Bài tập cuối chương VII

A. Lý thuyết

1. Tam thức bậc hai

– Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$ và x là biến số được gọi là ***tam thức bậc hai.***

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi thay x bằng giá trị x_0 vào $f(x)$, ta được $f\left(x_0\right) = ax_0^2 + bx_0 + c$, gọi là ***giá trị của tam thức bậc hai*** tại x_0.

• Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta nói f(x) dương tại x_0.

• Nếu $f(x_0) < 0$ thì ta nói f(x) âm tại x_0.

• Nếu f(x) dương (âm) tại mọi điểm x thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói f(x) dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

Ví dụ: Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai? Nếu là tam thức bậc hai, hãy xét dấu của nó tại x = 3.

a) $f(x) = x^2 + 2x^4 – 2$;

b) $f(x) = –x^2 + 2x – 3$;

c) $f(x) = 3x^2 – \sqrt{5}\,x$.

Hướng dẫn giải

a) Biểu thức $f(x) = x^2 + 2x^4 – 2$ không phải là tam thức bậc hai vì có chứa x^4.

b) Biểu thức $f(x) = –x^2 + 2x – 3$ là tam thức bậc hai với a = –1, b = 2 và c = –3.

Khi x = 3 ta có:

$f(3) = –3^2 + 2.3 – 3 = = –9 + 6 – 3 = –6 < 0$.

Do đó f(x) âm tại x = 3.

c) Biểu thức $f(x) = 3x^2 - \sqrt{5}x$ là tam thức bậc hai với a = 3, b = $-\sqrt{5}$ và c = 0.

Khi x = 3 ta có:

$f(3) = 3.3^2 - \sqrt{5}.3 = 27 - 3\sqrt{5} > 0$

Do đó f(x) dương tại x = 3.

– Cho tam thức bậc hai *f(x) = ax² + bx + c (a ≠ 0)*. Khi đó:

• Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c$ là ***nghiệm*** của f(x).

• Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ lần lượt là ***biệt thức*** và ***biệt thức rút gọn*** của f(x).

Ví dụ: Tìm biệt thức (hoặc biệt thức thu gọn) và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$;

b) f(x) = = $-3x^2 + 18x - 27$;

c) $f(x) = x + x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ có $\Delta' = 1^2 - 1.(-5) = 6 > 0$.

Do đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = -1 + \sqrt{6}$ và $x_2 = -1 - \sqrt{6}$

Vậy tam thức bậc hai đã cho có hai nghiệm là $x_1 = -1 + \sqrt{6}$ và $x_2 = -1 - \sqrt{6}$.

b) $f(x) = -3x^2 + 18x - 27$

f(x) có $\Delta' = 9^2 - (-3).(-27) = 0$

Do đó f(x) có nghiệm kép là $x = \frac{-9}{-3} = 3$

Vậy tam thức bậc hai đã cho có nghiệm là x = 3.

c) $f(x) = x + x^2 + 1 = x^2 + x + 1$.

f(x) có $\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0$.

Do đó f(x) vô nghiệm.

Vậy tam thức bậc hai đã cho vô nghiệm.

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với a với mọi giá trị x.

+ Nếu $\Delta = 0$ và $x_0 = -\frac{b}{2a}$ là nghiệm kép của f(x) thì f(x) cùng dấu với a với mọi x khác x_0.

+ Nếu $\Delta > 0$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của f(x) $(x_1 < x_2)$ thì:

• f(x) trái dấu với a với mọi x trong khoảng $(x_1; x_2)$;

• f(x) cùng dấu với a với mọi x thuộc hai khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$.

Chú ý:

+ Để xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức Δ;

Bước 2: Xác định nghiệm của f(x) (nếu có);

Bước 3: Xác định dấu của hệ số a;

Bước 4: Xác định dấu của f(x).

+ Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

Ví dụ: Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x – 9$;

b) $f(x) = –2x^2 + 8x + 10$;

c) $f(x) = 4x^2 + 8x + 4$;

d) $f(x) = –3x^2 + 2x – 1$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = 3x^2 + 6x – 9$

f(x) có a = 3 > 0 và $\Delta' = 3^2 – 3.(–9) = 36 > 0$.

Khi đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{36}}{3} = 1$ và $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{36}}{3} = -3$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	–∞		–3		1		+∞
f(x)		+	0	–	0	+	

Vậy, f(x) dương trong khoảng (–∞; –3) và (1; +∞);

f(x) âm trong khoảng (–3; 1).

b) $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$

f(x) có $a = -2 < 0$ và $\Delta' = 4^2 - (-2).10 = 36 > 0$.

Khi đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{36}}{-2} = -1$ và $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{36}}{-2} = 5$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy, f(x) âm trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(5; +\infty)$;

f(x) dương trong khoảng $(-1; 5)$.

c) $f(x) = 4x^2 + 8x + 4$

f(x) có $a = 4 > 0$ và $\Delta' = 4^2 - 4.4 = 0$.

Khi đó f(x) có nghiệm kép là $x = \dfrac{-4}{4} = -1$

Vậy, f(x) dương với mọi $x \neq -1$.

d) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$.

f(x) có $a = -3 < 0$ và $\Delta' = 1^2 - (-3).(-1) = -2 < 0$.

Vậy f(x) âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

– ***Bất phương trình bậc hai một ẩn*** x là bất phương trình có một trong các dạng:

$$ax^2 + bx + c \leq 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c > 0,$$

với $a \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình bậc hai là các giá trị của biến x mà khi thay vào bất phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Ví dụ: Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn? Nếu là bất phương trình bậc hai một ẩn, $x = –2$ và $x = 3$ có phải là nghiệm của bất phương trình đó hay không?

a) $2x^2 – 7x – 15 < 0$;

b) $3 – 2x^2 + x^3 > 0$;

c) $x^2 – 4x + 3 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) $2x^2 – 7x – 15 < 0$

Bất phương trình trên là bất phương trình bậc hai một ẩn dạng $ax^2 + bx + c < 0$ với $a = 2$, $b = –7$, $c = –15$.

• Với $x = –2$ thay vào bất phương trình ta có:

$2.(–2)^2 – 7.(–2) – 15 < 0$

$\Leftrightarrow 7 < 0$. Đây là bất đẳng thức sai.

Do đó $x = –2$ không là nghiệm của bất phương trình.

• Với $x = 3$ thay vào bất phương trình ta có:

$2.3^2 – 7.3 – 15 < 0$

$\Leftrightarrow –18 < 0$. Đây là bất đẳng thức đúng.

Do đó $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

b) $3 – 2x^2 + x^3 > 0$

Bất phương trình trên không là bất phương trình bậc hai một ẩn vì có chứa x^3.

c) $x^2 – 4x + 3 \geq 0$.

Bất phương trình trên là bất phương trình bậc hai một ẩn dạng $ax^2 + bx + c \geq 0$ với $a = 1$, $b = –4$, $c = 3$.

• Với $x = –2$ thay vào bất phương trình ta có:

$(–2)^2 – 4.(–2) + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 15 \geq 0$. Đây là bất đẳng thức đúng.

Do đó $x = –2$ là nghiệm của bất phương trình.

• Với $x = 3$ thay vào bất phương trình ta có:

$3^2 – 4.3 + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 0 \geq 0$. Đây là bất đẳng thức đúng.

Do đó $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

– Giải bất phương trình bậc hai là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

Ta có thể giải bất phương trình bậc hai bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

Ví dụ: Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 – 3x + 2 < 0$;

b) $–2x^2 + 3x – 7 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x^2 – 3x + 2 < 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Ta có $\Delta = (-3)^2 - 4.1.2 = 1 > 0$

Do đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

Vì a = 1 > 0 nên ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2)$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là (1; 2).

b) $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$

Ta có $\Delta = 3^2 - 4.(-2).(-7) = -47 < 0$.

Mặt khác $a = -2 < 0$

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x.

Khi đó không có giá trị nào của x thỏa mãn $f(x) \geq 0$.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

4. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình:

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$$

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{x+1}$

Hướng dẫn giải

$\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{x+1}$ (1)

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta có:

$x^2 + 3x – 2 = x + 1$

$\Rightarrow x^2 + 2x – 3 = 0$

$\Rightarrow$ x = 1 hoặc x = –3.

• Với x = 1 thay vào phương trình (1) ta được:

$\sqrt{1^2+3.1-2}=\sqrt{1+1} \Leftrightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2}$ (đúng)

Do đó x = 1 là nghiệm của phương trình (1).

• Với x = –3 ta thấy x + 1 = –3 +1 = –2 < 0 nên không tồn tại $\sqrt{x+1}$.

Do đó x = –3 không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 1.

5. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e,$ ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình:

$$ax^2 + bx + c = dx + e$$

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$

Hướng dẫn giải

$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ (2)

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$4 + 2x – x^2 = (x – 2)^2$

$\Rightarrow 4 + 2x – x^2 = x^2 – 4x + 4$

$\Rightarrow 2x^2 – 6x = 0$

$\Rightarrow 2x(x – 3) = 0$

$\Rightarrow$ x = 0 hoặc x = 3

• Với x = 0 thay vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{4+2.0-0^2}=0-2 \Leftrightarrow 2 = –2$ (vô lí)

Do đó x = 0 không là nghiệm của phương trình (2).

• Với x = 3 thay vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{4+2.3-3^2}=3-2 \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng)

Do đó x = 3 là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 3.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho các đa thức sau, những đa thức nào là tam thức bậc hai? Nếu là tam thức bậc hai hãy xét dấu của tam thức bậc hai đó.

a) $f\left(x\right)=\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1$;

b) f(x) = $x^3 - x^2 + 1$;

c) f(x) = $-2x^2 - 2x - 5$;

d) $f\left(x\right)=\sqrt{3}x^2-x^3+\left(1-\sqrt{3}\right)x^4$;

e) f(x) = $-x^2 + 4x - 3$.

Hướng dẫn giải

a) $f\left(x\right)=\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1$

f(x) là tam thức bậc hai có a = $\sqrt{2}>0$, b = $-\left(\sqrt{2}+1\right)$, c = 1

Ta có $\Delta=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^2-4.\sqrt{2}.1$

$\Delta = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 4\sqrt{2}$

$\Delta = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 > 0.$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{2}-1$

Khi đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2.\sqrt{2}}=1 \text{ và } x_2=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Vậy, f(x) dương trong khoảng $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$;

f(x) âm trong khoảng $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

f(x) không phải là tam thức bậc hai vì có chứa x^3.

c) $f(x) = -2x^2 - 2x - 5$

f(x) là tam thức bậc hai có $a = -2 < 0$, $b = -2$, $c = -5$.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - (-2).(-5) = -9 < 0$.

Vậy f(x) luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - x^3 + \left(1 - \sqrt{3}\right)x^4$

f(x) không phải là tam thức bậc hai vì có chứa x^4 và x^3.

e) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

f(x) là tam thức bậc hai có $a = -1 < 0$, $b = 4$, $c = -3$.

Ta có: $\Delta' = 2^2 - (-1).(-3) = 1 > 0$

Khi đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{1}}{-1} = 1$ và $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{1}}{-1} = 3$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

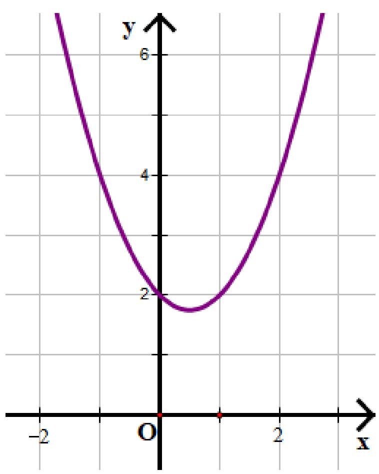
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

Vậy, f(x) âm trong khoảng (–∞; 1) và (3; +∞);

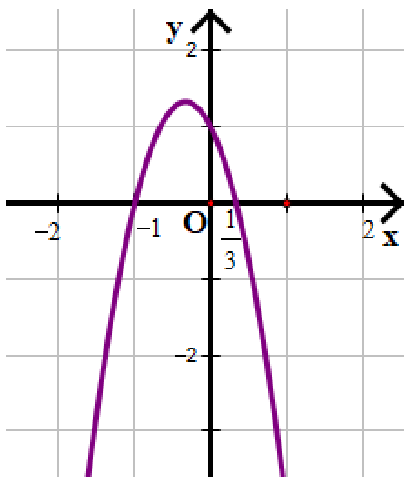
f(x) dương trong khoảng (1; 3).

Bài 2. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai sau đây, hãy lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

a) $f(x) = x^2 - x + 2$

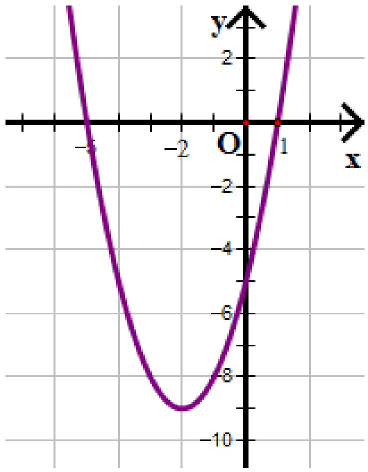


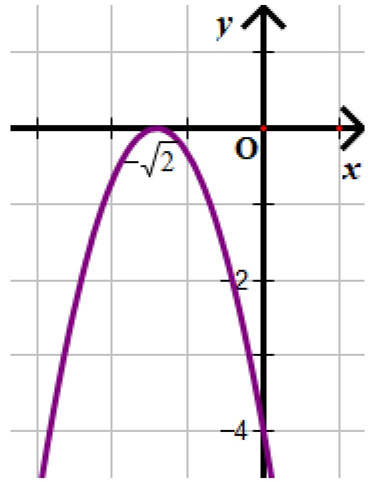
b) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$



c) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

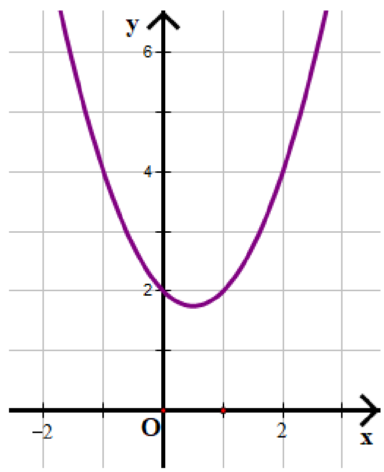
d) $f(x) = -2x^2 - 4\sqrt{2}x - 4$





Hướng dẫn giải

a) f(x) = x^2 – x + 2



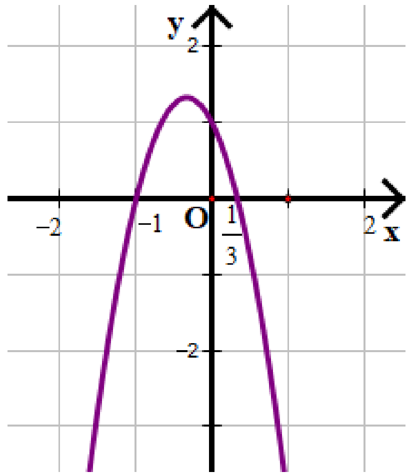
Quan sát hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số f(x) nằm hoàn toàn ở trên (không cắt) trục hoành.

Do đó f(x) vô nghiệm và f(x) > 0 với mọi x.

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	+	

b) f(x) = –3x^2 – 2x + 1



Quan sát hình vẽ ta thấy:

• Với x trong khoảng (–∞; –1) và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ ta thấy đồ thị nằm bên dưới trục hoành

⇒ f(x) < 0 trong khoảng (–∞; –1) và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

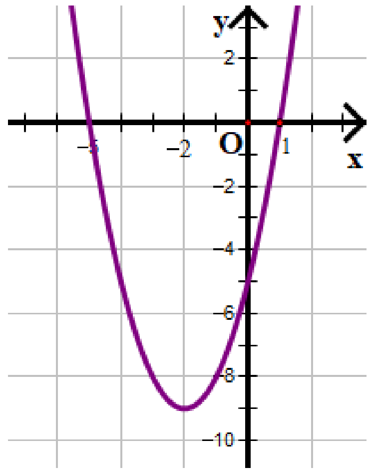
• Với x trong khoảng $\left(1;\frac{1}{3}\right)$ ta thấy đồ thị nằm bên trên trục hoành

⇒ f(x) > 0 trong khoảng $\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	–∞		1		$\frac{1}{3}$		+∞
f(x)		–	0	+	0	–	

c) $f(x) = x^2 + 4x – 5$



Quan sát hình vẽ ta thấy:

• Với x trong khoảng (–∞; –5) và (1; +∞) ta thấy đồ thị nằm bên trên trục hoành

⇒ f(x) > 0 trong khoảng (–∞; –5) và (1; +∞).

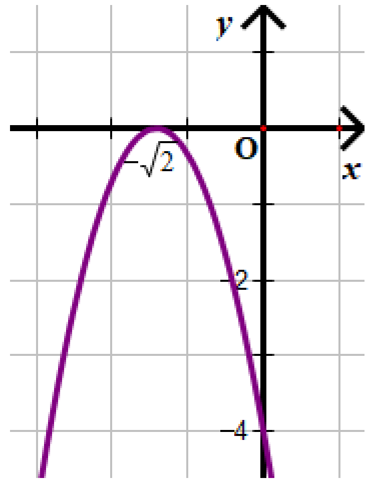
• Với x trong khoảng (–5; 1) ta thấy đồ thị nằm bên dưới trục hoành

⇒ f(x) < 0 trong khoảng (–5; 1).

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	–∞		–5		1		+∞
f(x)		+	0	–	0	+	

d) $f\left(x\right)=-2x^2-4\sqrt{2}x-4$



Quan sát hình vẽ ta thấy:

• Với x trong khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(-\sqrt{2};+\infty\right)$ ta thấy đồ thị nằm bên dưới trục hoành

$\Rightarrow$ f(x) < 0 trong khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(-\sqrt{2};+\infty\right)$.

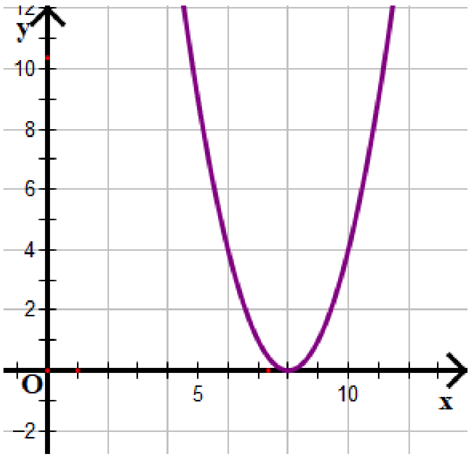
Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

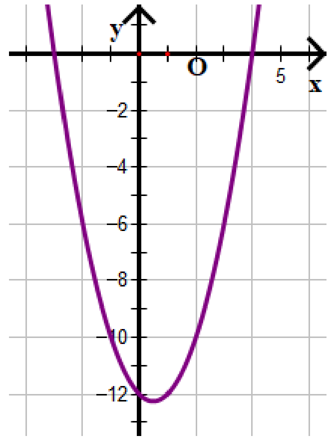
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$+\infty$
f(x)		–	0	–	

Bài 3. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai tương ứng, hãy xác định tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 16x + 64 > 0$

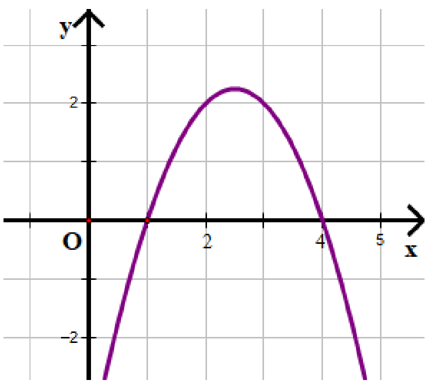
b) $x^2 - x - 12 \geq 0$

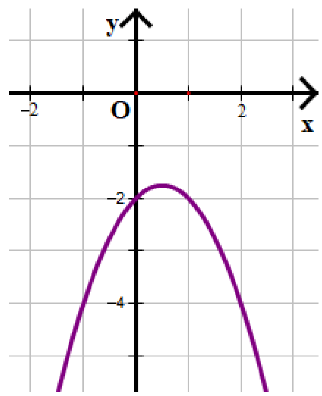




c) $-x^2 + 5x - 4 < 0$

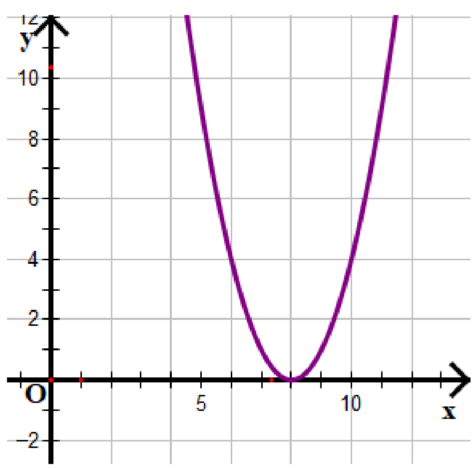
d) $-x^2 + x - 2 \geq 0$





Hướng dẫn giải

a) $x^2 - 16x + 64 > 0$



Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 16x + 64$

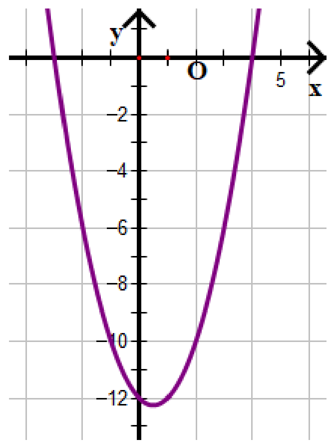
Dựa vào đồ thị ta thấy f(x) nằm trên trục hoành và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x = 8.

Do đó f(x) ≥ 0 với mọi x.

Khi đó f(x) > 0 ⇔ x ≠ 8.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R} \setminus \{8\}$.

b) $x^2 - x - 12 \geq 0$



Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 12$

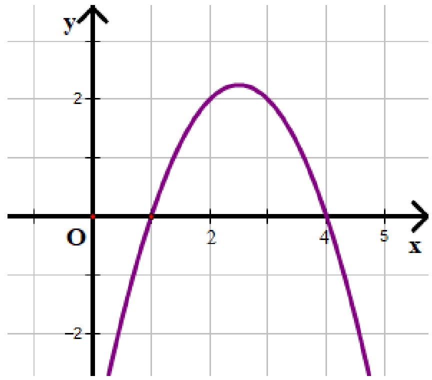
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là $x_1 = -3$ và $x_2 = 4$.

Đồ thị f(x) nằm trên trục hoành khi x nằm trong khoảng (–∞; –3) và (4; +∞).

Do đó f(x) ≥ 0 ⇔ x ≤ –3 hoặc x ≥ 4.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là (–∞; –3) ∪ (4; +∞).

c) $-x^2 + 5x - 4 < 0$



Xét tam thức bậc hai $f(x) = –x^2 + 5x – 4$

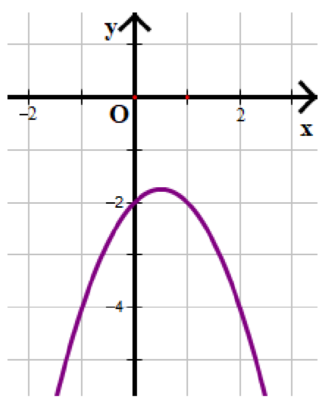
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1 = 1$ và $x_2 = 4$.

Đồ thị f(x) nằm dưới trục hoành khi x nằm trong khoảng (1; 4).

Do đó $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 4)$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là (1; 4).

d) $–x^2 + x – 2 \geq 0$



Xét tam thức bậc hai $f(x) = –x^2 + x – 2$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đồ thị nằm hoàn toàn dưới trục hoành.

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x.

Khi đó bất phương trình $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là ∅.

Bài 4. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $6x^2 + x - 1 \le 0$;

b) $-x^2 - x - 1 > 0$;

c) $-2x^2 < 2x - 5$;

d) $-x^2 \ge 2x + 1$;

e) $x^2 + 2x - 7 \le 2x^2 - 2x$.

Hướng dẫn giải

a) $6x^2 + x - 1 \le 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = 6x^2 + x - 1$ có $a = 6 > 0$.

Ta có: $\Delta = 1^2 - 4.6.(-1) = 25 > 0$

Do đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2.6} = \frac{1}{3} \text{ và } x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2.6} = \frac{-1}{2}$$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

$$f(x) \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{3}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{3}\right]$.

b) $-x^2 - x - 1 > 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - x - 1$ có $a = -1 < 0$.

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4.(-1).(-1) = -3 < 0$.

Do đó f(x) vô nghiệm nên $f(x) < 0$ với mọi x.

Khi đó không có giá trị nào của x thỏa mãn $f(x) > 0$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\emptyset$.

c) $-2x^2 < 2x - 5$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 5 < 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 - 2x + 5$ có $a = -2 < 0$.

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - (-2).5 = 11 > 0$.

Do đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{11}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{1-\sqrt{11}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{11}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$ hoặc $x > \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2};+\infty\right)$.

d) $-x^2 \geq 2x + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ có $a = -1 < 0$.

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - (-1).(-1) = 0$.

Do đó f(x) có nghiệm kép $x = -1$.

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $\{-1\}$.

e) $x^2 + 2x - 7 \leq 2x^2 - 2x$.

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 - 2x^2 + 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 7 \leq 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ có $a = -1 < 0$.

Ta có: $\Delta' = 2^2 - (-1).(-7) = -3 < 0$.

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x.

Khi đó $f(x) \leq 0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{-2x^2-3x+12}$;

b) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{(6-x)(2x-1)}=0$;

c) $\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{2-x}$.

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{-2x^2-3x+12}$ (1)

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có:

$x^2 - 5x + 4 = -2x^2 - 3x + 12$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow$ x = 2 hoặc x = $\frac{-4}{3}$

• Với x = 2 ta có $x^2 - 5x + 4 = 2^2 - 5.2 + 4 = -10$.

Khi đó không tồn tại $\sqrt{x^2-5x+4}$.

Do đó x = 2 không là nghiệm của phương trình (1).

• Với x = $\frac{-4}{3}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2-5.\left(\frac{-4}{3}\right)+4}=\sqrt{-2\left(\frac{-4}{3}\right)^2-3.\left(\frac{-4}{3}\right)+12}$$

$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ (đúng)

Do đó x = $\frac{-4}{3}$ là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = $\frac{-4}{3}$.

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{(6-x)(2x-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(6-x)(2x-1)}$ (2)

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$x^2 – 4x + 4 = (6 – x)(2x – 1)$

$\Rightarrow x^2 – 4x + 4 = 12x – 6 – 2x^2 + x$

$\Rightarrow 3x^2 – 17x + 10 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

• Với x = 5 thay vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt{5^2 - 4.5 + 4} = \sqrt{(6-5)(2.5-1)}$

$\Leftrightarrow$ 3 = 3 (đúng)

Do đó x = 5 là nghiệm của phương trình đã cho.

• Với x = $\frac{2}{3}$ thay vào phương trình (2) ta có:4/3-

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-4.\frac{2}{3}+4}=\sqrt{\left(6-\frac{2}{3}\right)\left(2.\frac{2}{3}-1\right)}$$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ (đúng)

Do đó x = $\frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm S = $\left\{5;\frac{2}{3}\right\}$.

c) $\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{2-x}$ (3)

Bình phương hai vế phương trình (3) ta có:

$x^2 - 2x + 4 = 2 - x$

$\Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0$

(vô lí vì $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ với mọi x).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-3x+2}=x-1;$

b) $\sqrt{4x^2+2x+10}=3x+1;$

c) $\sqrt{(x-1)(2x-1)}-2x-1=0;$

d) $x-\sqrt{3x^2-9x+1}=2.$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{x^2-3x+2}=x-1$ (1)

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có:

$x^2-3x+2=(x-1)^2$

$\Rightarrow x^2-3x+2=x^2-2x+1$

$\Rightarrow -x=-1$

$\Rightarrow x=1$

Thay x = 1 vào phương trình (1) ta có:

$\sqrt{1^2-3.1+2}=1-1$

$\Leftrightarrow 0=0$ (đúng)

Do đó x = 1 là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 1.

b) $\sqrt{4x^2+2x+10}=3x+1$ (2)

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$4x^2+2x+10=(3x+1)^2$

$\Rightarrow 4x^2+2x+10=9x^2+6x+1$

$\Rightarrow -5x^2-4x+9=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{9}{5} \end{array}\right.$$

• Với x = 1 thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4.1^2 + 2.1 + 10} = 3.1 + 1$$

⇔ 4 = 4 (đúng)

Do đó x = 1 là nghiệm của phương trình (2).

• Với x = $-\dfrac{9}{5}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4.\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + 2.\left(-\frac{9}{5}\right) + 10} = 3.\left(-\frac{9}{5}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{5} = -\frac{22}{5} \text{ (vô lí)}$$

Do đó x = $-\dfrac{9}{5}$ không là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 1.

c) $\sqrt{(x-1)(2x-1)} - 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-1)} = 2x + 1 \qquad (3)$$

Bình phương hai vế phương trình (3) ta có:

$(x – 1)(2x – 1) = (2x + 1)^2$

$\Rightarrow 2x^2 – x – 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow -2x^2 - 7x = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right.$$

• Với x = 0 thay vào phương trình (3) ta có:

$$\sqrt{(0-1)(2.0-1)} = 2.0+1$$

$\Leftrightarrow$ 1 = 1 (đúng)

Do đó x = 0 là nghiệm của phương trình (3).

• Với x = $\dfrac{-7}{2}$ thay vào phương trình (3) ta có:

$$\sqrt{\left(\frac{-7}{2}-1\right)\left(2.\frac{-7}{2}-1\right)} = 2.\frac{-7}{2}+1$$

$\Leftrightarrow$ 6 = –6 (vô lí)

Do đó x = $\dfrac{-7}{2}$ không là nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 0.

d) $x - \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2$

$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{3x^2 - 9x + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$ (4)

Bình phương hai vế phương trình (4) ta có:

$3x^2 - 9x + 1 = (x - 2)^2$

⇔ $3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4$

⇔ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

• Với x = 3 thay vào phương trình (4) ta có:

$$\sqrt{3.3^2 - 9.3 + 1} = 3 - 2$$

⇔ 1 = 1 (đúng)

Do đó x = 3 là nghiệm của phương trình (4).

• Với x = $\dfrac{-1}{2}$ thay vào phương trình (4) ta có:

$$\sqrt{3.\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 9.\left(\frac{-1}{2}\right) + 1} = \frac{-1}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{-5}{2} \text{ (vô lí)}$$

Do đó x = $\dfrac{-1}{2}$ không là nghiệm của phương trình (4).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 3.

Bài 7. Tìm giá trị của m để:

a) $f(x) = -2x^2 + (m - 2)x - m + 4$ không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = mx^2 - mx + m + 3 < 0$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = -2x^2 + (m - 2)x - m + 4$ là tam thức bậc hai có $a = -2 < 0$

Do đó f(x) không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ tức là $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0$

Mà $\Delta = (m - 2)^2 - 4.(-2).(-m + 4)$

$= m^2 - 4m + 4 - 8m + 32$

$= m^2 - 12m + 36$

$= (m - 6)^2 \geq 0, \forall m.$

Khi đó $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m - 6)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$

Vậy với m = 6 thì f(x) không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1 > 0$ là tam thức bậc hai có $a = 1 > 0$.

Do đó $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$

Mà $\Delta = [-(m + 2)]^2 - 4.(8m + 1)$

$= m^2 + 4m + 4 - 32m - 4$

$= m^2 - 28m$

Khi đó $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0$

$\Leftrightarrow m(m - 28) < 0$

$\Leftrightarrow 0 < m < 28$

Vậy với $0 < m < 28$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = mx^2 – mx + m + 3$ có $a = m$.

• Với $m = 0$ ta có $f(x) = 3 > 0$ nên không thoả mãn $f(x) < 0$.

$\Rightarrow$ với $m = 0$ không thoả mãn.

• Với $m \neq 0$, $f(x)$ là tam thức bậc hai

Có $\Delta = (– m)^2 – 4.m.(m + 3)$

$= m^2 – 4m^2 – 12m$

$= – 3m^2 – 12$

Khi đó $f(x) < 0$ với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m(m + 4) < 0 \end{cases}$ (*)

Vì $m < 0$ nên $–3m > 0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < –4$.

Kết hợp điều kiện $m \neq 0$ ta có: $m < –4$.

Vậy với $m \in (–\infty; –4)$ thì $f(x) < 0$ với mọi x.

Bài 8. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $x^2 + 202x + 12\,500$ (nghìn đồng); giá bán của một sản phẩm là 500 nghìn đồng. Số sản phẩm sản xuất phải trong khoảng nào thì có lãi?

Hướng dẫn giải

Vì giá bán một sản phẩm là 500 nghìn đồng nên với x sản phẩm thì có doanh thu là 500x (nghìn đồng).

Do tổng chi phí để sản xuất ra x sản phẩm là $x^2 + 202x + 12\ 500$ (nghìn đồng) nên lợi nhuận thu về từ x sản phẩm là:

$500x – (x^2 + 202x + 12\ 500)$

$= – x^2 + 298x – 12\ 500$.

Để có lãi thì $– x^2 + 298x – 12\ 500 > 0$.

Đặt $f(x) = –x^2 + 298x – 12\ 500$.

Ta có: $\Delta' = 149^2 – (–1)(–12\ 500) = 9\ 701 > 0$.

Khi đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$x_1 = \dfrac{-149+\sqrt{9701}}{-1} \approx 50,5$ và $x_2 = \dfrac{-149-\sqrt{9701}}{-1} \approx 247,5$.

Mặt khác a = –1 < 0 nên ta có bảng xét dấu sau:

x	– ∞		50,5		247,5		+ ∞
f(x)		–	0	+	0	–	

Từ bảng xét dấu ta thấy f(x) > 0 khi x trong khoảng (50,5; 247,5);

Mặt khác, vì x là số sản phẩm nên x nguyên dương.

Do đó để có lãi thì số sản phẩm sản xuất phải từ 51 đến 247 sản phẩm.

Vậy cần sản xuất từ 51 đến 247 sản phẩm thì sẽ có lãi.

Bài 9. Một quả bóng được ném thẳng từ độ cao 1,5 mét với vận tốc ban đầu 10 m/s. Độ cao của bóng so với mặt đất (m) sau t (giây) được cho bởi hàm số $h(t) = –5t^2 + 10t + 1,5$. Quả bóng có thể đạt được độ cao trên 5 m không? Nếu có thì trong bao lâu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Hướng dẫn giải

Để quả bóng có thể đạt được độ cao trên 5 m thì $h(t) = –5t^2 + 10t + 1,5 > 5$.

$\Leftrightarrow –5t^2 + 10t – 3,5 > 0$.

$\Leftrightarrow t^2 – 2t + 0,7 < 0$.

Xét tam thức bậc hai f(x) = $t^2 - 2t + 0{,}7$ có a = 1 > 0.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1.0{,}7 = 0{,}3 > 0$.

Do đó f(x) có hai nghiệm phân biệt là:

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{0{,}3}}{1} \approx 1{,}5 \text{ và } t_2 = \frac{1-\sqrt{0{,}3}}{1} \approx 0{,}5$$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

t	$-\infty$		0,5		1,5		$+\infty$
f(t)		+	0	–	0	+	

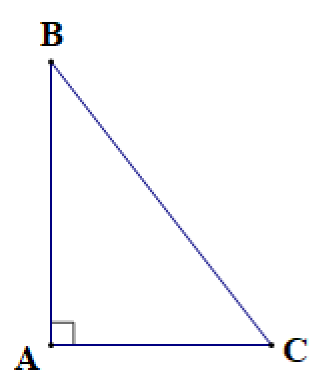
Dựa vào bảng xét dấu ta có:

$f(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (0{,}5; 1{,}5)$.

Vậy quả bóng có thể đạt được độ cao trên 5 m trong khoảng từ 0,5 giây cho đến 1,5 giây.

Bài 10. Tam giác ABC vuông tại A, có cạnh AC ngắn hơn cạnh BC là 9 cm. Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết chu vi của tam giác bằng 70 cm.

Hướng dẫn giải



Gọi AC = x (cm) (x > 0).

Cạnh AC ngắn hơn cạnh BC là 9 cm nên BC = x + 9 (cm).

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lí Pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = BC^2 – AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = (x + 9)^2 – x^2$

$\Rightarrow AB^2 = x^2 + 18x + 81 – x^2 = 18x + 81$

$\Rightarrow AB = \sqrt{18x + 81}$ (cm)

Ta có chu vi của tam giác ABC là:

AB + BC + CA

$= \sqrt{18x + 81} + x + 9 + x$

$= \sqrt{18x + 81} + 2x + 9$ (cm)

Mà theo bài chu vi tam giác ABC bằng 70 cm.

Do đó ta có: $\sqrt{18x + 81} + 2x + 9 = 70$

$\Leftrightarrow \sqrt{18x + 81} = 61 – 2x$ (*)

Bình phương hai vế của phương trình trên ta có:

$18x + 81 = (61 – 2x)^2$

$\Rightarrow 18x + 81 = 3721 – 244x + 4x^2$

$\Rightarrow 4x^2 – 262x + 3640 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = 45,5 \end{array}\right.$

• Với x = 20 thay vào phương trình (*) ta có:

$\sqrt{18.20 + 81}$ = 61 – 2.20

$\Leftrightarrow$ 21 = 21 (đúng)

Do đó x = 20 là nghiệm của phương trình (*).

• Với x = 45,5 thay vào phương trình (*) ta có:

$\sqrt{18.45,5 + 81}$ = 61 – 2.45,5

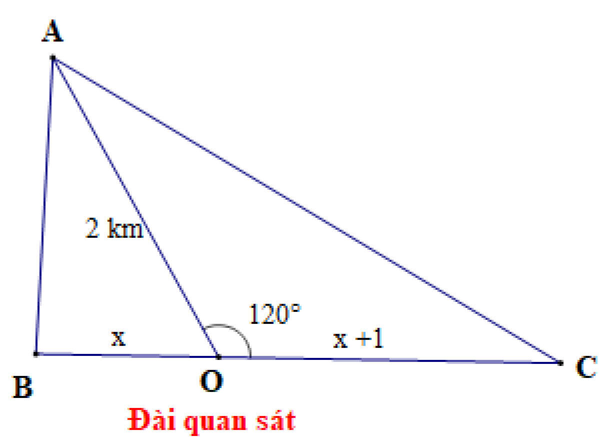
$\Leftrightarrow$ 30 = –30 (vô lí)

Do đó x = 45,5 không là nghiệm của phương trình (*).

Khi đó AC = 20 (cm), BC = 29 (cm) và AB = $\sqrt{18.20 + 81} = 21$ (cm).

Vậy AC = 20 cm, AB = 21 cm và BC = 29 cm.

Bài 11. Một đài quan sát O cách ba vị trí A, B, C như hình vẽ dưới đây.



Tính khoảng cách từ đài quan sát O tới B biết khoảng cách từ vị trí A đến vị trí C gấp đôi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B và khoảng cách từ O đến B ngắn hơn khoảng cách từ O đến A.

Hướng dẫn giải

Vì OB là khoảng cách nên $x > 0$.

Vì khoảng cách từ O đến B ngắn hơn khoảng cách từ O đến A nên $x < 2$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAC ta có:

$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2.OA.OC.\cos AOC$

$\Rightarrow AC^2 = 2^2 + (x + 1)^2 - 2.2.(x + 1).\cos 120°$

$\Rightarrow AC^2 = 4 + x^2 + 2x + 1 + 2.(x +1) = x^2 + 4x + 7$.

$\Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$ (km).

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OAB ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos AOB$

$\Rightarrow AB^2 = 2^2 + x^2 - 2.2.x.\cos(180° - 120°)$

$\Rightarrow AB^2 = 4 + x^2 - 2x = x^2 - 2x + 4$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ (km).

Vì khoảng cách từ vị trí A đến vị trí C gấp đôi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B nên $AC = 2AB$.

Do đó $\sqrt{x^2 + 4x + 7} = 2.\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

Bình phương hai vế phương trình trên ta có:

$x^2 + 4x + 7 = 4.(x^2 – 2x + 4)$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 7 = 4x^2 – 8x + 16$

$\Rightarrow 3x^2 – 12x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\left(ktm\right) \\ x = 1\left(tm\right) \end{array}\right.$

Vậy khoảng cách từ đài quan sát O tới vị trí B là 1 km.