

## Công thức biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x$

### 1. Lý thuyết

$$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \text{ (Điều kiện: } a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Khi đó: } y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha)$$

Công thức đặc biệt:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

### 2. Công thức

a) Giải phương trình  $a\sin x + b\cos x = c$ . Phương trình có nghiệm khi  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

$$\text{Ta có: } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \text{ với } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Bấm máy tính để tìm góc  $\alpha$ ).

Sau đó, đưa về phương trình lượng giác cơ bản để giải.

b) Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số có dạng  $y = a\sin x + b\cos x + c$

$$\text{Ta có: } -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là  $-\sqrt{a^2 + b^2} + c$  và giá trị lớn nhất là  $\sqrt{a^2 + b^2} + c$ .

### 3. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Giải phương trình sau:

$$\text{a) } \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \cos x - \sin x = 1$$

### Lời giải

$$a) \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là:  $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi; x = \frac{5\pi}{24} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

$$b) \cos x - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad (\text{Áp dụng công thức})$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là:  $x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sau:  $y = \sqrt{3} \sin 5x + \cos 5x + 1$

### Lời giải

Cách 1: Áp dụng công thức ta có:

$$-\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} + 1 \leq y \leq \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} + 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Cách 2: Giải chi tiết

Ta có:  $y = \sqrt{3}\sin 5x + \cos 5x + 1$

$$\Leftrightarrow y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\cos 5x\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 2\left(\sin 5x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 5x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

Ta có  $-1 \leq \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$$

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -1.

#### 4. Bài tập tự luyện

**Câu 1.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

**A.**  $3\sin x + \cos x = 3$

**B.**  $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -3$

**C.**  $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$

**D.**  $3\sin x - 4\cos x = 5$

**Câu 2.** Phương trình  $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$  có tập nghiệm là.

**A.**  $\frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $\frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $-\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

**Câu 3.** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 3x - \cos 3x + 3$  lần lượt là

**A.**  $\sqrt{2} + 3$  và  $-\sqrt{2} - 3$

**B.**  $\sqrt{2} + 3$  và  $-\sqrt{2} + 3$

**C.**  $\sqrt{2} - 3$  và  $-\sqrt{2} - 3$

**D.**  $\sqrt{2} - 3$  và  $-\sqrt{2} + 3$

**Đáp án: 1 – B, 2 – C, 3 – B**