Ôn tập chương 3

A. Lý thuyết

1. Phương pháp quy nạp toán học

1.1 Định nghĩa

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.

- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

Đó là **phương pháp quy nạp toán học**, hay còn gọi tắt là **phương pháp quy nạp**.

1.2 Ví dụ áp dụng

- Ví dụ. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

Lời giải:

Bước 1: Với n = 1 ta có:

Vế trái = 1 và vế phải = 1

Vậy hệ thức đúng với n = 1.

Bước 2: Giả sử hệ thức đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

Ta cần chứng minh hệ thức đúng với n = k + 1, tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (2)$$

Thật vậy:

Vế trái = 1 + 2 + 3+ … + k + k + 1

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \quad \text{(Do đẳng thức (1))}$$

$$= (k+1).\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1).(k+2)}{2} = VP$$

Vậy hệ thức đã cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

- Ví dụ. Chứng minh rằng với $\forall\, n \geq 1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Lời giải:

- Với n = 1, bất đẳng thức cho trở thành: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đúng).

Vậy bất đẳng thức cho đúng với n = 1.

- Giả sử bất đẳng thức cho đúng với mọi số tự nhiên $n = k \geq 1$, tức là :

$$\frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad (1)$$

-Ta chứng minh bất đẳng thức cho đúng với n = k + 1, tức là :

$$\frac{1.3.5....(2k-1)(2k+1)}{2.4.6...2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$$VT(2) = \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...2k}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \quad \text{(theo (1))}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \Leftrightarrow \sqrt{2k+1}.\sqrt{2k+3} < 2k+2 \quad \text{(do hai vế đều dương)}$$

Hay $(2k + 1).(2k + 3) < (2k + 2)^2$

$\Leftrightarrow 4k^2 + 6k + 2k + 3 < 4k^2 + 8k + 4$

$\Leftrightarrow$ 3 < 4 (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

- Chú ý:

Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

3. Định nghĩa dãy số.

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$,

Trong đó, $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là ***số hạng đầu***, u_n là số hạng thứ n và là ***số hạng tổng quát*** của dãy số.

- Ví dụ:

a) Dãy các số tự nhiên chẵn: 2; 4; 6; 8; …có số hạng đầu $u_1 = 2$, số hạng tổng quát là $u_n = 2n$.

b) Dãy các số tự nhiên chia hết cho 5 là 5; 10; 15; 20; … có số hạng đầu $u_1 = 5$, số hạng tổng quát là $u_n = 5n$.

4. Định nghĩa dãy số hữu hạn.

- Mỗi hàm số u xác định trên tập M = {1, 2, 3,.., m} với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số hữu hạn.***

- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là **số hạng đầu**, u_m là **số hạng cuối**.

- Ví dụ.

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19 là dãy số hữu hạn có $u_1 = 4$; $u_6 = 19$.

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ là dãy số hữu hạn có $u_1 = 4$; $u_6 = \frac{1}{6}$.

5. Cách cho một dãy số.

5.1 Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

- Ví dụ.

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2$.   (1)

Từ công thức (1), ta có thể xác định được bất kì một số hạng nào của dãy số. Chẳng hạn, $u_{10} = 10^2 = 100$.

Nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển ta được:

$1, 4, 9, 16, 25, 36,\ldots, n^2,\ldots.$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ có dạng khai triển là:

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6},\ldots, \frac{(-1)^n}{n},\ldots$$

5.2 Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ. Số $\sqrt{2}$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn

$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

Nếu lập dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng thiếu của số $\sqrt{2}$ với sai số tuyệt đối 10^{-n} thì:

$u_1 = 1,4$; $u_2 = 1,41$; $u_3 = 1,414$; $u_4 = 1,4142,\ldots.$

Đó là dãy số được cho bằng ***phương pháp mô tả***, trong đó chỉ ra cách viết các số hạng liên tiếp của dãy.

5.3 Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho *hệ thức truy hồi*, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

- Ví dụ. Dãy số (u_n) được xác định như sau:

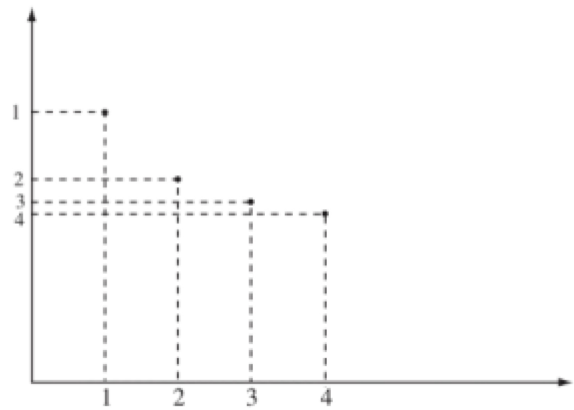
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \ (n \geq 3) \end{cases}.$$

Dãy số như trên là dãy số cho bằng *phương pháp truy hồi*.

6. Biểu diễn hình học của dãy số.

Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó trong mặt phẳng tọa độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ (n ; u_n).

Ví dụ: Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ có biểu diễn hình học như sau:



7. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

7.1 Dãy số tăng, dãy số giảm.

- Định nghĩa 1:

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Ví dụ. Dãy số (u_n) với $u_n = 2 – 2n$ là dãy số giảm.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ xét hiệu $u_{n+1} – u_n$. Ta có:

$u_{n+1} – u_n = 2 – 2(n + 1) – (2 – 2n) = – 2 < 0$

Do $u_{n+1} – u_n < 0$ nên $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

- Chú ý:

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ tức là dãy: – 1, 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1…không tăng cũng không giảm.

7.2 Dãy số bị chặn.

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho:

$$u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho:

$$u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m; M sao cho:

$$m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- **Ví dụ.** Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ bị chặn vì $0 < u_n \le 1$.

8. Định nghĩa cấp số cộng

- ***Cấp số cộng*** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ sai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

- Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

- Đặc biệt, khi d = 0 thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

- **Ví dụ**. Dãy số hữu hạn: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$; công sai d = 3.

9. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

- **Định lí:** Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \ge 2.$$

- **Ví dụ.** Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 1$; $d = 5$.

a) Tìm u_{10}.

b) Số 106 là số hạng thứ bao nhiêu?

Lời giải:

a) Số hạng thứ 10 là $u_{10} = u_1 + (10 – 1)d = 1 + 9.5 = 46$.

b) Ta có: $u_n = u_1 + (n – 1)d$. Vì $u_n = 106$ nên:

$106 = 1 + (n – 1).5$

$\Leftrightarrow 105 = (n – 1).5$

$\Leftrightarrow 21 = n – 1$ nên $n = 22$.

Vậy 106 là số hạng thứ 22.

10. Tính chất các số hạng của cấp số cộng.

- Định lí 2:

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số cuối) đều là trung bình cộng của hai số đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2};\ k \geq 2.$$

11. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

- Định lí: Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Khi đó: $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

- Chú ý: vì $u_n = u_1 + (n – 1)d$ nên ta có: $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Ví dụ. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 2n + 5$.

a) Tìm u_1 và d.

b) Tính tổng 40 số hạng đầu tiên.

c) Biết $S_n = 187$, tìm n.

Lời giải:

a) Ta có: $u_1 = 2.1 + 5 = 7$; $u_2 = 2.2 + 5 = 9$.

Suy ra, $d = u_2 – u_1 = 2$.

b) Tổng 40 số hạng đầu tiên là:

$$S_{40} = 40.7 + \frac{40(40-1)}{2}.2 = 1840$$

c) Ta có: $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ nên:

$$187 = 7n + \frac{n(n-1)}{2}.2$$

$$\Leftrightarrow 187 = 7n + n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 6n – 187 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -17 \end{array}\right.$$

Vì n là nguyên dương nên n = 11.

12. Định nghĩa cấp số nhân

- **Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

- Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n.\, q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Đặc biệt

Khi q = 0, cấp số nhân có dạng u_1, 0, 0, …., 0,…..

Khi q = 1, cấp số nhân có dạng u_1, u_1, u_1, …., u_1,…

Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng 0, 0, 0, 0, 0,…, 0..

- Ví dụ. Dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân: 2, 4, 8, 16, 32 với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội q = 2.

13. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

- Định lí: Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

- Ví dụ. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -1$; $q = -2$.

a) Tính u_6;

b) Hỏi 128 là số hạng thứ mấy.

Lời giải:

a) Ta có: $u_6 = u_1.\ q^5 = -1.\ (-2)^5 = 32$.

b) Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1}$ nên $128 = -1.\ (-2)^{n-1}$

$\Leftrightarrow (-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$.

$\Leftrightarrow n - 1 = 7$ nên n = 8.

Vậy 128 là số hạng thứ 8.

14. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

- Định lí: Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\ ;\ k \geq 2\ (\text{ hay } |u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}).$$

15. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân.

- Định lí: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Khi đó: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

- Chú ý: Nếu q = 1 thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, \ldots. u_1, \ldots.$Khi đó, $S_n = n.u_1$.

Ví dụ. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$; $u_2 = 9$. Tính tổng của 8 số hạng đầu tiên?

Lời giải:

Ta có: $u_2 = u_1.q$ nên 9 = 3q.

Suy ra, công bội q = 3.

Khi đó, tổng của 8 số hạng đầu tiên là:

$$S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3.(1-3^8)}{1-3} = 9840.$$

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1).(2n+1)}{6}.$$

Lời giải:

- Với n = 1 thì vế trái = 1^2 = 1 và vế phải = $\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = 1$.

Vậy đẳng thức đúng với n = 1.

- Giả sử đẳng thức đúng với n = k ≥ 1, tức là:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6}$$

- Ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad (1)$$

Mà

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$=\frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6}$

$=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}$

$=\frac{(k+1)\left(2k^2+4k+3k+6\right)}{6}$

$=\frac{(k+1)\left(2k(k+2)+3(k+2)\right)}{6}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với n = k + 1. Suy ra có điều phải chứng minh.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$, ta có: $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

Lời giải:

Bước 1: Với n = 4 thì vế trái bằng $2^{4+1} = 32$ và vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28$.

Do 32 > 28 nên bất đẳng thức đúng với n = 4.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 4$, nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Suy ra, $2.2^{k+1} > 2.(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$.

Mặt khác: $2k^2 + 6k – (k^2 + 5k + 4) = k^2 + k – 4 \geq 4^2 + 4 – 3 = 16$ với mọi $k \geq 4$.

Do đó, $2^{k+2} > 2k^2 + 6k > k^2 + 5k + 4$ hay bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng $7^n + 5$ chia hết cho 6 với $n \geq 1$.

Lời giải:

Thật vậy: Với n = 1 thì $7^1 + 5 = 12 \vdots 6$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $7^k + 5$ chia hết cho 6.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, nghĩa là phaỉ chứng minh $7^{k+1} + 5$ chia hết cho 6.

Ta có: $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) – 30$.

Theo giả thiết quy nạp thì $(7^k + 5) \vdots 6$ nên $7(7^k + 5) \vdots 6$

Lại có: $30 \vdots 6$ nên $(7^{k+1} + 5) \vdots 6$

Vậy $7^n + 5$ chia hết cho 6 với mọi $n \geq 1$.

Bài 4. Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a) $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$;

b) $u_n = 4 - 2n$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$u_1 = \frac{1+1}{2^1} = 1; u_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}; u_3 = \frac{3+1}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$u_4 = \frac{4+1}{2^4} = \frac{5}{16}; u_5 = \frac{5+1}{2^5} = \frac{3}{16}$$

b) Ta có:

$u_1 = 4 - 2.1 = 2$; $u_2 = 4 - 2.2 = 0$; $u_3 = 4 - 2.3 = -2$;

$u_4 = 4 - 2.4 = -4$; $u_5 = 4 - 2.5 = -6$.

c) Ta có: $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{1}{3}; u_3 = \dfrac{1}{4}; u_4 = \dfrac{1}{5}; u_5 = \dfrac{1}{6}$.

Bài 5. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a) Ta có: $(-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1^n = 1$

Do đó; $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1$

Suy ra: $u_2 = u_1 + 1 = 2$; $u_3 = u_2 + 1 = 3$

$u_4 = u_3 + 1 = 4$; $u_5 = u_4 + 1 = 5$.

b) Từ đó, ta dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh $u_n = n$ (1) bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với n = 1 thì $u_1 = 1$.

Vậy (1) đúng với n = 1.

+ Giả sử (1) đúng với mọi $n = k \ge 1$, ta có: $u_k = k$.

Ta đi chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, tức là: $u_{k+1} = k + 1$.

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có:

$u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Bài 6. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số (u_n) sau :

a) $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$;

b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$.

Lời giải:

a) Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n-11}{3n+1} - \frac{2n-13}{3n-2}$$

$$= \frac{(2n-11).(3n-2) - (2n-13).(3n+1)}{(3n+1).(3n-2)}$$

$$= \frac{6n^2 - 4n - 33n + 22 - \left(6n^2 + 2n - 39n - 13\right)}{(3n+1).(3n-2)} = \frac{35}{(3n+1)(3n-2)} > 0;\ \forall n \ge 1.$$

Suy ra, $u_{n+1} > u_n\ \forall n > 1$. Do đó, dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow -11 \le u_n < \dfrac{2}{3}\quad \forall n \ge 1$

(vì $3n - 2 \ge 1$ với $n \ge 1$ nên :

$$\frac{35}{3(3n-2)} \le \frac{35}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} \ge \frac{2}{3} - \frac{35}{3} = -11)$$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

b) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{n+2} - \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

$= \dfrac{n^2 + 5n + 5}{n+2} - \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

$= \dfrac{(n^2 + 5n + 5)(n+1) - (n^2 + 3n + 1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{n^2 + 3n + 3}{(n+1)(n+2)} > 0 \ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Lại có : $u_n > \dfrac{n^2 + 2n + 1}{n+1} = n + 1 \ge 2$ nên dãy (u_n) bị chặn dưới.

Bài 7. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + n + n^2}}$;

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Lời giải:

a) Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \ge 1$.

Xét thương :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1) + 1}} : \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$

$= \dfrac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1) + 1}} = \sqrt{\dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 3}} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \ge 1$ nên dãy (u_n) là dãy số giảm.

- Lại có: $\sqrt{1 + n + n^2} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1 + n + n^2}} < 1$.

Vậy $0 < u_n < 1$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \ge 1$.

Xét thương :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1\ \forall n > 1$$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \geq 1$ nên dãy (u_n) là dãy số giảm.

Vì $0 < u_n \leq u_1 = 2\ \forall n \geq 1$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Bài 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 12$; $u_6 = -18$. Tìm u_8.

Lời giải:

Theo đề bài ta có;

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_6 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ u_1 + 5d = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ d = -6 \end{cases}$$

Suy ra: $u_8 = u_1 + 7d = 12 + 7.(-6) = -30$.

Bài 9.Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng sau biết:

a) $\begin{cases} u_3 + u_6 = 21 \\ u_4 + u_9 = 30 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ u_2.u_4 = 21 \end{cases}$.

Lời giải:

a) $\begin{cases} u_3 + u_6 = 21 \\ u_4 + u_9 = 30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 5d = 21 \\ u_1 + 3d + u_1 + 8d = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 7d = 21 \\ 2u_1 + 11d = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{21}{8} \\ d = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu $u_1 = \frac{21}{8}$ và công sai $d = \frac{9}{4}$.

b) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ u_2.u_4 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ (u_1 + d).(u_1 + 3d) = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \quad (1) \\ (u_1 + d).(u_1 + 3d) = 21 \ (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $u_1 = 7 – 3d$ thay vào (2) ta được:

$(7 – 3d + d).(7 – 3d + 3d) = 21$

$\Leftrightarrow (7 – 2d). 7 = 21$

$\Leftrightarrow 7 – 2d = 3$ nên $d = 2$

Suy ra: $u_1 = 7 – 3.2 = 1$.

Vậy $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

Bài 10. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3n + 1$.

a) Tìm u_1 và d.

b) Tính tổng 20 số hạng đầu tiên.

c) Biết $S_n = 209$, tìm n.

Lời giải:

a) Ta có: $u_1 = 3.1 + 1 = 4$; $u_2 = 3.2 + 1 = 7$.

Suy ra, $d = u_2 – u_1 = 3$.

b) Tổng 20 số hạng đầu tiên là:

$$S_{20} = 20.4 + \frac{20(20-1)}{2}.3 = 650$$

c) Ta có: $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ nên:

$$209 = 4n + \frac{n(n-1)}{2}.3$$

$\Leftrightarrow 418 = 8n + 3n^2 – 3n$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 418 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -\dfrac{38}{3} \end{array}\right.$$

Vì n là nguyên dương nên n = 11.

Bài 11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_4 = 108$ và $u_2 = 3$. Viết số hạng tổng quát của cấp số nhân; biết $q > 0$?

Lời giải:

Theo đầu bài ta có:

$$\begin{cases} u_4 = 108 \\ u_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 = 108 \ \ (1) \\ u_1.q = 3 \ \ (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2), vế chia vế ta được:

$\dfrac{u_1q^3}{u_1q} = \dfrac{108}{3}$ hay $q^2 = 36$.

Suy ra; $q = 6$ (vì $q > 0$)

Thay vào (2) ta được: $u_1. 6 = 3$ nên $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

Do đó, số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là: $u_n = \dfrac{1}{2}.6^n$.

Bài 12. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm bốn số đó?

Lời giải:

Khi chèn thêm 4 số nữa vào giữa các số 160 và 5, ta được cấp số nhân với:

$u_1 = 160$ và $u_6 = 5$.

Vì $u_6 = u_1.q^5$ nên $5 = 160.q^5$.

$\Rightarrow q^5 = \dfrac{1}{32} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$

Khi đó:

$u_2 = 160.\frac{1}{2} = 80; u_3 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 40;$

$u_4 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20; u_5 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10$

Bài 13. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$. Tính u_1?

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ \dfrac{u_1(1-q^3)}{1-q} = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1(1+q+q^2) = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{6}{q} \quad (1) \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 43 \quad (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được:

$\frac{6}{q} + \frac{6}{q}.q + \frac{6}{q}.q^2 = 43$

Suy ra: $6 + 6q + 6q^2 = 43q$

$\Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 6 \\ q = \dfrac{1}{6} \end{array}\right.$

+ Với q = 6 thì $u_1 = \frac{6}{6} = 1$

+ Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = \dfrac{6}{\frac{1}{6}} = 36$.

Vậy $u_1 = 1$ hoặc $u_1 = 36$.

Bài 14. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = 120 \\ u_3 + u_5 = 60 \end{cases}$. Tính S_7?

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} u_4 + u_6 = 120 \\ u_3 + u_5 = 60 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 + u_1q^5 = 120 \\ u_1q^2 + u_1q^4 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3(1 + q^2) = 120 \quad (1) \\ u_1q^2(1 + q^2) = 60 \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1) chia (2), vế chia vế ta được: q = 2.

Thay q = 2 vào (1) ta được: u_1. 2^3. $(1 + 2^2) = 120$ nên $u_1 = 3$.

Khi đó: $S_7 = \dfrac{u_1(1-q^7)}{1-q} = \dfrac{3.(1-2^7)}{1-2} = 381$

Vậy $S_7 = 381$.