

Bài 4. Nhị thức Newton

A. Lý thuyết

Công thức nhị thức Newton $(a + b)^n$ ứng với $n = 4$; $n = 5$:

$$\begin{aligned} \bullet (a + b)^4 &= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (a + b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5. \end{aligned}$$

Ví dụ:

a) Khai triển $(2 + x)^4$;

b) Khai triển $(x - 3)^5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} (2 + x)^4 &= C_4^0 2^4 + C_4^1 2^3 \cdot x + C_4^2 2^2 x^2 + C_4^3 2 \cdot x^3 + C_4^4 x^4 \\ &= 2^4 + 4 \cdot 2^3 x + 6 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x^3 + x^4 \\ &= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (2 + x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4.$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} (x - 3)^5 &= C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 \cdot (-3) + C_5^2 x^3 \cdot (-3)^2 + C_5^3 x^2 \cdot (-3)^3 + C_5^4 x \cdot (-3)^4 + C_5^5 (-3)^5 \\ &= x^5 + 5x^4 \cdot (-3) + 10x^3 \cdot (-3)^2 + 10x^2 \cdot (-3)^3 + 5x \cdot (-3)^4 + (-3)^5 \\ &= x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (x - 3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243.$$

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Cho tập hợp E có 4 phần tử. Tính số tập con của E.

Hướng dẫn giải

Số tập hợp con của E có 0 phần tử là: C_4^0 ;

Số tập hợp con của E có 1 phần tử là: C_4^1 ;

Số tập hợp con của E có 2 phần tử là: C_4^2 ;

Số tập hợp con của E có 3 phần tử là: C_4^3 ;

Số tập hợp con của E có 4 phần tử là: C_4^4 .

Khi đó số tập hợp con của E là: $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$.

Mặt khác, ta có: $(1 + 1)^4 = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$

$$\Rightarrow C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16.$$

Vậy tập hợp E có 16 tập con.

Bài 2. Khai triển các đa thức sau :

a) $(2x - 3)^4$;

b) $(x + 5)^5 + (x - 5)^5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(2x - 3)^4$

$$= (2x)^4 + 4(2x)^3 \cdot (-3) + 6(2x)^2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot 2x \cdot (-3)^3 + (-3)^4.$$

$$= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81.$$

$$\text{Vậy: } (2x - 3)^4 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81.$$

b) Ta có:

$$(x + 5)^5 + (x - 5)^5$$

$$= [x^5 + 5x^4 \cdot 5 + 10 \cdot x^3 \cdot 5^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 5^3 + 5 \cdot x \cdot 5^4 + 5^5] + [x^5 + 5x^4 \cdot (-5) + 10 \cdot x^3 \cdot (-5)^2 + 10 \cdot x^2 \cdot (-5)^3 + 5 \cdot x \cdot (-5)^4 + (-5)^5]$$

$$= [x^5 + 25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x + 3125] + [x^5 - 25x^4 + 250x^3 - 1250x^2 + 3125x - 3125]$$

$$= x^5 + 25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x + 3125 + x^5 - 25x^4 + 250x^3 - 1250x^2 + 3125x - 3125$$

$$= 2x^5 + 500x^3 + 6250x.$$

Vậy $(x + 5)^5 + (x - 5)^5 = 2x^5 + 500x^3 + 6250x$.

Bài 3. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức $(3x - 2)^4$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng hệ thức Newton ta có :

$$\begin{aligned}(3x - 2)^4 &= C_4^0 (3x)^4 + C_4^1 (3x)^3 \cdot (-2) + C_4^2 (3x)^2 \cdot (-2)^2 + C_4^3 (3x) \cdot (-2)^3 + C_4^4 (-2)^4 \\&= (3x)^4 + 4(3x)^3(-2) + 6(3x)^2(-2)^2 + 4(3x)(-2)^3 + (-2)^4 \\&= 3^4 x^4 + 4 \cdot 3^3 x^3 \cdot (-2) + 6 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot 3x \cdot (-2)^3 + (-2)^4 \\&\Rightarrow \text{Hệ số của } x^3 \text{ là } 4 \cdot 3^3 \cdot (-2) = -216.\end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $(3x - 2)^4$ là -216 .

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tổng hệ số của x^3 và x^2 trong khai triển $(1 + 2x)^4$ là :

- A. 24;
- B. 44;
- C. 20;
- D. 54.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 5a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

$$\begin{aligned}\text{Do đó } (1 + 2x)^4 &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot (2x) + 5 \cdot 1^2 \cdot (2x)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (2x)^3 + (2x)^4 \\&= 1 + 8x + 20x^2 + 24x^3 + 16x^4\end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^3 là 24 và hệ số của x^2 là 20.

Khi đó ta có tổng hai hệ số bằng $24 + 20 = 44$.

Câu 2. Hệ số của x^2 trong khai triển $(2 - 3x)^3$ là k. Nhận xét nào sau đây đúng về k ?

- A. k là một số tự nhiên;
- B. k là một số nguyên âm;
- C. k là một số nguyên dương;

D. $k = 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có: $(2x - 3)^3$

$$\begin{aligned} &= (2x)^3 + 2 \cdot (2x)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot (2x) \cdot (-3)^2 + (-3)^3 \\ &= 8x^3 - 24x^2 + 36x - 27. \end{aligned}$$

Hệ số của x^2 là $k = -24$.

Vậy k là một số nguyên âm.

Câu 3. Tính giá trị biểu thức $T = C_4^0 + \frac{1}{2}C_4^1 + \frac{1}{4}C_4^2 + \frac{1}{8}C_4^3 + \frac{1}{16}C_4^4$.

A. $\frac{3}{2}$;

B. $\frac{9}{16}$;

C. $\frac{81}{16}$;

D. $\frac{27}{16}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

$$\begin{aligned} T &= C_4^0 + \frac{1}{2}C_4^1 + \frac{1}{4}C_4^2 + \frac{1}{8}C_4^3 + \frac{1}{16}C_4^4 \\ &= C_4^0 \cdot 1^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + C_4^1 \cdot 1^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_4^2 \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_4^3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}. \end{aligned}$$