

Quy tắc trung điểm, trọng tâm, quy tắc hình bình hành

A. Lí thuyết tóm tắt.

- Quy tắc trung điểm: Với I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad (M \text{ tùy ý})$$

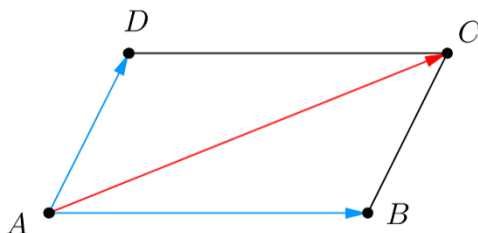
$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

- Quy tắc trọng tâm: Với G là trọng tâm tam giác ABC thì ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad (M \text{ tùy ý})$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



B. Các công thức.

- Quy tắc trung điểm: I là trung điểm của AB

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad (M \text{ tùy ý})$$

- Quy tắc trọng tâm: G là trọng tâm tam giác ABC

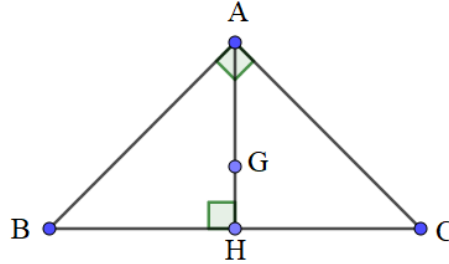
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad (M \text{ tùy ý})$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

- Quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành)

C. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Có đường cao AH , G là trọng tâm của tam giác ABC , biết $AB = AC = a$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.



Giải:

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta áp dụng quy tắc trọng tâm có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\vec{0}| = 0$$

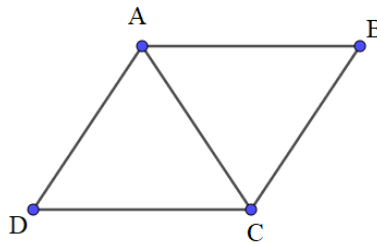
Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến.

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BC .

Áp dụng quy tắc trung điểm cho đoạn BC ta có: $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}| = |\vec{0}| = 0$$

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AC = 2a$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Giải:

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta áp dụng quy tắc hình bình hành có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a$$

Bài 3. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có E là trung điểm của AB , F là trọng tâm của tam giác ABC , điểm M nằm ngoài AB và khác C . Biết $ME = a$ và $MF = 2a$. Tính độ dài các vector sau: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Giải:

Vì E là trung điểm của AB nên ta áp dụng quy tắc trung điểm có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{ME}| = 2.a = 2a$$

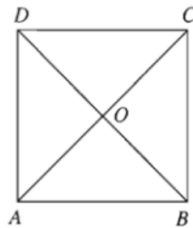
Vì F là trọng tâm của tam giác ABC nên ta áp dụng quy tắc trọng tâm có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MF}$$

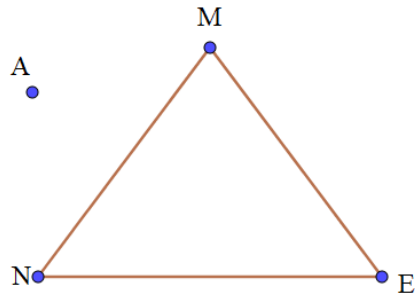
$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MF}| = 3.2a = 6a$$

D. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Tính độ dài các vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.



Bài 2: Cho tam giác đều MNE . Biết G là trọng tâm của tam giác MNE , điểm A tùy ý nằm ngoài tam giác MNE và $AG = 2a$. Tính độ dài các vector $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GE}$ và $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$.



Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Biết $OA = a$. Chứng minh rằng $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2a$.

