Các bài toán về phép đối xứng tâm

I. Lý thuyết ngắn gọn

1. Cho điểm I phép biến hình biến điểm I thành chính nó và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M′ sao cho I là trung điểm của MM′ được gọi là phép đối xứng tâm I, kí hiệu D_I

$D_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$

Nếu $D_I((H)) = (H)$ thì I được gọi là tâm đối xứng của hình H

2. Trong mặt phẳng Oxy cho I (a; b), M(x; y). Gọi M' (x'; y') là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

3. Tính chất

- Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ
- Phép đối xứng tâm biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của chúng
- Phép đối xứng tâm I biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó; biến đa giác thành đa giác bằng đa giác đã cho; biến đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho

II. Các dạng toán phép đối xứng tâm

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng tâm

Phương pháp giải: Sử dụng biểu thức tọa độ và các tính chất của phép đối xứng tâm

Ví dụ 1: Cho điểm I(2; 2) và đường thẳng d: x + 5y + 1 = 0. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I

Lời giải

Lấy điểm $M(x;y) \in d \Rightarrow x + 5y + 1 = 0 \quad (1)$

Gọi $M'(x';y') = D_I(M)$ thì $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$

Thay vào (1) được $(4 - x') + 5(4 - y') + 1 = 0 \Rightarrow x' + 5y' - 25 = 0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng d': x + 5y – 25 = 0

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A (-1; 3) và đường thẳng d có phương trình: x - 2y + 3 = 0 . Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O (với O là gốc tọa độ)

Lời giải

Gọi A’ (x’; y’) là ảnh của A qua phép đối xứng tâm O (0; 0). Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có

$$\begin{cases} x' = 0 - x \\ y' = 0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(1; -3)$$

Gọi M (x; y) là một điểm bất kỳ thuộc d và M’ (x’; y’) là một điểm bất kỳ thuộc d’ là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O. Theo công thức tọa độ của phép đối xứng ta có:

$$\begin{cases} x' = 0 - x \\ y' = 0 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases} \Rightarrow (-x') - 2(-y') + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0$$

Do đó d’ có phương trình x - 2y – 3 = 0

Dạng 2: Xác định tâm đối xứng khi biết ảnh và tạo ảnh

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: x - 2y + 2 = 0 và d’: x - 2y - 8 = 0. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d’ và biến trục Ox thành chính nó

Lời giải

Gọi M (x; y) thuộc d; M’ (x’; y’) thuộc d’, M’ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Giả sử tâm đối xứng là I (a; b), thì theo công thức có:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Rightarrow (2a - x) - 2(2b - y) - 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4b - 2a + 8 = 0$$

Để trục Ox thành chính nó thì tâm đối xứng phải có dạng: I (a; 0) tức b=0

Suy ra: $\begin{cases} 4b - 2a + 8 = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3; 0)$

Ví dụ 4: Cho đường thẳng d: x - 2y + 2 = 0 và d': x - 2y – 8 = 0. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Oy thành chính nó

Lời giải

Giao của hai đường thẳng d : x - 2y + 2 = 0 và d ': x - 2y - 8 = 0 với trục Oy là A (0; 1), A' (0; - 4)

Theo giả thiết biến d thành d' và biến trục Oy thành chính nó thì A biến thành A' nên tâm đối xứng là I trung điểm của AA' là $I\left(0;\frac{-3}{2}\right)$

Dạng 3: Tìm tâm đối xứng của một hình

Phương pháp giải: Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó ta nói H là hình có tâm đối xứng.

Ví dụ 5: Tìm tâm đối xứng biến điểm A (4; 3) thành điểm A' (6; 1).

Lời giải

I (a; b) là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4+6}{2}=5 \\ b=\frac{3+1}{2}=2 \end{cases}$

Vậy tâm đối xứng cần tìm là I (5; 2)

Ví dụ 6: Tìm tâm đối xứng của đường cong (C) có phương trình: $y=x^3-3x^2+3$

Lời giải

Lấy điểm $M(x;y)\in(C)\Rightarrow y=x^3-3x^2+3$ (1)

Gọi I (a; b) là tâm đối xứng của (C) và M' (x'; y') là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I

Ta có: $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a-x' \\ y=2b-y' \end{cases}$

Thay vào (1) được: $2b-y'=(2a-x')^3-3(2a-x')^2+3$

$\Leftrightarrow y'=x'^3-3x'^2+3+(6-6a)x'^2+(12a^2-12a)x'-8a^3+12a^2+2b-6$ (2)

Mặt khác $M'\in(C)$ nên $y'=x'^3-3x'^2+3$

Do đó (2) $\Leftrightarrow (6-6a)x'^2+(12a^2-12a)x'-8a^3+12a^2+2b-6=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-6a=0 \\ 12a^2-12a=0 \\ -8a^3+12a^2+2b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy I (1; 1) là tâm đối xứng của (C)

Dạng 4: Sử dụng phép đối xứng tâm để giải các bài toán dựng hình

Phương pháp giải: Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay D_I nào đó

Ví dụ 7: Cho hai đường thẳng d, d' và điểm I. Tìm điểm A trên d và điểm B trên d' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB

Lời giải

-Dựng đường thẳng d1 là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I

-Dựng giao điểm B của d' và d1

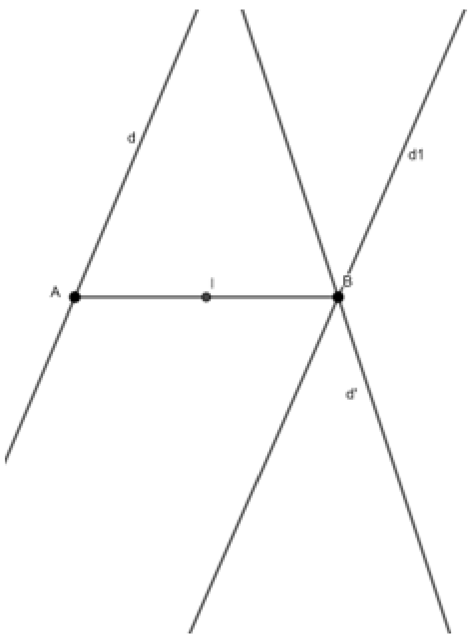
-Dựng A là giao điểm của đường thẳng BI và đường thẳng d

Số nghiệm hình là số giao điểm của đường thẳng d1 và d'

- Nếu d' và d1 song song thì bài toán vô nghiệm

-Nếu d' và d1 cắt nhau thì bài toán có 1 nghiệm

-Nếu d' và d1 trùng nhau thì bài toán có vô số nghiệm



Ví dụ 8: Cho hai đường thẳng d1, d2 và hai điểm A, G không thuộc d1, d2. Hãy dựng tam giác ABC có trọng tâm G và hai đỉnh B, C lần lượt thuộc d1 và d2

Lời giải

Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán

Gọi I là trung điểm của BC thì $D_I(C) = B$

$C \in d2$ nên $B \in d'2$ với d’2 là ảnh của d2 qua phép đối xứng tâm I

Ta lại có $B \in d1 \Rightarrow B = d1 \cap d'2$

Cách dựng:

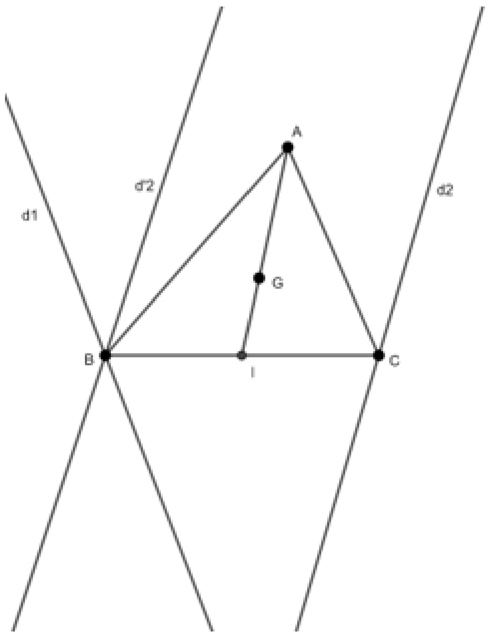
-Dựng điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

-Dựng đường thẳng d’2 ảnh của d2 qua D_I

-Gọi $B = d1 \cap d'2$

-Dựng điểm $C = D_I(B)$

Tam giác ABC là tam giác phải dựng



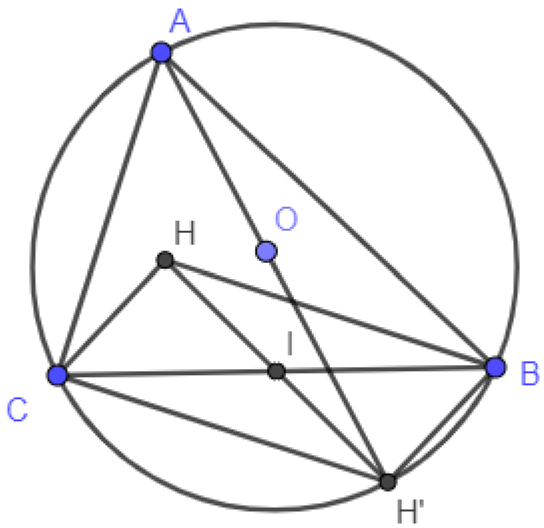
Dạng 5: Sử dụng phép đối xứng tâm để giải bài toán tập hợp điểm

Phương pháp giải: Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm), nếu có phép đối xứng tâm O biến điểm M thành M' và (C) là tập hợp điểm của M thì ảnh (C’) qua tâm đối xứng tâm O là tập hợp của M'

Ví dụ 9: Cho trên đường tròn (O) hai điểm cố định B, C và một điểm A thay đổi. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và H’ là điểm sao cho tứ giác

BHCH’ là hình bình hành. Chứng minh rằng khi A thay đổi thì H’ luôn nằm trên đường tròn (O). Tìm tập hợp của H

Lời giải



Gọi A’ là điểm xuyên tâm đối của A trên (O). Ta có:

A’B $\perp$ AB (Δ ABA’ là tam giác có cạnh huyền là đường kính)

CH $\perp$ AB (do CH là đường cao)

Nên AB // CH (1)

Tương tự ta chứng minh được A’C // BH (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ BHCA’ là hình bình hành

$\Rightarrow$ Lấy H’ trung với A’. Vậy BHCH’ là hình bình hành và H’ luôn nằm trên đường tròn.

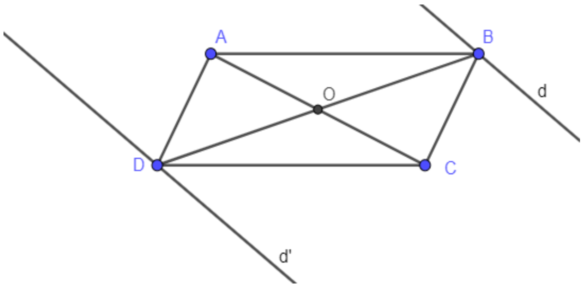
Trong hình bình hành BHCH’, có HH’ và BC là hai đường chéo nnen HH’ nhận trung điểm I của BC cố định làm trung điểm.

Do đó H là điểm đối xứng với H’ qua I.

Mà H’ $\in$ (O) nên H $\in$ một đường tròn đối xứng với (O) qua I

Ví dụ 10: Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, C cố định, còn đỉnh B thay đổi trên đường thẳng d. Tìm quỹ tích đỉnh D

Lời giải



Vì ABCD là hình bình hành có hai đỉnh A, C cố định nên tâm O là trung điểm của đường chéo AC

Suy ra: O cố định

Mà tâm O là trung điểm đường chéo BD. Do đó phép đối xứng tâm O biến B thành D

Mà B chạy trên đường thẳng d nên điểm D chạy trên đường thẳng d' ảnh của d qua phép đối xứng tâm O

Ngược lại với mọi điểm D thuộc đường thẳng d' ta luôn tìm được điểm B thuộc d sao cho O là trung điểm của BD

Vậy quỹ tích của các điểm D là đường thẳng d' ảnh của d qua phép đối xứng tâm O

III. Bài tập áp dụng

Bài 1: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ điểm M’ là ảnh của điểm M (2; 1) qua phép đối xứng tâm I (3; -2)

Bài 2: Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, C cố định, còn đỉnh B thay đổi trên đường tròn (O; R) . Tìm quỹ tích của đỉnh D

Bài 3: Tìm tâm đối xứng của các hình sau đây: tam giác đều, hình bình hành, lục giác đều, đường tròn, hình gồm hai đường tròn bằng nhau

Bài 4: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng với A, B. Hai đường tròn (O1), (O2) cùng đi qua M và tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O1) và (O2). Tìm tập hợp điểm N khi M di động

Bài 5: Tìm tâm đối xứng biến điểm A (5; 0) thành điểm A' (8; 8)

Bài 6: Cho hình bình hành MNPQ nội tiếp hình bình hành ABCD (4 đỉnh nằm trên bốn cạnh). Chứng minh hai hình bình hành có cùng tâm đối xứng

Bài 7: Xác định ảnh qua phép đối xứng tâm I (4; -7) của:

a. Điểm A (3; -2) của đường thẳng d: 3x - 6y + 1 = 0

b. Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

Bài 8: Tìm ảnh qua phép đối xứng tâm I (-3; 5) của:

a. Điểm A (3; -4)

b. Đường thẳng d: 2x – y +1 = 0

Bài 9: Cho phép đối xứng tâm I (p; 3). Tìm ảnh của đồ thị hàm số (C): y = 2sin2x - 5

Bài 10: Giả sử phép đối xứng tâm D_o biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d'