

Bài 5. Hai dạng phương trình quy về phương trình bậc hai

A. Các câu hỏi trong bài

Câu hỏi khởi động trang 56 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Hai ô tô xuất phát tại cùng một điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km, vị trí B cách bến 7 km. Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (Hình 31).



Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

Làm thế nào để tìm được giá trị của x?

Lời giải:

Sau bài học này ta sẽ giải quyết bài toán này như sau:

Để tìm được giá trị của x, ta cần giải phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$ (1).

Điều kiện xác định: $(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 \geq 0$.

Vì $(8 - 40x)^2 \geq 0$ và $(7 - 40x)^2 \geq 0$ với mọi x nên $(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 \geq 0$ với mọi x.

Bình phương hai vế ta được: $(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow 1\,600x^2 - 640x + 64 + 1\,600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3\,200x^2 - 1\,200x + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1 \\ x = 0,275 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy có hai giá trị của x : $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$ nghĩa là có hai thời điểm để hai xe cách nhau 5km.

Luyện tập 1 trang 57 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1} \quad (1).$$

Lời giải:

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được:

$$3x^2 - 4x + 1 = x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay $x = 2$ vào bất phương trình $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ta được: $3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 0$ (luôn đúng). Do đó $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào bất phương trình $3x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ta được:

$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} - 2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \geq 0$ (vô lý). Do đó $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 2$.

Luyện tập 2 trang 58 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x-5} = x-1$ (1).

Lời giải:

Ta có: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bình phương hai vế của (1) ta được:

$$3x-5 = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x-5 = x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } x \geq 1)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 3$.

B. Bài tập

Bài 1 trang 58 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2-3x-1} = \sqrt{2x+3}$;

b) $\sqrt{4x^2-6x-6} = \sqrt{x^2-6}$;

c) $\sqrt{x+9} = 2x-3$;

d) $\sqrt{-x^2+4x-2} = 2-x$.

Lời giải:

a) $\sqrt{2x^2-3x-1} = \sqrt{2x+3}$

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$2x^2 - 3x - 1 = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{57}}{4} \\ x = \frac{5 - \sqrt{57}}{4} \end{cases}$$

Lần lượt thay hai giá trị trên vào bất phương trình $2x^2 - 3x - 1 \geq 0$ ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn bất phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}$ và $x = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$.

$$b) \sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6}$$

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$4x^2 - 6x - 6 = x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x^2 - 6x - 6 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lần lượt thay hai giá trị trên vào bất phương trình $4x^2 - 6x - 6 \geq 0$ ta thấy cả hai giá trị đều không thỏa mãn bất phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$c) \sqrt{x + 9} = 2x - 3$$

Điều kiện: $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ (1)

Bình phương cả hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$x + 9 = (2x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 13x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Ta thấy chỉ có giá trị $x = \frac{13}{4}$ thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{13}{4}$.

d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x$

Điều kiện: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (2).

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$-x^2 + 4x - 2 = (2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 2 = 4 - 4x + x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta thấy trong hai giá trị trên chỉ có giá trị $x = 1$ thỏa mãn điều kiện (2).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

Bài 2 trang 59 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x} + 2x = 3;$

b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4.$

Lời giải:

a) $\sqrt{2-x} + 2x = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 3-2x \quad (1)$$

Điều kiện: $3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \quad (2).$

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $2-x = (3-2x)^2$

$$\Leftrightarrow 2-x = 9-12x+4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn (2) và $x = \frac{7}{4}$ không thỏa mãn (2).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 7x - 6} = 4 - x \quad (3)$$

$$\text{Điều kiện: } 4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad (4)$$

Bình phương hai vế của phương trình (3) ta được: $-x^2 + 7x - 6 = (4 - x)^2$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 16 - 8x + x^2$$

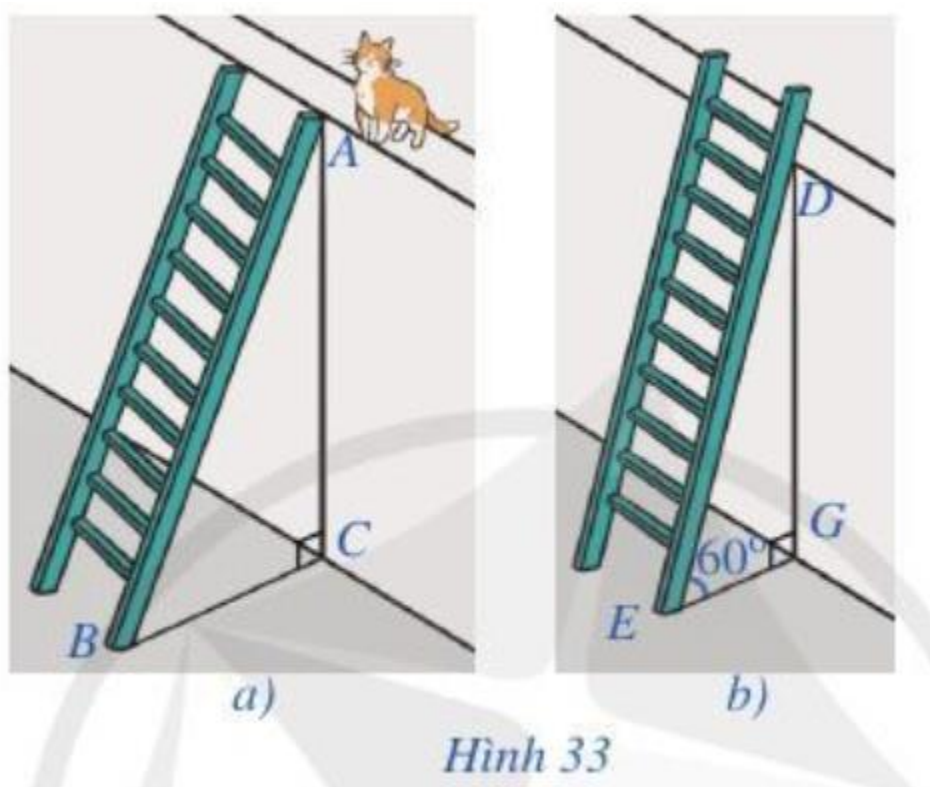
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Ta thấy $x = 2$ thỏa mãn (4) và $x = \frac{11}{2}$ không thỏa mãn (4).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

Bài 3 trang 59 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng và mép trên bức tường (Hình 33a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình 33b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải:

Gọi chiều cao của bức tường là x (mét) ($x > 0$).

Vì chiếc thang cao hơn tường 1 m nên chiều cao của chiếc thang là $x + 1$ (m).

Hình 33a) tương ứng ta có: $AC = x$, $AB = x + 1$

Xét tam giác ABC vuông tại C:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = (x + 1)^2 - x^2 = (x + 1 - x)(x + 1 + x) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2x + 1} \text{ (m)}.$$

Hình 33b) ta thấy chiều cao bức tường không thay đổi nên $DG = x$ (m).

Khi bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần tường thêm 0,5 m thì $GE = BC - 0,5$.

$$\text{Suy ra } GE = \sqrt{2x + 1} - 0,5 \text{ (m)}$$

Xét tam giác DGE vuông tại G, ta có:

$$\tan DEG = \frac{DG}{GE}$$

$$\Leftrightarrow \tan 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{2x+1}-0,5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{2x+1}-0,5}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}(\sqrt{2x+1}-0,5)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3(2x+1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(2x+1)} = x + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Bình phương hai vế của (1) ta được: } 3(2x+1) = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3 = x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$$

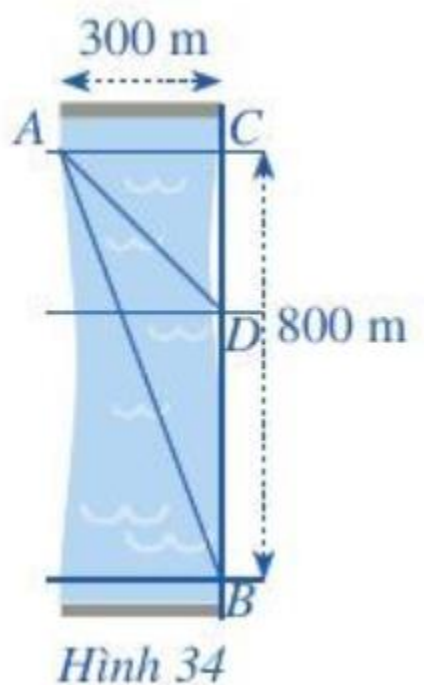
$$\Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{3}-6)x - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6-\sqrt{3}+\sqrt{48-12\sqrt{3}}}{2} \approx 4,7 \\ x = \frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{48-12\sqrt{3}}}{2} \approx -0,5 \end{cases}$$

Ta thấy chỉ có $x \approx 4,7$ thỏa mãn $x > 0$ và điều kiện (2).

Vậy bức tường cao khoảng 4,7 m.

Bài 4 trang 59 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một người đứng ở điểm A trên bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như Hình 34. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Lời giải:

Gọi độ dài khoảng cách từ vị trí C đến D là x (km, $x > 0$).

Đổi: 300 m = 0,3 km; 800 m = 0,8 km; 7,2 phút = 0,12 giờ.

Tương ứng ta có: $AC = 0,3$ km; $CD = x$ km; $BC = 0,8$ km; $DB = BC - CD = 0,8 - x$ (km).

Xét tam giác ACD vuông tại C, ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$AD^2 = (0,3)^2 + x^2 = 0,09 + x^2$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{0,09 + x^2} \text{ (km)}$$

$$\text{Thời gian người đó chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí D là } \frac{\sqrt{0,09 + x^2}}{6} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Thời gian người đó chạy bộ từ vị trí D đến vị trí B là } \frac{0,8 - x}{10} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Tổng thời gian người đó chèo thuyền và đi bộ là } \frac{\sqrt{0,09 + x^2}}{6} + \frac{0,8 - x}{10} \text{ (giờ).}$$

Vì người đó mất 0,12 giờ chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{0,09 + x^2}}{6} + \frac{0,8 - x}{10} = 0,12$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{0,09 + x^2}}{30} + \frac{3(0,8 - x)}{30} = 0,12$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{0,09 + x^2} + 2,4 - 3x = 3,6$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{0,09 + x^2} = 1,2 + 3x \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } 1,2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\text{Bình phương cả hai vế của (1) ta được: } 25.(0,09 + x^2) = (1,2 + 3x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2,25 + 25x^2 = 1,44 + 7,2x + 9x^2$$

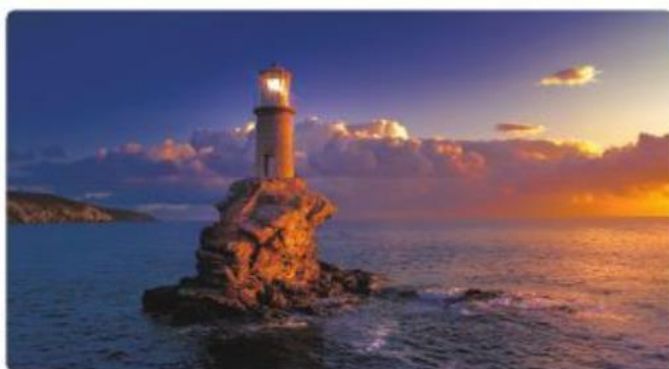
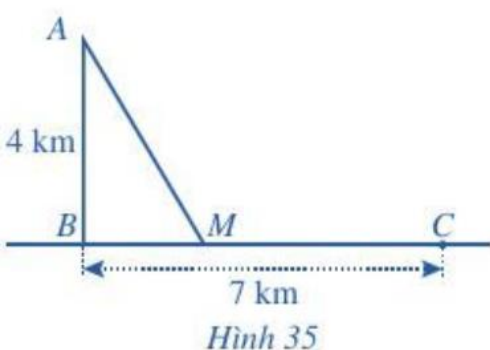
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 7,2x + 0,81 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0,225 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{ và điều kiện (2))}$$

Ta có: $x = 0,225 \text{ km} = 225 \text{ m}$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C đến D là 225 m.

Bài 5 trang 59 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như Hình 35. Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải:

Gọi khoảng cách từ vị trí B đến M là $x \text{ (km, } x > 0)$.

Tương ứng trên hình vẽ ta có: $AB = 4 \text{ km}$, $BM = x \text{ km}$, $BC = 7 \text{ km}$.

Xét tam giác ABM vuông tại B, ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{16 + x^2} \text{ (km)}$$

Thời gian chèo thuyền từ A đến M là $\frac{\sqrt{16 + x^2}}{3}$ (giờ).

Ta có: $MC = BC - BM = 7 - x \text{ (km)}$.

Thời gian đi bộ từ M đến C là $\frac{7-x}{5}$ (giờ).

Tổng thời gian người đó đi từ A đến C là: $\frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{7-x}{5}$ (giờ)

Biết thời gian đi từ A đến C là 148 phút = $\frac{37}{15}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{7-x}{5} = \frac{37}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{16+x^2}}{15} + \frac{3(7-x)}{15} = \frac{37}{15}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{16+x^2} + 3(7-x) = 37$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{16+x^2} + 21 - 3x = 37$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{16+x^2} = 16 + 3x \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } 16 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{16}{3} \quad (2)$$

Bình phương cả hai vế của (1) ta được: $25(16+x^2) = (16+3x)^2$

$$\Leftrightarrow 400 + 25x^2 = 256 + 96x + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 96x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{ và (2))}$$

Vậy khoảng cách từ vị trí B đến vị trí M là 3 km.