

Bài tập Đạo hàm của các hàm số lượng giác - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Hàm số $y = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$ có đạo hàm là:

A. $y' = \cos x - \sin x + 1$.

B. $y' = \cos x + \sin x + \cos 2x$.

C. $y' = \cos x - \sin x + \cos 2x$.

D. $y' = \cos x + \sin x + 1$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}y &= (1 + \sin x)(1 + \cos x) \\&= 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x \\&= 1 + \sin x + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x\end{aligned}$$

Suy ra: $y' = \cos x - \sin x + \cos 2x$

Chọn đáp án C

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ bằng:

A. 0.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}) \\
 f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}} \left(\cos \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} - \sin \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án A

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. 0

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$y = \sqrt{\tan x + \cot x} \Rightarrow y^2 = \tan x + \cot x$$

$$\Rightarrow y' \cdot 2y = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}} \left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 4: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. Giá trị $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. Không tồn tại.

Lời giải:

Ta có:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' 2y = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2y} \cdot \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} \right) = \frac{-\sqrt{\sin x}}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{-\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} \right)}}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án C

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính $y' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ bằng:

A. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 1.$ B. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -1.$

C. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2.$ D. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -2.$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{-\sin x(1 - \sin x) + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} \\&= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} \\&= \frac{-\sin x + 1}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x} \\y'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} = 2\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 6: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$. Biểu thức $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

- A. -3 . B. $\frac{8}{3}$.
C. $-\frac{8}{9}$ D. $-\frac{8}{3}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-2\cos x \sin x(1 + \sin^2 x) - 2\cos x \sin x \cos^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2} \\&= \frac{-2\cos x \sin x(1 + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-4\cos x \sin x}{(1 + \sin^2 x)^2} \\&\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-8}{9}\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 7: Hàm số $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ có đạo hàm bằng

A. $\frac{-x^2 \cdot \sin 2x}{(\cos x + x \sin x)^2}$

B. $\frac{-x^2 \cdot \sin^2 x}{(\cos x + x \sin x)^2}$

C. $\frac{-x^2 \cdot \cos 2x}{(\cos x + x \sin x)^2}$

D. $\left(\frac{x}{\cos x + x \sin x} \right)^2$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x - x \cos x)' (\cos x + x \sin x) - (\cos x + x \sin x)' (\sin x - x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - \cos x + x \cdot \sin x)(\cos x + x \sin x) - (-\sin x + \sin x + x \cdot \cos x)(\sin x - x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x \sin x (\cos x + x \sin x) - x \cos x (\sin x - x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x}{(\cos x + x \sin x)^2} = \left(\frac{x}{\cos x + x \sin x} \right)^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án D

Bài 8: Cho hàm số $y = \cot^2 \frac{x}{4}$. Khi đó nghiệm của phương trình là:

A. $\pi + k2\pi$.

B. $2\pi + k4\pi$.

C. $2\pi + k\pi$.

D. $\pi + k\pi$.

Lời giải:

Ta có:

$$y' = \left(\cot^2 \frac{x}{4} \right)' = 2 \cot \frac{x}{4} \left(\cot \frac{x}{4} \right)' = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{4} \left(1 + \cot^2 \frac{x}{4} \right)$$

$$\text{Mà: } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cot \frac{x}{4} \left(1 + \cot^2 \frac{x}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = 2\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Chọn đáp án B

Bài 9: Hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là:

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

B. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

D. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}y' &= 2\left(\sqrt{\sin x}\right)' - 2\left(\sqrt{\cos x}\right)' \\&= 2.\cos x.\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} + 2\sin x\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \\&= \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 10: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$.

- A. $y' = \sin 8x + \frac{45}{2} \cos 5x.\sin 10x$
- B. $y' = 8 \sin 8x + \frac{5}{2} \cos 5x.\sin 10x$
- C. $y' = 8 \sin x + \frac{45}{2} \cos 5x.\sin 10x$
- D. $y' = 8 \sin 8x + \frac{45}{2} \cos 5x.\sin 10x$

Lời giải:

Bước đầu tiên áp dụng $(u+v)'$

$$y' = (2 \sin^2 4x)' - 3(\cos^3 5x)'$$

Tính $(\sin^2 4x)'$:

Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \sin 4x$,

Ta được:

$$\begin{aligned} (\sin^2 4x)' &= 2 \sin 4x.(\sin 4x)' = 2 \sin 4x. \cos 4x (4x)' \\ &= 8. \sin 4x. \cos 4x = 4 \sin 8x. \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} (\cos^3 5x)' &= 3 \cos^2 5x.(\cos 5x)' \\ &= 3 \cos^2 5x.(-\sin 5x).(5x)' \\ &= -15 \cos^2 5x. \sin 5x = \frac{-15}{2} \cos 5x. \sin 10x. \end{aligned}$$

$$\text{Kết luận: } y' = 8 \sin 8x + \frac{45}{2} \cos 5x. \sin 10x$$

Chọn đáp án D

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (2 + \sin^2 2x)^3$.

Lời giải:

Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = 2 + \sin^2 2x$.

$$\begin{aligned} y' &= 3(2 + \sin^2 2x)^2 (2 + \sin^2 2x)' \\ &= 3(2 + \sin^2 2x)^2 (\sin^2 2x)'. \end{aligned}$$

Tính $(\sin^2 2x)'$,

Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \sin 2x$.

$$\begin{aligned} (\sin^2 2x)' &= 2 \sin 2x (\sin 2x)' \\ &= 2 \sin 2x \cos 2x (2x)' = 2 \sin 4x. \\ \Rightarrow y' &= 6 \sin 4x (2 + \sin^2 2x)^2. \end{aligned}$$

Bài 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$ là

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left[2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]'}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Bài 3: Đạo hàm của hàm số $y = \cot^2(\cos x) + \sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}$ là

Lời giải:

$$\begin{aligned}
y' &= 2 \cot(\cos x) \cdot (\cot(\cos x))' + \frac{\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}} \\
&= 2 \cot(\cos x) \cdot \frac{-1}{\sin^2(\cos x)} \cdot (\cos x)' + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}} \\
&= 2 \cot(\cos x) \cdot \frac{1}{\sin^2(\cos x)} \cdot \sin x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}
\end{aligned}$$

Bài 4: Hàm số $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ có đạo hàm bằng:

Lời giải:

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \right)' \\
&= \frac{2 \sin^2 x (\cos x)' - (2 \sin^2 x)' \cdot \cos x}{4 \sin^4 x} \\
&= \frac{-2 \sin^3 x - 2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{4 \sin^4 x} \\
&= -\frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{2 \sin^3 x} = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x}{2 \sin^3 x} \\
&= -\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin^3 x}
\end{aligned}$$

Bài 5: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^3$.

Lời giải:

Bước đầu tiên ta áp dụng công thức $(u^a)'$

với $u = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$$y' = 3 \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)'$$

Tính :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)' &= \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - (1 + \cos x)' \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Vậy $y' = 3 \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{3 \sin^2 x}{(1 + \cos x)^3}.$

Bài 6: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin(\cos^2 x \cdot \tan^2 x).$

Lời giải:

Áp dụng $(\sin u)'$, với $u = \cos^2 x \tan^2 x$

$$y' = \cos(\cos^2 x \tan^2 x) \cdot (\cos^2 x \tan^2 x)'$$

Tính $(\cos^2 x \tan^2 x)'$, bước đầu sử dụng $(u.v)'$

sau đó sử dụng $(u^\alpha)'$.

$$(\cos^2 x \tan^2 x)' = (\cos^2 x)' \tan^2 x + (\tan^2 x)' \cos^2 x$$

$$= 2 \cos x (\cos x)' \tan^2 x + 2 \tan x (\tan x)' \cos^2 x$$

$$= -2 \sin x \cos x \tan^2 x + 2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} \cos^2 x$$

$$= -\sin 2x \tan^2 x + 2 \tan x.$$

$$\text{Vậy } y' = \cos(\cos^2 x \tan^2 x) (-\sin 2x \tan^2 x + 2 \tan x)$$

Bài 7: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2 \sin 2x - \cos 2x}$.

Lời giải:

$$y' = \frac{(\sin 2x + \cos 2x)' \cdot (2 \sin 2x - \cos 2x) - (2 \sin 2x - \cos 2x)' \cdot (\sin 2x + \cos 2x)}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$y' = \frac{(2 \cos 2x - 2 \sin 2x)(2 \sin 2x - \cos 2x) - (4 \cos 2x + 2 \sin 2x)(\sin 2x + \cos 2x)}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{4 \cos 2x \cdot \sin 2x - 2 \cos^2 2x - 4 \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{(4 \cos 2x \cdot \sin 2x + 4 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x)}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$y' = \frac{-6 \cos^2 2x - 6 \sin^2 2x}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2} = \frac{-6}{(2 \sin 2x - \cos 2x)^2}.$$

Bài 8: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin^2(\cos(\tan^4 3x))$

Lời giải:

Đầu tiên áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \sin(\cos(\tan^4 3x))$

$$y' = 2 \sin(\cos(\tan^4 3x)) \cdot [\sin(\cos(\tan^4 3x))]'$$

Sau đó áp dụng $(\sin u)'$, với $u = \cos(\tan^4 3x)$

$$y' = 2 \sin(\cos(\tan^4 3x)) \cdot \cos(\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\cos(\tan^4 3x))'$$

Áp dụng $(\cos u)'$, với $u = \tan^4 3x$.

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot (\tan^4 3x)'$$

Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \tan 3x$

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (\tan 3x)'$$

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot (3x)'$$

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot 3.$$

Bài 10:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$ bằng:

Lời giải:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \cos 3x}{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 1 \cdot \cos 3x}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bài 10: Đạo hàm của hàm số

$$y = \sin 2x + \cos \frac{x^2+1}{2} - \tan \sqrt{x}$$

bằng biểu thức nào?

Lời giải:

$$y' = 2\cos 2x - x \sin \frac{x^2+1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Đạo hàm của hàm số

$$y = \sin 2x \cos^4 x - \cot \frac{1}{x^2} - \sin 2x \cdot \sin^4 x$$

bằng biểu thức nào sau đây?

Bài 2 Tính đạo hàm của hàm số $y = x \cdot \cos x$.

Bài 3 Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin^3(2x + 1)$.

Bài 4 Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$.

Bài 5 Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sqrt{\sin x + 2x}$.

Bài 6 Hàm số $y = f(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)}$ có $f'(3)$ bằng?

Bài 7 Cho hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin 2x$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Bài 8 Cho hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Bài 9 Cho hàm số $f(x) = \tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$. Giá trị bằng?

Bài 10 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$. Tính $f'(x)$