

## Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn và cách giải bài tập

### A. Lí thuyết tổng hợp.

- Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thường có dạng:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}; \sqrt{f(x)} = g(x); \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}; \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = g(x); \dots$$

- Điều kiện xác định của  $\sqrt{f(x)}$  là  $f(x) \geq 0$

- Điều kiện xác định của  $\frac{A}{\sqrt{f(x)}}$  là  $f(x) > 0$ , với A là một số hoặc một biểu thức.

### B. Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta có các phương pháp:

- Bình phương hai vế. (phép biến đổi này là phép biến đổi hệ quả nên khi tìm ra nghiệm x ta cần thay lại phương trình để kiểm tra).

- Các phép biến đổi tương đương:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x).g(x)} = h(x) \end{cases}$$

- Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc hai.

- Đưa về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối hoặc phương trình tích.

### C. Ví dụ minh họa.

**Bài 1:** Giải các phương trình :  $\sqrt{5x+6} = \sqrt{4x+3}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Điều kiện xác định : } \begin{cases} 5x + 6 \geq 0 \\ 4x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-6}{5} \\ x \geq \frac{-3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{4}$$

Với điều kiện xác định trên ta có:

$$\sqrt{5x + 6} = \sqrt{4x + 3}$$

$$\Rightarrow 5x + 6 = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ( không thỏa mãn điều kiện xác định )}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 2:** Giải phương trình:  $\sqrt{3x + 7} = x + 3$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } \sqrt{3x + 7} = x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 3x + 7 = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 3x + 7 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình  $x^2 + 3x + 2 = 0$  ta có:  $1 - 3 + 2 = 0$

$\Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-2}{1} = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{-1; -2\}$ .

**Bài 3:** Giải phương trình:  $x - \sqrt{x + 1} - 5 = 0$ .

**Lời giải:**

$$\text{Điều kiện xác định: } x \geq -1$$

$$\text{Đặt ẩn phụ } t = \sqrt{x + 1} \text{ ( } t \geq 0 \text{ )}$$

$$\Rightarrow t^2 = x + 1 \Rightarrow x = t^2 - 1$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:  $t^2 - 1 - t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$

Xét phương trình  $t^2 - t - 6 = 0$  có:  $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 25$

$\Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2.1} = 3 ; t_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2.1} = -2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện } t \geq 0 \text{)}$$

Với  $t_1 = 3$  ta có:  $\sqrt{x+1} = 3 \Rightarrow x+1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{8\}$ .

**Bài 4:** Giải phương trình:  $\frac{1}{\sqrt{x+4}} = 2$

**Lời giải:**

Điều kiện xác định:  $x > -4$

Với điều kiện xác định trên ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{2\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}$$

$$\Rightarrow 1 = 2\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+4 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ \frac{-15}{4} \right\}$ .

**D. Bài tập tự luyện.**

**Bài 1:** Phương trình nào dưới đây là phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ?

A.  $x + 2 = 3x$

B.  $2x + 2 = 0$

C.  $x^2 - 4x + 5 = 0$

D.  $\sqrt{x+4} - 5x = 3$

Đáp án: D

**Bài 2:** Điều kiện xác định của  $\sqrt{f(x)}$  là gì ?

A.  $f(x) < 0$

B.  $f(x) > 0$

C.  $f(x) \geq 0$

D.  $f(x) = 0$

Đáp án: C

**Bài 3:** Giải phương trình:  $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x^2}$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{41}}{4}; \frac{1-\sqrt{41}}{4} \right\}$

**Bài 4:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2+2x+4} = \sqrt{2x^2+4x+3}$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \{1\}$

**Bài 5:** Giải phương trình  $\sqrt{2x+5} = x-4$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \{5 + \sqrt{14}\}$

**Bài 6:** Giải phương trình  $\sqrt{5x^2-3x} - 2x + 3 = 0$ .

Đáp án: Phương trình vô nghiệm

**Bài 7:** Giải phương trình  $\frac{2x+1}{\sqrt{x+3}} = 2$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{\sqrt{11}}{2} \right\}$

**Bài 8:** Giải phương trình  $\frac{3}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{3x-1}$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{28 + 2\sqrt{298}}{81} \right\}$

**Bài 9:** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x$ .

Đáp án: Phương trình vô nghiệm

**Bài 10:** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2} + 3x = 0$ .

Đáp án: Tập nghiệm  $S = \{0\}$