Nhị thức Niu tơn và các dạng toán liên quan

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

b) Nhận xét:

Trong khai triển Niu tơn $(a + b)^n$ có các tính chất sau

- Gồm có n + 1 số hạng
- Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n
- Các hệ số có tính đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Quan hệ giữa hai hệ số liên tiếp: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
- Số hạng tổng quát thứ k + 1 của khai triển: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Ví dụ: Số hạng thứ nhất $T_1 = T_{0+1} = C_n^0 a^n$, số hạng thứ k: $T_k = T_{(k-1)+1} = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$

c) Hệ quả:

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + \ldots + x^n C_n^n$

Từ khai triển này ta có các kết quả sau

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

2. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hàng chứa x^m trong khai triển

Phương pháp giải:

* Với khai triển $(ax^p + bx^q)^n$ (p, q là các hằng số)

Ta có: $\left(ax^p + bx^q\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(ax^p\right)^{n-k} \left(bx^q\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k x^{np-pk+qk}$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa mãn: np – pk + qk = m

Từ đó tìm $k = \dfrac{m-np}{q-p}$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^k a^{n-k}.b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

* Với khai triển $P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n$ (p, q là các hằng số)

Ta có: $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$

$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(bx^p\right)^{k-j}\left(cx^q\right)^j$

Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m.

* Chú ý:

- Nếu k không nguyên hoặc k > n thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.

- Nếu hỏi hệ số không chứa x tức là tìm hệ số chứa x^0.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của: $x(1 - 2x)^5 + (1 + 5x)^{10}$.

Lời giải

Khai triển: $x\left(1-2x\right)^5=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k\left(-2x\right)^k=\sum_{k=0}^{5}C_5^k\left(-2\right)^k x^{k+1}$

Khai triển: $\left(1+5x\right)^{10}=\sum_{m=0}^{10}C_{10}^m\left(5x\right)^m=\sum_{m=0}^{10}C_{10}^m 5^m x^m$

Do đó: $x\left(1-2x\right)^5+\left(1+5x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{5}C_5^k\left(-2\right)^k x^{k+1}+\sum_{m=0}^{10}C_{10}^m 5^m x^m$

Cần tìm hệ số của x^5 trong khai triển thì $\begin{cases}k+1=5\\m=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\m=5\end{cases}$

Vậy hệ số của đa thức trong khai triển là: $C_5^4\left(-2\right)^4+C_{10}^5 5^5=787580$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số không chứa x trong các khai triển sau $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^n$, biết rằng $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$ với x > 0.

Lời giải

Ta có: $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=78$ (Điều kiện: $n\ge 2; n\in\mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!.1!}+\frac{n!}{(n-2)!.2!}=78$

$\Leftrightarrow n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}=78$

$\Leftrightarrow 2n+n^2-n=156$

$\Leftrightarrow n^2+n-156=0$

$\Leftrightarrow (n-12)(n+13)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=12 \\ n=-13(\text{Loai}) \end{array}\right.$

Do đó ta được khai triển:

$$\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k\left(x^3\right)^{12-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k(-2)^k x^{36-3k} x^{-k}=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k(-2)^k x^{36-4k}$$

Cần tìm hệ số không chứa x trong khai triển nên $36-4k=0 \Leftrightarrow k=9$.

Vậy hệ số không chứa x của khai triển là: $C_{12}^9(-2)^9=-112640$.

Ví dụ 3: Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển $(1 - x + 2x^2)^{10}$.

Lời giải

Ta có khai triển:

$$\left(1-x+2x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\left(-x+2x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{j=0}^k C_k^j(-x)^{k-j}\left(2x^2\right)^j$$

$$=\sum_{k=0}^{10} \sum_{j=0}^k C_{10}^k C_k^j(-1)^{k-j}.2^j.x^{k+j}$$

Cần hệ số của x^{15} trong khai triển nên $\left\{\begin{array}{l} k+j=15 \\ 0 \leq j \leq k \leq 10 \\ j,k \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: k = 8; j = 7, ta được 1 hệ số là $C_{10}^8 C_8^7(-1)^{8-7}.2^7=-46080$

Trường hợp 2: k = 9; j = 6, ta được 1 hệ số là $C_{10}^9 C_9^6(-1)^{9-6}.2^6=-53760$

Trường hợp 3: k = 10; j = 5, ta được 1 hệ số là $C_{10}^{10} C_{10}^5(-1)^{10-5}.2^5=-8064$

Vậy hệ số của x^{15} trong khai triển là: – 46080 – 53760 – 8064 = – 107904.

Dạng 2. Bài toán tính tổng

Phương pháp giải:

Dựa vào khai triển nhị thức Niu tơn

$(a+b)^n=C_n^0 a^n+a^{n-1} b C_n^1+a^{n-2} b^2 C_n^2+\ldots+b^n C_n^n$.

Ta chọn những giá trị a, b thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

$C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính tổng

a) $A = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + ... + C_{2021}^{2021}$

b) $B = C_n^0 - 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 - 3^3 C_n^3 + ... + \left(-3\right)^n C_n^n$

c) $C = C_{2021}^0 + C_{2021}^2 + C_{2021}^4 + ... + C_{2021}^{2020}$

Lời giải

a) $A = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + ... + C_{2021}^{2021}$

Xét khai triển: $\left(1+x\right)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 x + C_{2021}^2 x^2 + ... + C_{2021}^{2021} x^{2021}$

Chọn x = 1, ta có $\left(1+1\right)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 + C_{2021}^2 + ... + C_{2021}^{2021} \Leftrightarrow 2^{2021} = A$

Vậy A = 2^{2021}.

b) $B = C_n^0 - 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 - 3^3 C_n^3 + ... + \left(-3\right)^n C_n^n$

Xét khai triển: $\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = – 3, ta có $\left(1-3\right)^n = C_n^0 + C_n^1.3 + C_n^2\left(-3\right)^2 + C_n^3\left(-3\right)^3 + ... + C_n^n\left(-3\right)^n$

$\Leftrightarrow \left(-2\right)^n = C_n^0 - 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 - 3^3 C_n^3 + ... + \left(-3\right)^n C_n^n$

$\Leftrightarrow B = \left(-2\right)^n$

Vậy B = $(-2)^n$.

c) $C = C_{2021}^0 + C_{2021}^2 + C_{2021}^4 + ... + C_{2021}^{2020}$

Xét hai khai triển:

$\left(1+x\right)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 x + C_{2021}^2 x^2 + C_{2021}^3 x^3 + ... + C_{2021}^{2021} x^{2021}$

$\left(1-x\right)^{2021} = C_{2021}^0 - C_{2021}^1 x + C_{2021}^2 x^2 - C_{2021}^3 x^3 + ... - C_{2021}^{2021} x^{2021}$

Cộng vế với vế của hai khai triển ta được:

$$\left(1+x\right)^{2021}+\left(1-x\right)^{2021}=2C_{2021}^{0}+2C_{2021}^{2}x^{2}+2C_{2021}^{4}x^{4}+...+2C_{2021}^{2020}x^{2020}$$

Chọn x = 1, ta có: $\left(1+1\right)^{2021}+\left(1-1\right)^{2021}=2C_{2021}^{0}+2C_{2021}^{2}+2C_{2021}^{4}+...+2C_{2021}^{2020}$

$\Leftrightarrow 2^{2021}=2C \Leftrightarrow C=2^{2020}$

Vậy C = 2^{2020}.

Ví dụ 2: Tìm số n thỏa mãn

a) $C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+2^{n}C_{n}^{n}=243$

b) $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=4096$

Lời giải

a) $C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+2^{n}C_{n}^{n}=243$

Xét khai triển: $\left(1+x\right)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+C_{n}^{3}x^{3}+...+C_{n}^{n}x^{n}$

Chọn x = 2, ta có: $\left(1+2\right)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}.2+C_{n}^{2}.2^{2}+C_{n}^{3}.2^{3}+...+C_{n}^{n}.2^{n}$

$\Leftrightarrow C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+2^{n}C_{n}^{n}=3^{n}$

Thay vào phương trình ta có $3^{n}=243=5^{5} \Leftrightarrow n=5$.

Vậy n = 5.

b) $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=4096$

Xét hai khai triển:

$$\left(1+x\right)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}x+C_{2n+1}^{2}x^{2}+C_{2n+1}^{3}x^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left(1-x\right)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}-C_{2n+1}^{1}x+C_{2n+1}^{2}x^{2}-C_{2n+1}^{3}x^{3}+...-C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

Trừ cả hai vế của khai triển ta có:

$$\left(1+x\right)^{2n+1}-\left(1-x\right)^{2n+1}=2C_{2n+1}^{1}x+2C_{2n+1}^{3}x^{3}+2C_{2n+1}^{5}x^{3}+...+2C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

Chọn x = 1, ta có

$$\left(1+1\right)^{2n+1}-\left(1-1\right)^{2n+1}=2C_{2n+1}^{1}+2C_{2n+1}^{3}+2C_{2n+1}^{5}+...+2C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)=2^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}$$

Thay vào phương trình được: $2^{2n}=4096=2^{12} \Leftrightarrow 2n=12 \Leftrightarrow n=6$.

Vậy n = 6.

Ví dụ 3. Cho khai triển $(1-2x)^{20}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{20}$ bằng:

A. 1　　**B.** 3^{20}　　**C.** 0　　**D.** – 1

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển:

$$(1-2x)^{20}=C_{20}^{0}+C_{20}^{1}(-2x)+C_{20}^{2}(-2x)^{2}+C_{20}^{3}(-2x)^{3}+...+C_{20}^{20}(-2x)^{20}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^{20}=C_{20}^{0}-2C_{20}^{1}x+2^{2}C_{20}^{2}x^{2}-2^{3}C_{20}^{3}x^{3}+...+2^{20}C_{20}^{20}x^{20}$$

Tổng các hệ số của khai triển là

$$S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{20}=C_{20}^{0}-2C_{20}^{1}+2^{2}C_{20}^{2}-2^{3}C_{20}^{3}+...+2^{20}C_{20}^{20}$$

Chọn x = 1, ta có $S = (1 - 2.1)^{20} = (-1)^{20} = 1$.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x - 3)^{2020}$

A. 2021 **B.** 2019 **C.** 2018 **D.** 2020

Câu 2. Hệ số x^6 trong khai triển $(1 - 2x)^{10}$ thành đa thức là:

A. – 13440 **B.** – 210 **C.** 210 **D.** 13440

Câu 3. Số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu tơn $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{12}$ $(x\neq 0)$ là

A. $2^4.C_{12}^{5}$. **B.** C_{12}^{8}. **C.** $2^4.C_{12}^{4}$. **D.** $2^8.C_{12}^{8}$.

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niu tơn $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{21}$,

$\left(x\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*\right)$

A. $2^7C_{21}^{7}$. **B.** $2^8C_{21}^{8}$. **C.** $-2^8C_{21}^{8}$. **D.** $-2^7C_{21}^{7}$.

Câu 5. Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $x^3(1 - x)^8$

A. – 28 **B.** 70 **C.** – 56 **D.** 56

Câu 6. Trong khai triển biểu thức $(x + y)^{21}$, hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^8$ là:

A. 116280 **B.** 293930 **C.** 203490 **D.** 1287

Câu 7. Hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{10}$ bằng:

A. 792 **B.** 210 **C.** 165 **D.** 252

Câu 8. Trong khai triển $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6}$, hệ số của x^3, (x > 0) là:

A. 60 **B.** 80 **C.** 160. **D.** 240

Câu 9. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (x + 1)^6 + (x + 1)^7 + ... + (x + 1)^{12}$

A. 1715. **B.** 1711. **C.** 1287. **D.** 1716.

Câu 10. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ biết $A_n^2-C_n^2=105$

A. – 3003 **B.** – 5005 **C.** 5005 **D.** 3003

Câu 11. Tính tổng $S=C_{10}^0+2.C_{10}^1+2^2.C_{10}^2+...+2^{10}.C_{10}^{10}$.

A. $S = 2^{10}$ **B.** $S = 4^{10}$ **C.** $S = 3^{10}$ **D.** $S = 3^{11}$

Câu 12. Tổng $C_{2016}^1+C_{2016}^2+C_{2016}^3+...+C_{2021}^{2021}$ bằng

A. 4^{2021} **B.** $2^{2021} + 1$ **C.** $4^{2021} – 1$ **D.** $2^{2021} – 1$

Câu 13. Số tập con của tập hợp gồm 2022 phần tử là

A. 2022 **B.** 2^{2022} **C.** 2022^2 **D.** 2.2022

Câu 14. Trong khai triển $(x – 2)^{100} = a_0 + a_1x^1 + ... + a_{100}x^{100}$. Tổng hệ số: $a_0 + a_1 + ... + a_{100}$ là

A. – 1 **B.** 1 **C.** 3^{100} **D.** 2^{100}

Câu 15. Tổng $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}$ Bằng:

A. 2^{n-2} **B.** 2^{n-1} **C.** 2^{2n-2} **D.** 2^{2n-1}

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	D	D	D	C	C	B	A	A	D	C	D	B	B	D