

BÀI CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3

Trang 65

Bài 1 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

Tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x; y)$ của các conic sau:

a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1;$

b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1;$

c) $y^2 = 11x.$

Lời giải:

a) Elip có $a^2 = 169, b^2 = 144 \Rightarrow a = 13, b = 12, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$

Tọa độ các đỉnh của elip là $A_1(-13; 0), A_2(13; 0), B_1(0; -12), B_2(0; 12).$

Tọa độ các tiêu điểm của elip là $F_1(-5; 0), F_2(5; 0).$

Các bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x; y)$ là $MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 13 + \frac{5}{13}x; MF_2 = a -$

$$\frac{c}{a}x = 13 - \frac{5}{13}x.$$

b) Hypebol có $a^2 = 25, b^2 = 144 \Rightarrow a = 5, b = 12, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 144} = 13.$

Tọa độ các đỉnh của hypebol là $A_1(-5; 0), A_2(5; 0).$

Tọa độ các tiêu điểm của hypebol là $F_1(-13; 0), F_2(13; 0).$

Các bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x; y)$ là $MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 5 + \frac{13}{5}x \right|; MF_2 =$

$$\left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 5 - \frac{13}{5}x \right|.$$

c) Parabol có $2p = 11$, suy ra $p = \frac{11}{2}.$

Toạ độ đỉnh của parabol là $O(0; 0)$.

Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{11}{4}; 0\right)$.

Bán kính qua tiêu ứng với điểm $M(x; y)$ là $MF = x + \frac{p}{2} = x + \frac{11}{4}$.

Bài 2 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- a) Xác định toạ độ các đỉnh, tiêu điểm và tìm tâm sai của (E).
- b) Viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là tiêu điểm có hoành độ dương của (E).
- c) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có hai đỉnh là hai tiêu điểm của (E), hai tiêu điểm là hai đỉnh của (E). Tìm tâm sai của (H).

Lời giải:

a) Có $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$, $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Toạ độ các đỉnh của elip là $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

Toạ độ các tiêu điểm của elip là $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

Tâm sai của elip là $e = \frac{4}{5}$.

b) Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

(P) có tiêu điểm là $F_2(4; 0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$

\Rightarrow Phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 16x$.

c) Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$).

(H) có hai đỉnh là $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; hai tiêu điểm là $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$

$$\Rightarrow a = 4, c = 5 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 3 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

Xác định tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$;

b) $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{2} = 1$;

c) $y^2 = 7x$.

Lời giải:

a) Đây là một elip.

$$\text{Có } a^2 = 16, b^2 = 12 \Rightarrow a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2,$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

Suy ra elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$, đường chuẩn $\Delta_1: x = -8$; tiêu điểm $F_2(2;0)$, đường chuẩn $\Delta_2: x = 8$ và tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

b) Đây là một hypebol.

$$\text{Có } a^2 = 14, b^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{14}, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4,$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}, \frac{a}{e} = \frac{\sqrt{14}}{\frac{2\sqrt{14}}{7}} = \frac{7}{2}.$$

Suy ra hypebol có tiêu điểm $F_1(-4;0)$, đường chuẩn $\Delta_1: x = -\frac{7}{2}$; tiêu điểm $F_2(4;0)$,

đường chuẩn $\Delta_2: x = \frac{7}{2}$ và tâm sai $e = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.

c) Đây là một parabol.

$$\text{CÓ } 2p = 7, \text{ suy ra } p = \frac{7}{2}.$$

Suy ra parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{7}{4}; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{7}{4}$ và tâm sai $e = 1$.

Bài 4 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

Cho đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$ và điểm $F(1; 1)$. Viết phương trình đường conic nhận F là tiêu điểm, d là đường chuẩn và có tâm sai e trong mỗi trường hợp sau:

a) $e = \frac{1}{2}$;

b) $e = 1$;

c) $e = 2$.

Lời giải:

a) Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kì thuộc conic. Khi đó, ta có: $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = \frac{|x+y-1|^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x+x^2) + (1-2y+y^2) = \frac{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8(1-2x+x^2+1-2y+y^2) = x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 7y^2 - 2xy - 14x - 14y + 15 = 0.$$

Vậy phương trình của conic đã cho là $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 14x - 14y + 15 = 0$.

b) Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kì thuộc conic. Khi đó, ta có: $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = \frac{|x+y-1|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x+x^2) + (1-2y+y^2) = \frac{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(1-2x+x^2+1-2y+y^2) = x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Vậy phương trình của conic đã cho là $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

c) Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kì thuộc conic. Khi đó, ta có: $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = 2 \cdot \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{2} \cdot |x+y-1|$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 = 2|x+y-1|^2$$

$$\Leftrightarrow (1-2x+x^2) + (1-2y+y^2) = 2(x^2+y^2+1+2xy-2x-2y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 2y = 0.$$

Vậy phương trình của conic đã cho là $x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 2y = 0$.

Bài 5 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

Mặt Trăng chuyển động theo một quỹ đạo là đường elip có tâm sai bằng 0,0549 và nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Biết khoảng cách gần nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là 362600 km. Tính khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng.

Nguồn: <https://www.universetoday.com>



Hình 1. Trái Đất và Mặt Trăng

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho tâm Trái Đất trùng với tiêu điểm F_1 của elip và trục Ox đi qua hai tiêu điểm của elip, đơn vị trên các trục tọa độ là kilômét.

Khi đó phương trình của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Gọi tọa độ của Mặt Trăng là $M(x; y)$ thì khoảng cách giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là $MF_1 = a - ex \geq a - ea$ (vì $x \leq a$). Do đó khoảng cách gần nhất giữa tâm Trái

Đất và tâm Mặt Trăng là $a - ea$, suy ra $a - ea = 362600 \Rightarrow a = \frac{362600}{1-e}$.

Mặt khác vì $x \geq -a$ nên $a - ex \leq a + ea$ nên khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là $a + ea = a(1 + e) = \frac{362600}{1 - e}(1 + e) \approx 404726$ (km).

Vậy khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng là 404726 km.

Bài 6 trang 65 Chuyên đề Toán 10:

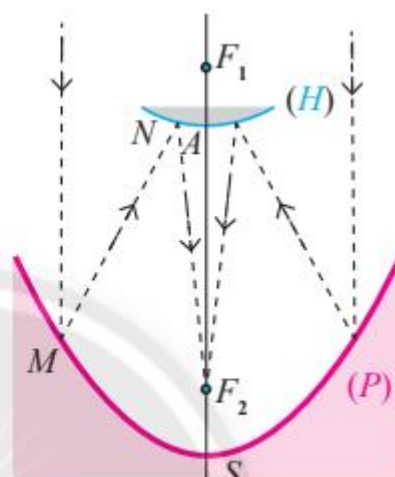
Ta đã biết tính chất quang học của ba đường conic (xem phần đọc thêm **Bạn có biết?** ở trang 72, sách giáo khoa Toán 10, tập hai). Hypebol cũng có tính chất quang học tương tự như elip: Tia sáng hướng tới tiêu điểm F_1 của hypebol (H) khi gặp một nhánh của (H) sẽ cho tia phản xạ đi qua F_2 . Một nhà nghiên cứu thiết kế một kính thiên văn vô tuyến chứa hai gương có mặt cắt hình parabol (P) và hình một nhánh của hypebol (H). Parabol (P) có tiêu điểm F_1 và đỉnh S. Hypebol (H) có đỉnh A, có chung một tiêu điểm là F_1 với (P) và còn có tiêu điểm thứ hai F_2 (Hình 3).

Nguyên tắc hoạt động của kính thiên văn đó như sau: Tín hiệu đến từ vũ trụ được xem như song song với trục của parabol (P), khi đến điểm M của (P) sẽ cho tia phản xạ theo hướng MF_1 , tia này gặp (H) tại điểm N và cho tia phản xạ tới F_2 là nơi thu tín hiệu. Cho biết $SF_1 = 14$ m, $SF_2 = 2$ m và $AF_1 = 1$ m. Hãy viết phương trình chính tắc của (P) và (H).

(Nguồn: <https://sciencestruck.com/parabolic-mirror-working-principle-applications>)



Hình 2



Hình 3

Lời giải:

+) Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) nên $2c = F_1F_2 = SF_1 - SF_2 = 14 - 2 = 12$, suy ra $c = 6$.

$$AF_2 = F_1F_2 - AF_1 = 12 - 1 = 11.$$

Vì A thuộc (H) nên $2a = |AF_1 - AF_2| = |1 - 11| = 10$, suy ra $a = 5$,

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 5^2 = 11.$$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

+) Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

S là đỉnh và F_1 là tiêu điểm của parabol nên $\frac{p}{2} = SF_1 = 14$, suy ra $p = 28$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 56x$.

Trang 66

Bài 7 trang 66 Chuyên đề Toán 10:

Mặt cắt của một chảo ăng-ten là một phần của parabol (P). Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}$ m.



Hình 4

a) Viết phương trình chính tắc của (P).

b) Tính khoảng cách từ một điểm $M(0,06; 0,2)$ trên ăng-ten đến F.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

$$\text{Ta có } \frac{p}{2} = OF = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{phương trình chính tắc của parabol là } y^2 = \frac{2}{3}x.$$

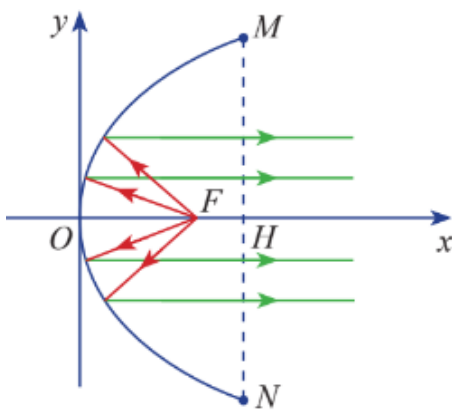
b) Theo công thức bán kính qua tiêu ta có:

$$MF = x + \frac{p}{2} = 0,06 + \frac{1}{6} = \frac{59}{150} \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm $M(0,06; 0,2)$ trên ăng-ten đến F là $\frac{59}{150}$ mét.

Bài 8 trang 66 Chuyên đề Toán 10:

Gương phản chiếu của một đèn chiếu có mặt cắt hình parabol (Hình 5). Chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32$ cm và chiều sâu của gương là $OH = 24$ cm.



Hình 5

a) Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

b) Biết bóng đèn đặt tại tiêu điểm F của gương. Tính khoảng cách từ bóng đèn tới đỉnh O của gương.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Dựa vào hình vẽ, ta có: khi $x = 24$ thì $y = 16$

$$\Rightarrow 16^2 = 2p \cdot 24 \Rightarrow p = \frac{16}{3}.$$

Vậy phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = \frac{32}{3}x$.

b) Khoảng cách từ bóng đèn tới đỉnh O của gương là $OF = \frac{p}{2} = \frac{8}{3}$ (cm).