Bài 2. Hoán vị - chỉnh hợp – tổ hợp

A. Lý thuyết

I. Hoán vị

1. Định nghĩa

- Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một ***hoán vị*** của n phần tử đó.

- Nhận xét: Hai hoán vị của n phần tử khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

Chẳng hạn, hai hoán vị abc và cab của ba phần tử a; b; c là khác nhau.

2. Số các hoán vị

Kí hiệu: P_n là số các hoán vị của n phần tử.

- Định lí: $P_n = n.(n – 1).(n – 2)….2.1$

- Chú ý: Kí hiệu n.(n – 1)…2.1 là n! (đọc là n là giai thừa), ta có: $P_n = n!$.

- **Ví dụ 1**. Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh thành một hàng ngang.

Lời giải:

Số cách xếp 10 học sinh thành một hàng ngang là 10! cách.

II. Chỉnh hợp

1. Định nghĩa.

- Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

- Ví dụ 2. Lớp 11A2 có 40 học sinh. Khi đó; mỗi cách chọn ra 4 bạn làm tổ trưởng tổ 1; tổ 2; tổ 3; tổ 4 chính là số chỉnh hợp chập 4 của 40 học sinh.

2. Số các chỉnh hợp

- Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \le k \le n)$.

- **Định lí**: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$

- **Ví dụ 3.** Từ năm điểm phân biệt A; B; C; D; E ta lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là năm điểm đã cho.

Lời giải:

Một vectơ được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Số vecto khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là năm điểm đã cho chính là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử:

Do đó, ta có: $A_5^2 = 5.4.3 = 60$ vectơ thỏa mãn đầu bài.

- **Chú ý:**

a) Với quy ước 0! = 1 ta có: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}; 1 \le k \le n$.

b) Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó.

Vì vậy: $P_n = A_n^n$.

III. Tổ hợp

1. Định nghĩa.

- Giả sử tập A có n phần tử (n ≥ 1). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

- **Chú ý**: Số k trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện 1 ≤ k ≤ n. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

- **Ví dụ 4.** Cho tập A = {3; 4; 5; 6}.

Ta liệt kê các tổ hợp chập 3 của A là: {3; 4; 5}; {3; 4; 6}; {3; 5; 6}; {4; 5; 6}.

2. Số các tổ hợp.

Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \le k \le n$).

- Định lí: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ 5. Cho 8 điểm phân biệt A; B; C; D; E; F; G; H, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta lập được bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 8 điểm đã cho.

Lời giải:

Mỗi tam giác được lập là 1 tổ hợp chập 3 của 8 (điểm).

Vì vậy số tam giác có 3 đỉnh là 8 điểm đã cho là $C_8^3 = 56$.

3. Tính chất của các số C_n^k

a) Tính chất 1.

$$C_n^k = C_n^{n-k};\ 0 \le k \le n.$$

Ví dụ 6. $C_8^3 = C_8^5 = 56$.

b) Tính chất 2 (công thức Pa-xcan).

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k;\ 1 \le k < n.$$

Ví dụ 7. $C_8^4 + C_8^5 = C_9^5 = 126$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai bạn cùng giới không đứng cạnh nhau.

Lời giải:

Đánh số 10 vị trí xếp từ 1 đến 10.

+ Trường hợp 1. Các bạn nam xếp ở vị trí lẻ, các bạn nữ xếp ở vị trí chẵn.

Xếp 5 bạn nam vào 5 vị trí lẻ có 5! = 120 cách

Xếp 5 bạn nữ vào 5 vị trí chẵn có 5! = 120 cách

Theo quy tắc nhân có: 120.120 = 14400 cách.

+ Trường hợp 2. Các bạn nam xếp ở vị trí chẵn, các bạn nữ xếp ở vị trí lẻ.
Tương tự trường hợp 1; có 14400 cách.
Vậy có tất cả: 14 400 + 14 400 = 28 800 cách.

Bài 2. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh khối 11?

Lời giải :

Do mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh khối 11 nên ở vị trí đầu tiên và cuối cùng của dãy ghế sẽ là học sinh khối 11.
Bước 1: Xếp 6 học sinh lớp 11 thành một hàng ngang, có 6! cách.
Bước 2: giữa 6 bạn học sinh lớp 11 có 5 khoảng trống, chọn 3 khoảng trống trong 5 khoảng trống để xếp các bạn lớp 12, có A_5^2 cách (có liên quan đến thứ tự).
Theo quy tắc nhân có $6!.A_5^2 = 14400$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Bài 3. Cho tập hợp A = {0; 1; 2; 3; 4; 5}. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

Lời giải:

Xếp 5 phần tử của A vào 5 ô trống liền nhau, mỗi ô trống chỉ chứa 1 phần tử, không ô trống nào chứa cùng phần tử, số cách xếp ban đầu này là $A_6^5 = 720$

Tương tự như vậy, nhưng mặc định ô trống đầu tiên là chứa phần tử 0, số cách xếp vào 4 ô trống còn lại tương ứng là $A_5^4 = 120$.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập A là 720 – 120 = 600.

Bài 4. Cho hai đường thẳng song song a và b. Trên đường thẳng a có 7 điểm phân biệt, trên đường thẳng b có 6 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

Lời giải:

+ Trường hợp 1: Tam giác được tạo thành có 2 đỉnh thuộc đường thẳng a và 1 đỉnh thuộc đường thẳng b.

Chọn 2 đỉnh thuộc a có $C_7^2 = 21$ cách

Chọn 1 đỉnh thuộc b có 6 cách

Có 21.6 = 126 tam giác.

+ Trường hợp 2: Tam giác được tạo thành có 2 đỉnh thuộc đường thẳng b và 1 điểm thuộc đường thẳng a.

Chọn 2 đỉnh thuộc b có $C_6^2 = 15$ cách

Chọn 1 đỉnh thuộc a có 7 cách

Có 15.7 = 105 tam giác.

Số các tam giác thỏa mãn đầu bài là: 126 + 105 = 231.