BÀI ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

+) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

+) Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - a = 0$

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

+) Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$\lim (u_n + v_n) = a + b$

$\lim (u_n – v_n) = a – b$

$\lim (u_n.v_n) = a.b$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0)$$

Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì:

$$\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \text{ và } a \geq 0.$$

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q} \quad |q| < 1 \ .$$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu lim u_n = a và lim v_n = ±∞ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu lim u_n = a > 0, lim v_n = 0 và v_n > 0, ∀ n > 0 thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu lim u_n = +∞ và lim v_n = a > 0 thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

V. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số y = f(x) xác định trên K hoặc trên K \ {x_0}.

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, x_n ∈ K \{x_0} và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ hay f(x) → L khi x → x_0.

Nhận xét: $\lim_{x \to \infty} x = x_0, \lim_{x \to \infty} c = c$ với c là hằng số.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$

$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$

$\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = L.M;$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}\ (M\neq 0);$$

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ thì $L\geq 0$ và $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

(Dấu của f(x) được xét trên khoảng đang tìm giới hạn với $x\neq x_0$).

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên (x_0; b).

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số y = f(x) khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; x_0).

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số y = f(x) khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

Định lí 2

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

VI. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3

a) Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; $+\infty$).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x ⟶ +∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

b) Cho hàm số y = f(x) xác định trên (–∞; a).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x ⟶ –∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

Chú ý:

a) Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to+\infty} c = c;\ \lim_{x\to-\infty} c = c;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^k} = 0;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x_n \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$

VII. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a; +∞).

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là –∞ khi x ⟶ +∞ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-f(x)\right) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) Nếu k chẵn thì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$;

Nếu k lẻ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$.

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$

L < 0		+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$

(Dấu của g(x) xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp:

$x \to x_0^+, x \to x_0^-; x \to +\infty; x \to -\infty.$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng (-2; 5)

Lời giải

Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$

f(x) là hàm đa thức nên liên tục trên R.

Ta có: $f(0) = -2 < 0$

$f(1) = 1 > 0$

$f(2) = -8 < 0$

$f(3) = 13 > 0$

$\Rightarrow f(0).f(1) < 0; f(1).f(2) < 0; f(2).f(3) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0; 1); 1 nghiệm thuộc khoảng (1; 2); 1 nghiệm thuộc khoảng (2; 3)

$\Rightarrow$ f(x) = 0 có ít nhất 3 nghiệm thuộc (0; 3) hay f(x) = 0 có ít nhất 3 nghiệm thuộc (-2; 5).

Bài 2. Giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$;

b) $u_n = 5^n - 2^n$;

c) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 2}$

Lời giải

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}}$.

Vì $\lim\left(3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right) = 3 > 0$, $\lim\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim u_n = +\infty$.

b) Ta có $5^n - 2^n = 5^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)$

Vì $\lim 5^n = +\infty$ và $\lim\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) = 1 > 0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\ 5^n - 2^n\ = +\infty$

c) $\lim\ \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 2}\ = \lim\left[\ \sqrt{n^2 + n + 1} - n\ +\ n - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 2}\ \right]$

$$= \lim \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{n^3 - n^3 - 3n - 2}{n^2 - n\sqrt[3]{n^3 + 3n + 2} + \sqrt[3]{\left(n^3 + 3n + 2\right)^2}}$$

$$= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \lim \frac{-3n - 2}{n^2 - n\sqrt[3]{n^3 + 3n + 2} + \sqrt[3]{\left(n^3 + 3n + 2\right)^2}}$$

$$= \lim \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + 1} + \lim \frac{-\dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}}{1 - \sqrt[3]{1 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{2}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{2}{n^3}\right)^2}}$$

$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

Bài 3. a) Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của hàm số: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 5 - x & \text{khi } x \leq 2. \end{cases}$

b) Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

tại $x = 0$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Với x > 2 thì hàm $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ là hàm phân thức nên liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Với x < 2 thì hàm g(x) = 5 – x là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Tại x = 2, ta có:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (5 - x) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^-} g(x) = g(2) = 3$$

Do đó hàm số liên tục tại x = 2.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 2a) = 2a$

và $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + x + 1) = 1$

Để hàm số liên tục tại x = 0 thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ thì hàm số đã cho liên tục tại x = 0.

Bài 4. Chứng minh phương trình $\sqrt{x^5+2x^3+15x^2+14x+2} = 3x^2+x+1$ có 5 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^5+2x^3+15x^2+14x+2 = \left(3x^2+x+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1=0 \quad (1)$$

Hàm số $f(x) = x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{19}{32} < 0$

$f(0) = 1 > 0, f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$$(-2;-1),\ \left(-1;-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2};0\right),\ (0;2),\ (2;10)$$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$;

b) $B = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

Lời giải

a) Ta có: $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7} = 8$

b) Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\sqrt{3}$