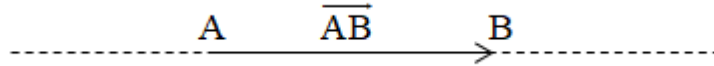


## Bài 1. Khái niệm vector

### A. Lý thuyết

#### 1. Định nghĩa vector

Vector là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

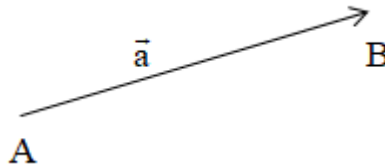


+ Vector có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là vector  $\overrightarrow{AB}$ .

+ Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là giá của vector  $\overrightarrow{AB}$ .

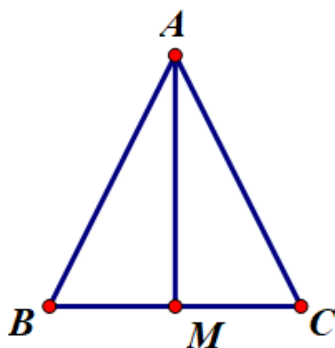
+ Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là độ dài của  $\overrightarrow{AB}$  và được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ . Như vậy ta có  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

**Chú ý:** Một vector khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,...



**Ví dụ:** Cho tam giác ABC cân tại A có  $AB = AC = 2a$ ,  $BC = 2a\sqrt{3}$ . Gọi M là trung điểm BC. Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vector:  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{AM}$ .

#### Hướng dẫn giải



+ Vector  $\overrightarrow{BA}$ :

$\overrightarrow{BA}$  có điểm đầu là B, điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AB.

Ta có:  $|\overrightarrow{BA}| = BA = 2a$ .

+ Vector  $\overrightarrow{MB}$ :

$\overrightarrow{MB}$  có điểm đầu là M, điểm cuối là B và có giá là đường thẳng MB.

Vì M là trung điểm BC nên  $BM = \frac{BC}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Do đó  $|\overrightarrow{MB}| = MB = a\sqrt{3}$ .

+ Vector  $\overrightarrow{AM}$ :

$\overrightarrow{AM}$  có điểm đầu là A, điểm cuối là M và có giá là đường thẳng AM.

Tam giác ABC cân tại A có AM là đường trung tuyến (do M là trung điểm BC).

Do đó AM cũng là đường cao của tam giác cân ABC.

Suy ra  $AM \perp BC$ .

Tam giác ABM vuông tại M:  $AM^2 = AB^2 - BM^2$  (Định lý Py – ta – go)

$$\Leftrightarrow AM^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2.$$

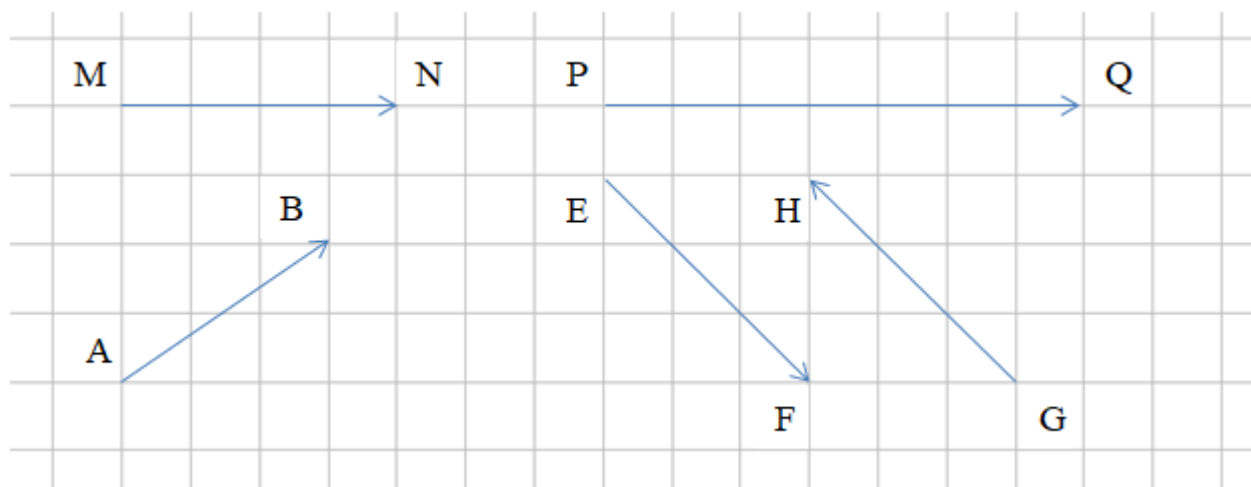
Ta suy ra  $AM = a$ .

Do đó  $|\overrightarrow{AM}| = AM = a$ .

## 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

**Ví dụ:** Tìm các vectơ cùng phương trong hình bên dưới.



### Hướng dẫn giải

Trong hình trên, ta có:

+)  $\overrightarrow{MN}$  có giá là đường thẳng MN,  $\overrightarrow{PQ}$  có giá là đường thẳng PQ, mà hai đường thẳng MN và PQ trùng nhau.

Do đó  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PQ}$  là hai vectơ cùng phương vì chúng có giá trùng nhau.

+) Ta có:  $\overrightarrow{EF}$  có giá là đường thẳng EF,  $\overrightarrow{GH}$  có giá là đường thẳng GH, mà hai đường thẳng EF và GH song song với nhau.

Do đó  $\overrightarrow{EF}$  và  $\overrightarrow{GH}$  là hai vectơ cùng phương vì chúng có giá song song.

### Chú ý:

+ Trong hình trên, hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PQ}$  cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PQ}$  là hai vectơ cùng hướng.

+ Hai vectơ  $\overrightarrow{EF}$  và  $\overrightarrow{GH}$  cùng phương nhưng ngược hướng với nhau ( $\overrightarrow{EF}$  có hướng từ trên xuống dưới và  $\overrightarrow{GH}$  có hướng từ dưới lên trên). Ta nói hai vectơ  $\overrightarrow{EF}$  và  $\overrightarrow{GH}$  là hai vectơ ngược hướng.

### Nhận xét:

+ Hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

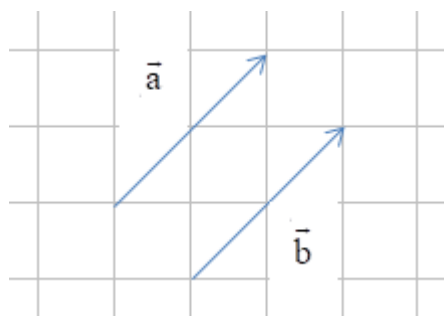
+ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

Giải thích: Ta thấy nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  có giá trùng nhau nên chúng cùng phương. Ngược lại, nếu hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương thì ta suy ra hai đường thẳng AB và AC phải song song hoặc trùng nhau. Mà hai đường thẳng này có điểm A là điểm chung, do đó đường thẳng AB và AC trùng nhau. Khi đó ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng. Vì vậy, ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

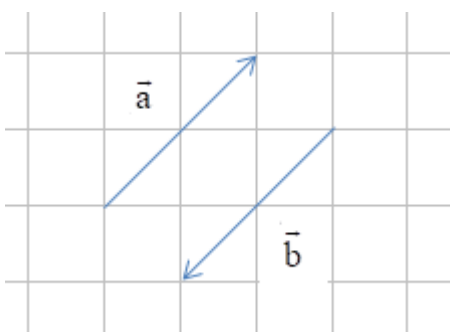


### 3. Vectơ bằng nhau – Vectơ đối nhau

Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

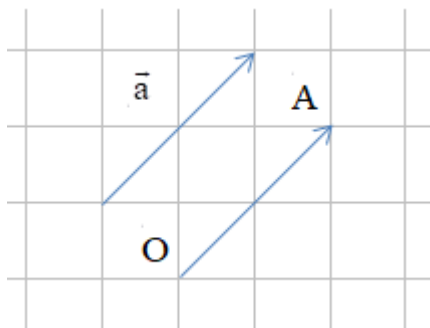


Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Khi đó vector  $\vec{b}$  được gọi là vector đối của vector  $\vec{a}$ .



### Chú ý:

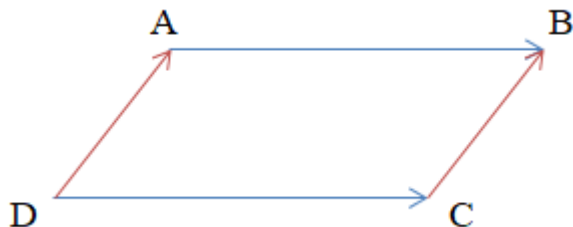
+ Cho vector  $\vec{a}$  và điểm O, ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ . Khi đó độ dài của  $\vec{a}$  là độ dài đoạn thẳng OA, kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .



+ Cho đoạn thẳng MN, ta luôn có  $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$ .

**Ví dụ:** Cho hình bình hành ABCD. Tìm các cặp vector bằng nhau và các cặp vector đối nhau.

## Hướng dẫn giải



+ Các cặp vector bằng nhau:

Vì ABCD là hình bình hành nên ta có  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$  (tính chất hình bình hành)

Mà hai vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng và hai vector  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  cùng hướng.

Do đó  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ .

Tương tự, vì ABCD là hình bình hành nên ta có  $AD \parallel BC$  và  $AD = BC$ .

Mà hai vector  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng và hai vector  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng.

Do đó  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ .

Vậy ta có 4 cặp vector bằng nhau là:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ .

+ Các cặp vector đối nhau:

Vì ABCD là hình bình hành nên ta có  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$  (tính chất hình bình hành)

Mà hai vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  ngược hướng và hai vector  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  ngược hướng.

Do đó  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$ .

Tương tự, vì ABCD là hình bình hành nên ta có  $AD \parallel BC$  và  $AD = BC$ .

Mà hai vector  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng và hai vector  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  ngược hướng.

Do đó  $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$  và  $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$ .

Vậy ta có 4 cặp vector đối nhau là:  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$  và  $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$ .

#### 4. Vector-không

Vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vector-không, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

##### Chú ý:

+ Quy ước: vector-không có độ dài bằng 0.

+ Vector-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vector.

+ Mọi vector-không đều bằng nhau:  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$ , với mọi điểm A, B, C,...

+ Vector đối của vector-không là chính nó.

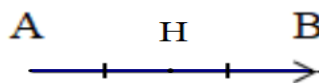
**Ví dụ:** Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 4 cm. Gọi H là trung điểm của AB.

a) Tìm vector-không trong số các vector sau:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{BB}$ ,  $\overrightarrow{HH}$ ,  $\overrightarrow{HB}$ ,  $\overrightarrow{AA}$ .

b) Dùng kí hiệu  $\vec{0}$  để biểu diễn các vector-không đó.

c) Tính độ dài các vector ở câu a.

##### Hướng dẫn giải



a) Vector-không là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Do đó các vector-không là:  $\overrightarrow{BB}$ ,  $\overrightarrow{HH}$ ,  $\overrightarrow{AA}$ .

b) Ta viết  $\vec{0} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{HH} = \overrightarrow{AA}$ .

c)  $|\overrightarrow{BB}| = |\overrightarrow{HH}| = |\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}| = 0$ .

$|\overrightarrow{AB}| = AB = 4 \text{ (cm)}$ .

Vì H là trung điểm AB nên  $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}$ .

Do đó  $|\overrightarrow{AH}| = AH = 2 \text{ (cm)}$  và  $|\overrightarrow{HB}| = HB = 2 \text{ (cm)}$ .

## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1.** a) Hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

(1) Bác Hai có số tiền là 50 triệu đồng.

(2) Một cơn bão di chuyển với vận tốc 18 km/h theo hướng tây tây bắc.

b) Trong các đại lượng giá tiền, thể tích, độ dịch chuyển, vận tốc, đại lượng nào cần được biểu diễn bởi vector?

### Hướng dẫn giải

a) (1) Số tiền 50 triệu đồng là đại lượng vô hướng vì đại lượng này chỉ có độ lớn.

(2) Cơn bão di chuyển là đại lượng có hướng vì đại lượng này có cả độ lớn (18 km/h) và hướng (tây tây bắc).

b) Đại lượng cần được biểu diễn dưới dạng vector là đại lượng có hướng.

Ta thấy giá tiền, thể tích là đại lượng vô hướng vì chỉ có độ lớn.



Ta có độ dịch chuyển, vận tốc là đại lượng có hướng vì bao gồm cả độ lớn và hướng.

Do đó đại lượng cần được biểu diễn bởi vector là: độ dịch chuyển, vận tốc.

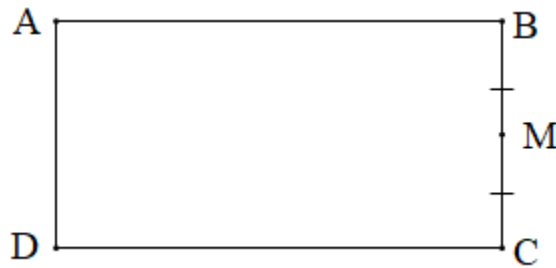
**Bài 2.** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là trung điểm đoạn BC.

a) Gọi tên các vector cùng hướng với  $\overrightarrow{BC}$ .

b) Gọi tên các vector ngược hướng với  $\overrightarrow{BM}$ .

c) Chỉ ra các cặp vector bằng nhau và đối nhau có các điểm đầu hoặc điểm cuối là A, B, C, D, M.

**Hướng dẫn giải**



a) Vector-không cùng phương, cùng hướng với mọi vector nên  $\vec{0}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{BC}$ .

Các vector cùng hướng với vector  $\overrightarrow{BC}$  và khác  $\vec{0}$  là các vector có giá song song hoặc trùng với  $\overrightarrow{BC}$  và có hướng từ trên xuống dưới giống như  $\overrightarrow{BC}$ .

Các vector thỏa mãn 2 điều kiện trên là:  $\overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ .

Vậy có 4 vector thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\vec{0}$ ,  $\overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ .

b) Vì vector-không cùng phương, cùng hướng với mọi vector nên vector đối của vector-không ngược hướng với  $\overrightarrow{BM}$ .

Vector đối của vector-không là chính nó nên  $\vec{0}$  ngược hướng với vector  $\overrightarrow{BM}$ .

Các vector ngược hướng với  $\overrightarrow{BM}$  là các vector có giá song song hoặc trùng với  $\overrightarrow{BM}$  và có hướng ngược lại với  $\overrightarrow{BM}$ , nghĩa là các vector cần tìm có hướng dưới lên trên.

Các vector thỏa mãn 2 điều kiện trên là:  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DA}$ .

Vậy có 5 vector thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\vec{0}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{CM}$ ,  $\vec{CB}$ ,  $\vec{DA}$ .

c) - Vì ABCD là hình chữ nhật nên  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$  (tính chất hình chữ nhật)

Mà hai vector  $\vec{AB}$ ,  $\vec{DC}$  cùng hướng và hai vector  $\vec{BA}$ ,  $\vec{CD}$  cùng hướng.

Do đó  $\vec{AB} = \vec{DC}$  và  $\vec{BA} = \vec{CD}$ .

+ Tương tự ta có:  $\vec{AD} = \vec{BC}$  và  $\vec{DA} = \vec{CB}$ .

+ M là trung điểm của BC nên  $BM = MC = \frac{BC}{2}$

Mà hai vector  $\vec{BM}$ ,  $\vec{MC}$  cùng hướng và hai vector  $\vec{MB}$ ,  $\vec{CM}$  cùng hướng.

Do đó  $\vec{BM} = \vec{MC}$  và  $\vec{MB} = \vec{CM}$ .

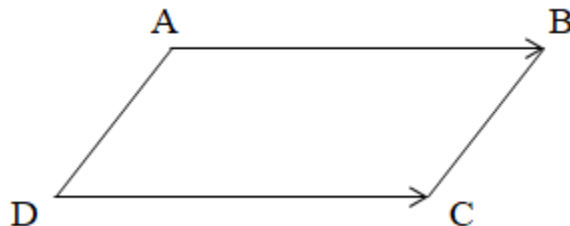
-  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  là hai vector cùng độ dài nhưng ngược hướng nên  $\vec{AB} = -\vec{CD}$ .

Do đó  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  là hai vector đối nhau.

Tương tự ta có các cặp vector đối nhau là:  $\vec{BA}$  và  $\vec{DC}$ ;  $\vec{AD}$  và  $\vec{CB}$ ;  $\vec{DA}$  và  $\vec{BC}$ ;  $\vec{BM}$  và  $\vec{CM}$ ;  $\vec{MB}$  và  $\vec{MC}$ .

**Bài 3.** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

**Hướng dẫn giải**



- Chứng minh chiều thuận: Tứ giác ABCD là hình bình hành thì  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

Vì ABCD là hình bình hành nên ta có  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$  (tính chất hình bình hành)

Mà  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng.

Do đó  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

Vậy ABCD là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  (1).

- Chứng minh chiều đảo:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  thì tứ giác ABCD là hình bình hành.

Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên ta có  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ .

Do đó  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$ .

Ta suy ra ABCD là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Vậy  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$  ABCD là hình bình hành (2).

Từ (1) (2), ta suy ra: ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .