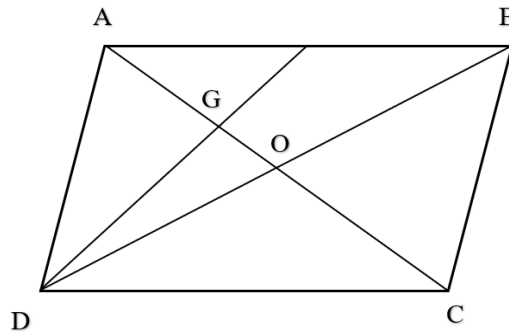


Bài 3: Tích của một số với một vector

Bài 1 trang 96 SBT Toán 10 Tập 1: Cho hình bình hành ABCD có G là trọng tâm tam giác ABD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

G là trọng tâm tam giác ABD $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AO}$.

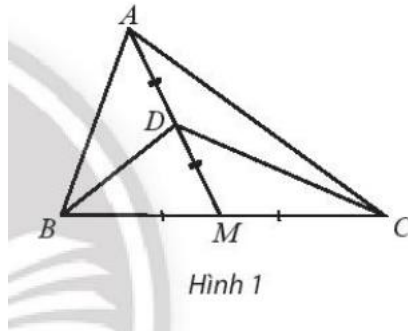
Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

Bài 2 trang 97 SBT Toán 10 Tập 1: Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.

Lời giải:



Hình 1

a) Vì M là trung điểm của BC nên: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$.

Mặt khác do D là trung điểm đoạn AM nên $\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DA}$

Vậy nên $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA}$ hay $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Ta có: $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$$= 2(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= 2\overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= 4\overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Vậy $4\overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ hay $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$

Bài 3 trang 97 SBT Toán 10 Tập 1: Lấy một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải:

a) Với điểm M bất kì ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

I là trung điểm đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) Với điểm M bất kì ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

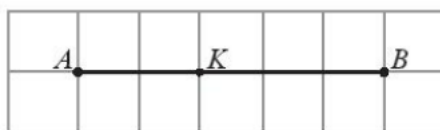
G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Bài 4 trang 97 SBT Toán 10 Tập 1: Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

Lời giải:



Hình 2

$$\text{Vì } 3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ nên } 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{KA} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{KB} = \frac{-2}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB})$$

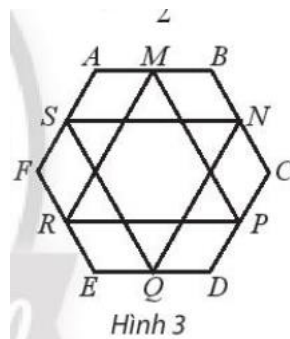
$$\text{Do đó } \frac{5}{3}\overrightarrow{KA} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Nên $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$.

Vậy K nằm giữa A và B sao cho $AK = \frac{2}{5} AB$.

Bài 5 trang 97 SBT Toán 10 Tập 1: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải:



MN là đường trung bình của tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Tương tự ta có: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$

Gọi G là trọng tâm tam giác MPR ta có: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$.

Ta lại có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}; \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}; \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GS}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GS} \\ &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0} \Rightarrow -(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RG} = \vec{0}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}.$$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác NQS.

Như vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 6 trang 97 SBT Toán 10 Tập 1: Máy bay A với vận tốc \vec{a} , máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy A. Biểu diễn vector vận tốc \vec{b} của máy bay B theo vector vận tốc \vec{a} của máy bay A.

Lời giải:

Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy A nên vector vận tốc của máy bay B là: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$.