Chương VI. Thống kê

Bài 1. Số gần đúng và sai số

A. Lý thuyết

1. Số gần đúng

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, có nhiều đại lượng mà ta không thể xác định được giá trị chính xác. Mỗi dụng cụ hay phương pháp đo khác nhau có thể sẽ cho ra các kết quả khác nhau. Vì vậy kết quả thu được thường chỉ là những ***số gần đúng***.

Ví dụ:

- Chiều cao của một cây cau trong vườn nhà.

- Tốc độ của một chiếc tàu hỏa đang chạy tại một thời điểm nào đó.

- Giá trị của số π được làm tròn là 3,14, ta nói 3,14 là số gần đúng của số π.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

2.1. Sai số tuyệt đối

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là ***sai số tuyệt đối*** của số gần đúng a.

Ví dụ:

Ta có: $10\sqrt{3} \approx 17,32$.

Suy ra $\overline{a} = 10\sqrt{3}$ là số đúng; a = 17,32 là số gần đúng.

Khi đó ta có: $\Delta_a = |a - \overline{a}| = |17,32 - 10\sqrt{3}| \approx 0,0005$.

Vậy $\Delta_a = 0,0005$ là sai số tuyệt đối của số gần đúng a = 17,32.

*** Độ chính xác:**

Trên thực tế ta thường không biết số đúng $\overline{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Khi đó, ta thường tìm cách khống chế sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá mức d > 0 cho trước:

$$\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d \text{ hay } a - d \le \overline{a} \le a + d.$$

Khi đó, ta nói a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với ***độ chính xác*** d.

Quy ước viết gọn: $\overline{a} = a \pm d$.

Ví dụ:

Trên gói kẹo có ghi khối lượng tịnh là 100g ± 2g.

+ Khối lượng thực tế của gói kẹo $\overline{a}$ là số đúng. Tuy không biết $\overline{a}$ nhưng ta xem khối lượng gói kẹo là 100g nên 100 là số gần đúng cho $\overline{a}$. Độ chính xác d = 2 (g).

+ Giá trị của $\overline{a}$ nằm trong đoạn [100 – 2; 100 + 2] hay [98; 102].

2.2. Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối Δ_a và |a|, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$. Do đó $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$. Nếu δ_a hay $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Chú ý: Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ví dụ: Bao bì của một chai nước suối có ghi thể tích thực là 500 ml, biết rằng sai số tuyệt đối là 3 ml. Tìm sai số tương đối của chai nước suối.

Hướng dẫn giải

Ta có a = 500 (ml) và Δ_a = 3 (ml), do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{3}{500} = 0,6\%.$$

3. Số quy tròn

3.1. Quy tắc làm tròn số

Quy tắc làm tròn số đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn):

+ Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

+ Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Ví dụ: Hãy quy tròn số $\bar{a} = \frac{5}{3} = 1,66666....$đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Hướng dẫn giải

Quy tròn số $\bar{a} = \frac{5}{3} = 1,66666....$ đến hàng phần trăm, ta được số gần đúng là a = 1,67.

Do $\bar{a} < a < 1,675$ nên sai số tuyệt đối $\Delta_a = |\bar{a} - a| < 0,005$.

Sai số tương đối là $\delta_a \le \frac{0,005}{1,67} \approx 0,3\%$.

Chú ý:

+ Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Ta có thể nói độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

+ Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.

3.2. Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

Các bước xác định **số quy tròn** của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

Ví dụ: Cho số gần đúng a = 2032 với độ chính xác d = 50. Hãy viết số quy tròn của số a.

Hướng dẫn giải

Hàng lớn nhất của độ chính xác d = 50 là hàng chục, nên ta quy tròn a đến hàng phần trăm.

Vậy số quy tròn của a là 2000.

3.3. Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm số gần đúng a của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

Ví dụ: Cho $\overline{a} = 2 - \sqrt{11} = -1,31662479...$. Hãy xác định số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác d = 0,0001.

Hướng dẫn giải

Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d = 0,0001 là hàng phần chục nghìn.

Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng phần chục nghìn ta được số gần đúng của $\overline{a}$ là a = – 1,3166.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Các nhà vật lý sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

67,31 ± 0,96; 67,90 ± 0,55; 67,74 ± 0,46.

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

Hướng dẫn giải

Với phương pháp đo thứ nhất: a_1 = 67,31 và d_1 = 0,96, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_1 \le \frac{d_1}{|a_1|} = \frac{0,96}{67,31} \approx 1,4\%$$

Với phương pháp đo thứ hai: a_2 = 67,90 và d_2 = 0,55, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_2 \le \frac{d_2}{|a_2|} = \frac{0,55}{67,90} \approx 0,81\%$$

Với phương pháp đo thứ ba: a_3 = 67,74 và d_3 = 0,46, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_3 \le \frac{d_3}{|a_3|} = \frac{0,46}{67,74} \approx 0,68\%$$

Vì 0,68% < 0,81% < 1,4% nên $\delta_3 < \delta_2 < \delta_1$.

Do đó phương pháp đo thứ ba là chính xác nhất tính theo sai số tương đối.

Bài 2. Cho số $\sqrt{5} = 2,236067977...$.

a) Hãy quy tròn $\sqrt{5}$ đến hàng phần trăm.

b) Hãy tìm số gần đúng của $\sqrt{5}$ với độ chính xác 0,005.

Hướng dẫn giải

a) Quy tròn số $\sqrt{5}$ đến hàng phần trăm ta được số gần đúng là 2,24.

Vậy $\sqrt{5} \approx 2,24$ (quy tròn đến hàng phần trăm).

b) Hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của độ chính xác 0,005 là hàng phần nghìn. Quy tròn $\sqrt{5}$ đến hàng phần nghìn ta được số gần đúng là 2,236.

Vậy $\sqrt{5} \approx 2,236$ với độ chính xác 0,005.

Bài 3. Làm tròn số 4372,8 đến hàng chục và 8,125 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Hướng dẫn giải

+ Số quy tròn của số 4372,8 đến hàng chục là 4370. Sai số tuyệt đối là

$$\Delta = |4370 - 4372,8| = 2,8.$$

+ Số quy tròn của số 8,125 đến hàng phần trăm là 8,13. Sai số tuyệt đối là

$$\Delta' = |8,13 - 8,125| = 0,005.$$

Bài 4. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) 3678008 ± 1000;

b) $21,02345 \pm 0,001$.

Hướng dẫn giải

a) 3678008 ± 1000

Hàng lớn nhất của độ chính xác d = 1000 là hàng nghìn, nên ta quy tròn đến hàng phần chục nghìn.

Vậy số quy tròn trong trường hợp này là 3680000.

b) $21,02345 \pm 0,001$

Hàng lớn nhất của độ chính xác d = 0,001 là hàng phần nghìn, nên ta quy tròn đến hàng phần trăm.

Vậy số quy tròn cần tìm là 21,02.

Bài 5. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau: a = 5,4 cm ± 0,2 cm; b = 7,2 cm ± 0,2 cm và c = 9,7 cm ± 0,1 cm. Tính chu vi của tam giác đó.

Hướng dẫn giải

Chu vi của tam giác là:

$P = a + b + c = (5,4 \pm 0,2) + (7,2 \pm 0,2) + (9,7 \pm 0,1)$

$= (5,4 + 7,2 + 9,7) \pm (0,2 + 0,2 + 0,1)$

$= 22,3 \pm 0,5$ (cm).

Vậy chu vi của tam giác đã cho là P = 22,3 cm ± 0,5 cm.