

Công thức về vị trí tương đối của hai đường thẳng

I. Lý thuyết tổng hợp.

- Hai đường thẳng d và d' có các vị trí tương đối như sau:
 - + d song song với d' , tức là d và d' không có điểm chung
 - + d cắt d' tại duy nhất một điểm, tức là d và d' có duy nhất một điểm chung
 - + d trùng với d' , tức là d và d' có vô số điểm chung

II. Các công thức.

- Cách 1: Cho hai đường thẳng $d: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d': a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ($a_1, b_1, c_1 \neq 0$). Vị trí tương đối của hai đường thẳng được xác định như sau:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow d \equiv d'$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow d // d'$$

$$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \Leftrightarrow d \cap d'$$

- Cách 2: Cho hai đường thẳng $d: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d': a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng được xác định qua hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- + Nếu hệ phương trình (1) có vô số nghiệm thì $d \equiv d'$
- + Nếu hệ phương trình (1) vô nghiệm thì $d // d'$
- + Nếu hệ phương trình (1) có duy nhất một nghiệm thì d cắt d' tại điểm có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình.

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ và đường thẳng $d': 3x - y + 5 = 0$.

Lời giải:

Xét hai đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ và $d': 3x - y + 5 = 0$ có:

$$\frac{3}{3} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow d$ song song với d' .

Bài 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: 3x + 5y + 4 = 0$ và đường thẳng $d': 6x + 10y + 8 = 0$

Lời giải:

Xét hai đường thẳng $d: 3x + 5y + 4 = 0$ và đường thẳng $d': 6x + 10y + 8 = 0$

Ta có: $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4} = 2$

$\Rightarrow d$ trùng với d' .

Bài 3: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ và $d': 2x - 3y + 2 = 0$. Nếu chúng cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm.

Lời giải:

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (-1; 0)$ nên d cắt d' tại điểm duy nhất có tọa độ là $(-1; 0)$.

IV. Bài tập tự luyện

Bài 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$ và đường thẳng $d': 6x - 2y + 7 = 0$.

Bài 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: 4x - 5y + 1 = 0$ và đường thẳng $d': 2x - 2y + 1 = 0$. Nếu chúng cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm.