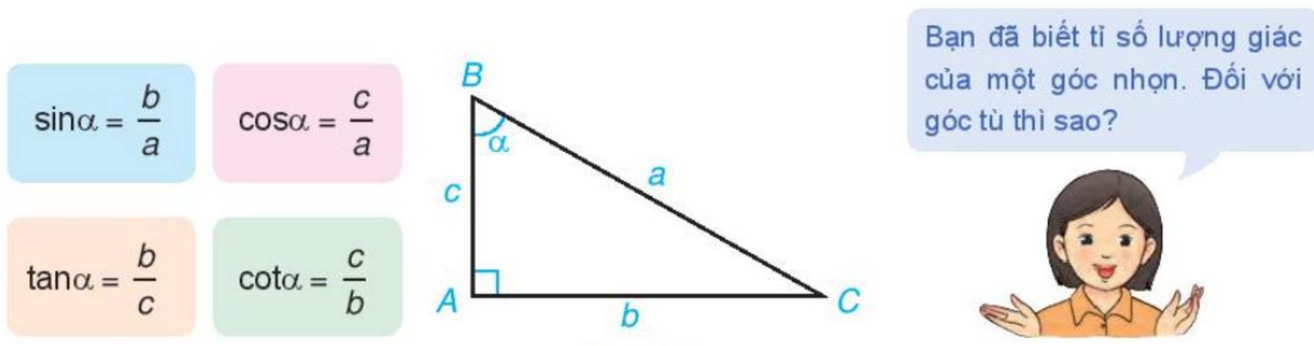
Bài 5. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

Mở đầu trang 33 SGK Toán 10 tập 1:



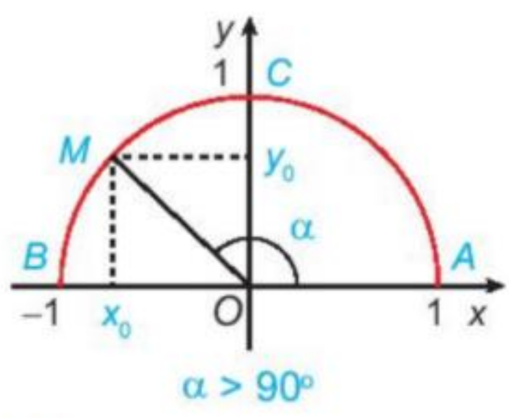
Hình 3.1

Lời giải:

Sau bài học này ta sẽ trả lời được:

Với góc α cho trước, $0^o < \alpha < 180^o$.

Trên nửa đường tròn đơn vị, vẽ điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.



Khi đó: $\sin\alpha = y_0$; $\cos\alpha = x_0$;

$\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$; $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$.

Hoạt động 1 trang 34 SGK Toán 10 tập 1:

a) Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong mỗi trường hợp sau:

• $\alpha = 90^o$;

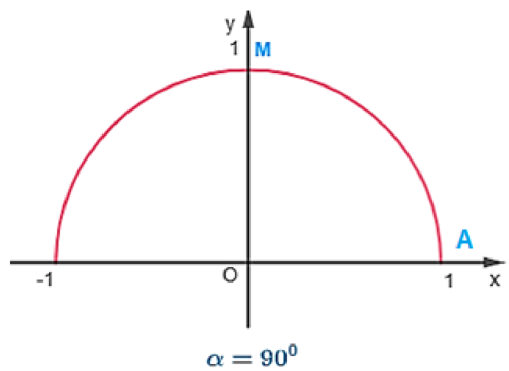
• $\alpha < 90^o$;

• $\alpha > 90^o$.

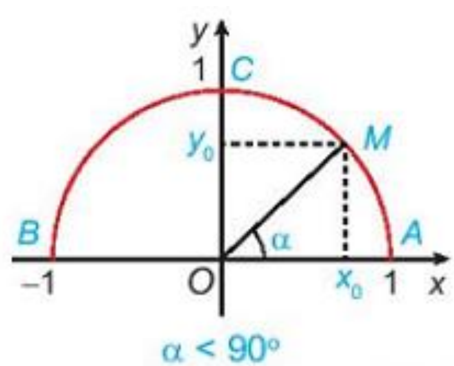
b) Khi $0^o < \alpha < 90^o$, nêu mối quan hệ giữa cos α, sin α với hoành độ và tung độ của điểm M.

Lời giải:

a) Gọi điểm A có tọa độ A(1; 0).

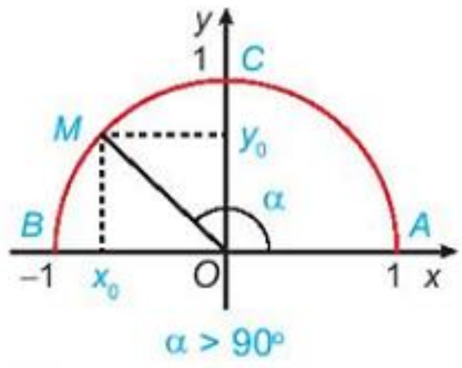


• $\alpha = 90^o$ hay $\widehat{AOM} = 90^o$. Khi đó, điểm M có tọa độ M(0; 1).



• $\alpha < 90^o$ hay $\widehat{AOM} < 90^o$.

Do đó, điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên cung tròn AC (không tính điểm C) thỏa mãn $0 < x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 < 1$.

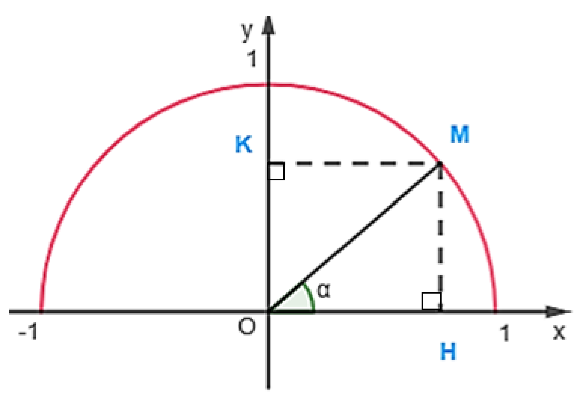


• $\alpha > 90^o$ hay $AOM > 90^o$.

Do đó, điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên cung tròn BC (không tính điểm C) thỏa mãn $-1 \leq x_0 < 0$, $0 \leq y_0 < 1$.

b) Khi $0^o < \alpha < 90^o$

Kẻ $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$ ($H \in Ox$, $H \in Oy$). Khi đó $MOH = \alpha$.



Gọi điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$.

Xét tứ giác MKOH có:

$HOK = 90^o$ $(Ox \perp Oy)$

$MHO = 90^o$ $(MH \perp Ox)$

$\widehat{MKO} = 90^o$ ($MK \perp Oy$)

Do đó tứ giác MKOH là hình chữ nhật.

Suy ra OH = $|x_0| = x_0$; MH = OK = $|y_0| = y_0$.

Ta có OM = 1 (bán kính đường tròn đơn vị).

Xét ΔMHO vuông tại H, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{y_0}{1} = y_0.$$

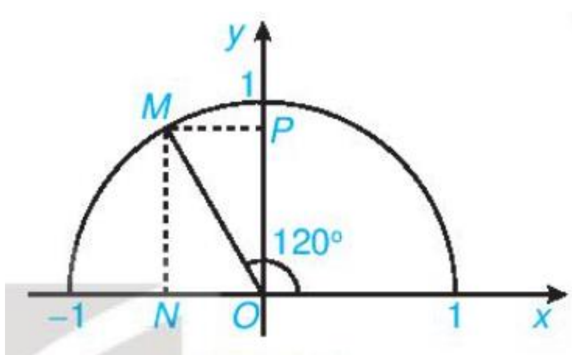
Hay sin α = y_0.

Ta lại có: $\cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{x_0}{1} = x_0$.

Hay cos α = x_0.

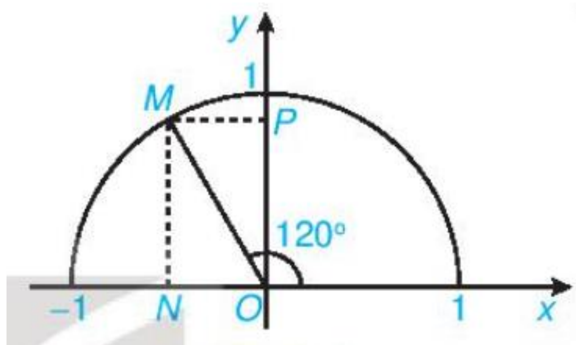
Vậy cos α là hoành độ của điểm M và sin α là tung độ của điểm M.

Luyện tập 1 trang 35 SGK Toán 10 tập 1: Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° (H.3.4).



Hình 3.4

Lời giải:



Hình 3.4

Điểm M nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $xOM = 120^o$.

Hai điểm N, P tương ứng là hình chiếu vuông của M lên hai trục Ox, Oy.

Ta có: OM = 1 (bán kính đường tròn đơn vị).

Ta có $xOM + NOM = 180^o$.

$NOM = 180^o - xOM = 180^o - 120^o = 60^o$.

Xét tam giác vuông MON, có:

+ $\sin MON = \dfrac{MN}{OM} = \dfrac{MN}{1} = MN$

$\Rightarrow MN = OP = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

+ $\cos MON = \dfrac{ON}{OM} = \dfrac{ON}{1} = ON$

$\Rightarrow ON = \cos 60^o = \dfrac{1}{2}$.

Ta có điểm M nằm bên trái trục Oy (vì $xOM = 120^o$ là góc tù).

Suy ra điểm M có tọa độ là $M\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Do đó theo định nghĩa ta có: $\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra

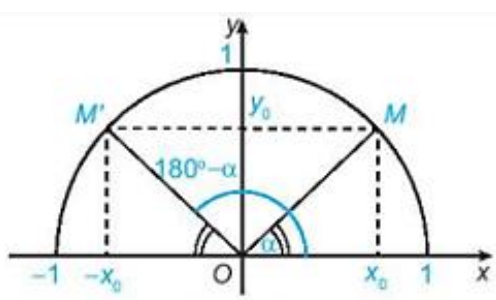
+ $\tan 120^o = \dfrac{\sin 120^o}{\cos 120^o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}.(-2) = -\sqrt{3}$.

+ $\cot 120^o = \dfrac{\cos 120^o}{\sin 120^o} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) : \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \left(-\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hoạt động 2 trang 36 SGK Toán 10 tập 1: Nêu nhận xét về vị trí của hai điểm M và M’ đối với trục Oy. Từ đó nêu các mối quan hệ giữa sin α và sin (180^o – α), giữa cos α và cos (180^o – α).



Lời giải:

Hai điểm M và M’ đối xứng với nhau qua trục Oy.

Tọa độ của hai điểm M và M’ là: $M(x_0; y_0)$, $M'(-x_0; y_0)$.

Ta có: $xOM = \alpha$, $xOM' = 180^o - \alpha$.

Khi đó:

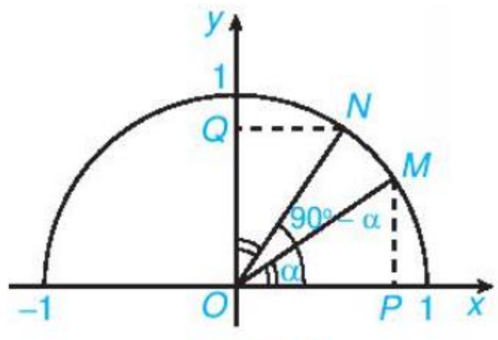
· $\sin \alpha = y_0$, $\cos \alpha = x_0$.

· $\sin (180^o – \alpha) = y_0$, $\cos (180^o – \alpha) = –x_0$ hay $x_0 = – \cos (180^o – \alpha)$.

Do đó: $\sin \alpha = \sin (180^o – \alpha)$ (= y_0), $\cos \alpha = – \cos (180^o – \alpha)$ (= x_0).

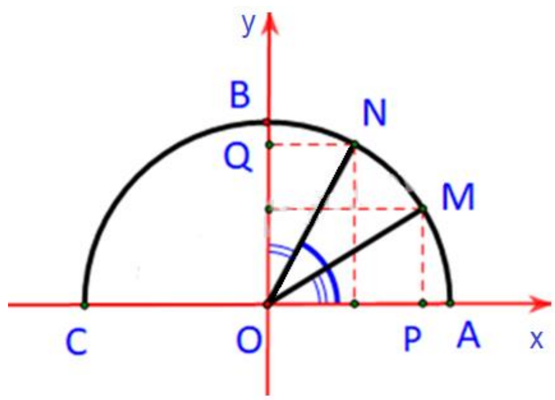
Vậy $\sin \alpha = \sin (180^o – \alpha)$, $\cos \alpha = – \cos (180^o – \alpha)$.

Luyện tập 2 trang 36 SGK Toán 10 tập 1: Trong Hình 3.6 hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và 90° – α $\left(\widehat{xOM} = \alpha, \widehat{xON} = 90^o - \alpha\right)$. Chứng minh rằng ΔMOP = ΔNOQ. Từ đó nêu mối quan hệ giữa cos α và sin (90° – α).



Hình 3.6

Lời giải:



Ta có: $\alpha = \widehat{AOM}; 90^o - \alpha = \widehat{AON}$.

Dễ thấy: $\widehat{AON} = 90^o - \alpha = 90^o - \widehat{NOB} \Rightarrow \alpha = \widehat{NOB}$.

Xét ΔNOQ và ΔMOP có:

$MPO = NQO = 90^o$

OM = ON = 1 (bán kính đường tròn đơn vị).

$POM = QON \;\left(AOM = NOB = \alpha\right)$.

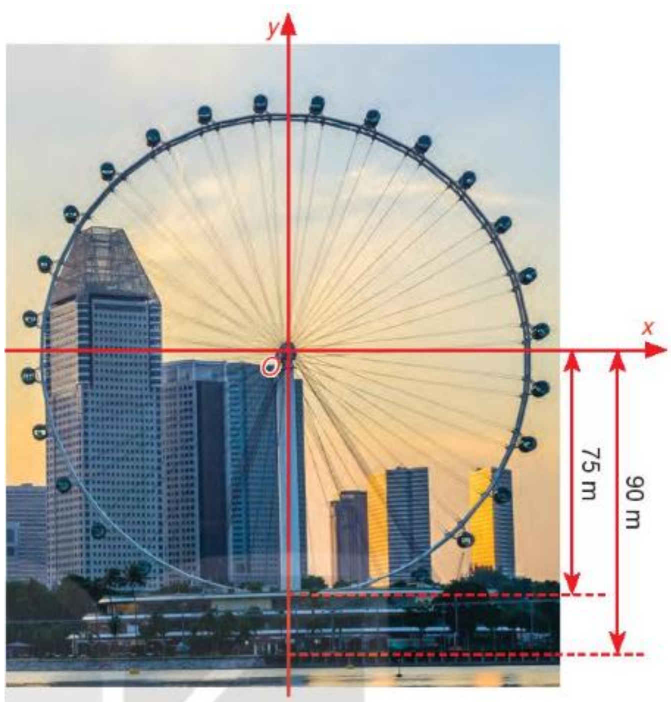
Do đó ΔNOQ = ΔMOP (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra OP = OQ (hai cạnh tương ứng)

Ta có: OP = cos α, OQ = sin (90° – α).

Do đó: cos α = sin (90° − α).

Vận dụng trang 37 SGK Toán 10 tập 1: Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?

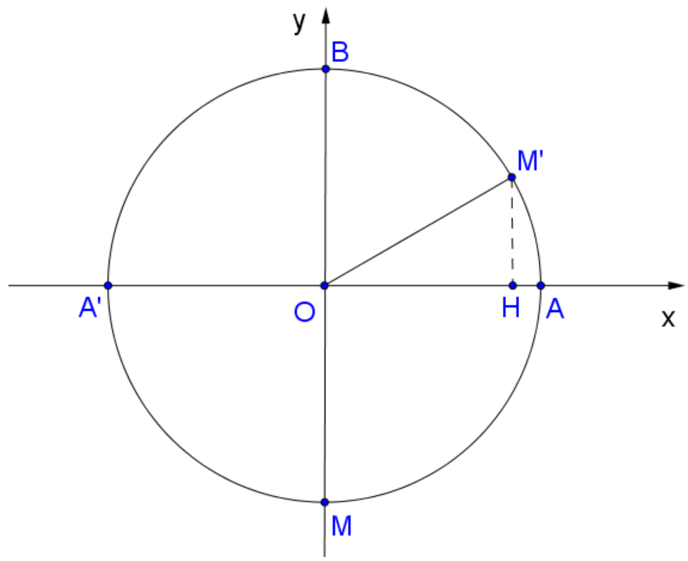


Hình 3.7

Lời giải:

Giả sử chiếc đu quay quay theo chiều kim đồng hồ.

Gọi M là vị trí thấp nhất của cabin, M’ là vị trí của cabin sau 20 phút và các điểm A, A’, B, H (như hình vẽ).



Vì đi cả vòng quay mất 30 phút nên sau 20 phút, cabin sẽ đi quãng đường bằng $\frac{2}{3}$ chu vi đường tròn.

Sau 15 phút, cabin di chuyển từ điểm M đến điểm B, đi được $\frac{1}{2}$ chu vi đường tròn.

Trong 5 phút tiếp theo, cabin đi chuyển từ điểm B đến điểm M’ tương ứng $\frac{1}{6}$ chu vi đường tròn hay $\frac{1}{3}$ cung tròn $A'A$.

Do đó: $BOM' = \frac{1}{3}.180^o = 60^o$

$\Rightarrow AOM' = 90^o - 60^o = 30^o$

Ta có $M'H = \sin 30^o.OM' = \frac{1}{2}.75 = 37,5$ (m).

Do đó, độ cao của người đó là:

37,5 + 90 = 127,5 (m).

Vậy sau 20 phút quay người đó ở độ cao 127,5 m.

Bài 3.1 trang 37 SGK Toán 10 tập 1: Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^o + \cos 135^o - 3\tan 150^o) \,.\, (\cos 180^o - \cot 60^o)$;

b) $\sin^2 90^o + \cos^2 120^o + \cos^2 0^o - \tan^2 60^o + \cot^2 135^o$;

c) $\cos 60^o \,.\, \sin 30^o + \cos^2 30^o$.

Chú ý: $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$, $\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$, $\cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$.

Lời giải:

a) Đặt $A = (2\sin 30^o + \cos 135^o - 3\tan 150^o) \,.\, (\cos 180^o - \cot 60^o)$.

Ta có: $\cos 135^o = -\cos 45^o$; $\cos 180^o = -\cos 0^o$; $\tan 150^o = -\tan 30^o$; $\cot 60° = \tan 30°$.

$\Rightarrow A = (2\sin 30^o - \cos 45^o + 3\tan 30^o) \,.\, (-\cos 0^o - \tan 30^o)$.

Sử dụng bảng lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$\sin 30^o = \frac{1}{2}$; $\tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 0^o = 1$$\cancel{;\ \cot 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Do đó $A = \left(2.\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right).\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= -\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right).\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= -\frac{2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

$$= -\frac{\left(2-\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right).\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$$

$$= -\frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}+6\sqrt{3}+6}{6}$$

$$= -\frac{12+8\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}.$$

b) Đặt B = $\sin^2 90^o + \cos^2 120^o + \cos^2 0^o - \tan^2 60^o + \cot^2 135^o$.

Ta có: $\cos 120^o = -\cos 60^o$; $\cot 135^o = -\cot 45^o$

$\Rightarrow \cos^2 120^o = \cos^2 60^o$; $\cot^2 135^o = \cot^2 45^o$

Khi đó B = $\sin^2 90^o + \cos^2 60^o + \cos^2 0^o - \tan^2 60^o + \cot^2 45^o$.

Sử dụng bảng lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$\cos 0^o = 1$; $\cot 45^o = 1$; $\cos 60^o = \frac{1}{2}$; $\tan 60^o = \sqrt{3}$; $\sin 90^o = 1$.

Do đó $B = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$

$$= 1 + \frac{1}{4} + 1 - 3 + 1 = \frac{1}{4}.$$

c) Đặt C = $\cos 60^o . \sin 30^o + \cos^2 30^o$

Sử dụng bảng lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$\sin 30^o = \frac{1}{2}$; $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^o = \frac{1}{2}$.

Do đó $C = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

Bài 3.2 trang 37 SGK Toán 10 tập 1: Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^o + \sin 80^o + \cos 16^o + \cos 164^o$;

b) $2\sin (180^o – \alpha) . \cot \alpha – \cos (180^o – \alpha) . \tan \alpha . \cot (180^o – \alpha)$ với $0^o < \alpha < 90^o$.

Lời giải:

a) Ta có: $\sin 100^o = \sin (180^o – 100^o) = \sin 80^o$;

$\cos 164^o = \cos (180^o – 16^o) = – \cos 16^o$.

Do đó $\sin 100^o + \sin 80^o + \cos 16^o + \cos 164^o$

$= \sin 80^o + \sin 80^o + \cos 16^o – \cos 16^o$

$= 2\sin 80^o$.

b) Với $0^o < \alpha < 90^o$, ta có:

$\sin (180^o – \alpha) = \sin \alpha$; $\cos (180^o – \alpha) = – \cos \alpha$;

$\tan (180^o – \alpha) = – \tan \alpha$; $\cot (180^o – \alpha) = – \cot \alpha$.

Khi đó,

$2\sin (180^o – \alpha) . \cot \alpha – \cos (180^o – \alpha) . \tan \alpha . \cot (180^o – \alpha)$

$= 2\sin \alpha . \cot \alpha – (– \cos \alpha) . \tan \alpha . (– \cot \alpha)$

$= 2\sin \alpha . \cot \alpha – \cos \alpha . \tan \alpha . \cot \alpha$

$= 2\sin \alpha . \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} – \cos \alpha . \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$= 2\cos \alpha – \cos \alpha = \cos \alpha$.

Bài 3.3 trang 37 SGK Toán 10 tập 1: Chứng minh các hệ thức sau:

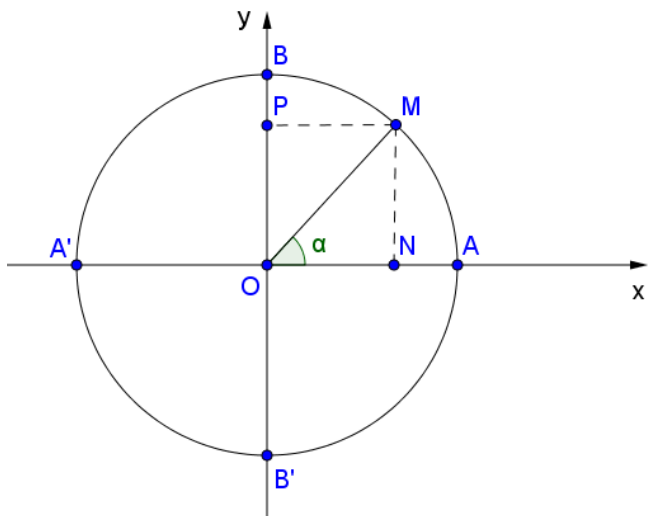
a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$;

c) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$ $(0^o < \alpha < 180^o)$.

Lời giải:

a)



Gọi M(x; y) là điểm trên đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.

Ta có: OM = 1 (bán kính đường tròn đơn vị).

Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Ta có: $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \cos^2 \alpha \\ y^2 = \sin^2 \alpha \end{cases}$ (1)

Mà $\begin{cases} |x| = ON \\ |y| = OP = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = |x|^2 = ON^2 \\ y^2 = |y|^2 = MN^2 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ON^2 + MN^2 = OM^2 = 1$ (do ΔOMN vuông tại N).

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (đpcm).

b) Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$

$1 + \tan^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Mà theo câu a) ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi góc α.

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (đpcm)

c) Ta có: $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(0^o < \alpha < 180^o)$

$1 + \cot^2\alpha = 1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Mà theo câu a) ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi góc α.

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (đpcm).

Bài 3.4 trang 37 SGK Toán 10 tập 1: Cho góc α $(0^o < \alpha < 180^o)$ thỏa mãn $\tan \alpha = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

Lời giải:

Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 3^2 = 10$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Vì $0^o < \alpha < 180^o$ nên $\sin\alpha > 0$.

Mà $\tan\alpha = 3 > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $\sin\alpha = \cos\alpha \,.\, \tan\alpha = 3.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Do đó $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{2.\frac{3\sqrt{10}}{10} - 3.\frac{\sqrt{10}}{10}}{3.\frac{3\sqrt{10}}{10} + 2.\frac{\sqrt{10}}{10}}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}(2.3-3)}{\frac{\sqrt{10}}{10}(3.3+2)} = \frac{3}{11}.$$

Vậy với α ($0^o < \alpha < 180^o$) thỏa mãn $\tan\alpha = 3$ thì $P = \frac{3}{11}$.