Cách Phân tích vectơ và phương pháp giải bài tập

A. Lí thuyết.

- Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

Ôn lại các quy tắc: Quy tắc ba điểm, quy tắc trừ, quy tắc hình bình hành.

Ôn lại các tính chất: Tính chất phép cộng vectơ, tích của vectơ với một số, trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác.

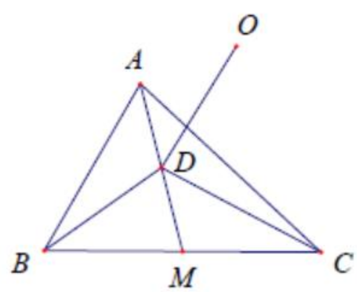
B. Các dạng bài.

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

Phương pháp giải: Phân tích và biến đổi các vectơ để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế để được hai vế bằng nhau hoặc ta cũng có thể biến đổi đẳng thức véctơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ đã được công nhận là đúng.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, D là trung điểm của AM. Chứng minh rằng : $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$ (O tùy ý)



Giải:

+) Ta có M là trung điểm của BC $\Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DM}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}) = 2.\vec{0} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ (điều cần phải chứng minh)

+) Ta có M là trung điểm của BC $\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$

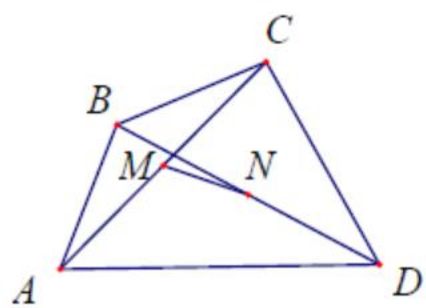
$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}$

Mà D là trung điểm của AM $\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM})=2.2\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$ (điều cần phải chứng minh)

Bài 2: Cho tứ giác ABCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$



Giải:

Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN})$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (điều cần phải chứng minh)

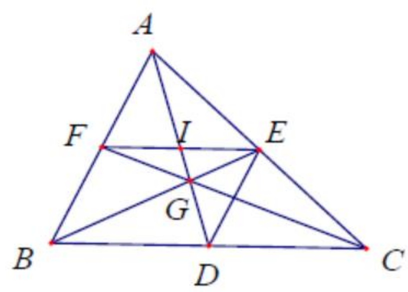
Dạng 2: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

Phương pháp giải:

Áp dung định nghĩa về phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, tính chất trọng tâm.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm của AD và EF. Phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$.



Giải:

+) Có FE là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow$ FE // BC.

$\Rightarrow$ Tam giác AFE đồng dạng với tam giác ABC.

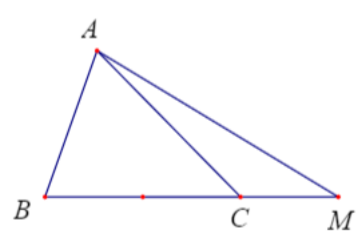
Mà AD là trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow$ AI là trung tuyến của tam giác AFE.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của FE.

$\Rightarrow \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.



Giải:

Ta có: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Phương pháp giải:

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Để chứng minh điều này ta áp dụng các quy tắc biến đổi vectơ (quy tắc hình bình hành, quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc trọng tâm) hoặc xác định hai vectơ trên thông qua tổ hợp trung gian.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho 4 điểm A, B, C, D sao cho $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Giải:

$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$

Vậy B, C, D thẳng hàng.

Bài 2: Cho 4 điểm A, B, I, J. Biết $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

Giải:

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

Vậy B, I, J thẳng hàng.

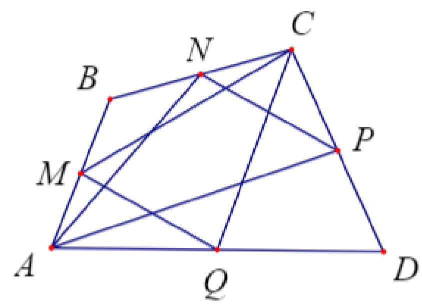
Dạng 4: Chứng minh hai điểm trùng nhau.

Phương pháp giải:

Để chứng minh M và M' trùng nhau, ta chứng minh $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ hoặc chứng minh $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ với O tùy ý.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác ANP trùng với trọng tâm của tam giác CMQ.



Giải:

Gọi trọng tâm của tam giác ANP là G. Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})=\vec{0}$ (do N, P là trung điểm của BC, CD)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$

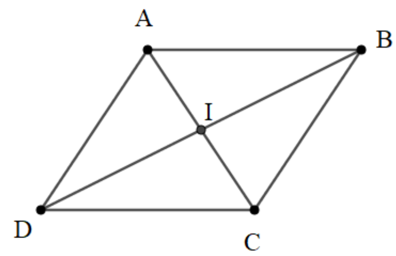
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GM}=\vec{0}$ (do Q, M là trung điểm của AD, AB)

Vậy G vừa là trọng tâm của tam giác ANP vừa là trọng tâm của tam giác CMQ.

Bài 2: Biết $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng AC trùng với trung điểm của đoạn thẳng BD.

Giải:



Khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì ABCD là hình bình hành.

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I là tâm hình bình hành ABCD.

$\Rightarrow$ Trung điểm của AC và BD trùng nhau (cùng là I).

Dạng 5: Quỹ tích điểm.

Phương pháp giải:

Đối với bài toán quỹ tích, học sinh cần nhớ một số quỹ tích cơ bản sau:

Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ thì M thuộc đường thẳng qua A song song với BC nếu $k \in \mathbb{R}$; M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ nếu $k > 0$; M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ nếu $k < 0$.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tam giác ABC, M là điểm tùy ý trong mặt phẳng. Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn: $\left|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

Giải:

Ta có: $\left|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MI} + (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC})\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$ (1)

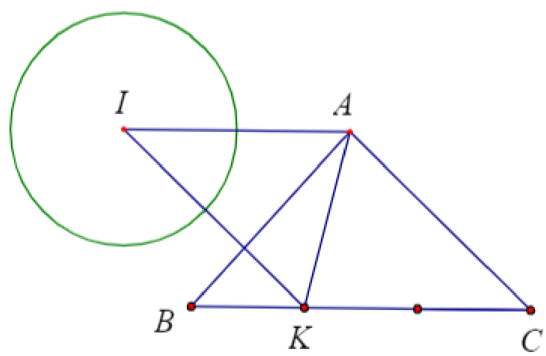
Chọn điểm I sao cho $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

(1) $\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{1}{3}BC$.



Bài 2: Cho tam giác ABC. Biết $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Giải:

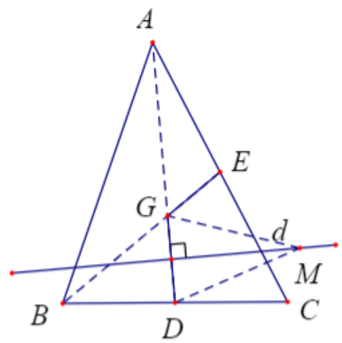
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm của BC.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MG}\right| = \frac{3}{2}\left|2\overrightarrow{MD}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right|$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GD.

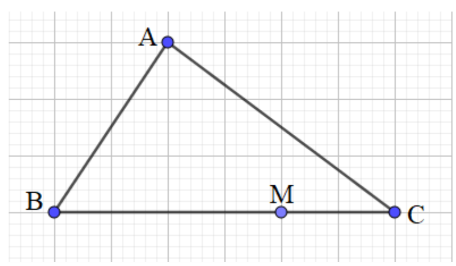


C. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

Đáp án: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JD} = 2\overrightarrow{IJ}$

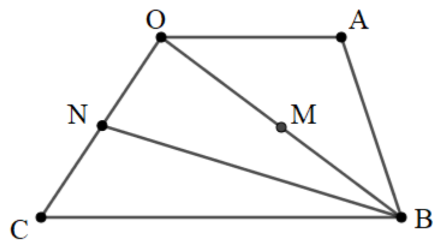
Bài 2: Cho tam giác ABC. Gọi điểm M nằm trên BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh: $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$



Đáp án:

$$-\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$$

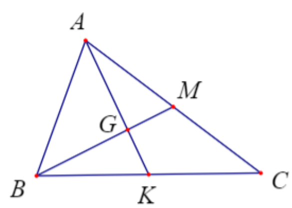
Bài 3: Cho hình thang OABC, M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.



Đáp án:

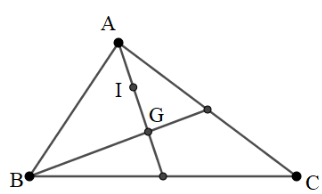
$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}$ (luôn đúng)

Bài 4: Cho AK và BM là trung tuyến của tam giác ABC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.



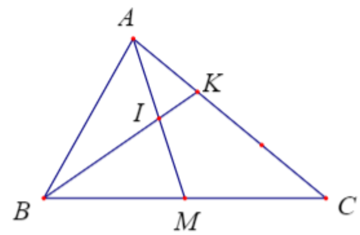
Đáp án: $\overrightarrow{CA} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của AG. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.



Đáp án: $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

Bài 6: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm của AM và K là một điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

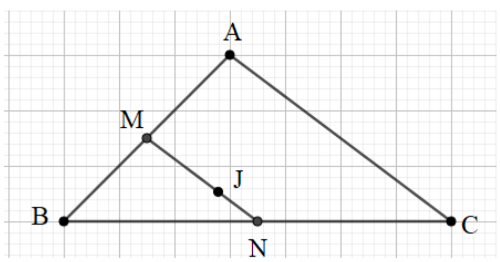


Đáp án:

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$; $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow$ B, K, I thẳng hàng.

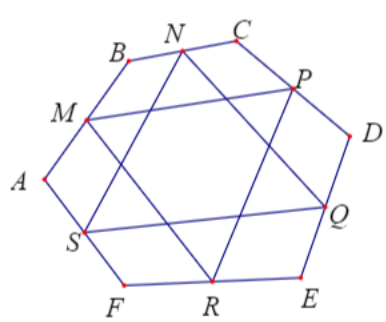
Bài 7: Cho tam giác ABC. Lấy điểm J sao cho $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Biết M, N là trung điểm của AB, BC. Chứng minh M, N, J thẳng hàng.



Đáp án:

$2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{JM} + 6\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{JM} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{JN}$ $\Rightarrow$ M, N, J thẳng hàng.

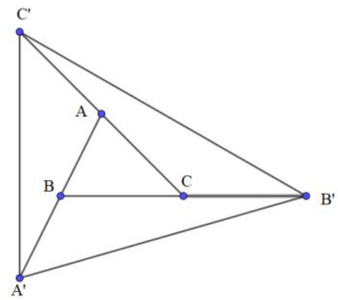
Bài 8: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh trọng tâm tam giác MPR trùng với trọng tâm tam giác NQS.



Đáp án:

$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\vec{0} \Rightarrow$ G vừa là trọng tâm tam giác MPR vừa là trọng tâm tam giác NQS.

Bài 9: Cho tam giác ABC, A’ là điểm đối xứng của A qua B, B’ là điểm đối xứng của B qua C, C’ là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác ABC, A’B’C’ có chung trọng tâm.



Đáp án:

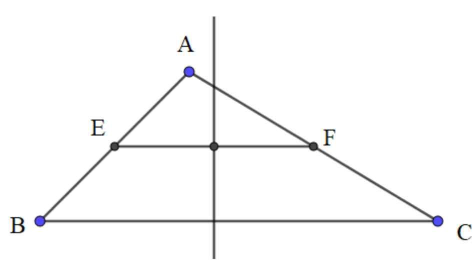
Gọi G, G’ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác A’B’C’.

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

Vậy điểm G và G’ trùng nhau.

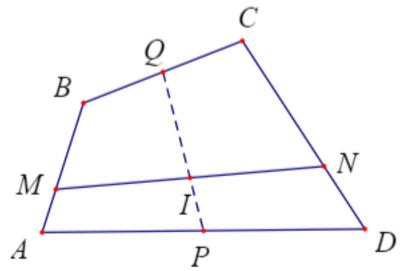
Bài 10: Cho tam giác ABC. Biết $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Đáp án: Tập hợp điểm M là đường trung trực của EF (E, F là trung điểm của AB, AC)



Bài 11: Cho tứ giác ABCD với k là số tùy ý thuộc đoạn [0;1], lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm I của MN khi k thay đổi.

Đáp án: Tập hợp trung điểm I là đoạn thẳng PQ.


C
Q
B
N
M
I
A
P
D