Bài tập Phương pháp quy nạp toán học - Dãy số

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải:

* Với n =1 ta có $1^3 + 11.1 = 12$ chia hết cho 6 đúng.
* Giả sử với n = k thì $k^3 + 11k$ chia hết cho 6.
* Ta phải chứng minh
với n =k+1 thì $(k+1)^3 + 11(k+1)$ chia hết cho 6.
Thật vậy ta có :

$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$$

$$= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12 \ (*)$$

Ta có; $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 theo bước 2.
k(k+1) là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2

$$\Rightarrow 3k(k+1) \vdots 6$$

Và 12 hiển nhiên chia hết cho 6.
Từ đó suy ra (*) chia hết cho 6 (đpcm).

Bài 2: Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

A. $u_n = n^2 - 3n + 10$

B. $u_n = 2n$

C. $u_n = 2n$

D. $u_n = n + 2$

Lời giải:

* Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên

Ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2^n \quad \forall n \geq 1 (*)$

* Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh cộng thức $(*)$ đúng.

Với n=1 ; có: $u_1 = 2^1 = 2$ (đúng).

Vậy (*) đúng với n= 1

Giả sử (*) đúng với n= k , có nghĩa ta có:

$u_k = 2^k \quad (2)$

Ta cần chứng minh (*) đúng với n = k+1.

Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2^{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2)

Ta có:

$u_{k+1} = 2u_k = 2.\ 2^k = 2^{k+1}$

Vậy (*) đúng với n = k + 1. Kết luận (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Chọn đáp án B

Bài 3: Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết: $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

A. Dãy số giảm.

B. Dãy số không tăng không giảm

C. Dãy số không đổi.

D. Dãy số tăng

Lời giải:

Ta có:

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{2}{n+2} - \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$

$$= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+2) - 2(n+1)}{(n+1).(n+2)}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Chọn đáp án D

Bài 4: Cho dãy số $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$. Tìm mệnh đề đúng?

A. Dãy số tăng và bị chặn.

B. Dãy số giảm và bị chặn.

C. Dãy số tăng và bị chặn dưới

D. Dãy số giảm và bị chặn trên.

Lời giải:

Công thức u_n được viết lại:

$$u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}$$

Xét hiệu số:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5[5(n+1)+7]}\right) - \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}\right)$$

$$= \frac{24}{5}\left(\frac{1}{5n+7} - \frac{1}{5(n+1)+7}\right) > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy số ($u_n$) là dãy số tăng.

Ta có:

$$0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 > -\frac{24}{5(5n+7)} \geq -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \geq \frac{7}{5} - \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u_n < \frac{7}{5}.$$

Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Kết luận (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

Chọn đáp án A

Bài 5: Xét tính bị chặn của dãy số (un) biết: $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

A. Dãy số bị chặn trên

B. Dãy số bị chặn dưới.

C. Dãy số bị chặn

D. Tất cả sai.

Lời giải:

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Suy ra

$u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

Chọn đáp án C

Bài 6: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát un theo n.

A. $u_n = 100 + 2n$

B. $u_n = 10n + n$

C. $u_n = 100n - n^2$

D. Đáp án khác

Lời giải:

Ta có: $u_1 = 11 = 10 + 1$

$u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 2 = 10^2 + 2$

$u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3 = 10^3 + 3$

Từ đó dự đoán $u_n = 10^n + n$ (1). Chứng minh:

Với n =1 ta có : $u_1 = 10^1 + 1 = 11$ (đúng).

Giả công thức (1) đúng với n = k,

Ta có $u_k = 10^k + k$ (2).

Ta phải chứng minh (1) đúng với n=k+1.

Có nghĩa chứng minh $u_{k+1} = 10^{k+1} + (k+1)$.

Thật vậy :

$u_{k+1} = 10.(10^k + k) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k+1)$

Kết luận :

$u_n = 10^n + n$.

Chọn đáp án B

Bài 7: Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số không đổi.

Lời giải:

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1)$$

Thật vậy: $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+1} > 1$

$\Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$ (đúng $\forall n \geq 1$)

Do đó, $u_n > u_{n+1}$ nên (u_n) là một dãy số giảm.

Chọn đáp án A

Bài 8: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{5^n}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số là dãy hữu hạn

Lời giải:

Ta có:

$u_n = \frac{5^n}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

Xét tỉ số

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{5^n} = \frac{5n^2}{n^2+2n+1}$

$= \frac{n^2+2n+1+4n^2-2n-1}{n^2+2n+1}$

$= 1 + \frac{2n(n-1)+2n^2-1}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n-1 \geq 0 \Rightarrow 2n(n-1) \geq 0;\ 2n^2 - 1 \geq 2.1 - 1 = 1$

$\Rightarrow 2n(n-1) + 2n^2 - 1 > 0 \quad \forall n \in N^*)$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

Chọn đáp án A

Bài 9: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số bị chặn dưới.

B. Dãy số bị chặn trên.

C. Dãy số bị chặn.

D. Không bị chặn

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$

Suy ra

$u_n < \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn

Chọn đáp án C

Bài 10: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (un), biết: $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$

A. Dãy số tăng, bị chặn

B. Dãy số giảm, bị chặn

C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải:

Ta có: $u_n = \dfrac{2(n+1)-13}{3(n+1)-2} = \dfrac{2n-11}{3n+1}$

Xét hiệu:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n-11}{3n+1} - \dfrac{2n-13}{3n-2}$

$= \dfrac{(2n-11).(3n-2)-(2n-13).(3n+1)}{(3n+1)(3n-2)}$

$= \dfrac{6n^2-4n-33n+22-(6n^2+2n-39n-13)}{(3n+1).(3n-2)}$

$= \dfrac{35}{(3n+1)(3n-2)} > 0$

với mọi $n \ge 1$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow u_n < \dfrac{2}{3} \quad \forall n \ge 1$

Suy ra, (u_n) bị chặn trên.

$\forall n \ge 1 : 3n-2 \ge 1 \Rightarrow \dfrac{35}{3(3n-2)} \le \dfrac{35}{3.1} = \dfrac{35}{3}$

$\Rightarrow u_n \ge \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3} = -11$

Nên (u_n) bị chặn dưới.

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Chọn đáp án A

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:

$$1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad (1)$$

Lời giải:

* Với n = 1:

Vế trái của (1) = 1.4 = 4;

Vế phải của (1) = 1. (1+ 1)^2 = 4.

Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1).

Vậy (1) đúng với n = 1.

* Giả sử (1) đúng với n= k.

Có nghĩa là ta có:

$$1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2 \quad (2)$$

Ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1.

Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$$

Thật vậy :

$$\underbrace{1.4+2.7+\cdots+k(3k+1)}_{=k(k+1)^2}+(k+1)(3k+4)$$

$$=k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)$$

$$=(k+1).[k.(k+1)\ +3k+\ 4]$$

$$=(k+1).(k^2+4k+4)=(k+1)(k+2)^2 \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 2: Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n = 9n - 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì un luôn chia hết cho 8.

Lời giải:

* Ta có u_1 = 9.1 - 1 = 8 chia hết cho 8 (đúng với n = 1).

* Giả sử uk = 9k - 1 chia hết cho 8.

Ta cần chứng minh uk + 1 = 9k + 1 - 1 chia hết cho 8.

Thật vậy, ta có:

uk + 1 = 9k + 1 - 1 = 9.9k - 1 = 9(9k - 1) + 8 = 9uk + 8.

Vì 9uk và 8 đều chia hết cho 8, nên uk + 1 cũng chia hết cho 8.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì un chia hết cho 8.

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 2, ta luôn có: 2n + 1 > 2n + 3 (*)

Lời giải:

* Với n = 2 ta có 2.2+1 > 2.2 + 3 ⇔ 8 > 7 (đúng).

Vậy (*) đúng với n = 2 .

* Giả sử với n = k, k ≥ 2 thì (*) đúng, có nghĩa ta có: 2k + 1 > 2k + 3 (1).

* Ta phải chứng minh (*) đúng với n = k + 1, có nghĩa ta phải chứng minh:

2k + 2 > 2(k + 1) + 3

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được:

2.2k + 1 > 2(2k + 3) ⇔ 2k + 2 > 4k + 6 > 2k + 5.

(vì 4k + 6 > 4k + 5 > 2k + 5)

Hay 2k + 2 > 2(k + 1)+ 3

Vậy (*) đúng với n = k + 1.

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương n ≥ 3 .

Bài 4: Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Lời giải:

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$

$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên

Ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp

Để chứng minh công thức (*) đúng.

Với n =1 ; u_1 =2.1 +1 = 3 (đúng).

Vậy (*) đúng với n =1

Giả sử (*) đúng với n =k.

Có nghĩa ta có: $u_k = 2k + 1$ (2)

Ta cần chứng minh (*) đúng với n = k+1

Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2(k+1)+1 = 2k + 3$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2)

Ta có:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$

Vậy (*) đúng khi n = k+1 .

Kết luận (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 5: Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết: $u_n = \frac{1}{n} - 2$

Lời giải:

Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Chọn đáp án B

Bài 6: Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số : $u_n = \frac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

Lời giải:

Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3}$$
$$= \frac{2n^2 + 7n + 3 - 2n^2 - 7n + 4}{(n+4)(n+3)}$$
$$= \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0; \forall n \in N^*$$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \frac{7}{n+3}$$

Suy ra:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ nên (u_n) bị chặn trên.

Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 = \frac{1}{4} \le u_n$

Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Chọn đáp án C

Bài 7: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Số 16784 là số hạng thứ mấy?

Lời giải:

Giả sử:

$$u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2)$$

$$\Leftrightarrow 168n + 84 = 167n + 334 \Leftrightarrow n = 250.$$

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

Bài 8: Chứng minh bằng quy nạp:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Lời giải:

* Với n = 1: Vế trái của (1) = 2, vế phải của (1) $= 2$.
Suy ra (1) đúng với n = 1.
*Giả sử (1) đúng với = k.
Có nghĩa là ta có:

$$1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad (2)$$

Ta phải chứng minh (1) đúng với n = k +1.
Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Thật vậy:

$$1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1).(k+2)+3(k+1).(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad \text{(đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi n= k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 9:

Chứng minh rằng với n ∈ N*, ta có các đẳng thức:

a. $2+5+8+\ldots+3n-1=\frac{n(3n+1)}{2} \quad (1)$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^6}=\frac{2^{n-2}}{2^n} \quad (2)$

c. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$

Lời giải:

a. Với n = 1, ta có:

VT = 3 – 1 = 2

VP = $\frac{3+1}{2}$

Vậy VT = VP (1) đúng với n = 1

Giả thiết (1) đúng với n = k ≥ 1 nghĩa là:

$$2+5+8+\ldots+3k-1=\frac{k(3k+1)}{2}$$ (1a)

Ta chứng minh (1a) đúng với n = k + 1 nghĩa là chứng minh:

$$2+5+8+\ldots+3k-1+3(k+1)-1=\frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$$

$$\begin{aligned}&(1a)\Leftrightarrow 2+5+8+\ldots+3k-1+3\left(k+1\right)-1\\&=\frac{k\left(3k+1\right)}{2}+3\left(k+1\right)-1\\&=\frac{3k^2+7k+4}{2}=\frac{\left(k+1\right)\left(3k+4\right)}{2}\end{aligned}$$

(1) đúng với n = k +1, vậy (1a) đúng với $n\in\mathbb{N}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$

Với n = 1 thì $\begin{cases}VT=\frac{1}{2}\\VP=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow VT=VP$

Vậy (2) đúng với n = 1

Giả sử đẳng thức đúng với n = k, tức là:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$$

Khi đó ta chứng minh (2) đúng với n = k +1

Ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\\&=\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

(2) đúng với n = k + 1. Vậy nó đúng với mọi n ∈ N*

c. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (3)

Khi n = 1 vế trái bằng 1

$$VP=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1\Rightarrow VT=VP$$

Vậy (3) đúng với n = 1

Giả sử đẳng thức (3) đúng với n = k nghĩa là:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$ (3a)

Ta phải chứng minh (3a) đúng khi n = k + 1

+ Ta cộng 2 vế của (3) cho $(k + 1)^2$

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{(k+1)}{6}\left(2k^2+7k+6\right)\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1. Do đó, đẳng thức đúng với mọi n ∈ N*

Bài 10 Chứng minh rằng với n ∈ N*

a. $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

b. $4^n+15n-1$ chia hết cho 9

c. $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải:

Đặt A_n = n^3+3n^2+5n

+ Ta có: với n = 1

$A_1 = 1 + 3 + 5 = 9$ chia hết 3

+ Giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$A_k = (k^3 + 3k^2 + 5k)$ chia hết 3 (giả thiết quy nạp)

+ Ta chứng minh A_{k+1} chia hết 3

Thật vậy, ta có:

$A_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5$

$= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9$

Theo giả thiết quy nạp A_k chia hết 3, hơn nữa 9(k + 1) chia hết 3

Nên A_n = $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3 với mọi ∀n ∈ N*

b. $4^n + 15n – 1$ chia hết cho 9

Đặt $A_n = 4^n + 15n – 1$

với n = 1 => A_1 = 4 + 15 – 1 = 18 chia hết 9

+ Giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$A_k = (4^k + 15k – 1)$ chia hết 9 (giả thiết quy nạp)

+ Ta chứng minh: A_{k+1} chia hết 9

Thật vậy, ta có:

$A_{k+1} = (4^{k+1} + 15(k + 1) – 1) = 4^k.4^1 + 15k + 15 – 1$

$= (4^k + 15k – 1) + (3.4^k + 15) = A_k + 3(4^k + 5)$

Theo giả thiết quy nạp A_k chia hết 9, hơn nữa:

$3(4^k + 5)$ chia hết 9 (chứng minh tương tự) ∀k ≥ 1 nên A_{k+1} chia hết 9

Vậy $A_n = 4^n + 15n – 1$ chia hết cho 9 ∀n ∈ N*

c. $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Đặt Un = $n^3 + 11n$

+ Với n = 1 => $U_1 = 12$ chia hết 6

+ Giả sử với $n = k \geq 1$ ta có:

$U_k = (k^3 + 11k)$ chia hết 6 (giả thiết quy nạp)

Ta chứng minh: U_{k+1} chia hết 6

Thật vậy ta có:

$U_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

$= (k^3 + 11k) + 3k^2 + 3k + 12 = U_k + 3(k^2 + k + 4)$

+ Theo giả thiết quy nạp thì:

U_k chia hết 6, hơn nữa $3(k^2 + k + 4) = 3(k(k+1) + 4)$ chia hết 6 $\forall k \geq 1$

(2 số liên tiếp nhân với nhau chia hết cho 2)

Do đó: U_{k+1} chia hết 6

Vậy: $U_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 $\forall n \in N^*$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức:

a. $3^n > 3n + 1$

b. $2^{n+1} > 2n + 3$

Bài 2 Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

a. Tính S_1, S_2, S_3

b. Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Bài 3 Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$

Bài 4 Chứng minh rằng với $n \in N^*$, ta có đẳng thức:

a) 2 + 5+ 8+.... + 3n - 1 = $\frac{n(3n+1)}{2}$;

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$;

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bài 5 Chứng minh rằng với n ε N^* ta luôn có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3;

b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 6 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 2, ta có các bất đẳng thức:

a) $3^n > 3n + 1$;

b) $2^{n+1} > 2n + 3$

Bài 7

Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ với n ∈ N*

a) Tính S_1, S_2, S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Bài 8 Tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$.

Bài 9 Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết: $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

Bài 10 Cho dãy số $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$. Tìm mệnh đề đúng?