

Bài tập Các quy tắc tính đạo hàm - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hàm số $y = -4x^3 + 4x$. Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.
- B. $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
- C. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.
- D. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Lời giải:

Ta có : $y = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = -12x^2 + 4$.

Nên :

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Chọn đáp án B

Bài 2: Tìm m để các hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - mx^2 + (3m-1)x + 1$ có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \leq \sqrt{2}$

B. $m \leq 2$

C. $m \leq 0$

D. $m < 0$

Lời giải:

Ta có:

$$y' = mx^2 - 2mx + 3m - 1$$

Nên :

$$y' \leq 0 \quad \forall x \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 3m - 1 \leq 0 \quad \forall x \quad (2)$$

- $m = 0$ thì (1) trở thành: $-1 \leq 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

- $m \neq 0$, khi đó (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m.(3m - 1) = m(1 - 2m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Vậy $m \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Chọn đáp án C

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$, đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là:

A. $y'(1) = -4$.

B. $y'(1) = -3$.

C. $y'(1) = -2$.

D. $y'(1) = -5$.

Lời giải:

Ta có: $y = \frac{x^2 + x}{x - 2} = x + 3 + \frac{6}{x - 2}$
 $\Rightarrow y' = 1 - \frac{6}{(x - 2)^2} \Rightarrow y'(1) = 1 - 6 = -5.$

Chọn đáp án D

Bài 4: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$ là:

- A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)$
- B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x).$
- C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x).$
- D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x).$

Lời giải:

Đặt $u = x^3 - 2x^2$

Thì $y = u^{2016}$, $y'_u = 2016.u^{2015}$, $u'_x = 3x^2 - 4x.$

Theo công thức tính đạo hàm của hàm số hợp

Ta có: $y'_x = y'_u . u'_x.$

Vậy: $y' = 2016.(x^3 - 2x^2)^{2015} . (3x^2 - 4x).$

Chọn đáp án B

Bài 5: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{2x+1}{x+2}$

- A. $-\frac{3}{(x+2)^2}$
- B. $\frac{3}{(x+2)}$
- C. $\frac{3}{(x+2)^2}$
- D. $\frac{2}{(x+2)^2}$

Lời giải:

Áp dụng công thức đạo hàm 1 thương

Ta có:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(2x+1)'(x+2) - (x+2)'(2x+1)}{(x+2)^2} \\&= \frac{2(x+2) - 1 \cdot (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x - 2}$. Đạo hàm của hàm số là biểu thức nào sau đây?

- A. $-1 - \frac{3}{(x-2)^2}$. B. $1 + \frac{3}{(x-2)^2}$.
C. $-1 + \frac{3}{(x-2)^2}$. D. $1 - \frac{3}{(x-2)^2}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(-x^2 + 2x - 3)'(x-2) - (-x^2 + 2x - 3)(x-2)'}{(x-2)^2} \\&= \frac{(-2x+2)(x-2) - (-x^2 + 2x - 3) \cdot 1}{(x-2)^2} \\&= \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2} = -1 + \frac{3}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$. Đạo hàm của hàm số là:

- A. $\frac{-3x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$. B. $\frac{-x^2 + x + 3}{(x^2 + 3)^2}$.
C. $\frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$. D. $\frac{-7x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3} \\ \Rightarrow y' &= \frac{(-2x^2 + x - 7)' \cdot (x^2 + 3) - (x^2 + 3)' \cdot (-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} \\ y' &= \frac{(-4x + 1) \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot (-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} \\ \Rightarrow &= \frac{-4x^3 - 12x + x^2 + 3 + 4x^3 - 2x^2 + 14x}{(x^2 + 3)^2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị $f(-1)$ bằng:

- A. 2
B. 6
C. -4

D. 3

Lời giải:

Ta có : $f'(x) = 4x \Rightarrow f'(-1) = -4$.

Chọn đáp án C

Bài 9: Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 4^3 - 3^2 + 2x + 1$ xác định trên \mathbb{R} . Giá trị $f'(-1)$ bằng:

A. 4

B. 14

C. 15

D. 24

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) = -4x^3 + 4.3x^2 - 3.2x + 2.1 + 0.$$

$$= -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$$

Nên:

$$f'(-1) = -4.(-1) + 12.1 - 6.(-1) + 2 = 24.$$

Chọn đáp án D

Bài 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 1)^4$ tại điểm $x = -1$ là:

A. -32

B. 30

C. - 64

D. 12

Lời giải:

Áp dụng đạo hàm của hàm hợp:

$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$ ta được :

$$\text{Ta có : } y' = 4(x^2 + 1)^3 (x^2 + 1)' = 8x(x^2 + 1)^3$$

$$\Rightarrow y'(-1) = 8.(-1).(1+1)^3 = -64.$$

Chọn đáp án C

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$. Phương trình $y' = 0$ có nghiệm là?

Lời giải:

$$\text{Ta có : } y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3.$$

Bài 2: Với $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Thì $f'(-1)$ bằng?

Lời giải:

Ta có:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = x - 1 + \frac{4}{x - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(-1) = 0.$$

Bài 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} bởi $f(x) = \sqrt{x^2}$. Giá trị $f(0)$ bằng?

Lời giải:

Ta có :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot (x^2)' = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$\Rightarrow f'(x)$ không xác định tại $x = 0$

$\Rightarrow f'(0)$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Bài 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{(x-2)^3}$.

Bài 5: Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}, g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 + \sqrt{3})' = 6x^2 - 2x,$$

$$g'(x) = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}\right)' = 3x^2 + x$$

$$\begin{aligned} f'(x) > g'(x) &\Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \end{aligned}$$

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$ đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là:

Lời giải:

Ta có:

$$y' = \frac{(2x+1).(x-2) - 1.(x^2 + x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$$

$$y'(1) = \frac{1^2 - 4.1 - 2}{(1-2)^2} = -5$$

Bài 7: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính $y'(0)$ bằng:

Lời giải:

Ta có:

$$y' = \frac{1. \sqrt{4-x^2} - x. \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2} - \frac{x.(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{2+0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Bài 8: Cho hàm số $y = 4x - \sqrt{x}$. Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

Lời giải:

Ta có: $y' = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow 8\sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$$

Bài 9: Giải bất phương trình $f(x) \geq 0$ với $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$$\text{Đề } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Bài 10: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{3}{(2x+5)^2}$

Lời giải:

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp

với $y = \frac{1}{u}$; $u = (2x+5)^2$ ta được:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3 \cdot [(2x+5)^2]'}{(2x+5)^4} \\ &= -\frac{3 \cdot 2 \cdot (2x+5) \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^4} = \frac{-12}{(2x+5)^3} \end{aligned}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Bài 2 Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1 - 3x)}{x + 1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

Bài 3 Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}$

Bài 4 Cho hàm số $f(x) = 2mx - mx^3$. Để $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 1$ khi và chỉ khi?

Bài 5 Tìm m để các hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m + 2)x^2 - 6(m + 2)x + 1$ có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 6 Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

Bài 7 Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Bài 8 Đạo hàm của $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ bằng?

Bài 9 Đạo hàm của hàm số là $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$

Bài 10 Cho $f(x) = 2x^3 + x - \sqrt{2}, g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$