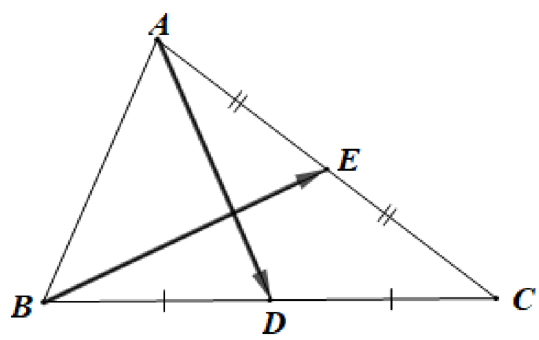
Bài 9. Tích của một vectơ với một số

Bài 4.13 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

Cho tam giác ABC. Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BC, CA. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BE}$.

Lời giải



Ta có:

+) D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

+) E là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$

Do đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

+) Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

+) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ (quy tắc hiệu)

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

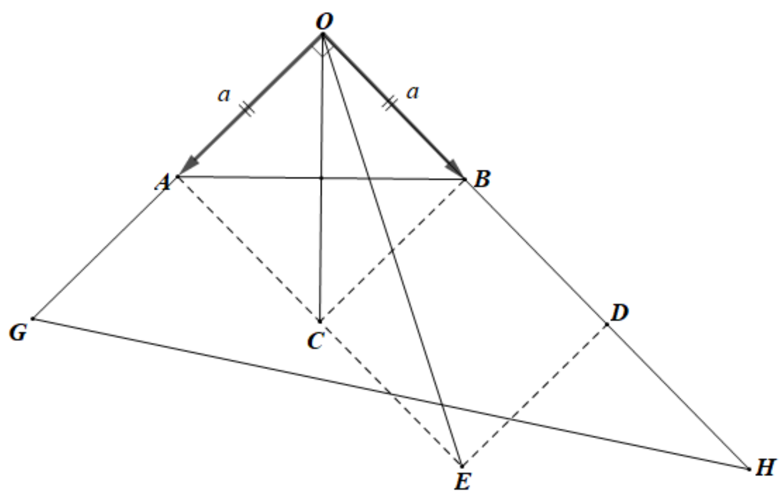
$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ và $\overrightarrow{CA}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

Bài 4.14 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

Cho tam giác OAB vuông cân, với OA = OB = a. Hãy xác định độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$.

Lời giải



Gọi C là điểm thoả mãn OACB là hình bình hành

Mà ΔOAB vuông cân có OA = OB nên OACB là hình vuông

$\Rightarrow$ OC = AB

Mà $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lí Pythagoras)

$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow OC = AB = a\sqrt{2}$

+) Có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (quy tắc hình bình hành)

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = OC = a\sqrt{2}$

+) Có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = a\sqrt{2}$

+) Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và OD = 2OB.

Có: $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

Vẽ hình chữ nhật OAED, khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OE}\right| = OE$

Mà $OE^2 = OD^2 + DE^2$ (định lí Pythagoras)

$\Rightarrow OE^2 = (2OB)^2 + OA^2$

$\Rightarrow OE^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow OE = a\sqrt{5}$

Do đó $\left|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{5}$

+) Lấy điểm G sao cho $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OB}$

Khi đó: hai vectơ $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và OG = 2OA;

Và hai vectơ $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và OH = 3OB.

Có: $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$

$= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{HO} \; = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OG}$

$= \overrightarrow{HG}$

$\Rightarrow \left|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{HG}\right| = HG$

Mà $HG^2 = OG^2 + OH^2$ (định lí Pythagoras)

$\Rightarrow HG^2 = (2OA)^2 + (3OB)^2$

$\Rightarrow HG^2 = (2a)^2 + (3a)^2$

$\Rightarrow HG^2 = 13a^2$

$\Rightarrow HG = a\sqrt{13}$

Do đó $\left|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{13}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{2}; \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{2}; \left|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{5}$ và $\left|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{13}$.

Bài 4.15 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

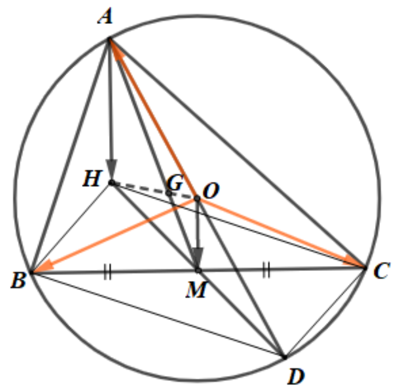
Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.

a) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm G, H, O cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải



a) Kẻ đường kính AD.

Hai điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AD nên $ABD = ACD = 90°$

Hay $BD \perp AB$, $CD \perp AC$

Lại có H là trực tâm ΔABC nên $BH \perp AC$, $CH \perp AB$

$\Rightarrow$ BH /// CD và CH // BD

$\Rightarrow$ BHCD là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất hình bình hành)

Mà M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ M là trung điểm của HD

Mà O là trung điểm của AD

Khi đó OM là đường trung bình của ΔAHD

$\Rightarrow$ OM // AH và $AH = 2.OM$ (tính chất đường trung bình)

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ có:

+ Cùng phương, cùng hướng

+ Độ dài: $\left|\overrightarrow{AH}\right| = 2\left|\overrightarrow{OM}\right|$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$

Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$

b) Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$

Mà $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ (câu a)

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$

Mà $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (câu b)

Suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

Khi đó $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OG}$ cùng phương, cùng hướng

$\Rightarrow$ O, H, G thẳng hàng.

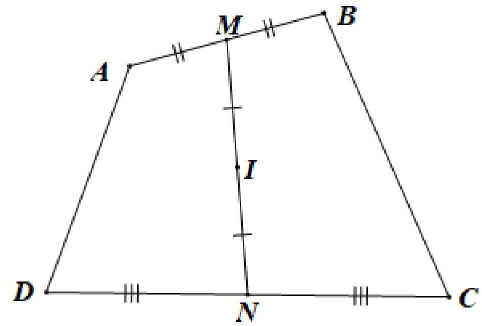
Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Bài 4.16 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD và gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng với điểm O bất kì đều có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}.$$

Lời giải



Với điểm O bất kì ta có:

+) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (do M là trung điểm của AB)

+) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$ (do N là trung điểm của CD)

+) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}$ (do I là trung điểm của MN)

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$

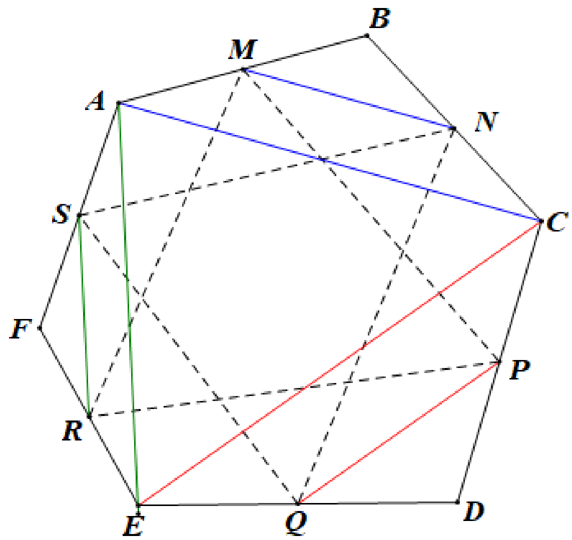
$=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=2.2\overrightarrow{OI}=4\overrightarrow{OI}$

Vậy với điểm O bất kì đều có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}.$

Bài 4.17 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải



+) Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC

Nên MN là đường trung bình của tam giác ABC.

$\Rightarrow$ MN // AC và $MN = \frac{1}{2}AC$ (tính chất đường trung bình)

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ (2)

Và $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA}\right)$ (quy tắc ba điểm)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AA}$ (quy tắc ba điểm)

$= \frac{1}{2}.\vec{0} = \vec{0}$

Do đó $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$

+) Giả sử G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác MPR và tam giác NQS.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RG} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{QG'} + \overrightarrow{SG'} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'Q} + \overrightarrow{G'S} = \vec{0}$

Mặt khác: theo quy tắc ba điểm ta có:

+) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N};$

+) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'Q};$

+) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'S};$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RG} + 3.\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'Q} + \overrightarrow{G'S}$

$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RG}\right) + 3.\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'Q} + \overrightarrow{G'S}\right)$

$= \vec{0} + 3.\overrightarrow{GG'} + \vec{0}$

$= 3.\overrightarrow{GG'}$

+) Lại có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ (chứng minh trên)

Nên $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

Suy ra G và G' trùng nhau.

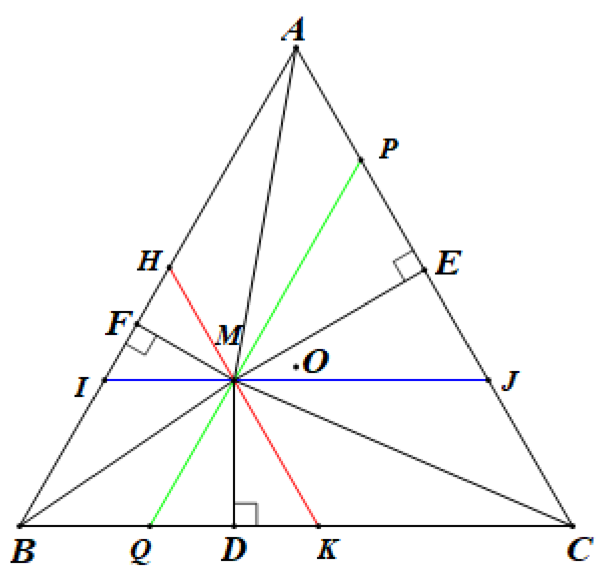
Vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 4.18 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

Cho tam giác ABC đều với trọng tâm O. M là một điểm tuỳ ý nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải



Qua M, kẻ các đường thẳng IJ // BC, HK // AC, PQ // AB.

Tam giác ABC đều nên $ABC = ACB = 60°$

Mà PQ // AB nên $MQK = ABC = 60°$,

HK // AC nên $MKQ = ACB = 60^\circ$

Tam giác MQK có: $MQK = MKQ = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Lại có MD là đường cao kẻ từ M nên MD đồng thời là đường trung tuyến

Do đó D là trung điểm của QK

$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MD}$ (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có:

+) $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MF}$ (2)

+) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{ME}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{ME}$$

$$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME}\right) = \left(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MI}\right) + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ}\right) + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MP}\right)$$

Vì MI // BQ, MQ // BI nên tứ giác MIBQ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB}$$

Tương tự ta có $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA}$

Khi đó $2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME}\right) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\right)$$

Lại có O là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MO}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}.3\overrightarrow{MO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Vậy $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$

Bài 4.19 SBT Toán 10 trang 54 Tập 1:

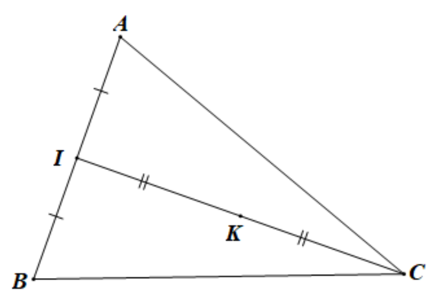
Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$

b) Xác định điểm N thoả mãn $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}.$

Lời giải

a)



Gọi I là trung điểm của AB.

Khi đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}\right)$$

Gọi K là trung điểm của IC, khi đó: $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2.2\overrightarrow{MK} = 4\overrightarrow{MK}.$$

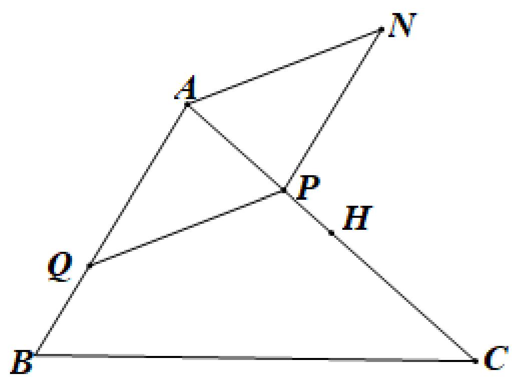
Mà $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$

Do đó $4\overrightarrow{MK}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MK}=\vec{0}$

Suy ra M ≡ K.

Vậy M là trung điểm của IC (với I là trung điểm của AB).

b)



Ta có: $4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=4\overrightarrow{NA}-2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{NC}$

$=4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NC}$

$=2\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NC}$

$=\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}\right)$

Gọi H là trung điểm của AC, khi đó $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NH}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{AB}+2.\overrightarrow{NH}$

$=\left(\overrightarrow{NA}+2.\overrightarrow{NH}\right)-2\overrightarrow{AB}$

Giả sử P là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}+2.\overrightarrow{PH}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{NA}+2.\overrightarrow{NH}=\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}\right)+2\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PH}\right)$

$= 3\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PH}$

$= 3\overrightarrow{NP} + \vec{0}$

$= 3\overrightarrow{NP}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NP} - 2\overrightarrow{AB}$

Mà $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}.$

Nên $3\overrightarrow{NP} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Gọi Q là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AQ}$

Do đó tứ giác AQPN là hình bình hành

Vậy điểm N cần tìm là đỉnh của hình bình hành AQPN (với Q thỏa mãn $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và P thỏa mãn $\overrightarrow{PA} + 2.\overrightarrow{PH} = \vec{0}$, H là trung điểm của AC).

Bài 4.20 SBT Toán 10 trang 55 Tập 1:

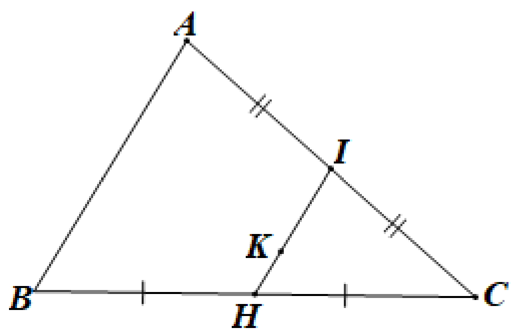
Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}.$

b) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|.$

Lời giải

a)



Gọi I là trung điểm của AC, H là trung điểm của BC.

Khi đó $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{KI}$ và $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{KH}$

$\Rightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}\right)+2\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)$

$=2\overrightarrow{KI}+2.2\overrightarrow{KH}=2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}$

Mà $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Nên $2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}=\vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{KI}=-4\overrightarrow{KH}$

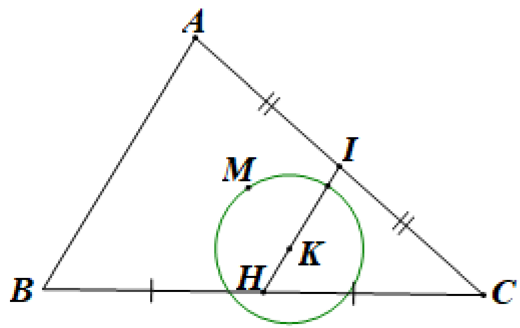
$\Rightarrow \overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{KH}$

Khi đó $\overrightarrow{KI}$ và $\overrightarrow{KH}$ là hai vectơ cùng phương, ngược hướng và $\left|\overrightarrow{KI}\right|=2\left|\overrightarrow{KH}\right|$

Do đó điểm K nằm giữa hai điểm I và H sao cho KI = 2KH.

Vậy ta có điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ như hình vẽ.

b)



Chứng minh tương tự câu a ta có:

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MH}$

$=2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KI}\right)+4\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KH}\right)$

$=2\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{MK}+4\overrightarrow{KH}$

$=6\overrightarrow{MK}+\left(2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}\right)$

Mà $2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KH}=\vec{0}$ (câu a)

Nên $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MK}$

Lại có: $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

$\Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MK}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$

$\Leftrightarrow$ 6MK = CB

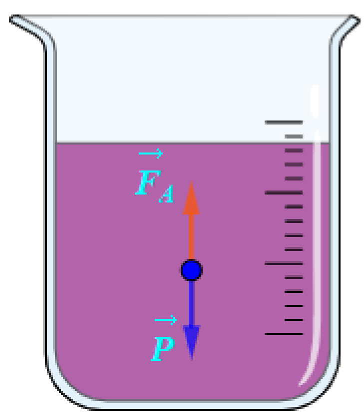
$\Leftrightarrow \text{KM}=\dfrac{\text{BC}}{6}$

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính bằng $\frac{BC}{6}$ như hình vẽ.

Bài 4.21 SBT Toán 10 trang 55 Tập 1:

Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực $\vec{P}$ của vật và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

Lời giải



Trọng lực $\vec{P}$ của vật và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ mà chất lỏng tác động lên vật được mô tả như hình vẽ trên.

Do vật ở trạng thái cân bằng nên hai lực $\vec{P}$ và $\vec{F}$ ngược hướng nhau và có cường độ bằng nhau.

$\Rightarrow |\vec{P}| = |\vec{F}|$

Gọi d và d' là trọng lượng riêng của vật và chất lỏng;

V là thể tích của vật

Khi thả vật vào cốc chất lỏng thì ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng nên thể tích chất lỏng bị chiếm chỗ là $\frac{V}{2}$.

Khi đó trọng lượng của vật là: P = d.V

Và lực đẩy Archimedes mà chất lỏng tác động lên vật là: $F_A = d'.\frac{V}{2}$.

Do đó $\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{F}\right| \Leftrightarrow d.V = d'.\frac{V}{2} \Leftrightarrow d = \frac{d'}{2} \Leftrightarrow \frac{d}{d'} = \frac{1}{2}$.

Vậy tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng bằng $\frac{1}{2}$.