

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

I. Lý thuyết tổng hợp.

- Góc giữa hai đường thẳng là góc α được tạo bởi hai đường thẳng d và d' có số đo $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Khi d song song hoặc trùng với d' , ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° .

- Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vector chỉ phương hoặc hai vector pháp tuyến của chúng.

II. Các công thức.

- Cho hai đường thẳng d và d' có vector chỉ phương lần lượt là: $\vec{u} = (a; b)$ và $\vec{u}' = (a'; b')$. Góc giữa hai đường thẳng được xác định bởi:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|a.a' + b.b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

- Cho hai đường thẳng d và d' có vector pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n} = (a; b)$ và $\vec{n}' = (a'; b')$. Góc giữa hai đường thẳng được xác định bởi:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|a.a' + b.b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

- Gọi k và k' lần lượt là hệ số góc của hai đường thẳng d và d' . Ta có:

$$\tan(d, d') = \left| \frac{k - k'}{1 + k.k'} \right|$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Tính góc giữa hai đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$ và $d': 2x - y + 3 = 0$.

Lời giải:

Hai đường thẳng d và d' có các vector pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n} = (3; 1)$ và $\vec{n}' = (2; -1)$. Ta có:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|3.2 + 1.(-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (d, d') = 45^\circ.$$

Bài 2: Tính góc giữa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

Lời giải:

Hai đường thẳng d và d' có các vector chỉ phương lần lượt là: $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{u}' = (1; 1)$. Ta có:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\Rightarrow (d, d') \approx 11^\circ 18'.$$

Bài 3: Cho hai đường thẳng d và d' có hệ số góc lần lượt là 3 và -1. Tính góc giữa d và d' .

Lời giải:

Ta có:

$$\tan(d, d') = \left| \frac{3 - (-1)}{1 + 3 \cdot (-1)} \right| = 2$$

$$\Rightarrow (d, d') \approx 63^\circ 26'.$$

IV. Bài tập tự luyện

Bài 1: Tính góc giữa hai đường thẳng $d: 5x + 2y - 1 = 0$ và $d': 2x - y + 7 = 0$.

Bài 2: Cho hai đường thẳng d và d' có hệ số góc lần lượt là -2 và -1. Tính góc giữa d và d' .