Các tính chất của tích vô hướng chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Với các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác vectơ $\vec{0}$ và số thực k tùy ý ta có: Các tính chất của tích vô hướng:

$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)

$\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\left(k\vec{b}\right).\vec{a}$

$\vec{a}^2\geq 0\ ;\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

- Từ các tính chất trên, ta có:

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

II. Các công thức.

- Với các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác vectơ $\vec{0}$ và số thực k tùy ý ta có:

$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

$\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\left(k\vec{b}\right).\vec{a}$

$\vec{a}^2\geq 0\ ;\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

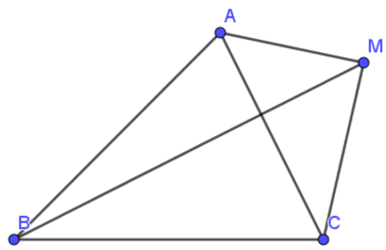
$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho tam giác ABC và M là điểm bất kì khác A, B, C. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$



Lời giải:

$VT=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})$

$=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

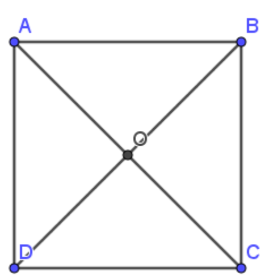
$=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

$=(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC})+(-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB})+(-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC})$

= 0 + 0 + 0 = 0 = VP

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$ (điều cần phải chứng minh)

Bài 2: Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. Tính giá trị biểu thức P biết rằng:
$P=AB^2+BC^2+2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}$.



Lời giải:

Xét tam giác ABC vuông cân tại B (do ABCD là hình vuông) :

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

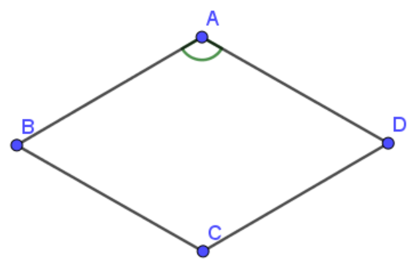
Ta có ABCD là hình vuông nên ta có AB // DC và AB = DC $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow P = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 = AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$

$\Rightarrow P = 2a^2$.

Bài 3: Cho hình thoi ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}) = 0$.



Lời giải:

Do ABCD là hình thoi nên ta có:

AB // DC và AB = DC $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Xét đẳng thức: $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}) = 0$

$VT = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2$

$\Rightarrow VT = AD^2 - AB^2 = a^2 - a^2 = 0 = VP$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}) = 0$ (điều cần phải chứng minh).