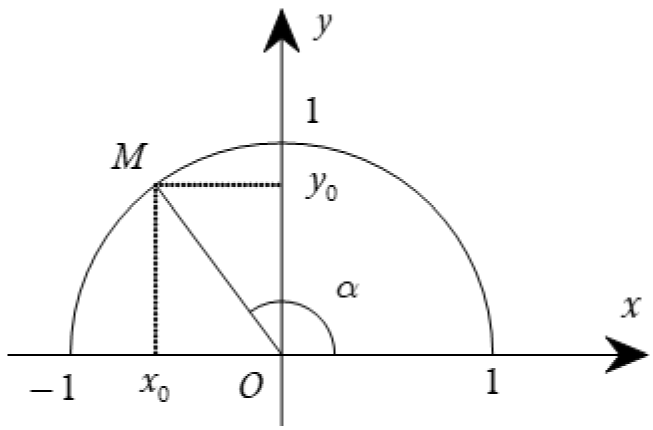
Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°. Định lí côsin và định lí sin trong tam giác

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

1.1 Định nghĩa



Với mỗi góc α ($0 \le \alpha \le 180°$) ta xác định một điểm M (x_0, y_0) trên nửa đường tròn đơn vị sao cho góc $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó ta có định nghĩa:

+) sin của góc α, kí hiệu là sinα, được xác định bởi: $\sin\alpha = y_0$;

+) côsin của góc α, kí hiệu là cosα, được xác định bởi: $\cos\alpha = x_0$;

+) tang của góc α, kí hiệu là tanα, được xác định bởi: $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \ne 0$);

+) côtang của góc α, kí hiệu là cotα, được xác định bởi: $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \ne 0$).

Các số sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

Chú ý:

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\alpha \ne 90°$);

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($0 < \alpha < 180°$).

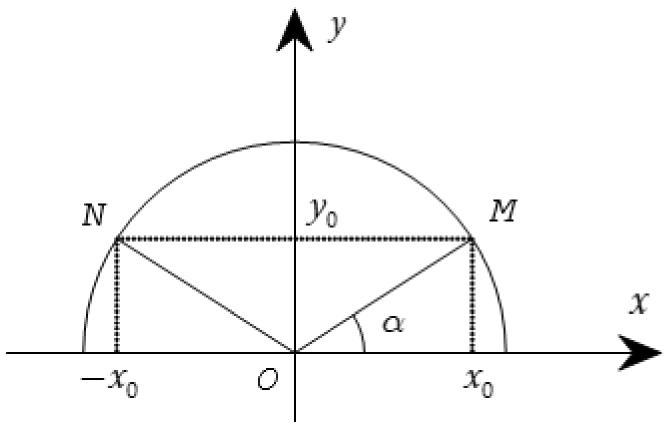
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ ($0° \le \alpha \le 90°$);

cos(90° – α) = sinα (0° ≤ α ≤ 90°);

tan(90° – α) = cotα (0° ≤ α ≤ 90°);

cot(90° – α) = tanα (0° ≤ α ≤ 90°).

1.2. Tính chất



Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^o - \alpha$. Với 0° ≤ α ≤ 180° thì:

sin(180° – α) = sinα,

cos(180° – α) = – cosα,

tan(180° – α) = – tanα (α ≠ 90°),

cot(180° – α) = – cotα (α ≠ 0°, α ≠ 180°).

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức sau:

A = cos0° + cos20° + cos 40° + ... + cos160° + cos180°.

Hướng dẫn giải:

A = cos0° + cos20° + cos 40° + ... + cos160° + cos180°

= cos0° + cos180° + cos20° + cos160° + ... + cos80° + cos100°

= cos0° – cos0° + cos20° – cos20° + ... + cos80° – cos80°

= 0.

1.3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	||

Chú thích: Dấu "||" biểu thị sự không xác định của giá trị lượng giác tại góc đó.

Ví dụ:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$;

$\tan 60° = \sqrt{6}$;

$\cot 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Cách sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác:

– Ta có thể tìm giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0° đến 180° bằng cách sử dụng các phím: sin, cos, tan trên máy tính cầm tay.

Ví dụ: Dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác sau (làm tròn đến hàng phần chục nghìn).

sin55°, cos140°, tan80°.

Hướng dẫn giải:

Để tính các giá trị lượng giác trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ" ta làm như sau:

	Nút ấn	Kết quả (đã làm tròn)
sin55°	sin ⇒ 5 ⇒ 5 ⇒ =	0,8192
cos140°	cos ⇒ 1 ⇒ 4 ⇒ 0 ⇒ =	–0,7660
tan80°	tan ⇒ 8 ⇒ 0 ⇒ =	5,6713

– Ta có thể tìm số đo (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0° đến 180° khi biết giá trị lượng giác của góc đó bằng cách sử dụng các phím: SHIFT cùng với sin; cos; tan trên máy tính cầm tay.

Ví dụ: Sử dụng máy tính cầm tay, tìm số đo góc của α (từ 0° đến 180°) và làm tròn đến độ, biết:

a) sinα = 0,56

b) cosα = – 0,95

c) tanα = 0, 42

Hướng dẫn giải:

Để tính gần đúng số đo góc α trong mỗi trường hợp trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ", ta làm như sau:

	Nút ấn	Kết quả (đã làm tròn)
sinα = 0,56	SHIFT ⇒ sin ⇒ 0,56 ⇒ =	34°
cosα = – 0,95	SHIFT ⇒ cos ⇒ –0.95 ⇒ =	162°
tanα = 0, 42	SHIFT ⇒ tan ⇒ 0.42 ⇒ =	23°

2. Định lí côsin

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Khi đó:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc\cos A$,

$b^2 = c^2 + a^2 – 2ca\cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab\cos C$.

Lưu ý:

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

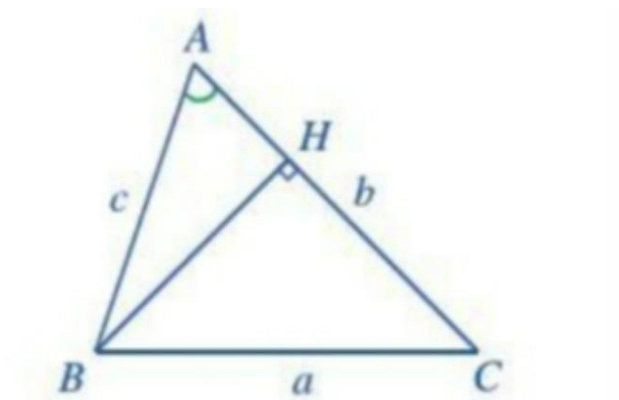
$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$,

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Ví dụ: Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc\cos A$.

Hướng dẫn giải:

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c.



Cho tam giác ABC, đặt AB = c, AC = b, BC = a, cosA = cosα

Kẻ BH vuông góc với AC.

Xét các tam giác vuông BHC và AHB, áp dụng định lý Py–ta–go ta có:

$BC^2 = BH^2 + HC^2$

$= BH^2 + (AC – AH)^2$

$= BH^2 + AC^2 – 2.AC.AH + AH^2$

$= (BH^2 + AH^2) + AC^2 – 2.AC.AH$

$= AB^2 + AC^2 – 2.AC.AH$

(BH^2 + AH^2 = AB^2 do áp dụng định lí Py–ta–go trong tam giác vuông AHB).

Xét tam giác vuông AHB, ta lại có:

$\cos A = \dfrac{AH}{AB}$

$\Rightarrow AH = AB.\cos A = c.\cos\alpha$

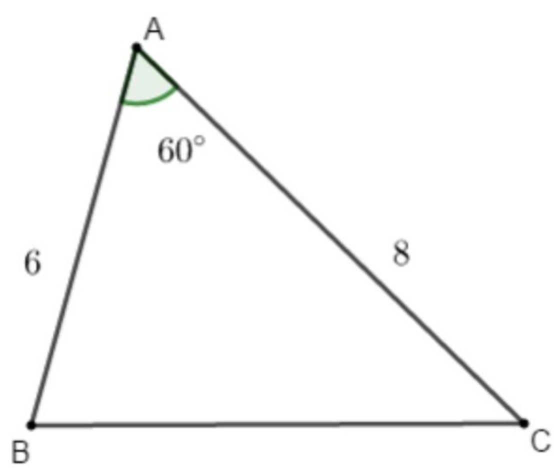
Do đó: $a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AC.AH$

$= c^2 + b^2 - 2b.\ c.\cos\alpha$

$= b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$ (đpcm).

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60°$, AB = 6, AC = 8. Tính BC.

Hướng dẫn giải:



Áp dụng định lí Cosin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

Thay số ta có:

$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos 60°$

$\Leftrightarrow BC^2 = 36 + 64 - 48 = 52$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

Vậy BC = $2\sqrt{13}$.

3. Định lí sin

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Lưu ý:

a = 2RsinA,

b = 2RsinB,

c = 2RsinC.

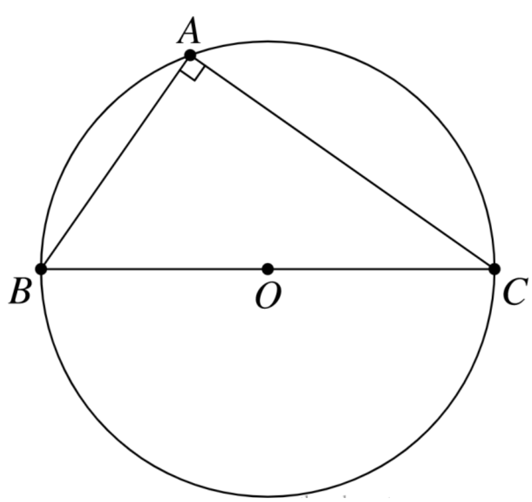
Ví dụ: Chứng minh định lí sin.

Hướng dẫn giải:

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{a}{\sin A} = 2R$, các dấu bằng kia chứng minh hoàn toàn tương tự. Ta xét ba trường hợp sau:

TH1: Tam giác ABC vuông tại A. Khi đó sinA = sin90° = 1. Vì BC là đường kính của đường trong ngoại tiếp tam giác ABC nên a = BC = 2R.

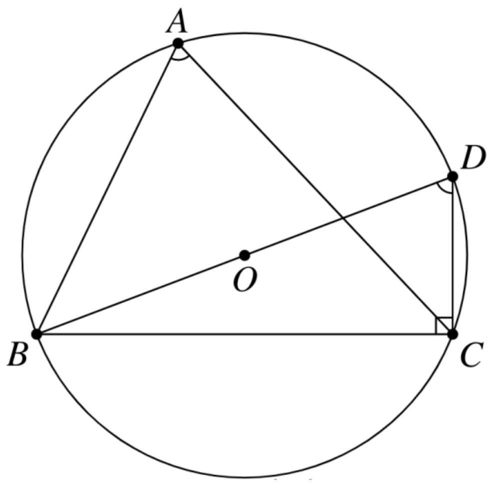
Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{BC}{1} = 2R$.



TH2: Góc A nhọn. Gọi D là điểm sao cho BD là đường kính. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $A = D$.

Từ đó sinA = sinD = $\frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$.

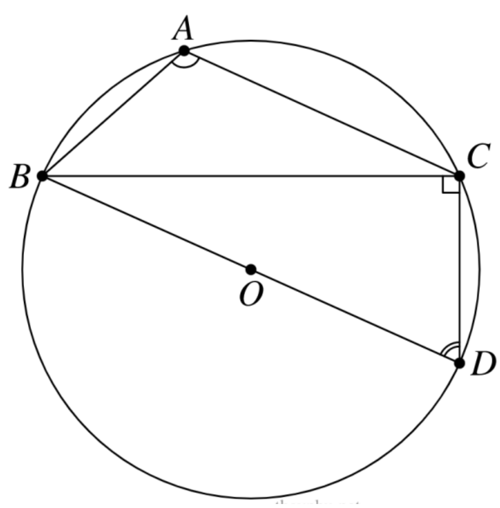
Suy ra $\frac{a}{\sin A} = 2R$.



TH3: Góc A tù. Gọi D là điểm sao cho BD là đường kính. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $A + D = 180°$. Suy ra sinA = sinD (hai góc bù nhau có sin bằng nhau).

Ta có sinD = $\frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$

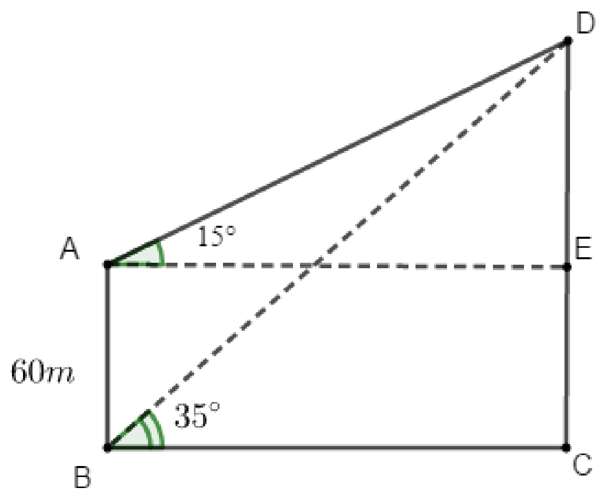
Suy ra $\frac{a}{\sin A} = 2R$.



Ví dụ: Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang một góc 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nhìn tạo với phương nằm ngang một góc 15°. Tính chiều cao ngọn núi đó so với mặt đất biết rằng tòa nhà cao 60 m.

Hướng dẫn giải:

Bài toán trên được mô phỏng lại như hình vẽ với A là vị trí của người đó tại sân thượng của tòa nhà, B là vị trí của người đó tại tầng trệt. C và D lần lượt là đỉnh và chân của ngọn núi.



Từ A hạ AE vuông góc với CD tại E.

Theo đề ra ta có $\begin{cases} AB = 60m \\ DBC = 35° \\ DAE = 15° \end{cases}$

Ta có:

$ABD = ABC - DBC = 90° – 35° = 55°$;

$BAD = BAE + DAE = 90° + 15° = 105°$.

Mà $ADB + BAD + ABD = 180°$ (Tổng 3 góc của một tam giác bằng 180°)

Suy ra:

$ADB = 180° – BAD – ABD$

$= 180° – 105° – 55°$

$= 20°$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABD ta có:

$$\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD}$$

$$\Leftrightarrow BD = \frac{AB.\sin BAD}{\sin ADB} = \frac{60.\sin 105°}{\sin 20°} \approx 169,45 \text{ (m)}.$$

Xét tam giác CBD vuông tại C, ta có:

$CD = BD.\sin DBC = 169,45.\sin 35° \approx 97,19$ (m).

Vậy ngọn núi cao xấp xỉ 97,19 m.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 3 – \sin^2 90° + 2\cos^2 60° – 3\tan^2 45°$;

b) $B = a^2\sin 90° + b^2\cos 90° + c^2\cos 180°$.

Hướng dẫn giải:

a) $A = 3 – \sin^2 90° + 2\cos^2 60° – 3\tan^2 45°$

$$= 3 - 1^2 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

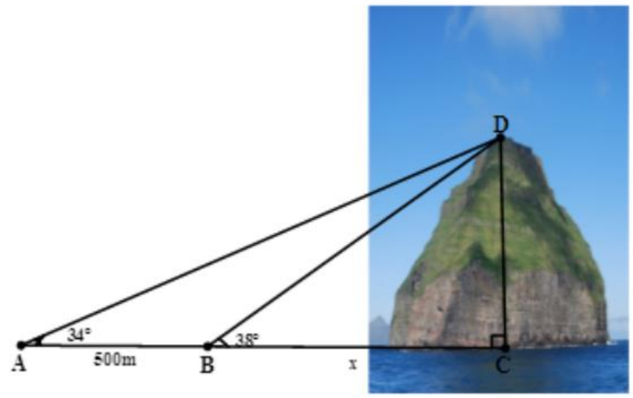
$= 1$.

b) $B = a^2\sin 90° + b^2\cos 90° + c^2\cos 180°$

$= a^2.1 + b^2.0 + c^2.(–1)$

$= a^2 – c^2$.

Bài 2. Tính chiều cao của một ngọn núi (làm tròn đến mét), biết tại hai điểm A, B cách nhau 500m, người ta nhìn thấy đỉnh núi với góc nâng lần lượt là 34° và 38°. (Hình minh họa như hình bên).



Hướng dẫn giải:

Gọi D và C lần lượt là đỉnh và chân của ngọn núi.

Đặt BC = x (m);

Ta có: 500 + x (m)

Xét tam giác vuông ACD, ta có:

$\tan CAD = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC.\tan CAD$

$\Rightarrow CD = (500 + x).\tan 34°$ (1)

Xét tam giác BCD, ta có:

$\tan CBD = \dfrac{CD}{BC} \Rightarrow CD = BC.\tan CBD$

$\Rightarrow CD = x.\tan 38°$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$(500 + x).\tan 34° = x.\tan 38°$

$\Leftrightarrow 500.\tan 34° + x.\tan 34° = x.\tan 38°$

$\Leftrightarrow 500.\tan 34° = x.\tan 38° – x.\tan 34°$

$\Leftrightarrow x.\tan 38° – x.\tan 34° = 500.\tan 34°$

$\Leftrightarrow$ x.(tan38° – tan34°) = 500.tan34°

$\Leftrightarrow x = \dfrac{500.\tan 34°}{\tan 38° - \tan 34°}$

$\Leftrightarrow x \approx 3158{,}5$m

$\Rightarrow$ CD = 3158,5.tan38° $\approx$ 2467,7 (m)

Vậy chiều cao của ngọn núi là 2467,7 mét.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tam giác ABC có AB = 2, AC = 1 và $\hat{A} = 60°$. Tính độ dài cạnh BC.

A. BC = 1;

B. BC = 2;

C. BC = $\sqrt{2}$;

D. BC = $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Theo định lí côsin, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60° = 3$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}$.

Câu 2. Tam giác ABC có $\hat{B} = 60°, \hat{C} = 45°$ và AB = 5. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$;

B. $AC = 5\sqrt{3}$;

C. $AC = 5\sqrt{2}$;

D. $AC = 10$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Theo định lí sin, ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{5.\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 3. Tam giác ABC có BC = 10 và $A = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. R = 5;

B. R = 10;

C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$;

D. $R = 10\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin BAC} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2.\sin A} = \frac{10}{2.\sin 30^\circ} = 10.$$