Ôn tập chương 2

A. Lý thuyết

1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1.1 Mặt phẳng

- Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.

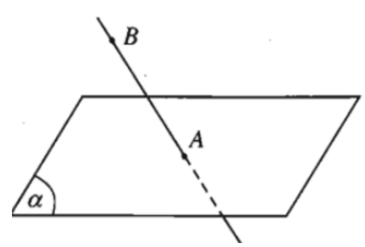
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Ví dụ: mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β)…

1.2 Điểm thuộc mặt phẳng.

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

- Khi điểm A *thuộc mặt phẳng* (α) ta nói A *nằm trên* (α) hay (α) *chứa* A, hay (α) *đi qua* A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.

- Khi điểm A *không thuộc mặt phẳng* (α) ta nói điểm A *nằm ngoài* (α) hay (α) *không chứa* A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$.

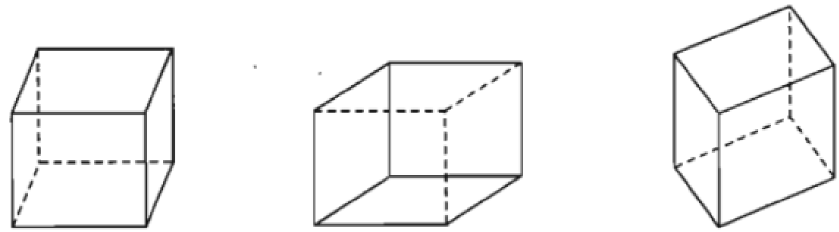


Hình trên cho ta hình biểu diễn của điểm A thuộc mặt phẳng (α), còn điểm B không thuộc (α).

1.3 Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để nghiên cứu hình học không gian người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

- Dưới đây là một vài hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật.



Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

- Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

2. Các tính chất thừa nhận về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

- Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

- Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là mặt phẳng (ABC) hoặc mp(ABC) hoặc (ABC).

- **Tính chất 3**. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

- Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

- **Tính chất 5**. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

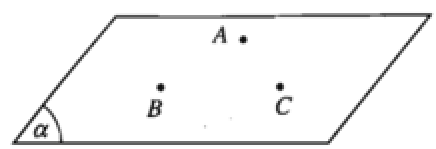
Từ đó suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là giao tuyến của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

- **Tính chất 6.** Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

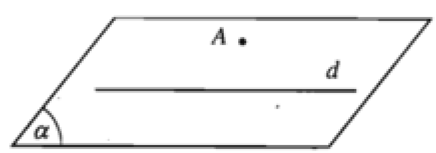
3. Cách xác định mặt phẳng

3.1. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



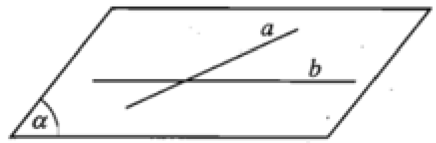
3.2. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp(A, d) hay (A, d) hoặc mp(d, A) hay (d, A).



3.3. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp(a, b) hay (a, b) hoặc mp(b, a) hay (b, a).



4. Hình chóp và hình tứ diện

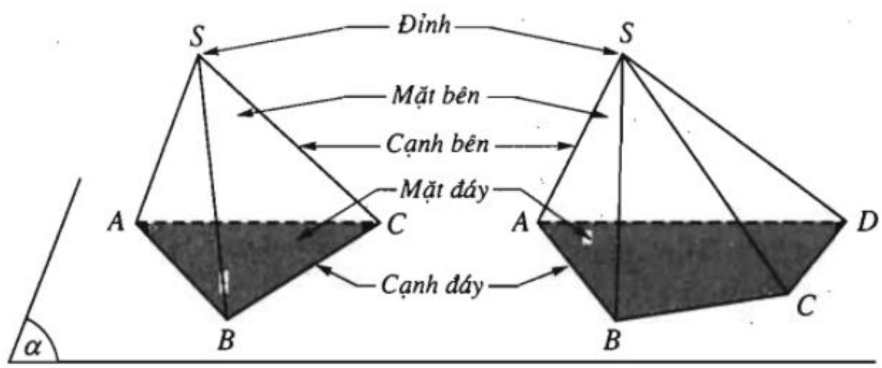
4.1 Hình chóp

Trong mp(α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh A_1, A_2,..,A_n ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1.

Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2\ldots A_n$.

Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 gọi là các *mặt bên*, các đoạn SA_1, SA_2, …, SA_n là các *cạnh bên*; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,.. lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác…



4.2 Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD.

Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh* của tứ diện.

Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh* của tứ diện.

Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện.

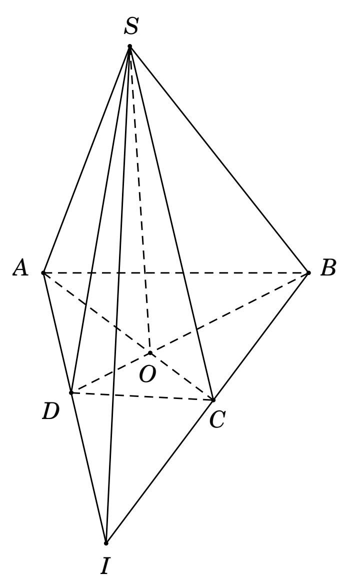
Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

Hình tứ diện có 4 mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.

- Chú ý. Khi nói đến tam giác ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của tam giác đó. Tương tự có thể hiểu như vậy đối với đa giác.

4.3 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB // CD).
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
a) (SAC) và (SBD).
b) (SAD) và (SBC).
Lời giải:



a) Trong mp(ABCD), gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Lại có: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$

Suy ra, O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

b) Trong mp(ABCD), gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

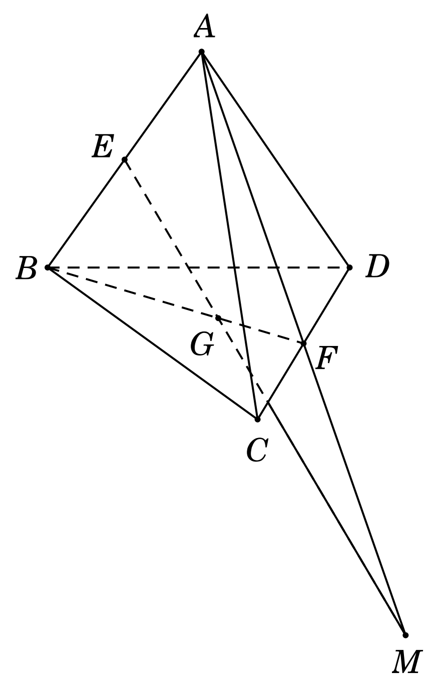
Lại có: $\begin{cases} I \in AD \subset (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \\ I \in BC \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC) \end{cases}$

Suy ra, I là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD)?

Lời giải:



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của CD nên $G \in mp(ABF)$

Ta có E là trung điểm của AB nên $E \in (ABF)$.

Chọn mp phụ chứa EG là (ABF)

+ Tìm giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) ta có:

A là điểm chung thứ nhất.

$\begin{cases} F \in (ABF) \\ F \in CD \subset (ACD) \Rightarrow F \in (ACD) \end{cases}$

Suy ra F là điểm chung thứ hai .

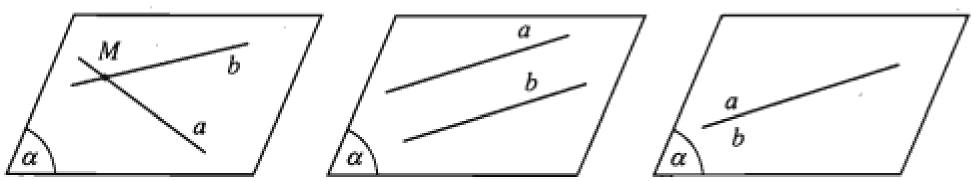
Do đó, giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) là AF.
Trong mp(ABF), kéo dài AF cắt EG tại M. Khi đó, M là giao điểm của EG và mp(ACD).

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b.

Khi đó, ta nói a và b đồng phẳng. Theo kết quả của hình học phẳng có 3 khả năng xảy ra:



$a \cap b = \{M\}$ $\quad$ $a // b$ $\quad$ $a \equiv b$

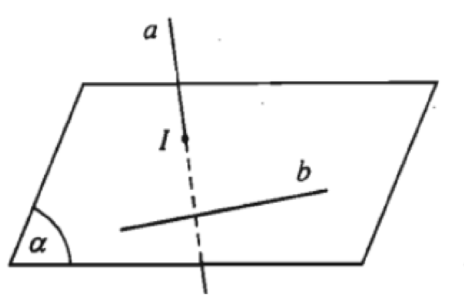
i) a và b có điểm chung duy nhất M. Ta nói a và b *cắt nhau* tại M và kí hiệu $a \cap b = \{M\}$. Ta có thể viết $a \cap b = M$.

ii) a và b không có điểm chung. Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là a // b.

iii) a trùng b, kí hiệu là $a \equiv b$.

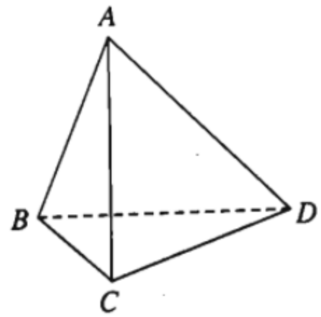
- Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa a và b.

Khi đó ta nói a và b *chéo nhau* hay a *chéo với* b.



- Ví dụ. Cho tứ diện ABCD. Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng chéo nhau.

Lời giải:



Đường thẳng AB và CD chéo nhau.

Đường thẳng AC và BD chéo nhau.

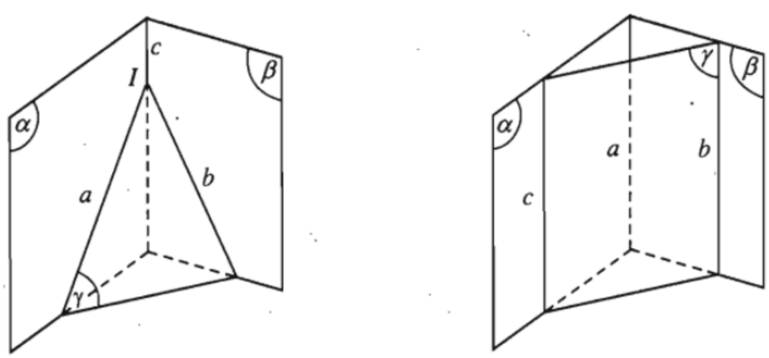
Đường thẳng AD và BC chéo nhau.

6. Tính chất về đường thẳng song song và đường thẳng chéo nhau trong không gian

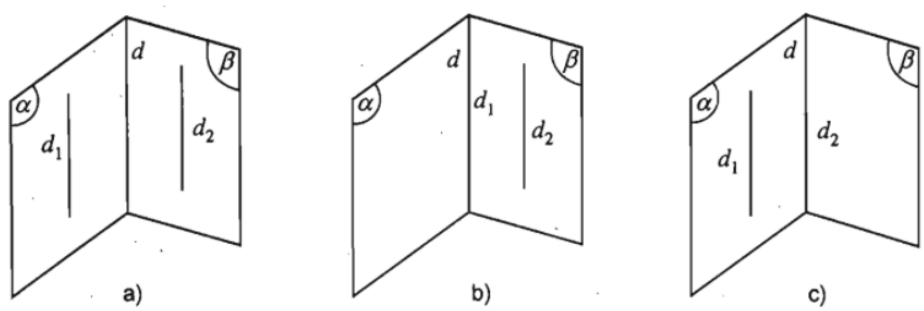
- **Định lí.** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

- **Định lí** (về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



- **Hệ quả**. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

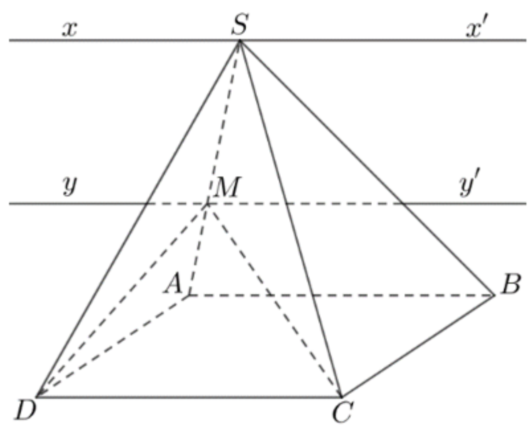


Ví dụ. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC).

b) (MCD) và (SAB), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

Lời giải:



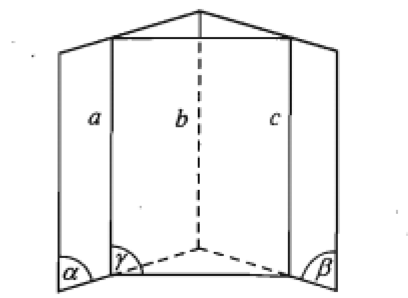
a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$, với Sx // AB // CD.

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (MCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = My$, với My // AB // CD.

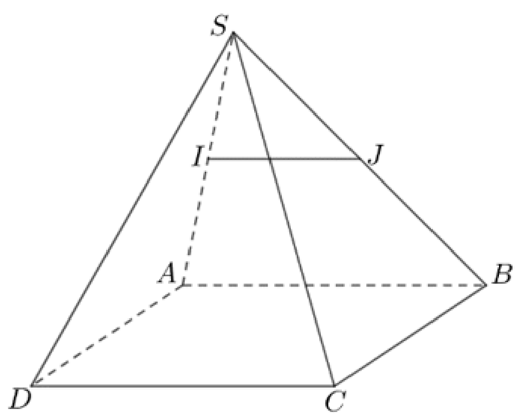
- Định lí. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



Ta có: a // c; b // c nên a // b hay a // b // c (ba đường thẳng song song).

Ví dụ. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng IJ // AB, từ đó suy ra IJ // CD.

Lời giải:

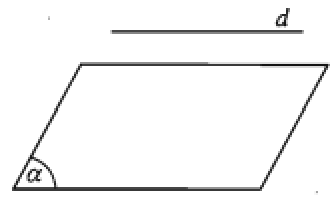


Xét tam giác SAB có I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB.
Từ đó suy ra IJ // AB.
Lại có AB // CD (vì ABCD là hình bình hành) nên từ đó ta có IJ // CD (vì cùng song song với đường thẳng AB).

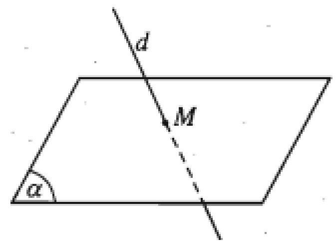
7. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tùy theo số điểm chung của d và (α), ta có ba trường hợp sau:

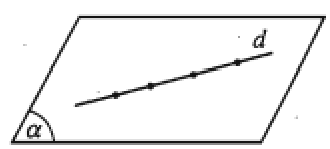
- d và (α) *không có điểm chung*. Khi đó ta nói d *song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là d // (α) hay (α) // d.



- d và (α) chỉ *có một điểm chung duy nhất* M. Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = M$.

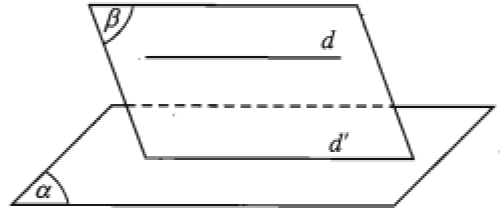


- d và (α) có từ *hai điểm chung trở lên*. Khi đó, d *nằm trong* (α) hay (α) *chứa* d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$.



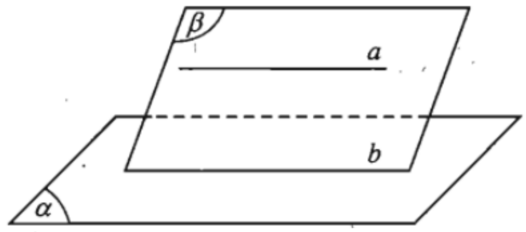
8. Tính chất về đường thẳng và mặt phẳng song song

- Định lí. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d’ nằm trong (α) thì d song song với (α).



Ta có: $\left.\begin{matrix} d // d' \\ d' \subset (\alpha), d \not\subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // (\alpha)$.

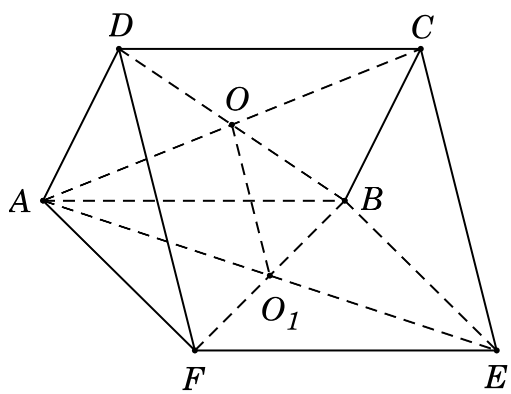
- Định lí. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



- Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

- Định lí. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

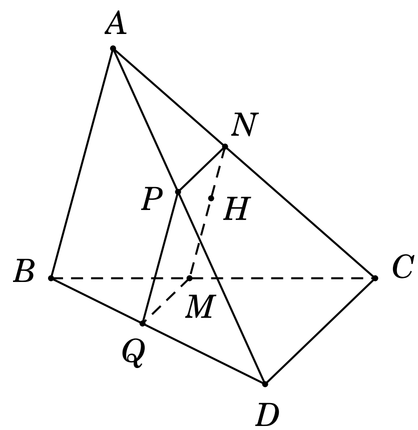
Ví dụ. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của ABCD và ABEF, gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh:
a) OO_1 // mp (BEC).
b) OO_1 // mp (AFD)
Lời giải.



a) Xét tam giác ACE có O; O_1 lần lượt là trung điểm của AC; AE (tính chất hình hình hành).
Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác ACE và OO_1 // EC.
Mà EC thuộc mp (BEC) nên OO_1 // mp (BEC) (đpcm).
b) Tương tự; OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên OO_1 // FD.
Mà FD nằm trong mp(AFD)
Suy ra: OO_1 // mp (AFD) (đpcm).

Ví dụ. Cho tứ diện ABCD. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC và (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là hình gì?

Lời giải:



+ Qua H kẻ đường thẳng song song AB và đường thẳng này cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

+ Từ N kẻ NP song song với CD $\left(P \in AD\right)$

Từ P kẻ PQ song song với AB $\left(Q \in BD\right)$.

+ Ta có: MN // PQ // AB

Suy ra 4 điểm M; N; P và Q đồng phẳng .

Suy ra thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là tứ giác MNPQ.

+ Ta chứng minh MNPQ là hình bình hành.

Trước tiên, ta chứng minh PN // QM.

Ta có: $\begin{cases} PN \,//\, CD \\ PN \subset mp(MNPQ),\ CD \subset mp(BCD) \\ QM = mp(MNPQ) \cap mp(BCD) \end{cases}$

Suy ra: QM // PN // CD

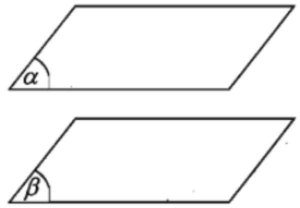
Lại có: PQ // MN

Do đó, tứ giác MNPQ là hình bình hành.

9. Định nghĩa hai mặt phẳng song song

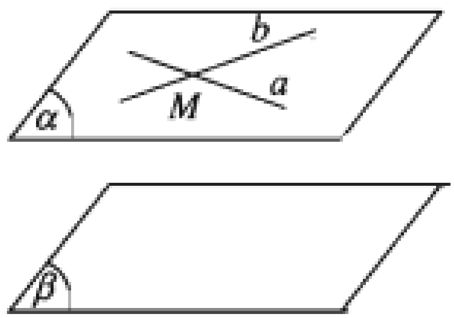
Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu (α) // (β) hoặc (β) // (α).



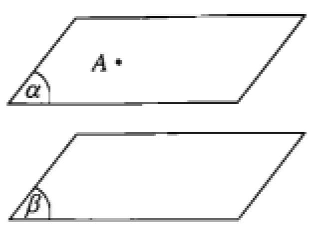
10. Tính chất của hai mặt phẳng song song

- **Định lí 1**. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

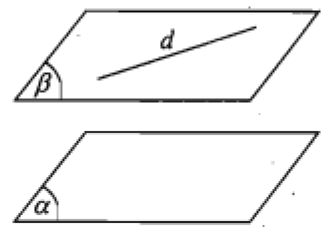


Ta có: $\left.\begin{array}{l} a,b \subset (\alpha), a \cap b = M \\ a // (\beta) \\ b // (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

- **Định lí 2.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

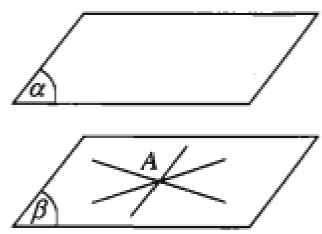


- **Hệ quả 1**. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).



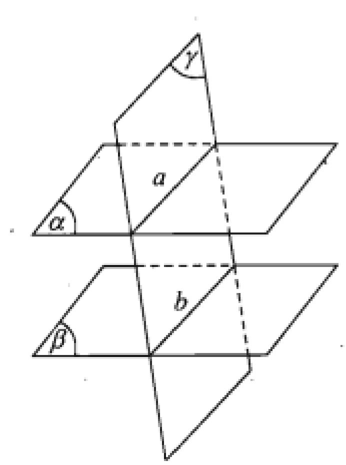
- Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

- Hệ quả 3. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).



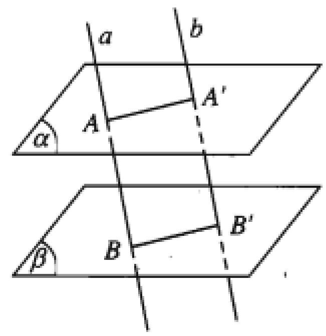
- Định lí 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ a=(\alpha)\cap(\gamma)\\ b=(\beta)\cap(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow a//b$$



- Hệ quả. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ a\cap(\alpha)=A, b\cap(\alpha)=A'\\ a\cap(\beta)=B, b\cap(\beta)=B'\\ AA'=(\alpha)\cap(\gamma)\\ BB'=(\beta)\cap(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow AA'=BB'$$

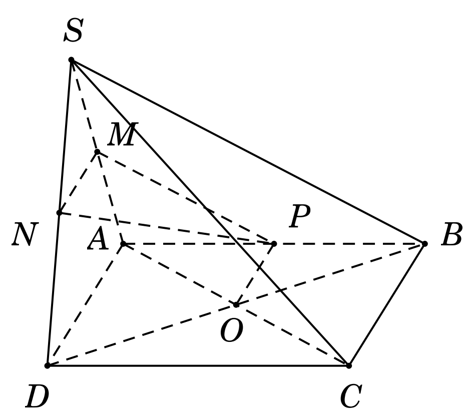


Ví dụ. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Chứng minh:

a) M, N, O, P đồng phẳng.

b) mp(MON) // mp(SBC).

Lời giải:



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD nên MN // AD (1).

Và OP là đường trung bình của tam giác ABC nên OP // BC // AD (2).

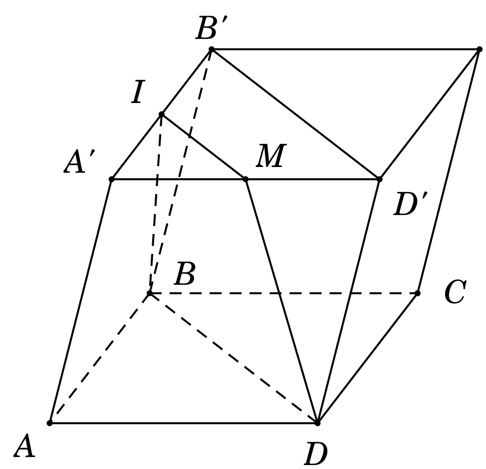
Từ (1) và (2) suy ra MN // OP // AD nên 4 điểm M, N, O, P đồng phẳng.

b) Vì $\begin{cases} MP\ //\ SB \\ OP\ //\ BC \\ MP, OP \subset (MNOP) \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases}$

Suy ra, (MNOP) // (SBC) hay (MON) // (SBC).

Ví dụ. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi I là trung điểm của A'B'. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

Lời giải:



- Ta tìm giao tuyến của 2 mp(IBD) và (A'B'C'D')

$\begin{cases} BD\ //\ B'D' \\ BD \subset (IBD);\ B'D' \subset (A'B'C'D') \\ I\ \text{chung} \end{cases}$

Suy ra, giao tuyến của (IBD) với (A'B'C'D') là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

- Trong mặt phẳng (A'B'C'D'), gọi M là giao điểm của d và A'D'.

Suy ra, IM // BD // B'D'.

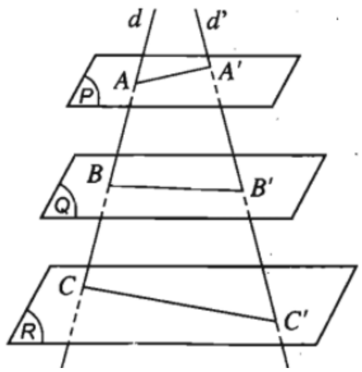
Khi đó thiết diện là tứ giác IMDB và tứ giác này là hình thang.

11. Định lí Ta – let (Thalès) trong không gian

- **Định lí 4 (định lí Ta- let).** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

- Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$



12. Hình lăng trụ, hình hộp

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2,.., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

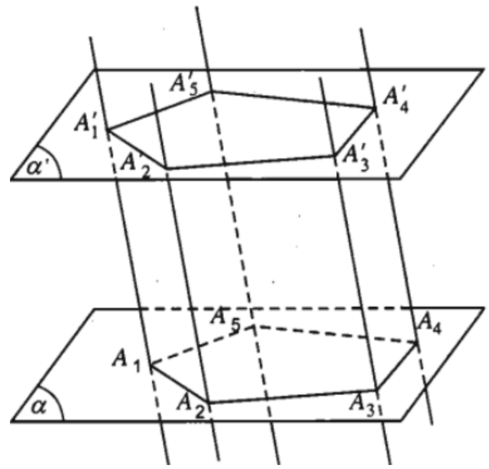
Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2....A'_n$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$; $A_2A_2'A_3'A_3$,…, $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2....A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2....A'_n$ gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.

- Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, A_2A_2',…., A_nA_n' gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.

- Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, …, $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.

- Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



- Nhận xét:

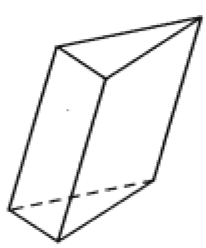
+ Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

+ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

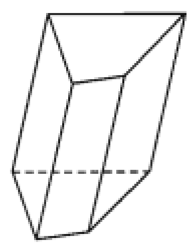
+ Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy, chẳng hạn:

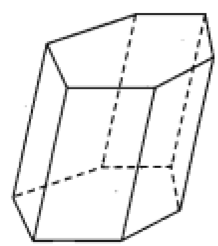
+ Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.



Hình lăng trụ tam giác

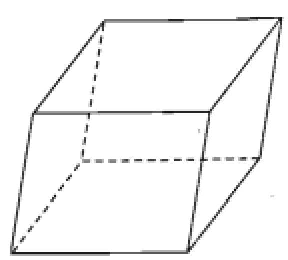


Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

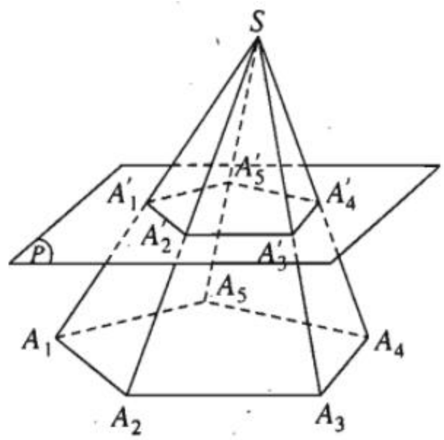
+ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.



13. Hình chóp cụt

Định nghĩa:

Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, …,SA_n lần lượt tại A_1’; A_2’,.., A_n’. Hình tạo bởi thiết diện A_1’A_2’..A_n’ và đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là *hình chóp cụt*.



Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện A_1’A_2’..A_n’ gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.

Các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.

Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, A_2A_2’,…., A_nA_n’ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

- Tính chất của hình chóp cụt

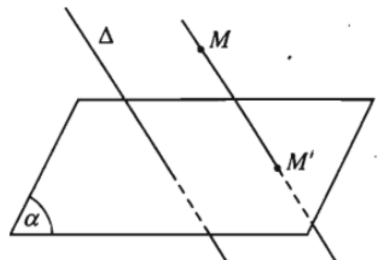
(1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

(2) Các mặt bên là những hình thang.

(3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

14. Phép chiếu song song

- Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M’ xác định. Điểm M’ được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên (α) theo phương Δ.



Mặt phẳng (α) gọi là *mặt phẳng chiếu*. Phương Δ gọi là *phương chiếu*.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M’ của nó trên (α) được gọi là *phép chiếu song song* lên (α) *theo phương* Δ.

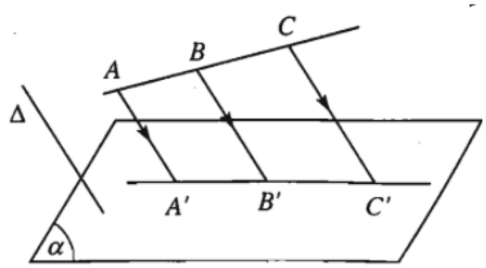
Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H’ các hình chiếu M’ của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H qua phép chiếu song song nói trên.

- **Chú ý**. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

15. Các tính chất của phép chiếu song song

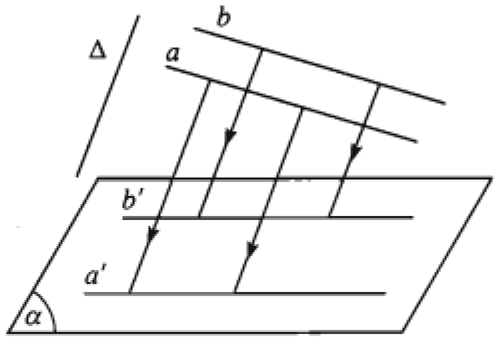
- Định lí 1.

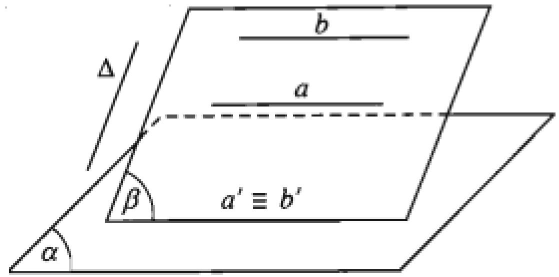
a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.



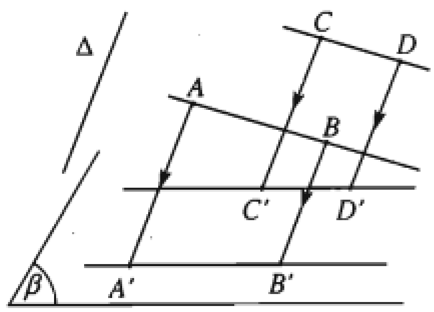
b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

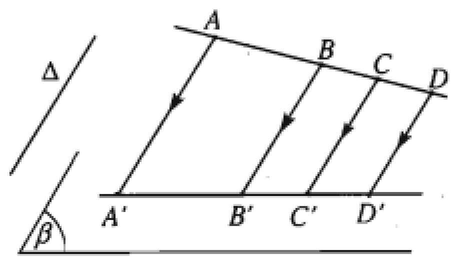
c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.





d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.





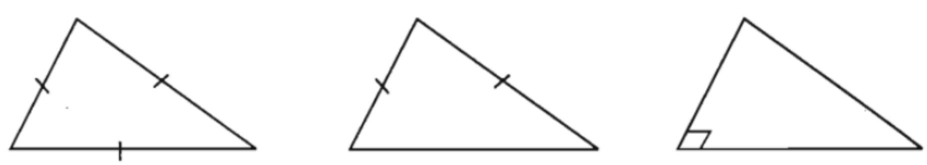
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

16. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.

Hình biểu diễn của hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

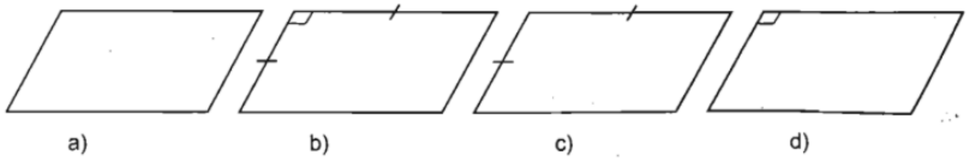
- Hình biểu diễn của các hình thường gặp.

+ Tam giác: Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình chiếu của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, …).



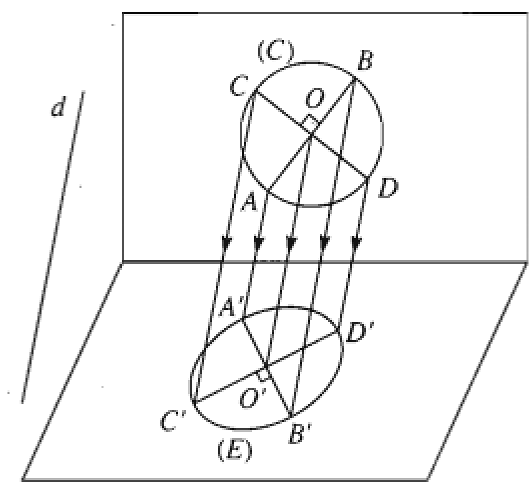
a) b) c)

+ Hình bình hành: Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuoongm hình thoi, hình chữ nhật, …).



+ Hình thang: Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

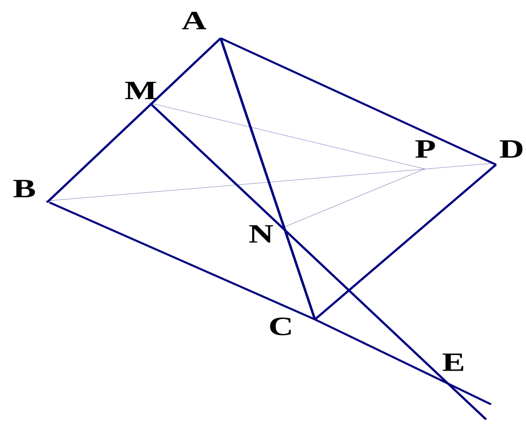
+ Hình tròn: Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.



B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải:



- Ta có:

$P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$

$P \in MP \subset (MNP)$

Suy ra, P là điểm chung của mp(BCD) và mp(MNP). (1)

- Trong mp (ABC), gọi E là giao điểm MN và BC

$E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

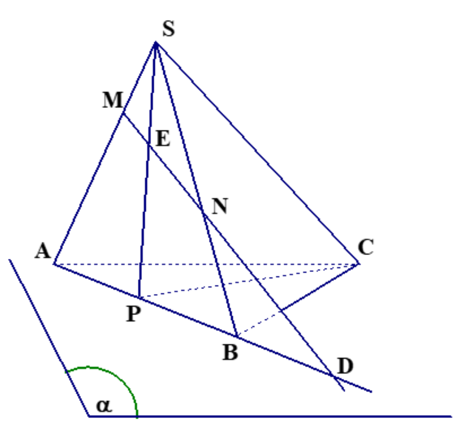
Suy ra, E là điểm chung của mp(BCD) và mp(MNP). (2)

- Từ (1), (2) suy ra PE là giao tuyến của mp(BCD) và mp(MNP).

Bài 2. Trong mp(α) cho tam giác ABC. Một điểm S không thuộc (α). Trên cạnh AB lấy một điểm P và rên các đoạn thẳng SA, SB ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho MN không song song với AB.

Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC).

Lời giải:



Cách 1: Trong (SAB) , gọi $E = SP \cap MN$ ta có:

$E \in SP$ mà $SP \subset (SPC) \Rightarrow E \in (SPC)$

$E \in MN$

Vậy $E = MN \cap (SPC)$

Cách 2: Chọn mp phụ chứa MN là mp(SAB).

Ta có: $(SAB) \cap (SPC) = SP$

Trong (SAB), gọi $E = MN \cap SP$ ta có:

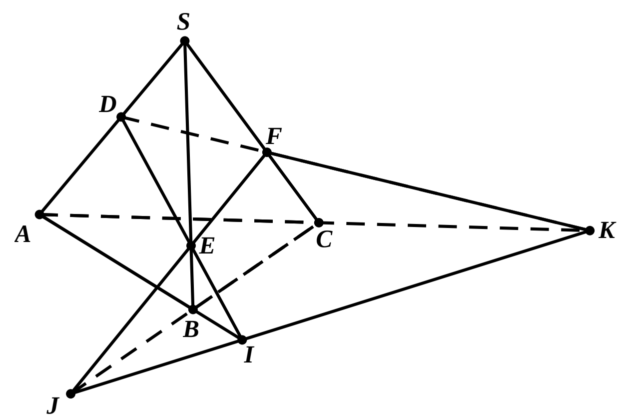
$E \in MN$

$E \in SP$ mà $SP \subset (SPC)$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$.

Bài 3. Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:



Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$I \in AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$.

Suy ra, I thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (1)

Tương tự :

$$J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \subset (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$$

Suy ra, J thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (2)

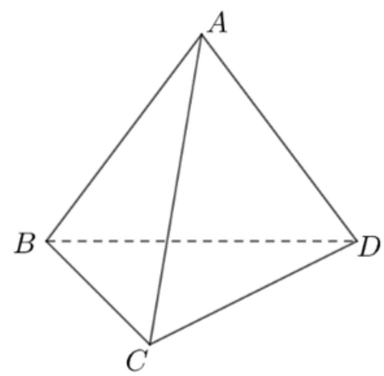
$$K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$$

Suy ra, K thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (DEF) và (ABC) nên chúng thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Lời giải:



Giả sử AB và CD không chéo nhau, nghĩa là hai đường thẳng này đồng phẳng. Khi đó AB và CD có thể song song với nhau hoặc cắt nhau tại một điểm hoặc trùng nhau (vô lý vì ABCD là tứ diện nên 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng).

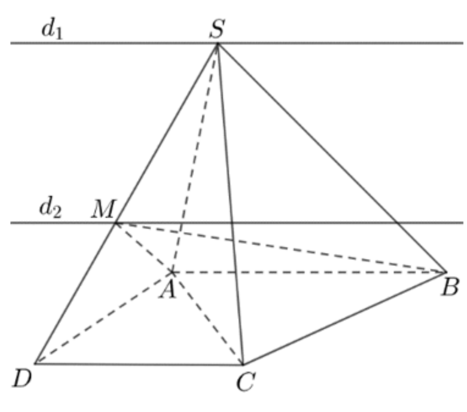
Vậy AB và CD chéo nhau.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$.

b) $d_2 = (SCD) \cap (MAB)$. Từ đó chứng minh d_1 // d_2.

Lời giải:



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB//CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d_1$, với $S \in d_1$ và d_1 // AB // CD (1).

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (MAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB//CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = d_2$, với $M \in d_2$ và d_2 // AB // CD (2).

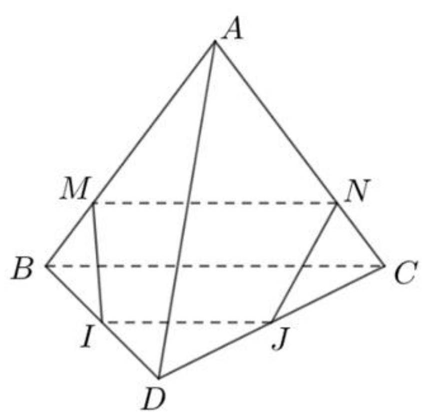
Từ (1) và (2) suy ra: d_1 // d_2.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng MN // BC.

b) Tứ giác MNJI là hình gì.

Lời giải:



a) Xét mp(ABC) có:

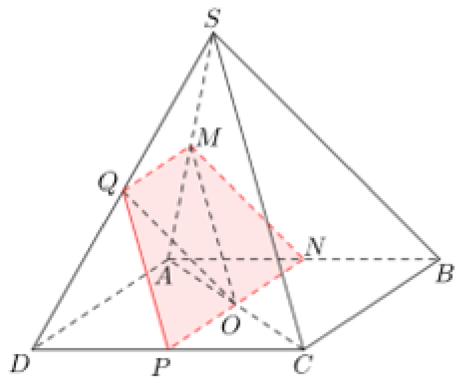
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, từ đó suy ra MN // BC (1) (Định lý Ta-lét đảo).

b) Xét mp(BCD) có: I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD

Nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD.

Từ đó suy ra IJ // BC (2).

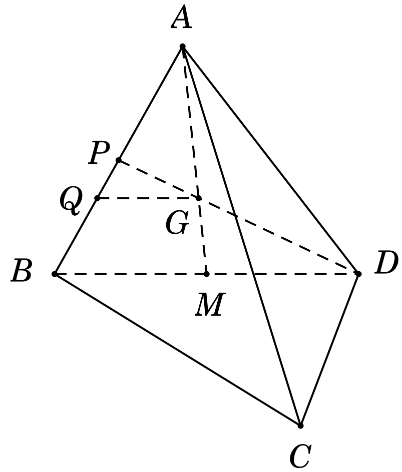
Từ (1) và (2) suy ra MN // IJ.
Vậy tứ giác MNJI là hình thang.
Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp S.ABCD, biết (P) là mặt phẳng qua điểm M và song song với SC, AD.
Lời giải:



Qua M kẻ đường thẳng MQ // AD với Q thuộc SD.
Có MO // SC (do MO là đường trung bình của tam giác SAC).
Trong mp(ABCD), qua O dựng đường thẳng song song với AD cắt AB, CD lần lượt tại N và P.

Từ đó ta có: $\begin{cases} (OMQ)\cap(SAD)=MQ \\ (OMQ)\cap(SCD)=QP \\ (OMQ)\cap(ABCD)=PN \\ (OMQ)\cap(SAB)=NM \end{cases}$

Vậy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là hình thang MNPQ.
Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho AQ = 2QB. Gọi P là trung điểm của AB. Chứng minh: GQ // mp (BCD).
Lời giải:



Gọi M là trung điểm của BD.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ (1)

Điểm Q thuộc AB thỏa mãn: AQ = 2QB nên $\frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$.

Suy ra, GQ // BD (định lí Ta-let đảo)

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD).

Do đó, GQ // mp(BCD) (đpcm).

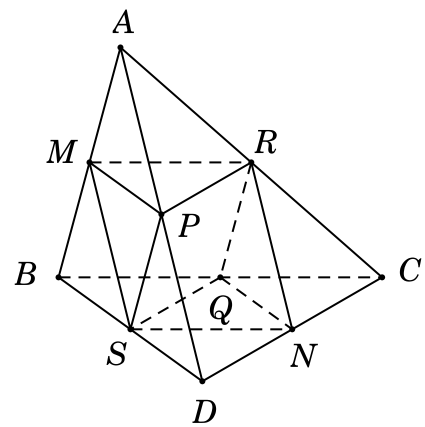
Bài 9. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, AC, BD. Chứng minh:

a) P, R, Q, S đồng phẳng

b) P, M, N, Q đồng phẳng.

c) M, R, N, S đồng phẳng.

Lời giải:



a) Tam giác ABD có PS là đường trung bình nên PS // AB.   (1)

Tam giác ABC có RQ là đường trung bình nên RQ // AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra PS // RQ nên 4 điểm P, R, Q, S đồng phẳng (đpcm).

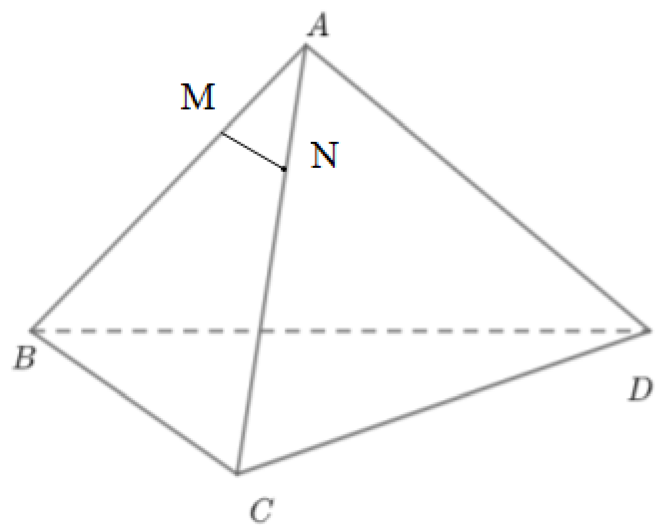
b) Tương tự ý a, ta có được PM // NQ // BD

Suy ra 4 điểm P, M, N, Q đồng phẳng.

c) Ta có NR // AD // MS suy ra M, R, N, S đồng phẳng.

Bài 10. Cho tứ diện ABCD, lấy điểm M trên cạnh AB sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho MN // mp(BCD) . Tính tỉ số $\frac{AN}{NC}$?

Lời giải:



- Từ MN // mp(BCD) ta chứng minh MN // BC .

Thật vậy, giả sử MN cắt BC tại P.

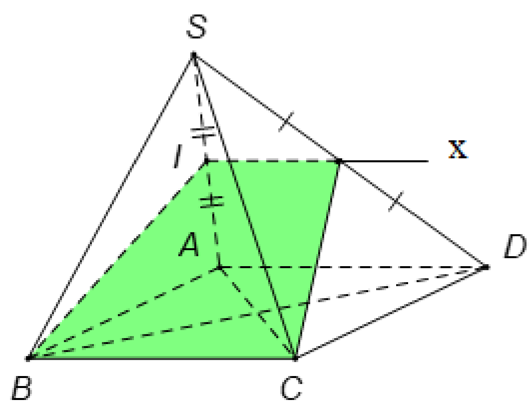
Mà BC ⊂ mp(BCD)

$\Rightarrow$ Đường thẳng MN cắt mp(BCD) tại P (mâu thuẫn với MN // mp(BCD)).
Vậy MN // BC.
- Xét tam giác ABC có: MN // BC

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$ (định lí Ta- let).

$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Tìm giao tuyến của mp(IBC) và mp(SAD) và chứng minh giao tuyến đó song song với mp(SBC).
Lời giải:



- Ta tìm giao tuyến của mp(IBC) và mp(SAD) .

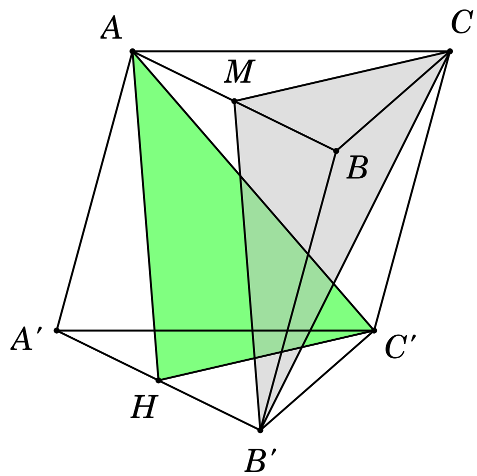
Ta có: $\begin{cases} I \in (IBC) \cap (SAD) \\ BC \ // \ AD \\ BC \subset (IBC);\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

Suy ra: $(IBC) \cap (SAD) = Ix \ // \ BC \ // \ AD$ (1)

- Lại có: $BC \subset (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: Ix // mp(SBC).

Bài 12. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’. Gọi H là trung điểm của A’B’. Chứng minh: B’C // (AHC’).
Lời giải:



- Gọi M là trung điểm của AB.

Suy ra AMB'H là hình bình hành

Do đó, MB'// AH mà $AH \subset mp(AHC')$ nên MB'// mp(AHC') (1) .

- Vì MH là đường trung bình của hình bình hành ABB'A'

Suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng CC'

$\Rightarrow$ MHC'C là hình hình hành.

Suy ra: MC // HC' mà $HC' \subset mp(AHC')$ nên MC // (AHC') (2)

Từ (1) và (2), suy ra (B'MC) // (AHC').

Suy ra, B'C // (AHC').

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong mp (ABCD). Mp(α) cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh:

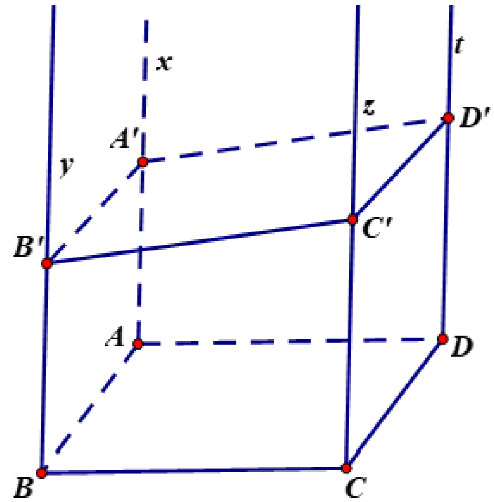
a) mp (AA'B'B) // (DD'C'C).

b) A'B'C'D' là hình bình hành.

c) OO' // AA'.

Trong đó O là tâm hình bình hành ABCD, O' là giao điểm của A'C' và B'D'.

Lời giải:



a) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AB\ //\ DC \\ AA'\ //\ DD' \\ AB, AA' \subset (ABB'A') \\ DC, DD' \subset (DD'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABB'A')\ //\ (DD'C'C)$$

b) Tương tự câu a, ta chứng minh được (ADD’A’) // (BCC’B’).

$$\text{Vì } \left.\begin{array}{l} (\alpha)\cap(ABB'A') = A'B' \\ (\alpha)\cap(DCC'D') = C'D' \\ (ABB'A')//(DCC'D') \end{array}\right\} \Rightarrow A'B'\ //\ C'D' \quad (1)$$

$$\text{và } \left.\begin{array}{l} (\alpha)\cap(ADD'A') = A'D' \\ (\alpha)\cap(BCC'B') = C'B' \\ (ADD'A')//(BCC'B') \end{array}\right\} \Rightarrow A'D'\ //\ C'B' \quad (2)$$

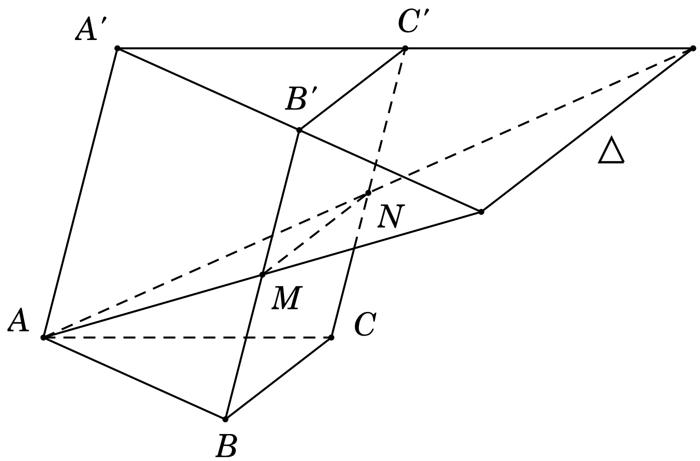
Từ (1), (2) suy ra tứ giác A’B’C’D’ là hình bình hành.

c) Do O và O’ lần lượt là trung điểm của AC và A’C’ (tính chất hình bình hành) nên OO’ là đường trung bình trong hình thang AA’C’C.

Do đó OO’// AA’.

Bài 14. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BB’ và CC’. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (A’B’C’). Chứng minh Δ // BC.

Lời giải:



Do M và N lần lượt là trung điểm của BB’ và CC’ nên MN là đường trung bình của hình bình hành BCC’B’ nên MN // B’C’.

Ta có:

$$\begin{cases} MN \subset (AMN);\ B'C' \subset (A'B'C') \\ MN\ //\ B'C' \\ (AMN) \cap (A'B'C') = \Delta \end{cases}$$

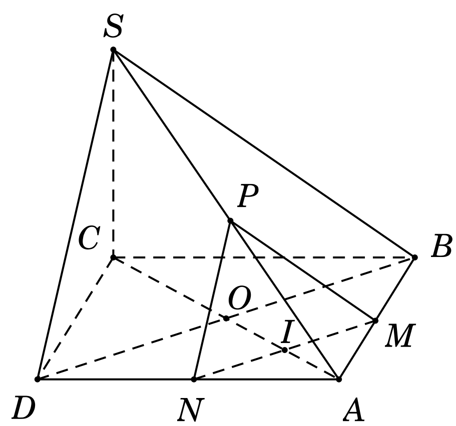
Suy ra: Δ // MN // B’C’ (1).

Lại có BCC’B’ là hình bình hành nên BC // B’C’ (2).

Từ (1) và (2) suy ra Δ // BC.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

Lời giải:



- Gọi MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy (ABCD).

Vì $\begin{cases} (P) // (SBD) \\ (P) \cap (ABCD) = MN \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases}$

Suy ra MN // BD (tính chất)

- Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với NP // SD.

(P) cắt mp (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với MP // SB.

Vậy tam giác PMN đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD là tam giác đều MNP.

Bài 16. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu (A'B'C') theo phương CC' biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Tìm vị trí điểm M'.

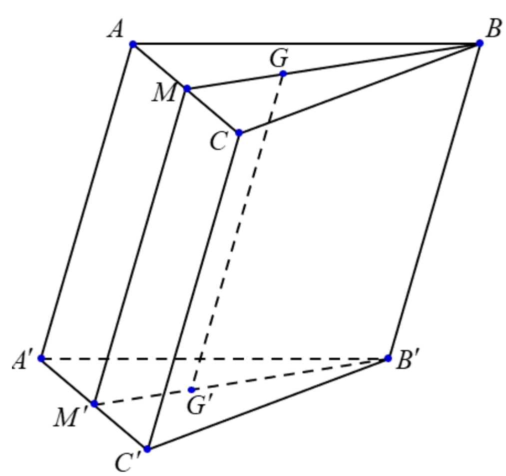
Lời giải:

Ta có phép chiếu song song lên mp(A'B'C') theo phương chiếu CC': biến C thành C', biến B thành B'.

Do M là trung điểm của BC suy ra M' là trung điểm của B'C'.

Bài 17. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' mặt phẳng chiếu là (A'B'C') biến G thành G'. Tìm vị trí điểm G'.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của AC.

- Do ABC.A’B’C’ là hình lăng trụ. Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AA’ biến B thành B’, biến M thành M’.

- Theo đầu bài G là trọng tâm tam giác ABC .

Suy ra B, M, G thẳng hàng và $\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}$.

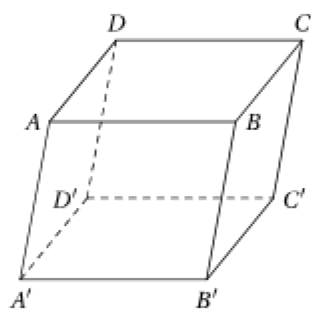
- Khi đó ta có B’, M’, G’ thẳng hàng và $\frac{B'G'}{B'M'}=\frac{2}{3}$.

Mặt khác M là trung điểm của AC, suy ra M’ là trung điểm của A’C’.

Suy ra G’ là trọng tâm của tam giác A’B’C’.

Bài 18. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Tìm hình chiếu của điểm C trên mp(A’B’C’) theo phương chiếu DA’.

Lời giải:



Do ABCD.A’B’C’D’ là hình hộp nên CD = A’B’ và CD // A’B’ (cùng song song C’D’)

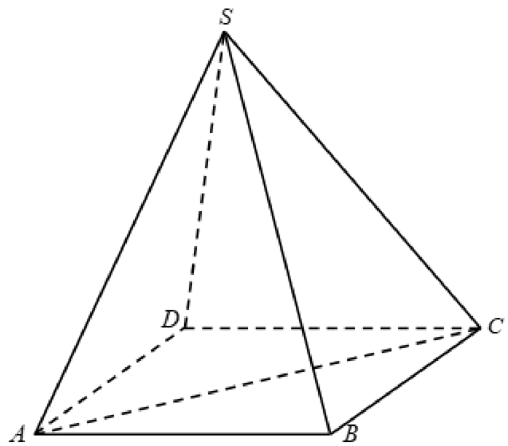
$\Rightarrow$ Tứ giác CDA’B’ là hình bình hành.

$\Rightarrow$ DA’// CB’.

Do đó, hình chiếu của điểm C trên mp(A’B’C’) theo phương chiếu DA’ là điểm B’.

Bài 19. Hãy chọn phép chiếu song song với phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp để hình chiếu song song của một tứ diện cho trước là một hình bình hành.

Lời giải:



Cho tứ diện SABC. Trên mặt phẳng (ABC), dựng điểm D để ABCD là hình bình hành.

Khi đó qua phép chiếu song song đường thẳng SD và mặt phẳng chiếu (ABC) biến tứ diện SABC thành hình bình hành ABCD.