Bài cuối chuyên đề 2

Trang 40

Bài 1 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

b) $1.4 + 2.7 + 3.10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

c) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

Lời giải:

a) Bước 1. Với n = 1, ta có $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$. Do đó đẳng thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4}$$

$= \dfrac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}$

$= \dfrac{(k+1)^2\left(k+2\right)^2}{4} = \dfrac{(k+1)^2\left[\left(k+1\right)+1\right]^2}{4}.$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

b) Bước 1. Với n = 1, ta có 1(3 . 1 + 1) = 4 = 1(1 + 1)^2. Do đó đẳng thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử đẳng thức đúng với n = k ≥ 1, nghĩa là có:

$1.4+2.7+3.10+\ldots+k(3k+1)=k(k+1)^2.$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$1.4+2.7+3.10+\ldots+k(3k+1)+\left(k+1\right)\left[3\left(k+1\right)+1\right]=\left(k+1\right)\left[(k+1)+1\right]^2.$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$1.4+2.7+3.10+\ldots+k(3k+1)+\left(k+1\right)\left[3\left(k+1\right)+1\right]$

$=k(k+1)^2+\left(k+1\right)\left[3\left(k+1\right)+1\right]$

$=\left(k+1\right)\left[k\left(k+1\right)+3\left(k+1\right)+1\right]$

$=\left(k+1\right)\left(k^2+4k+4\right)$

$=\left(k+1\right)\left(k+2\right)^2=\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)+1\right]^2.$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

c) Bước 1. Với n = 1, ta có $\dfrac{1}{(2.1-1)(2.1+1)}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2.1+1}$. Do đó đẳng thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử đẳng thức đúng với n = k ≥ 1, nghĩa là có:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{\left[2\left(k+1\right)-1\right]\left[2\left(k+1\right)+1\right]}=\frac{k+1}{2\left(k+1\right)+1}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{\left[2\left(k+1\right)-1\right]\left[2\left(k+1\right)+1\right]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{\left[2\left(k+1\right)-1\right]\left[2\left(k+1\right)+1\right]}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}$$

$$=\frac{k\left(2k+3\right)+1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}$$

$$=\frac{\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2\left(k+1\right)+1}.$$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

Bài 2 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $3^n - 1 - 2n$ chia hết cho 4;

b) $7^n - 4^n - 3^n$ chia hết cho 12.

Lời giải:

a) Bước 1. Với n = 1, ta có $3^1 - 1 - 2 . 1 = 0 \vdots 4$. Do đó khẳng định đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k ≥ 1, nghĩa là có: $3^k - 1 - 2k \vdots 4$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$3^{k+1} - 1 - 2(k + 1) \vdots 4$.

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$3^{k+1} - 1 - 2(k + 1) = 3 \cdot 3^k - 1 - 2k - 2 = 3 \cdot 3^k - 3 - 2k = 3 \cdot 3^k - 3 - 6k + 4k$

$= 3(3^k - 1 - 2k) + 4k$

Vì $(3^k - 1 - 2k)$ và 4k đều chia hết cho 4 nên $3(3^k - 1 - 2k) + 4k \vdots 4$ hay $3^{k+1} - 1 - 2(k + 1) \vdots 4$.

Vậy khẳng định đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

b) Bước 1. Với n = 1, ta có $7^1 - 4^1 - 3^1 = 0 \vdots 12$. Do đó khẳng định đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k ≥ 1, nghĩa là có: $7^k - 4^k - 3^k \vdots 12$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$7^{k+1} - 4^{k+1} - 3^{k+1} \vdots 12$.

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$7^{k+1} - 4^{k+1} - 3^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k - 3 \cdot 3^k = 7 \cdot 7^k - 7 \cdot 4^k - 7 \cdot 3^k + 3 \cdot 4^k + 4 \cdot 3^k$

$= 7(7^k - 4^k - 3^k) + 3 \cdot 4^k + 4 \cdot 3^k = 7(7^k - 4^k - 3^k) + 12 \cdot 4^{k-1} + 12 \cdot 3^{k-1}$ (vì k ≥ 1).

Vì $7(7^k - 4^k - 3^k)$, $12 \cdot 4^{k-1}$ và $12 \cdot 3^{k-1}$ đều chia hết cho 12 nên $7(7^k - 4^k - 3^k) + 12 \cdot 4^{k-1} + 12 \cdot 3^{k-1} \vdots 12$ hay $7^{k+1} - 4^{k+1} - 3^{k+1} \vdots 12$.

Vậy khẳng định đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

Bài 3 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng $8^n \geq n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

Bước 1. Với n = 1, ta có $8^1 = 8 > 1 = 1^3$. Do đó bất đẳng thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k ≥ 1, nghĩa là có: $8^k \geq k^3$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$8^{k+1} \geq (k+1)^3$.

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$8^{k+1} = 8 . 8^k \geq 8 . k^3 = k^3 + 3k^3 + 3k^3 + k^3 \geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ (vì $k \geq 1$) $= (k+1)^3$.

Vậy bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

Bài 4 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng bất đẳng thức $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{2}$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

Bước 1. Với n = 1, ta có $\frac{1}{1}=1=\frac{1+1}{2}$. Do đó bất đẳng thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k} \leq \frac{k+1}{2}.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \leq \frac{(k+1)+1}{2}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \leq \frac{k+1}{2}+\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)^2+2}{2(k+1)}=\frac{k^2+2k+3}{2(k+1)}$$

$$\leq \frac{k^2+2k+1+2}{2(k+1)} \leq \frac{k^2+2k+k+2}{2(k+1)}=\frac{k^2+3k+2}{2(k+1)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+1)}=\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)+1}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

Bài 5 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Với một bình rỗng có dung tích 2 l, một bạn học sinh thực hiện thí nghiệm theo các bước như sau:

Bước 1: Rót 1 l nước vào bình, rồi rót đi một nửa lượng nước trong bình.

Bước 2: Rót 1 l nước vào bình, rồi lại rót đi một nửa lượng nước trong bình.

Cứ như vậy, thực hiện các bước 3,4,...

Kí hiệu a_n là lượng nước có trong bình sau bước $n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

a) Tính a_1, a_2, a_3. Từ đó dự đoán công thức tính a_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh công thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải:

a) Sau bước 1 thì trong bình có $\frac{1}{2}$ l nước, do đó $a_1 = \frac{1}{2}$.

Sau bước 2 thì trong bình có: $\frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2}=\frac{3}{4}$ l nước, do đó $a_2 = \frac{3}{4}$.

Sau bước 3 thì trong bình có: $\frac{\left(\frac{3}{4}+1\right)}{2}=\frac{7}{8}$. l nước, do đó $a_2 = \frac{7}{8}$.

Ta có thể dự đoán $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$.

b) Ta chứng minh bằng quy nạp:

Bước 1. Với n = 1, ta có $a_1 = \frac{1}{2}=\frac{2^1-1}{2^1}$. Do đó công thức đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có: $a_k = \frac{2^k-1}{2^k}$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh:

$a_{k+1} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$.

Thật vậy:

a_k là lượng nước có trong bình sau bước thứ k thì lượng nước có trong bình sau bước thứ k + 1 là:

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 1}{2} = \frac{\frac{2^k - 1}{2^k} + 1}{2} = \frac{\frac{\left(2^k - 1\right) + 2^k}{2^k}}{2} = \frac{2 \,.\, 2^k - 1}{2^k \,.\, 2} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Vậy công thức đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 6 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^3 trong khai triển:

a) $(1 - 3x)^8$;

b) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^7$.

Lời giải:

a) Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$(1 - 3x)^8 = C_8^0 1^8 + C_8^1 1^7 (-3x) + ... + C_8^k 1^{8-k} (-3x)^k + ... + C_8^8 (-3x)^8$$

$$= 1 + C_8^1 (-3) x + ... + C_8^k (-3)^k x^k + ... + C_8^8 (-3)^8 x^8.$$

Số hạng chứa x^3 ứng với giá trị k = 3. Hệ số của số hạng này là $C_8^3 (-3)^3 = -1512$.

b) Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^7 = C_7^0 1^7 + C_7^1 1^6 \left(\frac{x}{2}\right) + ... + C_7^k 1^{7-k} \left(\frac{x}{2}\right)^k + ... + C_7^7 \left(\frac{x}{2}\right)^7$$

$$= 1 + C_7^1 \frac{1}{2} x + ... + C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^k x^k + ... + C_7^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 x^7.$$

Số hạng chứa x^3 ứng với giá trị k = 3. Hệ số của số hạng này là $C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{8}$.

Bài 7 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x + 3)(x – 2)^6$.

Lời giải:

Có $(2x + 3)(x – 2)^6$

$= 2x(x – 2)^6 + 3(x – 2)^6$.

Ta tìm hệ số của x^5 trong từng khai triển: $2x(x – 2)^6$ và $3(x – 2)^6$.

+) Có: $2x(x – 2)^6$

$= 2x[C_6^0x^6 + C_6^1x^5(-2) + C_6^2x^4(-2)^2 + C_6^3x^3(-2)^3$

$+C_6^4x^2(-2)^4 + C_6^5x(-2)^5 + C_6^6(-2)^6]$

$= 2C_6^0x^7 + 2(-2)C_6^1x^6 + 2(-2)^2C_6^2x^5 + 2(-2)^3C_6^3x^4$

$+2(-2)^4C_6^4x^3 + 2(-2)^5C_6^5x^2 + 2(-2)^6C_6^6x.$

Hệ số của x^5 trong khai triển này là $2(-2)^2C_6^2 = 120$.

+) Có: $3(x – 2)^6$

$= 3[C_6^0x^6 + C_6^1x^5(-2) + C_6^2x^4(-2)^2 + C_6^3x^3(-2)^3$

$+C_6^4x^2(-2)^4 + C_6^5x(-2)^5 + C_6^6(-2)^6]$

$= 3C_6^0x^6 + 3(-2)C_6^1x^5 + 3(-2)^2C_6^2x^4 + 3(-2)^3C_6^3x^3$

$+3(-2)^4C_6^4x^2 + 3(-2)^5C_6^5x + 3(-2)^6C_6^6.$

Hệ số của x^5 trong khai triển này là $3(-2)C_6^1 = -36$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $(2x + 3)(x – 2)^6$ là $120 + (-36) = 84$.

Bài 8 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

a) Tìm ba số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1 + 2x)^6$, các số hạng được viết theo thứ tự số mũ của x tăng dần.

b) Sử dụng kết quả trên, hãy tính giá trị gần đúng của $1,02^6$.

Lời giải:

a) Sử dụng tam giác Pascal, ta có:

$(1 + 2x)^6$

$$=1^6+6.1^5(2x)+15.1^4(2x)^2+20.1^3(2x)^3+15.1^2(2x)^4+6.1(2x)^5+(2x)^6$$

$$=1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6.$$

Ba số hạng đầu tiên của khai triển là 1, 12x và $60x^2$.

b) Với x nhỏ thì x^3, x^4, x^5, x^6 sẽ rất nhỏ. Do đó có thể coi $(1 + 2x)^6 \approx 1 + 12x + 60x^2$.

Khi đó $1{,}02^6 = (1 + 2 \,.\, 0{,}01)^6 \approx 1 + 12 \,.\, 0{,}01 + 60 \,.\, 0{,}01^2 = 1{,}126$.

Bài 9 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Trong khai triển biểu thức $(3x – 4)^{15}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lời giải:

Có $(3x – 4)^{15}$

$$=C_{15}^0(3x)^{15}+C_{15}^1(3x)^{14}(-4)+...+C_{15}^k(3x)^{15-k}(-4)^k+...+C_{15}^1(3x)(-4)^{14}+C_{15}^{15}(-4)^{15}$$

$=a_{15}x^{15}+a_{14}x^{14}+...+a_kx^k+...+a_1x+a_0$ (với a_i là hệ số của x^i).

Thay x = 1, ta được:

$(3 \,.\, 1 – 4)^{15} = a_{15}1^{15}+a_{14}1^{14}+...+a_k1^k+...+a_1 1+a_0=a_{15}+a_{14}+...+a_k+...+a_1+a_0$

$$\Rightarrow a_{15}+a_{14}+...+a_k+...+a_1+a_0=(-1)^{15}=-1.$$

Vậy tổng các hệ số của đa thức nhận được là –1.

Bài 10 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1+2C_n^1+4C_n^2+\ldots+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^nC_n^n=3^n$;

b) $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$.

Lời giải:

a) $1+2C_n^1+4C_n^2+\ldots+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^nC_n^n$

$=C_n^0 1+C_n^1 2+C_n^2 2^2+\ldots+C_n^{n-1}2^{n-1}+C_n^n 2^n$

$=C_n^0 1^n+C_n^1 1^{n-1}2+C_n^2 1^{n-2}2^2+\ldots+C_n^{n-1}1.2^{n-1}+C_n^n 2^n$

$= (1 + 2)^n = 3^n$.

b) Ta có:

$(x+1)^{2n}=C_{2n}^0x^{2n}+C_{2n}^1x^{2n-1}1+C_{2n}^2x^{2n-2}1^2+\ldots+C_{2n}^{2n-1}x1^{2n-1}+C_{2n}^{2n}1^{2n}$

$=C_{2n}^0x^{2n}+C_{2n}^1x^{2n-1}+C_{2n}^2x^{2n-2}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}x+C_{2n}^{2n}$.

Cho $x = -1$, ta được:

$(-1+1)^{2n}=C_{2n}^0\left(-1\right)^{2n}+C_{2n}^1\left(-1\right)^{2n-1}+C_{2n}^2\left(-1\right)^{2n-2}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}\left(-1\right)+C_{2n}^{2n}$

$=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0$

$\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\ldots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$.