Bài 2. Phép tịnh tiến

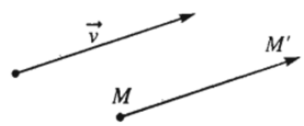
A. Lý thuyết

I. Định nghĩa.

- **Định nghĩa**: Trong mặt phẳng, cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là *phép tịnh tiến* theo vectơ $\vec{v}$.

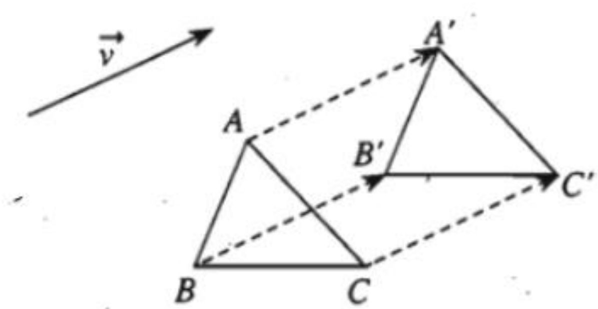
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$; $\vec{v}$ được gọi là *vectơ tịnh tiến*.

Vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



- Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là *phép đồng nhất*.

- **Ví dụ 1**. Cho hình vẽ sau:



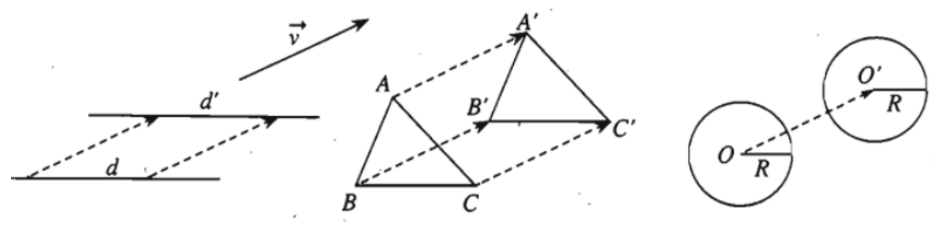
Ta có: $T_{\vec{v}}(A) = A'; T_{\vec{v}}(B) = B'; T_{\vec{v}}(C) = C'$.

II. Tính chất

- **Tính chất 1**. Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'; T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra M’N’ = MN.

Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

- **Tính chất 2**. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



III. Biểu thức tọa độ.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v}(a; b)$. Với mỗi điểm M(x ; y) ta có M'(x' ; y') là ảnh của điểm M qua tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Khi đó: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

đây chính là *biểu thức tọa độ* của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(1 ; – 2). Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(1;3)$ biến A thành điểm A' có tọa độ là bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi tọa độ điểm A' = (x'; y').

$\overrightarrow{AA'} = (x' - 1; y' + 2)$

$T_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(2;1)$.

Vậy tọa độ điểm A'(2 ; 1).

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành M_1 và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2. Hỏi tịnh tiến theo vectơ $(\vec{u} + \vec{v})$ biến điểm M thành điểm nào?

Lời giải:

Theo giả thiết ta có:

$T_{\vec{u}}(M) = M_1 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM_1}$ (1)

$T_{\vec{v}}(M_1) = M_2 \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2}$

$\Rightarrow T_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M_2$

Vậy tịnh tiến theo vectơ $(\vec{u} + \vec{v})$ biến điểm M thành điểm M_2.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm A(2; 1); B(– 1; – 4). Gọi C và D lần lượt là ảnh của A và B qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(1\,;5)$. Tính độ dài đoạn thẳng CD?

Lời giải:

Ta có: $AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{34}$

Vì $T_{\vec{v}}(A) = C; T_{\vec{v}}(B) = D$ nên theo tính chất của phép tịnh tiến ta có:

$CD = AB = \sqrt{34}$

Vậy $CD = \sqrt{34}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}(1; -3)$ và đường thẳng d có phương trình 2x – 3y + 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Lời giải:

Cách 1. Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Lấy điểm M(x ; y) tùy ý thuộc d, ta có: 2x – 3y + 5 = 0 (1).

Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được phương trình:

2(x’ – 1) – 3(y’ + 3) + 5 = 0 hay 2x’ – 3y’ – 6 = 0.

Vậy ảnh của d là đường thẳng d’: 2x – 3y – 6 = 0.

Cách 2. Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Do $T_{\vec{v}}(d) = d'$ nên d’ song song hoặc trùng với d.

Suy ra, phương trình đường thẳng d’ có dạng: 2x – 3y + c = 0 (2).

Lấy điểm M(– 1; 1) thuộc d.

Khi đó $T_{\vec{v}}(M) = M'(x';\ y')$.

$$\begin{cases} x' = -1 + 1 = 0 \\ y' = 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow M'(0; -2)$$

Do M’ thuộc d’ nên thay tọa độ M’ vào d’ ta được:

2.0 – 3.(– 2) + c = 0 nên c = – 6.

Vậy ảnh của d là đường thẳng d’: 2x – 3y – 6 = 0.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(1;1)$.

Lời giải:

Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến:

Đường tròn (C) có tâm I(–1 ; 2) và bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 - (-4)} = 3$.

Gọi ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(1;1)$ là (C’) có tâm I’(x’; y’) và bán kính R’ = R = 3.

Ta tìm tâm I’(x’; y’).

Ta có: $\begin{cases} x' = -1 + 1 = 0 \\ y' = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow I'(0;3)$

Do đó, phương trình của đường tròn (C’) là $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.