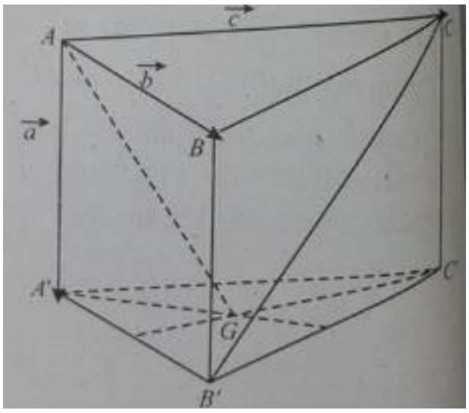
Bài tập Vectơ trong không gian - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' với G là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$



a) Vecto $\overrightarrow{B'C}$ bằng:

A. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

B. $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

C. $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) Vecto $\overrightarrow{AG}$ bằng:

A. $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$

B. $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$

C. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

D. $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

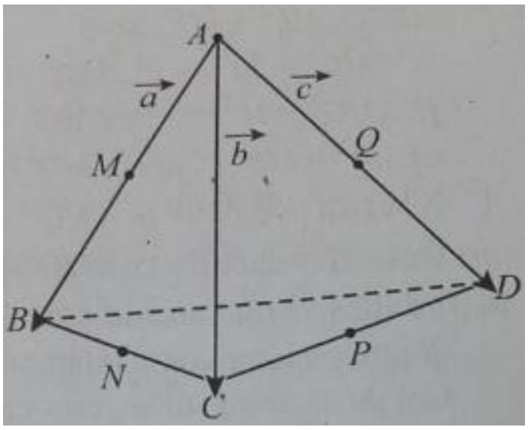
Lời giải:

Đáp án: a - B, b - D

a. $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB})=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$

b. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'})=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD và $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, và DA.



a) Vecto $\overrightarrow{MQ}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

B. $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$

C. $\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$

D. $\frac{1}{4}(\vec{c}+\vec{a})$

b) Vecto $\overrightarrow{MP}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

B. $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$

C. $\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

D. $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

c) Bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc mặt phẳng vì:

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ})$

C. $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}$

D. $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}$

Lời giải:

Đáp án: a - A, b - C, c - D

a. MQ=1 $\underset{MQ}{\longrightarrow} = \frac{1}{2}\underset{BD}{\longrightarrow} = \frac{1}{2}.(\underset{AD}{\longrightarrow} - \underset{AB}{\longrightarrow}) = \frac{1}{2}(\underset{c}{\longrightarrow} - \underset{a}{\longrightarrow})$

b.Loại ngay hai phương án A và B vì $\overrightarrow{MP}$ không đồng phẳng có vecto $\vec{a}$ và $\vec{c}$

Phương án đúng là C vì $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

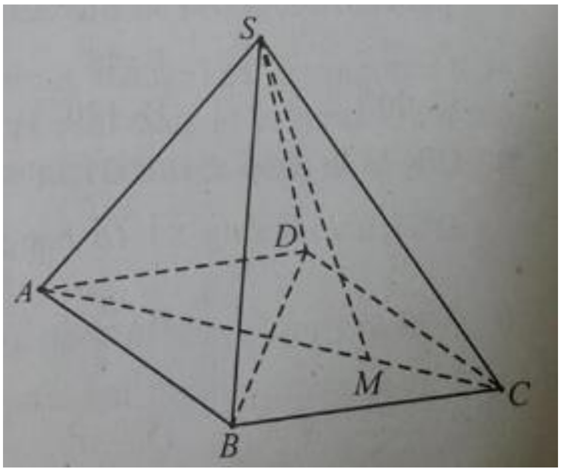
c. Phương án A loại vì đẳng thức $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$ $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$) đúng nhưng chưa chứng tỏ được bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Phương án B loại vì đẳng thức. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ})$ sai

Phương án C loại vì đẳng thức $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}$ đúng nhưng không liên quan đến hai điểm N và Q.

Phương án D đúng vì đẳng thức $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}$ đúng và chứng tỏ ba vecto $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều S. ABCD có tất cả các cạnh bằng a.



a) Số đo góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{SA}$ bằng:

A. 30^0

B. 60^0

C. 90^0

D. 120^0

b) Gọi M là điểm bất kì trên AC. Góc giữa $\overrightarrow{MS}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 900 khi M:

A. Trùng với A

B. Trùng với C

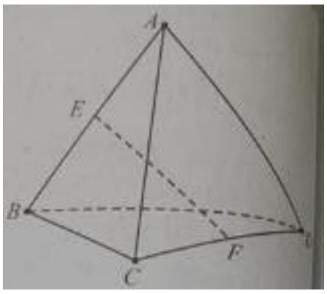
C. Là trung điểm của AC

D. Bất kì vị trí nào trên AC.

Lời giải:

Đáp án: a - B, b - C

Bài 4: Cho tứ diện ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD, AB = 2a, CD = 2b và EF = 2c. M là một điểm bất kì.



a) $MA^2 + MB^2$ bằng:

A. $2ME^2 + 2a^2$

B. $2MF^2 + 2a^2$

C. $2ME^2 + 2b^2$

D. $2MF^2 + 2b^2$

b) $MC^2 + MD^2$ bằng:

A. $2ME^2 + 2a^2$

B. $2MF^2 + 2a^2$

C. $2ME^2 + 2b^2$

D. $2MF^2 + 2b^2$

c) Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. $ME^2 + MF^2$ bằng:

A. $2MG^2 + 2a^2$

B. $2MG^2 + 2b^2$

C. $2MG^2 + 2c^2$

D. $2MG^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$

d) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bằng:

A. $4MG^2 + 2a^2$

B. $4MG^2 + 2b^2$

C. $4MG^2 + 2c^2$

D. $4MG^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$

Lời giải:

Đáp án: a - A, b - D, c - C

a. $MA^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 = ME^2 + EA^2 + 2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA}$

$MB^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = ME^2 + EB^2 + 2\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EB}$

Suy ra: $MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + 2a^2$ (do $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$)

b. Tương tự $MC^2 + MD^2 = 2MF^2 + 2b^2$

c. Tương tự $ME^2 + MF^2 = 2MG^2 + 2c^2$

d. $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2ME^2 + 2MF^2 + 2a^2 + 2b^2 = 4MG^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$

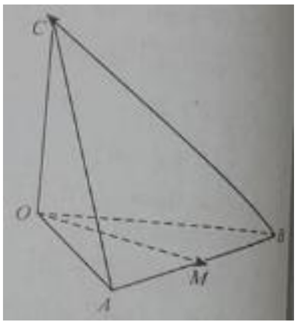
Bài 5: Tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và đều có độ dài là l. Gọi M là trung điểm của các cạnh AB. Góc giữa hai vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng:

A. 0^0

B. 45^0

C. 90^0

D. 120^0

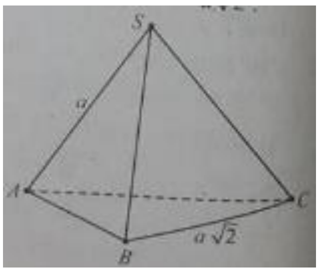


Lời giải:

Đáp án: D

Bài 6: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và BC bằng $a\sqrt{2}$.

.



a) Tích vô hướng $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}$ bằng:

A. a^2

B. $\frac{a^2}{2}$

C. $-\frac{a^2}{2}$

D. $-a^2$

b) Tích vô hướng $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$ bằng:

A. a^2

B. $-a^2$

C. $\frac{a^2}{2}$

D. $-\frac{a^2}{2}$

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. 0^0

B. 120^0

C. 60^0

D. 90^0

Lời giải:

Đáp án: a - C, b - D, c - C

Phương án A sai vì $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} \neq |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SB}| = a^2$

Phương án B sai vì:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} \neq |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos\widehat{SAB} = \frac{a^2}{2}$$

Phương án C đúng:

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{SA}||\overrightarrow{AB}|.\cos(180^0 - \widehat{SAB}) = -\frac{a^2}{2}$

Phương án D sai vì $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB} \neq -|\overrightarrow{AS}|.|\overrightarrow{AB}| = -a^2$

Tam giác SAC; SAB là tam giác đều

tam giác SCB; ABC vuông cân.

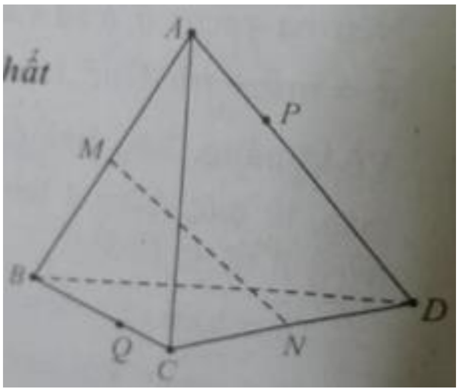
Bài 7: Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy hai điểm P và Q lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PD}$ và $\overrightarrow{QB} = m\overrightarrow{QC}$ với m khác 1. Vecto $\overrightarrow{MP}$ bằng:

A. $\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{QC}$

B. $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{PD}$

C. $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{PD}$

D. $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{QC}$



Lời giải:

Đáp án: C

Phần dẫn ví dụ 1 là một câu chưa hoàn chỉnh, người làm chắc nghiệm phải lựa chọn một trong bốn phương án đưa ra để được một khẳng định đúng.

Có thể loại các phương án A, B và D vì các cặp ba vecto

$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{QC}), (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PD})$ và $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QC})$ đều không đồng phẳng.

Phương án C đúng vì : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MA} - m\overrightarrow{PD}$

Bài 8: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, và DA.

a) Vecto $\overrightarrow{MN}$ cùng với hai vecto nào sau đây là ba vecto đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MQ}$

B. $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MQ}$

C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{CD}$

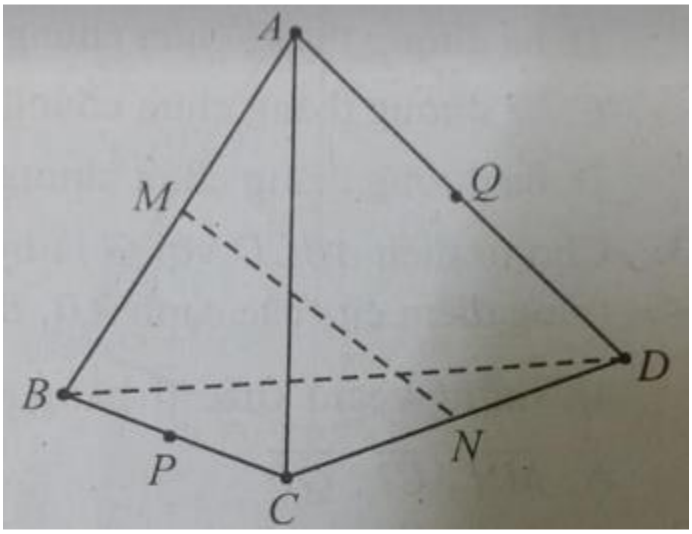
b) Vecto $\overrightarrow{AC}$ cùng với hai vecto nào sau đây là ba vecto không đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{QM}$ và $\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{CD}$



Lời giải

Đáp án: a - C, b - A

a) Ta có: M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC

Suy ra: MN// AC và MN = $\frac{1}{2}AC$ (1)

Tương tự: QP là đường trung bình của tam giác ACD nên QP // AC và QP=$\frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tứ giác MNPQ là hình bình hành (có các cạnh đối song song và bằng nhau

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ (3)

Lại có: $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ (4)

Từ (3); (4) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 0.\overrightarrow{AD}$

Do đó, 3 vecto $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng

b) Phương án A là đúng.

B sai vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}AC$ nên 3 vecto $\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng

C sai vì $\overrightarrow{QM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ nên 3 vecto $\overrightarrow{QM}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng

D sai vì $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên 3 vecto $\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CD}$ đồng phẳng

Bài 9: Cho ba vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ Điều kiện nào sau đây không kết luận được ba vecto đó đồng phẳng.

A. Một trong ba vecto đó bằng $\vec{0}$

B. Có hai trong ba vecto đó cùng phương.

C. Có một vecto không cùng hướng với hai vecto còn lại

D. Có hai trong ba vecto đó cùng hướng.

Lời giải:

Đáp án: C

Nếu hai trong ba vecto đó cùng hướng thì ba vecto đồng phẳng; nếu hai trong ba vecto đó không cùng hướng thì chưa thể kết luận được ba vecto đó đồng phẳng.

Bài 10: Ba vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ không đồng phẳng nếu?

A. Ba đường thẳng chứa chúng không cùng một mặt phẳng.

B. Ba đường thẳng chứa chúng cùng thuộc một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng chứa chúng không cùng song song với một mặt phẳng.

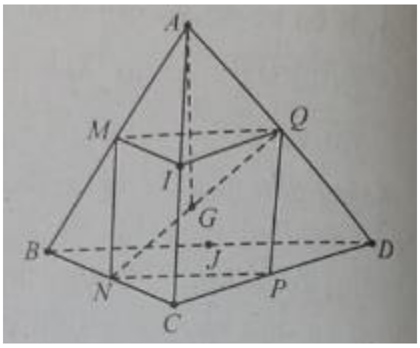
D. Ba đường thẳng chứa chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải:

Đáp án: C

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho tứ diện ABCD với G là trọng tâm và các điểm M, N, P, Q, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD, AC, BD.



a) Những vecto khác 0→ bằng nhau là:

$\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{CI}$; $\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{MI}$; $\overrightarrow{IQ}$; $\overrightarrow{QM}$

$\overrightarrow{MQ}$; $\overrightarrow{NP}$; $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$

$\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $4\overrightarrow{AG}$

B. $2\overrightarrow{AG}$

C. $\overrightarrow{AG}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

Lời giải:

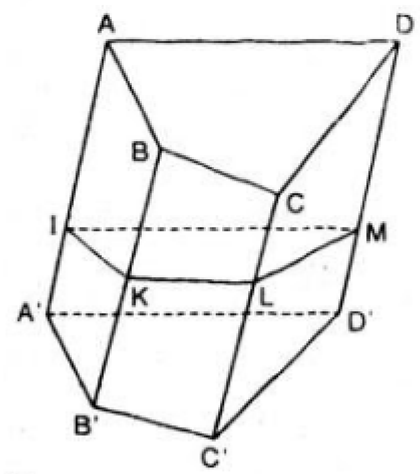
a. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB});$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

Bài 1 Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại I, K, L, M. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ:

a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$.
b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$.
c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

Lời giải:



a) Các vecto cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ thỏa mãn đề bài là:

$\overrightarrow{IA'}$; $\overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{KB'}$; $\overrightarrow{LC}$; $\overrightarrow{LC'}$; $\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MD'}$

b) Các vecto cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ thỏa mãn đề bài là:

$\overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{LC}$; $\overrightarrow{MD}$

c) Các vecto ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ thỏa mãn đề bài là:

$\overrightarrow{IA'}$; $\overrightarrow{KB'}$; $\overrightarrow{LC'}$; $\overrightarrow{MD'}$

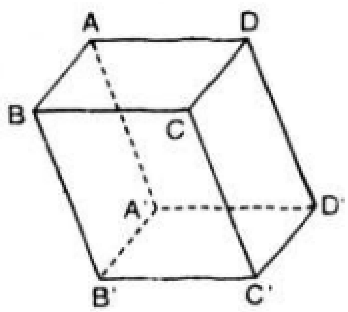
Bài 3 Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$

Lời giải:



a)Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$

Từ (1),(2), (3) suy ra:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = VT$$

b) Ta có :

$$-\overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{DD'}$$
$$-\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{D'B'}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'}$$

c) Cách 1: Ta có:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA'}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$$

(vì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$)

Cách 2.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}$$
$$= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA'})$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'}$$
$$= \vec{0}.$$

Bài 4 Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABCD).

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Lời giải:

Gọi O = AC ∩ BD.

⇒ O là trung điểm của AC và BD.

Ta có:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= 2\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{SO} + \vec{0} = 2\overrightarrow{SO}; (1)$$

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}$$
$$= 2\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{SO} + \vec{0} = 2\overrightarrow{SO}; (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

(điều phải chứng minh).

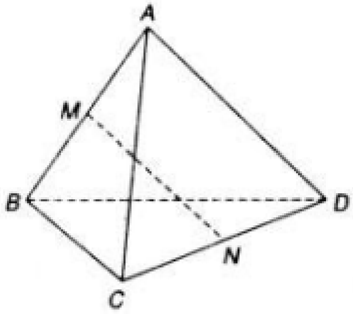
Bài 5 Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của AB và CD.

Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Lời giải:



a) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế với vế, ta có:

$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN})$

M là trung điểm của AB nên

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

N là trung điểm của CD nên

$\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

b) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\right) + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}\right)$

$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$

$= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

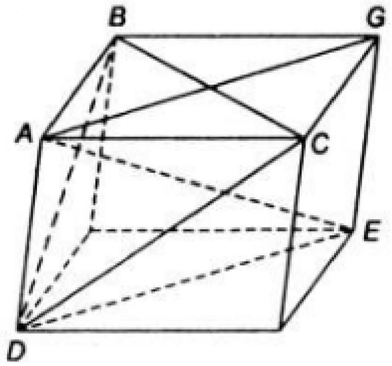
Do đó, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Bài 7 Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho :

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Lời giải:



a) Lấy điểm G sao cho $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

⇒ G là đỉnh còn lại của hình bình hành ABGC.

Khi đó $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$

⇒ E là đỉnh còn lại của hình bình hành AGED.

Hay E là đường chéo của hình hộp có ba cạnh lần lượt là AB; AC; AD.

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{DG}$.

⇒ F là đỉnh còn lại của hình bình hành ADGF

Hay F là điểm đối xứng với E qua G.

Bài 8 Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. CMR: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$

Lời giải

- Theo quy tắc ba điểm, ta có :

$$\begin{cases}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}\\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}\end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$ (1)

Mà G là trọng tâm của tam giác ABC nên :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (2)

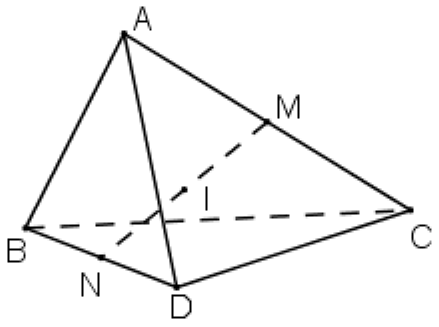
*(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$ (đpcm)

Bài 9 Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{PI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$

Lời giải:



a) Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

$=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right)$

$=2.\overrightarrow{IM}+2.\overrightarrow{IN}$

$=2.\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)$

$=\vec{0}$ (Vì I là trung điểm MN).

b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$

$=\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{ID}$

$=4.\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

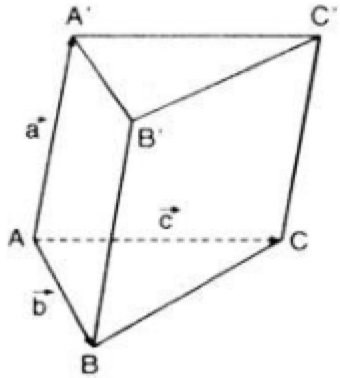
$=4.\overrightarrow{PI}+\vec{0}$

$=4.\overrightarrow{PI}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{PI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Bài 10 Cho lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a};\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (hay biểu thị) các vectơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$

Lời giải:



Áp dụng quy tắc ba điểm, Ta có:

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}) - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

Vậy $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$

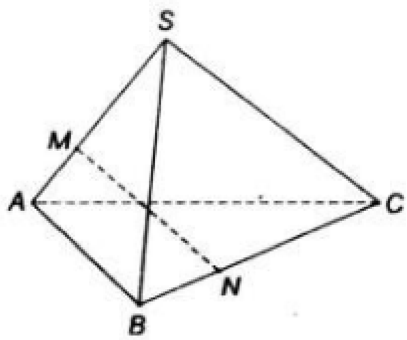
+) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC}$

$= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$)

Vậy $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

Bài 11 Cho tam giác ABC. Lấy một điểm S ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh ba vector AB, MN, SC đồng phẳng

Lời giải:



Ta biểu diễn một trong ba vectơ

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ còn lại,

chẳng hạn biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (2)

Nhân hai vế của đẳng thức (2) với 2 :

$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (3)

Cộng (1) và (3) vế với vế ta có:

$3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN})$

Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ suy ra:

$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Do đó, ba vecto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$ đồng phẳng

III. Bài tập vận dụng

Bài 1

Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của DF và BH.

Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$ và $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

Bài 2 Cho hình lăng trụ tứ giác: ABCD.A′B′C′D′. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA′,BB′,CC′,DD′ lần lượt tại I,K,L,M. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I,K,L,M và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ:

a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$

b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$;

c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

Bài 3 Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$

Bài 4 Cho hình bình hành . Gọi là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. chứng minh rằng:

Bài 5 Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Bài 6 Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E,F sao cho:

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Bài 7 Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}.$$

Bài 8 Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

Bài 9 Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’ với G là trọng tâm của tam giác A’B’C’.

Bài 10 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, và DA.