Phương trình bậc hai và các dạng bài toán đưa về phương trình bậc hai

A. Lí thuyết tổng hợp.

- **Phương trình bậc hai một ẩn** có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Ta có:

$\Delta = b^2 - 4ac$ là biệt thức của phương trình (còn có $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

- Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

+ Với $\Delta > 0$ $(\Delta' > 0)$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

+ Với $\Delta = 0$ $(\Delta' = 0)$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ $\left(x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}\right)$

+ Với $\Delta < 0$ $(\Delta' < 0)$ phương trình vô nghiệm.

- **Định lí Vi – ét:** Nếu phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng S = u + v và tích P = u.v thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

- **Phương trình trùng phương** là phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

- **Chú ý:**

+ Cho phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Nếu a + b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

Nếu a – b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

+ Phân tích đa thức thành nhân tử: Cho đa thức P (x) = ax^2+bx+c, nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình P(x) = 0 thì đa thức $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

B. Các dạng bài.

Dạng 1: Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)

Phương pháp giải:

Tính $\Delta=b^2-4ac$ (hoặc $\Delta'=b'^2-ac$ với $b'=\frac{b}{2}$)

+ Với $\Delta>0$ ($\Delta'>0$) phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\left(x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a};x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

+ Với $\Delta=0$ ($\Delta'=0$) phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}\left(x_1=x_2=\frac{-b'}{a}\right)$

+ Với $\Delta\geq 0$ phương trình có nghiệm.

+ Với $\Delta<0$ ($\Delta'<0$) phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải và biện luận phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ (m là tham số).

Lời giải:

+ Với m = 1 thì phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ trở thành $3x-1=0$.

$\Rightarrow$ Phương trình có duy nhất một nghiệm $x=\frac{1}{3}$.

+ Với $m\neq 1$

Ta có: $\Delta=3^2-4(m-1)(-1)=9+4(m-1)=9+4m-4=5+4m$

- Phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta<0$

$\Leftrightarrow 5+4m<0\Leftrightarrow m<\frac{-5}{4}$

- Phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5+4m}}{2(m-1)}$

$\Leftrightarrow \Delta>0$

$\Leftrightarrow 5+4m>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-5}{4}$

- Phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ có nghiệm kép $x=\dfrac{-3}{2(m-1)}$ $\Leftrightarrow \Delta=0$

$\Leftrightarrow 5+4m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{4}$.

Khi đó nghiệm kép là $x=\dfrac{-3}{2(m-1)}=\dfrac{-3}{2\left(-\dfrac{5}{4}-1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

Vậy với m = 1 thì phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ có duy nhất một nghiệm $x=\dfrac{1}{3}$, với $m<\dfrac{-5}{4}$ thì phương trình vô nghiệm, với $m>\dfrac{-5}{4}$ và $m\neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5+4m}}{2(m-1)}$ và với $m=\dfrac{-5}{4}$ phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{2}{3}$.

Bài 2: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $(x^2-3x+m)(x-1)=0$ (m là tham số) có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Ta có: $(x^2-3x+m)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-3x+m=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Để phương trình $(x^2-3x+m)(x-1)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $x^2-3x+m=0$ (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Xét phương trình (1) ta có: $\Delta=(-3)^2-4.1.m=9-4m$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 - 3.1 + m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 1 - 3 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m < 9 \\ -2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy khi $m < \dfrac{9}{4}$ và $m \neq 2$ thì phương trình $(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Dạng 2: Xác định tham số để nghiệm phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp giải:

Tìm điều kiện của tham số để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Vi – ét để biến đổi biểu thức điều kiện của nghiệm đề bài yêu cầu rồi xác định tham số. Đối chiếu điều kiện để kết luận.

- Định lí Vi – ét: Nếu phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3(x_1 + x_2) = x_1.x_2$.

Lời giải:

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (1) ta có: b’ = m

$$\Delta' = (-m)^2 - 1.(4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$$

Để phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Áp dụng định lý Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1} = 2m \\ x_1.x_2 = \dfrac{4m-4}{1} = 4m - 4 \end{cases}$

Ta có: $3(x_1 + x_2) = x_1.x_2 \Leftrightarrow 3.2m = 4m - 4 \Leftrightarrow 6m = 4m - 4 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy khi m = – 2 thì phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3(x_1 + x_2) = x_1.x_2$.

Bài 2: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 x_2^2 + 2$.

Lời giải:

Xét phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) ta có: b’ = – m

$\Delta' = (-m)^2 - 1.(-1) = m^2 + 1$

Ta có $m^2 + 1 > 0$ với mọi m $\Rightarrow \Delta' > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Áp dụng định lý Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1} = 2m \\ x_1.x_2 = \dfrac{-1}{1} = -1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 x_2^2 + 2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 x_2^2 + 2$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1x_2)^2 + 2$

$\Leftrightarrow (2m)^2 - 2.(-1) = (-1)^2 + 2$

$\Leftrightarrow 4m^2 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$

Vậy khi $m = \pm\frac{1}{2}$ thì phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = x_1^{\ 2}x_2^{\ 2} + 2$.

Dạng 3: Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai.

Phương pháp giải:

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0, \ (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Phương trình có:

Hai nghiệm x_1, x_2 dương $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

Hai nghiệm x_1, x_2 âm $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu $\Leftrightarrow x_1.x_2 > 0$

Hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1.x_2 < 0 \\ a.c < 0 \end{array} \right.$

Ta áp dụng định lý Vi – ét để giải.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho phương trình bậc hai $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (m là tham số khác 0). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương, hai nghiệm phân biệt âm.

Lời giải:

Xét phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1) ta có: b’ = m – 2

$\Delta' = (m-2)^2 - m.(m-3) = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m = -m + 4$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 4$ (2)

Áp dụng định lý Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-2)}{m} = \dfrac{2m-4}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m} \end{cases} \quad (\text{do } m \neq 0)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-4}{m} > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m-4 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m-4 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-3 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 2 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \ (3)$$

Kết hợp hai điều kiện (2) và (3) ta có: $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 3 < m < 4 \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-4}{m} < 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m-4 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m-4 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-3 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 2 \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Vậy phương trình bậc hai $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương khi m < 0 hoặc 3 < m < 4 và không thể có hai nghiệm phân biệt âm.

Bài 2: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu, cùng dấu.

Lời giải:

Xét phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$ (1) ta có: b'= m + 7

$\Delta' = (m+7)^2 - 1.(m^2 - 4) = m^2 + 14m + 49 - m^2 + 4 = 14m + 53$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 14m + 53 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-53}{14}$ (2)

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow 1.(m^2 - 4) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Áp dụng định lí Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+7)}{1} = 2m + 14 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m^2 - 4}{1} = m^2 - 4 \end{cases}$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow x_1.x_2 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$ (3)

Kết hợp (2) và (3) ta có: $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \dfrac{-53}{14} < m < -2 \end{array}\right.$

Vậy khi – 2 < m < 2 thì phương trình $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu và khi m > 2 hoặc $\frac{-53}{14} < m < -2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

Dạng 4: Các phương trình quy về phương trình bậc hai.

Phương pháp giải:

- Phương trình chứa ẩn ở mẫu: Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu đầu tiên ta cần tìm điều kiện xác định của phương trình, sau đó quy đồng mẫu số hoặc đặt ẩn phụ để đưa về phương trình có dạng phương trình bậc hai và giải.

- Phương trình dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Để giải phương trình này ta cần phân tích thành phương trình tích bằng các chia đa thức hoặc chia Hoocner: đầu rơi – nhân tới – cộng chéo.

+ Quy tắc nhẩm nghiệm:

a + b + c + d = 0 thì phương trình sẽ có 1 nghiệm x = 1.

a + c = b + d thì phương trình sẽ có 1 nghiệm x = -1.

- Phương trình dạng $a.f^2(x) + b.f(x) + c = 0$. (Đặc biệt nếu $f(x) = x^2$ thì ta có phương trình trùng phương).

+ Đặt ẩn phụ $t = f(x)$ (chú ý điều kiện của ẩn phụ)

+ Phương trình trở thành : $at^2 + bt + c = 0$

+ Giải và biện luận theo phương trình bậc hai một ẩn rồi suy ra x từ t.

- Phương trình dạng $a.\frac{f(x)}{g(x)} + b.\frac{g(x)}{f(x)} + c = 0$. $(g(x) \neq 0;\ f(x) \neq 0)$

+) Đặt ẩn phụ $t = \frac{f(x)}{g(x)}$ (chú ý điều kiện của ẩn phụ)

+) Phương trình trở thành: $a.t + b.\frac{1}{t} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{at^2}{t} + \frac{b}{t} + \frac{ct}{t} = 0 \Rightarrow at^2 + ct + b = 0\,(1)$

+) Giải phương trình (1) theo phương trình bậc hai một ẩn. Từ t suy ra x.

- Phương trình dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$:

+) Đặt ẩn phụ $t = x + \frac{a+b}{2}$

+) Phương trình trở thành phương trình trùng phương. Giải theo cách giải phương trình trùng phương, từ t suy ra x.

- Phương trình dạng (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m trong đó a + b = c + d và $m \neq 0$.

+ Đặt $x^2 + (a+b)x = x^2 + (c+d)x = y$

+ Khi đó, phương trình có dạng
$(y+ab)(y+cd) = m \Leftrightarrow y^2 + (cd+ab)y + abcd - m = 0$ (1)

+ Giải phương trình (1), từ y suy ra x.

- Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = mx^2$ trong đó ab = cd, $m \neq 0$.

+ Ta có: $[(x+a)(x+b)][(x+c)(x+d)] = mx^2$

$\Leftrightarrow [x^2 + ab + (a+b)x][x^2 + cd + (c+d)x] = mx^2$

$\Leftrightarrow (x + \frac{ab}{x} + a + b)(x + \frac{cd}{x} + c + d) = m$ (vì $x \neq 0$)

+ Đặt ẩn phụ: $y = x + \frac{ab}{x} = x + \frac{cd}{x}$. Ta thu được phương trình:

(y + a + b)(y + c + d) = m $\Leftrightarrow y^2 + (a+b+c+d)x + (a+b)(c+d) - m = 0$ (2)

+ Giải phương trình (2), từ y suy ra x.

- Phương trình hồi quy có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$ với $k.a \neq 0$.

+ Chia hai vế cho x^2 (do x = 0 không thể là nghiệm) ta được:
$a(x^2 + \frac{k^2}{x^2}) + b(x + \frac{k}{x}) + c = 0$

+ Đặt ẩn phụ $t = x + \frac{k}{x} \Leftrightarrow t^2 = x^2 + \frac{k^2}{x^2} + 2k \Leftrightarrow x^2 + \frac{k^2}{x^2} = t^2 - 2k$

+ Từ đó có phương trình bậc hai ẩn t . Giải phương trình tìm t, từ t suy ra x.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3x}{2x-2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $2x^3+7x^2-3x-8=0$

c) $3x^4-2x^2-1=0$

d) $3.\frac{x+2}{x-2}+2.\frac{x-2}{x+2}+5=0$

Lời giải:

a) $\frac{3x}{2x-2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2}{x^2-1}$

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases}2x-2\neq 0\\ x+1\neq 0\\ x^2-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -1\end{cases}$

Với điều kiện xác định trên ta có:

$$\frac{3x}{2x-2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x}{2(x-1)}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x(x+1)}{2(x-1)(x+1)}-\frac{2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{2(x^2+2)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x(x+1)-2(x-1)=2(x^2+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-2x+2=2x^2+4$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\ (1)$$

Xét phương trình (1) ta có: $\Delta=1^2-4.1.(-2)=9>0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2.1}=1$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện xác định)

$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2.1} = -2$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy tập nghiệm của phương trình $\dfrac{3x}{2x-2} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ là S = {–2}.

b) $2x^3 + 7x^2 - 3x - 8 = 0$

Ta có: 2 + (– 3) = 7 + (– 8) = – 1

$\Rightarrow$ Phương trình $2x^3 + 7x^2 - 3x - 8 = 0$ (2) có một nghiệm x = –1.

$\Rightarrow 2x^3 + 7x^2 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 5x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2x^2+5x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x^2+5x-8=0 \end{array}\right.$

Xét phương trình $2x^2 + 5x - 8 = 0$ ta có: $\Delta = 5^2 - 4.2.(-8) = 89 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{89}}{2.2} = \dfrac{-5+\sqrt{89}}{4}$; $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{89}}{2.2} = \dfrac{-5-\sqrt{89}}{4}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \left\{-1; \dfrac{-5+\sqrt{89}}{4}; \dfrac{-5-\sqrt{89}}{4}\right\}$

c) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ (3)

Đặt ẩn phụ $t = x^2$ ($t \geq 0$)

Phương trình (3) trở thành : $3t^2 - 2t - 1 = 0$

Xét phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$ ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4.3.(-1) = 16 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$t_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2.3} = 1$; $t_2 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2.3} = \dfrac{-1}{3}$ (không thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$)

Với $t_1 = 1$ ta có: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình (3) là S = {– 1; 1}.

d) $3.\frac{x+2}{x-2}+2.\frac{x-2}{x+2}+5=0$ (4)

Điều kiện xác định của phương trình : $\begin{cases} x-2\ne 0 \\ x+2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ x\ne -2 \end{cases}$

Đặt ẩn phụ $t=\frac{x+2}{x-2},\left(t\ne 0\right)$, phương trình (4) trở thành:

$$3t+2\frac{1}{t}+5=0\Leftrightarrow \frac{3t^2}{t}+\frac{2}{t}+\frac{5t}{t}=0\Rightarrow 3t^2+5t+2=0$$

Xét phương trình $3t^2+5t+2=0$ ta có: $\Delta =5^2-4.3.2=1>0$

$\Rightarrow$ Phương trình $3t^2+5t+2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$t_1=\frac{-5+\sqrt{1}}{2.3}=\frac{-2}{3}\ ;\ t_2=\frac{-5-\sqrt{1}}{2.3}=-1$$

Với $t_1=\frac{-2}{3}$ ta có: $\frac{x+2}{x-2}=\frac{-2}{3}\Rightarrow 3x+6=-2x+4\Leftrightarrow 5x=-2\Leftrightarrow x=\frac{-2}{5}$ (t/m)

Với $t_2=-1$ ta có: $\frac{x+2}{x-2}=-1\Rightarrow x+2=-x+2\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$ (t/m)

Vậy tập nghiệm của phương trình (4) là $S=\left\{\frac{-2}{5};0\right\}$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $(x+6)^4+(x-4)^4=82$

b) (x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4

c) $(x-3)(x-9)(x+4)(x+12)=147x^2$

d) $x^4-5x^3+10x+4=0$

Lời giải:

a) $(x+6)^4+(x-4)^4=82$ (1)

Đặt ẩn phụ $t = x + \frac{6-4}{2} = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x+6 = t+5 \\ x-4 = t-5 \end{cases}$

Phương trình (1) trở thành $(t+5)^4 + (t-5)^4 = 82$

$\Leftrightarrow \left[(t+5)^2\right]^2 + \left[(t-5)^2\right]^2 = 82$

$\Leftrightarrow (t^2+10t+25)^2 + (t^2-10t+25)^2 = 82$

$\Leftrightarrow t^4 + 100t^2 + 25^2 + 20t^3 + 500t + 50t^2 + t^4 + 100t^2 + 25^2 - 20t^3 - 500t + 50t^2 = 82$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 300t^2 + 1250 = 82$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 300t^2 + 1168 = 0$

Đặt ẩn phụ $m = t^2$ ($m \ge 0$), phương trình $2t^4 + 300t^2 + 1168 = 0$ trở thành:
$2m^2 + 300m + 1168 = 0$

Xét phương trình $2m^2 + 300m + 1168 = 0$ ta có: $\Delta' = (150)^2 - 2.1168 = 20164 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$m_1 = \frac{-150 + \sqrt{20164}}{2.2} = -2$ (không thỏa mãn điều kiện $m \ge 0$)

$m_2 = \frac{-150 - \sqrt{20164}}{2.2} = -73$ (không thỏa mãn điều kiện $m \ge 0$)

Vậy phương trình $2t^4 + 300t^2 + 1168 = 0$ vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm.

b) (x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4 (2)

Ta có: 4 + 8 = 5 + 7 = 12

Ta đặt: $x^2 + (4+8)x = x^2 + (5+7)x = y$

Khi đó, phương trình (2) trở thành: (y + 4.8)(y + 5.7) = 4

$\Leftrightarrow$ (y + 32)(y + 35) = 4

$\Leftrightarrow y^2 + 35y + 32y + 1120 = 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 67y + 1120 = 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 67y + 1116 = 0$

Xét phương trình $y^2 + 67y + 1116 = 0$ ta có: $\Delta = 67^2 - 4.1.1116 = 25 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$y_1 = \frac{-67 + \sqrt{25}}{2.1} = -31$$

$$y_2 = \frac{-67 - \sqrt{25}}{2.1} = -36$$

+ Với $y_1 = -31$ ta có: $x^2 + 12x = -31 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0$

Xét phương trình $x^2 + 12x + 31 = 0$ ta có: $\Delta' = 6^2 - 1.31 = 5 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} - 6$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{5}}{1} = -6 - \sqrt{5}$$

+ Với $y_2 = -36$ ta có: $x^2 + 12x = -36 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0$

Xét phương trình $x^2 + 12x + 36 = 0$ ta có: $\Delta' = 6^2 - 1.36 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép: $x_3 = x_4 = \dfrac{-6}{1} = -6$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \left\{\sqrt{5} - 6; -6 - \sqrt{5}; -6\right\}$.

c) $(x - 3)(x - 9)(x + 4)(x + 12) = 147x^2$ (3)

Ta có: (– 3).12 = (– 9).4 = – 36

Ta có: $(x - 3)(x - 9)(x + 4)(x + 12) = 147x^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 12)(x + 4)(x - 9) = 147x^2$

$\Leftrightarrow (x^2+9x-36)(x^2-5x-36)=147x^2$

Dễ thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình trên cho x^2 ta được:

$$\frac{(x^2+9x-36)}{x}.\frac{(x^2-5x-36)}{x}=147$$

$$\Rightarrow \left(x+9-\frac{36}{x}\right)\left(x-5-\frac{36}{x}\right)=147$$

Đặt ẩn phụ $t=x-\frac{36}{x}$ $(x\neq 0)$, phương trình $\left(x+9-\frac{36}{x}\right)\left(x-5-\frac{36}{x}\right)=147$ trở thành:

$(t+9)(t-5)=147$

$\Leftrightarrow t^2-5t+9t-45=147$

$\Leftrightarrow t^2+4t-192=0$

Xét phương trình $t^2+4t-192=0$ có $\Delta'=2^2-1.(-192)=196>0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-2+\sqrt{196}}{1}=12$$

$$t_2=\frac{-2-\sqrt{196}}{1}=-16$$

+ Với $t_1=12$ ta có:

$$x-\frac{36}{x}=12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x}-\frac{36}{x}=\frac{12x}{x} \Rightarrow x^2-36=12x \Leftrightarrow x^2-12x-36=0$$

Xét phương trình $x^2-12x-36=0$ có: $\Delta'=(-6)^2-1.(-36)=72>0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{72}}{1}=6+6\sqrt{2}$$

$x_2 = \dfrac{-(-6) - \sqrt{72}}{1} = 6 - 6\sqrt{2}$

+ Với $t_2 = -16$ ta có:

$x - \dfrac{36}{x} = -16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{36}{x} = \dfrac{-16x}{x} \Rightarrow x^2 - 36 = -16x \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 = 0$

Xét phương trình $x^2 + 16x - 36 = 0$ có: $\Delta' = (8)^2 - 1.(-36) = 100 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_3 = \dfrac{-8 + \sqrt{100}}{1} = 2$

$x_4 = \dfrac{-8 - \sqrt{100}}{1} = -18$

Vậy tập nghiệm của phương trình (3) là $S = \left\{6 + 6\sqrt{2}; 6 - 6\sqrt{2}; 2; -18\right\}$.

d) $x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$ (4)

Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow \dfrac{x^4 - 5x^3 + 10x + 4}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + \dfrac{10}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \dfrac{4}{x^2}\right) - 5\left(x - \dfrac{2}{x}\right) = 0$

Đặt ẩn phụ $t = x - \dfrac{2}{x}$ ($x \neq 0$)

$\Rightarrow x^2 + \dfrac{4}{x^2} = x^2 - 2x.\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + 2x.\dfrac{2}{x} = \left(x - \dfrac{2}{x}\right)^2 + 4 = t^2 + 4$

Phương trình (4) trở thành: $t^2 + 4 - 5t = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

Xét phương trình $t^2 - 5t + 4 = 0$ ta có: $\Delta = (-5)^2 - 4.1.4 = 9 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2.1} = 1$$

$$t_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2.1} = 4$$

+ Với $t_1 = 1$ ta có: $x - \dfrac{2}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Xét phương trình $x^2 - x - 2 = 0$ ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2) = 9 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2.1} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2.1} = -1$$

+ Với $t_2 = 4$ ta có: $x - \dfrac{2}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$

Xét phương trình $x^2 - 4x - 2 = 0$ ta có: $\Delta = (-4)^2 - 4.1.(-2) = 24 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_3 = \frac{-(-4) + \sqrt{24}}{2.1} = 2 + \sqrt{6}$$

$$x_4 = \frac{-(-4) - \sqrt{24}}{2.1} = 2 - \sqrt{6}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (4) là $S = \left\{2 + \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}; 2; -1\right\}$.

C. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải và biện luận phương trình: $x^2 - x + m = 0$ (m là tham số).

Đáp án:

Với $m < \frac{1}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$

Với $m = \frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm kép: $x = \frac{1}{2}$

Với $m > \frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Giải và biện luận phương trình: $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số).

Đáp án:

Với m = – 1, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$

Với m > – 2 và $m \neq -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m+2}}{m+1}$

Với m = – 2 phương trình có nghiệm kép $x = 2$

Với m < – 2 phương trình vô nghiệm

Bài 3: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

Đáp án: m > 0

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 7$

Đáp án: m = 1 hoặc $m = \frac{-3}{5}$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 2(m+2) + m^2 + 4m + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho giá trị của biểu thức $A = x_1{}^2 + x_2{}^2$ nhỏ nhất.

Đáp án: m = – 2

Bài 6: Cho phương trình $mx^2 - 5x - m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Đáp án: m < – 5 hoặc m > 0

Bài 7: Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_2 = -5x_1$.

Đáp án: $m = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 8: Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$.

Đáp án: Tập nghiệm S = {1}

Bài 9: Giải phương trình $\frac{x+4}{x+5} + \frac{x+2}{x-5} = 5$.

Đáp án: $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{354}}{3}; \frac{3-\sqrt{354}}{3} \right\}$

Bài 10: Giải phương trình $4x^4 + 5x^2 - 9 = 0$.

Đáp án: Tập nghiệm S = {1; –1}

Bài 11: Giải phương trình $3.\frac{x-4}{x+1} + 2 + 6.\frac{x+1}{x-4} = 0$.

Đáp án: Phương trình vô nghiệm

Bài 12: Giải phương trình $(x+5)^4 + (x+15)^4 = -200$.

Đáp án: Phương trình vô nghiệm