

## Chương II. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

### Bài 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

#### A. Lý thuyết

##### 1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0; ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0,$$

trong đó  $a, b, c$  là những số cho trước,  $a, b$  không đồng thời bằng 0,  $x$  và  $y$  là các ẩn.

**Ví dụ:**

$5x + 2y < 4$  là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì bất phương trình chứa hai ẩn  $x, y$  ở bậc nhất.

$5x + 2y - 3z > 3$  không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì bất phương trình này chứa 3 ẩn  $x, y, z$  ở bậc nhất.

##### 2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình  $ax + by + c < 0$ .

Mỗi cặp số  $(x_0; y_0)$  thỏa mãn  $ax_0 + by_0 + c < 0$  được gọi là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Chú ý:** Nghiệm của các bất phương trình  $ax + by + c > 0; ax + by + c \leq 0; ax + by + c \geq 0$  được định nghĩa tương tự.

**Ví dụ:**

+ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $5x + 2y < 4$  có các cặp nghiệm là  $(-1; -2); (0; 0)$ ; bởi:

Với  $x = -1, y = -2$  ta có:  $5.(-1) + 2.(-2) = -9 < 4$  nên  $(-1; -2)$  là nghiệm của bất phương trình  $5x + 2y < 4$ .

Với  $x = 0, y = 0$  ta có:  $5. 0 + 2. 0 = 0 < 4$  nên  $(0; 0)$  là nghiệm của bất phương trình  $5x + 2y < 4$ .

+ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x - 2y \geq 4$  có các cặp nghiệm là  $(4; -1); (4; 0)$ ; bởi:

Với  $x = 4, y = -1$  ta có:  $4 - 2. (-1) = 6 \geq 4$  nên  $(4; -1)$  là nghiệm của bất phương trình  $x - 2y \geq 4$ .

Với  $x = 4, y = 0$  ta có:  $4 - 2. 0 = 4 \geq 4$  nên  $(4; 0)$  là nghiệm của bất phương trình  $x - 2y \geq 4$ .

### 3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm  $(x_0; y_0)$  sao cho  $ax_0 + by_0 + c < 0$  được gọi là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by + c < 0$ .

- Người ta chứng minh được: Mỗi phương trình  $ax + by + c = 0$  ( $a, b$  không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng  $\Delta$ . Đường thẳng  $\Delta$  chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng, trong đó một nửa (không kể bờ  $\Delta$ ) là tập hợp các điểm  $(x; y)$  thỏa mãn  $ax + by + c > 0$ , nửa còn lại (không kể bờ  $\Delta$ ) là tập hợp các điểm  $(x; y)$  thỏa mãn  $ax + by + c < 0$ .

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by + c < 0$  như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$ .

Bước 2: Lấy một điểm  $(x_0; y_0)$  không thuộc  $\Delta$ . Tính  $ax_0 + by_0 + c$ .

+ Nếu  $ax_0 + by_0 + c < 0$  thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $\Delta$ ) chứa điểm  $(x_0; y_0)$ .

+ Nếu  $ax_0 + by_0 + c > 0$  thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $\Delta$ ) không chứa điểm  $(x_0; y_0)$ .

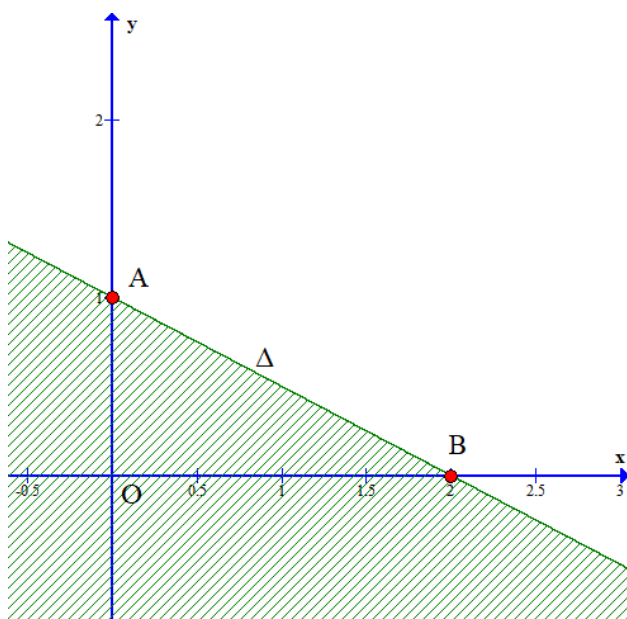
**Chú ý:** Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng  $ax + by + c \leq 0$  (hoặc  $ax + by + c \geq 0$ ) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by + c < 0$  (hoặc  $ax + by + c > 0$ ) kể cả bờ.

**Ví dụ:** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y - 2 > 0$  trên mặt phẳng tọa độ:

Bước 1: Vẽ đường thẳng  $\Delta: x + 2y - 2 = 0$  trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước 2: Lấy điểm O (0; 0) không thuộc  $\Delta$  và thay  $x = 0$  và  $y = 0$  vào biểu thức  $x + 2y - 2$  ta được  $0 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 > 0$  là mệnh đề sai.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  (không kể bờ  $\Delta$ ) không chứa điểm O (miền nghiệm là miền không bị gạch trên hình)



## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- a)  $3x + 5y - 7 < 0$
- b)  $2x^2 - y - 1 > 0$
- c)  $4y^2 - 3 \leq 0$
- d)  $4x - 5 < 3y$
- e)  $2x - 5y + 6t \geq 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  $3x + 5y - 7 < 0$  có dạng  $ax + by + c < 0$  với  $a = 3$ ,  $b = 5$  và  $c = -7$ . Do đó bất phương trình a) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có:  $2x^2 - y - 1 > 0$  có chứa  $x^2$  nên bất phương trình b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có:  $4y^2 - 3 \leq 0$  có chứa ẩn  $y^2$  nên bất phương trình c) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có  $4x - 5 < 3y \Leftrightarrow 4x - 3y - 5 < 0$  có dạng  $ax + by + c < 0$  với  $a = 4$ ,  $b = -3$  và  $c = -5$ . Do đó bất phương trình d) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có  $2x - 5y + 6t \geq 0$  là bất phương trình bậc nhất ba ẩn  $x, y, t$ . Do đó bất phương trình e) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vậy  $3x + 5y - 7 < 0$ ;  $4x - 5 < 3y$  là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Bài 2.** Bất phương trình sau có phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không? Nếu có biểu diễn miền nghiệm của nó trên trục tọa độ Oxy:  $2x + y - 4 \leq 0$ ?

**Hướng dẫn giải**

Bất phương trình  $2x + y - 4 \leq 0$  là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có dạng  $ax + by + c \leq 0$  với  $a = 2$ ,  $b = 1$  và  $c = -4$ .

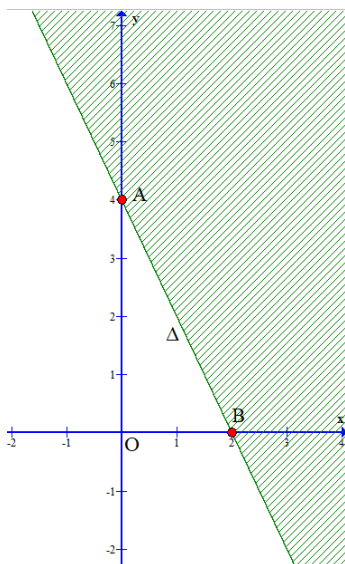
- Biểu diễn miền nghiệm trên trục tọa độ Oxy:

+ Vẽ đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 4 = 0$  trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Lấy điểm  $O(0;0)$  không thuộc  $\Delta$  thay vào bất phương trình ta có:  $2 \cdot 0 + 0 - 4 = -4 \leq 0$  là một mệnh đề đúng.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên trục tọa độ Oxy là nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  (kể cả bờ  $\Delta$ ) chứa gốc tọa độ O.

Miền nghiệm biểu diễn trên trục tọa độ Oxy:



**Bài 3.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn:  $3x + y < 20$ . Cặp số  $(x; y)$  nào trong các cặp số  $(2; 5)$ ,  $(4; 8)$ ,  $(5; 6)$ ,  $(4; 7)$ ,  $(11; 12)$  là nghiệm của bất phương trình trên?

### Hướng dẫn giải

Thay  $(x; y) = (2; 5)$  vào bất phương trình ta có:  $3 \cdot 2 + 5 = 11 < 20$  là mệnh đề đúng. Do đó cặp số  $(2;5)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay  $(x; y) = (4; 8)$  vào bất phương trình ta có:  $3 \cdot 4 + 8 = 20 < 20$  là mệnh đề sai. Do đó cặp số  $(4;8)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay  $(x; y) = (5; 6)$  vào bất phương trình ta có:  $3 \cdot 5 + 6 = 21 < 20$  là mệnh đề sai. Do đó cặp số  $(5;6)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay  $(x; y) = (4; 7)$  vào bất phương trình ta có:  $3 \cdot 4 + 7 = 19 < 20$  là mệnh đề đúng. Do đó cặp số  $(4;7)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay  $(x; y) = (11; 12)$  vào bất phương trình ta có:  $3 \cdot 11 + 12 = 45 < 20$  mệnh đề sai. Do đó cặp số  $(11; 12)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy ta có cặp nghiệm  $(x; y)$  là:  $(2; 5); (4; 7)$ .

**Bài 4.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn:  $x + 4y \leq 20$ .

- a) Chỉ ra hai nghiệm của bất phương trình trên.
- b) Với  $x = 0$  thì có bao nhiêu giá trị của  $y$  thỏa mãn bất phương trình.
- c) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên trên hệ trục tọa độ Oxy.

### Hướng dẫn giải

a) Chọn  $(x; y) = (0; 0)$

Thay  $x = 0$  và  $y = 0$  vào bất phương trình đã cho ta được  $0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 20$  là mệnh đề đúng. Do đó cặp  $(0; 0)$  là nghiệm của bất phương trình.

Chọn  $(x; y) = (0; 1)$

Thay  $x = 0$  và  $y = 1$  vào bất phương trình đã cho ta được  $0 + 4 \cdot 1 = 4 \leq 20$  là mệnh đề đúng. Do đó cặp  $(0; 1)$  là nghiệm của bất phương trình.

Vậy hai cặp số  $(0; 0)$  và  $(0; 1)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Với  $x = 0$  thì bất phương trình trở thành:  $4y \leq 20 \Leftrightarrow y \leq 5$  và có vô số giá trị của  $y$  thỏa mãn bất phương trình.

c) - Biểu diễn miền nghiệm trên trục tọa độ Oxy:

+ Vẽ đường thẳng  $\Delta: x + 4y - 20 = 0$  trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Lấy điểm  $O(0; 0)$  không thuộc  $\Delta$  thay vào bất phương trình ta có:  $0 + 4 \cdot 0 - 20 = -20 \leq 0$  là một mệnh đề đúng.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên trục tọa độ Oxy là nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  (kể cả bờ  $\Delta$ ) chứa gốc tọa độ  $O$ .

Miền nghiệm biểu diễn trên trục tọa độ Oxy:

