

Bài 3. Phương trình quy về phương trình bậc hai

A. Lý thuyết

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình:

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$$

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x + 1}$

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x + 1} \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta có:

$$x^2 + 3x - 2 = x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -3.$$

• Với $x = 1$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 - 2} = \sqrt{1 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

• Với $x = -3$ ta thấy $x + 1 = -3 + 1 = -2 < 0$ nên không tồn tại $\sqrt{x + 1}$.

Do đó $x = -3$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình:

$$ax^2 + bx + c = dx + e$$

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2 \quad (2)$$

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$4 + 2x - x^2 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

• Với $x = 0$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{4 + 2 \cdot 0 - 0^2} = 0 - 2 \Leftrightarrow 2 = -2 \text{ (vô lí)}$$

Do đó $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (2).

• Với $x = 3$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{4 + 2 \cdot 3 - 3^2} = 3 - 2 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 3$ là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12};$

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{(6 - x)(2x - 1)} = 0;$

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{2 - x}.$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12} \quad (1)$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 5x + 4 = -2x^2 - 3x + 12$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{-4}{3}$$

• Với $x = 2$ ta có $x^2 - 5x + 4 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -10$.

Khi đó không tồn tại $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

Do đó $x = 2$ không là nghiệm của phương trình (1).

• Với $x = \frac{-4}{3}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) + 4} = \sqrt{-2 \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) + 12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3} \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = \frac{-4}{3}$ là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{-4}{3}$.

$$b) \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{(6-x)(2x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(6-x)(2x-1)} \quad (2)$$

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$x^2 - 4x + 4 = (6-x)(2x-1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12x - 6 - 2x^2 + x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 17x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

• Với $x = 5$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 + 4} = \sqrt{(6-5)(2 \cdot 5 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 5$ là nghiệm của phương trình đã cho.

• Với $x = \frac{2}{3}$ thay vào phương trình (2) ta có: $\frac{4}{3} -$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 4} = \sqrt{\left(6 - \frac{2}{3}\right)\left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{5; \frac{2}{3}\right\}$.

$$\text{c) } \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \quad (3)$$

Bình phương hai vế phương trình (3) ta có:

$$x^2 - 2x + 4 = 2 - x$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$$

(vô lí vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi x).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 1;$$

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1;$$

$$\text{c) } \sqrt{(x-1)(2x-1)} - 2x - 1 = 0;$$

$$\text{d) } x - \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 1 \quad (1)$$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow -x = -1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào phương trình (1) ta có:

$$\sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 2} = 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1 \quad (2)$$

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$4x^2 + 2x + 10 = (3x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2x + 10 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\Rightarrow -5x^2 - 4x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

• Với $x = 1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4.1^2 + 2.1 + 10} = 3.1 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2).

• Với $x = -\frac{9}{5}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4.\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + 2.\left(-\frac{9}{5}\right) + 10} = 3.\left(-\frac{9}{5}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{5} = -\frac{22}{5} \text{ (vô lí)}$$

Do đó $x = -\frac{9}{5}$ không là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

$$c) \sqrt{(x-1)(2x-1)} - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-1)} = 2x + 1 \quad (3)$$

Bình phương hai vế phương trình (3) ta có:

$$(x-1)(2x-1) = (2x+1)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 7x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

• Với $x = 0$ thay vào phương trình (3) ta có:

$$\sqrt{(0-1)(2.0-1)} = 2.0 + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 0$ là nghiệm của phương trình (3).

• Với $x = \frac{-7}{2}$ thay vào phương trình (3) ta có:

$$\sqrt{\left(\frac{-7}{2}-1\right)\left(2.\frac{-7}{2}-1\right)} = 2.\frac{-7}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 6 = -6 \text{ (vô lí)}$$

Do đó $x = \frac{-7}{2}$ không là nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$.

$$\text{d) } x - \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{3x^2 - 9x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2 \quad (4)$$

Bình phương hai vế phương trình (4) ta có:

$$3x^2 - 9x + 1 = (x - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

• Với $x = 3$ thay vào phương trình (4) ta có:

$$\sqrt{3.3^2 - 9.3 + 1} = 3 - 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 3$ là nghiệm của phương trình (4).

• Với $x = \frac{-1}{2}$ thay vào phương trình (4) ta có:

$$\sqrt{3.\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 9.\left(\frac{-1}{2}\right) + 1} = \frac{-1}{2} - 2$$

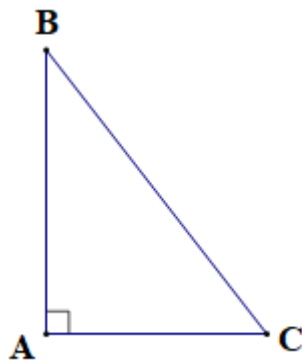
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{-5}{2} \text{ (vô lí)}$$

Do đó $x = \frac{-1}{2}$ không là nghiệm của phương trình (4).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A, có cạnh AC ngắn hơn cạnh BC là 9 cm. Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết chu vi của tam giác bằng 70 cm.

Hướng dẫn giải



Gọi $AC = x$ (cm) ($x > 0$).

Cạnh AC ngắn hơn cạnh BC là 9 cm nên $BC = x + 9$ (cm).

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lý Pythagore ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = (x + 9)^2 - x^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = x^2 + 18x + 81 - x^2 = 18x + 81$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{18x + 81} \text{ (cm)}$$

Ta có chu vi của tam giác ABC là:

$$AB + BC + CA$$

$$= \sqrt{18x + 81} + x + 9 + x$$

$$= \sqrt{18x + 81} + 2x + 9 \text{ (cm)}$$

Mà theo bài chu vi tam giác ABC bằng 70 cm.

$$\text{Do đó ta có: } \sqrt{18x + 81} + 2x + 9 = 70$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{18x + 81} = 61 - 2x \quad (*)$$

Bình phương hai vế của phương trình trên ta có:

$$18x + 81 = (61 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow 18x + 81 = 3721 - 244x + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 262x + 3640 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 45,5 \end{cases}$$

• Với $x = 20$ thay vào phương trình (*) ta có:

$$\sqrt{18.20 + 81} = 61 - 2.20$$

$$\Leftrightarrow 21 = 21 \text{ (đúng)}$$

Do đó $x = 20$ là nghiệm của phương trình (*).

• Với $x = 45,5$ thay vào phương trình (*) ta có:

$$\sqrt{18.45,5 + 81} = 61 - 2.45,5$$

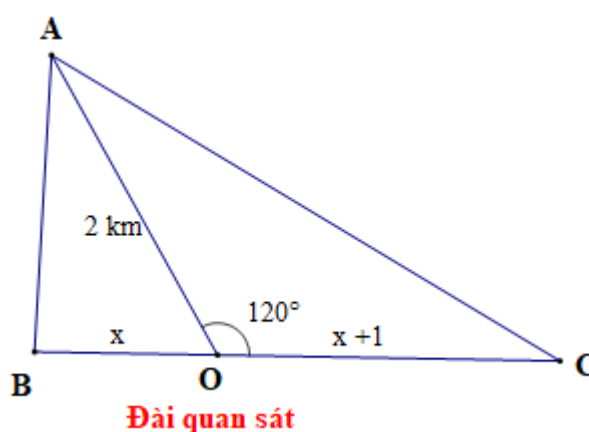
$$\Leftrightarrow 30 = -30 \text{ (vô lí)}$$

Do đó $x = 45,5$ không là nghiệm của phương trình (*).

Khi đó $AC = 20$ (cm), $BC = 29$ (cm) và $AB = \sqrt{18.20 + 81} = 21$ (cm).

Vậy $AC = 20$ cm, $AB = 21$ cm và $BC = 29$ cm.

Bài 4. Một đài quan sát O cách ba vị trí A, B, C như hình vẽ dưới đây.



Tính khoảng cách từ đài quan sát O tới B biết khoảng cách từ vị trí A đến vị trí C gấp đôi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B và khoảng cách từ O đến B ngắn hơn khoảng cách từ O đến A.

Hướng dẫn giải

Vì OB là khoảng cách nên $x > 0$.

Vì khoảng cách từ O đến B ngắn hơn khoảng cách từ O đến A nên $x < 2$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAC ta có:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2.OA.OC.\cos AOC$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2^2 + (x + 1)^2 - 2.2.(x + 1).\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4 + x^2 + 2x + 1 + 2.(x + 1) = x^2 + 4x + 7.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 4x + 7} \text{ (km)}.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAB ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos AOB$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2^2 + x^2 - 2.2.x.\cos(180^\circ - 120^\circ)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4 + x^2 - 2x = x^2 - 2x + 4.$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \text{ (km)}.$$

Vì khoảng cách từ vị trí A đến vị trí C gấp đôi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B nên $AC = 2AB$.

$$\text{Do đó } \sqrt{x^2 + 4x + 7} = 2.\sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

Bình phương hai vế phương trình trên ta có:

$$x^2 + 4x + 7 = 4.(x^2 - 2x + 4)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 7 = 4x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (ktm)} \\ x = 1 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy khoảng cách từ đài quan sát O tới vị trí B là 1 km.