Công thức giải phương trình bậc hai đầy đủ, chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

- Cách giải và biện luận phương trình bậc hai:

+ Với $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình bậc hai có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình bậc hai vô nghiệm.

+ Với $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a},\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình bậc hai có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình bậc hai vô nghiệm.

- Đối với các phương trình quy về phương trình bậc hai ta có thể dùng các phép biến đổi như nhân đa thức, quy đồng mẫu số, chuyển vế, lấy nhân tử chung … để đưa phương trình đã cho về dạng $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$.

II. Các công thức.

- Giải và biện luận phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$:

+ Với $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$

$\Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

$\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

+ Với $\Delta' = b'^2 - ac \quad \left(b' = \dfrac{b}{2}\right)$

$\Delta' > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{array}\right.$

$\Delta' = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$

$\Delta' < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

- Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có:

+) a + b + c = 0 $\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

+) a - b + c = 0 $\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{-c}{a} \end{array}\right.$

- Phương trình tích: $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{array}\right.$

- Phương trình chứa ẩn ở mẫu:

+ Tìm điều kiện xác định

+ Quy đồng mẫu số và bỏ mẫu số

+ Giải phương trình sau khi bỏ mẫu số

+ Kiểm tra nghiệm với điều kiện xác định xem có thỏa mãn hay không

+ Kết luận nghiệm

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $2mx^2 + 5x - 1 = 0$

b) $x^2 - 4x + 2 = 0$

Lời giải:

a)

Khi $2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, xét phương trình $2mx^2 + 5x - 1 = 0$ trở thành phương trình bậc nhất 5x – 1 = 0 có duy nhất một nghiệm $x = \frac{1}{5}$

Khi $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$, xét phương trình bậc hai: $2mx^2 + 5x - 1 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.2m.(-1) = 25 + 8m$

Với $\Delta > 0 \Leftrightarrow 25 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-25}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 8m}}{4m}$, $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 8m}}{4m}$

Với $\Delta = 0 \Leftrightarrow 25 + 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-25}{8}$ thì phương trình bậc hai có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{4m} = \frac{-5}{4.\left(\frac{-25}{8}\right)} = \frac{2}{5}$$

Với $\Delta < 0 \Leftrightarrow 25 + 8m < 0 \Leftrightarrow m < \frac{-25}{8}$ thì phương trình bậc hai vô nghiệm.

b)

Xét phương trình bậc hai: $x^2 - 4x + 2 = 0$

$b' = \frac{b}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$\Delta' = (-2)^2 - 1.2 = 2 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{2}}{1} = 2 + \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{2}}{1} = 2 - \sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 3) = 0$

Lời giải:

$(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 3) = 0 \ (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{array}\right.$

Xét phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có: 1 – 3 + 2 = 0

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{1} = 2$

Xét phương trình $2x^2 + 5x + 3 = 0$ có: 2 – 5 + 3 = 0

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm: $x_3 = -1,\ x_4 = \frac{-3}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = \frac{-3}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;-1;2;\frac{-3}{2}\right\}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\frac{2}{x-4}+\frac{4x}{x+1}=3$.

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} x-4\neq 0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq -1 \end{cases}$

Ta có: $\frac{2}{x-4}+\frac{4x}{x+1}=3$

$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x-4)(x+1)}+\frac{4x(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\frac{3(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-4)}$

$\Rightarrow 2(x+1)+4x(x-4)=3(x+1)(x-4)$

$\Leftrightarrow 2x+2+4x^2-16x=3(x^2-4x+x-4)$

$\Leftrightarrow 2x+2+4x^2-16x=3x^2-12x+3x-12$

$\Leftrightarrow 2x+2+4x^2-16x-3x^2+12x-3x+12=0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+14=0$

Xét phương trình $x^2-5x+14=0$

$\Delta=(-5)^2-4.1.14=-31<0$

$\Rightarrow$ Phương trình $x^2-5x+14=0$ vô nghiệm

Vậy phương trình $\frac{2}{x-4}+\frac{4x}{x+1}=3$ vô nghiệm.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải phương trình $3x^2 + 8x - 4 = 0$.

Bài 2: Giải phương trình $\frac{3x}{2x-1}+\frac{x}{3}=4$.