BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số y = f(x) xác định trên K hoặc trên K \ {x_0}.

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to\infty} x = x_0, \lim\limits_{x\to\infty} c = c$ với c là hằng số.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$.

Giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq 2$ và $x_n \to 2$ khi $n \to +\infty$.

Ta có:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^3-8}{x_n-2} = \lim \frac{(x_n-2)(x_n^2+2x_n+4)}{x_n-2} = \lim (x_n^2+2x_n+4) = 12.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M;$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x).g(x)=L.M;$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}\ (M\neq 0);$

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

(Dấu của f(x) được xét trên khoảng đang tìm giới hạn với $x\neq x_0$).

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4}(1-x)=-3<0$, $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên (x_0; b).

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số y = f(x) khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; x_0).

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số y = f(x) khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

Định lí 2

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 \text{ khi } x \geq 0 \\ 2x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm $\lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to 0^-} f(x)$ và $\lim_{x\to 0} f(x)$ (nếu có).

Giải

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}+1) = 0;\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0;$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

Do đó $\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$

Vậy $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ và $\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3

a) Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; +∞).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x → +∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

b) Cho hàm số y = f(x) xác định trên (–∞; a).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x → –∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$

Chú ý:

a) Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$\lim_{x\to +\infty} c = c;\ \lim_{x\to -\infty} c = c;\ \lim_{x\to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0;\ \lim_{x\to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x_n \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; +∞).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là –∞ khi x ⟶ +∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-f(x)\right) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) Nếu k chẵn thì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$;

Nếu k lẻ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$.

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
L > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
L < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$

(Dấu của g(x) xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp:

$x \to x_0^+, x \to x_0^-; x \to +\infty; x \to -\infty.$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4 - 3x + 8\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{5x-6}{2x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x}{x+3}$;

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4 - 3x + 8\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^4\left(1 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{8}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 . \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{8}{x^4}\right) = +\infty$

(Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{8}{x^4}\right) = 1$).

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{5x-6}{2x-2} = \lim\limits_{x\to 1^-}(5x-6) : \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-2) = +\infty$

(Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} 5x-6 = -1 < 0; \lim\limits_{x\to 1^-} 2x-2 = 0$ và 2x – 2 < 0 với mọi x < 1).

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3^+} x : \lim\limits_{x\to -3^+} x+3 = -\infty$

(Vì $\lim\limits_{x\to -3^+} x = -3 < 0; \lim\limits_{x\to -3^+} x+3 = 0$ và x + 3 > 0 với mọi x > - 3).

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-1\ \ 1-2x^{\ 5}}{x^3-9}$;

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1\ \ \sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}-2\ \ \sqrt{x+3}+2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1\ \ \sqrt{x+3}+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+3}{1-\dfrac{9}{x^3}} = \dfrac{3}{1} = 3$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}.\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right) = 0$

(Vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty; \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right) = 0$).

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1\ \ 1-2x\ ^5}{x^7+x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)^5}{1+\frac{1}{x^6}+\frac{3}{x^7}}=\frac{-2}{1}=-2$.

Bài 2. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-2x}{4x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{x^2-2}$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x)=\frac{1-2x}{4x+1}$

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\neq-\frac{1}{4}$ và $x_n\to2$ khi $n\to+\infty$. Ta có:

$$\lim\limits_{x_n\to2}f(x_n)=\lim\limits_{x_n\to2}\frac{1-2x_n}{4x_n+1}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-2x}{4x+1}=-\frac{1}{3}$.

b) Xét $g\ \ x\ \ =\frac{3x^2+4}{x^2-2}$

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\ \ \pm\sqrt{2}\ \ $.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\neq\pm\sqrt{2}$ và $x_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$. Ta có:

$$\lim\limits_{x\to-\infty}g\ \ x_n\ \ =\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3{x_n}^2+4}{{x_n}^2-2}=3$$

$$\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{x^2-2}=3.$$

Bài 3. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{khi } x>1\\ mx+2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

Với giá trị nào của m thì hàm số f(x) có giới hạn khi $x\to 1$? Tìm giới hạn này.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(mx+2)=m+2$$

Để hàm số f(x) có giới hạn khi $x\to 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow m+2=1$

$\Leftrightarrow m=-1$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1.$

Vậy m = -1 thì hàm số f(x) có giới hạn khi $x\to 1$ và giới hạn đó bằng 1.