

Công thức hoán vị

1. Tổng hợp lý thuyết

- Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Khi xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A, (gọi tắt là một hoán vị của A).
- Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử là $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$.
- Đặc điểm: Đây là sắp xếp có thứ tự và số phần tử sắp xếp đúng bằng số phần tử trong nhóm (bằng n).
- Chú ý: Giai thừa: $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$

Quy ước: $0! = 1$; $1! = 1$.

2. Công thức tính

Công thức hoán vị: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Xếp 10 bạn, trong đó có 5 bạn nam và 5 bạn nữ, vào một ghế dài. Có bao nhiêu cách xếp sao cho:

- Xếp bất kì
- Các bạn nam ngồi cạnh nhau
- Các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ với nhau.

Lời giải

a) Số cách xếp 10 bạn vào một ghế dài là một hoán vị của 10: $10!$

b) Xếp các bạn nam ngồi cạnh nhau. Ta ghép 5 bạn nam vào 1 “bó”: có $5!$ cách xếp bên trong “bó”

Rồi xếp 5 bạn nữ cùng 1 “bó” vào ghế dài có: $6!$ cách xếp.

Vậy có $5! \cdot 6! = 86400$ cách xếp sao cho các bạn nam ngồi cạnh nhau.

c) Giả sử xếp 10 bạn vào ghế dài có đánh số thứ tự từ 1 đến 10.

Để xếp xen kẽ các bạn nam và nữ

+ Trường hợp 1: Các bạn nam ngồi vị trí lẻ, các bạn nữ ngồi vị trí chẵn

Số cách xếp các bạn nam: $5!$

Số cách xếp các bạn nữ: $5!$

Do đó có $5! \cdot 5!$ cách xếp.

+ Trường hợp 2: Các bạn nam ngồi vị trí chẵn, các bạn nữ ngồi vị trí lẻ

Tương tự như trường hợp trên ta có $5! \cdot 5!$ cách xếp.

Vậy có $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800$ cách xếp.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Lập được bao nhiêu số tự nhiên sao cho:

- Số có 6 chữ số khác nhau
- Số chẵn có 6 chữ số khác nhau

c) Số có 6 chữ số khác nhau có số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

Lời giải

a) Lập số có 6 chữ số từ các chữ số: 0; 1; 2; 3; 4; 5

Cách 1: Vị trí đầu tiên (chữ số đầu tiên khác 0): có 5 cách chọn

Các vị trí còn lại là hoán vị của 5 phần tử còn lại: $5!$

Vậy có $5 \cdot 5! = 600$ số.

Cách 2: Lập số có 6 chữ số khác nhau (kể cả chữ số 0 đứng đầu) là hoán vị của 6: $6!$

Lập số có 6 chữ số khác nhau nhưng có chữ số 0 đứng đầu là: $5!$

Vậy số có 6 chữ số khác nhau là: $6! - 5! = 600$ số.

b) Gọi số \overline{abcdef} là số chẵn có 6 chữ số trong các số trên

Vì \overline{abcdef} là số chẵn nên $f \in \{0; 2; 4\}$

+ Trường hợp 1: $f = 0$

Các số a, b, c, d, e là hoán vị của 5 chữ số còn lại: $5! = 120$

+ Trường hợp 2: $f \in \{2; 4\}$

Chọn f: có 2 cách chọn

Chọn a từ các số $\{1; 2; 3; 4; 5\} \setminus \{f\}$: có 4 cách chọn

Chọn b, c, d, e là hoán vị của các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \setminus \{a; f\}$: có $4!$

Do đó có $2 \cdot 4 \cdot 4! = 192$ số.

Vậy có $120 + 192 = 312$ số chẵn có 6 chữ số khác nhau.

c) Để lập được số có 6 chữ số khác nhau có số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

Ta ghép 1 và 2 với nhau coi như 1 vị trí.

Giả sử số có 6 chữ số cần lập ở 5 vị trí như hình dưới

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-----	-----	-----	-----	-----

Vị trí đầu tiên có 4 cách chọn (chữ số 1 ghép với 2; 3; 4; 5)

Các vị trí còn lại là hoán vị của 4 chữ số: $4!$

Ở vị trí chứa chữ số 1 và 2 có $2!$ cách xếp chúng.

Vậy có $4 \cdot 4! \cdot 2! = 192$ số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau.