

Công thức tổ hợp

1. Tổng hợp lý thuyết

Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k , ($1 \leq k \leq n$). Mỗi tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A .

- Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{A_n^k}{k!}$.

- Tính chất :

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}, (0 \leq k \leq n)$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, (1 \leq k \leq n)$$

- Đặc điểm: Tổ hợp là chọn phần tử không quan trọng thứ tự, số phần tử được chọn là k : $0 \leq k \leq n$

2. Các công thức

Công thức tổ hợp: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{A_n^k}{k!}$

Công thức tính chất của tổ hợp:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}, (0 \leq k \leq n)$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, (1 \leq k \leq n)$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một tổ gồm 12 học sinh. Có bao nhiêu cách:

- Chọn ra 2 bạn đại diện cho nhóm
- Chọn ra 2 bạn, rồi phân công chức vụ tổ trưởng và tổ phó
- Chia tổ thành 2 nhóm, trong đó tổ trưởng và tổ phó khác nhóm.

Lời giải

a) Chọn 2 bạn từ 12 bạn là tổ hợp chập 2 của 12: $C_{12}^2 = 66$ cách.

b) Chọn 2 bạn rồi phân công chức vụ là chỉnh hợp chập 2 của 12: $A_{12}^2 = 132$ cách.

c) Chia tổ thành 2 nhóm tức mỗi nhóm có 6 bạn

Trong đó tổ trưởng và tổ phó khác nhóm

Chọn 5 bạn vào cùng nhóm với tổ trưởng trong 10 bạn còn lại: $C_{10}^5 = 252$ cách.

Chọn 5 bạn vào cùng nhóm với tổ phó trong 5 bạn còn lại: $C_5^5 = 1$ cách.

Vậy có $252.1 = 252$ cách.

Ví dụ 2: Một hộp có 15 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, 10 viên bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 viên sao cho

- a) Các viên bi cùng màu
- b) Số bi xanh bằng số bi đỏ, biết luôn có bi xanh và đỏ
- c) Có ít nhất 1 viên bi xanh.

Lời giải

a) Chọn 5 viên bi cùng màu

+ Trường hợp 1: Chọn được 5 viên bi màu đỏ: có $C_{15}^5 = 3003$ cách.

+ Trường hợp 2: Chọn được 5 viên bi màu xanh: có $C_5^5 = 1$ cách.

+ Trường hợp 3: Chọn được 5 viên bi màu vàng: có $C_{10}^5 = 252$ cách.

Vậy có $3003 + 1 + 252 = 3256$ cách chọn.

b) Chọn được 5 viên bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ

+ Trường hợp 1: có 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng: $C_5^1 \cdot C_{15}^1 \cdot C_{10}^3 = 9000$ cách.

+ Trường hợp 2: có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ, 1 viên bi vàng: $C_5^2 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 = 10500$ cách.

Vậy có $9000 + 10500 = 19500$ cách chọn.

c) Chọn được ít nhất 1 viên bi xanh

Số cách chọn 5 viên bi bất kì là: $C_{30}^5 = 142506$ cách.

Số cách chọn 5 viên trong đó không có bi xanh là: $C_{25}^5 = 53130$ cách.

Vậy số cách chọn được ít nhất 1 viên bi xanh là: $142506 - 53130 = 89376$ cách chọn.