Tổng và hiệu của hai vectơ và cách giải bài tập

A. Lí thuyết.

- Tổng của hai vectơ: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ tùy ý. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ tức là: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

- Tính chất của phép cộng các vectơ: Với các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý ta có:

+) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

+) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (tính chất kết hợp);

+) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vectơ – không)

- Vectơ đối: Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Kí hiệu là $-\vec{a}$.

- Hiệu của hai vectơ: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tùy ý. Ta có: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

- Quy tắc ba điểm: Với A, B, C tùy ý ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

- Quy tắc hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

- Quy tắc trung điểm: Với I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

- Quy tắc trọng tâm: Với G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

- Chú ý: Vectơ đối của vectơ - không là vectơ - không.

B. Các dạng bài.

Dạng 1: Tìm tổng của hai hay nhiều vectơ.

Phương pháp giải:

Dùng định nghĩa tổng của hai vectơ, quy tắc ba điểm về tổng, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vectơ.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho 5 điểm tùy ý A, B, C, D, E. Tính tổng $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}$.

Giải:

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}$

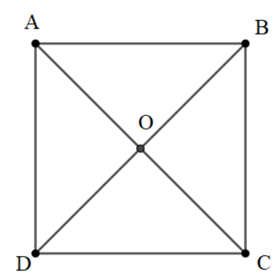
$=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$ (áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp)

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ (áp dụng quy tắc ba điểm)

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ (áp dụng tính chất giao hoán)

$=\overrightarrow{BA}$ (áp dụng quy tắc ba điểm)

Bài 2: Cho hình vuông ABCD tâm O. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AD}$.



Giải:

+) Vì ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ AB // DC và AB = DC.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

+) Áp dụng quy tắc ba điểm cho D, C, B ta có: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$

+) Vì A, O, C cùng nằm trên một đường thẳng và OA = OC (O là tâm hình vuông ABCD) $\Rightarrow \overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

+) Áp dụng quy tắc ba điểm cho O, A, D ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$

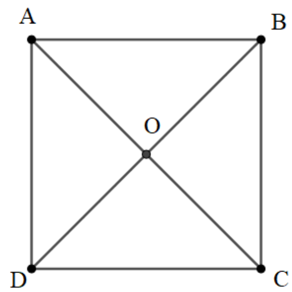
Dạng 2: Tìm vectơ đối và hiệu của hai vectơ.

Phương pháp giải:

Dùng định nghĩa hiệu của hai vectơ, tìm vectơ đối và áp dụng quy tắc ba điểm về hiệu.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Tìm vectơ đối của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}$.



Giải:

+) Vì $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ và $\overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

+) Vì AB = DC , AB // DC (do ABCD là hình vuông)

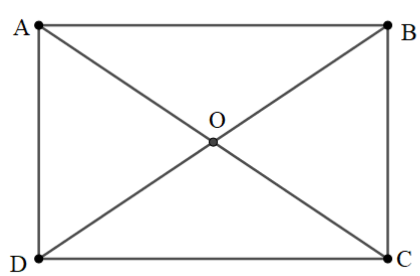
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

+) Vì A, O, C là ba điểm thẳng hàng và OA = OC (do ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CO}$ và $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$ $\Rightarrow \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO}$.

Vậy $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CO}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AO}$.

Bài 2: Cho hình chữ nhật ABCD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Tính các hiệu $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{DO})$.



Giải:

+) Vì $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$ và $\overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

+) Ta có: $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$.

+) Áp dụng quy tắc ba điểm cho ba điểm A, D, B có: $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

+) Vì $\left|\overrightarrow{DO}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=OD$ và $\overrightarrow{OD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{DO}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{DO}$.

+) Ta có: $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CO}+(-\overrightarrow{DO})=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CD}$.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức vectơ.

Phương pháp giải: Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, trung điểm, trọng tâm, để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế để được hai vế bằng nhau hoặc ta cũng có thể biến đổi đẳng thức véctơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ đã được công nhận là đúng.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho sáu điểm tùy ý A, B, C, D, E, F. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$$

Giải:

+) Áp dụng quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

$\Rightarrow VT=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

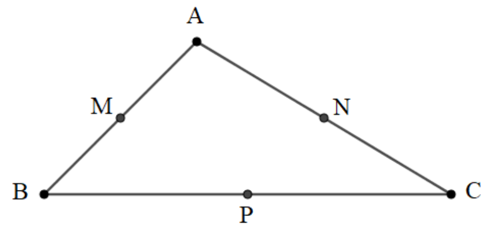
$\Rightarrow VT=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF})+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$

+) Áp dụng quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$

$\Rightarrow VT=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF})+\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow VT=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=VP$ (điều cần phải chứng minh)

Bài 2: Cho tam giác ABC. Cho M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Điểm O bất kì. Chứng minh đẳng thức: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.



Giải:

Giả sử $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ là đúng.

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$ (1)

Vì N là trung điểm của AC $\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}$

Xét tam giác ABC có MN là đường trung bình và P là trung điểm của BC .

$\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}BC=BP \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BP}$

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}\right)+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=-\overrightarrow{MN}$ (luôn đúng)

$\Rightarrow$ Đẳng thức $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ là đúng.

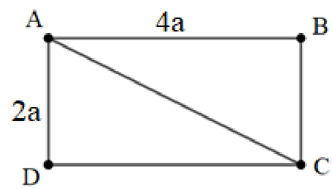
Dạng 4: Tính độ dài các vectơ tổng hoặc hiệu.

Phương pháp giải:

Đưa tổng hoặc hiệu của các véctơ về một véctơ có độ dài là một cạnh của đa giác để tính độ dài của vectơ.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD. Biết AB = 4a, AD = 2a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.



Giải:

+) Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$

+) Vì ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow$ BC = AD = 2a.

+) Xét tam giác ABC vuông tại B.

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

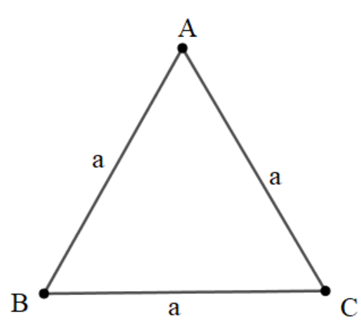
$AC^2=AB^2+BC^2$

$\Rightarrow AC^2=(4a)^2+(2a)^2=20a^2$

$\Rightarrow AC=\sqrt{20a^2}=2\sqrt{5}a$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=2\sqrt{5}a$

Bài 2: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}\right|$.



Giải:

+) Vì $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB$ và $\overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

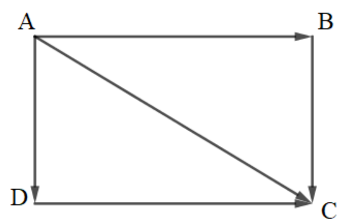
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

+) Ta có: $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a$

C. Bài tập tự luyện.

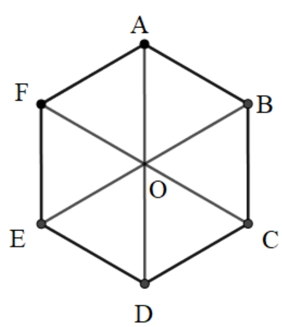
Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Đáp án: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Bài 2: Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Tính tổng sau:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

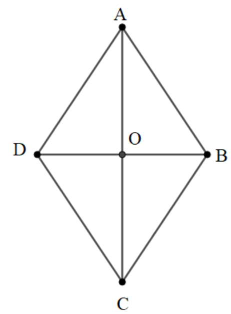


Đáp án: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

Bài 3: Cho 5 điểm tùy ý M, N, P, Q, E. Tính tổng $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{PE}$.

Đáp án: $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ME}$

Bài 4: Cho hình thoi ABCD tâm O. Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

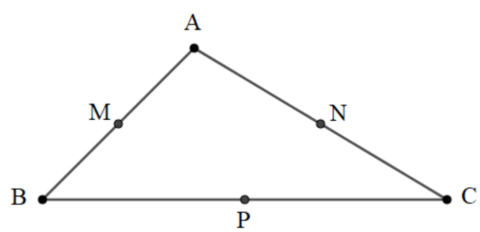


Đáp án: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$

Bài 5: Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Tính hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}$.

Đáp án: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Bài 6: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Tính hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$.



Đáp án: $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$

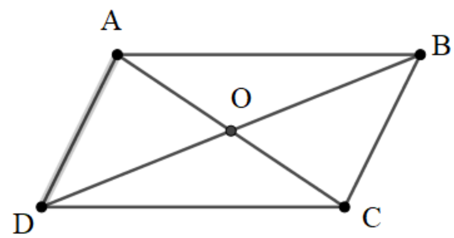
Bài 7: Cho 5 điểm A, B, C, D, E tùy ý. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$$

Đáp án: $VT=\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}=VP$

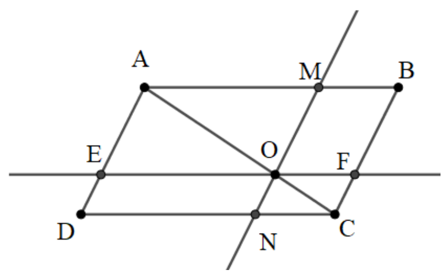
Bài 8: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$



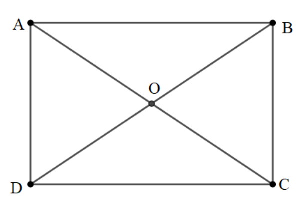
Đáp án: $VT = \overrightarrow{BA}; VP = \overrightarrow{CD}$ mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow VT = VP$

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD. O là điểm tùy ý thuộc đường chéo AC. Từ O kẻ đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành, cắt AB tại M, cắt DC tại N, cắt BC tại F, cắt AD tại E. Chứng minh: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$.



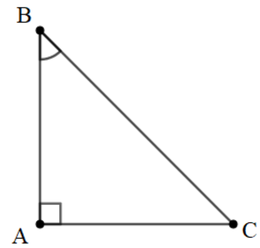
Đáp án: $VP = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BD} = VT$

Bài 10: Cho hình chữ nhật ABCD tâm O . Biết AB = 2a, AD = a. Tính $\left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right|$



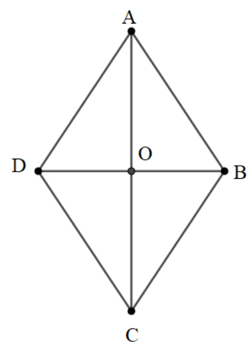
Đáp án: $\left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right| = a\sqrt{5}$

Bài 11: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A. Có $B = 60^o$, AB = a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|$.



Đáp án: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = a\sqrt{3}$

Bài 12: Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh a. Biết $\widehat{BAD} = 60^o$. Tính $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$



Đáp án: $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right| = a\sqrt{3}$