Bài tập cuối chương II

Bài 1 trang 30 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình:

a) $3x – y > 3$;

b) $x + 2y \leq – 4$;

c) $y \geq 2x – 5$.

Lời giải:

a) $3x – y > 3$

+ Vẽ đường thẳng d: $3x – y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$

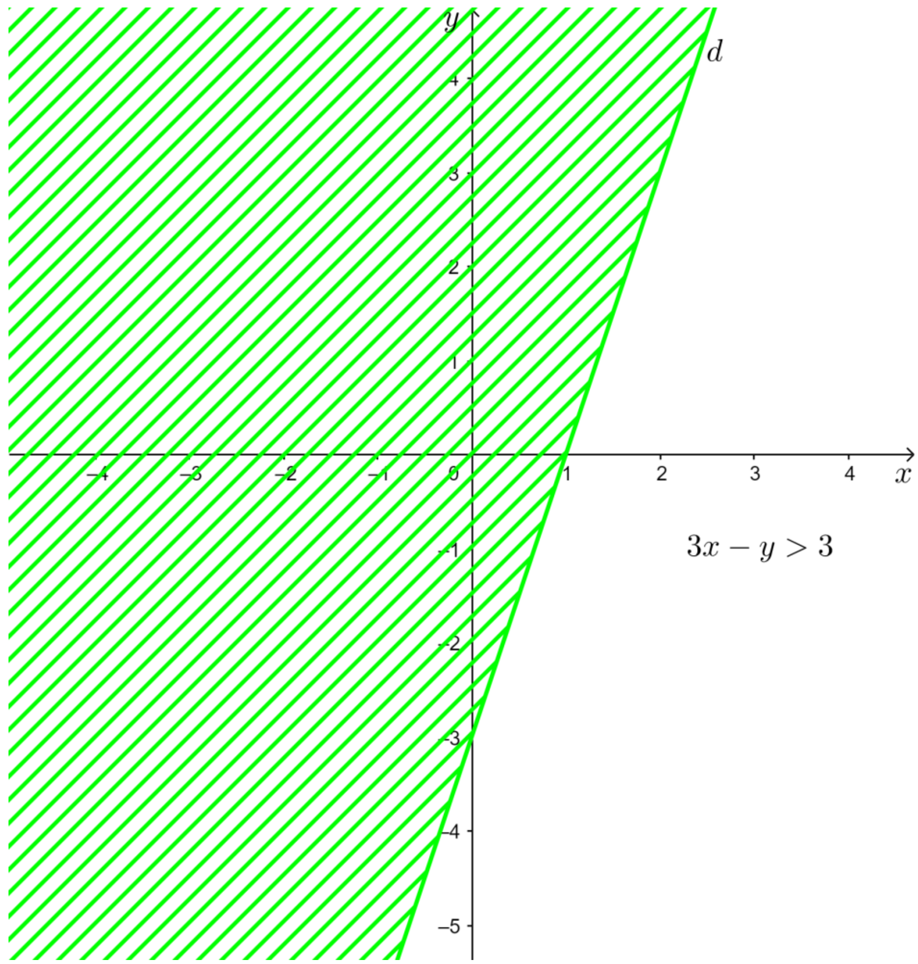
Ta có bảng sau:

x	0	1
y = 3x - 3	-3	0

Đường thẳng d đi qua hai điểm (0; – 3) và (1; 0).

Ta thấy O(0; 0) có 3 . 0 – 0 = 0 < 3.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình 3x – y > 3 là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên không chứa điểm O(0; 0) không kể đường thẳng d như hình vẽ.



b) x + 2y ≤ – 4

+ Vẽ đường thẳng d: x + 2y = – 4 ⇔ $y = -\frac{1}{2}x - 2$

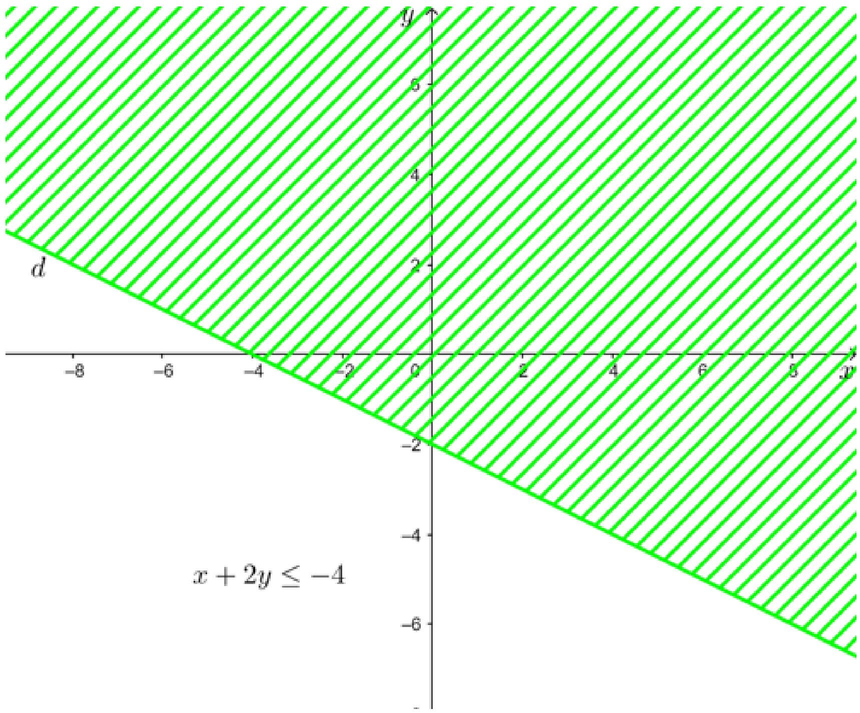
Ta có bảng sau:

x	0	-4
$y = -\frac{1}{2}x - 2$	-2	0

Đường thẳng d đi qua 2 điểm (0; – 2) và (– 4; 0).

Ta lấy điểm O(0; 0) có: 0 + 2. 0 = 0 > – 4.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình x + 2y ≤ – 4 là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên không chứa điểm O(0; 0) kể cả đường thẳng d như hình vẽ.



c) y ≥ 2x – 5 ⇔ 2x – y ≤ 5

+ Vẽ đường thẳng d: 2x – y = 5 ⇔ y = 2x – 5

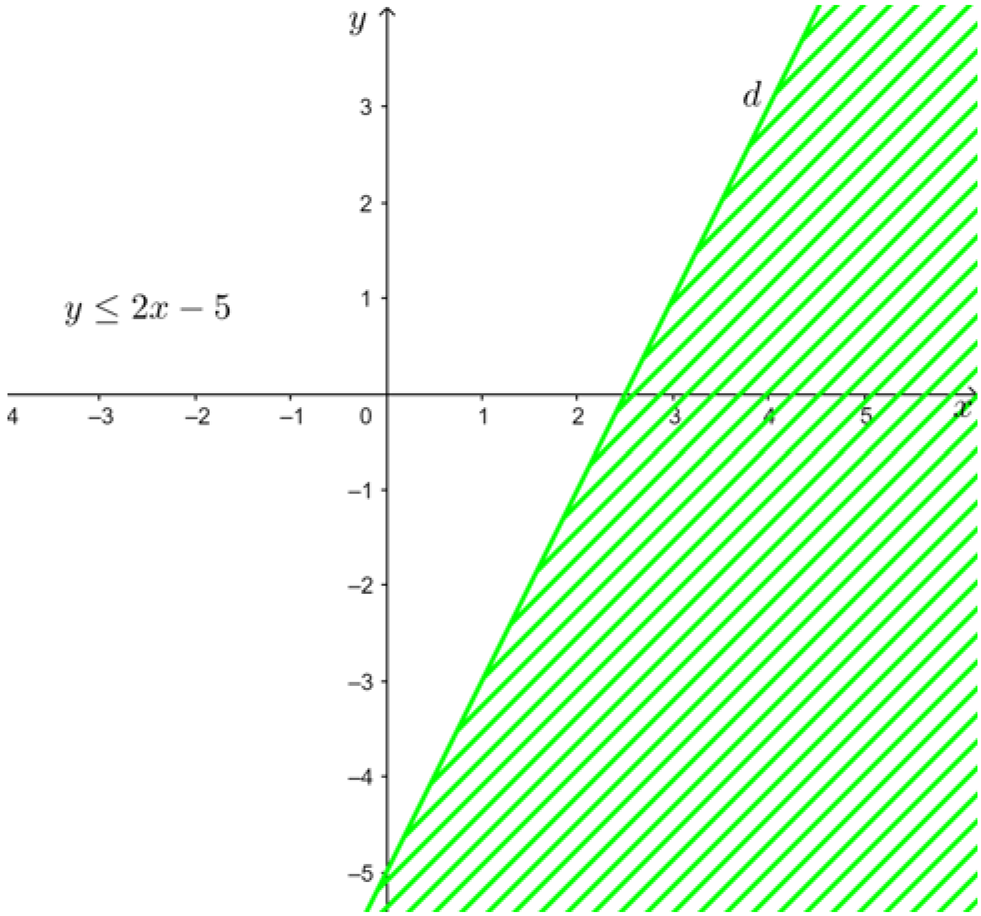
Ta có bảng sau:

x	0	2,5
y = 2x – 5	-5	0

Đường thẳng d đi qua hai điểm (0; – 5) và (2,5; 0).

Ta lấy điểm O(0; 0) có: 2 . 0 – 0 = 0 < 5.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình 2x – y ≤ 5 hay y ≥ 2x – 5 là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm O(0; 0) kể cả đường thẳng d như hình vẽ.



Bài 2 trang 30 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3. \end{cases}$

Lời giải:

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$

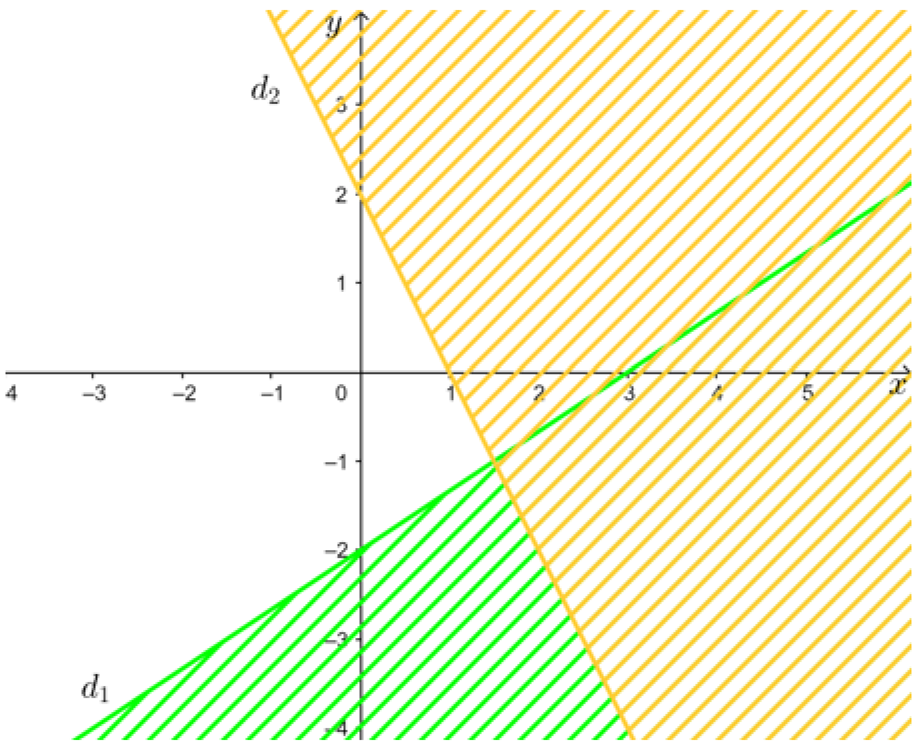
+ Trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng:

d_1: 2x – 3y = 6 là đường thẳng đi qua (3;0) và (0; -2).

d_2: 2x + y = 2 là đường thẳng đi qua (0; 2) và (1; 0).

Do tọa độ điểm O(0;0) thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm O(0;0) (không kể đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng không bị gạch sọc không kể đường biên d_1 và d_2 như trong hình dưới.



b) $\begin{cases} 4x + 10y \le 20 \\ x - y \le 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$

+ Trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng:

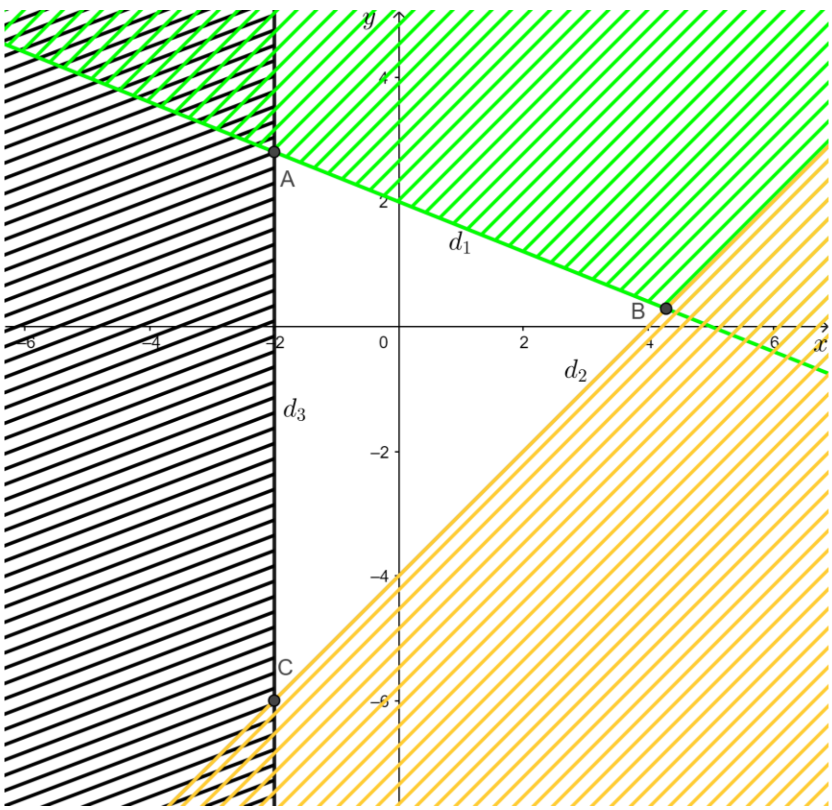
d_1: 4x + 10y = 20 là đường thẳng đi qua điểm (0; 2) và (5;0).

d_2: x – y = 4 là đường thẳng đi qua điểm (4; 0) và (0; -4).

d_3: x = – 2 là đường thẳng đi qua điểm (-2; 0) và song song với trục tung.

Do tọa độ điểm O(0;0) thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm O(0;0) kể cả đường thẳng d_1, đường thẳng d_2 và đường thẳng d_3.

Miền nghiệm của hệ là phần không bị gạch trong hình kể cả biên hay là miền tam giác ABC với A(– 2; 2,8), B$\left(\frac{30}{7};\frac{2}{7}\right)$ và C(– 2; – 6).



c) $\begin{cases} x - 2y \le 5 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \le 3 \end{cases}$

+ Trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng:

d_1: x – 2y = 5 là đường thẳng đi qua điểm (0; -2,5) và (5; 0).

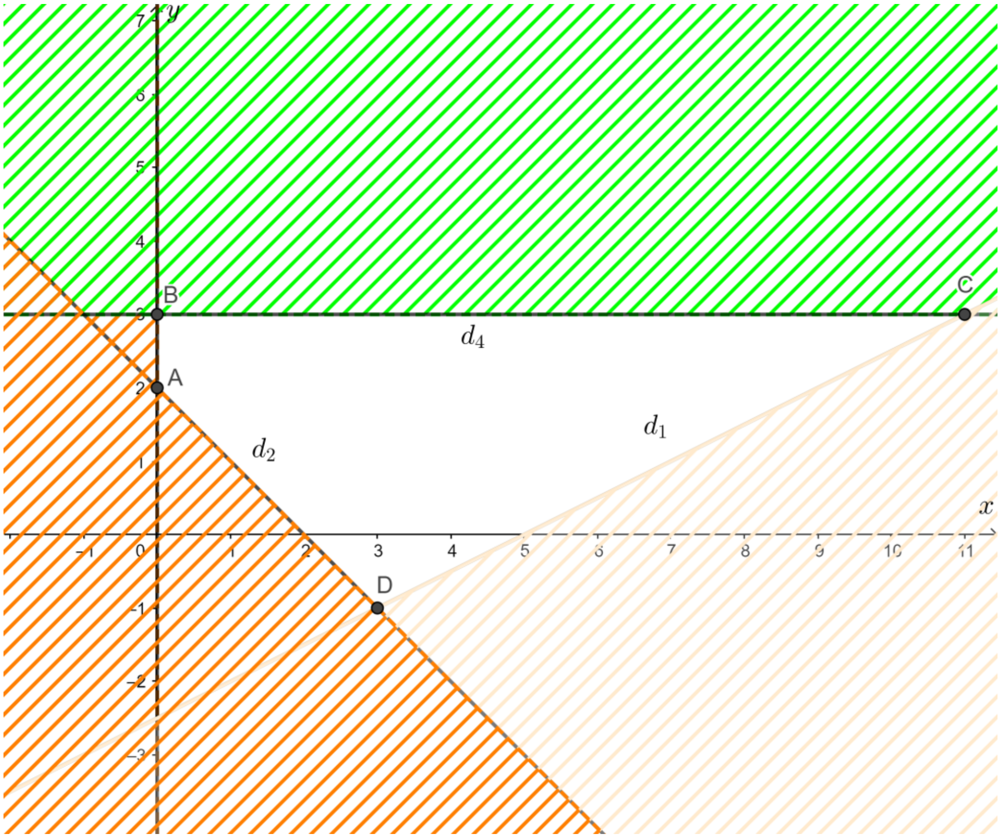
d_2: x + y = 2 là đường thẳng đi qua điểm (0; 2) và (2; 0).

d_3: x = 0 là trục tung;

d_4: y = 3 là đường thẳng đi qua điểm (0; 3) và song song với trục hoành.

Lấy điểm M(1; 1) thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm M(1;1) kể cả đường thẳng d_1, đường thẳng d_2, đường thẳng d_3 và đường thẳng d_4.

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền không bị gạch chéo hay chính là miền tứ giác ABCD với A(0; 2), B(0; 3), C(11; 3), D(3; – 1).



Bài 3 trang 30 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1 300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi. *(Nguồn: https://hongngochosspital.vn)*

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt lợn mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

Lời giải:

a) Lượng canxi trong x lạng đậu nành là 165x (mg).

Lượng canxi nên trong y lạng thịt là 15y (mg).

Tổng số lượng canxi có trong x lạng đậu nành và y lạng thịt là 165x + 15y (mg).

Vì nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300 mg nên ta có bất phương trình: $165x + 15y \geq 1300$.

Vậy bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành là $165x + 15y \geq 1300$.

b) $(x_0; y_0)$ là nghiệm của bất phương trình trên nếu $165x_0 + 15y_0 \geq 1300$.

Vì $x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $x_0 = 10$; $y_0 = 0$, ta có: $165 . 10 + 15 . 0 = 1650 > 1300$.

Vậy (10; 0) là một nghiệm nguyên của bất phương trình.

Bài 4 trang 30 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 ca – lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca – lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca – lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca – lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca – lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

Lời giải:

a) Gọi x, y lần lượt là số lượng cốc đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca – lo và số đơn vị vitamin hấp thụ (điều kiện $x, y \in \mathbb{N}$).

Số ca – lo trong x cốc thứ nhất cung cấp là: 60x (ca – lo)

Số ca – lo trong y cốc thứ hai cung cấp là: 60y (ca – lo)

Tổng số ca – lo mà x cốc thứ nhất và y cốc thứ hai cung cấp là: 60x + 60y (ca – lo).

Vì tối thiểu hằng ngày cần 300 ca – lo nên 60x + 60y ≥ 300 hay x + y ≥ 5 (1).

Số vitamin A có trong x cốc thứ nhất là: 12x (đơn vị)

Số vitamin A có trong y cốc thứ hai là: 6y (đơn vị).

Tổng số đơn vị vitamin A mà x cốc thứ nhất và y cốc thứ hai cung cấp là: 12x + 6y (đơn vị).

Vì số đơn vị vitamin A tối thiểu trong một ngày là 36 đơn vị nên 12x + 6y ≥ 36 hay 2x + y ≥ 6 (2).

Số vitamin C có trong x cốc thứ nhất là: 10x (đơn vị)

Số vitamin A có trong y cốc thứ hai là: 30y (đơn vị)

Số đơn vị vitamin C mà x cốc thứ nhất và y cốc thứ hai cung cấp là: 10x + 30y (đơn vị).

Vì tối thiểu hằng ngày cần 90 đơn vị vitamin C nên 10x + 30y ≥ 90 hay x + 3y ≥ 9 (3)

Từu (1), (2) và (3) ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2x + y \geq 6 \\ x + 3y \geq 9 \end{cases}$ (I).

b) Số cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai thỏa mãn yêu cầu bài toán là (x; y) thỏa mãn hệ (I).

+ Phương án 1: Chọn x = 2, y = 4, thay vào từng bất phương trình của hệ:

2 + 4 ≥ 5 ⇔ 6 ≥ 5 (luôn đúng).

2 . 2 + 4 ≥ 6 ⇔ 8 ≥ 6 (luôn đúng).

2 + 3. 4 ≥ 9 ⇔ 14 ≥ 9 (luôn đúng).

Do đó (2; 4) là nghiệm chung của các bất phương trình của hệ nên (2; 4) là nghiệm của hệ (I).

Vậy theo phương án 1 mỗi ngày bác Ngọc có thể chọn uống 2 cốc thứ nhất và 4 cốc thứ hai.

+ Phương án 2: Chọn x = 5, y = 2, thay vào từng bất phương trình của hệ:

$5 + 2 \geq 5 \Leftrightarrow 7 \geq 5$ (luôn đúng).

$2 . 5 + 2 \geq 6 \Leftrightarrow 12 \geq 6$ (luôn đúng).

$5 + 3. 2 \geq 9 \Leftrightarrow 11 \geq 9$ (luôn đúng).

Do đó (5;1) là nghiệm chung của các bất phương trình của hệ nên (5; 1) là nghiệm của hệ (I).

Vậy theo phương án 2, mỗi ngày bác Ngọc có thể chọn uống 5 cốc thứ nhất và 2 cốc thứ hai.

Bài 5 trang 30 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng dưới).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20 000 đồng
14h00 – 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong khoảng thời gian cao điểm 14h00 – 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do số lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Lời giải:

Gọi số nhân viên ca I cần huy động là x (nhân viên), số nhân viên ca II cần huy động là y (nhân viên) ($x, y > 0;\ x, y \in \mathbb{Z}$).

Do số lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I nên $y \geq 2x$.

Vì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00 (ca I) nên $x \geq 6$.

Trong thời gian từ 14h00 – 18h00 số nhân viên là tổng số nhân viên của 2 ca là x + y (nhân viên), x + y > 0.

Vì trong khoảng thời gian này cần tối thiểu 24 nhân viên nên $x + y \geq 24$.

Trong khoảng 18h00 – 22h00 cần không quá 20 nhân viên nên $y \leq 20$.

Quan sát bảng đã cho ta thấy:

+ Tiền lương trong 1 ngày của một nhân viên làm ca I là: 20 000 . 8 = 160 000 đồng.

+ Tiền lương trong 1 ngày của một nhận viên ca II là: 22 000 . 8 = 176 000 đồng.

Do đó tổng chi phí tiền lương cho x nhân viên ca I và y nhân viên ca II trong một ngày là T = 160 000x + 176 000y (đồng).

Khi đó bài toán đã cho đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 0 \\ x \geq 6 \\ x + y \geq 24 \\ y \leq 20 \\ y \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 0 < y \leq 20 \\ x + y \geq 24 \\ y \geq 2x \end{cases}$ (*) sao cho T = 160 000x + 176 000y có giá trị là nhỏ nhất.

Các định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*):

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng:

+) x = 0 là trục tung

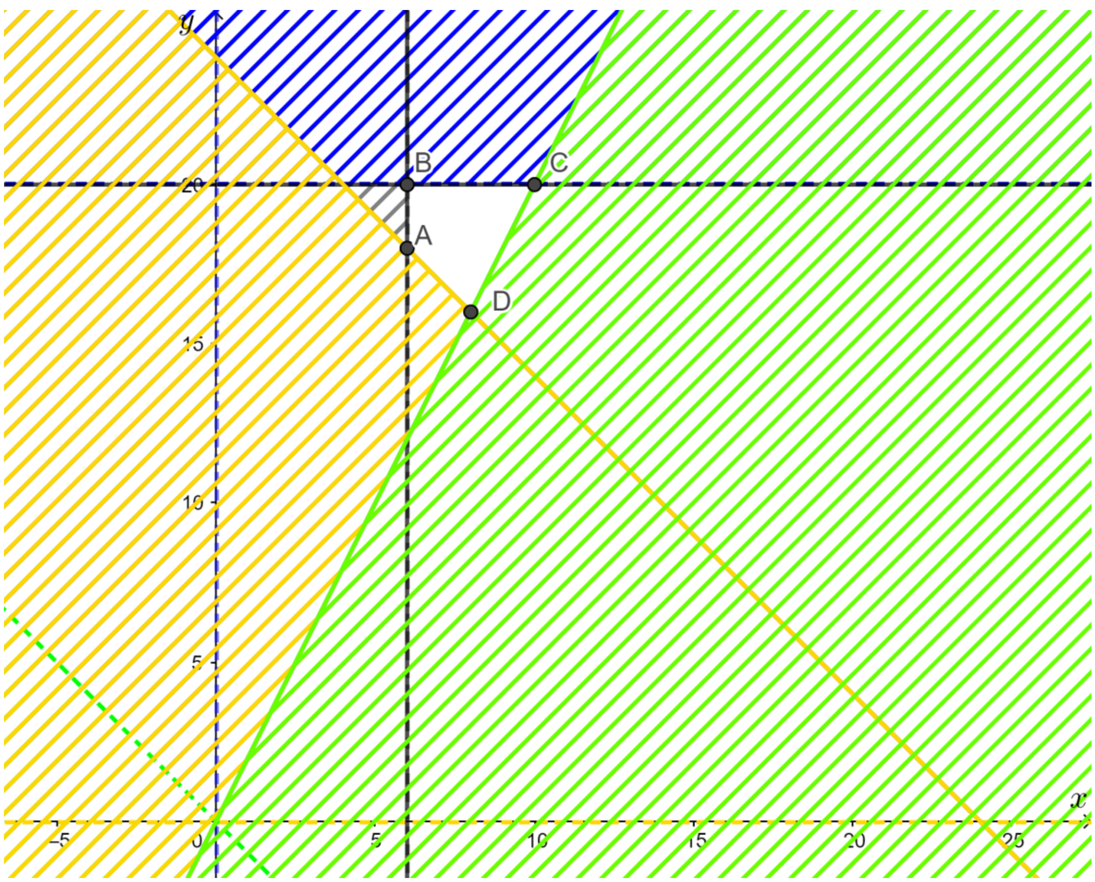
+) y = 0 là trục hoành

+) y = 20 là đường thẳng đi qua điểm (0; 20) và song song với trục hoành.

+) x + y = 24 là đường thẳng đi qua điểm (24; 0) và (0; 24)

+) y = 2x là đường thẳng đi qua điểm (0;0) và (6; 12).

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là miền tứ giác ABCD với A(6; 18), B(6; 20), C(10; 20), D(8; 16).

Người ta chứng minh được: Biểu thức T = 160 000x + 176 000y có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD.

Tính giá trị của biểu thức T tại các cặp số (x; y) là tọa độ các đỉnh của tứ giác, ta có:

T_A = 160 000 . 6 + 176 000 . 18 = 4 128 000

T_B = 160 000 . 6 + 176 000 . 20 = 4 480 000

T_C = 160 000 . 10 + 176 000 . 20 = 5 120 000

T_D = 160 000 . 8 + 176 000 . 16 = 4 096 000

Do đó T nhỏ nhất bằng 4 096 000 khi x = 8 và y = 16.

Vậy để chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất thì chuỗi nhà hàng cần huy động 8 nhân viên ca I và 16 nhân viên ca II, khi đó chi phí tiền lương cho 1 ngày là 4 096 000 đồng.