

Bài tập Hai đường thẳng vuông góc với nhau - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho ba vecto \vec{n} , \vec{a} , \vec{b} bất kì đều khác với vecto $\vec{0}$. Nếu vecto \vec{n} vuông góc với cả hai vecto \vec{a} , \vec{b} thì \vec{n} , \vec{a} , \vec{b}

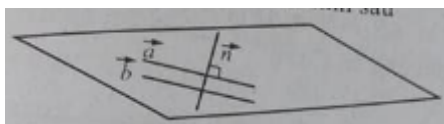
- A. đồng phẳng
- B. không đồng phẳng
- C. có giá vuông góc với nhau từng đôi một
- D. có thể đồng phẳng

Lời giải:

Đáp án: D

Phương án A sai (hình trên)

Phương án B và C sai vì có thể xảy ra như hình sau.



Phương án D đúng vì: có thể ba vecto \vec{n} , \vec{a} , \vec{b} đồng phẳng hoặc không đồng phẳng như hai hình trên.

Bài 2: Nếu ba vecto \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} cùng vuông góc với vecto \vec{n} khác $\vec{0}$ thì chúng.

- A. đồng phẳng
- B. không đồng phẳng
- C. có thể đồng phẳng

D. có thể không đồng phẳng

Lời giải:

Đáp án: A

Phương án A đúng vì giả sử $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, khi đó tồn tại duy nhất bộ số thực $(x; y; z)$ sao cho $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Nhân cả hai vế với vectơ \vec{n} ta có : $\vec{n} \cdot \vec{n} = x\vec{a} \cdot \vec{n} + y\vec{b} \cdot \vec{n} + z\vec{c} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$. Điều này trái với giả thiết.

Bài 3: Các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì:

A. thuộc một mặt phẳng

B. vuông góc với nhau

C. song song với một mặt phẳng

D. song song với nhau

Lời giải:

Đáp án: C

Phương án A sai vì có thể xảy ra trường hợp chúng nằm trên nhiều mặt phẳng khác nhau

Phương án B sai vì có thể xảy ra trường hợp chúng song song với nhau

Phương án D sai vì có thể xảy ra trường hợp chúng cắt nhau

Phương án C đúng vì chúng đồng phẳng

Bài 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và các góc phẳng đỉnh B đều bằng 60° .

a) Cặp đường thẳng nào sau đây không vuông góc với nhau?

A. $B'C$ và AD'

B. BC' và $A'D$

C. $B'C$ và CD'

D. AC và $B'D'$

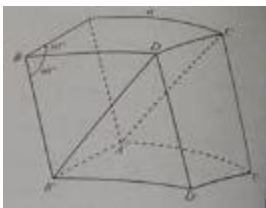
b) Đường thẳng $B'C$ vuông góc với đường thẳng:

A. AC

B. CD

C. BD

D. $A'A$



Lời giải:

Đáp án: a - C, b - B

a. Phương án A, B và D đều sai

Phương án C đúng vì tam giác $CB'D'$ có ba cạnh bằng $a, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}$ nên không thể vuông tại B'

b. Phương án A sai vì tam giác ACB' có ba cạnh bằng a

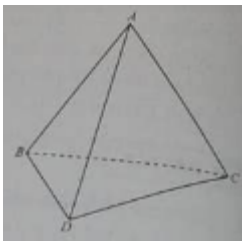
Phương án C sai vì tam giác $CB'D'$ có ba cạnh $a, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}$ nên không thể vuông tại B'

Phương án D sai vì góc giữa đường thẳng $B'C$ và AA' bằng 0°

Phương án B đúng vì:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'B'}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0\end{aligned}$$

Bài 5: Cho tứ diện $ABCD$. Nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ và $BC \perp AD$ thì:



A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \rightarrow \neq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \rightarrow = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \rightarrow \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \rightarrow = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \rightarrow = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \rightarrow \neq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \rightarrow \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải:

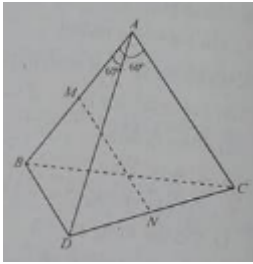
Đáp án: C

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Bài 6: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$; góc BAC bằng góc BAD bằng 60° .
Gọi M và N là trung điểm của AB và CD



a) Góc giữa \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} bằng:

A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

b) Kết luận nào sau đây sai?

A. MN vuông góc với AB

B. MN vuông góc với CD

C. MN vuông góc với AB và CD

D. MN không vuông góc với AB và CD

Lời giải:

Đáp án: a - C, b - D

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0, \text{ suy ra } AB \perp CD$$

b. phương án A sai vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM}) = 0$. Phương án B sai theo bài 9. Hiển nhiên phương án C sai $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0, \text{ suy ra } AB \perp CD$

b. phương án A sai vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM}) = 0$. Phương án B sai theo bài 9. Hiển nhiên phương án C sai.

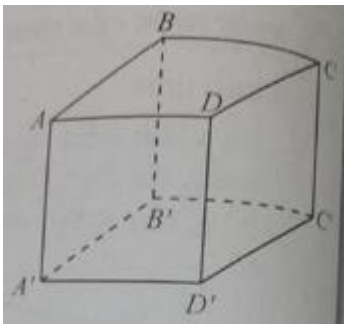
Bài 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Góc giữa hai đường thẳng AC và C'D' bằng:

A. 0°

B. 45°

C. 60°

D. 90°



Lời giải:

Đáp án: B

Vì $CD \parallel C'D'$ nên góc giữa AC và C'D' bằng góc giữa AC và CD – bằng góc \widehat{ACD}

Vì ABCD là hình vuông nên tam giác ACD vuông cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 45^0$$

Bài 8: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải:

Đáp án: C

Phân dẫn ví dụ 2 là câu hỏi. phương án A và B sai vì hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Phương án C đúng vì hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì phương của chúng song song với nhau.

Phương án D sai vì hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì có thể song song hoặc trùng nhau.

Bài 9: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$; $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$. Hãy chứng minh $AB \perp CD$.

Một bạn chứng minh qua các bước sau:

Bước 1. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD}$

Bước 2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$

Bước 3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ = 0$]]

Bước 4. Suy ra $AB \perp CD$

Theo em. Lời giải trên sai từ :

A. bước 1

B. bước 2

C. bước 3

D. bước 4

Lời giải:

Đáp án: A

Câu dẫn là một lời giải của một bài toán cho trước, học sinh cần hiểu để có thể phê phán được lời giải bị sai từ bước nào. Phương án đúng là A.

Bài 10: Cho vecto $\vec{n} \neq \vec{0}$ và hai vecto \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Nếu vecto \vec{n} vuông góc với cả hai vecto \vec{a} và \vec{b} thì $\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}$

A. đồng phẳng

B. không đồng phẳng

C. có thể đồng phẳng

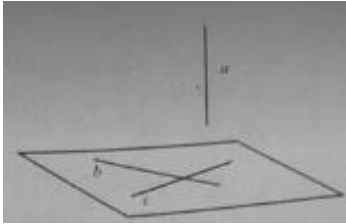
D. có thể không đồng phẳng

Lời giải:

Đáp án: B

Phương án A và C sai vì có thể xảy ra trường hợp như hình vẽ sau

Giả sử phương án B cũng sai, tức là ba vecto \vec{n} , \vec{a} , \vec{b} đồng phẳng. Khi đó vì $\vec{n} \perp \vec{a}$ và $\vec{n} \perp \vec{b}$ nên giá của \vec{a} và \vec{b} song song. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hai vecto \vec{a} , \vec{b} không cùng phương. Vì vậy phương án B đúng.

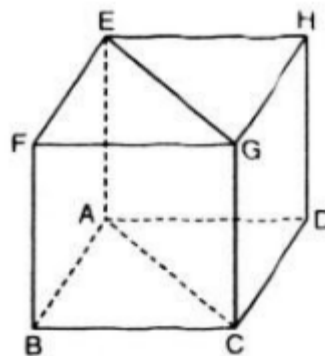


II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1 Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

- a) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{EG}
- b) \overrightarrow{AF} và \overrightarrow{EG}
- c) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DH}

Lời giải:



a) Góc giữa \overline{AB} , \overline{EG}

$$\overline{EG} = \overline{AC} \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{EG}) = (\overline{AB}, \overline{AC}) = \widehat{BAC}$$

Mà ABCD là hình vuông nên $\widehat{BAC} = 45^\circ$

$$\text{Vậy } (\overline{AB}, \overline{EG}) = 45^\circ$$

b) Góc giữa \overline{AF} , \overline{EG}

$$\overline{EG} = \overline{AC} \Rightarrow (\overline{AF}, \overline{EG}) = (\overline{AF}, \overline{AC}) = \widehat{FAC}$$

Do AC, AF, FC là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh góc vuông bằng nhau

$$\Rightarrow AC = AF = FC$$

Vậy $\triangle AFC$ đều nên $\widehat{FAC} = 60^\circ$

$$\text{Do đó } (\overline{AF}, \overline{EG}) = 60^\circ$$

c) Góc giữa \overline{AB} và \overline{DH}

$$\overline{DH} = \overline{AE} \text{ nên } (\overline{AB}, \overline{DH}) = (\overline{AB}, \overline{AE}) = 90^\circ$$

Bài 2 Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh rằng :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \quad (1)$$

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu :

ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Lời giải:

a) Đưa các vector có cùng gốc A, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Cộng các đẳng thức trên ta được:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

b) Do $AB \perp CD$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Do $AC \perp DB$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

Thay vào đẳng thức (1) ta được:

$$0 + 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Rightarrow AD \perp BC$$

Bài 3

a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?

Lời giải:

a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì nói chung a và b không song song với nhau vì a và b có thể cắt nhau hoặc có thể chéo nhau.

b) Trong không gian nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì a và c vẫn có thể cắt nhau hoặc chéo nhau do đó, nói chung a và c không vuông góc với nhau.

Ví dụ. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có:

+ AB và BC cùng vuông góc với BB' nhưng AB và BC cắt nhau tại B.

+ AB và $A'D'$ cùng vuông góc với BB' nhưng AB và BC chéo nhau.

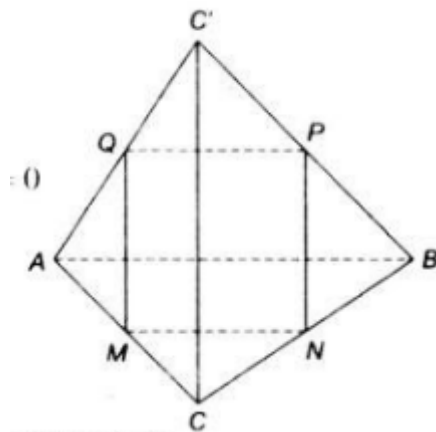
Bài 4 Cho hai tam giác đều ABC và ABC' trong không gian có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$.

Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải:



Đặt $AB = a$, ta có $AC = BC = AC' = BC' = a$

a) Chứng minh $AB \perp CC'$

Ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = AB \cdot AC' \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})$$

$$= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$* \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow AB \perp CC' \text{ (đpcm)}$$

b) Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật

- MN là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

- QP là đường trung bình của tam giác ABC'

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad (2)$$

$$*(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

$$\Rightarrow \text{MNPQ là hình bình hành} \quad (3)$$

* Ta có: MN // AB và NP // CC'

$$\text{mà } AB \perp CC' \text{ nên } MN \perp NP \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra MNPQ là hình chữ nhật (đpcm)

Bài 5

Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC

và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB.

Lời giải:

- Chứng minh SA \perp BC
- Ta có: $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$
 $= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
- Đặt SA = SB = SC = a

và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$, ta có:

$$* \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \cdot SC \cdot \cos(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}) = a^2 \cos \alpha$$

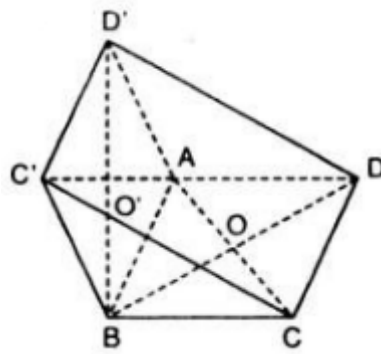
$$* \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \cdot SB \cdot \cos(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}) = a^2 \cos \alpha$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow SA \perp BC \text{ (đpcm)}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có SB \perp AC và SC \perp AB

Bài 6 Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Chứng minh rằng $AB \perp OO'$ và $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Lời giải:



Xét tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OO'}$,

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OO'} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO'}| \cdot \cos 45^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos 45^\circ\end{aligned}$$

+) Vì hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có cùng độ dài cạnh là AB

nên hai đường chéo bằng nhau: $AC = AC'$.

Suy ra: $AO = AO'$ hay $|\overrightarrow{AO'}| = |\overrightarrow{AO}|$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OO'} = 0 \Rightarrow AB \perp OO'$

Ta có:

$$\begin{cases} DC \text{ song song } D'C' \text{ (cùng song song } AB) \\ DC = D'C' = AB \end{cases}$$

Nên tứ giác $DCC'D'$ là hình bình hành.

Ta lại có: $\frac{AO'}{AC'} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$ nên $OO' \parallel CC'$ (định lí Ta-let)

Mà $OO' \perp AB$ nên $CC' \perp AB$

Suy ra $CC' \perp DC$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Bài 7 Cho S là diện tích của tam giác ABC . Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC})^2}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 = AB^2 \cdot AC^2$$

(Bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài)

$$(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC})^2 = (AB \cdot AC \cdot \cos A)^2 = AB^2 AC^2 \cos^2 A$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC})^2$$

$$= AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A) = AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = S$$

Bài 8

Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$

Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CD$

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB

và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$

Lời giải:

Tam giác ABC có $AB = AC$ và góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

Tương tự, tam giác ABD là tam giác đều.

a) Đặt $AB = AC = AD = a$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow AB \perp CD$$

$$\text{b) *Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \quad (1)$$

$$\text{Và } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

(1) + (2) ta được:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN})$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Mà $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ là tam giác đều nên:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MN}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MN}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Rightarrow AB \perp MN$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - a^2 - a \cdot a \cdot \cos \widehat{BAD} + a \cdot a \cdot \cos \widehat{BAC}) \\ &= \frac{1}{2}(-a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow MN \perp CD$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vector sau đây:

a) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{EG} ;

b) \overrightarrow{AF} và \overrightarrow{EG} ;

c) \overrightarrow{EG} và \overrightarrow{DH} .

Bài 2 Cho hình tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Bài 3 a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?

Bài 4 Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC,CB,B'C,C'A, Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$;

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 5 Cho hình chóp tam giác có và có Chứng minh rằng .

Trong không gian cho hai hình vuông và có chung cạnh và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm và . Chứng minh rằng và tứ giác là hình chữ nhật.

Bài 6 Cho S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Bài 7 Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CD$;

b) Nếu M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Bài 8 Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) \overline{AB} và \overline{EG}

b) \overline{AF} và \overline{EG}

c) \overline{AB} và \overline{DH}

Bài 9 Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh rằng :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \quad (1)$$

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu :

ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Bài 10 a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?