

Công thức tính tổng các hệ số trong khai triển

1. Tổng hợp lý thuyết

Công thức khai triển nhị thức Niu – ton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

2. Các công thức

Phương pháp tìm tổng các hệ số trong khai triển

Xét khai triển tổng quát: (với a, b là các hệ số; x, y là biến)

$$\begin{aligned}(ax + by)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (ax)^{n-k} (by)^k \\&= C_n^0 a^n x^n + C_n^1 a^{n-1} b x^{n-1} y + C_n^2 a^{n-2} b^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n b^n y^n\end{aligned}$$

Tổng các hệ số trong khai triển là:

$$S = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ta chọn biến $x = 1$; $y = 1$ thay vào khai triển: $S = (a + b)^n$

(Chú ý: tùy thuộc vào khai triển đề bài cho, có thể xét khai triển với chỉ 1 biến x)

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong khai triển $(1 - 3x)^{2021} = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{2021} x^{2021}$. Tổng hệ số của: $a_0 + a_1 + \dots + a_{2021}$

Lời giải

Xét khai triển:

$$\begin{aligned}(1 - 3x)^{2021} &= C_{2021}^0 + C_{2021}^1 (-3x) + C_{2021}^2 (-3x)^2 + C_{2021}^3 (-3x)^3 + \dots + C_{2021}^{2021} (-3x)^{2021} \\&\Leftrightarrow (1 - 3x)^{2021} = C_{2021}^0 - 3C_{2021}^1 x + 3^2 C_{2021}^2 x^2 - 3^3 C_{2021}^3 x^3 + \dots - 3^{2021} C_{2021}^{2021} x^{2021}\end{aligned}$$

Tổng các hệ số của khai triển là

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = C_{2021}^0 - 3C_{2021}^1 + 3^2 C_{2021}^2 - 3^3 C_{2021}^3 + \dots - 3^{2021} C_{2021}^{2021}$$

Chọn $x = 1$, ta có $S = (1 - 3 \cdot 1)^{2021} = (-2)^{2021} = -2^{2021}$

Ví dụ 2: Tính tổng: $S = C_{50}^0 + 3C_{50}^1 + 3^2 C_{50}^2 + \dots + 3^{50} C_{50}^{50}$

Lời giải

Xét khai triển: $(1 + x)^{50} = C_{50}^0 + C_{50}^1 x + C_{50}^2 x^2 + C_{50}^3 x^3 + \dots + C_{50}^{50} x^{50}$

Chọn $x = 3$, ta có $(1 + 3)^{50} = C_{50}^0 + C_{50}^1 \cdot 3 + C_{50}^2 \cdot 3^2 + C_{50}^3 \cdot 3^3 + \dots + C_{50}^{50} \cdot 3^{50} \Leftrightarrow S = 4^{50}$

Vậy $S = 4^{50}$.