Các dạng toán về cấp số nhân

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa:

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi: $u_n = u_{n-1} . q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặc biệt:

- Khi q = 0, cấp số nhân có dạng u_1; 0; 0; … 0; …
- Khi q = 1, cấp số nhân có dạng u_1; u_1; … u_1;…
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng 0; 0; 0; … 0; …

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 . q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

c) Tính chất

Ba số hạng u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$.

(Hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$).

d) Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Chú ý: Nếu q = 1 thì cấp số nhân là u_1; u_1; u_1; … u_1;.. khi đó $S_n = n.u_1$.

2. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định cấp số cộng và các yếu tố của cấp số nhân.

Phương pháp giải:

- Dãy số (u_n) là một cấp số nhân khi và chỉ khi $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n và q là công bội của cấp số nhân đó.
- Để xác định một cấp số nhân, ta cần xác định số hạng đầu và công bội. Ta thiết lập một hệ phương trình hai ẩn u_1 và q. Tìm u_1 và q.
- Tìm số hạng thứ n dựa vào công thức tổng quát: $u_n = u_1 . qn^{-1}$ hoặc công thức truy hồi $u_n = u_{n-1} . q$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân. Nếu là cấp số nhân hãy xác định số hạng đầu tiên và công bội:

a) 1; – 2; 4; – 8; 16; – 32; 64

b) Dãy (u_n): $u_n = n.6^{n+1}$

c) Dãy (v_n): $v_n = (-1)^n.3^{2n}$.

Lời giải

a) Ta thấy $\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = \frac{64}{-32} = -2$

Nên dãy số trên là cấp số nhân với số hạng đầu tiên là $u_1 = 1$ và công bội q = – 2.

b) Ta có: $u_n = n.\ 6^{n+1}$ thì $u_{n+1} = (n+1).6^{n+2}$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)6^{n+2}}{n.6^{n+1}} = \frac{6(n+1)}{n}$ phụ thuộc vào n

Nên dãy số trên không là cấp số nhân.

c) Ta có: $v_n = (-1)^n.\ 3^{2n}$ thì $v_{n+1} = (-1)^{n+1}.\ 3^{2(n+1)}$

Xét $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1}3^{2n+2}}{(-1)^n 3^{2n}} = (-1).3^2 = -9$ không đổi.

Vậy dãy số trên là cấp số nhân với số hạng đầu tiên $u_1 = (-1)^1.3^{2.1} = -9$ và công bội q = – 9.

Ví dụ 2: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a) Xác định công bội và hạng đầu tiên của cấp số nhân trên.

b) Xác định công thức tổng quát của cấp số nhân trên.

c) Tìm số hạng thứ 15 của cấp số cộng trên.

d) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân.

Lời giải

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \\ u_1q(1+q^4) = 102 \end{cases}$$

Lấy hai vế của phương trình dưới chia cho hai vế của phương trình trên ta được q = 2.

Suy ra $u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{1+2^4} = 3$

Vậy cấp số nhân có số hạng đầu tiên là $u_1 = 3$ và công bội q = 2.

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1.\ q^{n-1}$ nên $u_n = 3.2^{n-1}$.

c) Số hạng thứ 15 của cấp số nhân là: $u_{15} = 3.2^{14} = 49152$.

d) Giả sử số 12288 là số hạng thứ n của cấp số nhân, ta có: $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3.2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy số 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân.

Dạng 2. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số nhân. Chứng minh cấp số nhân.

Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Ba số hạng u_{k-1} ; u_k ; u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân khi và chỉ khi $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm x sao cho các số 1; x^2; $6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Ta có: 1; x^2; $6 - x^2$ lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow x^4 = 1.\left(6 - x^2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ x^2 = -3(\text{Loai}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Vậy $x = \pm\sqrt{2}$ thì các số trên lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 2: Các số 5x – y; 2x + 3y; x + 2y lập thành cấp số cộng; các số $(y + 1)^2$; xy + 1 ; $(x – 1)^2$ lập thành cấp số nhân. Tìm x và y.

Lời giải

Ta có các số 5x – y, 2x + 3y, x + 2y lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 2\left(2x+3y\right) = 5x - y + x + 2y$

$$\Leftrightarrow 4x + 6y = 6x + y \Leftrightarrow 2x = 5y.$$

Các số $(y + 1)^2$; xy + 1 ; $(x – 1)^2$ lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow \left(xy+1\right)^2 = \left(y+1\right)^2\left(x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[xy+1+\left(y+1\right)\left(x-1\right)\right]\left[xy+1-\left(y+1\right)\left(x-1\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2xy - y + x\right)\left(2 + y - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(4 + 2y - 2x\right)\left(4xy + 2x - 2y\right) = 0 \ (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(4 + 2y – 5y)(10y^2 + 5y – 2y) = 0$

$$\Leftrightarrow y\left(4-3y\right)\left(10y+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{3}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{10}{3} \\ x=-\dfrac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy $(x;y) \in \left\{(0;0);\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{4}{3}\right);\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{10}\right)\right\}$.

Dạng 3. Tính tổng của một cấp số nhân.

Phương pháp giải:

Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức: $S_n=\dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q},\left(q\neq 1\right)$.

Nếu q = 1 thì cấp số nhân là u_1; u_1; u_1; … u_1; … khi đó $S_n = n.u_1$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n)

a) (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = 2.(-3)^k$. Tính S_{15}.

b) (u_n) có số hạng đầu là 18, số hạng thứ hai kia là 54, số hạng cuối bằng 39366. Tính tổng của tất cả các số hạng của cấp số nhân.

Lời giải

a) (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = 2.(-3)^k$ thì $u_1 = 2$ và $q = -3$

Tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

$$S_{15}=\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{2.\left[1-\left(-3\right)^{15}\right]}{1-\left(-3\right)}=\frac{3^{15}+1}{2}.$$

b) Số hạng đầu tiên $u_1 = 18$

Số hạng thứ hai $u_2=54\Rightarrow u_1q=54\Rightarrow q=3$

Số hạng cuối $u_n=39366\Leftrightarrow u_1.q^{n-1}=39366\Leftrightarrow 18.3^{n-1}=39366\Leftrightarrow 3^{n-1}=3^7\Leftrightarrow n=8$.

Vậy $S_8=\dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{18.\left(1-3^8\right)}{1-3}=59040$.

Ví dụ 2: Tính tổng

a) $S_n=9+99+999+...+\underbrace{999..9}_{n\ \text{so}\ 9}$

$$b)\, S_n = 8 + 88 + 888 + ... + \underbrace{88...8}_{n\ so\ 8}$$

Lời giải

$$a)\ S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999..9}_{n\ so\ 9}$$

$$= 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^n - 1$$

$$= \left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n\right) - n$$

$$= 10.\frac{1-10^n}{1-10} - n$$

$$= \frac{10\left(10^n - 1\right)}{9} - n$$

$$b)\ S_n = \frac{8}{9}\left(9 + 99 + 999 + \underbrace{99...9}_{n\ so\ 9}\right)$$

$$= \frac{8}{9}\left(10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^n - 1\right)$$

$$= \frac{8}{9}\left[\left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n\right) - n\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left(10.\frac{1-10^n}{1-10} - n\right)$$

$$= \frac{80\left(10^n - 1\right)}{81} - \frac{8}{9}n.$$

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \frac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7.3^n$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{2}, u_7 = -32$. Khi đó q là ?

A. ± 2 **B.** $\pm\frac{1}{2}$ **C.** ± 4 **D.** Tất cả đều sai.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 103

B. Số hạng thứ 104

C. Số hạng thứ 105

D. Đáp án khác

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}; u_5 = 16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân?

A. $q = 4, u_1 = \frac{1}{16}$

B. $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$

C. $q = -\frac{1}{2}, u_1 = -\frac{1}{2}$

D. $q = -4, u_1 = -\frac{1}{16}$

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có u_1 = 3; q = – 2. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Số hạng thứ 6

B. Số hạng thứ 5

C. Số hạng thứ 7

D. Đáp án khác

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. u_1; u_3; u_5;...

B. $3u_1$; $3u_2$; $3u_3$;...

C. $\frac{1}{u_1}$; $\frac{1}{u_2}$; $\frac{1}{u_3}$; ...

D. $u_1 + 2$; $u_2 + 2$; $u_3 + 2$;...

Câu 8. Tìm x để ba số 1 + x; 9 + x; 33 + x theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. x = 1.

B. x = 3.

C. x = 7.

D. x = 3; x = 7.

Câu 9. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm q?

A. $q = \frac{1}{3}$

B. $q = \frac{1}{9}$

C. $q = -\frac{1}{3}$

D. q = - 3

Câu 10. Các số x + 6y, 5x + 2y, 8x + y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số x – 1, y + 2, x – 3y theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Tính $x^2 + y^2$.

A. $x^2 + y^2 = 40$

B. $x^2 + y^2 = 25$

C. $x^2 + y^2 = 100$

D. $x^2 + y^2 = 10$

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Công bội của cấp số nhân là

A. q = 2 **B.** q = – 4 **C.** q = 4 **D.** q = – 2

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính S_{21}.

A. $S_{21} = \frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$ **B.** $S_{21} = 3^{21} - 1$.

C. $S_{21} = 1 - 3^{21}$. **D.** $S_{21} = -\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = -1025$. **C.** $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = 1023$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{6}$.

Câu 15. Gọi S = 1 + 11 + 111 +... + 111...1 (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{81}$. **B.** $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{81}\right)$.

C. $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{81}\right) - n$. **D.** $S = \frac{1}{9}\left[10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - n\right]$.

Đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	A	A	A	C	B	D	B	A	A	A	A	D	D	D