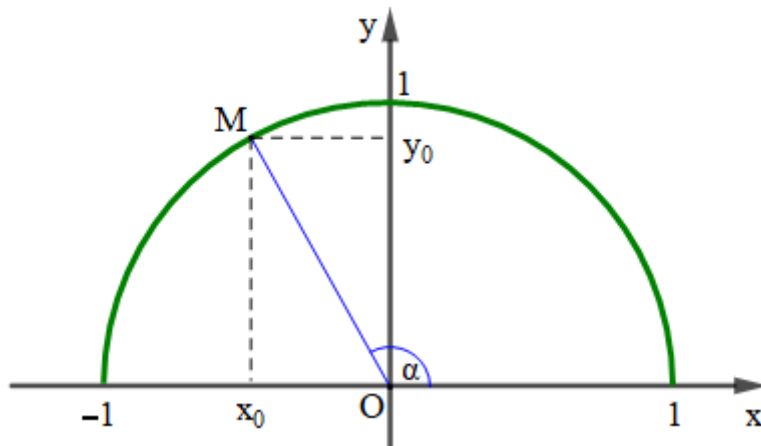


Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α bất kì với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta có định nghĩa sau đây:



Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, ta có:

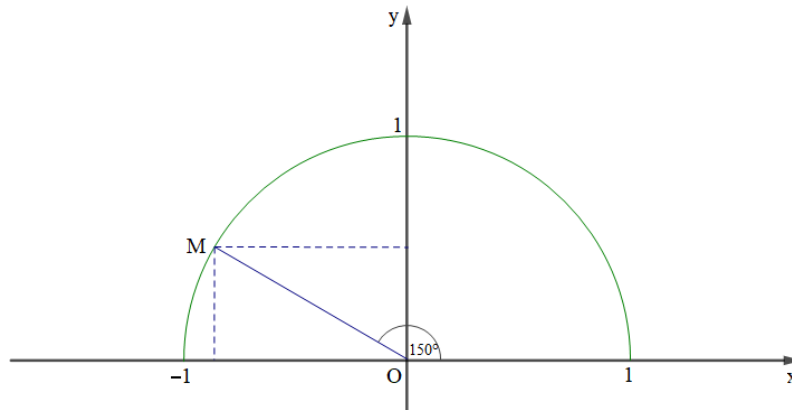
- Tung độ y_0 của M là sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M là cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha = x_0$;
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α .

Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 150° .

Hướng dẫn giải

Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = 150^\circ$.



Ta có: $MOy = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$.

Khi đó ta tính được toạ độ của điểm M là $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Theo định nghĩa ta có:

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cot 150^\circ = -\sqrt{3}.$$

Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.

Nếu α là góc tù thì $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

b) $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.

$\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

Ví dụ 2. Với $\alpha = 30^\circ$ thì $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha > 0$ và $\cot \alpha > 0$.

Với $\alpha = 150^\circ$ (như trong **Ví dụ 1**) thì $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$ và $\cot \alpha < 0$.

2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Với mọi góc α thoả mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta luôn có:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha \ (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Ví dụ 3.

a) Biết $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos 30^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\sin 120^\circ$.

b) Biết $\tan 45^\circ = 1$. Tính $\tan 135^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra:

$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } 30^\circ \text{ và } 60^\circ \text{ là hai góc phụ nhau);}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } 150^\circ \text{ và } 30^\circ \text{ là hai góc bù nhau);}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } 120^\circ \text{ và } 60^\circ \text{ là hai góc bù nhau);}$$

b) Ta có: $\tan 45^\circ = 1$.

Suy ra:

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \text{ (vì } 135^\circ \text{ và } 45^\circ \text{ là hai góc bù nhau);}$$

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
----------	-----------	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Giá trị lượng giác									
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel

Chú ý: Trong bảng, kí hiệu “ \parallel ” để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Ví dụ 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \cdot \sin 90^\circ + b^2 \cdot \cos 90^\circ + c^2 \cdot \cos 180^\circ$;

b) $B = 3 - \sin^2 135^\circ + 2\cos^2 120^\circ - 3\tan^2 150^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) $A = a^2 \cdot \sin 90^\circ + b^2 \cdot \cos 90^\circ + c^2 \cdot \cos 180^\circ$

$$A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1)$$

$$A = a^2 - c^2.$$

b) $B = 3 - \sin^2 135^\circ + 2\cos^2 120^\circ - 3\tan^2 150^\circ$

$$B = 3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$B = 3 - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$B = 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$B = 2.$$

Ví dụ 5. Tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$

b) $\cos \alpha = -1;$

c) $\tan \alpha = 0;$

d) $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ hoặc $\alpha = 135^\circ.$

b) $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ.$

c) $\tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$ hoặc $\alpha = 180^\circ.$

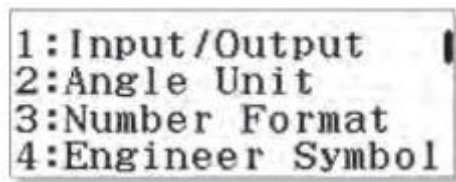
d) $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 120^\circ.$

4. Sử dụng máy tính cầm tay về tính giá trị lượng giác của một góc

Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tính nhanh chóng giá trị lượng giác của một góc.

Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím SHIFT MENU để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

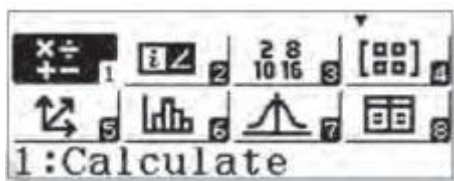


Ấn phím **2** để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



Ấn tiếp phím **1** để xác định đơn vị đo góc là “độ”.

Ấn các phím **MENU** **1** để vào chế độ tính toán như hình ảnh dưới đây:



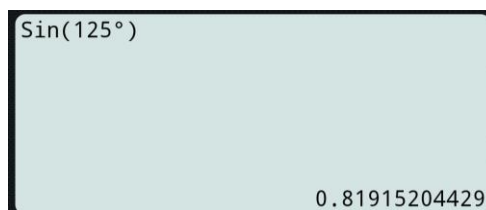
4.1. Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 6. Sử dụng máy tính cầm tay, tính $\sin 125^\circ$, $\cos 50^\circ 12'$, $\tan 160^\circ 56' 25''$, $\cot 100^\circ$.

Hướng dẫn giải

- Để tính $\sin 125^\circ$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây: **sin** **1** **2** **5** **° ' "** **)** **=**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

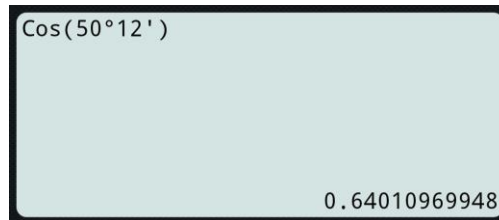


Vậy $\sin 125^\circ \approx 0,81915204429$.

- Để tính $\cos 50^\circ 12'$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\cos} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{1} \boxed{2} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Cos(50°12')

0.64010969948

Vậy $\cos 50^\circ 12' \approx 0,64010969948$.

- Để tính $\tan 160^\circ 56' 25''$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{5} \boxed{6} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{2} \boxed{5} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Tan(160°56'25'')

-0.34549396426

Vậy $\tan 160^\circ 56' 25'' \approx -0,345493396426$.

- Để tính $\cot 100^\circ$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



$\frac{1}{\tan(100^\circ)}$

-0.17632698071

Vậy $\cot 100^\circ \approx -0,17632698071$.

4.2. Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

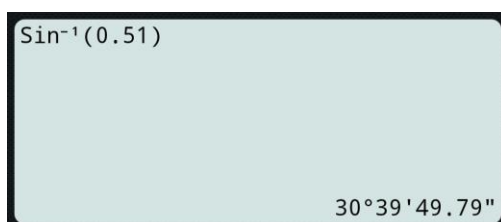
Ví dụ 7. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) biết $\sin \alpha = 0,51$; $\cos \alpha = -0,7$; $\tan \alpha = \sqrt{2}$; $\cot \alpha = 1,7$.

Hướng dẫn giải

- Để tìm α khi biết $\sin \alpha = 0,51$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] **[sin]** **[0]** **[.]** **[5]** **[1]** **)] [=]** **[° ' "]**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\sin \alpha = 0,51$ thì $\alpha \approx 30^\circ 39' 50''$.

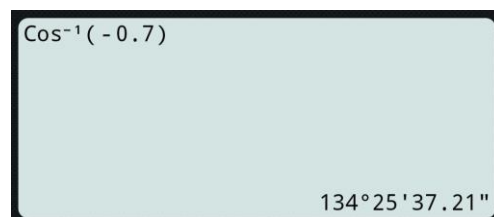
Ta đã được học với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ nên ngoài giá trị $\alpha \approx 30^\circ 39' 50''$ thì ta còn có giá trị $\alpha \approx 180^\circ - 30^\circ 39' 50'' \approx 149^\circ 20' 10''$.

Ta bấm máy tính như sau: **[1]** **[8]** **[0]** **[° ' "]** **[-]** **[3]** **[0]** **[° ' "]** **[3]** **[9]** **[° ' "]** **[5]** **[0]** **[° ' "]** **[=]**

- Để tìm α khi biết $\cos \alpha = -0,7$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] **[cos]** **[-]** **[0]** **[.]** **[7]** **)] [=]** **[° ' "]**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\cos \alpha = -0,7$ thì $\alpha \approx 134^\circ 25' 37''$.

- Để tìm α khi biết $\tan \alpha = \sqrt{2}$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

SHIFT **tan** **$\sqrt{}$** **2** **\triangleright** **)** **=** **$^{\circ}'''$**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

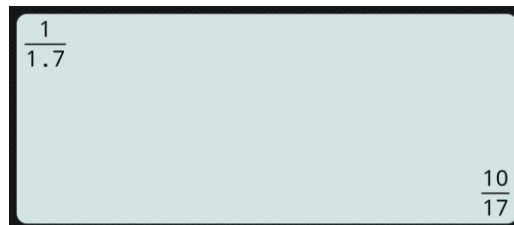


Vậy với $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì $\alpha \approx 54^{\circ}44'8''$.

- Để tìm α khi biết $\cot \alpha = 1,7$, trước hết ta tính $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

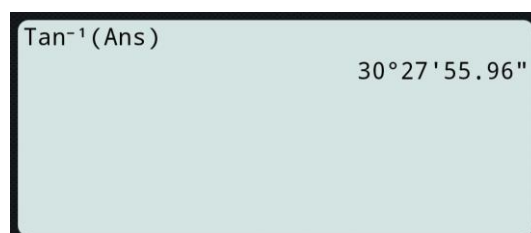
1 **$\frac{\Box}{\Box}$** **1** **.** **7** **=**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Sau đó ta bấm liên tiếp các phím: **SHIFT** **tan** **Ans** **)** **=** **$^{\circ}'''$**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\cot \alpha = 1,7$ thì $\alpha \approx 30^\circ 27' 56''$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \cos 120^\circ \cdot \tan 135^\circ \cdot \cot 150^\circ$.

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$;

c) $C = \sin(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x) + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2(90^\circ - x)} - \tan^2 x$.

Hướng dẫn giải

a) $A = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \cos 120^\circ \cdot \tan 135^\circ \cdot \cot 150^\circ$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (-\sqrt{3})$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{6} + 4\sqrt{3}}{8}$$

b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

$$B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$$

$$B = (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) \quad (\text{hai góc bù nhau})$$

$$B = 0.$$

c) $C = \sin(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x) + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2(90^\circ - x)} - \tan^2 x$.

$$C = \sin x - \sin x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$$

$$C = 0 + \tan^2 x - \tan^2 x$$

$$C = 0.$$

Bài 2. Cho góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) với $\tan \alpha = -\sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức:

$$M = \cos \alpha + \cot^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Hướng dẫn giải

Với $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ ta có $\alpha = 120^\circ$.

$$\text{Suy ra: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó:

$$M = \cos \alpha + \cot^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$M = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$M = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}$$

$$M = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = -\frac{3}{2}.$$

Bài 3.

a) Chứng minh rằng với mọi góc $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta luôn có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

b) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

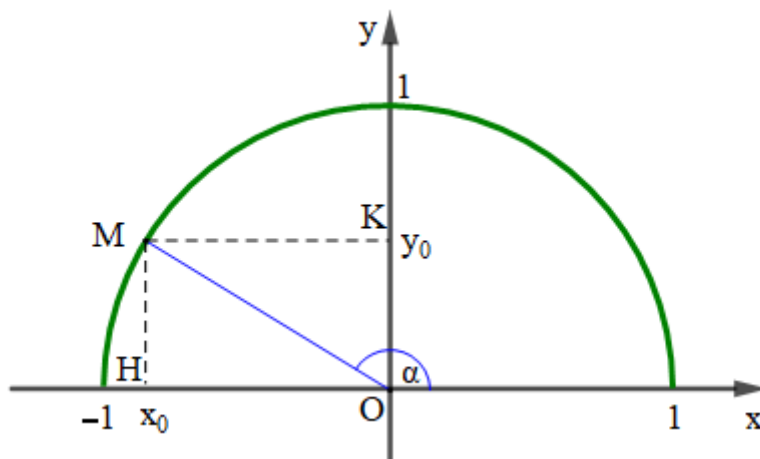
$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2.$$

Hướng dẫn giải

a) Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm M, ta có:

- Tung độ y_0 của M là sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M là cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha = x_0$;

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy.



Khi đó ta có: $OH = x_0 = \cos \alpha$, $MH = OK = y_0 = \sin \alpha$, $OM = 1$.

Tam giác OMH vuông tại H, áp dụng định lí Pythagore ta có:

$$MH^2 + OH^2 = OM^2$$

$$\text{Hay } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Vậy } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

b) Vì $A + B + C = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác) nên: $A + C = 180^\circ - B$.

$$\text{Suy ra } \frac{A+C}{2} = \frac{180^\circ - B}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) + \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \frac{\sin B}{\cos B} \\ &= 1 + 1 \quad (\text{do } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ theo câu a}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2.$$

Bài 4. Sử dụng máy tính cầm tay để thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính $\sin 95^\circ 7' 16''$, $\cos 22^\circ 12' 21''$, $\tan 27^\circ 22'$, $\cot 24^\circ$.

b) Tìm β biết ($0^\circ < \beta < 180^\circ$) trong các trường hợp:

i) $\cos\beta = -0,19$;

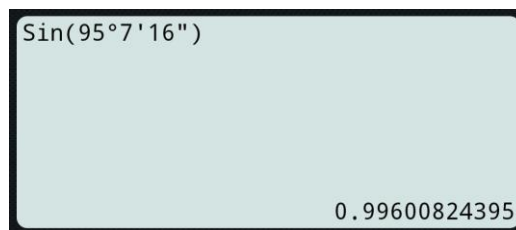
ii) $\tan\beta = 1,2$.

Hướng dẫn giải

a) - Để tính $\sin 95^\circ 7' 16''$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\sin} \boxed{9} \boxed{5} \boxed{^\circ} \boxed{'} \boxed{16} \boxed{''} \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

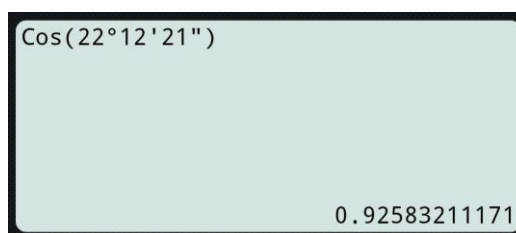


Vậy $\sin 95^\circ 7' 16'' \approx 0,99600824395$.

- Để tính $\cos 22^\circ 12' 21''$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\cos} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{^\circ} \boxed{'} \boxed{12} \boxed{''} \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

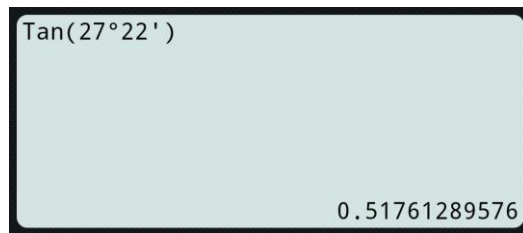


Vậy $\cos 22^\circ 12' 21'' \approx 0,92583211171$.

- Để tính $\tan 27^\circ 22'$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

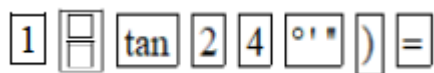
$\boxed{\tan} \boxed{2} \boxed{7} \boxed{^\circ} \boxed{'} \boxed{22} \boxed{''} \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy $\tan 27^\circ 22' \approx 0,51761289576$.

- Để tính $\cot 24^\circ$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

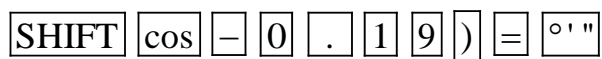


Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

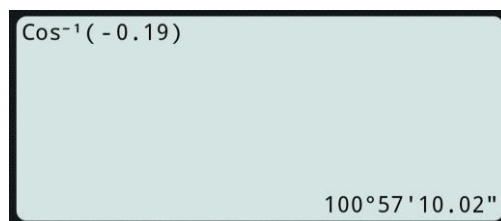


Vậy $\cot 24^\circ \approx 2,2460367739$.

b) - Để tìm β khi biết $\cos \beta = -0,19$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

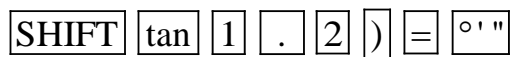


Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:

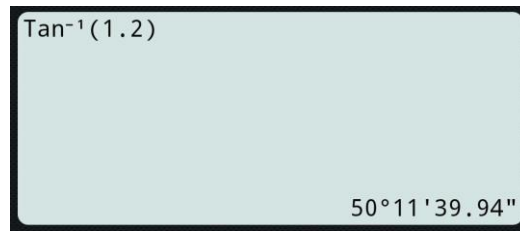


Vậy với $\cos \beta = -0,19$ thì $\beta \approx 100^\circ 57' 10''$.

- Để tìm β khi biết $\tan \beta = 1,2$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:



Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\tan\beta = 1,2$ thì $\beta \approx 50^{\circ}11'40''$.