

Các bài toán về phép đối xứng trục

I. Lý thuyết ngắn gọn

1. Cho đường thẳng d . Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d , hay còn gọi là phép đối xứng trục d

Ký hiệu: D_d

$$D_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM'} \text{ (Với } I \text{ là gôđi đẳm của } d \text{ với } MM')$$

2. $D_d[(H)] = (H)$ thì d được gọi là trục đối xứng của hình (H)

3. Trong mặt phẳng Oxy với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = D_d(M)$

$$\text{Nếu } d \text{ là trục Ox thì } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\text{Nếu } d \text{ là trục Oy thì } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

4. Tính chất

- Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính

II. Các dạng toán phép đối xứng trục

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Phương pháp giải: Để xác định ảnh (H') của hình (H) qua phép đối xứng trục ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dùng định nghĩa phép đối xứng trục
- Dùng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục mà trục đối xứng là các trục tọa độ Ox, Oy
- Dùng biểu thức vectơ của phép đối xứng trục

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1; -2)$ và $B(3; 1)$. Tìm ảnh của A , B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox

Lời giải

A' là ảnh của A qua phép đối xứng qua trục Ox có tọa độ là $A' (1; 2)$

B' là ảnh của B qua phép đối xứng qua trục Ox có tọa độ là $B' (3; -1)$

Ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng qua trục Ox chính là đường thẳng $A'B'$ nên đường thẳng $A'B'$ có phương trình:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-1-2}$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0$$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy có đường thẳng d có phương trình: $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Oy

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ tùy ý thuộc d

Suy ra: $3x - y + 2 = 0$ (1)

$$M'(x'; y') = D_{Oy}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thay vào (1) được: $3(-x') - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x' + y' - 2 = 0$

Vậy tọa độ M' thỏa mãn phương trình d' : $3x + y - 2 = 0$

Dạng 2: Dùng phép đối xứng trục để giải các bài toán dựng hình

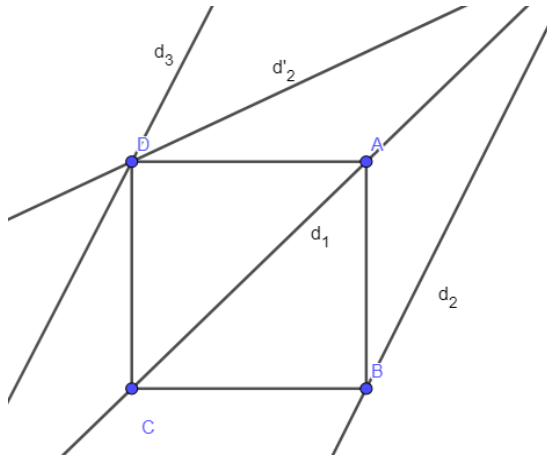
Phương pháp giải:

- Dựng điểm M : Tìm một hình (H) cố định và đường thẳng d cố định cho trước sao cho khi thực hiện phép đối xứng trục d ta có được ảnh là hình (H') giao với (C) cố định tại điểm M cần dựng

- Thực hiện các phép đối xứng trục d để tìm các điểm còn lại từ đó ta có hình cần dựng

Ví dụ 3: Dựng hình vuông $ABCD$ biết hai đỉnh A và C nằm trên đường thẳng d_1 và hai đỉnh B, D lần lượt thuộc hai đường thẳng d_2, d_3

Lời giải



- Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa điều kiện của bài toán

Do $A, C \in d_1$ và AC là trục đối xứng của hình vuông ABCD

Mặt khác $B \in d_2$ nên $D \in d'_2$ trong đó d'_2 là đường thẳng đối xứng với d_2 qua d_1

Suy ra: $D = d'_2 \cap d_3$

- Cách dựng:

Dựng $d'_2 = D_{d_1}(d_2)$, gọi $D = d_3 \cap d'_2$

Dựng đường thẳng qua D vuông góc với d_1 tại O và cắt d_2 tại B

Dựng đường tròn tâm O đường kính BD cắt d_1 tại A, C (A, C theo thứ tự để tạo thành tứ giác ABCD)

- Nhận xét:

TH1: d_2 cắt d_3 khi đó:

Nếu $d'_2 \cap d_3$ thì bài toán có 1 nghiệm hình

Nếu $d'_2 // d_3$ thì bài toán có vô nghiệm hình

TH2: $d_2 // d_3$. Khi đó

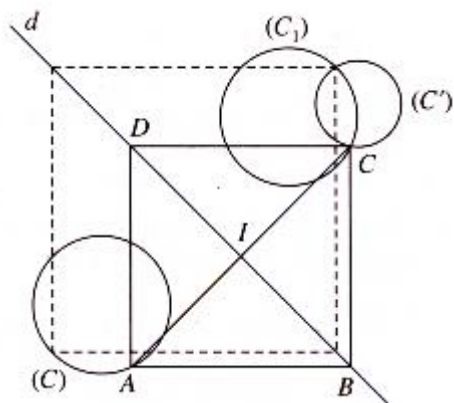
Nếu d_1 song song và cách đều d_2 và d_3 thì bài toán có vô số nghiệm hình

Nếu d_1 hợp với d_2 và d_3 một góc 45 thì bài toán có 1 nghiệm hình

Nếu d_1 song song và không cách đều d_2, d_3 hoặc d_1 không hợp với d_2, d_3 một góc 45 thì bài toán vô nghiệm hình

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn (C) , (C') có bán kính khác nhau và đường thẳng d . Hãy dựng hình vuông $ABCD$ có hai đỉnh A , C lần lượt nằm trên (C) , (C') và hai đỉnh còn lại nằm trên d

Lời giải



- Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua D_d

- Gọi C là giao điểm của (C_1) và (C')

- Dựng điểm A đối xứng với C qua d

- Gọi $I = AC \cap d$

Lấy trên d hai điểm B , D sao cho: $IB = ID = IA$

Khi đó $ABCD$ là hình vuông cần dựng

- Số nghiệm hình bằng số giao điểm của (C_1) và (C')

Dạng 3: Dùng phép đối xứng trục để giải các bài tập hợp điểm

Phương pháp giải:

- Tìm quỹ tích điểm M : Từ giả thiết chọn điểm E di động sao cho EM nhận đường thẳng d cố định làm trục đối xứng

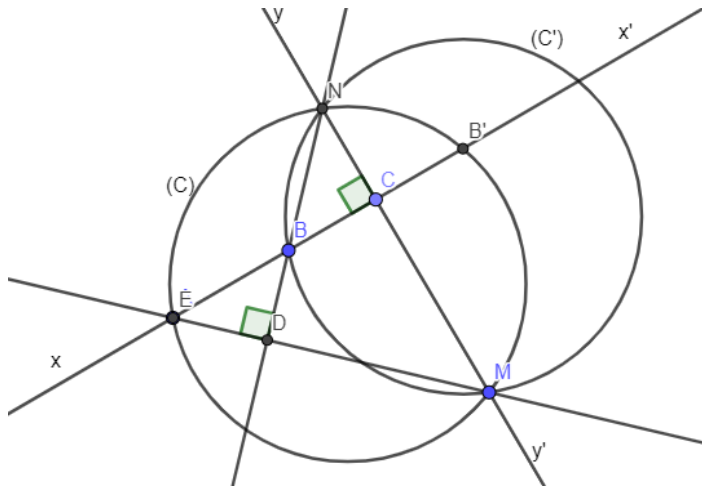
- Xác định hình (H) là quỹ tích của E

- Khi đó tập hợp các điểm M là (H') - ảnh của (H) qua phép đối xứng trục d

Ví dụ 5: Cho A , B , C thuộc đường thẳng xx' (B nằm giữa A và C). Một đường thẳng $yy' \perp xx'$ tại C . Qua điểm A dựng đường thẳng di động Δ cắt yy' tại M .

Qua B dựng đường vuông góc với Δ cắt yy' tại N . Chứng minh khi Δ quay quanh A thì đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN còn đi qua một điểm cố định thứ hai

Lời giải



Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN:

$$BN \perp AM$$

$$AC \perp MN$$

Nên suy ra B là trực tâm của tam giác AMN

Gọi B' là giao điểm của xx' và đường tròn (C)

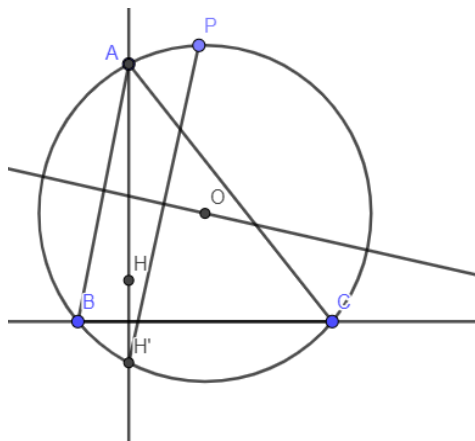
Để chứng minh được yy' là trục đối xứng của BB'

Do đó B thuộc đường tròn $(C') = D_{yy'}[(C)]$

Vậy $B' \in (C) = D_{yy'}[(C')]$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C di động trên đường thẳng cố định Δ . Biết rằng trực tâm H của tam giác cố định và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định P khác H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm O

Lời giải



Gọi $H' = D_{\Delta}(H)$

Suy ra H' cố định và thuộc đường tròn (O)

Do đó O cách đều hai điểm cố định P và H'

Suy ra O thuộc đường trung trực PH'

III. Bài tập áp dụng

Bài 1: Trong mặt phẳng Oxy cho $(P)y^2 = x$. Hỏi parabol nào sau đây là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy

A. $y^2 = x$

B. $y^2 = -x$

C. $x^2 = -y$

D. $x^2 = y$

Bài 2: Trong mặt phẳng Oxy, qua phép đối xứng trục Oy. Điểm $A(3; 5)$ biến thành điểm nào trong các điểm sau:

A. $(3; 5)$

B. $(-3; 5)$

C. $(3; -5)$

D. $(-3; -5)$

Bài 3: Cho ba đường tròn có bán kính bằng nhau và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tạo thành hình (H) . Hỏi (H) có mấy trục đối xứng?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Bài 4: Hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau có mấy trục đối xứng?

A. 0

B. 2

C. 4

D. Vô số

Bài 5: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Tìm phương trình đường tròn đối xứng với (C) qua đường thẳng $d: x - y = 0$

Bài 6: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d: x - 5y + 7 = 0$ và $d': 5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng qua trục biến d thành d'

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Về phía ngoài tam giác dựng hai hình vuông ABDE và ACFG. Chứng minh AH, CD, BF đồng quy

Bài 8: Cho hình vuông ABCD và $AB'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và cạnh A chung. Chứng minh có thể thực hiện một phép đối xứng trục biến hình vuông ABCD thành $AB'C'D'$

Bài 9: Cho tam giác ABC và đường thẳng d không đi qua A nhưng không qua B, C. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng D_d

Bài 10: Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I, P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với P lần lượt đối xứng qua IA, IB, IC. Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.