

Bài 2. Giải tam giác. Tính diện tích tam giác

A. Lý thuyết

1. Giải tam giác

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

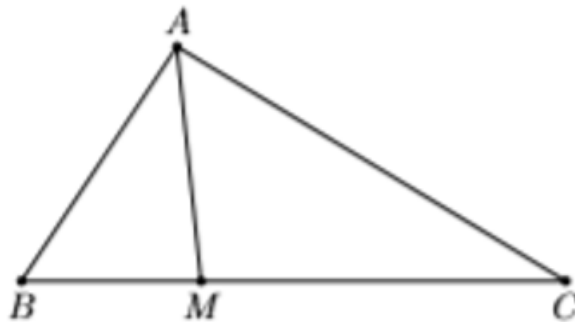
Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

a) Tính cos các góc của tam giác ABC.

b) Tính độ dài cạnh AM.

Hướng dẫn giải:



a) Theo định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = 60^\circ.$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 6^2}{2.4.2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

b) Ta có:

$$MC = 2MB \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}.6 = 2$$

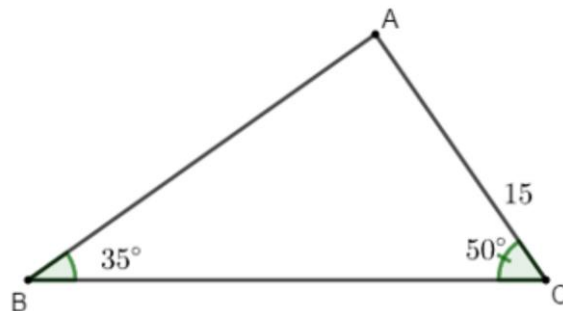
Áp dụng định lí côsin trong tam giác AMB ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B = 4^2 + 2^2 - 2.4.2. \frac{1}{2} = 12$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $B = 35^\circ$; $C = 50^\circ$ và cạnh $AC = 15$ cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác ABC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong tam giác)}$$

Suy ra:

$$A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 35^\circ - 50^\circ = 95^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

Suy ra:

$$BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{15 \cdot \sin 95^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 26,05 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{15 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 20,03 \text{ cm}$$

Vậy $BC = 26,05 \text{ cm}$ và $AB \approx 20,03 \text{ cm}$.

2. Tính diện tích tam giác

Công thức tính diện tích tam giác:

• Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ca \cdot \sin B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $BC = 4\sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, $B = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong tam giác)}$$

$$\text{Suy ra: } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

Suy ra:

$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{3};$$

$$AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2};$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \cdot \sin 45^\circ = 12 - 4\sqrt{3} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

• Công thức Heron:

Công thức toán học Heron được sử dụng để tính diện tích của một tam giác theo độ dài ba cạnh như sau:

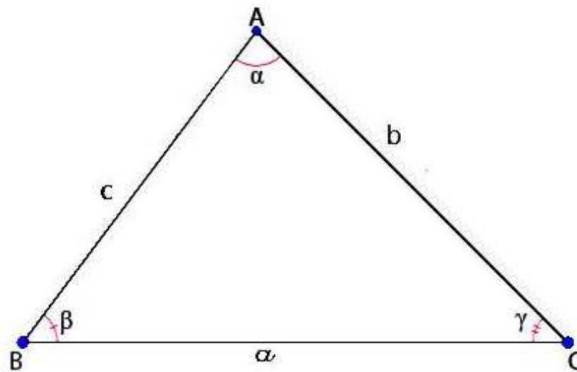
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S

của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC.

Ví dụ: Chứng minh công thức Heron.



Hướng dẫn giải:

Gọi a, b, c lần lượt là 3 cạnh của tam giác và A, B, C lần lượt là các góc đối diện của các cạnh. Theo hệ quả định lý cosin, ta có:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Mà:

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\Rightarrow \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}$$

Ta có công thức tính diện tích tam giác ABC:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(c - (a - b))(c + (a - b))((a + b) - c)((a + b) + c)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \frac{1}{2}(a + b + c - 2a) \cdot \frac{1}{2}(a + b + c - 2b) \cdot \frac{1}{2}(a + b + c - 2c)} \\ &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \end{aligned}$$

Với $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ (đpcm).

Ví dụ: Cho tam giác ABC có BC = 9, CA = 6, AB = 5. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Nửa chu vi tam giác ABC là:

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5 + 6 + 9}{2} = 10$$

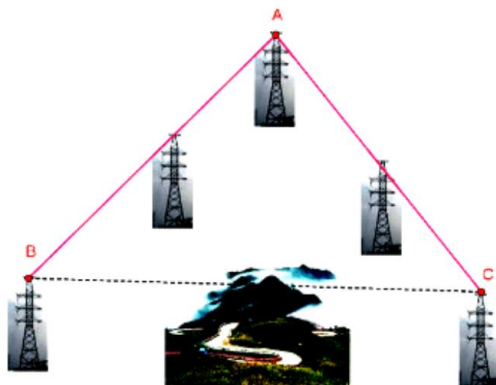
Áp dụng công thức Heron, diện tích tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{10(10 - 5)(10 - 6)(10 - 9)} = 10\sqrt{2} \text{ (đvdt)}$$

3. Áp dụng vào bài toán thực tiễn

Trong thực tiễn, ta có thể áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vào các bài toán như tính khoảng cách giữa hai vị trí, tính diện tích,... giúp cho việc tính toán trở nên chính xác và nhanh chóng hơn. Chúng ta có thể xem ví dụ sau:

Ví dụ: Đường dây cao thế nối thẳng từ vị trí A đến vị trí B dài 10 km, từ vị trí A đến vị trí C dài 8 km, góc tạo bởi hai đường dây trên bằng 75° . Tính khoảng cách từ vị trí B đến vị trí C (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).



Hướng dẫn giải:

Áp dụng định lí cosin vào tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 75^\circ \approx 122,59$$

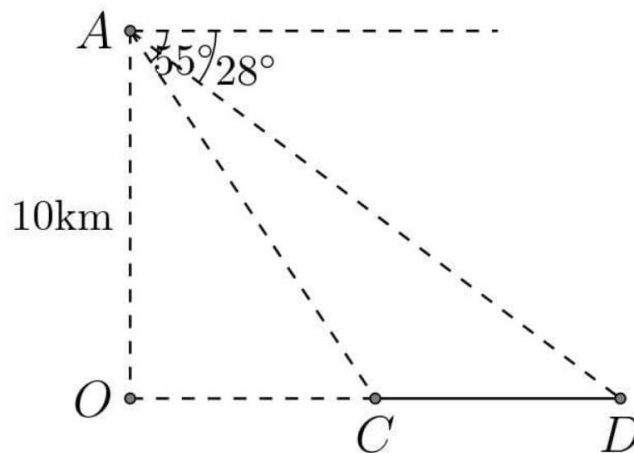
$$BC \approx 11,07$$

Vậy khoảng cách từ B đến C là khoảng 11,07 km.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Một hành khách ngồi trong máy bay, bay ở độ cao 10 km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là 28° và 55° (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



Hướng dẫn giải:

Đề bài yêu cầu chúng ta tính độ dài CD.

Ta có $\angle CAD = 55^\circ - 28^\circ = 27^\circ$.

$$\angle OAC = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Và $\cos \angle OAC = \frac{AO}{AC}$. Do đó, $AC = \frac{AO}{\cos \angle OAC} = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2 \text{ km}$.

$$\angle ACO = 180^\circ - \angle AOC - \angle OAC = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

Trong tam giác ACD có $\angle ACD = 180^\circ - \angle OAC = 125^\circ$

$$\text{Và } \angle ADC = 180^\circ - (\angle ACD + \angle CAD) = 180^\circ - (125^\circ + 27^\circ) = 28^\circ.$$

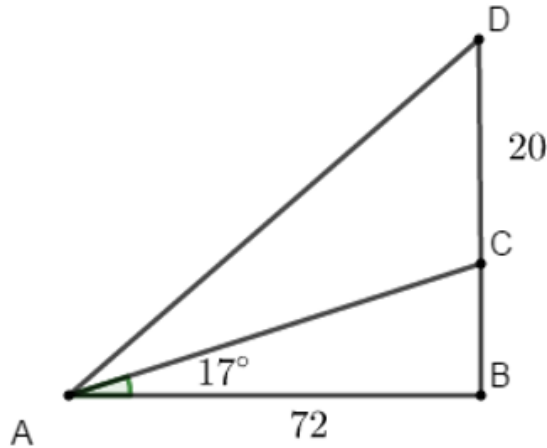
Áp dụng định lí sin trong tam giác ACD, ta có:

$$\frac{CD}{\sin 27^\circ} = \frac{AC}{\sin 28^\circ} \Leftrightarrow CD = \frac{12,2 \sin 27^\circ}{\sin 28^\circ} \approx 11,79 \text{ km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai thị trấn là 11,79km.

Bài 2. Một cây cột điện cao 20 m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17° . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tính chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cột đến cuối dốc bằng 72 m (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Hướng dẫn giải:



Bài toán được mô phỏng lại như hình vẽ với A, B lần lượt là điểm cuối dắc, chân của triển dắc; C, D lần lượt là chân và đỉnh của cây cột điện.

Suy ra chiều dài của dây cáp là đoạn AD.

Theo bài ra ta có: $CD = 20 \text{ m}$, $AB = 72 \text{ m}$, $CAB = 17^\circ$, $ABD = 90^\circ$.

$ACB = 180^\circ - CAB - ABD = 180^\circ - 17^\circ - 90^\circ = 73^\circ$ (tổng ba góc một tam giác bằng 180°).

$$ACD = 180^\circ - ACB = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$$

$$\text{Tam giác ABC vuông tại B} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\cos CAB} = \frac{72}{\cos 17^\circ} \approx 75,3 \text{ (m)}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ACD, ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos ACD \\ &= (75,3)^2 + 20^2 - 2 \cdot 75,3 \cdot 20 \cdot \cos 107^\circ \approx 6950,7 \end{aligned}$$

$$AD = 83,4 \text{ m}$$

Vậy chiều dài của dây cáp là 83,4m.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\triangle ABC} = 16$;

B. $S_{\triangle ABC} = 48$;

C. $S_{\triangle ABC} = 24$;

D. $S_{\triangle ABC} = 84$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có:

Nửa chu vi của tam giác ABC là:

$$p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24 \text{ (đvdd)}.$$

Do đó

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot (24-21) \cdot (24-17) \cdot (24-10)} = 84 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 2. Tam giác ABC có $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 18 \text{ cm}$ và có diện tích bằng 64 cm^2 . Giá trị $\sin A$ bằng:

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

B. $\sin A = \frac{3}{8}$;

C. $\sin A = \frac{4}{5}$;

D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}.$$

Câu 3. Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4 \text{ cm}$ có diện tích bằng:

A. 13 cm^2 ;

B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$;

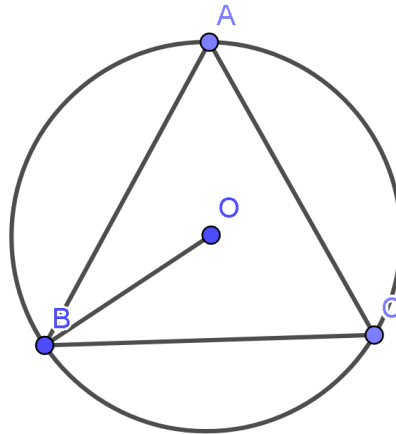
C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$;

D. 15 cm^2 .

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a.



Theo định lí sin, ta có: $\frac{BC}{\sin BAC} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2.4 \Leftrightarrow a = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$

(đvdd).

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$