

Bài tập Cấp số cộng - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hai cấp số cộng (u_n) : 4, 7, 10, 13, 16, ... và (v_n) : 1, 6, 11, 16, 21, ... Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số cộng, có bao nhiêu số hạng chung?

A. 10

B. 20

C. 30

D. 40

Lời giải:

Ta có:

$$u_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1, 1 \leq n \leq 100$$

$$v_k = 1 + (k - 1) \cdot 5 = 5k - 4, 1 \leq k \leq 100$$

Để một số là số hạng chung của hai cấp số cộng

Ta phải có:

$$3n + 1 = 5k - 4 \Leftrightarrow 3n = 5(k - 1) \Rightarrow n: 5 \text{ tức là } n = 5t.$$

Khi đó:

$$3 \cdot 5t = 5(k - 1) \text{ hay } 3t = k - 1$$

$$\text{Nên } k = 1 + 3t, t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } 1 \leq n \leq 100 \text{ nên } 1 \leq t \leq 20.$$

$$\text{Mà } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$$

Ứng với 20 giá trị của t cho 20 giá trị của n và 20 giá trị của k .

Vậy có 20 số hạng chung của hai dãy

Chọn đáp án B

Bài 2: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}.$$

a. Tính số hạng thứ 100 của cấp số ;

A. - 243

B. - 295

C. - 231

D. - 294

b. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số ;

A. - 244

B. - 274

C. - 253

D. - 285

Lời giải:

Từ giả thiết bài toán, ta có:

$$\begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 9d = -21 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}.$$

a. Số hạng thứ 100 của cấp số:

$$u_{100} = u_1 + 99d = 2 + 99 \cdot (-3) = -295$$

Chọn đáp án B

b. Tổng của 15 số hạng đầu:

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2u_1 + 14d] = -285$$

Chọn đáp án D

Bài 3: Ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29. Tìm số hạng đầu tiên

A. -3 hoặc -6

B. -4 hoặc -2

C. -1 hoặc -5

D. -4 hoặc -7

Lời giải:

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $a - 2x$; a ; $a + 2x$ với công sai $d = 2x$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} a - 2x + a + a + 2x = -9 \\ (a - 2x)^2 + a^2 + (a + 2x)^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -9 \\ 3a^2 + 8x^2 = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 8x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = a - 2x = -3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -4$$

$$* \text{ với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = a - 2x = -3 - 2 \cdot \frac{-1}{2} = -2$$

Vậy số hạng đầu tiên là -4 hoặc -2

Chọn đáp án B

Bài 4: Cho tam giác ABC biết 3 góc của tam giác lập thành một cấp số cộng và có góc nhỏ nhất bằng 25° . Tìm 2 góc còn lại?

A. 65° ; 90° .

B. 75° ; 80° .

C. 60° ; 95° .

D. 55° ; 100° .

Lời giải:

Gọi số đo ba góc ba góc lập thành cấp số cộng là:

25 ; $25 + d$; $25 + 2d$ có công sai d .

Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° nên:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 180 \Leftrightarrow 25 + 25 + d + 25 + 2d = 180$$

$$\Leftrightarrow 3d = 105 \Leftrightarrow d = 35$$

Vậy $u_2 = 25 + 35 = 60$; $u_3 = 25 + 2 \cdot 35 = 95$.

Chọn đáp án C

Bài 5: Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc$.

B. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

C. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$.

D. $a^2 - c^2 = ab - bc$.

Lời giải:

Đề 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng

Khi và chỉ khi:

$$b - a = c - b \Leftrightarrow (b - a)^2 = (c - b)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2ab + a^2 = c^2 - 2bc + b^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$$

Chọn đáp án B

Bài 6: Tìm x để 3 số : $1 - x$; x^2 ; $x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của x .

B. $x = \pm 2$.

C. $x = \pm 1$.

D. $x = 0$

Lời giải:

Ba số:

$1 - x; x^2; x + 1$

Lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$x^2 = 2.(1 - x + x + 1) \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Chọn đáp án B

Bài 7: Dãy số (u_n) có phải là cấp số cộng không? Nếu phải hãy xác định số công sai d , biết rằng

a. $u_n = 2n + 3$

A. $d = -2$

B. $d = 3$

C. $d = 5$

D. $d = 2$

b. $u_n = -3n + 1$

A. $d = -2$

B. $d = 3$

C. $d = -3$

D. $d = 1$

c. $u_n = n^2 + 1$

A. $d = \emptyset$

B. $d = 3$

C. $d = -3$

D. $d = 1$

d. $u_n = 2n$

A. $d = \emptyset$

B. $d = 12$

C. $d = -3$

D. $d = 1$

Lời giải:

a. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2$$

là hằng số

Suy ra dãy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=2$.

Chọn D

b. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1) = -3$$

là hằng số

Suy ra dãy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=-3$.

Chọn C

c. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$$

phụ thuộc vào n .

Suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

d. Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}$$

phụ thuộc vào n

Vậy dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

Bài 8: Cho cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu bằng 3 số hạng cuối bằng 24.

Tính tổng các số hạng này

A. 105

B. 27

C. 108

D. 111

Lời giải:

Ta có: $u_1 = 3; u_8 = 24, n = 8$.

$$S_8 = \frac{8}{2}(3+24) = 108$$

Chọn đáp án C

Bài 9: Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3$; $u_6 = 27$. Tìm d ?

A. $d = 5$

B. $d = 7$

C. $d = 6$

D. $d = 8$

Lời giải:

Ta có:

$$u_6 = 27 \Leftrightarrow u_1 + 5d = 27$$

$$\Leftrightarrow -3 + 5d = 27 \Leftrightarrow 5d = 30 \Leftrightarrow d = 6$$

Chọn đáp án C

Bài 10: Cho 4 số lập thành cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22. Tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tổng các lập phương của chúng bằng :

A. 22

B. 166

C. 1752

D. 1408

Lời giải:

Gọi 4 số lập thành cấp số cộng là u_1, u_2, u_3, u_4

Và công sai là d

Ta có:

$$u_2 = u_1 + d; \quad u_3 = u_1 + 2d; \quad u_4 = u_1 + 3d$$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 22 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 22 \\ 4u_1^2 + 12u_1d + 14d^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 11 & (1) \\ 2u_1^2 + 6u_1d + 7d^2 = 83 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $u_1 = \frac{11-3d}{2}$ thế vào (2) ta được:

$$2 \cdot \left(\frac{11-3d}{2} \right)^2 + 6 \cdot \frac{11-3d}{2} \cdot d + 7d^2 = 83$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \Rightarrow u_1 = 1 \\ d = -3 \Rightarrow u_1 = 10 \end{cases}$$

Vậy 4 số đó là 1, 4, 7, 10 hoặc 10, 7, 4, 1

Tổng các lập phương của chúng:

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 = 1408$$

Chọn đáp án D

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0,1$; $d = 0,1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là:

Lời giải:

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là:

$$u_n = u_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow u_7 = -0,1 + (7-1) \cdot 0,1 = 0,5$$

Bài 2: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa:
$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

a. Xác định công thức tổng quát của cấp số

b. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + \dots + u_{2011}$.

Lời giải:

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có:

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

a. Ta có công sai $d = 3$ và số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 3n - 2.$$

b. Ta có các số hạng $u_1, u_4, u_7, \dots, u_{2011}$

Lập thành một cấp số cộng gồm 670 số hạng

Với công sai $d' = 3d$

Nên ta có:

$$S = \frac{670}{2}(2u_1 + 669d') = 673015$$

Bài 3: Cho dãy số (u_n) có $d = -2$; $S_8 = 72$. Tính u_1 ?

Lời giải:

Ta có: $S_8 = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$

$$\Rightarrow 72 = \frac{8}{2} \cdot [2u_1 + (8-1) \cdot (-2)]$$

$$\Leftrightarrow 72 = 4 \cdot (2u_1 - 14)$$

$$\Leftrightarrow 18 = 2u_1 - 14 \Leftrightarrow 2u_1 = 32$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 16$$

Bài 4: Cho dãy số (u_n) có $u_1 = -1$; $d = 2$; $S_n = 483$ Tính số các số hạng của cấp số cộng?

Lời giải:

Ta có: $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

$$\Leftrightarrow 2.483 = n[2 \cdot (-1) + (n-1) \cdot 2]$$

$$\Leftrightarrow 966 = n(2n - 4)$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 966 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23 \\ n = -21 \end{cases}$$

$$\text{Do } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 23.$$

Bài 5: Bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120. Tính tổng của hai số hạng đầu tiên?

Lời giải:

Giả sử bốn số hạng đó là:

$a-3x; a-x; a+x; a+3x$ với công sai là $d=2x$.

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} (a-3x) + (a-x) + (a+x) + (a+3x) = 20 \\ (a-3x)^2 + (a-x)^2 + (a+x)^2 + (a+3x)^2 = 120 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 20 \\ 4a^2 + 20x^2 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là 2; 4; 6; 8.

Tổng của 2 số hạng đầu tiên là: $2+4=6$.

Bài 6: Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

Lời giải:

Đề a; b; c theo thứ tự lập thành cấp số cộng

Khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} b-a &= c-b \Leftrightarrow (b-a)^2 = (c-b)^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - 2ab + a^2 &= c^2 - 2bc + b^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2ab - 2bc \\ \Leftrightarrow a^2 + c^2 &= 2c^2 + 2ab - 2bc = 2ab + 2c(c-b) \\ &= 2ab + 2c(b-a) = 2ab + 2bc - 2ac \end{aligned}$$

Bài 7: Tìm x biết $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng ;

Lời giải:

Ta có:

$x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 1 - 3x = 2(x - 2) \Rightarrow x^2 + 2 - 3x = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 3$$

Vậy $x = 2; x = 3$ là những giá trị cần tìm.

Bài 8: Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Lời giải:

* Điều cần cần:

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Khi đó: $x_1 + x_3 = 2x_2$,

$$\text{Lại có : } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

Thay vào phương trình ta được:

$$1^3 - 3.1^2 - 9.1 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 11$$

* Điều kiện đủ:

Với $m = 11$ phương trình trở thành :

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 - \sqrt{12}, x_2 = 1, x_3 = 1 + \sqrt{12}$$

Ba nghiệm này lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 11$ là giá trị cần tìm.

Bài 9: Phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Lời giải:

Đặt $t = x^2, t \geq 0$.

Phương trình trở thành:

$$t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

Khi và chỉ khi

PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$t_2 > t_1 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0$$

Khi đó PT (2) có bốn nghiệm là:

$$-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$$

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Theo định lý Viet thì:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1 \cdot 9t_1 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1 = 2(m+1) & (*) \\ 9t_1^2 = 2m+1 & (**) \end{cases}$$

Từ (*) suy ra: $5t_1 = m+1 \Leftrightarrow m = 5t_1 - 1$

Thay vào (**) ta được:

$$9t_1^2 = 2(5t_1 - 1) + 1 \Leftrightarrow 9t_1^2 - 10t_1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{9} \Rightarrow m = -\frac{4}{9} \\ t_1 = 1 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$$

Vậy $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 10: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

Lời giải:

Ba cạnh a, b, c ($a < b < c$) của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu thì:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = 3 \\ a + c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 3b = 3 \\ a + c = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ b = 1 \\ a = 2b - c = 2 - c \end{cases}$$

Ta có:

$$a^2 + b^2 = c^2 \xrightarrow[b=2-c]{b=1} (2-c)^2 + 1 = c^2$$

$$\Leftrightarrow -4c + 5 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 1 \\ c = \frac{5}{4} \end{cases}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

Bài 2 Cho các dãy số (u_n) sau :

1. $u_n = 3n + 1$

2. $u_n = 4 - 5n$

3. $u_n = \frac{2n+3}{5}$

4. $u_n = \frac{n+1}{n}$

Hỏi có bao nhiêu dãy số là cấp số cộng ?

Bài 3 Viết ba số xen giữa các số 2 và 22 để được cấp số cộng có 5 số hạng. Tính tổng của ba số viết xen giữa đó ?

Bài 4 Cho tứ giác ABCD biết 4 góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc A bằng 30° . Tìm công sai d ?

Bài 5 Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

Bài 6 Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 5 - 2n$

b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$

c) $u_n = 3^n$

d) $u_n = \frac{7-3n}{2}$

Bài 7 Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

Bài 8 Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, n, d, u_n, S_n

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền vào chỗ trống thích hợp:

u_i	d	u_n	n	S_n
-2		55	20	
	-4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	-5			-205

Bài 9 Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng 2 gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18cm.

a) Hãy viết công thức để tìm độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Bài 10 Từ giờ đến giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ