

Bài 2: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài 1 trang 33 SBT Toán lớp 10 Tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau đây:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 5 < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Hướng dẫn giải

a) Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ trên mặt phẳng Oxy và xét phần giao.

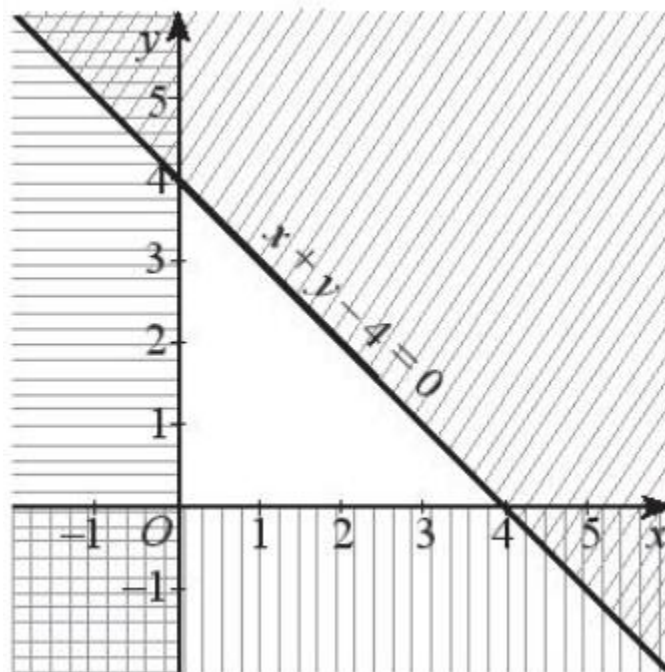
+ Vẽ đường thẳng $x + y - 4 = 0$ đi qua hai điểm $(0; 4)$ và $(4; 0)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $x + y - 4 = 0$, ta có: $0 + 0 - 4 = -4 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 4 \leq 0$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y - 4 = 0$, chứa điểm O, kể cả đường thẳng $x + y - 4 = 0$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Oy, nằm bên phải trục Oy, bao gồm cả đường thẳng Oy.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Ox, nằm bên trên trục Ox, bao gồm cả đường thẳng Ox.



Vậy miền không bị gạch chéo (kể cả bờ) trong hình trên là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} x + 2y - 5 < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 5 < 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ trên mặt phẳng Oxy và xét phần giao.

+ Vẽ đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$ đi qua hai điểm $\left(0; \frac{5}{2}\right)$ và $(5; 0)$.

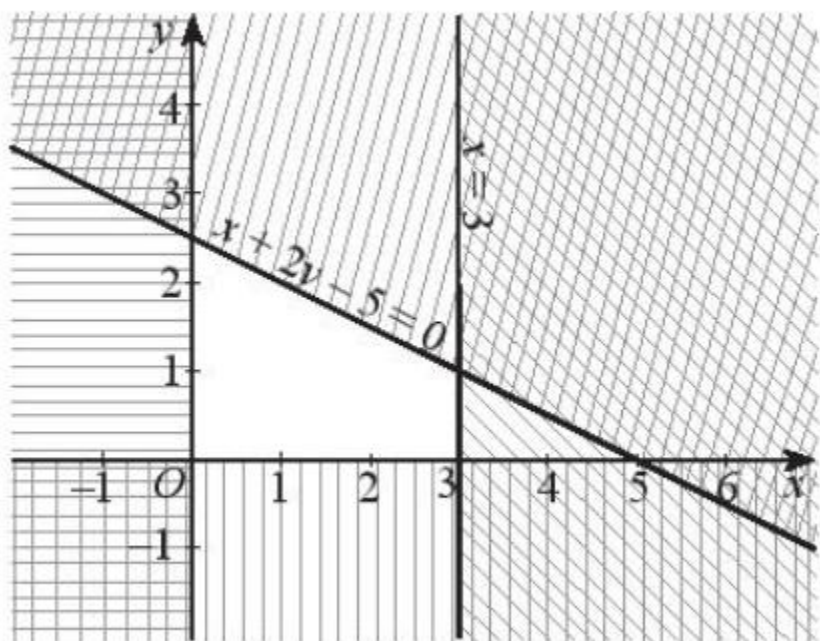
Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$, ta có: $0 + 2 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y - 5 < 0$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$, chứa điểm O, không kể đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Oy, nằm bên phải trục Oy, bao gồm cả đường thẳng Oy.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \leq 3$ chính là nửa mặt có bờ là đường thẳng $x = 3$ song song với trục Oy và nằm bên trái đường thẳng $x = 3$, bao gồm cả đường thẳng $x = 3$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Ox, nằm bên trên trục Ox, bao gồm cả đường thẳng Ox.



Vậy miền không bị gạch chéo (kể cả bờ là một phần đường thẳng $x = 3$, một phần đường thẳng $x = 0$, một phần đường thẳng $y = 0$ và không kể đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$) trong hình trên là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài 2 trang 33 SBT Toán lớp 10 Tập 1: Bạn Bích có 500 g bột gạo để pha hai loại nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Một lít nước hồ tráng bánh đa cần 200 g bột gạo, còn một lít nước hồ tráng bánh xèo chỉ cần 100 g bột gạo. Gọi x, y lần lượt là

số lít nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Hướng dẫn giải

Vì x, y lần lượt là số lít nước hồ tráng bánh đa và bánh xèo nên $x \geq 0, y \geq 0$.

Để pha được x lít nước hồ tráng bánh đa thì cần $200x$ (g bột gạo).

Để pha được y lít nước hồ tráng bánh xèo thì cần $100y$ (g bột gạo).

Mà Bích có 500 g bột gạo nên $200x + 100y \leq 500 \Leftrightarrow 2x + y \leq 5$.

Do đó hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y là
$$\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ trên mặt phẳng Oxy và xét phần giao.

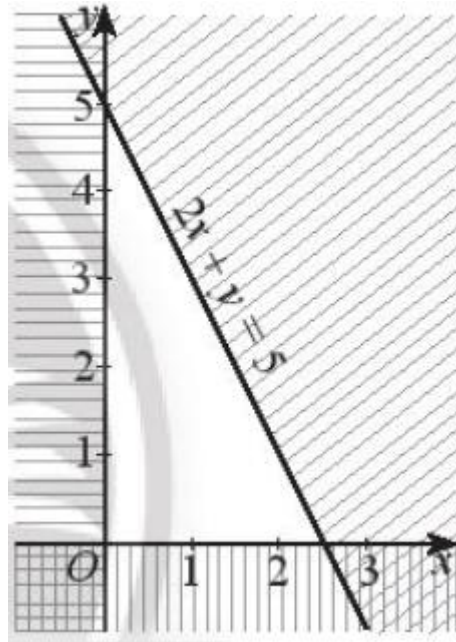
+ Vẽ đường thẳng $2x + y = 5$ đi qua hai điểm $(0; 5)$ và $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $2x + y = 5$, ta có: $2 \cdot 0 + 0 = 0 < 5$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 5$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $2x + y = 5$, chứa điểm O , kể cả đường thẳng $2x + y = 5$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Oy, nằm bên phải trục Oy, bao gồm cả đường thẳng Oy.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Ox, nằm bên trên trục Ox, bao gồm cả đường thẳng Ox.



Vậy miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

Bài 3 trang 33 SBT Toán lớp 10 Tập 1: Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là 150 m^2 (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích $3 \text{ m}^2/\text{chiếc}$ và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích $5 \text{ m}^2/\text{chiếc}$ và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lý không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. ($x \geq 0, y \geq 0$).

Vì nhân viên quản lý không thể phục vụ quá 40 xe một đêm nên $x + y \leq 40$.

Diện tích cần dùng để đỗ x xe du lịch là: $3x \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích cần dùng để đỗ y xe tải là: $5y$ (m^2).

Do bãi đậu xe có diện tích đậu xe là 150 m^2 (không tính lối đi cho xe ra vào), do đó ta có $3x + 5y \leq 150$.

Từ đó ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 3x + 5y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ trên mặt phẳng Oxy và xét phần giao.

+ Vẽ đường thẳng $x + y = 40$ đi qua hai điểm $(0; 40)$ và $(40; 0)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $x + y = 40$, ta có: $0 + 0 = 0 < 40$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 40$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y = 40$, chứa điểm O , kể cả đường thẳng $x + y = 40$.

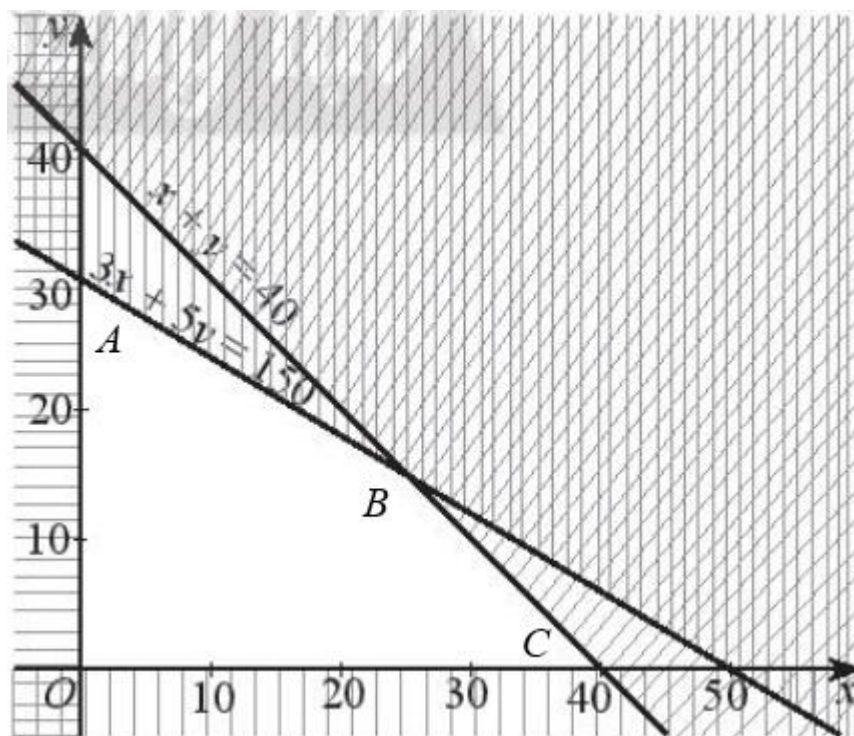
+ Vẽ đường thẳng $3x + 5y = 150$ đi qua hai điểm $(0; 30)$ và $(50; 0)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $3x + 5y = 150$, ta có: $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 < 150$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $3x + 5y \leq 150$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $3x + 5y = 150$, chứa điểm O , kể cả đường thẳng $3x + 5y = 150$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Oy, nằm bên phải trục Oy, bao gồm cả đường thẳng Oy.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Ox, nằm bên trên trục Ox, bao gồm cả đường thẳng Ox.



Miền không bị gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong hình trên là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên. Do đó miền nghiệm của hệ bất phương trình trên chính là miền tứ giác OABC (kể cả bờ) với $O(0; 0)$, $A(0; 30)$, $B(25; 15)$, $C(40; 0)$.

Số tiền chủ bãi xe thu được khi cho đậu x xe du lịch và y xe tải là $F = 40x + 50y$ (nghìn đồng).

Người ta chứng minh được rằng F đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác OABC.

$$\text{Ta có: } F(0; 0) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$$

$$F(0; 30) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 3 = 150$$

$$F(25; 15) = 40 \cdot 25 + 50 \cdot 15 = 1\,750$$

$$F(40; 0) = 40 \cdot 40 + 50 \cdot 0 = 1\,600$$

Do đó, $F_{\max} = 1\,750$ (nghìn đồng) tại $(x; y) = (25; 15)$.

Vậy để có doanh thu cao nhất, chủ bãi xe có thể cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

Bài 4 trang 34 SBT Toán lớp 10 Tập 1: Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt bò và thịt heo có thể mua.

Vì gia đình đó chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo, do đó ta có: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,5$. (1)

Trong x kilôgam thịt bò chứa khoảng $800x$ đơn vị protein, $100x$ đơn vị lipit.

Trong y kilôgam thịt heo chứa khoảng $600y$ đơn vị protein, $200y$ đơn vị lipit.

Mà gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày nên $800x + 600y \geq 800$ và $100x + 200y \geq 200$.

Ta có: $800x + 600y \geq 800 \Leftrightarrow 4x + 3y \geq 4$. (2)

$100x + 200y \geq 200 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1,5 \end{cases}.$$

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ trên mặt phẳng Oxy và xét phần giao.

+ Vẽ đường thẳng $4x + 3y = 4$ đi qua hai điểm $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ và $(1; 0)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $4x + 3y = 4$, ta có: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 4$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $4x + 3y \geq 4$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $4x + 3y = 4$, không chứa điểm O, kể cả đường thẳng $4x + 3y = 4$.

+ Vẽ đường thẳng $x + 2y = 2$ đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $(2; 0)$.

Xét gốc tọa độ O không thuộc đường thẳng $x + 2y = 2$, ta có: $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 2$.

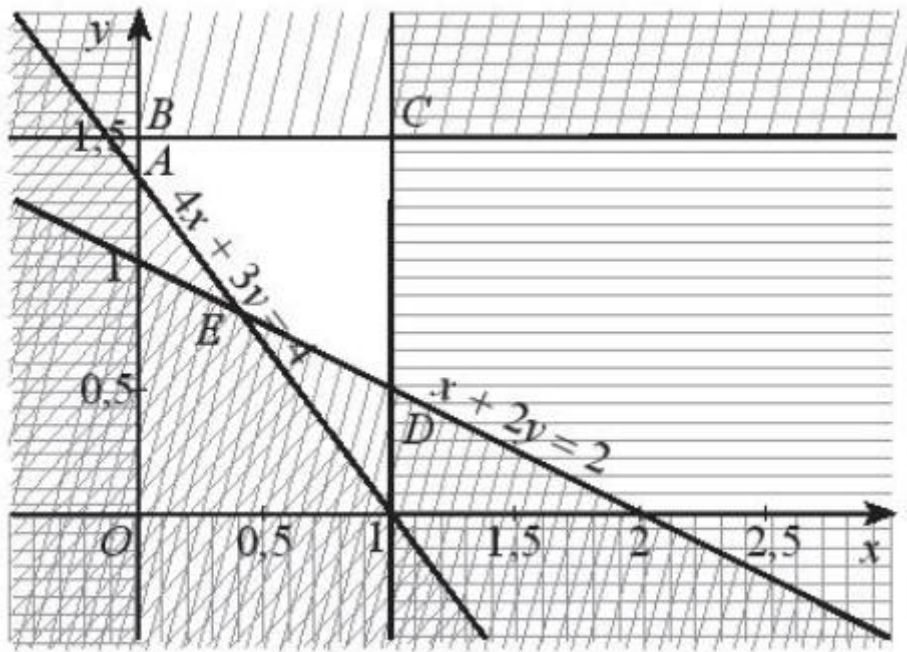
Do đó, miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y \geq 2$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + 2y = 2$, không chứa điểm O, kể cả đường thẳng $x + 2y = 2$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Oy, nằm bên phải trục Oy, bao gồm cả đường thẳng Oy.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $x \leq 1$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x = 1$, nằm bên trái đường thẳng $x = 1$, bao gồm cả đường thẳng $x = 1$.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \geq 0$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Ox, nằm bên trên trục Ox, bao gồm cả đường thẳng Ox.

+ Miền nghiệm của bất phương trình $y \leq 1,5$ chính là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $y = 1,5$, nằm bên dưới đường thẳng $y = 1,5$, bao gồm cả đường thẳng $y = 1,5$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên chính là miền ngũ giác ABCDE (kể cả bờ) với tọa độ các đỉnh là: $A\left(0; \frac{4}{3}\right)$, $B(0; 1,5)$, $C(1; 1,5)$, $D(1; 0,5)$, $E(0,4; 0,8)$.

Số tiền gia đình đó cần bỏ ra để mua được x kilôgam thịt bò (250 nghìn đồng/1kg) và y kilôgam thịt lợn (200 nghìn đồng/1kg) là $F = 250x + 200y$ (nghìn đồng).

Người ta chứng minh được rằng F đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác ABCDE.

$$\text{Ta có: } F\left(0; \frac{4}{3}\right) = 250 \cdot 0 + 200 \cdot \frac{4}{3} = \frac{800}{3}.$$

$$F(0; 1,5) = 250 \cdot 0 + 200 \cdot 1,5 = 300.$$

$$F(1; 1,5) = 250 \cdot 1 + 200 \cdot 1,5 = 550.$$

$$F(1; 0,5) = 250 \cdot 1 + 200 \cdot 0,5 = 350.$$

$$F(0,4; 0,8) = 250 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,8 = 260.$$

Do đó, F đạt giá trị nhỏ nhất là 260 nghìn đồng tại đỉnh $E(0,4; 0,8)$.

Vậy gia đình này chỉ cần mua 0,4 kg thịt bò và 0,8 kg thịt heo để đủ đáp ứng yêu cầu về dinh dưỡng mà lại tốn chi phí ít nhất.