# Chương 4: Bất đẳng thức và bất phương trình

## Dạng 1: Bất đẳng thức lớp 10 và cách giải

### 1. Lý thuyết

### a. Định nghĩa bất đẳng thức:

Các mệnh đề dạng “a > b” hoặc “a < b” được gọi là bất đẳng thức.

Nếu mệnh đề “$a < b \Rightarrow c < d$” đúng thì ta nói bất đẳng thức c < d là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức a < b và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.

Nếu bất đẳng thức a < b là hệ quả của bất đẳng thức c < d và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

### b. Tính chất của bất đẳng thức:

<table>
<tr><th colspan="2">Tên gọi và điều kiện</th><th>Nội dung</th></tr>
<tr><td colspan="2">Cộng hai vế của bất đẳng thức với số bất kì</td><td>$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số</td><td>$c > 0$</td><td>$a < b \Leftrightarrow ac < bc$</td></tr>
<tr><td>$c < 0$</td><td>$a < b \Leftrightarrow ac > bc$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều</td><td>$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều</td><td>$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa</td><td>$n \in \mathbb{N}^*$</td><td>$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$</td></tr>
<tr><td>$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$</td><td>$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Khai căn hai vế của một bất đẳng thức</td><td>$a > 0$</td><td>$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$</td></tr>
<tr><td>a bất kỳ</td><td>$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$</td></tr>
</table>

***Chú ý***

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \le b$ hoặc $a \ge b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các bất đẳng thức không ngặt và gọi các bất đẳng thức dạng a < b hoặc a > b là các bất đẳng thức ngặt. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

**c. Bất đẳng thức Cô-si:**

$\forall a \geq 0;\ b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Hệ quả 1: Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \forall a > 0.$$

Hệ quả 2: Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số bằng nhau.

Hệ quả 3: Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số bằng nhau.

**d. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:**

Ta có các tính chất cho trong bảng sau:

| ***Điều kiện*** | ***Nội dung*** |
| --- | --- |
| | $\lvert x\rvert \geq 0, \lvert x\rvert \geq x, \lvert x\rvert \geq -x$ |
| $a > 0$ | $\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ |
| | $\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -a \\ x \geq a \end{array}\right.$ |
| | $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \leq \lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ |

**2. Các dạng toán**

**Dạng 1.1: Chứng minh bất đẳng thức nhờ định nghĩa**

**a. Phương pháp giải:**

Để chứng minh $A \geq B$ (hoặc A > B), ta làm các bước sau:

Bước 1: xét hiệu A – B.

Bước 2: chứng minh $A - B \geq 0$ ( hoặc A – B > 0).

Sử dụng linh hoạt kiến thức ở phần lý thuyết để chứng minh ở bước 2.

Bước 3: kết luận.

Bước 4: xét A = B khi nào?

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Cho a, b > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\ge 0$ (do a, b > 0)

Vậy $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

**Ví dụ 2:** Cho a, b, c là 3 số tuỳ ý, chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

**Hướng dẫn:**

Xét biểu thức: $M=a^2+b^2+c^2-\left(ab+bc+ca\right)$.

Suy ra:

$$2M=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$$
$$=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2$$

Vì: $\left(a-b\right)^2\ge 0;\left(b-c\right)^2\ge 0;\left(c-a\right)^2\ge 0$.

Do đó $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0$.

Suy ra $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$ hay $a^2+b^2+c^2-\left(ab+bc+ca\right)\ge 0$

Vậy $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

**Dạng 1.2: Sử dụng bất đẳng thức Cô-si**

**a. Phương pháp giải:**

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức Cô-si:

- Khi áp dụng bất đẳng thức Cô-si thì các số phải là những số không âm

- Bất đẳng thức Cô-si thường được áp dụng khi trong bất đẳng thức cần chứng minh có tổng và tích

- Điều kiện xảy ra dấu "=" là các số bằng nhau

- Bất đẳng thức Cô-si còn có hình thức khác thường hay sử dụng:

Đối với hai số: $x^2 + y^2 \ge 2xy; x + y \ge 2\sqrt{xy}$ với mọi $x; y \ge 0$

Đối với ba số: $abc \le \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$; $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ với mọi $a; b; c \ge 0$

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

**Hướng dẫn:**

Vì x, y, z là các số thực dương suy ra $\dfrac{x}{yz}, \dfrac{y}{zx}, \dfrac{z}{xy}$ là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} \ge 2.\sqrt{\frac{x}{yz}.\frac{y}{xz}} = \frac{2}{z} \ (1)$$

$$\frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} \ge 2.\sqrt{\frac{x}{yz}.\frac{z}{xy}} = \frac{2}{y} \ (2)$$

$$\frac{z}{xy} + \frac{y}{zx} \ge 2.\sqrt{\frac{z}{xy}.\frac{y}{zx}} = \frac{2}{x} \ (3)$$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) ta được $2\left(\dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{zx} + \dfrac{z}{xy}\right) \ge 2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$

Hay $\dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{zx} + \dfrac{z}{xy} \ge \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

**Ví dụ 2:** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \ge 36?$$

**Hướng dẫn:**

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực dương ta có:

$\frac{1}{a} + 36a \geq 2\sqrt{\frac{1}{a}.36a} = 12$ (1)

$\frac{4}{b} + 36b \geq 2\sqrt{\frac{4}{b}.36b} = 24$ (2)

$\frac{9}{c} + 36c \geq 2\sqrt{\frac{9}{c}.36c} = 36$ (3)

Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) ta được

$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} + 36(a + b + c) \geq 72 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq 36$ (do a + b + c = 1)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = 36a; \frac{4}{b} = 36b; \frac{9}{c} = 36c$ và a + b + c = 1 hay

$a = \frac{1}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{2}$.

**Dạng 1.3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một đại lượng nhờ bất đẳng thức**

**a. Phương pháp giải:**

Vận dụng các tính chất của bất đẳng thức, bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối,… để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \frac{16}{x}, x > 0$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $P = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số, ta có:

$x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{8}{x}.\frac{8}{x}} = 12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = \frac{8}{x} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2$.

**Ví dụ 2:** Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 300 m, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

**Hướng dẫn:**

Giả sử hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là a, b (0 < a, b < 150) (đơn vị: mét)

Từ giả thiết, ta có a + b = 300 : 2 = 150 (m)

Diện tích hình chữ nhật là $S = a.b\,(m^2)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{a.b} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a.b} \le 75 \Leftrightarrow ab \le 5625 \Leftrightarrow S \le 5625.$$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là $5625\ m^2$.

Dấu bằng xảy ra $\begin{cases} a = b \\ a + b = 150 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 75.$

**3. Bài tập tự luyện**

**3.1 Tự luận:**

**Câu 1:** Cho a, b là hai số tùy ý. Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

**Hướng dẫn:**

Xét hiệu:

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab\right) = \frac{1}{4}\left(a-b\right)^2 \ge 0$$

Vậy $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

**Câu 2:** Cho a, b, c, d là các số thực, chứng minh rằng:
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a\left(b+c+d+e\right)$.

**Hướng dẫn:**

Xét hiệu:

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-4a\left(b+c+d+e\right)$$
$$=\left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+\left(a^2-4ad+4d^2\right)+\left(a^2-4ac+4e^2\right)$$
$$=\left(a-2b\right)^2+\left(a-2c\right)^2+\left(a-2d\right)^2+\left(a-2e\right)^2\ge 0$$

Vậy $4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\ge 4a\left(b+c+d+e\right)$ suy ra

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a\left(b+c+d+e\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 2b = 2c = 2d = 2e.

**Câu 3:** Chứng minh rằng: $\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(a+b\right)\ge 8abc\ \forall a,b,c\ge 0$.

**Hướng dẫn:**

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ b+c\ge 2\sqrt{bc} \\ c+a\ge 2\sqrt{ca} \end{array}\right\}\Rightarrow \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8abc$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

**Câu 4:** Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+8}{\sqrt{a^2+4}}\ge 4\ \left(\forall a\right)$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $a^2+8=(a^2+4)+4\ge 2\sqrt{(a^2+4).4}$ ( theo bất đẳng thức Cô-si)

Do đó: $\dfrac{a^2+8}{\sqrt{a^2+4}}\ge \dfrac{2\sqrt{\left(a^2+4\right).4}}{\sqrt{a^2+4}}=4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2+4=4\Leftrightarrow a=0$.

**Câu 5:** Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9\quad (1)$$

**Hướng dẫn:**

Đặt $x=a^2+2bc$; $y=b^2+2ac$; $z=c^2+2ab$ ( do a, b, c > 0 nên x, y, z > 0)

Ta có: $x+y+z=\left(a+b+c\right)^2=1$

Với x + y + z = 1 và x, y, z > 0, theo bất đẳng thức Cô-si cho 3 số ta có:

$x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$\Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$

Suy ra $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ hay $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$.

**Câu 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4x^4-3x^2+9}{x^2}$; $x\ne 0$.

**Hướng dẫn:**

Xét hàm số $y=\frac{4x^4-3x^2+9}{x^2}=4x^2+\frac{9}{x^2}-3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $4x^2+\frac{9}{x^2}\ge 2\sqrt{4x^2.\frac{9}{x^2}}=12\Rightarrow y\ge 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4x^4-3x^2+9}{x^2}$ là 9 khi $4x^2=\frac{9}{x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**Câu 7:** Cho $x\ge 2$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có $f(x)\ge 0$

và $\left[f(x)\right]^2=\frac{x-2}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{1}{8}-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{1}{8}\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$ đạt được khi $x=4$.

**Câu 8:** Tìm giá trị lớn nhất $M$ và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sqrt{6-2x}+\sqrt{3+2x}$.

**Hướng dẫn:**

Tập xác định của hàm số $D = \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Ta thấy $y > 0\ \forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Có $y^2 = 9 + 2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \geq 9\ \forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Suy ra $y \geq 3;\forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy $\mathop{\mathrm{Min}}\limits_{x\in\left[-\frac{3}{2};3\right]} y = 3$.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \leq (6-2x)+(3+2x) = 9$ với $\forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Suy ra $y^2 \leq 18, \forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right] \Rightarrow y \leq 3\sqrt{2}, \forall x \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $6-2x = 3+2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Vậy $\mathop{\mathrm{Max}}\limits_{x\in\left[-\frac{3}{2};3\right]} y = 3\sqrt{2}$.

**Câu 9:** Cho các số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1$.

**Hướng dẫn:**

Ta có:

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1$$

$$=\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b}{a}+1\right)-3$$

$$=\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\left(\frac{b}{a}-1\right)^2-3\geq -3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{a}{b}=1\\ \frac{b}{a}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b\neq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi $a=b$ $(a,b\neq 0)$.

**Câu 10:** Người ta dùng 100 m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh vườn để có thể rào được?

**Hướng dẫn:**

Đặt cạnh của hình chữ nhật lần lượt là x, y (x, y > 0; y là cạnh của bức tường).

Ta có: $2x+y=100$.

Diện tích hình chữ nhật là :

$$S=xy=2.x.\frac{y}{2}\overset{Cosi}{\leq}2.\left(\frac{x+\frac{y}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{8}(2x+y)^2=\frac{1}{8}(100)^2=1250.$$

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là 1250 $m^2$ khi $x=\frac{y}{2}\Leftrightarrow y=2x\Rightarrow x=25m$ ; $y=50m$.

**3.2 Trắc nghiệm:**

**Câu 1:** Cho các bất đẳng thức a > b và c > d. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

**A.** $a-c>b-d$.

**B.** $a+c>b+d$.

**C.** $ac>bd$.

**D.** $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Theo tính chất bất đẳng thức, $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$.

**Câu 2:** Suy luận nào sau đây đúng?

**A.** $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

**B.** $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$.

**C.** $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

**D**. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

**Hướng dẫn**

Chọn A.

$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ đúng theo tính chất nhân hai bất đẳng thức dương cùng chiều.

**Câu 3:** Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a?

**A.** $6a > 3a$.

**B.** $3a > 6a$.

**C.** $6 - 3a > 3 - 6a$.

**D**. $6 + a > 3 + a$.

**Hướng dẫn**

Chọn D.

Ta có $6 + a > 3 + a \Leftrightarrow 6 + a - 3 - a > 0 \Leftrightarrow 3 > 0$ đúng với mọi số thực a.

**Câu 4:** Cho a, b là các số thực bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

**B.** $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

**C.** $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

**D.** $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

**Hướng dẫn**

Chọn D.

Các mệnh đề A, B, C đúng.

Mệnh đề D sai. Ta có phản ví dụ: $-2 > -5$ nhưng $(-2)^2 = 4 < 25 = (-5)^2$.

**Câu 5:** Cho a > b khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $2a < 2b$.

**B.** $a > b - c, \forall c \in \mathbb{R}$.

**C.** $-a < -b$.

**D.** $ac > cb, \forall c \in \mathbb{R}$.

**Hướng dẫn**

Chọn C.

Đáp án A sai ví dụ $2 > 0 \Rightarrow 2.2 > 2.0$

Đáp án B sai với a = 3, b = 2, c = -2.

Đáp án C đúng vì $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Đáp án D sai khi $c \le 0$.

**Câu 6:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** $|a + b| \le |a| + |b|$.

**B.** $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, (a > 0)$.

**C.** $a > b \Leftrightarrow ac > bc, (\forall c \in \mathbb{R})$.

**D.** $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $(a \ge 0, b \ge 0)$.

**Hướng dẫn**

Chọn C.

Các đáp án A, B đều đúng theo tính chất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Đáp án D đúng theo bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm a và b.

Đáp án C sai khi c < 0 (vì khi nhân 2 vế của một bất đẳng thức với một số âm thì ta được bất đẳng thức mới đổi chiều bất đẳng thức đã cho).

**Câu 7:** Cho hai số thực a và b thỏa mãn a + b = 4. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Tích a.b có giá trị nhỏ nhất là 2.

**B.** Tích a.b không có giá trị lớn nhất.

**C.** Tích a.b có giá trị lớn nhất là 4.

**D.** Tích a.b có giá trị lớn nhất là 2.

**Hướng dẫn**

Chọn C.

Với mọi số thực a và b ta luôn có: $a.b \le \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a.b \le 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2$.

**Câu 8:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ với x > 0 là:

**A.** $4\sqrt{3}$.

**B.** $2\sqrt{6}$.

**C.** $\sqrt{6}$.

**D.** $2\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn**

Chọn B.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $2x + \frac{3}{x} \ge 2\sqrt{6}$ suy ra giá trị nhỏ nhất của f(x) bằng $2\sqrt{6}$.

**Câu 9:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

**A.** 2.

**B.** $\sqrt{2}$.

**C.** $2-\sqrt{2}$.

**D**. 0.

**Hướng dẫn**

Chọn B.

$A=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ có tập xác định $D=[2;4]$.

Ta có: $A^2=2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}\ge 2\Rightarrow A\ge\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi x = 2 hoặc x = 4.

**Câu 10:** Cho các mệnh đề sau

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\ (\mathrm{I})$; $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\ (\mathrm{II})$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\ (\mathrm{III})$

Với mọi giá trị của a, b, c dương ta có:

**A.** (I) đúng và (II), (III) sai.

**B.** (II) đúng và (I), (III) sai.

**C.** (III) đúng và (I), (II) sai.

**D.** (I), (II), (III) đúng.

**Hướng dẫn**

Chọn D.

Với mọi a, b, c dương ta luôn có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, dấu bằng xảy ra khi a = b. Vậy (I) đúng.

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$, dấu bằng xảy ra khi a = b = c. Vậy (II) đúng.

$\left(a+b+c\right).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$, dấu bằng xảy ra khi a = b = c. Vậy (III) đúng.

## Dạng 2: Bất phương trình bậc nhất

### 1. Lý thuyết

**a. Bất phương trình một ẩn:**

- Bất phương trình ẩn x là một mệnh đề chứa biến có dạng f(x) < g(x) $\left(f(x) \le g(x)\right)$ trong đó f(x) và g(x) là các biểu thức của x.

- Điều kiện xác định của bất phương trình là điều kiện của ẩn số x để các biểu thức f(x) và g(x) có nghĩa.

- Giá trị $x_0$ thỏa mãn điều kiện xác định sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ là một mệnh đề đúng thì $x_0$ là một nghiệm của bất phương trình $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$.

- Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

**b. Một số phép biến đổi bất phương trình:**

- Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng). Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

- Một số phép biến đổi tương đương:

Gọi D là điều kiện xác định của bất phương trình P(x) < Q(x); f(x) là biểu thức xác định với $\forall x \in D$ thì:

+) $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$

Nhận xét: $P(x) < Q(x) + f(x) \Leftrightarrow P(x) - f(x) < Q(x)$

+) $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$ nếu $f(x) > 0, \forall x$

$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$ nếu $f(x) < 0, \forall x$

+) $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$ nếu $P(x) \ge 0, Q(x) \ge 0, \forall x$.

### 2. Các dạng toán

**Dạng 2.1: Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất**

**a. Phương pháp giải:**

- Bất phương trình bậc nhất là bất phương trình có dạng: $ax+b>0,\ ax+b<0,$ $ax+b\ge 0,\ ax+b\le 0$ với $a,\ b\in \mathbb{R}$.

- Giải và biện luận bất phương trình dạng: $ax+b>0$ (1).

+) Nếu $a>0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)\cdot$

+) Nếu $a<0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)\cdot$

+) Nếu $a=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 0.x>-b$. Khi đó, ta xét:

Với $-b\ge 0\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$

Với $-b<0\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$

***Lưu ý:*** Ta giải tương tự với $ax+b<0,\ ax+b\le 0,\ ax+b\ge 0$.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình sau: mx + 6 < 2x + 3m (1).

**Hướng dẫn:**

Ta có: $(1)\Leftrightarrow (m-2)x<3m-6$.

+) Với m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2: bất phương trình trở thành $0.x<0$, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

+) Với $m-2>0\Leftrightarrow m>2$: $(1)\Leftrightarrow x<\frac{3m-6}{m-2}=3$, suy ra bất phương trình có nghiệm x < 3.

+) Với $m-2<0\Leftrightarrow m<2$: $(1)\Leftrightarrow x>\frac{3m-6}{m-2}=3$, suy ra bất phương trình có nghiệm x > 3.

Vậy:

Với m = 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$.

Với m > 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 3)$.

Với m < 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3; +\infty)$.

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1) \geq 2x+1$ có tập nghiệm là S = $[1; +\infty)$.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \geq m+1$.

+) Với $2m-2=0 \Leftrightarrow m=1$: bất phương trình trở thành $0.x \geq 2$, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Do đó m = 1 không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) Với $2m-2>0 \Leftrightarrow m>1$ , bất phương trình tương đương với $x \geq \dfrac{m+1}{2m-2} \Rightarrow S = \left[\dfrac{m+1}{2m-2}; +\infty\right)$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn m > 1).

+) Với $2m-2<0 \Leftrightarrow m<1$, bất phương trình tương đương với $x \leq \dfrac{m+1}{2m-2} \Rightarrow S = \left(-\infty; \dfrac{m+1}{2m-2}\right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

**Dạng 2.2: Dấu của nhị thức bậc nhất**

**a. Phương pháp giải:**

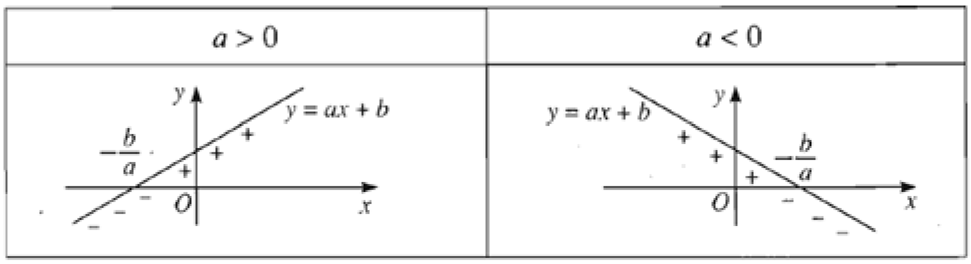
- Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng f(x) = ax + b trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

- Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất: Nhị thức f(x) = ax + b ($a \neq 0$) cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$ và trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$.

Ta có bảng xét dấu của nhị thức f(x) = ax + b ($a \neq 0$) như sau:

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) = ax + b | Trái dấu với a | 0 | Cùng dấu với a |

Minh họa bằng đồ thị




- Áp dụng vào giải phương trình:

Giải bất phương trình f(x) > 0 thực chất là xét xem biểu thức f(x) nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết f(x) nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức f(x).

Ta vận dụng định lý dấu của nhị thức bậc nhất để xét dấu f(x).

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Xét dấu nhị thức: f(x) = 16 - 8x.

**Hướng dẫn:**

Ta thấy nhị thức f(x) có nghiệm x = 2, hệ số a = -8 < 0 nên ta có bảng xét dấu như sau:

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | + | 0 | – |

Vậy f(x) > 0 khi $x \in (-\infty, 2)$; f(x) < 0 khi $x \in (2; +\infty)$.

**Ví dụ 2:** Xét dấu nhị thức f(x) = mx - 1 với m là một tham số đã cho.

**Hướng dẫn:**

+) Nếu m = 0 thì f(x) = -1 < 0 với mọi x.

+) Nếu m ≠ 0 thì f(x) là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{1}{m}$. Ta có bảng xét dấu nhị thức f(x) trong hai trường hợp m > 0 và m < 0 như sau:

Với m > 0:

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{m}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| f(x) | $-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$ |

Vậy f(x) < 0 khi $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right)$; f(x) > 0 khi $x \in \left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$.

Với m < 0:

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{m}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| f(x) | $+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$ |

Vậy f(x) > 0 khi $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right)$; f(x) < 0 khi $x \in \left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$.

**Dạng 2.3: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

**a. Phương pháp giải:**

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng:

$ax + by + c < 0, ax + by + c > 0, ax + by + c \le 0, ax + by + c \ge 0$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

- Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$, ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng d: $ax + by + c = 0$

Bước 2: Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc d.

Bước 3: Tính $ax_0 + by_0 + c$ và so sánh $ax_0 + by_0 + c$ với 0.

Bước 4: Kết luận:

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình sau:

x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 – x).

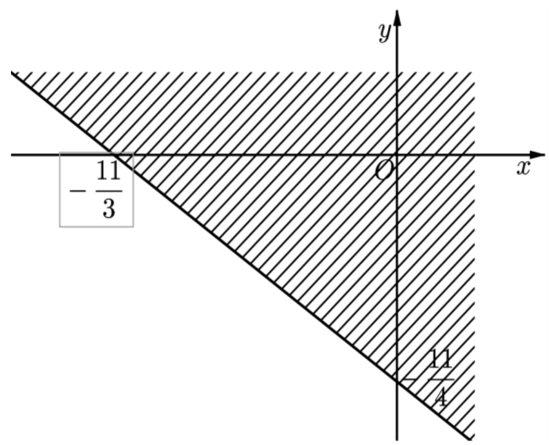
**Hướng dẫn:**

Đầu tiên, thu gọn bất phương trình đề bài đã cho về thành 3x + 4y + 11 < 0.

Ta vẽ đường thẳng d: 3x + 4y + 11 = 0.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình 3x + 4y + 11 < 0.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ d) không chứa điểm (0; 0).



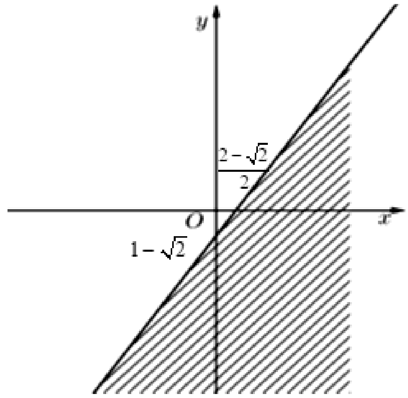

**Ví dụ 2:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình:
$2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\le 0$.

**Hướng dẫn:**

Trước hết, ta vẽ đường thẳng $d: 2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2=0$.

Ta thấy (0; 0) là nghiệm của bất phương trình đã cho (vì $\sqrt{2}-2<0$).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm (0; 0).




**Dạng 2.4: Xét dấu một biểu thức**

**a. Phương pháp giải:**

- Trước tiên ta biến đổi biểu thức P(x) về dạng gồm tích hoặc thương các nhị thức bậc nhất. Sau đó, để xét dấu biểu thức P(x), ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm các nghiệm P(x) hoặc những điểm làm cho P(x) không xác định (tức nghiệm của mẫu thức, nếu có).

Bước 2: Lập bảng xét dấu của P(x).

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu để kết luận.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Xét dấu biểu thức $f\left(x\right)=\frac{-4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $f\left(x\right)=-\frac{4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{3x+1}=\frac{5x+11}{\left(x-2\right)\left(3x+1\right)}$.

Ta có: $5x+11=0\Leftrightarrow x=-\frac{11}{5}$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{11}{5}$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5x + 11 | | – | 0 | + | \| | + | \| | + | |
| x - 2 | | – | \| | – | \| | – | 0 | + | |
| 3x + 1 | | – | \| | – | 0 | + | \| | + | |
| f(x) | | – | 0 | + | \|\| | – | \|\| | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng:

$f\left(x\right) > 0$ khi $x \in \left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(2;+\infty\right)$.

$f\left(x\right) < 0$ khi $x \in \left(-\infty;-\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};2\right)$.

f(x) = 0 khi x = $\frac{-11}{5}$.

**Ví dụ 2:** Xét dấu biểu thức f(x) = (2x + 8)(1 – x).

**Hướng dẫn:**

Ta có: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | -4 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x + 8 | | – | 0 | + | \| | + | |
| 1- x | | + | \| | + | 0 | – | |
| f(x) | | – | 0 | + | 0 | – | |

Từ bảng xét dấu ta thấy:

$f\left(x\right) > 0$ khi $x \in \left(-4;1\right)$.

$f\left(x\right) < 0$ khi $x \in \left(-\infty;-4\right) \cup \left(1;+\infty\right)$

f(x) = 0 khi x = - 4 hoặc x = 1.

**Dạng 2.5: Giải bất phương trình bậc nhất quy về việc xét dấu một tích hoặc một thương**

**a. Phương pháp giải:**

- Giải bất phương trình P(x) > 0 (P(x) < 0; $P(x) \le 0; P(x) \ge 0$) thực chất là xét xem biểu thức P(x) nhận giá trị dương (giá trị âm) với những giá trị nào của x, tức là ta đi xét dấu biểu thức P(x).

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(x-1)(x-3) \le 0$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x - 1 | | – | 0 | + | \| | + | |
| x - 3 | | – | \| | – | 0 | + | |
| (x - 1)(x - 3) | | + | 0 | – | 0 | + | |

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: S = [1; 3].

**Ví dụ 2:** Giải bất phương trình: $\frac{x-2}{x+1} \ge \frac{x+1}{x-2}$.

**Hướng dẫn:**

Biến đổi tương đương bất phương trình đã cho:

$$\frac{x-2}{x+1} \ge \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x+3}{(x+1)(x-2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{(x+1)(x-2)} \ge 0$$

Ta có: $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; x+1=0 \Leftrightarrow x=-1; x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ -1 $\frac{1}{2}$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| 1 - 2x | + \| + 0 – \| – |
| x + 1 | – 0 + \| + \| + |
| x - 2 | – \| – \| – 0 + |
| $\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}$ | + \|\| – 0 + \|\| – |

Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1}{2};2\right)$.

**Dạng 2.6: Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối**

**a. Phương pháp giải:**

Áp dụng các công thức sau:

+) $|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} g(x)<0 \\ \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f^2(x)\ge g^2(x)\end{cases}\end{array}\right.$

+) $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ -g(x)\le f(x)\le g(x)\end{cases}$

hoặc $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f^2(x)\le g^2(x)\end{cases}$

+) $|f(x)|\ge|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\ge g^2(x)$

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Giải bất phương trình $|2-x|+3x-1\le 6$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $|2-x|+3x-1\le 6$

$\Leftrightarrow|2-x|\le 7-3x\Leftrightarrow\begin{cases} 7-3x\ge 0 \\ (2-x)^2\le(7-3x)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{7}{3} \\ (2-x)^2 - (7-3x)^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{7}{3} \\ (2x-5)(9-4x) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5}{2} \\ x \le \dfrac{9}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \le \frac{9}{4}.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S = \left(-\infty; \dfrac{9}{4}\right]$.

**Ví dụ 2:** Giải bất phương trình: $|x+1| - |x-2| \ge 3$.

**Hướng dẫn:**

Xét bất phương trình $|x+1| - |x-2| \ge 3$ (*)

Ta có bảng xét dấu các giá trị tuyệt đối:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x + 1 | | – | 0 | + | \| | + | |
| x - 2 | | – | \| | – | 0 | + | |

+) Trường hợp 1: Với $x < -1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x - 1 + x - 2 \ge 3 \Leftrightarrow -3 \ge 3$ (vô lý), suy ra $S_1 = \varnothing$.

+) Trường hợp 2: Với $-1 \le x < 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x + 1 + x - 2 \ge 3 \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Kết hợp với điều kiện $-1 \le x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \varnothing$.

+) Trường hợp 3: Với $x \ge 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x + 1 - x + 2 \ge 3 \Leftrightarrow 3 \ge 3$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $x \ge 2$, ta được tập nghiệm $S_3 = [2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [2;+\infty)$.

### 3. Bài tập tự luyện

### 3.1 Tự luận

**Câu 1:** Giải và biện luận bất phương trình: $m(m^2x+2) < x + m^2 + 1$.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình tương đương với

$$(m^3-1)x < m^2 - 2m + 1 \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}$$

+) Với m = 1: bất phương trình trở thành 0x < 0, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

+) Với m > 1: bất phương trình tương đương với $x < \frac{m-1}{m^2+m+1}$

+) Với m < 1 bất phương trình tương đương với $x > \frac{m-1}{m^2+m+1}$

Vậy:

m = 1, bất phương trình vô nghiệm.

m > 1, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{m-1}{m^2+m+1}$.

m < 1, bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{m-1}{m^2+m+1}$.

**Câu 2:** Tìm m để bất phương trình $(m^2-3m)x + m < 2 - 2x$ vô nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình tương đương với $(m^2-3m+2)x < 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với m = 1 bất phương trình trở thành $0x < 1$: vô nghiệm.

Với m = 2 bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Vậy với m = 1 hoặc m = 2, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 3:** Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x-m<3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4;+\infty)$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $2x-m<3(x-1)\Leftrightarrow x>3-m.$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3-m;+\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4;+\infty)$ thì $3-m=4\Leftrightarrow m=-1.$

**Câu 4:** Xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{2-x}{2x+1}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $2-x=0\Leftrightarrow x=2$; $2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 - x | | + | \| | + | 0 | – | |
| 2x + 1 | | – | 0 | + | \| | + | |
| f(x) | | – | \|\| | + | 0 | – | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy:

$f(x)>0$ khi $x\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$; $f(x)<0$ khi $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 5:** Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1)>0$.

**Hướng dẫn:**

Đặt $f(x)=x(x-2)(x+1)$.

Ta có: $x=0$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | – | \| | – | 0 | + | \| | + | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x + 1 | – | 0 | + | \| | + | \| | | + | |
| x - 2 | – | \| | – | \| | – | | 0 | + | |
| f(x) | – | 0 | + | 0 | – | | 0 | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-1;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3.

**Câu 6:** Tập nghiệm của bất phương trình $\left|3x+1\right|>2$.

**Hướng dẫn:**

Ta có $\left|3x+1\right|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1>2\\3x+1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{3}\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

**Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị nguyên x trong [-2017; 2017] thỏa mãn bất phương trình $\left|2x+1\right|<3x$.

**Hướng dẫn:**

$\left|2x+1\right|<3x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-3x<2x-1<3x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>\dfrac{1}{5}\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{5}$.

Mà $x\in\left[-2017;2017\right]\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{5};2017\right]$

Vậy có 2017 giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài.

**Câu 8:** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.

**Hướng dẫn:**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Bất phương trình $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| - 2|x+2| < 0 \ (*)$.

Ta có bảng xét dấu các giá trị tuyệt đối:

| x | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x - 1 | | – | \| | – | 0 | + | |
| x + 2 | | – | 0 | + | \| | + | |

+) Trường hợp 1: Với $x < -2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x+1+2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x < -5$.

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -5)$.

+) Trường hợp 2: Với $-2 < x < 1$, khi đó
$(*) \Leftrightarrow -x+1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$.

Kết hợp với điều kiện $-2 < x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = (-1;1)$.

+) Trường hợp 3: Với $x > 1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x-1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta được tập nghiệm $S_3 = (1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là
$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty; -5) \cup (-1;1) \cup (1; +\infty)$.

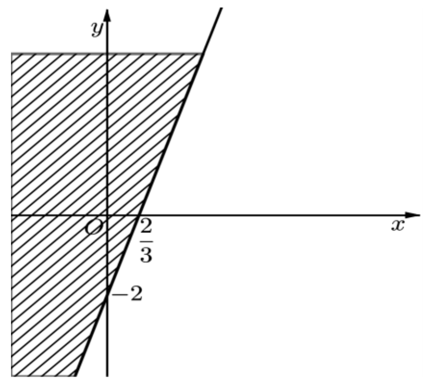
**Câu 9:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $-3x + y + 2 \leq 0$.

**Hướng dẫn:**

Trước hết, ta vẽ đường thẳng $d: -3x + y + 2 = 0$.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm (0; 0)



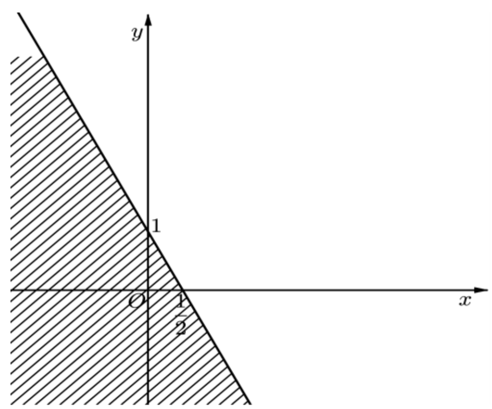

**Câu 10:** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình 2x + y > 1.

**Hướng dẫn:**

Trước hết, ta vẽ đường thẳng d: 2x + y = 1.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ d) không chứa điểm (0; 0).




**3.2 Trắc nghiệm**

**Câu 1:** Bất phương trình nào sau đây không tương đương với bất phương trình $x+5\geq 0$?

**A.** $-x^2\left(x+5\right)\leq 0$.

**B.** $\sqrt{x+5}\left(x+5\right)\geq 0$.

**C.** $\left(x-1\right)^2\left(x+5\right)\geq 0$.

**D.** $\sqrt{x+5}\left(x-5\right)\geq 0$.

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Ta có $x+5\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Ta xét các bất phương trình:

Đáp án A: $-x^2\left(x+5\right)\le 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án B: $\sqrt{x+5}\left(x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án C: $\left(x-1\right)^2\left(x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án D: $\sqrt{x+5}\left(x-5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 5$.

**Câu 2:** Cho $f\left(x\right)=2x-4$, khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(2;+\infty\right)$.

**B.** $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)$

**C.** $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-2;+\infty\right)$.

**D.** $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Ta có:

$f\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x-4>0\Leftrightarrow x>2$.

$f\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x-4<0\Leftrightarrow x<2$.

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

**Câu 3:** Bất phương trình $m^2\left(x-1\right)\ge 9x+3m$ có nghiệm đúng với mọi x khi:

**A.** $m=1$.

**B.** $m=-3$.

**C.** $m=\varnothing$.

**D.** $m=-1$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-9\right)x \ge m^2+3m.$

Dễ thấy nếu $m^2-9 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x>18$: vô nghiệm

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x \ge 0$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3$.

**Câu 4:** Miền nghiệm của bất phương trình $4\left(x-1\right)+5\left(y-3\right)>2x-9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

**A.** $\left(0;0\right)$.

**B.** $\left(1;1\right)$.

**C.** $\left(-1;1\right)$.

**D.** $\left(2;5\right)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Ta có: $4\left(x-1\right)+5\left(y-3\right)>2x-9 \Leftrightarrow 4x-4+5y-15>2x-9 \Leftrightarrow 2x+5y-10>0$.

Dễ thấy, tại điểm $\left(2;5\right)$ ta có: $2.2+5.5-10>0$ (đúng).

**Câu 5:** Cho nhị thức bậc nhất $f\left(x\right)=ax+b\ \left(a \ne 0\right)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

**B.** Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$.

**C.** Nhị thức $f(x)$ có giá trị trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$.

**D.** Nhị thức $f(x)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B. Theo định lý về dấu của nhị thức bậc nhất.

**Câu 6:** Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

**A.** Bất phương trình ax + b < 0 có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi a = 0 và b < 0.

**B.** Bất phương trình bậc nhất một ẩn luôn có nghiệm.

**C.** Bất phương trình ax + b < 0 vô nghiệm khi a = 0 và $b \geq 0$.

**D.** Bất phương trình ax + b < 0 vô nghiệm khi a = 0.

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Xét ax + b < 0, khi a = 0 thì bất phương trình có dạng $0x + b < 0$

+) Nếu $b < 0$ thì tập nghiệm là $\mathbb{R}$

+) Nếu $b \geq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

**Câu 7:** Cho f(x), g(x) là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu như sau:

| x | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | \| | − | 0 | + | |
| $g(x)$ | | − | \| | − | 0 | + | \| | + | |

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là:

**A.** $[1;2]$.

**B.** $[1;2) \cup (3;+\infty)$.

**C.** $[1;2) \cup [3;+\infty)$.

**D.** $\left[1;2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn C.

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\vert$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | 0 | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | | $-$ | 0 | $+$ | $\Vert$ | $-$ | 0 | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[1;2\right)\cup\left[3;+\infty\right)$.

**Câu 8:** Cho bất phương trình $\left|\dfrac{2}{x-13}\right|>\dfrac{8}{9}$. Số nghiệm nguyên nhỏ hơn 13 của bất phương trình là:

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Hướng dẫn:**

Chọn C.

Ta có: $\left|\dfrac{2}{x-13}\right|>\dfrac{8}{9}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{x-13}<-\dfrac{8}{9}\\ \dfrac{2}{x-13}>\dfrac{8}{9}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{8x-86}{9(x-13)}<0\\ \dfrac{122-8x}{9(x-13)}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{43}{4}<x<13\\ 13<x<\dfrac{61}{4}\end{array}\right.$

Nghiệm nguyên nhỏ hơn 13 của bất phương trình là 11; 12.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên nhỏ hơn 13.

**Câu 9:** Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x)\le 0$ là:

**A.** 1.

**B.** 4.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Hướng dẫn:**

Chọn C.

Ta có: $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

Bảng xét dấu vế trái:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x + 1 | | – | 0 | + | \| | + | \| | + | |
| 2 - x | | + | \| | + | 0 | – | \| | – | |
| 3 - x | | + | \| | + | \| | + | 0 | – | |
| Vế trái | | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + | |

Suy ra $x\in(-\infty;-1]\cup[2;3]$.

Vậy số nghiệm nguyên dương của bất phương trình trên là 2.

**Câu 10:** Hàm số có kết quả xét dấu như dưới đây là hàm số nào?

| x | $-\infty$ | | 0 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | – | 0 | + | 0 | – | |

**A.** $f(x)=x-3$.

**B.** $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$.

**C.** $f(x)=x(3-x)$.

**D.** $f\left(x\right)=x\left(x-3\right)$.

**Hướng dẫn**

Chọn C.

Từ bảng xét dấu ta thấy $f\left(x\right)=0$ khi $x=0$; $x=3$ nên đáp án chỉ có thể là $f\left(x\right)=x\left(3-x\right)$ hoặc $f\left(x\right)=x\left(x-3\right)$.

Mặt khác $f\left(x\right)>0$ khi $x\in\left(0;3\right)$ nên đáp án là $f\left(x\right)=x\left(3-x\right)$.

# Dạng 3: Bất phương trình bậc hai

## 1. Lý thuyết

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \le 0; ax^2 + bx + c \ge 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \ne 0$.

- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp a < 0) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp a > 0).

## 2. Các dạng toán

### Dạng 3.1: Dấu của tam thức bậc hai

**a. Phương pháp giải:**

- Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \ne 0$.
- Định lý về dấu của tam thức bậc hai:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a trừ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của f(x).

***Lưu ý:*** Có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$.

Ta có bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$ trong các trường hợp như sau:

$\Delta < 0$:

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| f(x) | Cùng dấu với a |

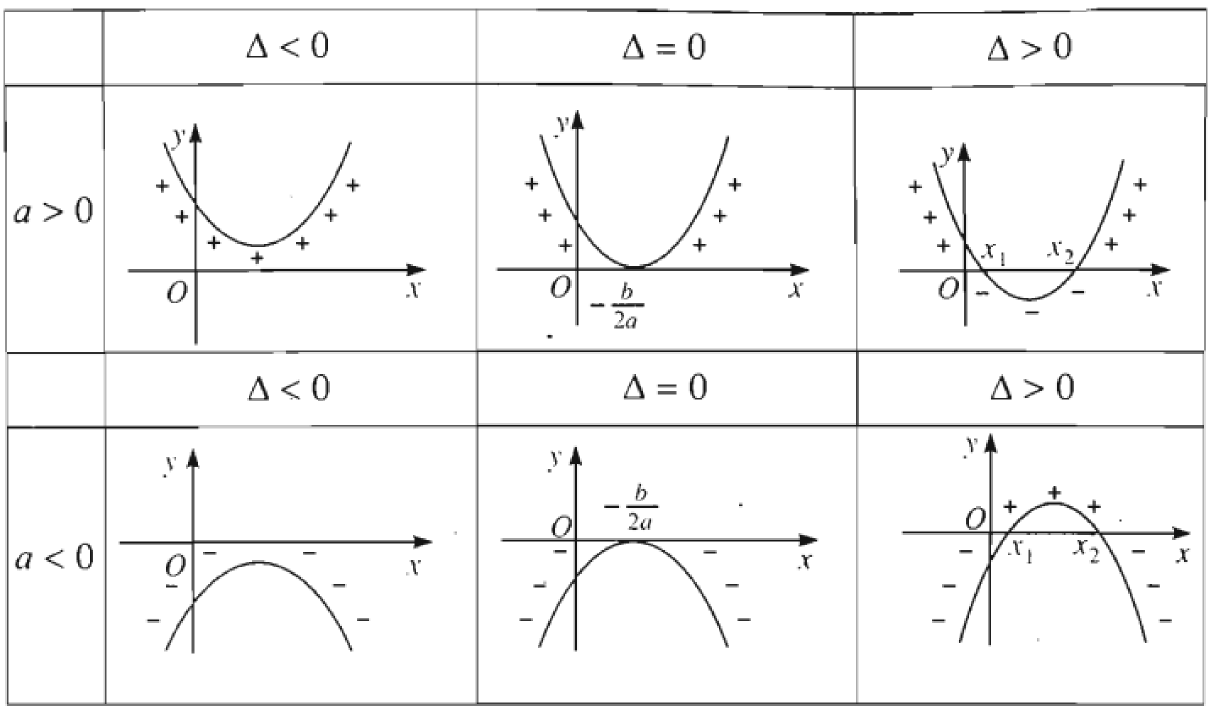
$\Delta = 0$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| f(x) | Cùng dấu với a | 0 | Cùng dấu với a |

$\Delta > 0$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
| f(x) | Cùng dấu với a | 0 | Trái dấu với a | 0 | Cùng dấu với a |

Minh họa bằng đồ thị




**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Xét dấu tam thức $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

**Hướng dẫn:**

Ta có f(x) có hai nghiệm phân biệt $x = 1,\ x = -5$ và hệ số a = -1 < 0 nên:

f(x) > 0 khi $x \in (-5;1)$; f(x) < 0 khi $x \in (-\infty;-5) \cup (1;+\infty)$.

**Ví dụ 2:** Xét dấu biểu thức $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{5}{4}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-10x+3$ | | + | 0 | – | \| | – | 0 | + | |
| $4x-5$ | | – | \| | – | 0 | + | \| | + | |
| f(x) | | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy:

$f\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{4};3\right]$; $f\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{4}\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

**Dạng 3.2: Giải và biện luận bất phương trình bậc hai**

**a. Phương pháp giải:**

Giải và biện luận bất phương trình bậc hai

Ta xét hai trường hợp:

+) Trường hợp 1: a = 0 (nếu có).

+) Trường hợp 2: a $\neq$ 0, ta có:

Bước 1: Tính $\Delta$ (hoặc $\Delta'$)

Bước 2: Dựa vào dấu của $\Delta$ (hoặc $\Delta'$) và a, ta biện luận số nghiệm của bất phương trình

Bước 3: Kết luận.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình $x^2+2x+6m>0$.

**Hướng dẫn:**

Đặt $f(x) = x^2 + 2x + 6m$

Ta có Δ' = 1 - 6m; a = 1. Xét ba trường hợp:

+) Trường hợp 1: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{6} \Rightarrow f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 2: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

+) Trường hợp 3: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$.

Khi đó f(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 - \sqrt{1-6m}$; $x_2 = -1 + \sqrt{1-6m}$ ( dễ thấy $x_1 < x_2$) $\Rightarrow f(x) > 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Suy ra nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Vậy:

Với $m > \frac{1}{6}$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Với $m = \frac{1}{6}$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Với $m < \frac{1}{6}$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1 = -1 - \sqrt{1-6m}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1-6m}$.

**Ví dụ 2:** Giải và biện luận bất phương trình $12x^2 + 2(m+3)x + m \le 0$.

**Hướng dẫn:**

Đặt $f(x) = 12x^2 + 2(m+3)x + m$, ta có a = 12 và $\Delta' = (m-3)^2 \ge 0$

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

+) Trường hợp 1: Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 3$, suy ra $f(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, nghiệm của bất phương trình là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$.

+) Trường hợp 2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 3$, suy ra f(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{m}{6}$

Xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m < 3$

Khi đó, theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{m}{6}\right]$

Khả năng 2: Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m > 3$

Khi đó, theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{m}{6}; -\frac{1}{2}\right]$

Vậy: Với m = 3 tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Với m < 3 tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{m}{6}\right]$.

Với m > 3 tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{m}{6}; -\frac{1}{2}\right]$.

**Dạng 3.3: Bất phương trình chứa căn thức**

**a. Phương pháp giải:**

Sử dụng các công thức:

+) $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$

+) $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+2} \le x-1$.

**Hướng dẫn:**

Ta có $\sqrt{x^2+2} \le x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x^2+2 \ge 0 \\ x^2+2 \le x^2-2x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -\frac{1}{2} \end{cases}$ (vô lý).

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 2:** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x^2-2x-15} > 2x+5$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\sqrt{x^2-2x-15} > 2x+5 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-15 \ge 0 \\ 2x+5 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ x^2-2x-15 > (2x+5)^2 \end{cases} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x \le -3 \\ x \ge 5 \end{array} \right. \\ x < -\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -\frac{5}{2} \\ 3x^2+22x+40 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x \le -3 \\ \begin{cases} x \ge -\frac{5}{2} \\ -4 < x < -\frac{10}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \le -3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty; -3]$.

## 3. Bài tập tự luyện

### 3.1 Tự luận

**Câu 1:** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2-3x-15 \le 0$

**Hướng dẫn:**

Xét $f(x) = 2x^2-3x-15$.

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{129}}{4}$.

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $\dfrac{3-\sqrt{129}}{4}$ | | $\dfrac{3+\sqrt{129}}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | + | 0 | – | 0 | + | |

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{3-\sqrt{129}}{4};\dfrac{3+\sqrt{129}}{4}\right]$.

Do đó bất phương trình có 6 nghiệm nguyên là: -2; -1; 0; 1; 2; 3.

**Câu 2:** Xét dấu biểu thức: $f(x)=x^2-4$.

**Hướng dẫn:**

Ta có f(x) có hai nghiệm phân biệt x = -2, x = 2 và hệ số a = 1 > 0 nên:

f(x) < 0 khi $x\in(-2;2)$; f(x) > 0 khi $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 3:** Xét dấu biểu thức: $f(x)=x^2-4x+4$.

**Hướng dẫn:**

$x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2$. Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x+4$ | | + | 0 | + | |

Vậy f(x) > 0 với $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

**Câu 4:** Giải bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)$.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow x^2+5x\le 2x^2+4\Leftrightarrow x^2-5x+4\ge 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | 1 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5x+4$ | | + | 0 | – | 0 | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

**Câu 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}$ ?

**Hướng dẫn:**

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4\ne 0 \\ x+2\ne 0 \\ 2x-x^2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne \pm 2 \end{cases}$.

Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2-2x}<0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4}<0.$$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{9}{2}$ | | -2 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x + 9 | | – | 0 | + | \| | + | \| | + | |
| $x^2-4$ | | + | \| | + | 0 | – | 0 | + | |
| f(x) | | – | 0 | + | ‖ | – | ‖ | + | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup(-2;2)$.

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x (x = 1) thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 6:** Tìm các giá trị của m để biểu thức
$f(x)=x^2+(m+1)x+2m+7>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ \left(m+1\right)^2-4\left(2m+7\right)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2-6m-27<0\Leftrightarrow -3<m<9$.

**Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình:
$\left(m+1\right)x^2-2\left(m+1\right)x+4\ge 0\,(1)$ có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$ ?

**Hướng dẫn:**

+) Trường hợp 1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$

Bất phương trình (1) trở thành $4\ge 0\ \forall x\in R$ ( Luôn đúng) (*)

+) Trường hợp 2: $m+1\ne 0\Leftrightarrow m\ne -1$

Bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\ \Delta'=m^2-2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le 3\left(**\right)$

Từ (*) và (**) ta suy ra với $-1\le m\le 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$.

**Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai f(x) sau đây thỏa mãn $f\left(x\right)=-x^2+2x+m-2018<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**Hướng dẫn:**

Vì tam thức bậc hai f(x) có hệ số a = -1 < 0 nên $f\left(x\right)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta'<0\Leftrightarrow 1-\left(-1\right)\left(m-2018\right)<0\Leftrightarrow m-2017<0\Leftrightarrow m<2017$.

**Câu 9:** Bất phương trình $\sqrt{2x-1}\le 2x-3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng (0; 7)?

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\sqrt{2x-1}\le 2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ 2x-3\ge 0\\ 2x-1\le\left(2x-3\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \ge \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 - 14x + 10 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2}$$

Kết hợp điều kiện: $\begin{cases} x \in (0;7) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$, suy ra $x \in \{3;4;5;6\}$.

Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên thuộc khoảng (0; 7).

**Câu 10:** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 + 2017} \le \sqrt{2018}x$.

**Hướng dẫn:**

$$\sqrt{x^2 + 2017} \le \sqrt{2018}x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2017 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ x^2 + 2017 \le 2018x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [1;+\infty)$.

### 3.2 Trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \ne 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $f(x) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

**A.** $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

**B.** $\begin{cases} a \le 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

**C.** $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \ge 0 \end{cases}$.

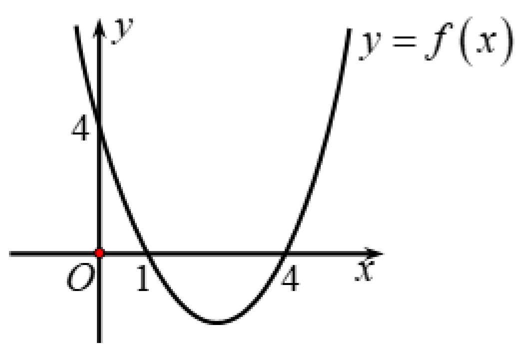
**D.** $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có: $f\left(x\right) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và $\Delta$.




**A.** a > 0, $\Delta > 0$.

**B.** a < 0, $\Delta > 0$.

**C.** a > 0, $\Delta = 0$.

**D.** a < 0, $\Delta = 0$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay lên nên a > 0 và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.

**Câu 3:** Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**B.** Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) luôn trái dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

**D.** Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số b, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**Hướng dẫn:**

Chọn C. Theo định lý về dấu tam thức bậc hai

**Câu 4:** Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào không là tập con của S?

**A.** $(-\infty; 0]$.

**B.** $[6; +\infty)$.

**C.** $[8; +\infty)$.

**D.** $(-\infty; -1]$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Ta có $x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{array}\right.$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Do đó $[6; +\infty) \not\subset S$.

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm

**A.** $-4 \leq m \leq 4$.

**B.** $m \leq -4$ hoặc $m \geq 4$.

**C.** $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

**D.** $-2 \le m \le 2$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -4$ hoặc $m \ge 4$.

**Câu 6:** Tam thức $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4$ không âm với mọi giá trị của x khi

**A.** $m < 3$.

**B.** $m \ge 3$.

**C.** $m \le -3$.

**D.** $m \le 3$.

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 4) \le 0$

$\Leftrightarrow m - 3 \le 0 \Leftrightarrow m \le 3$.

Vậy $m \le 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m+2)x + 8m + 1 \le 0$ vô nghiệm.

**A.** $m \in [0; 28]$.

**B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

**C.** $m \in (-\infty; 0] \cup [28; +\infty)$.

**D.** $m \in (0; 28)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28$.

**Câu 8:** Bất phương trình $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$ có nghiệm là:

**A.** $-5 < x \le -3$.

**B.** $3 < x \le 5$.

**C.** $2 < x \le 3$.

**D.** $-3 \le x \le -2$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Ta có: $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+6x-5 \ge 0 \\ 8-2x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 8-2x \ge 0 \\ -x^2+6x-5 > (8-2x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ x > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 4 \\ 3 < x < \dfrac{23}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 < x \le 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $3 < x \le 5$.

**Câu 9:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{2(x^2+1)} \le x+1$ là:

**A.** 3.

**B.** 1.

**C.** 4.

**D.** 2.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Ta có: $\sqrt{2\left(x^2+1\right)} \le x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2\left(x^2+1\right) \ge 0 \\ 2\left(x^2+1\right) \le \left(x+1\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-2x+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ \left(x-1\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy bất phương trình đã cho có 1 nghiệm nguyên.

**Câu 10:** Nghiệm của bất phương trình $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x+2}} \le 0\,(1)$ là:

**A.** $x \le \dfrac{1}{3}$**.**

**B.** $-2 < x < \dfrac{1}{3}$**.**

**C.** $\begin{cases} x \le \dfrac{1}{3} \\ x \ne -2 \end{cases}$**.**

**D.** $-2 < x \le \dfrac{1}{3}$**.**

**Hướng dẫn:**

Chọn D.

Điều kiện xác định: x > -2.

$\left(1\right) \Leftrightarrow 3x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{3}$ (do $\sqrt{x+2} > 0$ với mọi x > -2)

Kết hợp điều kiện $x > -2$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \le \dfrac{1}{3}$.

**Dạng 4: Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

**1. Lý thuyết**

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

**2. Các dạng toán**

**Dạng 4.1: Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

**a. Phương pháp giải:**

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x+1 \ge 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\begin{cases} 3x+1 \ge 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ 2x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là: $S = (8; +\infty)$.

**Ví dụ 2:** Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình sau $\begin{cases} 2x-1 \ge 3(x-3) \\ \dfrac{2-x}{2} < x-3 \\ \sqrt{x-3} \ge 2 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

ĐKXĐ: $x \ge 3$.

Ta có:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 3(x-3) \\ \dfrac{2-x}{2}<x-3 \\ \sqrt{x-3}\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 3x-9 \\ 2-x<2x-6 \\ x-3\ge 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x\ge -8 \\ -3x<-8 \\ x\ge 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 8 \\ x>\dfrac{8}{3} \\ x\ge 7 \end{cases} \Leftrightarrow 7\le x\le 8 \text{ (t/m)}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S=[7;8]$.

**Dạng 4.2: Xác định tham số m để hệ bất phương trình có nghiệm, vô nghiệm**

**a. Phương pháp giải:**

Ta giải từng bất phương trình của hệ theo tham số m. Sau đó, biện luận bất phương trình có nghiệm hay vô nghiệm dựa vào giao của các tập nghiệm:

+) Hệ bất phương trình có nghiệm khi giao của các tập nghiệm khác rỗng.

+) Hệ bất phương trình vô nghiệm khi giao của các tập nghiệm bằng rỗng.

**b. Ví dụ minh họa:**

**Ví dụ 1:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-m<2 \end{cases}$ có nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $2x-1>0$ có tập nghiệm $S_1=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $x-m<2$ có tập nghiệm $S_2=(-\infty;m+2)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m+2>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{2}$.

**Ví dụ 2:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+4>x+9 \\ 1-2x\le m-3x+1 \end{cases}$ vô nghiệm.

**Hướng dẫn:**

+ Bất phương trình $3x+4>x+9 \Leftrightarrow 2x>5 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$

Tập nghiệm bất phương trình là $S_1=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

+ Bất phương trình $1-2x \le m-3x+1 \Leftrightarrow x \le m$

Tập nghiệm bất phương trình là $S_2=\left(-\infty;m\right]$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $S_1 \cap S_2=\varnothing \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$.

**3. Bài tập tự luyện:**

**3.1 Tự luận**

**Câu 1:** Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x+3<4+2x \\ 5x-3<4x-1 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\begin{cases} x+3<4+2x \\ 5x-3<4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$.

**Câu 2:** Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}<-x+1 \\ \frac{4-3x}{2}<3-x \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}<-x+1 \\ \frac{4-3x}{2}<3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<-3x+3 \\ 4-3x<6-2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x<4 \\ -x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{4}{5} \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2;\frac{4}{5}\right)$.

**Câu 3:** Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{4x+3}{2x-5} < 6 \\ \dfrac{x-1}{x+3} > 2 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{4x+3}{2x-5} < 6 \\ \dfrac{x-1}{x+3} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+3}{2x-5} - 6 < 0 \\ \dfrac{x-1}{x+3} - 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+3-12x+30}{2x-5} < 0 \\ \dfrac{x-1-2x-6}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-8x+33}{2x-5} < 0 \\ \dfrac{-x-7}{x+3} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{33}{8}; +\infty\right) \\ x \in (-7; -3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; -3)$.

**Câu 4:** Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+2 > 2x+3 \\ 1-x > 0 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Ta có: $\begin{cases} 3x+2 > 2x+3 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm bất phương trình trên là $S = \varnothing$.

**Câu 5:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \dfrac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $3(x-6) < -3$ có tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 5)$.

Bất phương trình $\dfrac{5x+m}{2} > 7$ có tập nghiệm $S_2 = \left(\dfrac{14-m}{5}; +\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{14-m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -11.$

**Câu 6:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx-1) < 2 \\ m(mx-2) \geq 2m+1 \end{cases}$ có nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m+2 \\ m^2x \geq 4m+1 \end{cases}.$

• Với m = 0, hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

• Với $m \neq 0$, hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \dfrac{m+2}{m^2} \\ x \geq \dfrac{4m+1}{m^2} \end{cases}.$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m+2}{m^2} > \dfrac{4m+1}{m^2} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{3}.$

Vậy $0 \neq m < \dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 \geq 3 \\ x-m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $2x-1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = [2;+\infty).$

Bất phương trình $x-m \leq 0 \Leftrightarrow x \leq m$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = (-\infty;m].$

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử. Suy ra m = 2

**Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m^2x \ge 6 - x \\ 3x - 1 \le x + 5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $m^2x \ge 6 - x \Leftrightarrow \left(m^2+1\right)x \ge 6 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{6}{m^2+1}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = \left[\dfrac{6}{m^2+1}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $3x - 1 \le x + 5 \Leftrightarrow x \le 3$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = \left(-\infty; 3\right]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử, suy ra $\dfrac{6}{m^2+1} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

**Câu 9:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 7 \ge 8x + 1 \\ m + 5 < 2x \end{cases}$ vô nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $2x + 7 \ge 8x + 1 \Leftrightarrow -6x \ge -6 \Leftrightarrow x \le 1$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = \left(-\infty; 1\right]$.

Bất phương trình $m + 5 < 2x \Leftrightarrow x > \dfrac{m+5}{2}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = \left(\dfrac{m+5}{2}; +\infty\right)$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \ge -3$.

**Câu 10:** Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \left(x-3\right)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m \le 8 + 5x \end{cases}$ vô nghiệm.

**Hướng dẫn:**

Bất phương trình $\left(x-3\right)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \ge x^2 + 7x + 1$

$\Leftrightarrow -6x + 9 \geq 7x + 1 \Leftrightarrow 8 \geq 13x \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2 = \left[\frac{2m-8}{5}; +\infty\right)$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

**3.2 Trắc nghiệm:**

**Câu 1:** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx + 2m > 0 \\ \frac{2x+3}{5} > 1 - \frac{3x}{5} \end{cases}$. Xét các mệnh đề sau:

(I) Khi m < 0 thì hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

(II) Khi m = 0 thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(III) Khi $m \geq 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

(IV) Khi m > 0 thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.** 2.

**D.** 3.

**Hướng dẫn:**

Chọn C.

Ta có : $\begin{cases} mx+2m>0 \\ \dfrac{2x+3}{5}>1-\dfrac{3x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx>-2m \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases}$.

Với m < 0 thì $\begin{cases} mx>-2m \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Với m = 0 thì $\begin{cases} mx>-2m \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x>0 \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Với m > 0 thì $\begin{cases} mx>-2m \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{5}$.

Vậy (I) và (IV) đúng; (II) và (III) sai.

**Câu 2:** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x)>0 \\ x<m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi:

**A.** $m\le -2$.

**B.** m > -2.

C. m < -1.

**D.** m = 0.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

$\begin{cases} (x+3)(4-x)>0 \\ x<m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<4 \\ x<m-1 \end{cases}$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $m-1\le -3 \Leftrightarrow m\le -2$.

**Câu 3:** Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 4-x\ge 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases}$ là:

**A.** $S=(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.

**B.** $S=[-2;4]$.

**C.** $S=[2;4]$.

**D.** $S=(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 4$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=[-2;4]$.

**Câu 4:** Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{4x+5}{6}<x-3 \\ 2x+3>\dfrac{7x-4}{3} \end{cases}$ là:

**A.** $\left(\dfrac{23}{2};13\right)$.

**B.** $(-\infty;13)$.

**C.** $(13;-\infty)$.

**D.** $\left(-\infty;\dfrac{23}{2}\right)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{4x+5}{6}<x-3 \\ 2x+3>\dfrac{7x-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-23>0 \\ x-13<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{23}{2} \\ x<13 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{23}{2};13\right)$.

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \dfrac{5x+m}{2} > 5 \end{cases}$ có nghiệm.

**A.** m < -15.

**B.** $m \geq -15$.

**C.** m > -15.

**D.** $m \leq -15$.

**Hướng dẫn:**

Chọn C.

$$\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \dfrac{5x+m}{2} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 15 \\ 5x+m > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > \dfrac{10-m}{5} \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{10-m}{5} < 5 \Leftrightarrow 10-m < 25 \Leftrightarrow m > -15$.

**Câu 6:** Tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ bằng:

**A.** 21.

**B.** 28.

**C.** 27.

**D**. 29.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

$$\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x^2 < x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là S= (-1; 7).

Suy ra các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 21.

**Câu 7:** Giá trị x = -2 là nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

**A.** $\begin{cases} 2x-3<1 \\ 3+4x>-6 \end{cases}$.

**B.** $\begin{cases} 2x-5<3x \\ 4x-1>0 \end{cases}$.

**C.** $\begin{cases} 2x-4>3 \\ 1+2x<5 \end{cases}$.

**D.** $\begin{cases} 2x-3<3x-5 \\ 2x-3>1 \end{cases}$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Thay x = -2 và từng hệ bất phương trình của các đáp án, ta được đáp án A thỏa mãn.

**Câu 8:** Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx \le m-3 \\ (m+3)x \ge m-9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

**A.** m = -2

**B.** m = 1

**C.** m = 2

**D**. m = -1

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

+) Với m = 0, hệ bất phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} 0x \le -3 \\ x \ge -3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

+) Với m = -3, hệ bất phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x \ge 2 \\ 0x \ge -12 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$.

Do đó hệ không có nghiệm duy nhất.

+) Với $m \ne 0; m \ne -3$, hệ bất phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x \le \dfrac{m-3}{m} \\ x \ge \dfrac{m-9}{m+3} \end{cases}$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{m-3}{m} = \dfrac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy m = 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 9:** Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+1>x-2 \end{cases}$ là

**A.** $(-3; 2)$**.**

**B.** $(-\infty; 3)$**.**

**C.** $(2; +\infty)$**.**

**D**. $(-3; +\infty)$.

**Hướng dẫn:**

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+1>x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<2$.

**Câu 10:** Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+5 \ge x-1 \\ (x+2)^2 \le (x-1)^2 + 9 \\ mx+1 > (m-2)x + m \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

**A.** $m = 3$.

**B.** $m \ge 3$.

**C.** $m < 3$.

**D.** $m \le 3$.

**Hướng dẫn:**

Chọn B.

+ Bất phương trình $3x+5\ge x-1\Leftrightarrow 2x\ge -6\Leftrightarrow x\ge -3$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_1=\left[-3;+\infty\right)$

+ Bất phương trình $\left(x+2\right)^2\le\left(x-1\right)^2+9\Leftrightarrow x^2+4x+4\le x^2-2x+1+9$

$\Leftrightarrow 4x+4\le -2x+1+9\Leftrightarrow 6x\le 6\Leftrightarrow x\le 1$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_2=\left(-\infty;1\right]$

Suy ra $S_1\cap S_2=\left[-3;1\right]$.

+ Bất phương trình $mx+1>\left(m-2\right)x+m\Leftrightarrow mx+1>mx-2x+m$

$\Leftrightarrow 1>-2x+m\Leftrightarrow 2x>m-1\Leftrightarrow x>\dfrac{m-1}{2}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S_3=\left(\dfrac{m-1}{2};+\infty\right)$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $\left(S_1\cap S_2\right)\cap S_3=\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{m-1}{2}\ge 1\Leftrightarrow m\ge 3.$