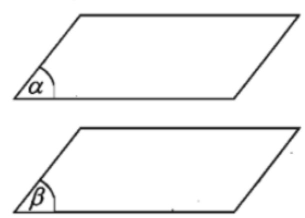
Bài 4. Hai mặt phẳng song song

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa

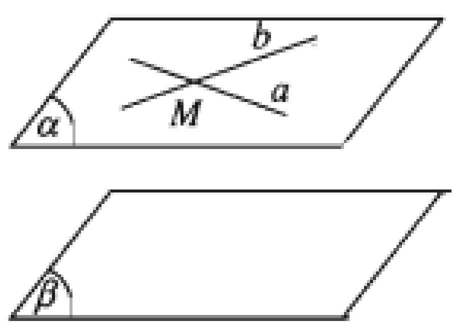
Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu (α) // (β) hoặc (β) // (α).



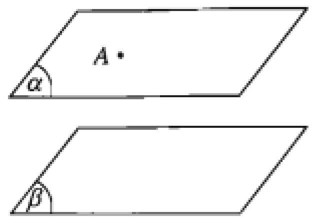
II. Tính chất

- Định lí 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

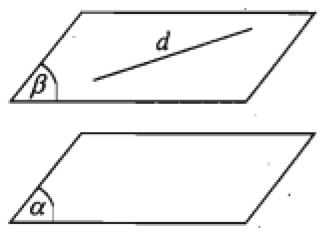


Ta có: $\left.\begin{array}{l} a,b \subset (\alpha), a \cap b = M \\ a // (\beta) \\ b // (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

- Định lí 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

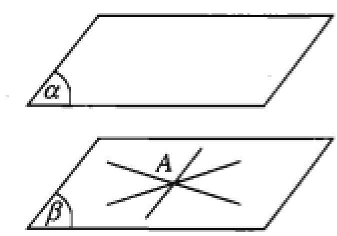


- **Hệ quả 1**. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).



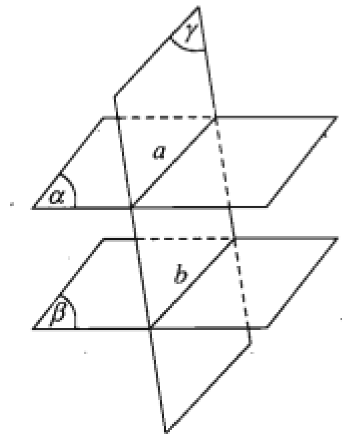
- **Hệ quả 2.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

- **Hệ quả 3**. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).



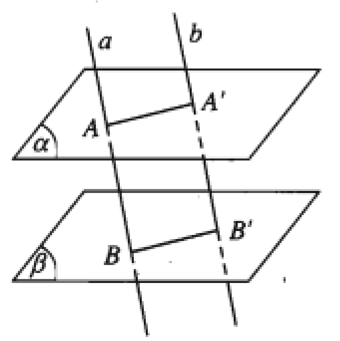
- **Định lí 3**. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ a=(\alpha)\cap(\gamma)\\ b=(\beta)\cap(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow a//b$$



- Hệ quả. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ a\cap(\alpha)=A, b\cap(\alpha)=A'\\ a\cap(\beta)=B, b\cap(\beta)=B'\\ AA'=(\alpha)\cap(\gamma)\\ BB'=(\beta)\cap(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow AA'=BB'$$

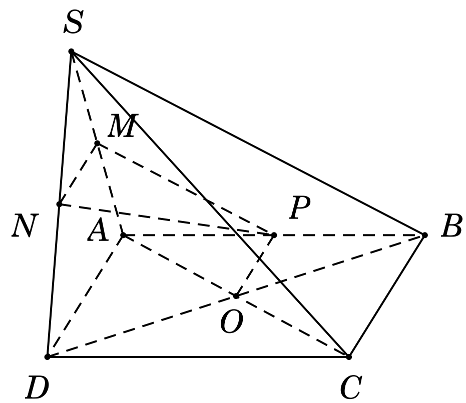


Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Chứng minh:

a) M, N, O, P đồng phẳng.

b) mp(MON) // mp(SBC).

Lời giải:



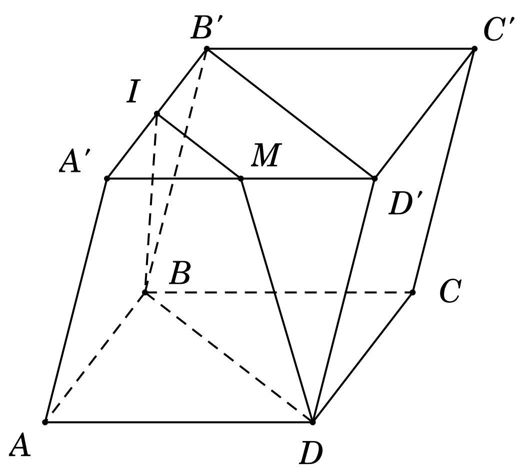
a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD nên MN // AD (1).
Và OP là đường trung bình của tam giác ABC nên OP // BC // AD (2).
Từ (1) và (2) suy ra MN // OP // AD nên 4 điểm M, N, O, P đồng phẳng.

b) Vì $\begin{cases} \text{MP // SB} \\ \text{OP // BC} \\ \text{MP, OP} \subset \text{(MNOP)} \\ \text{SB, BC} \subset \text{(SBC)} \end{cases}$

Suy ra, (MNOP) // (SBC) hay (MON) // (SBC).

Ví dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi I là trung điểm của A’B’. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

Lời giải:



- Ta tìm giao tuyến của 2 mp(IBD) và (A’B’C’D’)

$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ BD \subset (IBD);\ B'D' \subset (A'B'C'D') \\ I \text{ chung} \end{cases}$$

Suy ra, giao tuyến của (IBD) với (A’B’C’D’) là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

- Trong mặt phẳng (A’B’C’D’), gọi M là giao điểm của d và A’D’.

Suy ra, IM // BD // B’D’.

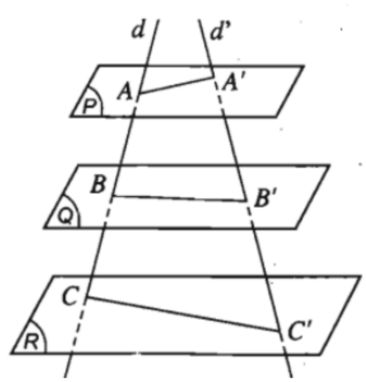
Khi đó thiết diện là tứ giác IMDB và tứ giác này là hình thang.

III. Định lí Ta – let (Thalès)

- Định lí 4 (định lí Ta- let). Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

- Nếu d, d’ là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt tại các điểm A, B, C và A’, B’, C’ thì:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$



IV. Hình lăng trụ, hình hộp

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α’). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α’) lần lượt tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$;

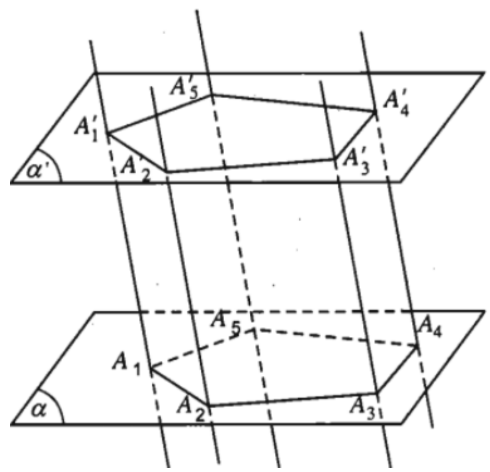
$A_2A_2'A_3'A_3, \ldots, A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2 \ldots A_n.A'_1A'_2 \ldots A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.

- Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, A_2A_2', …., A_nA_n' gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.

- Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, …, $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.

- Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



- Nhận xét:

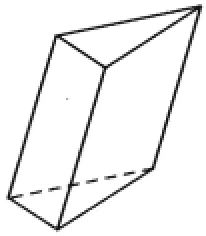
+ Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

+ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

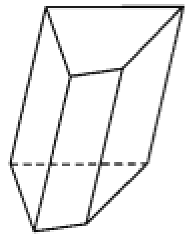
+ Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy, chẳng hạn:

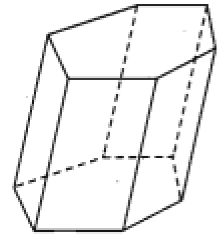
+ Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.



Hình lăng trụ tam giác

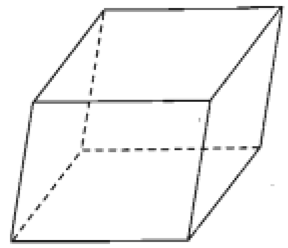


Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

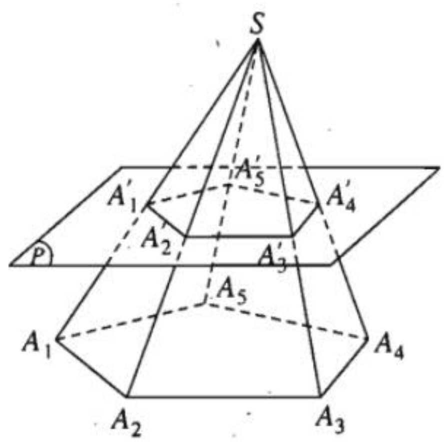
+ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.



V. Hình chóp cụt

Định nghĩa:

Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, …,SA_n lần lượt tại A_1’; A_2’,.., A_n’. Hình tạo bởi thiết diện A_1’A_2’..A_n’ và đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là *hình chóp cụt*.



Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện A_1’A_2’..A_n’ gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.

Các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.

Các đoạn thẳng A_1A’$_1$, A_2A_2’,…., A_nA_n’ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

- Tính chất của hình chóp cụt

(1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

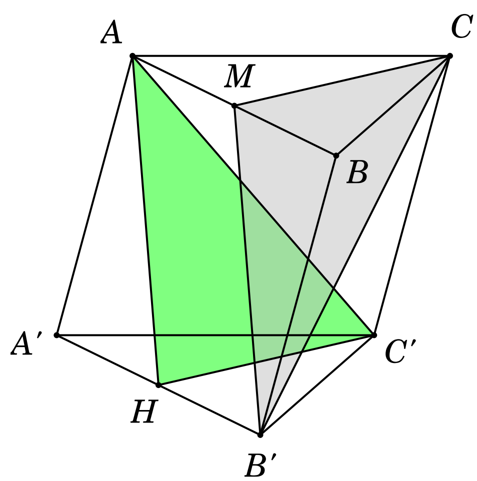
(2) Các mặt bên là những hình thang.

(3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’. Gọi H là trung điểm của A’B’. Chứng minh: B’C // (AHC’).

Lời giải:



- Gọi M là trung điểm của AB.

Suy ra AMB’H là hình bình hành

Do đó, MB’// AH mà $AH \subset mp(AHC')$ nên MB’// mp(AHC’) (1) .

- Vì MH là đường trung bình của hình bình hành ABB’A’

Suy ra MH song song và bằng BB’ nên MH song song và bằng CC’

$\Rightarrow$ MHC’C là hình hình hành.

Suy ra: MC // HC’ mà $HC' \subset mp(AHC')$ nên MC // (AHC’) (2)

Từ (1) và (2), suy ra (B’MC) // (AHC’).

Suy ra, B’C // (AHC’).

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong mp (ABCD). Mp(α) cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại A’, B’, C’, D’. Chứng minh:

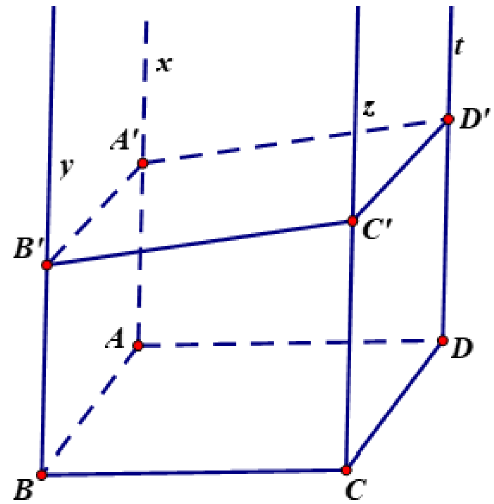
a) mp (AA’B’B) // (DD’C’C).

b) A’B’C’D’ là hình bình hành.

c) OO’ // AA’.

Trong đó O là tâm hình bình hành ABCD, O’ là giao điểm của A’C’ và B’D’.

Lời giải:



a) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AB \,//\, DC \\ AA' \,//\, DD' \\ AB, AA' \subset (ABB'A') \\ DC, DD' \subset (DD'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABB'A') \,//\, (DD'C'C)$$

b) Tương tự câu a, ta chứng minh được (ADD’A’) // (BCC’B’).

$$\text{Vì } \left.\begin{array}{l} (\alpha) \cap (ABB'A') = A'B' \\ (\alpha) \cap (DCC'D') = C'D' \\ (ABB'A') // (DCC'D') \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \,//\, C'D' \quad (1)$$

$$\text{và } \left.\begin{array}{l} (\alpha) \cap (ADD'A') = A'D' \\ (\alpha) \cap (BCC'B') = C'B' \\ (ADD'A') // (BCC'B') \end{array}\right\} \Rightarrow A'D' \,//\, C'B' \quad (2)$$

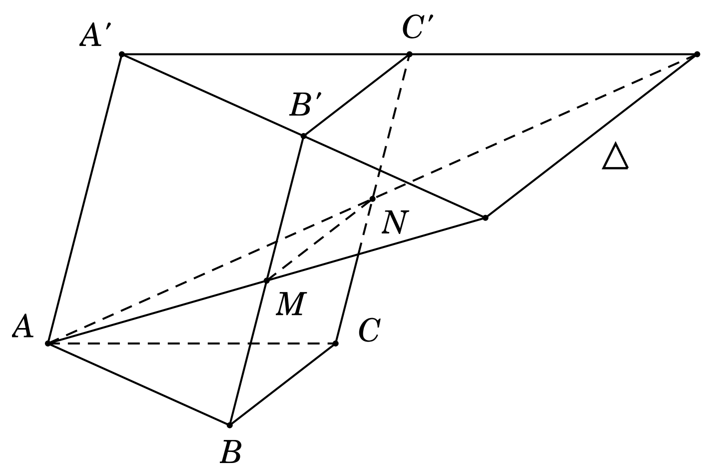
Từ (1), (2) suy ra tứ giác A’B’C’D’ là hình bình hành.

c) Do O và O’ lần lượt là trung điểm của AC và A’C’ (tính chất hình bình hành) nên OO’ là đường trung bình trong hình thang AA’C’C.

Do đó OO’// AA’.

Bài 3. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (A'B'C'). Chứng minh Δ // BC.

Lời giải:



Do M và N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' nên MN là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên MN // B'C'.

Ta có:

$$\begin{cases} MN \subset (AMN);\ B'C' \subset (A'B'C') \\ MN \parallel B'C' \\ (AMN) \cap (A'B'C') = \Delta \end{cases}$$

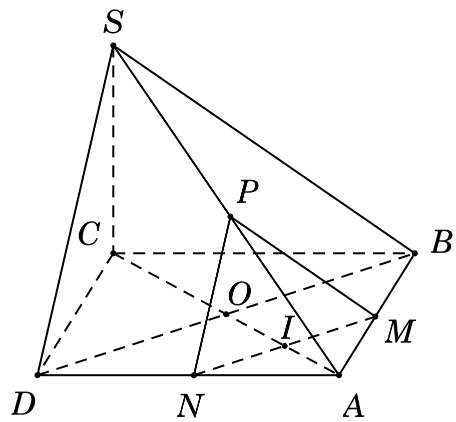
Suy ra: Δ // MN // B'C' (1).

Lại có BCC'B' là hình bình hành nên BC // B'C' (2).

Từ (1) và (2) suy ra Δ // BC.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

Lời giải:



- Gọi MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy (ABCD).

Vì $\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (P) \cap (ABCD) = MN \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases}$

Suy ra MN // BD (tính chất)

- Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với NP // SD.

(P) cắt mp (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với MP // SB.

Vậy tam giác PMN đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp S.ABCD là tam giác đều MNP.