Bài 5. Hai dạng phương trình quy về phương trình bậc hai

A. Lý thuyết

I. Giải phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$ với $a \neq m$)

Để giải phương trình (I) ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình f(x) = g(x) rồi tìm nghiệm của phương trình này

Bước 2: Thay từng nghiệm của phương trình f(x) = g(x) vào bất phương trình

$f(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \geq 0$. Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3: Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I)

Chú ý:

– Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$ ta thường chọn bất phương trình dạng đơn giản để thực hiện bước 2.

– Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x - 2}$ (1)

Hướng dẫn giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $x^2 - 3x + 2 = x - 2$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$

Do đó, phương trình (2) có nghiệm là x = 2.

Thay lần giá trị trên vào bất phương trình $x - 2 \geq 0$, ta thấy $x = 2$ thoả mãn bất phương trình

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 2$.

II. Giải phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx + e$ với $a \neq d^2$)

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1: Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó

Bước 2: Bình phương hai vế của phương trình dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3: Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Bình phương hai vế của phương trình, ta được: $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm là $x = 1$, giá trị $x = 1$ là thoả mãn $x \geq 1$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6}$;

b) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x$.

Hướng dẫn giải

a) Bình phương hai vế của phương trình ta được: $4x^2 – 6x – 6 = x^2 – 6$

$\Leftrightarrow 3x^2 – 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Thay các giá trị tìm được vào bất phương trình $x^2 – 6 \geq 0$ thì thấy chỉ có nghiệm x = 2 thoả mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là S = {2}.

b) Ta có: $2 – x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$–x^2 + 4x – 2 = (2 – x)^2 \Leftrightarrow – x^2 + 4x – 2 = x^2 – 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 – 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x \leq 2$, ta thấy x = 3 không thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = {1}.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2 - x} + 2x = 3$;

b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4$.

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{2 - x} + 2x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} = 3 – 2x$

Ta có: $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$2 - x = (3-2x)^2 \Leftrightarrow 2 - x = 9 - 12x + 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, ta thấy chỉ có giá trị x = 1 thoả mãn.

Vậy tập nghiệm S = {1}.

b)

$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 7x - 6} = 4 - x$. Ta có: $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$-x^2 + 7x - 6 = (4-x)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{11}{2} \end{array}\right. \cdot$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm x = 2 thoả mãn.

Vậy tập nghiệm S = {2}.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = -2x^2 - 3x + 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0 \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-8}{6} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-8}{6}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm S = $\left\{\dfrac{-8}{6}\right\}$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.

Hướng dẫn giải

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 3x^2 - 9x + 1 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x - 3)(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3(\text{tm}) \\ x = \dfrac{-1}{2}(\text{ktm}) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm S = {3}.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-4}=\sqrt{4-3x}$ là đáp án nào trong số các đáp án sau đây?

A. x = 1;

B. x = 2;

C. x = 3;

D. x = $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Điều kiện: $\begin{cases}3x-4\geq 0\\4-3x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{4}{3}\\x\leq\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Bình phương hai vế của phương trình ta có: 3x – 4 = 4 – 3x ⇔ 6x = 8 ⇔ x = $\frac{4}{3}$.

Đối chiếu với điều kiện bài toán và thử lại kết quả suy ra phương trình có nghiệm

x = $\frac{4}{3}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sqrt{-10x+10}=x-1$ là:

A. x = – 12;

B. x = – 6;

C. x = 1;

D. x = 2.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Điều kiện: $\begin{cases} -10x+10 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Khi đó phương trình có thể viết lại như sau: $-10x+10=(x-1)^2$

$\Leftrightarrow -10x+10=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2+8x-9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện bài toán và thử lại kết quả ta thấy x = 1 là nghiệm của phương trình.

Câu 3. Tổng các nghiệm của phương trình $\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng:

A. 0;

B. 1;

C. 2;

D. 3.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Điều kiện xác định của phương trình $2x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{2}$.

Ta có : $\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=x^2-4\Leftrightarrow\left(x-2\right)\sqrt{2x+7}=\left(x-2\right)\left(x+2\right)$

$$\Leftrightarrow\ \left(x-2\right)\left[\sqrt{2x+7}-\left(x+2\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ \sqrt{2x+7}-\left(x+2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \sqrt{2x+7}=x+2\qquad\left(1\right)\end{array}\right..$$

Giải phương trình

$$\left(1\right):\sqrt{2x+7}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 2x+7=\left(x+2\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 2x+7=(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 2x+7=x^2+4x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+2x-3=0\end{cases}\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x = 1, x = 2 nên tổng hai nghiệm của phương trình là 1 + 2 = 3.