Bài 9. Tích của một vectơ với một số

Mở đầu trang 55 SGK Toán 10 tập 1: Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một cánh tay đòn AB, luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì cánh tay đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, cánh tay đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh A_1, A_2, A_3, …, A_n, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi cánh tay đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm A_1, A_2, A_3, …, A_n ứng với các khối lượng m_1, m_2, m_3, …, m_n (kg).

Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí khối tâm của một hệ chất điểm.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Hình 4.20

Hoạt động 1 trang 55 SGK Toán 10 tập 1: Cho vecto $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Hãy xác định điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

a) Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a} + \vec{a}$.

b) Vecto $\vec{a} + \vec{a}$ có mối quan hệ như thế nào về hướng và độ dài với vecto $\vec{a}$.

Lời giải

+) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ nên $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và cùng độ lớn với $\vec{a}$;

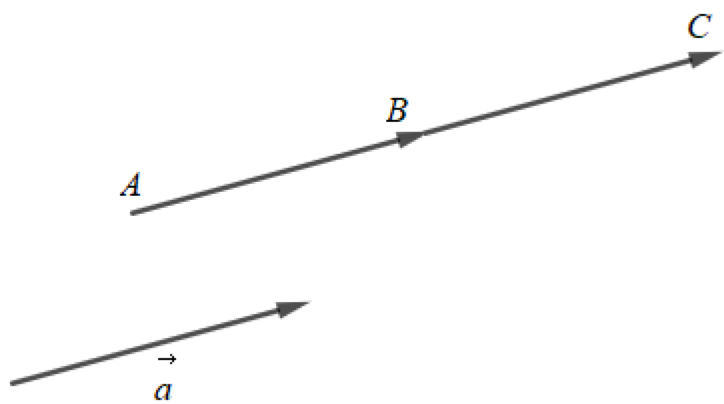
+) $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ nên $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và cùng độ lớn với $\vec{a}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và cùng độ lớn với $\vec{a}$

Suy ra ba điểm A, B, C thẳng hàng và AB = BC

Hay B là trung điểm của AC.

Vậy điểm C là điểm sao cho B là trung điểm của AC.



a) Ta có: $\vec{a} + \vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm)

Suy ra $\left|\vec{a} + \vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$

Mà AC = AB + BC = 2AB nên $\left|\vec{a} + \vec{a}\right| = 2AB$.

Lại có $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$

Vậy $\vec{a} + \vec{a}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\left|\vec{a} + \vec{a}\right| = 2AB = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

b) Vì $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ nên $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng vecto $\vec{a}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$ hay $AB = \left|\vec{a}\right|$

Mà $\vec{a} + \vec{a}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\left|\vec{a} + \vec{a}\right| = 2AB$.

Do đó $\vec{a}+\vec{a}$ cùng hướng với vecto $\vec{a}$ và $\left|\vec{a}+\vec{a}\right|=2\left|\vec{a}\right|$.

Câu hỏi trang 55 SGK Toán 10 tập 1: $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau hay không?

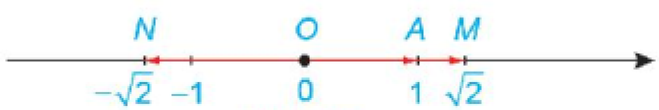
Lời giải

Tích của vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ với số thực k = 1 > 0 là một vectơ kí hiệu là $1\vec{a}$, vectơ này cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $1.\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|$.

Do đó $1\vec{a}=\vec{a}$.

Vậy $1\vec{a}=\vec{a}$.

Hoạt động 2 trang 56 SGK Toán 10 tập 1: Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu diễn các số $0;1;\sqrt{2};-\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vecto $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$ với vecto $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Hình 4.22

Lời giải

Trên trục số Hình 4.22 ta thấy:

- Về hướng:

Điểm M và điểm A nằm cùng phía đối với điểm O trên trục số nên $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$;

Điểm N và điểm A nằm khác phía đối với điểm O trên trục số nên $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OA}$.

- Về độ dài:

+ Điểm A biểu diễn cho số 1 nên OA = 1 do đó $\left|\overrightarrow{OA}\right| = OA = 1$

+ Điểm M biểu diễn cho số $\sqrt{2}$ nên $OM = \sqrt{2}$ do đó $\left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = \sqrt{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{2}\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$

+ Điểm N biểu diễn cho số $-\sqrt{2}$ nên ON = $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ do đó $\left|\overrightarrow{ON}\right| = ON = \sqrt{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{ON}\right| = \sqrt{2}\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$

Vậy $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$

$\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $\left|\overrightarrow{ON}\right| = \sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$

Đẳng thức biểu thị mối quan hệ giữa hai vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ là $\overrightarrow{OM} = \sqrt{2}\overrightarrow{OA}$.

Câu hỏi trang 56 SGK Toán 10 tập 1: $-\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}$ có mối quan hệ gì?

Lời giải

+ Vectơ $-\vec{a}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ nên $-\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài $\left|\vec{a}\right|$.

+ Vectơ $(-1)\vec{a}$ là tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k = –1 < 0 nên $(-1)\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài $-(-1)\left|\vec{a}\right| = 1.\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

Do đó vectơ $(-1)\vec{a}$ cùng hướng với $-\vec{a}$ và cùng có độ dài bằng độ dài của $\vec{a}$.

Vậy $(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$

Luyện tập 1 trang 56 SGK Toán 10 tập 1: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

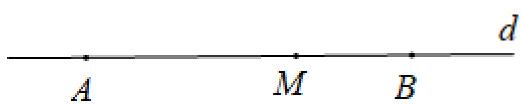
b) Với điểm M bất kì, ta luôn có: $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}.\overrightarrow{AB}.$

c) Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \le 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$

Hình 4.25

Lời giải

a)



+ Nếu điểm M thuộc đường thẳng d thì ba điểm A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}$

Do đó ta có tồn tại một số thực t thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$

+ Nếu tồn tại số t thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}$

Hay đường thẳng AM song song hoặc trùng với đường thẳng AB.

Mà cả hai đường thẳng này đều đi qua A nên đường thẳng AM trùng với đường thẳng AB.

Do đó A, M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng d.

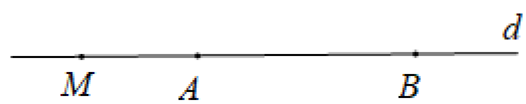
Vậy khẳng định a) đúng.

b) Nếu M không thuộc đường thẳng d thì $\overrightarrow{AM}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Do đó ta không thể viết dưới dạng $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.

Vậy khẳng định b) sai.

c)



Nếu điểm M thuộc tia đối của tia AB thì hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng phương, ngược hướng

Khi đó tồn tại số thực $t \le 0$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

Ngược lại, nếu tồn tại số $t \le 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ thì hoặc hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng (với t < 0) hoặc M ≡ A (với t = 0).

Do đó khẳng định c) đúng.

Hoạt động 3 trang 57 SGK Toán 10 tập 1: Với $\vec{u} \ne \vec{0}$ và hai số thực k, t, những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ và $\left(kt\right)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt||\vec{u}|$.

b) Nếu $kt \ge 0$ thì cả hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right), \left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

c) Nếu $kt < 0$ thì cả hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right), \left(kt\right)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

d) Hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ và $\left(kt\right)\vec{u}$ bằng nhau.

Lời giải

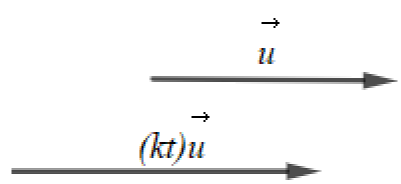
a) Ta có: $\left|k\left(t\vec{u}\right)\right| = |k|\left|t\vec{u}\right| = |k||t|\left|\vec{u}\right| = |kt|\left|\vec{u}\right|$ và $\left|\left(kt\right)\vec{u}\right| = |kt|\left|\vec{u}\right|$

Suy ra $\left|k\left(t\vec{u}\right)\right| = \left|\left(kt\right)\vec{u}\right| = |kt|\left|\vec{u}\right|$

Do đó hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ và $\left(kt\right)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt|\left|\vec{u}\right|$.

Vậy khẳng định a) đúng.

b) - Với $kt \ge 0$ thì vectơ $\left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$

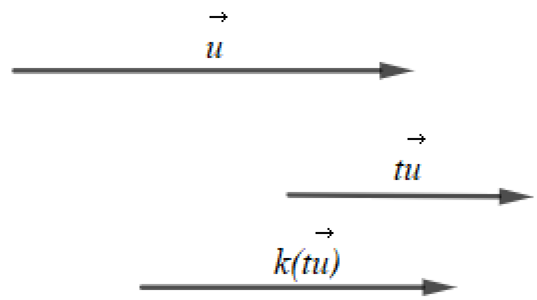


- Với $kt \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k \le 0 \\ t \le 0 \end{cases}$

+) Trường hợp 1: $k \ge 0$ và $t \ge 0$

Với $t \ge 0$ thì vectơ $t\vec{u}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$;

Với $k \ge 0$ thì vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ cùng hướng với vectơ $t\vec{u}$;

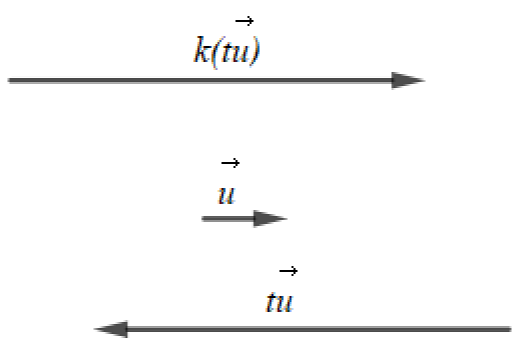


Do đó với $k \geq 0$ và $t \geq 0$ thì $k\left(t\vec{u}\right)$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$ (do cùng hướng với $t\vec{u}$).

+) Trường hợp 2: $k \leq 0$ và $t \leq 0$

Với $t \leq 0$ thì vectơ $t\vec{u}$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$;

Với $k \leq 0$ thì vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ ngược hướng với vectơ $t\vec{u}$;



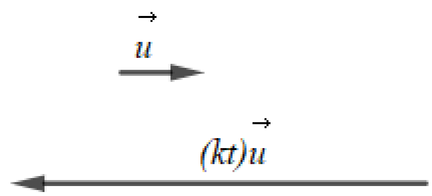
Do đó với $k \leq 0$ và $t \leq 0$ thì $k\left(t\vec{u}\right)$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$ (do cùng ngược hướng với $t\vec{u}$).

Kết hợp hai trường hợp ta có: với $kt \geq 0$ thì $k\left(t\vec{u}\right)$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$.

Suy ra: nếu $kt \geq 0$ thì cả hai vecto $k\left(t\vec{u}\right), \left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

Vậy khẳng định b) là đúng.

c) – Với kt < 0 thì vectơ $(kt)\vec{u}$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$

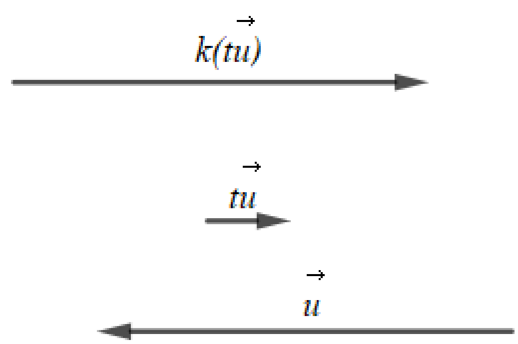


- Với $kt < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ t < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k < 0 \\ t > 0 \end{cases}$

+) Trường hợp 1: k > 0 và t < 0

Với t < 0 thì vectơ $t\vec{u}$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$;

Với k > 0 thì vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ cùng hướng với vectơ $t\vec{u}$;

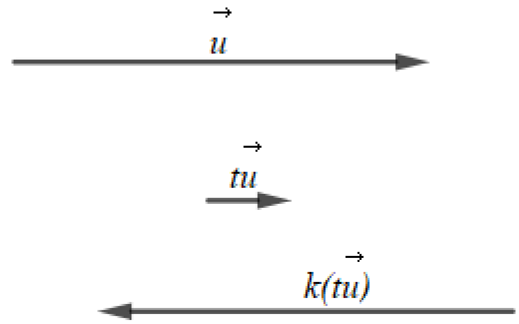


Do đó với k > 0 và t < 0 thì $k\left(t\vec{u}\right)$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$

+) Trường hợp 2: k < 0 và t > 0

Với t > 0 thì vectơ $t\vec{u}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u}$;

Với k < 0 thì vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ ngược hướng với vectơ $t\vec{u}$;



Do đó với k < 0 và t > 0 thì $k\left(t\vec{u}\right)$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$.

Kết hợp hai trường hợp ta có: với kt < 0 thì $k\left(t\vec{u}\right)$ ngược hướng với vectơ $\vec{u}$.

Suy ra nếu kt < 0 thì cả hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

Vậy khẳng định c) là đúng.

d) Theo câu a thì hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ và $\left(kt\right)\vec{u}$ có cùng độ dài.

+ Nếu kt ≥ 0 thì cả hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

Suy ra hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng.

+ Nếu kt < 0 thì cả hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

Suy ra hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng.

Do đó hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right),\left(kt\right)\vec{u}$ cùng hướng với mọi k, t.

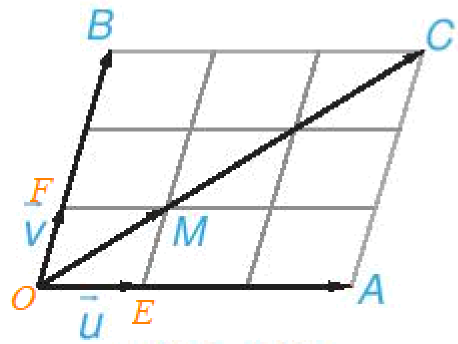
$\Rightarrow k\left(t\vec{u}\right)=\left(kt\right)\vec{u}$

Hay hai vectơ $k\left(t\vec{u}\right)$ và $\left(kt\right)\vec{u}$ bằng nhau.

Vậy khẳng định d) đúng.

Hoạt động 4 trang 57 SGK Toán 10 tập 1: Hãy chỉ ra trên Hình 4.26 hai vectơ $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$. Từ đó, nêu mối quan hệ giữa $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.

Lời giải



Giả sử $\overrightarrow{OE}=\vec{u}, \overrightarrow{OF}=\vec{v}$ được biểu diễn như hình vẽ trên.

+ Xét hình bình hành OEMF, ta có:

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OM}$ (quy tắc hình bình hành)

$\Rightarrow 3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=3\overrightarrow{OM}$

Trên hình vẽ ta thấy OC = 3OM và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OM}$.

Do đó $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}$. (1)

+ Trên hình vẽ ta thấy $OA=3\left|\vec{u}\right|$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{u}$

$OB=3\left|\vec{v}\right|$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng với $\vec{v}$

Do đó $\overrightarrow{OA}=3\vec{u}, \overrightarrow{OB}=3\vec{v}$

Xét hình bình hành OACB, ta có:

$3\vec{u} + 3\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (quy tắc hình bình hành)   (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 3\vec{u} + 3\vec{v}\left(= \overrightarrow{OC}\right)$

Vậy $3\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 3\vec{u} + 3\vec{v}.$

Luyện tập 2 trang 57 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm O tùy ý, ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Lời giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Tính chất trọng tâm của tam giác)

Với điểm O bất kì ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}\right)$

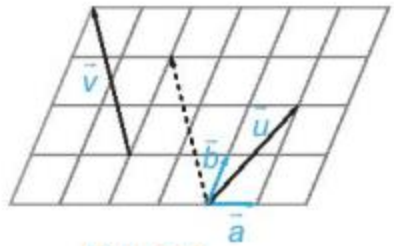
$= \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$

$= 3\overrightarrow{OG} + \vec{0}$

$= 3\overrightarrow{OG}.$

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$

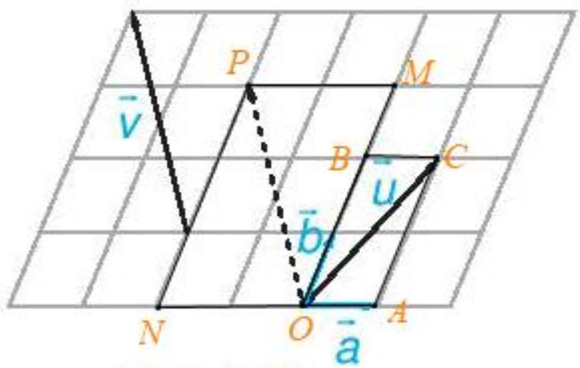
Luyện tập 3 trang 57 SGK Toán 10 tập 1: Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}, \vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}.$



Hình 4.27

Lời giải

Giả sử các điểm O, A, B, C, M, N, P là các điểm như trong hình vẽ dưới đây.



Khi đó ta có:

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = 2\vec{b}; \overrightarrow{OC} = \vec{u}; \overrightarrow{OM} = 3\vec{b}; \overrightarrow{ON} = -2\vec{a}; \overrightarrow{OP} = \vec{v}$

Xét hình bình hành OACB, có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (quy tắc hình bình hành)

Suy ra $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

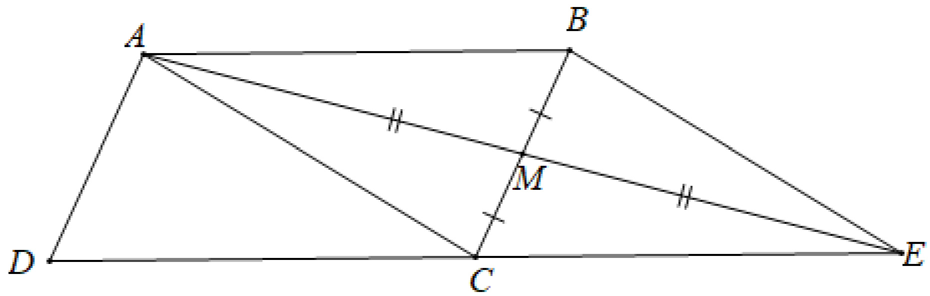
Xét hình bình hành OMPN, có: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ (quy tắc hình bình hành)

Suy ra $\vec{v} = 3\vec{b} + \left(-2\vec{a}\right) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Vậy $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Bài 4.11 trang 58 SGK Toán 10 tập 1: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng với A qua M.

Khi đó M là trung điểm của BC và AE.

Suy ra tứ giác ABEC là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ (quy tắc hình bình hành)

Mà $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của AE)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

Xét hình bình hành ABCD có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)

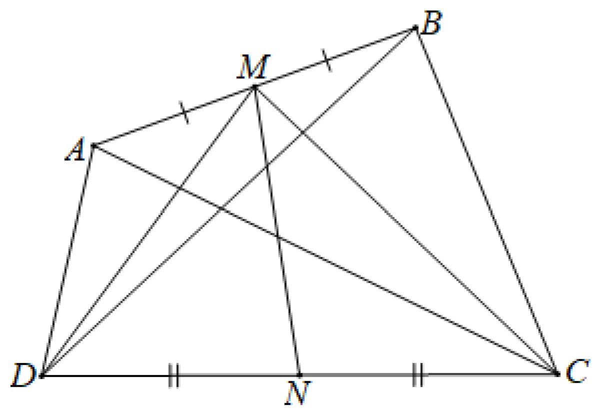
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{2\overrightarrow{AB}}{2}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

Bài 4.12 trang 58 SGK Toán 10 tập 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\right)=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$

Lại có M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

N là trung điểm của DC, với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}-\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$

Bài 4.13 trang 58 SGK Toán 10 tập 1: Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}.$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$

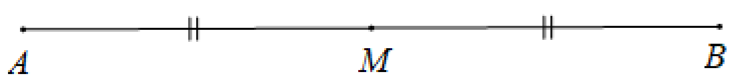
Lời giải

a) ***Cách 1:***

Giả sử có điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$. Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{KA}$ và $\overrightarrow{KB}$ cùng phương, ngược hướng và KA = 2KB. Suy ra điểm K thuộc đoạn AB và KA = 2KB.

Cách 2:

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



Khi đó ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MA}\right)+2\left(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{KM}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$)

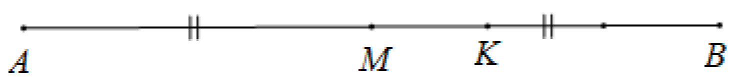
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$

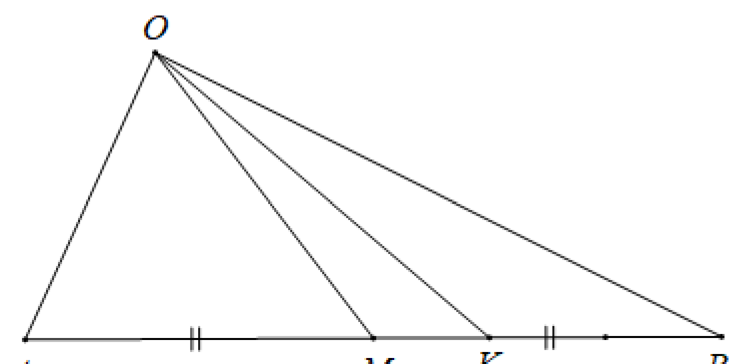
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

Suy ra vecto $\overrightarrow{MK}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MB}$ và thỏa mãn $MK = \frac{1}{3}MB.$



Vậy điểm K là điểm nằm giữa M và B sao cho thỏa mãn $MK = \frac{1}{3}MB.$

b)



Cách 1:

Ta có:

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}\right) + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$$

$= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}\right) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}\right)$

Mà $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ (theo câu a) do đó $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}.\vec{0} = \overrightarrow{OK}$

Vậy với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK}$

Theo câu a ta có $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)$

Do đó $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

Vậy với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$

Bài 4.14 trang 58 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}.$

Lời giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

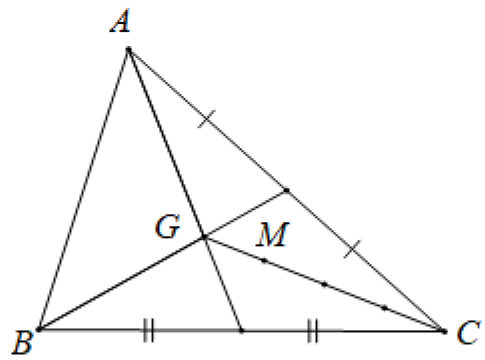
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GC}$

Do đó vecto $\overrightarrow{GM}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{GC}$ và $GM=\dfrac{1}{4}GC.$



Vậy điểm M nằm giữa G và C sao cho $GM = \frac{1}{4}GC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}\right)$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC}$

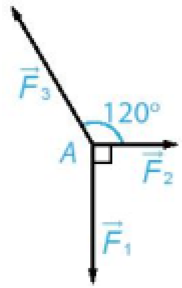
$= \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)$

$= 4\overrightarrow{OM} + \vec{0}$ (vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$)

$= 4\overrightarrow{OM}$

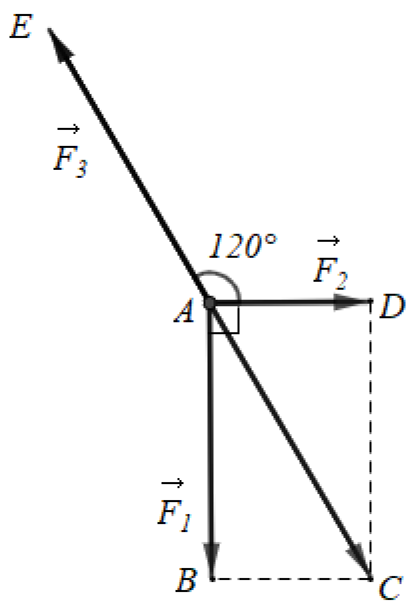
Vậy với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

Bài 4.15 trang 59 SGK Toán 10 tập 1: Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Lời giải



Giả sử các điểm B, C, D, E thoả mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{F}_1; \overrightarrow{AD} = \vec{F}_2; \overrightarrow{AE} = \vec{F}_3$ và ABCD là hình bình hành.

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ hay $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC}$

Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{F_3}$

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{F_3}$ là hai vectơ đối nhau

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$ và $CAD = 60^0$.

ABCD là hình bình hành nên $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = DC = 20\left(N\right)$

Tam giác ACD vuông tại D có:

+) $AD = DC.\cot CAD = 20.\cot 60^\circ = \dfrac{20}{\tan 60^\circ} = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

Do đó $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\left(N\right)$

+) $AC = \dfrac{DC}{\sin CAD} = \dfrac{20}{\sin 60^\circ} = \dfrac{20}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$

Do đó $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}\left(N\right)$

Vậy độ lớn vectơ $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt là $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}N, \dfrac{40\sqrt{3}}{3}N$.