Bài 3. Một số phương trình lượng giác thường gặp.

A. Lý thuyết .

I. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

1. Định nghĩa.

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng:

$$at + b = 0 \quad (1)$$

Trong đó; a, b là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

- Ví dụ 1.

a) – 3sinx + 8 = 0 là phương trình bậc nhất đối với sinx.

b) 6cotx + 10 = 0 là phương trình bậc nhất đối với cotx.

2. Cách giải

Chuyển vế rồi chia hai vế của phương trình (1) cho a, ta đưa phương trình (1) về phương trình lượng giác cơ bản.

- Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) 2sinx – 4 = 0;

b) $3\tan x-\sqrt{3}=0$.

Lời giải:

a) Từ 2sinx – 4 = 0, chuyển vế ta có: 2sinx = 4 (2)

Chia 2 vế của phương trình (2) cho 2, ta được: sinx = 2.

Vì 2 > 1 nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Từ $3\tan x-\sqrt{3}=0$, chuyển vế ta có: $3\tan x=\sqrt{3}$ (3)

Chia cả 2 vế của phương trình (3) cho $\sqrt{3}$ ta được: $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

3. Phương trình đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

- Phương pháp:

Sử dụng các công thức biến đổi lượng giác đã được học để đưa về phương trình bậc nhất đối với hàm số lượng giác hoặc đưa về phương trình tích để giải phương trình.

- Ví dụ 3. Giải các phương trình:

a) sin2x – cosx = 0;

b) – 4sinx. cosx. cos2x = 1.

Lời giải:

a) Ta có: sin2x – cosx = 0

⇔ 2sinx. cosx – cosx = 0

⇔ cosx. (2sinx – 1) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

+ Với cosx = 0 thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

+ Với 2sinx – 1 = 0

$$\Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.;\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) – 4sinx. cosx. cos2x = 1.

$\Leftrightarrow$ – 2sin2x. cos2x = 1   (vì sin2x = 2sinx. cosx)

$\Leftrightarrow$ – sin4x = 1 $\Leftrightarrow$ sin 4x = – 1

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

II. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. Định nghĩa.

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Trong đó a; b; c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

- Ví dụ 4.

a) $3\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ là phương trình bậc hai đối với cosx.

b) $-10\tan^2 x + 10\tan x = 0$ là phương trình bậc hai đối với tanx.

2. Cách giải.

Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này.

Cuối cùng ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

- Ví dụ 5. Giải phương trình: $2\cos^2 x - 4\cos x = 0$.

Lời giải:

Đặt t = cosx với điều kiện: $-1 \le t \le 1$.

Ta được phương trình bậc hai ẩn t là: $2t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Trong hai nghiệm này chỉ có nghiệm t = 0 thỏa mãn.

Với t = 0 thì cos x = 0

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình đưa về dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

- Phương pháp:

Sử dụng các công thức lượng giác đã học để biến đổi đưa về dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

- Ví dụ 6. Giải phương trình $3\sin^2x – 6\cos x – 3 = 0$.

Lời giải:

Vì $\sin^2x = 1 – \cos^2x$ nên phương trình đã cho tương đương:

$3(1 – \cos^2x) – 6\cos x – 3 = 0$

$\Leftrightarrow – 3\cos^2 x – 6\cos x = 0$ (*)

Đăt $t = \cos x$ với điều kiện: $-1 \le t \le 1$, phương trình (*) trở thành:

$-3t^2 – 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right.$.

Trong hai nghiệm này, chỉ có nghiệm $t = 0$ thỏa mãn.

Với $t = 0$ thì; $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

- Ví dụ 7. Giải phương trình: $\sin^2x – 3\sin x.\ \cos x + 2\cos^2x = 0$ (1).

Lời giải:

+ Nếu $\cos x = 0$ thì $\sin^2x = 1$ nên phương trình (1) có :

VT(1) = 1 và VP(1) = 0

Suy ra, $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1) . Vậy $\cos x \neq 0$.

+ Vì $\cos x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$, ta được:

$\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$ (2)

Đặt $t = \tan x$, phương trình (2) trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Với $t = 2$ thì $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \arctan 2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

III. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx.

1. Công thức biến đổi biểu thức a.sinx + b.cosx

Ta có công thức biến đổi sau:

$a\sin x + b.\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}.\sin(x + \alpha)$ (1)

Trong đó; $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Phương trình dạng: asinx + b.cosx = c.

Xét phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$ (2)

Với $a; b; c \in \mathbb{R}$; a, b không đồng thời bằng 0.

- Nếu $a = 0$; $b \neq 0$ hoặc $a \neq 0$; $b = 0$ phương trình (2) có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản.

- Nếu $a \neq 0$; $b \neq 0$, ta áp dụng công thức (1).

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$.

Lời giải:

Theo công thức (1) ta có:

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}.\sin(x - \alpha) = 2\sin(x - \alpha)$

Trong đó; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ta lấy $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ thì ta có:

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Khi đó; $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$;

b) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$;

c) $\tan x + \cot x = 2$.

Lời giải:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = \sin x$ với điều kiện: $-1 \le t \le 1$.

Phương trình (1) trở thành: $2t^2 + 3t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Với t = – 1 thì sinx = – 1 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Với $t = \frac{-1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{-1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{-\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.;\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos^2 x$ – sinx + 1 = 0

$\Leftrightarrow$ 1 – $\sin^2 x$ – sinx + 1 = 0

$\Leftrightarrow$ – $\sin^2 x$ – sinx + 2 = 0 (2)

Đặt t = sinx với điều kiện: $-1 \le t \le 1$.

Phương trình (2) trở thành: – t^2 – t + 2 = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Trong hai nghiệm thì chỉ có nghiệm t = 1 thỏa mãn.

Với t = 1 thì sinx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) tanx + cotx = 2.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: tanx + cot x = 2

$\Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ (3)

Đặt t = tan x (với $t \neq 0$), phương trình (3) trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t} = 2$$

$$\Rightarrow t^2 + 1 = 2t$$

Suy ra, $t^2 - 2t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn).

Khi đó; tanx = 1 nên $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 2. Giải các phương trình:

a) $2\sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 4\cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x = 2$.

Lời giải:

a) $2\sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 4\cos^2 x = 0$ (1)

+ Nếu cosx = 0 thì $\sin^2 x = 1$ nên phương trình (1) có :

VT(1) = 2 và VP(1) = 0

Suy ra, cos x = 0 không thỏa mãn phương trình (1) . Vậy $\cos x \neq 0$.

+ Vì $\cos x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$, ta được:

$2\tan^2 x + 2\tan x - 4 = 0$ (2)

Đặt t = tanx, phương trình (2) trở thành: $2t^2 + 2t - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với t = 1 thì tanx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Với t = –2 thì tanx = – 2 $\Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ và

$x = \arctan(-2) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $3\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x = 2$

$\Leftrightarrow$ $3\sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x = 2$ (2)

+ Nếu cosx = 0 thì $\sin^2 x = 1$ nên phương trình (2) có :

VT(2) = 3 và VP(2) = 2

Suy ra, cos x = 0 không thỏa mãn phương trình (2) . Vậy cosx $\neq$ 0.

+ Vì cosx $\neq$ 0 nên chia hai vế của phương trình (2) cho $\cos^2 x$, ta được:

$3\tan^2 x + 2\tan x + 3 = \frac{2}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x + 3 = 2(1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$ (3)

Đặt t = tanx, phương trình (3) trở thành:

$t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Với t = 1 thì tanx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) 2sinx + 3cosx = 4;

b) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2$;

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Lời giải:

a) Ta có:

$2\sin x + 3\cos x = \sqrt{2^2 + 3^2}.\sin(x + \alpha) = \sqrt{13}\sin(x + \alpha)$

Trong đó; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Khi đó; 2sinx + 3cosx = 4

$\Leftrightarrow \sqrt{13}\sin\left(x+\alpha\right)=4 \Leftrightarrow \sin\left(x+\alpha\right)=\frac{4}{\sqrt{13}}$ (1)

Vì $\frac{4}{\sqrt{13}}$ > 1 nên phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2$

Ta có:

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}.\sin(x-\alpha) = 2\sin(x-\alpha)$$

Trong đó; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta lấy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ thì ta có:

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó; $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \text{ ; } k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

Ta có:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}.\sin(x+\alpha) = 2\sin(x+\alpha)$$

Trong đó; $\cos\alpha = \frac{1}{2}; \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta lấy $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thì ta có:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Khi đó; $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ; } k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = \sin x - \sqrt{3}\cos 2x$.

Lời giải:

Ta có: $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = \sin x - \sqrt{3}\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ta được:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}.\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}.\sin x + \sin\frac{\pi}{3}.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k2\pi;\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.