Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. Lý thuyết

a) Hoán vị

- Cho tập A gồm n phần tử ($n \ge 1$). Khi xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A, (gọi tắt là một hoán vị của A).

- Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử là P_n = n! = n(n – 1)(n – 2)…3.2.1.

- Đặc điểm: Đây là sắp xếp có thứ tự và số phần tử sắp xếp đúng bằng số phần tử trong nhóm (bằng n).

- Chú ý: Giai thừa: n! = n(n – 1)(n – 2)…3.2.1

Quy ước: 0! = 1; 1! = 1.

b) Chỉnh hợp

- Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k, ($1 \le k \le n$). Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp n chập k của A).

- Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

- Một số quy ước: $0! = 1,\ A_n^0 = 1,\ A_n^n = n!$

- Đặc điểm: Đây là sắp xếp có thứ tự và số phần tử được sắp xếp là k: $0 \le k \le n$.

c) Tổ hợp

Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k, ($1 \le k \le n$). Mỗi tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A.

- Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là : $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

- Tính chất :

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}, (0 \le k \le n)$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, (1 \le k \le n)$$

- Đặc điểm: Tổ hợp là chọn phần tử không quan trọng thứ tự, số phần tử được chọn là k: $0 \le k \le n$

2. Các dạng bài tập

Dạng 1: Bài toán đếm số tự nhiên

Ví dụ 1. Từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Có bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn

a) Số có 7 chữ số khác nhau

b) Số có 5 chữ số khác nhau

c) Số có 7 chữ số khác nhau và có chữ số 1 là hàng chục nghìn

d) Số có 7 chữ số khác nhau và chữ số 2 không ở hàng đơn vị

Lời giải

a) Số các số có 7 chữ số khác nhau được lập từ 7 chữ số trên là 7! = 5040

b) Số các số có 5 chữ số khác nhau được lập từ 7 chữ số trên là $A_7^5 = 2520$

c) Số có 7 chữ số khác nhau và có chữ số 1 là hàng chục nghìn

Chữ số hàng chục nghìn có 1 cách chọn (là chữ số 1)

Các hàng khác, số cách chọn là một hoán vị của 6 chữ số còn lại: 6!

Vậy có 1.6! = 720 số có 7 chữ số khác nhau và có chữ số 1 là hàng chục nghìn.

d) Số có 7 chữ số khác nhau và chữ số 2 không ở hàng đơn vị

Số các số có 7 chữ số khác nhau là 7!

Ta lập số có 7 chữ số khác nhau có chữ số 2 ở hàng đơn vị

Chữ số hàng đơn vị có 1 cách chọn (là chữ số 2)

Các hàng khác, số cách chọn là một hoán vị của 6 chữ số còn lại: 6!

Số các số có 7 chữ số và chữ số 2 ở hàng đơn vị là: 1.6!

Vậy có 7! – 6! = 4320 số có 7 chữ số khác nhau và chữ số 2 không ở hàng đơn vị.

Ví dụ 2. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn

a) Số có 10 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần

b) Số chẵn có 5 chữ số khác nhau

c) Số có 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số 1 là hàng đơn vị

d) Số có 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

Lời giải

a) Giả sử số có 10 chữ số cần lập ở 10 vị trí như hình dưới

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

+ Số các số có 10 chữ số, chữ số 3 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần (Kể cả chữ số 0 đứng đầu)

Chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, ta chọn 3 vị trí để đặt số 3: có C_{10}^3 cách chọn

Các chữ số khác có mặt đúng 1 lần là hoán vị của 7: có 7! cách chọn

Do đó có $C_{10}^3.7!$ số (kể cả số 0 đứng đầu).

+ Số các số có 10 chữ số, chữ số 3 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng 1 lần và chữ số 0 đứng đầu

Vị trí đầu tiên có 1 cách chọn (là chữ số 0)

Chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, ta chọn 3 vị trí trong 9 vị trí còn lại để đặt số 3: có C_9^3 cách chọn

Các chữ số khác có mặt đúng 1 lần là hoán vị của 6: có 6! cách chọn.

Do đó có $C_9^3.6!$

Vậy có $C_{10}^3.7! - C_9^3.6! = 544320$ số có 10 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần.

b) Gọi số $\overline{abcde}$ là số chẵn có 5 chữ số trong các số trên

Vì $\overline{abcde}$ là số chẵn nên $e \in \{0; 2; 4; 6\}$

+ Trường hợp 1: e = 0

Số cách chọn a, b, c, d trong 7 số còn lại là A_7^4

Do đó có A_7^4.

+ Trường hợp 2: $e \in \{2; 4; 6\}$

Chọn e: có 3 cách chọn

Chọn a từ các số {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}\{e}: có 6 cách chọn

Chọn b, c, d từ các số {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}\{a, e}: có A_6^3

Do đó có $3.6.A_6^3$ số

Vậy có $A_7^4 + 3.6.A_6^3 = 3000$ số chẵn có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số trên.

c) Giả sử số có 6 chữ số cần lập ở 6 vị trí như hình dưới

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Lập số có 6 chữ số khác nhau, chữ số 1 ở hàng đơn vị

Vị trí (6) có 1 cách chọn (là chữ số 1)

Vị trí (1) có 6 cách chọn (là các chữ số 2; 3; 4; 5; 6; 7)

Bốn vị trí còn lại là chỉnh hợp chập 4 của 6 số còn lại: có A_6^4 số

Vậy có $1.6.A_6^4 = 2160$ số có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 là hàng đơn vị.

d) Để lập số có số 2 và 3 đứng cạnh nhau ta ghép số 2 và 3 với nhau, đặt vào 1 vị trí.

Giả sử số có 6 chữ số cần lập ở 5 vị trí như hình dưới

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Vị trí (1) có 6 cách chọn (là 1; 2 và 3; 4; 5; 6; 7)

Các vị trí còn lại có là chỉnh hợp chập 4 của 6 số còn lại: có A_6^4

Ở vị chí chứa số 2 và 3: có 2! cách sắp xếp chữ số 2 và 3.

Vậy có $6.A_6^4.2! = 4230$ số có 6 chữ số khác nhau, trong đó chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

Dạng 2: Bài toán xếp chỗ

Phương pháp giải:

* Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân

* Chú ý:

- Bài toán đếm yêu cầu sắp xếp phần tử A và B phải đứng cạnh nhau, ta bó (gộp) 2 phần tử làm 1, coi như chúng là 1 phần tử rồi sắp xếp.
- Bài toán đếm yêu cầu sắp xếp phần tử A và B không đứng cạnh nhau, ta đếm phần bù (Tức là đếm 2 phần tử A và B đứng cạnh nhau).

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Có 7 học sinh nữ và 3 học sinh nam. Ta muốn sắp xếp vào một bàn dài có 5 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để:

a) Sắp xếp tùy ý

b) Các bạn nam ngồi cạnh nhau và các bạn nữ ngồi cạnh nhau.

c) 3 học sinh nam ngồi kề nhau.

d) Không có 2 bạn nam nào ngồi cạnh nhau.

Lời giải

a) Sắp xếp 10 bạn tùy ý là hoán vị của 10: có 10! cách xếp.

b) Xếp các 7 bạn nữ ngồi cạnh nhau và 3 bạn nam ngồi cạnh nhau. Ta ghép tất cả 7 bạn nữ vào 1 "bó", 3 bạn nam vào 1 "bó"

Rồi mang sắp xếp 2 "bó" ta được 2! cách xếp.

Trong 7 bạn nữ: ta có 7! cách xếp

Trong 3 bạn nam: ta có 3! cách xếp

Vậy có 2! . 7! . 3! = 60480 cách xếp.

c) Xếp 3 bạn nam ngồi cạnh nhau. Ta ghép 3 bạn nam vào 1 "bó"

Rồi mang sắp xếp 7 bạn nữ và 1 "bó" ta được 8! cách xếp

Trong 3 bạn nam: ta có 3! cách xếp

Vậy có 8! . 3! = 241920 cách xếp.

d) Để xếp không có bạn nam nào ngồi cạnh nhau, ta sắp xếp 7 bạn nữ vào bàn dài trước: ta được 7! cách xếp

Khi đó tạo ra 8 khoảng trống (là 6 khoảng trống giữa 2 bạn nữ và 2 khoảng trống ngoài cùng)

Ta xếp 3 bạn nam vào 3 khoảng trống bất kì (mỗi bạn ở 1 khoảng trống): ta được A_8^3.

Vậy có $7!.A_8^3 = 1693440$ cách xếp.

Ví dụ 2. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

a) A và F ngồi ở hai đầu ghế

b) A và F ngồi cạnh nhau

c) A và F không ngồi cạnh nhau.

Lời giải

a) Xếp A và F ở hai đầu ghế: có 2! cách xếp A và F

Các vị trí ở giữa: có 4! cách xếp

Vậy có 2! . 4! = 48 cách xếp sao cho A và F ở hai đầu ghế.

b) Xếp A và F ngồi cạnh nhau ta ghép A và F thành 1 "bó": có 2 ! cách sắp xếp vị trí bên trong "bó"

Rồi mang sắp xếp 4 người còn lại và 1 "bó" trên ghế dài: ta được 5! cách xếp

Vậy có 2! . 5! = 240 cách xếp sao cho A và F ngồi cạnh nhau.

c) Số cách xếp 6 người bất kì là 6! cách

Số cách xếp sao cho A và F ngồi cạnh nhau là 240 cách (câu c)

Vậy có 6! – 240 = 480 cách xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau.

Dạng 3: Bài toán chọn

Phương pháp giải:

Sử dụng quy tắc cộng, nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Một hộp chứ 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh, 9 viên bi đỏ. Lấy 4 viên bi từ hộp, có bao nhiêu cách lấy được:

a) 4 viên cùng màu.

b) 2 viên bi trắng và 2 viên bi xanh.

c) Có ít nhất 1 viên màu đỏ.

d) Có đủ ba màu.

Lời giải

a) Trường hợp 1: Lấy được 4 viên bi cùng màu trắng: C_6^4 cách

Trường hợp 2: Lấy được 4 viên bi cùng màu xanh: C_5^4 cách

Trường hợp 3: Lấy được 4 viên bi cùng màu đỏ: C_9^4 cách

Vậy có $C_6^4 + C_5^4 + C_9^4 = 146$ cách bi chọn 4 viên bi cùng màu.

b) Chọn được 2 viên bi trắng: có C_6^2 cách

Chọn được 2 viên bi xanh: có C_5^2 cách

Vậy có $C_6^2.C_5^2 = 150$ cách chọn 2 viên bi trắng và 2 viên bi xanh.

c) Số cách chọn 4 viên bi bất kì (có tất cả 20 viên): có C_{20}^4 cách

Số cách chọn 4 viên bi không có màu đỏ (Còn lại 6 + 5 = 11 viên bi không phải màu đỏ): có C_{11}^4 cách

Vậy có $C_{20}^4 - C_{11}^4 = 4515$ cách chọn được ít nhất 1 viên màu đỏ.

d) Trường hợp 1: Chọn được 2 viên bi trắng, 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ: có $C_6^2.C_5^1.C_9^1$ cách

Trường hợp 2: Chọn được 1 viên bi trắng, 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ: có $C_6^1.C_5^2.C_9^1$ cách

Trường hợp 3: Chọn được 1 viên bi trắng, 1 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ: có $C_6^1.C_5^1.C_9^2$ cách

Vậy có $C_6^2.C_5^1.C_9^1 + C_6^1.C_5^2.C_9^1 + C_6^1.C_5^1.C_9^2 = 2295$ cách chọn 4 viên bi có đủ ba màu.

Ví dụ 2: Một lớp học có 40 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 bạn

a) Chọn bất kì

b) Chọn 5 bạn rồi phân công chức vụ, trong đó có 1 lớp trưởng, 1 bí thứ, 1 thư kí và 2 lớp phó.

Lời giải

a) Chọn bất kì 5 bạn trong 40 học sinh: có C_{40}^5 cách chọn.

b) Chọn 3 bạn, trong đó có 1 lớp trưởng, 1 bí thư, 1 thư kí: có A_{40}^3 cách

Chọn 2 bạn trong 37 bạn còn lại làm lớp phó: có C_{37}^2 cách.

Vậy có $A_{40}^3.C_{37}^2$ cách chọn.

Dạng 4: Bài toán liên quan đến hình học

Phương pháp giải:

* Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân

* Chú ý:

- Đếm vectơ: Hai điểm đầu và cuối khác nhau (Tức là vectơ AB và vectơ BA tính 2 lần đếm khác nhau).

- Đếm đoạn thẳng: Hai đầu mút có vai trò nhứ nhau (Tức là đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BA chỉ tính 1 lần đếm)

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho đa giác lồi n cạnh.

a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là 2 đỉnh của đa giác.

b) Có bao nhiêu đường chéo của đa giác.

c) Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác trên.

Lời giải

a) Có A_n^2 vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là 2 đỉnh của đa giác.

b) Số đoạn thẳng được tạo ra từ n đỉnh của đa giác là: C_n^2 đoạn thẳng

Trong đó có n đoạn thẳng là cạnh của đa giác

Vậy có $C_n^2 - n$ đường chéo trong đa giác n cạnh.

c) Có C_n^3 tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác trên.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng có 2020 đường thẳng song song với nhau và 2021 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2020 đường thẳng đó. Có bao nhiêu hình bình hành được tạo ra từ các đường thẳng song song đó.

Lời giải

Hình bình hành được tạo ra bởi hai cặp đường thẳng đối nhau song song với nhau.

Từ 2020 đường thẳng song song, chọn 2 đường thẳng: có C_{2020}^2 cách

Từ 2021 đường thẳng song song khác, chọn 2 đường thẳng: có C_{2021}^2 cách

Vậy có $C_{2020}^2.C_{2021}^2$ hình bình hành được tạo ra.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho các số 1; 5; 6; 7, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau?

A. 12 **B.** 24 **C.** 64 **D.** 256

Câu 2. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

A. 120 **B.** 16 **C.** 12 **D.** 24

Câu 3. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

A. $4!C_4^1C_5^1$ **B.** $3!C_3^2C_5^2$ **C.** $4!C_4^2C_5^2$ **D.** $3!C_4^2C_5^2$

Câu 4. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

A. 30240 cách **B.** 720 cách **C.** 362880 cách **D.** 1440 cách

Câu 5. Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25 **B.** 252 **C.** 50 **D.** 455

Câu 6. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách **B.** 20 cách **C.** 120 cách **D.** 150 cách

Câu 7. Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số **B.** 4032 số **C.** 5880 số **D.** 840 s

Câu 8. Sắp xếp 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là:

A. 460000 **B.** 460500 **C.** 460800 **D.** 490900

Câu 9. Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn từ đó ra 3 học sinh tham gia văn nghệ sao cho luôn có ít nhất một học sinh nam.

A. 245 **B.** 3480 **C.** 336 **D.** 251

Câu 10. Một nhóm học sinh gồm 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 9 học sinh trên thành 1 hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ?

A. 5760 **B.** 2880 **C.** 120 **D.** 362880

Câu 11. Một tổ có 5 học sinh nữ và 6 học sinh nam. Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh của tổ trong đó có cả học sinh nam và học sinh nữ là ?

A. 545 **B.** 462 **C.** 455 **D.** 456

Câu 12. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ?

A. 280 **B.** 400 **C.** 40 **D.** 1160

Câu 13. Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

A. 300 **B.** 310 **C.** 320 **D.** 330

Câu 14. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

A. 15 **B.** 12 **C.** 1440 **D.** 30

Câu 15. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 7 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm trên hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. 220 **B.** 175 **C.** 1320 **D.** 7350

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	C	A	B	D	C	C	D	B	C	B	B	D	B