

Bài 2. Giải tam giác

A. Câu hỏi

Câu hỏi khởi động trang 72 Toán lớp 10 Tập 1: Từ xa xưa, con người đã cần đo đạc các khoảng cách mà không thể trực tiếp đo được. Chẳng hạn, để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ biển tới một hòn đảo (hay con tàu,...) trên biển, người xưa đã tìm ra một cách đo khoảng cách đó như sau:

Từ vị trí A, đo góc nghiêng α so với bờ biển tới một vị trí C quan sát được trên đảo. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng d và tiếp tục đo góc nghiêng β so với bờ biển tới vị trí C đã chọn (Hình 18). Bằng cách giải tam giác BAC, họ tính được khoảng cách AC.



Hình 18

Giải tam giác được hiểu như thế nào?

Lời giải:

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

Hoạt động 1 trang 72 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $A = \alpha$. Viết công thức tính BC theo b , c , α .

Lời giải:

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = c^2 + b^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Hoạt động 2 trang 73 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Viết công thức tính $\cos A$ theo a , b , c .

Lời giải:

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$$

$$\text{Vậy } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}.$$

Hoạt động 3 trang 73 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $B = \alpha$, $C = \beta$. Viết công thức tính AB và AC theo a , α , β

Lời giải:

Trong tam giác ABC có: $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}$$

$$\text{Do đó } AC = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} \text{ và } AB = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}.$$

Hoạt động 4 trang 73 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kẻ đường cao BH.

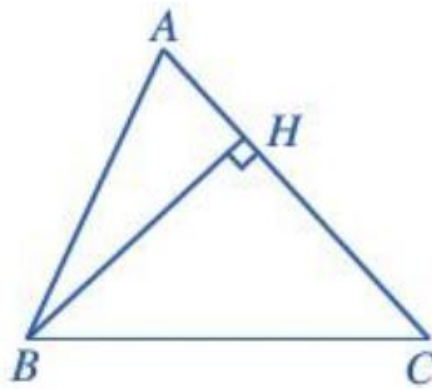
a) Tính BH theo c và $\sin A$.

b) Tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c, và $\sin A$.

Lời giải:

a) Xét các trường hợp:

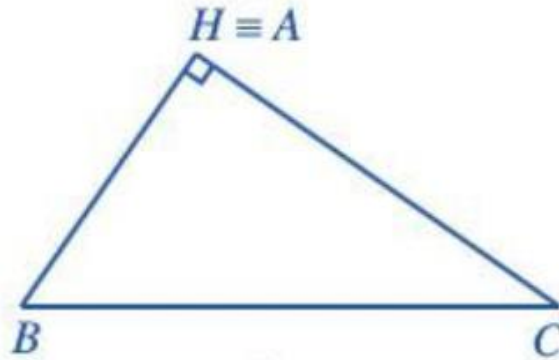
+ Với $A < 90^\circ$



Xét tam giác vuông AHB, ta có $\sin A = \frac{BH}{BA}$

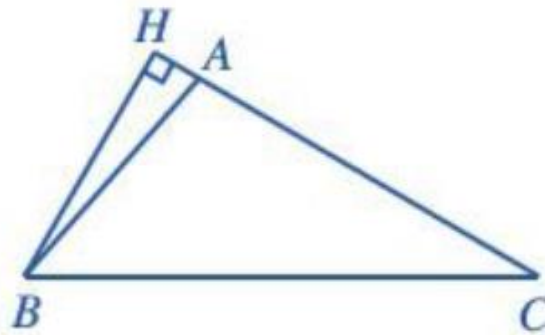
Do đó $BH = AB \cdot \sin A = c \cdot \sin A$.

+ Với $A = 90^\circ$



Khi đó $\sin A = \sin 90^\circ = 1$; $BH = BA = c \cdot 1 = c \cdot \sin A$.

+ Với $A > 90^\circ$



Xét tam giác AHB vuông, ta có: $BAH = 180^\circ - A$.

Do đó $BH = AB \cdot \sin(180^\circ - A) = AB \cdot \sin A = c \cdot \sin A$.

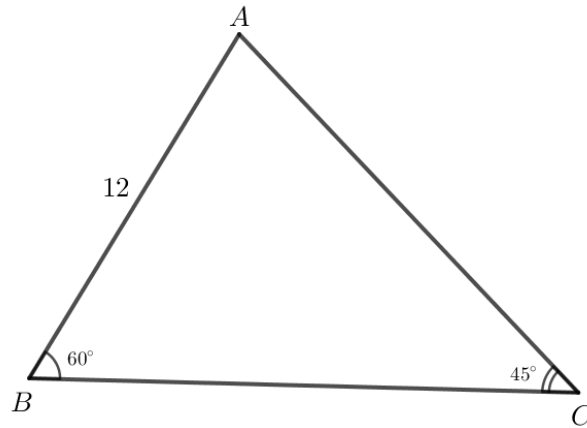
Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $BH = c \cdot \sin A$.

b) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2} AC \cdot BH$ nên $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} bc \sin A$.

Luyện tập 1 trang 74 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 12$;

$B = 60^\circ$; $C = 45^\circ$. Tính diện tích của tam giác ABC.

Lời giải:



Xét tam giác ABC ta có $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{12}{\sin 45^\circ}$$

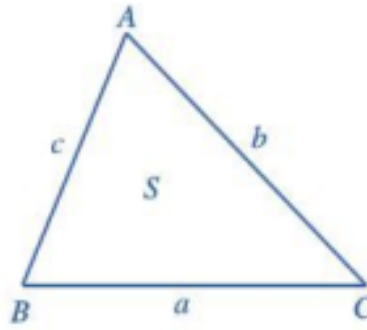
$$\Rightarrow BC = \frac{12}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 75^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 6 + 6\sqrt{3}$$

Khi đó diện tích tam giác ABC bằng:

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (6 + 6\sqrt{3}) \cdot \sin 60^\circ \approx 85,2.$$

Hoạt động 5 trang 75 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích S (Hình 24).



Hình 24

a) Từ định lí côsin, chứng tỏ rằng:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ ở đó } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

b) Bằng cách sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, hãy chứng tỏ rằng:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Lời giải:

a) Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2.c.b}$$

$$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

Do A là góc của tam giác ABC nên $0^\circ < A < 180^\circ$.

Do đó $\sin A > 0$.

Lại có $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ nên $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$.

$$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

Đặt $a + b + c = 2p$.

Khi đó $b + c - a = b + c + a - 2a = 2(p - a)$;

$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$;

$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$.

$$\text{Do đó } \sin^2 A = \frac{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

$$\text{Do } \sin A > 0 \text{ nên } \sin A = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}}.$$

$$\text{Do đó } \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

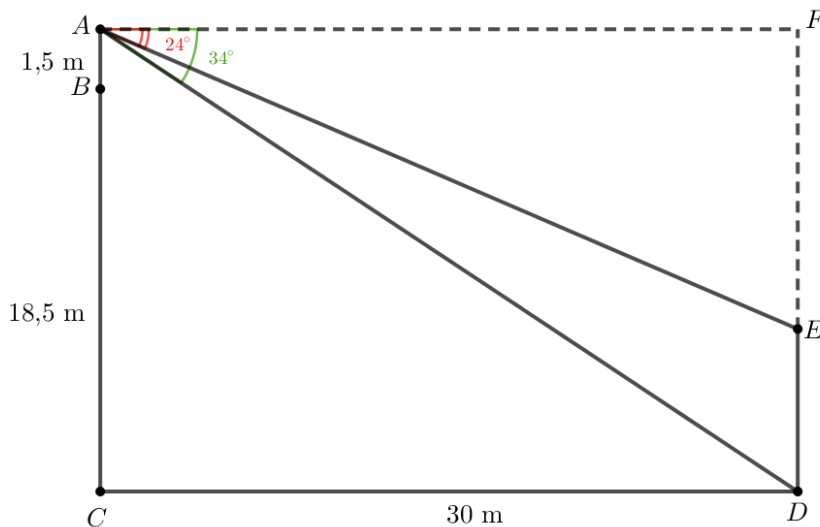
$$\text{b) Ta có diện tích tam giác ABC: } S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A.$$

$$\text{Mà } \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ nên } S = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\text{Do đó } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Luyện tập 2 trang 76 Toán lớp 10 Tập 1: Từ trên nóc của một tòa nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách tòa nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34° , góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24° . Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải:



Gọi BC là chiều cao của tòa nhà, AB là chiều cao của chân giác kế, CD là khoảng cách giữa tòa nhà và cái cây, DAF là góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và

phương nằm ngang, EAF là góc lệch giữa ngọn cây và phương nằm ngang. Khi đó chiều cao của cây là độ dài DE.

Tam giác AFD vuông tại F nên $\tan DAF = \frac{DF}{AF}$

$$\Rightarrow DF = AF \cdot \tan DAF = 30 \cdot \tan 34^\circ \approx 20,2 \text{ m.}$$

Tam giác AFE vuông tại F nên $\tan EAF = \frac{EF}{AF}$

$$\Rightarrow EF = AF \cdot \tan EAF = 30 \cdot \tan 24^\circ \approx 13,4 \text{ m.}$$

$$\text{Khi đó } DE = DF - EF = 20,2 - 13,4 = 6,8 \text{ m.}$$

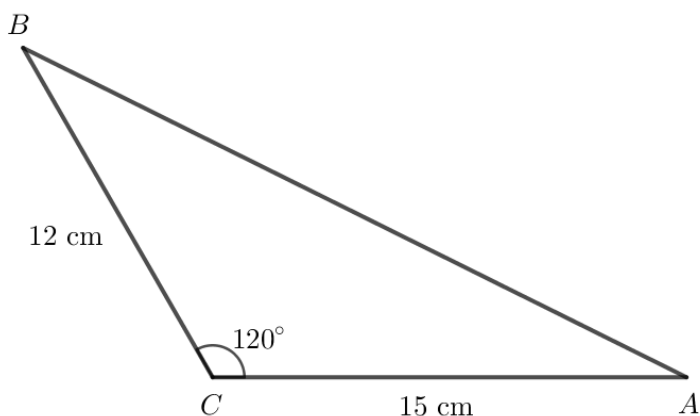
Vậy chiều cao cây khoảng 6,8 m.

B. Bài tập

Bài 1 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $C = 120^\circ$. Tính:

- a) Độ dài cạnh AB;
- b) Số đo các góc A, B;
- c) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải:



a) Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC có:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2.BC.CA.\cos C$$

$$\Rightarrow AB^2 = 12^2 + 15^2 - 2.12.15.\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = 549$$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{61} \text{ m.}$$

b) Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{AC.\sin C}{AB} = \frac{15.\sin 120^\circ}{3\sqrt{61}} \approx 0,554$$

$$\Rightarrow B \approx 34^\circ.$$

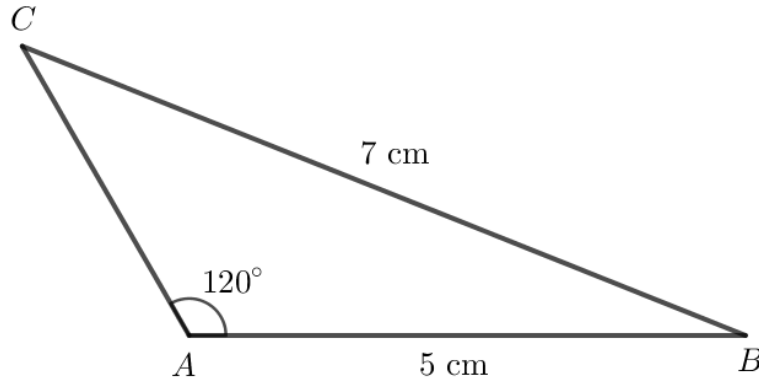
Trong tam giác ABC có $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 34^\circ - 120^\circ = 26^\circ$.

c) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} BC.AC.\sin C = \frac{1}{2} .12.15.\sin 120^\circ = 45\sqrt{3} \text{ (đvdt)}.$$

Bài 2 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $A = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

Lời giải:



Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{AB \cdot \sin A}{BC} = \frac{5 \cdot \sin 120^\circ}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\Rightarrow C \approx 38,2^\circ.$$

Trong tam giác ABC có $B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 120^\circ - 38,2^\circ = 21,8^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

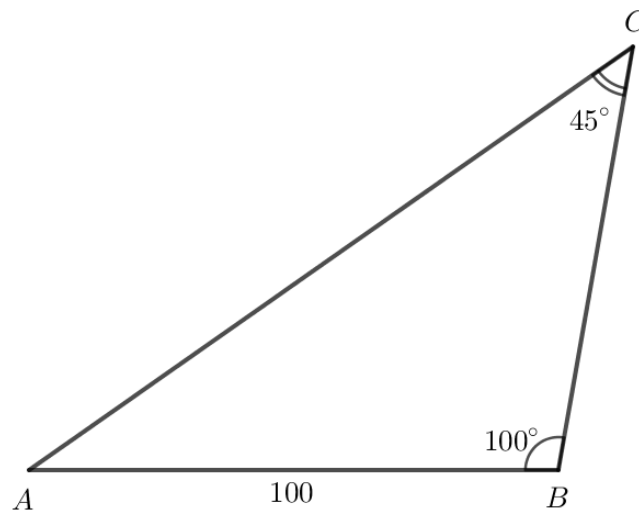
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{7 \cdot \sin 21,2^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 2,9 \text{ m.}$$

Bài 3 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $B = 100^\circ$, $C = 45^\circ$. Tính:

- a) Độ dài các cạnh AC, BC;
- b) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải:



a) Trong tam giác ABC có $A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 100^\circ - 45^\circ = 35^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 100^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 139,3; \quad BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 81,1.$$

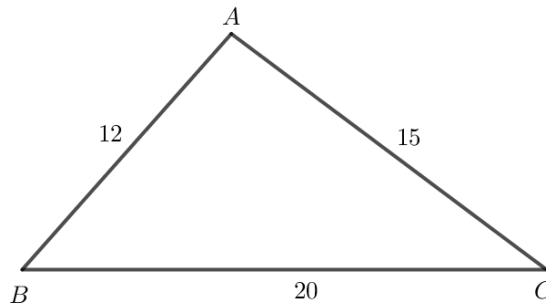
b) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 139,3 \cdot \sin 35^\circ \approx 3995 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 4 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính:

- a) Số đo các góc A, B, C;
- b) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải:



a) Áp dụng hệ quả của định lí côsin vào tam giác ABC ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{12^2 + 15^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 15} = \frac{-31}{360}$$

$$\Rightarrow A \approx 95^\circ.$$

$$\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot CA} = \frac{20^2 + 12^2 - 15^2}{2 \cdot 20 \cdot 12} = \frac{319}{480}$$

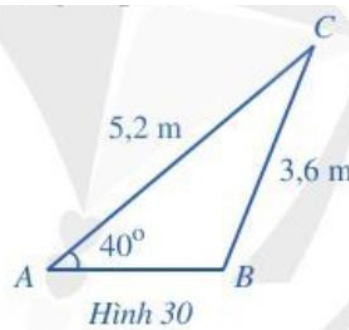
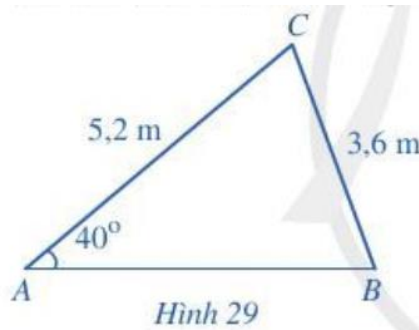
$$\Rightarrow B \approx 48^\circ.$$

Trong tam giác ABC có: $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 95^\circ - 48^\circ = 37^\circ$.

b) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \sin 95^\circ \approx 90 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 5 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:



Lời giải:

+) Xét Hình 29:

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{5,2 \cdot \sin 40^\circ}{3,6} \approx 0,93$$

$$\Rightarrow B \approx 68^\circ.$$

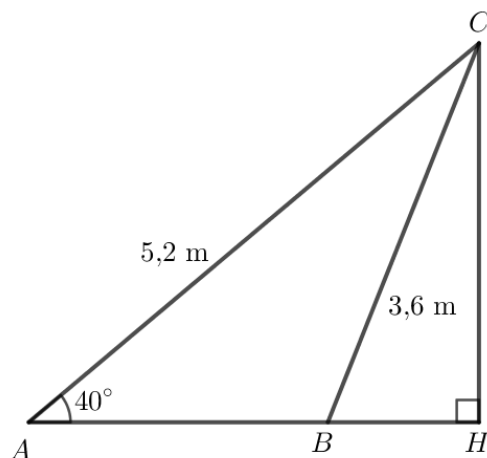
Trong tam giác ABC có $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 40^\circ - 68^\circ = 72^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{3,6 \cdot \sin 72^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5,3 \text{ m.}$$

+) Xét Hình 30:



Gọi H là chân đường cao kẻ từ C đến AB.

Tam giác ACH vuông tại H nên $\cos CAH = \frac{AH}{AC}$.

Do đó $AH = AC \cdot \cos CAH = 5,2 \cdot \cos 40^\circ \approx 4$ m.

$\sin CAH = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin CAH = 5,2 \cdot \sin 40^\circ \approx 3,3$ m.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác BCH vuông tại H:

$$BH^2 + CH^2 = BC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - CH^2$$

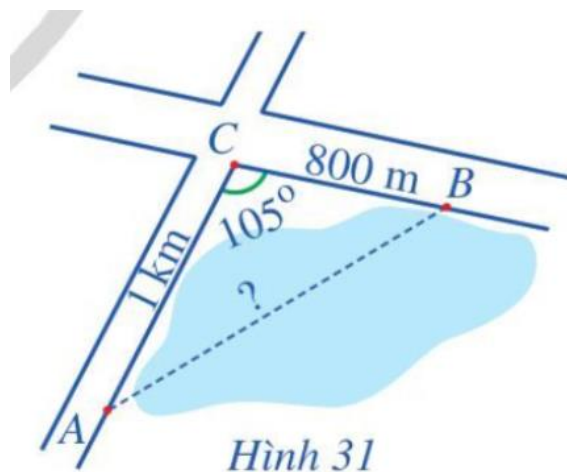
$$\Rightarrow BH^2 = 3,6^2 - 3,3^2 \Rightarrow BH^2 = 2,07$$

$$\Rightarrow BH \approx 1,44 \text{ m.}$$

Khi đó $AB \approx 4 - 1,44 \approx 2,56$ m.

Bài 6 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB. Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1$ km,

$CB = 800 \text{ m}$ và $\angle ACB = 105^\circ$ (Hình 31). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Lời giải:

Đổi $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$.

Ba vị trí A, B, C tạo thành ba đỉnh của tam giác.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC ta có:

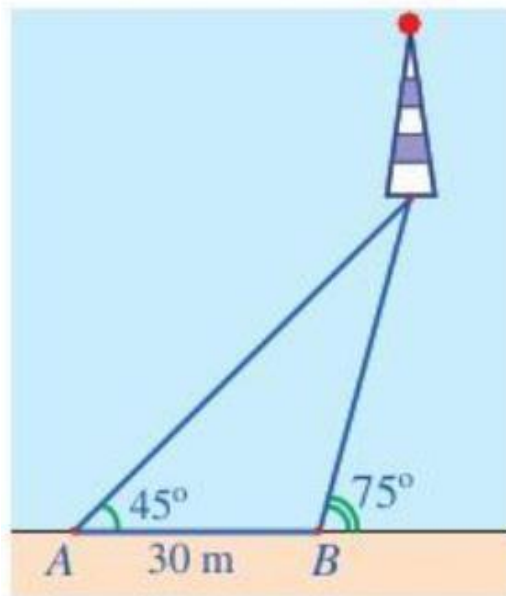
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos C$$

$$\Rightarrow AB^2 = 1\,000^2 + 800^2 - 2.1000.800.\cos 105^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 \approx 2\,054\,110,5 \text{ m}.$$

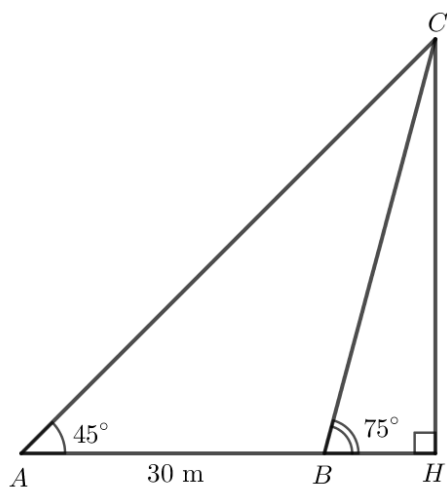
$$\Rightarrow AB \approx 1433,2 \text{ m}.$$

Bài 7 trang 77 Toán lớp 10 Tập 1: Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75° . Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m (Hình 32). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 32

Lời giải:



Gọi C là vị trí ngọn hải đăng, khi đó CH là khoảng cách giữa ngọn hải đăng và bờ.

Ta có CBH là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC nên $CBH = BAC + BCA$.

Do đó $BCA = CBH - BAC = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{30 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 30\sqrt{2} \text{ m.}$$

Trong tam giác CBH vuông tại H:

$$\sin CBH = \frac{CH}{BC}$$

$$\Rightarrow CH = BC \cdot \sin CBH = 30\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ = 15 + 15\sqrt{3} \text{ m} \approx 41 \text{ m.}$$

Vậy khoảng cách từ ngọn hải đăng đến bờ khoảng 41 m.