

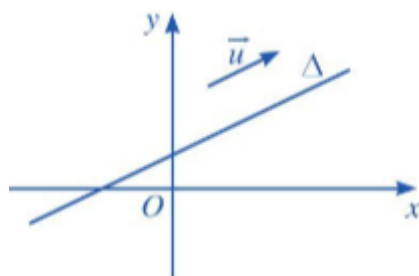
Bài 3: Phương trình đường thẳng

A. Lý thuyết

I. Phương trình tham số của đường thẳng

1. Vector chỉ phương của đường thẳng

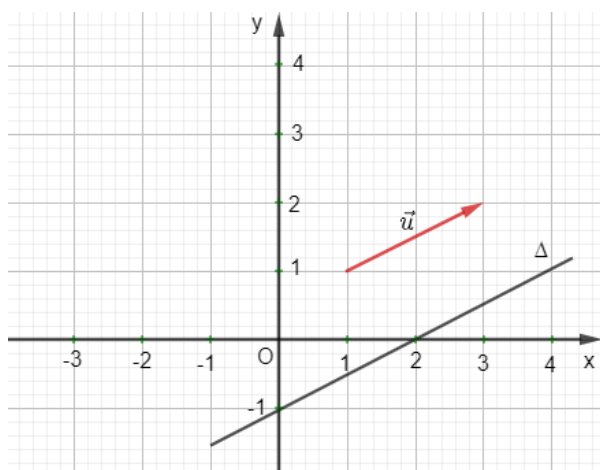
Vector \vec{u} được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của \vec{u} song song hoặc trùng với Δ .



Nhận xét:

- Nếu \vec{u} là một vector chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là một vector chỉ phương của Δ .
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vector chỉ phương của đường thẳng đó.

Ví dụ: Đường thẳng Δ đi qua điểm $(2 ; 0)$ và $(0 ; -1)$ có vector chỉ phương \vec{u} như hình vẽ sau:



2. Phương trình tham số của đường thẳng

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($a^2 + b^2 > 0$ và t là tham số) được gọi là phương trình tham số của

đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a ; b)$ làm vector chỉ phương.

Nhận xét: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($a^2 + b^2 >$

0 và t là tham số).

+ Với mỗi giá trị cụ thể của t , ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ . Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ , ta xác định được một giá trị cụ thể của t .

+ Vector $\vec{u} = (a ; b)$ là một vector chỉ phương của Δ .

Ví dụ:

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1 ; 3)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$. Chỉ ra tọa độ một

vector chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ .

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1 ; 3)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

b) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$.

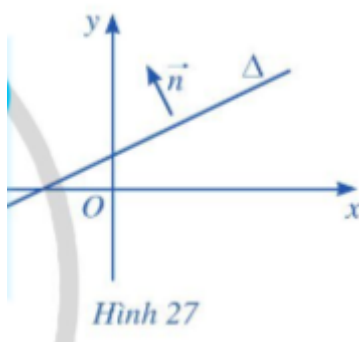
Khi đó Δ có một vector chỉ phương là $(2 ; -1)$ và điểm $(4 ; -3)$ thuộc Δ .

Vậy Δ có một vector chỉ phương là $(2 ; -1)$ và điểm $(4 ; -3)$ thuộc Δ .

II. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Vector pháp tuyến của đường thẳng

Vector \vec{n} được gọi là vector pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vector \vec{n} vuông góc với Δ .



Nhận xét:

- Nếu \vec{n} là một vector pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vector pháp tuyến của Δ .
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vector pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu một đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a ; b)$ thì vector $\vec{n} = (-b ; a)$ là một vector pháp tuyến của Δ .

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

Nhận xét:

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a ; b)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$.
- Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trong mặt phẳng tọa độ nhận một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$.

Ví dụ: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, phương trình của đường thẳng d là : $-2(x - 1) + (-3).(y + 2) = 0$.

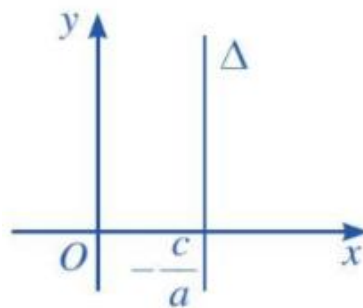
Từ đó, ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng d là $-2x - 3y - 4 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của d là $-2x - 3y - 4 = 0$.

3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0).

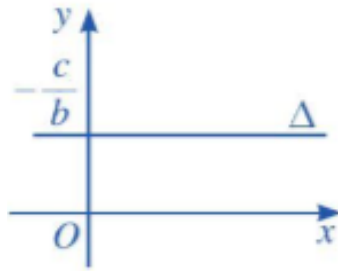
a) Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $ax + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$.



Hình 29

b) Nếu $b \neq 0$ và $a = 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $by + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$

(Hình 30).

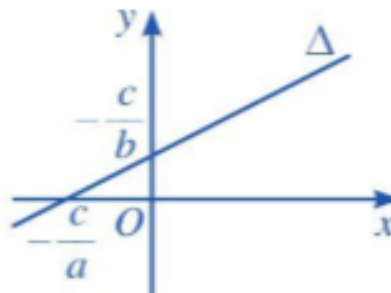


Hình 30

c) Nếu $b \neq 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ có thể viết thành

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Khi đó, đường thẳng Δ là đồ thị hàm số bậc nhất $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ với hệ số góc là $k = -\frac{a}{b}$ (Hình 31).



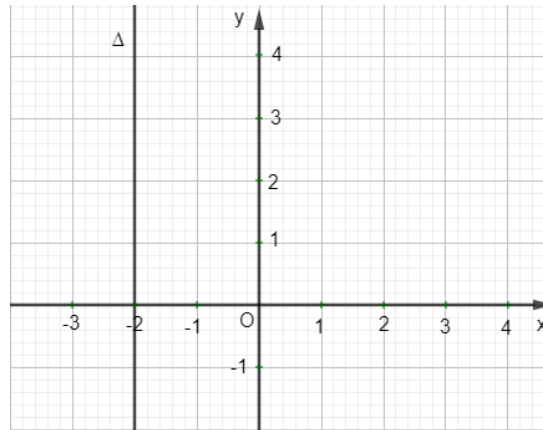
Hình 31

Nhận xét:

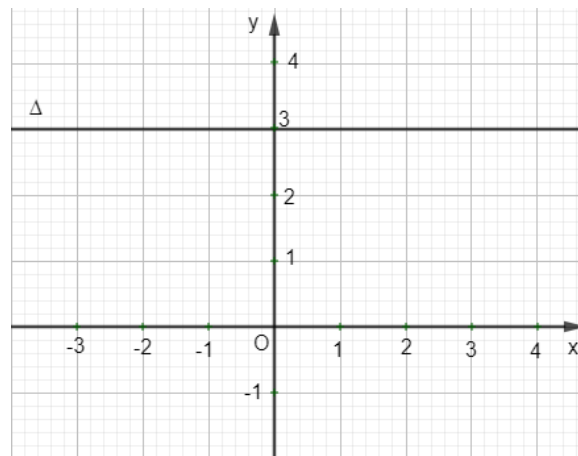
- Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị của hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.
- Phương trình trục hoành là $y = 0$, phương trình trục tung là $x = 0$.

Ví dụ:

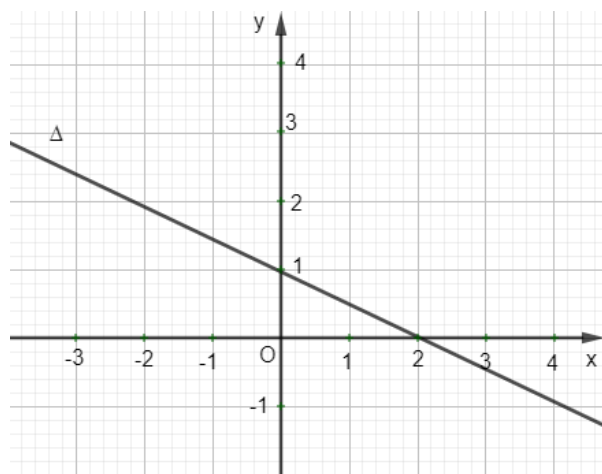
a) Cho phương trình đường thẳng Δ là $2x + 4 = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm $(-2 ; 0)$



b) Cho phương trình đường thẳng Δ là $3x - 9 = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm $(0 ; 3)$



c) Cho phương trình đường thẳng Δ là $x + 2y - 2 = 0$. Khi đó, đường thẳng Δ là đồ thị của hàm số bậc nhất $y = -\frac{1}{2}x + 1$ với hệ số góc $k = -\frac{1}{2}$.



III. Lập phương trình đường thẳng

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vector pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a ; b)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) làm vector pháp tuyến là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Ví dụ: Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -2)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2 ; 3)$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, phương trình của đường thẳng Δ là: $2(x - 2) + 3.(y + 2) = 0$.

Từ đó, ta nhận được phương trình của đường thẳng Δ là $2x + 3y + 2 = 0$.

Vậy phương trình của Δ là $2x + 3y + 2 = 0$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vector chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a ; b)$

($\vec{u} \neq \vec{0}$) làm vector chỉ phương là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Ví dụ: Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -3)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 2)$ và có vector

chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -3)$ là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$.

Cách 2: Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 2)$ và có vector chỉ phương

$\vec{u} = (1; -3)$ nên có phương trình là $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow -3x - y - 1 = 0$.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $-3x - y - 1 = 0$.

3. Lập phương trình đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$ nên nhận vector $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ làm vector chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

Nếu $x_1 - x_0 \neq 0$ và $y_1 - y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ

ở dạng: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

Ví dụ: Lập phương trình Δ đi qua hai điểm $A(2; 2)$ và $B(-1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Phương trình Δ đi qua hai điểm $A(2; 2)$ và $B(-1; 3)$ là

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2; 2)$ và $B(-1; 3)$ là $x + 3y - 8 = 0$.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $-x + 7y - 5 = 0$.

a) Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ lần lượt với các trục Ox , Oy .

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $-x + 7y - 5 = 0$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 7)$.

Suy ra đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (7 ; 1)$.

Ta thấy điểm $A(-5 ; 0)$ thuộc Δ .

Khi đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-5 ; 0)$ có vector chỉ

phương $\vec{u} = (7 ; 1)$ là:
$$\begin{cases} x = -5 + 7t \\ y = t \end{cases}.$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = -5 + 7t \\ y = t \end{cases}.$$

b) Tọa độ giao điểm của Δ với trục Ox là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} -x + 7y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ
$$\begin{cases} -x + 7y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
 ta được
$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ giao điểm của Δ với trục Ox là $(-5 ; 0)$.

Tọa độ giao điểm của Δ với trục Oy là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} -x + 7y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Giải hệ
$$\begin{cases} -x + 7y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
 ta được
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Suy ra tọa độ giao điểm của Δ với trục Oy là $\left(0; \frac{5}{7}\right)$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ với trục Ox, Oy lần lượt là $(-5 ; 0)$ và $\left(0; \frac{5}{7}\right)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(0; 4)$, $B(-3; 2)$, $C(1; 6)$.

a) Lập phương trình của đường thẳng BC.

b) Lập phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Lập phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng BC đi qua hai điểm B(-3; 2), C(1; 6) là

$$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y-2}{6-2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{4} \Leftrightarrow x - y + 5 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng BC là $x - y + 5 = 0$.

b) Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của AB.

$$\text{Khi đó } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + (-3)}{2} = \frac{-3}{2}; \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

$$\text{Suy ra } I\left(\frac{-3}{2}; 3\right).$$

Đường trung trực của AB đi qua điểm I và nhận vector $\overrightarrow{AB} = (-3; -2)$ làm vector pháp tuyến.

Khi đó đường trung trực của AB có phương trình là:

$$-3\left(x - \frac{-3}{2}\right) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + \frac{21}{2} = 0.$$

Vậy phương trình đường trung trực của AB là $-3x - 2y + \frac{21}{2} = 0$.

c) Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng BC.

$$\text{Khi đó } x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4.$$

Suy ra $M(-1; 4)$.

Đường trung tuyến AM đi qua hai điểm A và có vector chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (-1; 0)$ có

$$\text{phương trình là: } \begin{cases} x = -t \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy đường trung tuyến AM có phương trình là $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 \end{cases}$.

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng d biết:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(4; 3)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -4)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1)$.

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(2; -6)$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(4; 3)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -4)$ là: $3(x - 4) - 4(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$.

Vậy phương trình của Δ là $3x - 4y = 0$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2)$ và có vector chỉ

phương là $\vec{u} = (1; 1)$ là
$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2)$ và có vector chỉ

phương là $\vec{u} = (1; 1)$ là
$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \end{cases}.$$

c) Phương trình d đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(2; -6)$ là

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-3}{-6-3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-9} \Leftrightarrow 3x + y = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(2; -6)$ là $3x + y = 0$.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (3; 5)$ có phương trình tham số là:

A. $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases};$

B. $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases};$

$$\text{C. } d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases};$$

$$\text{D. } d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M(1; -2) \in d \\ \vec{u}_d = (3; 5) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình tham số } d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -1)$ và $B(1; 5)$ là:

$$\text{A. } -2x + 3y + 6 = 0;$$

$$\text{B. } 3x - 2y + 10 = 0;$$

$$\text{C. } 3x - 2y + 6 = 0;$$

$$\text{D. } 3x + y - 8 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

$$\text{Vector chỉ phương của AB là } \vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (-2; 6)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{AB} = (3; 1) \text{ là vector pháp tuyến của đường thẳng qua hai điểm A, B.}$$

Mặt khác $A(3; -1) \in AB$, suy ra phương trình tổng quát của đường thẳng AB là:

$$3(x - 3) + 1(y + 1) = 0 \text{ hay } 3x + y - 8 = 0.$$

Câu 3. Phương trình đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại $A(-2; 0)$ và $B(0; 4)$ là:

A. $2x - 3y + 2 = 0$;

B. $4x - 2y + 8 = 0$;

C. $3x - 3y - 6 = 0$;

D. $2x - 3y - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A(-2; 0) \in Ox \\ B(0; 4) \in Oy \end{cases}$$

Do đó, phương trình đường thẳng: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 2y + 8 = 0$ hay $2x - y + 4 = 0$.