Công thức về phép vị tự

1. Lý thuyết

* Định nghĩa: điểm I cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M', sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I tỉ số k và kí hiệu là $V_{(I,k)}$ (I được gọi là tâm vị tự).

* Nhận xét:

- Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

- Phép vị tự tỉ số k = 1 chính là phép đồng nhất.

- Phép vị tự tâm I tỉ số k = -1 chính là phép đối xứng qua tâm I.

- $M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(M')$

* Tính chất:

- Biến đường thẳng không qua tâm vị tự đường thẳng song song với nó.
- Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài gấp |k| đoạn thẳng ban đầu.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng |k|.
- Biến góc thành góc bằng với góc ban đầu.
- Biến tia thành tia.
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính |k|.R.

2. Công thức

Cho điểm $M(x_0; y_0)$. Phép vị tự tâm I(a; b), tỉ số k biến điểm M thành M' có tọa độ (x'; y') thỏa mãn: $\begin{cases} x' - a = k(x_0 - a) \\ y' - b = k(y_0 - b) \end{cases}$

Đối với phép vị tự tâm O biến M thành M' thì $\begin{cases} x' = kx_0 \\ y' = ky_0 \end{cases}$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho điểm I(1; 2) cố định và số thực k = 2.

a) Tìm ảnh A' của điểm A(3; 4) qua phép vị tự tâm I, tỉ số k.

b) Tìm ảnh của đường thẳng d: x – 2y + 1 = 0 qua phép vị tự tâm I, tỉ số k.

Lời giải

a) Ta có $V_{(1;\,2)}(A) = A'(x';y')$

nên $\begin{cases} x' - x_I = k(x_A - x_I) \\ y' - y_I = k(y_A - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 2.(3-1) \\ y' - 2 = 2.(4-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(5;6)$

Vậy tọa độ điểm A'(5;6).

b) Gọi đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép vị tự tâm I, tỉ số k = 2

Ta có: I không nằm trên đường thẳng d (vì 1 – 2.2 + 1 = -2)

Nên d’ song song với d. Khi đó phương trình d’ có dạng: x – 2y + c = 0 (c khác 1)

Lấy điểm $M(1;1) \in d$, ta có $V_{(I;2)}(M) =$ M’$\in$ d’.

Tọa độ điểm M’(x’;y’): $\begin{cases} x' - x_I = k(x_M - x_I) \\ y' - y_I = k(y_M - y_I) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 2.(1-1) \\ y' - 2 = 2.(1-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(1;0)$

Vì $M' \in d$ nên 1 – 2.0 + c = 0, suy ra c = -1 (thỏa mãn)

Vậy phương trình đường thẳng d’: x – 2y – 1 = 0.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 4$. Tìm ảnh (C') của (C) qua phép vị tự tâm I(-1; 2), tỉ số k = 3?

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm A(1;2), kính R = 2.

Đường tròn (C’) là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I, tỉ số k = 3 nên (C’) có bán kính R’ = 3.2 = 6 và tâm A’ là ảnh của A qua phép vị tự tâm I, tỉ số k = 3.

Ta có A’(x’; y’) = $V_{(I;3)}(A)$

Tọa độ điểm A’:

$\begin{cases} x' - x_I = k(x_A - x_I) \\ y' - y_I = k(y_A - y_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = 3(1+1) \\ y' - 2 = 3(2-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A'(5;2).$

Vậy phương trình đường tròn (C’): $(x – 5)^2 + (y – 2)^2 = 36$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Tìm tọa độ A để điểm A’(1;5) là ảnh của A qua phép vị tự tâm I(1;3), k = -2. Tọa độ A là:

A. A(1;2) **B.** A(1;7) **C.** A(-1;-2) **D.** A(-1;-7)

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 3x – y – 5 = 0. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\frac{2}{3}$.

A. -3x + y – 9 = 0 **B.** 3x – y – 10 = 0

C. 9x – 3y + 15 = 0 **D.** 9x – 3y + 10 = 0

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x – 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I(1; 2) và tỉ số k = - 2

A. $x^2 + y^2 + 6x – 16y + 4 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 – 6x + 16y – 4 = 0$

C. $(x + 3)^2 + (y – 8)^2 = 20$ **D.** $(x – 3)^2 + (y + 8)^2 = 20$

Đáp án 1A, 2D, 3C