

## Bài tập Đạo hàm cấp hai - Toán 11

### Bài 1: Hàm số

A.  $y'' = 0$ .

B.  $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$ .

C.  $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$ .

D.  $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$ .

có đạo hàm cấp hai bằng?

### Lời giải:

Ta có:

$$y' = (\sqrt{2x+5})' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$y'' = -\frac{(\sqrt{2x+5})'}{2x+5} = -\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}.$$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{x-3}$ . Khi đó  $y''' = ?$

### Lời giải:

Ta có:

$$y' = -\frac{1}{(x-3)^2}; \quad y'' = -\frac{0 \cdot (x-3)^2 - 1 \cdot [(x-3)^2]'}{(x-3)^4} = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$$y''' = \frac{0 \cdot (x-3)^3 - 2 \cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = -\frac{6}{(x-3)^4} \Rightarrow y'''(1) = -\frac{3}{8}.$$

**Bài 3:** Cho hàm số  $y = \sin 2x$ . Tính  $y'''(\frac{\pi}{3})$ ,  $y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$

### Lời giải:

Ta có :  $y' = 2 \cos 2x$ ;  $y'' = -4 \sin 2x$

$$y''' = -8 \cos 2x, y^{(4)} = 16 \sin 2x$$

Suy ra :

$$y'''(\frac{\pi}{3}) = -8 \cos \frac{2\pi}{3} = 4; y^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 16 \sin \frac{\pi}{2} = 16.$$

**Bài 4:** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $S$  tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi  $t = 3$  là?

**Lời giải:**

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm  $t$  bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm  $t$ .

$$s' = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5$$

$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12$$

**Bài 15:** Hàm số  $y = x\sqrt{x^2 + 1}$  có đạo hàm cấp 2 bằng?

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } y' = \sqrt{x^2 + 1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} ;$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{4x\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 + 1) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 + 1)x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

**Bài 6:**

a. Cho  $f(x) = (x + 10)^6$ . Tính  $f'(2)$

b. Cho  $f(x) = \sin 3x$ .

Tính  $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f'(0)$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{18}\right)$

**Lời giải:**

a. Ta có:  $f(x) = (x + 10)^6$

$$f'(x) = 6(x + 10)^5$$

$$f'(2) = 6 \cdot 12^5 = 622.080$$

b. Ta có:  $f(x) = \sin 3x$

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(0) = 3$$

$$f'\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Bài 7** Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a.  $y = \frac{1}{1-x}$

b.  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

c.  $y = \tan x$ ;

d.  $y = \cos^2 x$ ;

**Lời giải:**

$$\text{a. } y' = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = -\frac{[(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\text{b. } y' = \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)' = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

$$y'' = \frac{-[2\sqrt{(1-x)^3}]'}{4(1-x)^3} = \frac{2.3(1-x)^2}{4.2(1-x)^3\sqrt{(1-x)^3}} = \frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$$

$$\text{c. } y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$y'' = (1 + \tan^2 x)' = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\text{d. } y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cdot \cos x = -\sin 2x$$

$$y'' = -2 \cos 2x.$$

**Bài 8** a) Cho  $f(x) = (x+10)^6$ . Tính  $f''(2)$ .

b) Cho  $f(x) = \sin 3x$ . Tính  $f''(-\frac{\pi}{2})$ ,  $f''(0)$ ,  $f''(\frac{\pi}{18})$

**Bài 9** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\text{c) } y = \tan x$$

$$\text{d) } y = \cos^2 x$$

**Bài 10** Tìm các đạo hàm sau:

$$\text{a. } y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5 \quad \text{b. } y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$$

$$\text{c. } y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x} \quad \text{d. } y = \left( \frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1)$$

$$\text{e. } y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \quad \text{f. } y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$$

$$\text{a. } y' = x^2 - x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{b. } y' &= \left[ \frac{1}{x^4} \left( 2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) \right]' \\ &= \left( \frac{1}{x^4} \right)' \left( 2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) + \frac{1}{x^4} (6x^2 - 8x + 5) \\ &= -\frac{2}{x^5} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5} \end{aligned}$$

$$\text{c. } y' = \left[ \frac{3x}{4} - \frac{6}{4} + \frac{7}{4x} \right]' = \frac{3}{4} - \frac{7}{4x^2} = \frac{3x^2 - 7}{4x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } y' &= \left[ \left( \frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1) \right]' \\ &= \left( -\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \left( \frac{2}{x} + 3x \right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - 3 \end{aligned}$$

$$\text{e. } y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } y' &= \frac{(-2x + 7)(x^3 - 3x) - (2x - 3)(-x^2 + 7x + 5)}{(x^2 - 3x)^2} \\ &= \frac{-4x^2 - 10x + 15}{x^2(x - 3)^2} \end{aligned}$$

### III. Bài tập vận dụng

**Bài 1** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = 2\sqrt{x} \sin x - \frac{\cos x}{x}$$

$$b. y = \frac{3 \cos x}{2x + 1}$$

$$c. y = \frac{t^2 + 2 \cos t}{\sin t}$$

$$d. y = \frac{2 \cos \varphi - \sin \varphi}{3 \sin \varphi + \cos \varphi}$$

$$e. y = \frac{\tan x}{\sin x + 2}$$

$$f. y = \frac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1}$$

## Bài 2

Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Tính  $f(3) + (x-3)f'(3)$ .

**Bài 3** Hàm số  $y = (2x + 5)^5$  có đạo hàm cấp 3 bằng?

**Bài 4** Hàm số  $y = \tan x$  có đạo hàm cấp 2 bằng?

**Bài 5** Hàm số  $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$  có đạo hàm cấp 2 bằng?

**Bài 6** Cho hàm số  $f(x) = (x + 1)^3$ . Giá trị  $f'(0)$  bằng?

**Bài 7** Cho hàm số  $f(x) = \sin^3 x + x^2$ . Giá trị  $f'(\frac{\pi}{2})$  bằng?

**Bài 8** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$  (  $t$  tính bằng giây;  $S$  tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng ?

**Bài 9** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s = t^3 - 3t^2$  ( $t$  tính bằng giây;  $S$  tính bằng mét). Khẳng định nào sau đây đúng?

**Bài 10** Cho hàm số  $y = \sin 2x$ . Tính  $y'''(\frac{\pi}{3}), y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$