M(3; –1) là:

$(2 - 3)(x - 3) + [-3 - (-1)].[y - (-1)] = 0.$

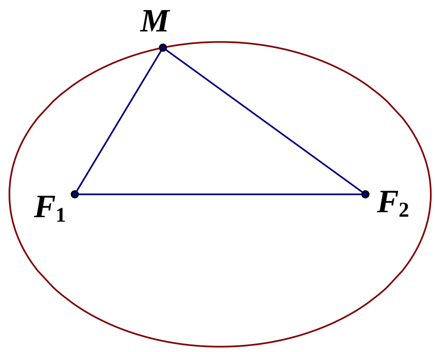
$\Leftrightarrow -1.(x - 3) + (-2).(y + 1) = 0.$

$\Leftrightarrow -x - 2y + 1 = 0.$

Vậy phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) cần tìm là $-x - 2y + 1 = 0$.

10. Elip

10.1. Nhận biết elip

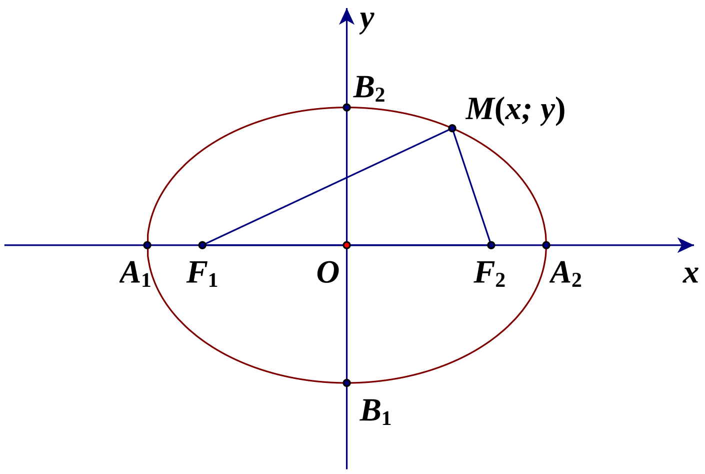


Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi 2a lớn hơn F_1F_2. ***Elip*** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip ($a > c$).

10.2. Phương trình chính tắc của elip



Cho elip (E) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

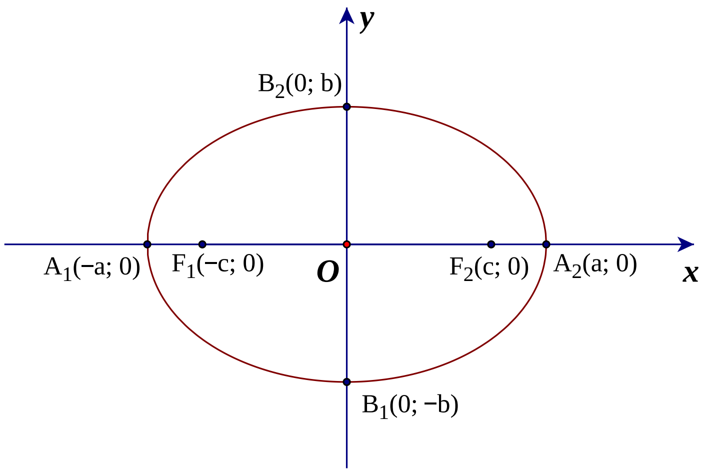
Người ta chứng minh được:

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1),$$

trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc của elip.***

Chú ý:



• (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(–a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0; –b)$, $B_2(0; b)$.

• Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các ***đỉnh*** của elip.

• Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục lớn***, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục nhỏ*** của elip.

• Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

• Nếu $M(x; y) \in (E)$ thì $|x| \le a$, $|y| \ge b$.

Ví dụ: Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\frac{2}{5}$.

a) Tính độ dài trục nhỏ của elip.

b) Viết phương trình chính tắc của elip.

Hướng dẫn giải

a) Ta có độ dài trục lớn bằng 10. Ta suy ra 2a = 10.

Suy ra a = 5.

Theo đề, ta có tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\frac{2}{5}$.

Suy ra $\frac{2c}{2a} = \frac{2}{5}$.

$\Leftrightarrow c = \frac{2}{5}.a = \frac{2}{5}.10 = 4$.

Ta có $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Suy ra 2b = 2.3 = 6.

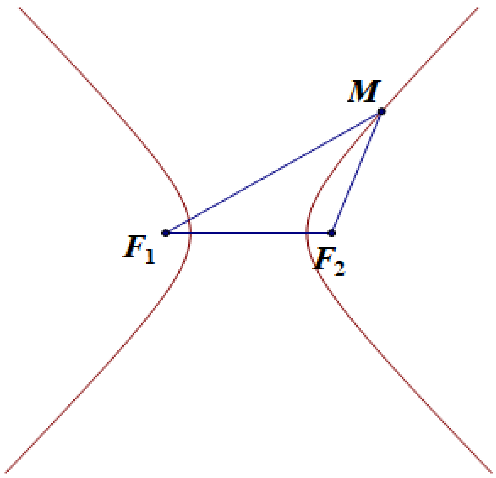
Vậy độ dài trục nhỏ của elip (E) bằng 6.

b) Ta có a = 5 và b = 3.

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

11. Hypebol

11.1. Nhận biết hypebol

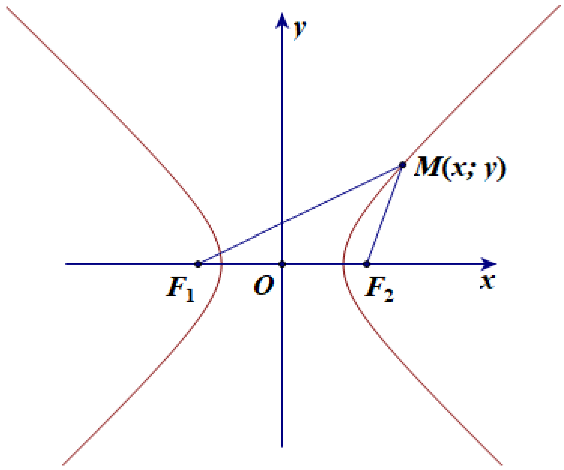


Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi 2a nhỏ hơn F_1F_2. ***Hypebol*** (H) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $|F_1M – F_2M| = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol ($c > a$).

11.2. Phương trình chính tắc của hypebol



Cho hypebol (H) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Điểm M thuộc hypebol (H) khi và chỉ khi $|F_1M - F_2M| = 2a$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

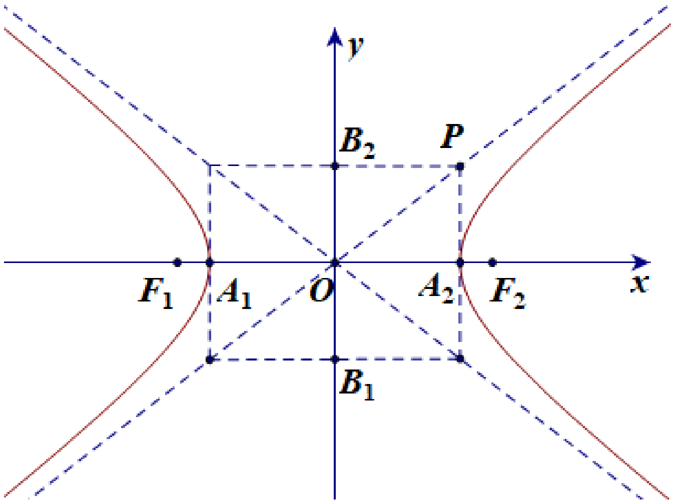
Người ta chứng minh được:

$$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2),$$

trong đó $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Phương trình (2) gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol.***

Chú ý:



• (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1(–a; 0)$ và $A_2(a; 0)$. Nếu ta vẽ hai điểm $B_1(0; –b)$ và $B_2(0; b)$ vào hình chữ nhật OA_2PB_2 thì $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.

• Các điểm A_1, A_2 gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.

• Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục thực***, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục ảo*** của hypebol.

• Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của hypebol.

• Nếu $M(x; y) \in (H)$ thì $x \le –a$ hoặc $x \ge a$.

Ví dụ: Cho hypebol (H) có một tiêu điểm $F_2(8; 0)$ và (H) đi qua điểm A(5; 0). Viết phương trình chính tắc của hypebol (H).

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó a, b > 0.

Vì $A(5; 0) \in (H)$ nên ta có $\frac{5^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$. Suy ra a = 5.

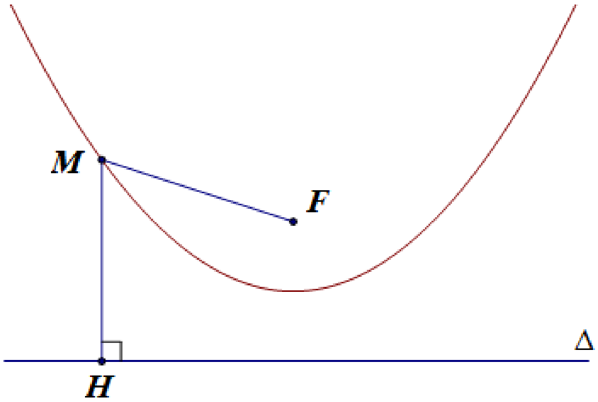
Do (H) có một tiêu điểm $F_2(8; 0)$ nên ta có c = 8.

Suy ra $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$.

12. Parabol

12.1. Nhận biết parabol



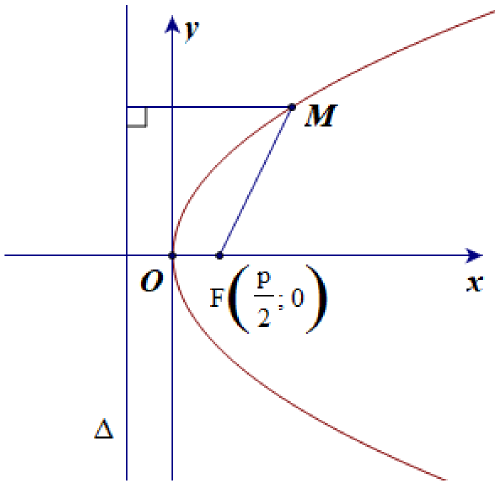
Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và Δ.

F gọi là ***tiêu điểm*** và Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P).

12.2. Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là p, hiển nhiên p > 0.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.



Người ta chứng minh được:

M(x; y) ∈ (P) ⇔ $y^2 = 2px$ (3).

Phương trình (3) gọi là ***phương trình chính tắc của parabol.***

Chú ý:

• O gọi là ***đỉnh*** của parabol (P).

• Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).

• p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).

• Nếu M(x; y) ∈ (P) thì x ≥ 0 và M'(x; –y) ∈ (P).

Ví dụ: Viết phương trình chính tắc của parabol (P), biết (P) có đường chuẩn Δ: x + 4 = 0.

Hướng dẫn giải

(P) có đường chuẩn Δ: x + 4 = 0.

Ta suy ra $\frac{p}{2} = 4$.

Khi đó p = 2.4 = 8.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 16x$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của $\vec{u}$, với $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

c) Tìm tọa độ của $\vec{v}$, với $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

d) Tìm các số thực h, k sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

+) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2;1)$;

+) $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = (3;4)$;

+) $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{c} = (7;2)$.

Vậy $\vec{a} = (2;1), \vec{b} = (3;4), \vec{c} = (7;2)$.

b) Ta có:

+) $2\vec{a} = (2.2;2.1) = (4;2)$.

+) $3\vec{b} = (3.3;3.4) = (9;12)$.

Ta suy ra $2\vec{a} - 3\vec{b} = (4-9;2-12) = (-5;-10)$.

Khi đó ta có $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (-5+7;-10+2) = (2;-8)$.

Vậy $\vec{u} = (2;-8)$.

c) Ta có $\vec{b}-\vec{c}=(3-7;4-2)=(-4;2)$.

Khi đó ta có $\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}=(-4-2;2-1)=(-6;1)$.

Theo đề, ta có: $\vec{v}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

$\Leftrightarrow \vec{v}=\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}=(-6;1)$.

Vậy $\vec{v}=(-6;1)$.

d) Ta có:

+) $k\vec{a}=(2k;k)$;

+) $h\vec{b}=(3h;4h)$.

Suy ra $k\vec{a}+h\vec{b}=(2k+3h;k+4h)$.

Ta có $\vec{c}=k\vec{a}+h\vec{b}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7=2k+3h \\ 2=k+4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{22}{5} \\ h=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $k=\dfrac{22}{5}, h=-\dfrac{3}{5}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC biết A(–3; 2), B(4; 3) và điểm C nằm trên trục Ox.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC và điểm C, biết G nằm trên trục Oy.

b) Giải ΔABC.

c) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.

Hướng dẫn giải

a) Vì C nằm trên trục Ox nên ta có tọa độ $C(x_C; 0)$.

Vì G nằm trên trục Oy nên ta có tọa độ G(0; y_G).

Ta có G là trọng tâm của ΔABC.

Ta suy ra $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-3+4+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{2+3+0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_G = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$, $C(-1;0)$.

b) Với A(–3; 2), B(4; 3), C(–1; 0) ta có:

+) $\overrightarrow{AB} = (4-(-3);3-2) = (7;1)$.

$\Rightarrow AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{7^2+1^2} = 5\sqrt{2}$.

+) $\overrightarrow{AC} = (-1-(-3);0-2) = (2;-2)$.

$\Rightarrow AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

+) $\overrightarrow{BC} = (-1-4;0-3) = (-5;-3)$.

$\Rightarrow BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$.

+) $\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{7.2+1.(-2)}{5\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5}$.

Suy ra $A = 53°8'$.

+) $\cos B = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}$

Do đó cosB $= \dfrac{-7.(-5)+(-1).(-3)}{5\sqrt{2}.\sqrt{34}} = \dfrac{19\sqrt{17}}{85}$.

Suy ra $B = 22°50'$.

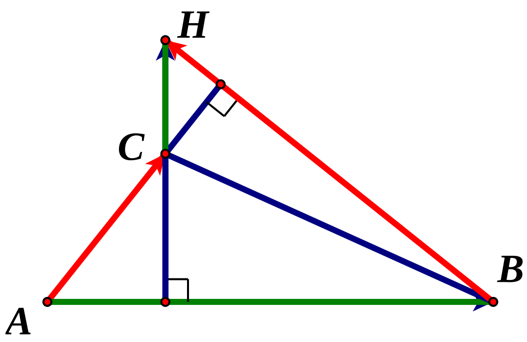
+) Ta có $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc của một tam giác).

$\Leftrightarrow C = 180° - A - B \approx 180° - 53°8' - 22°50' = 104°2'$.

Vậy $AB = 5\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{34}$,

$A \approx 53°8', B \approx 22°50', C \approx 104°2'$.

c)



Gọi H(x; y).

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}=\left(x-4;y-3\right)$ và $\overrightarrow{CH}=\left(x+1;y\right)$.

Ta có H(x; y) là trực tâm của ΔABC.

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-4\right).2+\left(y-3\right).\left(-2\right)=0\\ \left(x+1\right).7+y.1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y-2=0\\ 7x+y+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}\\ y=-\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

Vậy $H\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{7}{4}\right)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=\left(1;2\right), \vec{b}=\left(-3;1\right), \vec{c}=\left(6;5\right)$. Tìm m để $\vec{u}=m\vec{a}+\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $m\vec{a}=\left(m;2m\right)$.

Ta suy ra $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b} = (m-3; 2m+1)$.

Ta có $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{c}$ ⇔ (m – 3).5 – (2m + 1).6 = 0.

⇔ –7m – 21 = 0

⇔ m = –3.

Vậy m = –3 thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 4. Cho ΔABC có A(–2; 3), B(2; 5), C(5; 1).

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB và AC.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng BC.

c) Tính khoảng cách từ điểm B lần lượt đến cạnh AC và tính diện tích tam giác ABC.

d) Viết phương trình đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a)

• Với A(–2; 3), B(2; 5) ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$.

Do đó đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AB} = (2; -4)$.

Đường thẳng AB đi qua A(–2; 3) và nhận $\vec{n}_{AB} = (2; -4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là:

2(x + 2) – 4(y – 3) = 0 ⇔ x – 2y + 8 = 0.

• Với A(–2; 3), C(5; 1) ta có $\overrightarrow{AC} = (7; -2)$.

Do đó đường thẳng AC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC} = (2; 7)$.

Đường thẳng AC đi qua A(–2; 3) và nhận $\vec{n}_{AC} = (2; 7)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là:

2(x + 2) + 7(y – 3) = 0 ⇔ 2x + 7y – 17 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng AB, AC lần lượt là x – 2y + 8 = 0, 2x + 7y – 17 = 0.

b) Với B(2; 5), C(5; 1) ta có $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$.

Đường thẳng BC đi qua B(2; 5) và nhận $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$

c) Với B(2; 5) và đường thẳng AC: 2x + 7y – 17 = 0 ta có:

$$d(B, AC) = \frac{|2.2 + 7.5 - 17|}{\sqrt{2^2 + 7^2}} = \frac{22\sqrt{53}}{53}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến cạnh AC bằng $\frac{22\sqrt{53}}{53}$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (7; -2)$ nên $AC = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.d(B, AC).AC = \frac{1}{2}.\frac{22\sqrt{53}}{53}.\sqrt{53} = 11 \text{ (đvdt)}.$$

Vậy diện tích ΔABC bằng 11 đvdt.

d) Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó tọa độ của điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2 + 2}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases}$$

Suy ra I(0; 4).

Ta có $\overrightarrow{CI} = (0-5; 4-1) = (-5; 3)$.

Đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC chính là đường thẳng đi qua hai điểm C và I, tức là đường thẳng CI.

Do đó đường thẳng CI đi qua C(5; 1) có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CI}(-5;3)$.

Phương trình tham số của đương thẳng CI là : $\begin{cases} x = 5-5t \\ y = 1+3t \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC là: $\begin{cases} x = 5-5t \\ y = 1+3t \end{cases}$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng Δ_1: $(m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và Δ_2: $-x + my + (m-1)^2 = 0$.

a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp m = 0, m = 1.

b) Tìm m để hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Hướng dẫn giải

a)

• Nếu m = 0 thì:

Phương trình Δ_1: $-3x + 2y - 1 = 0$ và phương trình Δ_2: $-x + 1 = 0$.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (-3;2), \vec{n}_2 = (-1;0)$.

Ta có $a_1b_2 - a_2b_1 = (-3).0 + 3.(-1) = -3 \neq 0$.

Suy ra $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M.

Vì M là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 nên tọa độ điểm M thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra M(1; 2).

• Nếu m = 1 thì:

Phương trình Δ_1: $-2x + 2y = 0$ và phương trình Δ_2: $-x + y = 0$.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (-2;2), \vec{n}_2 = (-1;1)$.

Ta có $\frac{-2}{-1} = \frac{2}{1}$.

Suy ra $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1, Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn điểm O(0; 0) ∈ Δ_1.

Thay tọa độ điểm O vào phương trình Δ_2 ta được: –0 + 0 = 0 (đúng).

Suy ra O(0; 0) ∈ Δ_2.

Do đó $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Vậy khi m = 0 thì Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm M(1; 2) và khi m = 1 thì Δ_1 trùng Δ_2.

b) Δ_1: $(m - 3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và Δ_2: $-x + my + (m - 1)^2 = 0$.

Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (m-3;2), \vec{n}_2 = (-1;m)$.

Chọn $B\left(0;\frac{1-m^2}{2}\right) \in \Delta_1$.

Δ_1 // Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương và B ∉ Δ_2.

Ta có $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

⇔ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

⇔ $(m - 3).m - 2.(-1) = 0$.

⇔ $m^2 - 3m + 2 = 0$.

⇔ m = 1 hay m = 2.

Ở câu a), ta đã chứng minh được Δ_1 trùng Δ_2 khi m = 1.

Do đó ta loại m = 1.

Với m = 2, ta có tọa độ $B\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ và phương trình Δ_2: $-x + 2y + 1 = 0$.

Thay tọa độ B vào phương trình Δ_2, ta được: $-0 + 2.\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -2 \neq 0$.

Suy ra với m = 2, B ∉ Δ_2.

Vậy m = 2 thì Δ_1 // Δ_2.

Bài 6. Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và Δ_2: mx + y + 1 = 0 một góc bằng 30°.

Hướng dẫn giải

Δ_1: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và Δ_2: mx + y + 1 = 0

Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = \left(\sqrt{3};-1\right), \vec{n}_2 = \left(m;1\right)$.

Ta có $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right) = \dfrac{\left|m\sqrt{3}+(-1).1\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}.\sqrt{m^2+1^2}}$.

Hay $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right) = \dfrac{\left|m\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{m^2+1}}$

Theo đề, ta có góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 30°.

Ta suy ra $\dfrac{\left|m\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{m^2+1}} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(m^2+1\right)} = \left|m\sqrt{3}-1\right|$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 3 = 3m^2 - 2\sqrt{3}m + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}m = -2$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7. Cho đường thẳng d: 3x – 2y + 1 = 0 và điểm M(1; 2). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc 45°.

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{n}=\left(a;b\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua M(1; 2) có dạng: $a(x – 1) + b(y – 2) = 0$.

$\Leftrightarrow ax + by – a – 2b = 0$.

Đường thẳng d: $3x – 2y + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'=\left(3;-2\right)$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ và d là:

$$\cos(\Delta, d) = \frac{\left|3a+\left(-2\right).b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{3^2+\left(-2\right)^2}}=\frac{\left|3a-2b\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

Theo đề, ta có Δ tạo với d một góc 45°.

Suy ra $\cos 45°=\frac{\left|3a-2b\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|3a-2b\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{26\left(a^2+b^2\right)}=2\left|3a-2b\right|$$

$\Leftrightarrow 26a^2 + 26b^2 = 4(9a^2 – 12ab + 4b^2)$

$\Leftrightarrow –10a^2 + 48ab + 10b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5b \\ a=-\frac{1}{5}b \end{array}\right.$$

• Với a = 5b, ta chọn a = 5.

Ta suy ra b = 1.

Khi đó ta nhận được phương trình đường thẳng Δ: $5x + y – 7 = 0$.

• Với $a=-\frac{1}{5}b$, ta chọn a = 1.

Ta suy ra b = –5.

Khi đó ta nhận được phương trình đường thẳng Δ: x – 5y + 9 = 0.

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa yêu cầu bài toán có phương trình lần lượt là 5x + y – 7 = 0 và x – 5y + 9 = 0.

Bài 8. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

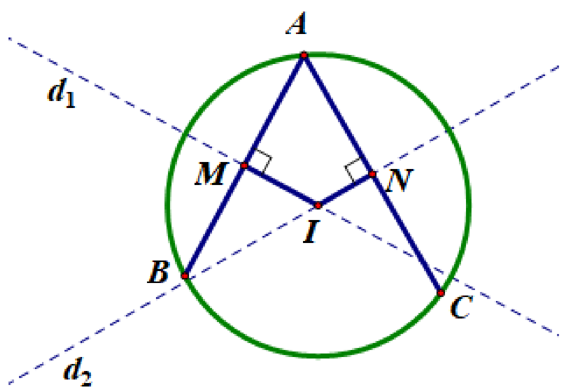
a) (C) đi qua ba điểm A(–1; 3), B(1; 4), C(3; 2).

b) (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: x – 2y + 7 = 0.

c) (C) có tâm thuộc đường thẳng d: 2x – y – 5 = 0 và đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).

Hướng dẫn giải

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ta có M là trung điểm AB với A(–1; 3), B(1; 4).

Suy ra $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có $M\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$.

Tương tự, ta có $N\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

Với A(–1; 3), B(1; 4), C(3; 2) ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-1)$.

Đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB đi qua điểm $M\left(0;\frac{7}{2}\right)$, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;1)$.

Suy ra phương trình d_1: $2(x-0)+1\left(y-\frac{7}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2x+y-\frac{7}{2}=0$.

Tương tự, ta có phương trình đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC:

$4(x-1)-1\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 4x-y-\frac{3}{2}=0$.

Vì đường tròn (C) có tâm I(a; b) và (C) đi qua ba điểm A, B, C nên IA = IB = IC (= R).

Vì IA = IB nên I nằm trên đường trung trực d_1 của đoạn thẳng AB.

Tương tự, ta có I nằm trên đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC.

Vì vậy I là giao điểm của d_1 và d_2.

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-\frac{7}{2}=0\\4x-y-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{6}\\y=\frac{11}{6}\end{cases}$$

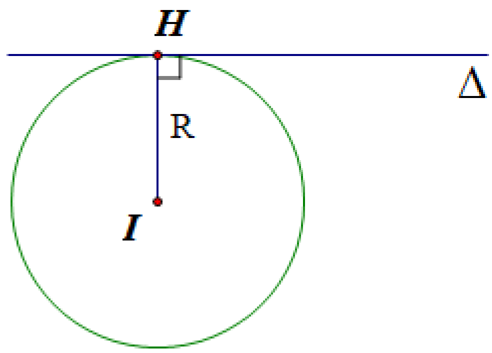
Suy ra $I\left(\frac{5}{6};\frac{11}{6}\right)$.

Với $I\left(\frac{5}{6};\frac{11}{6}\right)$ và A(–1; 3) ta có $\overrightarrow{IA}=\left(-\frac{11}{6};\frac{7}{6}\right)$.

Suy ra $R=IA=\left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{\left(-\frac{11}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{170}}{6}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2=\frac{85}{18}$.

b) (C) có tâm I(–1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: x – 2y + 7 = 0.

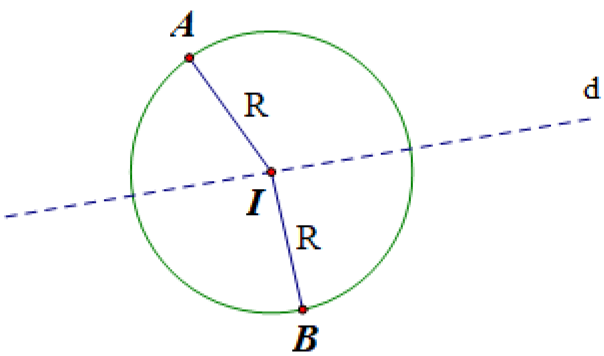


Vì (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ nên ta có:

$R = d(I, \Delta) = \frac{\left|-1-2.2+7\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$.

c) (C) có tâm thuộc đường thẳng d: 2x – y – 5 = 0 và đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).



Phương trình đường thẳng d: $2x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$.

Giả sử I(a; b).

Vì $I \in d$ nên ta có I(a; 2a – 5).

Với A(1; 2), B(4; 1) và I(a; 2a – 5) ta có:

$\overrightarrow{AI} = (a-1; 2a-7), \overrightarrow{BI} = (a-4; 2a-6)$.

Vì đường tròn (C) đi qua hai điểm A(1; 2), B(4; 1).

Ta suy ra AI = BI (= R).

$\Leftrightarrow AI^2 = BI^2$.

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2a - 7)^2 = (a - 4)^2 + (2a - 6)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 28a + 49 = a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 24a + 36$

$\Leftrightarrow 2a = 2$.

$\Leftrightarrow a = 1$.

Với a = 1, ta có b = 2a – 5 = 2.1 – 5 = –3.

Suy ra I(1; –3), bán kính R = AI = $\sqrt{(1-1)^2 + (2.1-7)^2}$ = 5.

Vậy phương trình đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Bài 9. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Nếu là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$.

d) $2x^2 + y^2 + 2x – 3y + 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = –1$, $b = 2$, $c = 9$.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 4 – 9 = –4 < 0$.

Vì vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

b) Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = 3$, $b = –2$, $c = 13$.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 9 + 4 – 13 = 0$.

Vì vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có $2x^2 + 2y^2 – 6x – 4y – 1 = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$.

Phương trình trên có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{4} > 0$.

Vì vậy phương trình đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn có tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

d) Phương trình đã cho không có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$.

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình đường tròn.

Bài 10. Lập phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C): $x^2 + y^2 – 2x = 0$ tại điểm M(1; 1).

b) (C): $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 4 = 0$, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ: $x + 2y + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = 1$, $b = c = 0$.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 0 – 0 = 1 > 0$.

Vì vậy phương trình (C) đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn (C) có tâm I(1; 0).

Ta có $1^2 + 1^2 – 2.1 = 0$.

Suy ra $M \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm M(3; –1) là:

$(1 – 3)(x – 3) + (0 + 1).(y + 1) = 0$.

$\Leftrightarrow –2.(x – 3) + y – 1 = 0$.

$\Leftrightarrow –2x + y + 5 = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $–2x + y + 5 = 0$.

b) Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 – 2ax – 2by + c = 0$, với $a = 1$, $b = –2$, $c = 4$.

Ta có $a^2 + b^2 – c = 1 + 4 – 4 = 1 > 0$.

Vì vậy phương trình (C) đã cho là phương trình đường tròn.

Đường tròn (C) có tâm I(1; –2), bán kính R = 1.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm.

Gọi k_d là hệ số góc của d.

Phương trình Δ: $x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Suy ra Δ có hệ số góc $k_\Delta = -\frac{1}{2}$.

Ta có $d \perp \Delta$.

Suy ra $k_d.k_\Delta = –1$.

$\Leftrightarrow k_d.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$

$\Leftrightarrow k_d = 2.$

Khi đó phương trình d có dạng: y = 2x + m hay 2x – y + m = 0.

Ta có d là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Ta suy ra d(I, d) = R.

$\Leftrightarrow \frac{\left|2.1-(-2)+m\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 1.$

$\Leftrightarrow \left|m+4\right| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m+4 = \sqrt{5}$ hoặc $m+4 = -\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m = -4+\sqrt{5}$ hoặc $m = -4-\sqrt{5}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến d thỏa yêu cầu bài toán có phương trình là $2x-y-4+\sqrt{5}=0$ và $2x-y-4-\sqrt{5}=0$.

Bài 11. Tìm tiêu điểm của các đường conic sau:

a) Elip (E): $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

b) Hypebol (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$

c) Parabol (P): $y^2 = 2x$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a = 10, b = 8.

Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6$.

Vậy elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-6; 0)$ và $F_2(6; 0)$.

b) Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với a = 2, b = 3.

Suy ra $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Vậy hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$.

c) Phương trình parabol (P) có dạng: $y^2 = 2px$, với p = 1.

Ta suy ra $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$.

Vậy parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Bài 12. Viết phương trình chính tắc của các đường conic trong các trường hợp sau:

a) Elip (E) đi qua điểm B(0; 3) và có tiêu cự bằng 6.

b) Hypebol (H) đi qua điểm M(2; 4) và có độ dài trục ảo bằng 8.

c) Parabol (P) có tiêu điểm F(10; 0).

Hướng dẫn giải

a) Phương trình elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a, b > 0.

Vì B(0; 3) ∈ (E) nên ta có $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$.

Suy ra b = 3.

Theo đề, ta có tiêu cự bằng 6. Suy ra 2c = 6. Nghĩa là c = 3.

Ta có $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình elip (E) là: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

b) Phương trình hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với a, b > 0.

Vì (H) có độ dài trục ảo bằng 8 nên ta có 2b = 8. Suy ra b = 4.

Khi đó $b^2 = 16$.

Vì M(2; 4) ∈ (H) nên ta có $\frac{4}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$.

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{16}{16} = 1$.

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2} = 2$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{2} = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{16} = 1$.

c) Parabol (P) có tiêu điểm F(10; 0) nên ta có $\frac{p}{2} = 10$.

Suy ra p = 2.10 = 20.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 40x$.

Bài 13. Cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và C(2; 0). Tìm A, B thuộc (E), biết A có tung độ dương, A và B đối xứng nhau qua trục hoành và ΔABC cân tại A.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x_0; y_0)$ với $y_0 > 0$.

Vì A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có tọa độ $B(x_0; -y_0)$.

Vì A ∈ (E) nên ta có $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1$.

$\Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ (1).

Với $A(x_0; y_0)$, $B(x_0; -y_0)$ và C(2; 0) ta có:

$\overrightarrow{AB} = (0; -2y_0)$ và $\overrightarrow{AC} = (2 - x_0; -y_0)$

Vì ΔABC cân tại A nên ta có $AB^2 = AC^2$.

$\Leftrightarrow (-2y_0)^2 = (2 - x_0)^2 + (-y_0)^2$

$\Leftrightarrow 4y_0^2 = 4 - 4x_0 + x_0^2 + y_0^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2 = 4 - 4x_0 + x_0^2 \quad (2).$

Thế (1) vào (2), ta được: $3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = 4 - 4x_0 + x_0^2$.

$\Leftrightarrow 3 - 3.\frac{x_0^2}{4} = 4 - 4x_0 + x_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0 = \frac{2}{7}$.

• Với $x_0 = 2$, ta có $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} = 1 - \frac{4}{4} = 0$. Suy ra $y_0 = 0$.

Khi A(2; 0).

Lúc này A ≡ C (mâu thuẫn vì ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác).

Vậy ta loại trường hợp $x_0 = 2$.

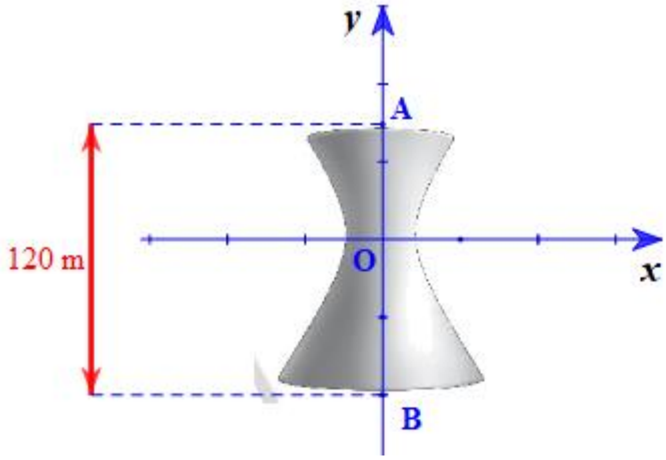
• Với $x_0 = \frac{2}{7}$, ta có $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$. Suy ra $y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vì $y_0 > 0$ nên ta nhận $y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. Một tháp triển lãm có mặt cắt là một hypebol có phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$.

Biết chiều cao của tháp là 120 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ dưới đây, tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải

Theo bài ra, khoảng cách từ nóc tháp đến tâm O bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm O đến đáy nên ta có: OA = $\frac{2}{3}$OB và OA + OB = 120 m.

Suy ra: OA = 48 m, OB = 72 m.

$\Rightarrow$ A (0; 48), B(0 ; –72).

Thay y = 48 vào phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$, ta được:

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{48^2}{40^2} = 1$$

$\Rightarrow x^2 = 1\,525 \Rightarrow x \approx 39{,}1$ hoặc $x \approx -39{,}1$.

Suy ra bán kính nóc khoảng 39,1 (m).

Thay y = –72 vào phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$ ta được:

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{(-72)^2}{40^2} = 1$$

$\Rightarrow x^2 = 2\,650 \Rightarrow x \approx 51{,}5$ hoặc $x \approx -51{,}5$.

Suy ra bán kính đáy khoảng 51,5 (m).

Vậy bán kính nóc và bán kính đáy của tháp triển lãm lần lượt là 39,1 (m) và 51,5 (m).