Công thức tìm số hạng trong khai triển

1. Tổng hợp lý thuyết

Xét khai triển: (với a,b là các hệ số; x, y là biến)

$$(ax+by)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ax)^{n-k}(by)^k$$

$$=C_n^0a^nx^n+C_n^1a^{n-1}b.x^{n-1}y+C_n^2a^{n-2}b^2.x^{n-2}y^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}.xy^{n-1}+C_n^nb^ny^n$$

- Số hạng thứ k + 1 của khai triển: $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^kx^{n-k}y^k$

- Hệ số của số hạng thứ k + 1 của khai triển: $C_n^ka^{n-k}b^k$

2. Các công thức

* Với khai triển $(ax^p + bx^q)^n$ (p, q là các hằng số)

Ta có: $\left(ax^p+bx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(ax^p\right)^{n-k}\left(bx^q\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^kx^{np-pk+qk}$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa mãn: np – pk + qk = m

Từ đó tìm $k=\dfrac{m-np}{q-p}$

Vậy số hạng chứa x^m là: $C_n^ka^{n-k}.b^kx^m$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

* Với khai triển $P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n$ (p, q là các hằng số)

Ta có: $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(bx^p\right)^{k-j}\left(cx^q\right)^j$$

Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được số hạng chứa x^m.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển: $(2 – 3x)^{20}$

Lời giải

Khai triển: $\left(2-3x\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k.2^{20-k}\left(-3x\right)^k$

Số hạng thứ k + 1 của khai triển là: $T_{k+1}=C_{20}^k.2^{20-k}\left(-3x\right)^k$

Cần tìm số hạng thứ 6 nên k = 5.

Vậy số hạng thứ 6 trong khai triển là: $T_6=C_{20}^52^{20-5}\left(-3x\right)^5=-C_{20}^52^{15}3^5x^5$.

Ví dụ 2: Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển: $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x^{-3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}.\left(x^{-3}\right)^{12-k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}.x^{-36+3k+\frac{5}{2}k}$$

Cần tìm số hạng chứa x^8 nên $-36+3k+\frac{5}{2}k=8\Leftrightarrow k=8$

Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển là $C_{12}^{8}x^8=495x^8$.