Bài 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A. Lý thuyết

1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ:

$\begin{cases} x + 2y < 3 \\ y - 2x > 0 \end{cases}$ là một hệ bất phương trình hai ẩn x, y gồm hai bất phương trình $x + 2y < 3$ và $y – 2x > 0$.

$\begin{cases} x^2 + y^2 < 5 \\ x - y > 4 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bởi $x^2 + y^2 < 5$ là bất phương trình bậc hai hai ẩn.

- Cho hệ bất phương trình hai ẩn $\begin{cases} x + y > 4 \\ x - y < 10 \end{cases}$.

Thay x = 10 và y = 2 vào bất phương trình x + y > 4 ta có: 10 + 2 = 12 > 4 là mệnh đề đúng nên cặp số (x; y) = (10; 2) là nghiệm của bất phương trình x + y > 4.

Thay x = 10 và y = 2 vào bất phương trình x – y < 10 ta có: 10 – 2 = 8 < 10 là mệnh đề đúng nên cặp số (x; y) = (10; 2) là nghiệm của bất phương trình x – y < 10.

Cặp (x; y) = (10; 2) là nghiệm của bất phương trình x + y > 4 và cũng là nghiệm của bất phương trình x – y < 10. Nên cặp (x; y) = (10; 2) là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một miền đa giác.

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$:

Trên mặt phẳng Oxy:

Bước 1: Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ và gạch bỏ phần miền còn lại.

- Đường thẳng x = 0 là trục tọa độ Oy.

- Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy nằm bên phải trục Oy.

Bước 2: Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox.

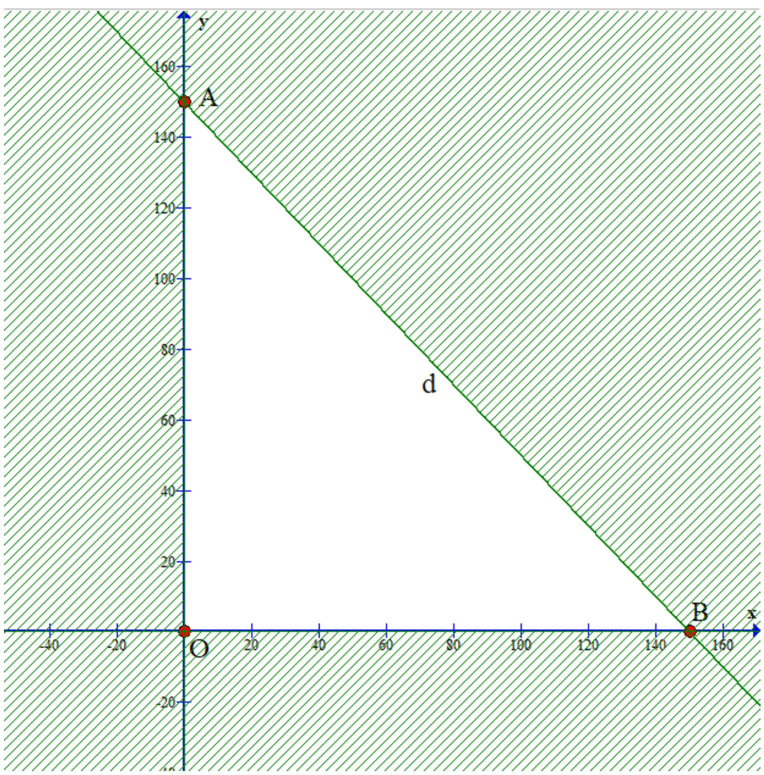
Bước 3: Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$:

- Vẽ đường thẳng d: $x + y = 150$.

- Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 0 = 0 \leq 150$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O (0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 150$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$ là nửa mặt phẳng bờ d (kể cả bờ d) chứa gốc tọa độ O.

Từ đó ta có miền nghiệm không bị gạch là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức F = ax + by trên một miền đa giác

Người ta chứng minh được $F = ax + by$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác

Ví dụ: Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y \leq 120 \end{cases}$

Và F(x; y) = 3,5x + 2y. Tìm giá trị lớn nhất của F(x; y).

Hướng dẫn giải:

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x + y \leq 100$:

+ Vẽ đường thẳng d_1: $x + y = 100$.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 0 = 0 \leq 100$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 100$.

Do đó, miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1) chứa gốc tọa độ O.

- Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $2x + y \leq 120$:

+ Vẽ đường thẳng d_2: $2x + y = 120$.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $2.\ 0 + 0 = 0 \leq 120$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 120$.

Do đó, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $2x + y \leq 120$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2) chứa gốc tọa độ O.

- Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \geq 0$.

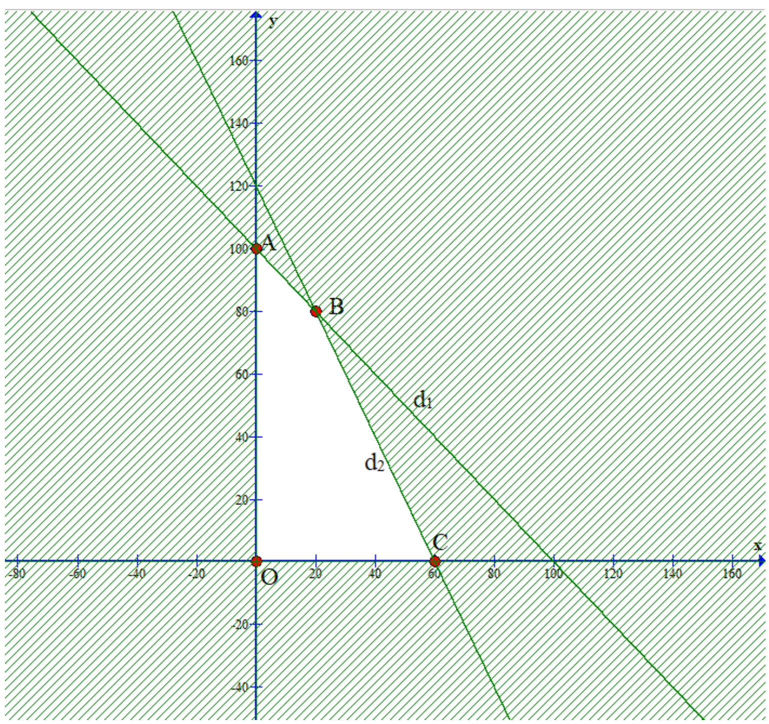
+ Đường thẳng $x = 0$ là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả trục Oy) nằm bên phải trục Oy.

- Tương tự, miền nghiệm D_4 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox.

Từ đó ta có miền nghiệm không bị gạch chính là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Miền nghiệm là miền tứ giác OABC với O(0;0), A(0;100), B(20;80) và C(60;0).



Bước 2: Tính giá trị của biểu thức F(x; y) = 3,5x + 2y tại các đỉnh của tứ giác:

Tại O(0; 0): F = 3,5.0 + 2.0 = 0;

Tại A(0; 100): F = 3,5.0 + 2.100 = 200;

Tại B(20; 80): F = 3,5.20 + 2.80 = 230;

Tại C(60; 0): F = 3,5.60 + 2.0 = 210;

Bước 3: So sánh các giá trị thu được ở Bước 2, kết luận giá trị lớn nhất của F (x; y) là 230.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 1 \\ y - 1 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y < 0 \\ y - x > 0 \end{cases}$

c) $y – 2x < 0$

d) $\begin{cases} 2x - y < 5 \\ 4x + 3y > 10^{10} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x < 1 \\ y - 1 > 2 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có hai bất phương trình $x < 1$ và $y - 1 > 2$ đều là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + y < 0 \\ y - x > 0 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có bất phương trình $x^2 + y < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- $y – 2x < 0$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chỉ có một bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y < 5 \\ 4x + 3y > 10^{10} \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có hai bất phương trình $2x – y < 5$ và $4x + 3y > 10^{10}$ đều là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vậy có hệ $\begin{cases} x < 1 \\ y - 1 > 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x - y < 5 \\ 4x + 3y > 10^{10} \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 5y < 1 \\ 5x - 4y > 6 \end{cases}$. Hỏi đây có phải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không? Khi cho y = 0, x có thể nhận các giá trị nguyên nào?

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x + 5y < 1 \\ 5x - 4y > 6 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bởi vì có 2 bất phương trình x + 5y < 1 và 5x – 4y > 6 là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Khi y = 0, hệ trở thành: $\begin{cases} x < 1 \\ 5x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \dfrac{6}{5} \end{cases}$ (vô lí)

Vậy không có giá trị nguyên nào của x thoả mãn để y = 0.

Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 80 \\ 2x + y \le 120 \end{cases}$

a) Tìm hai nghiệm của hệ trên.

b) Cho F (x; y) = 2x + 2y. Tìm giá trị lớn nhất của F (x; y).

Hướng dẫn giải

a) Chọn (x; y) = (1; 1).

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình x ≥ 0 ta được 1 ≥ 0 là mệnh đề đúng. Do đó cặp (1; 1) là nghiệm của bất phương trình x ≥ 0.

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình y ≥ 0 ta được 1 ≥ 0 là mệnh đề đúng. Do đó cặp (1; 1) là nghiệm của bất phương trình y ≥ 0.

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình $x + y \le 80$ ta được $1 + 1 = 2 \le 80$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp (1; 1) là nghiệm của bất phương trình $x + y \le 80$.
Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình $2x + y \le 120$ ta được $2.\ 1 + 1 = 3 \le 120$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp (1; 1) là nghiệm của bất phương trình $2x + y \le 120$.

Vậy (x; y) = (1; 1) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 80 \\ 2x + y \le 120 \end{cases}$.

Tương tự ta chọn được (x; y) = (2; 2) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 80 \\ 2x + y \le 120 \end{cases}$.

Vậy hai cặp số (1; 1), (2; 2) là nghiệm của hệ bất phương trình.

b)

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \ge 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \ge 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả trục Oy) nằm bên phải trục Oy.

- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \ge 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox (kể cả trục Ox) nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \le 80$:

+ Vẽ đường thẳng d_1: x + y = 80.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 0 = 0 \le 80$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + y \le 80$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 80$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1) chứa gốc tọa độ O.

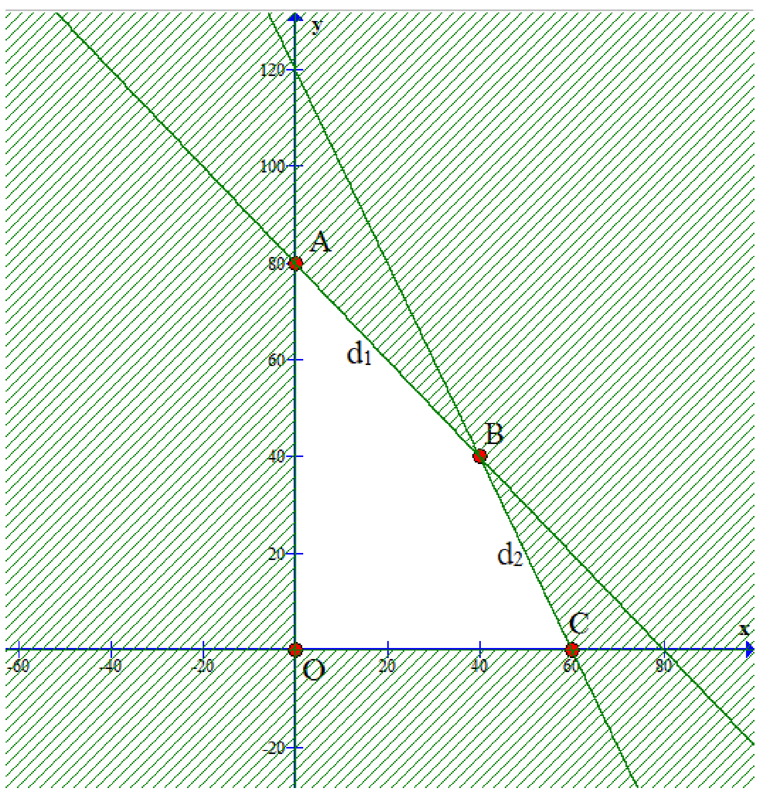
- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 120$:

+ Vẽ đường thẳng d_2: $2x + y = 120$.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $2. 0 + 0 = 0 \leq 120$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 120$.

Do đó, miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y \leq 120$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2) chứa gốc tọa độ O.

Từ đó ta có miền nghiệm không bị gạch là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác OABC với:

O(0; 0), A(0; 80), B(40; 40), C(60; 0).

Tại O(0; 0): F = 2.0 + 2.0 = 0;

Tại A(0; 80): F = 2.0 + 2.80 = 160;

Tại B(40; 40): F = 2.40 + 2.40 = 160;

Tại C(60; 0): F = 2.60 + 2.0 = 120;

Vậy giá trị lớn nhất của F (x; y) là 160 khi (x; y) = (0; 80) hoặc (x; y) = (40, 40).

Bài 4. Bác An cần phải làm nến trong vòng không quá 8 giờ để bán. Nến loại A cần 30 phút để làm xong một cây, nến loại B cần 1 giờ để làm xong một cây. Gọi x, y lần lượt là số nến loại A, B bác An sẽ làm được. Lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x và y và biểu diễn miền nghiệm của hệ đó. Tìm số nến nhiều nhất mà bác An có thể làm được.

Hướng dẫn giải

Số giờ bác An làm xong x cây nến loại A là: 0,5x (giờ).

Số giờ bác An làm xong y cây nến loại B là: y (giờ).

Tổng số giờ để bác An làm x nến loại A và y nến loại B là: 0,5x + y (giờ)

Do bác An cần phải làm nến trong vòng không quá 8 giờ nên $0,5x + y \le 8$.

Số nến bạn An làm luôn không âm nên $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 0,5x + y \le 8 \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \ge 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả trục Oy) nằm bên phải trục Oy.

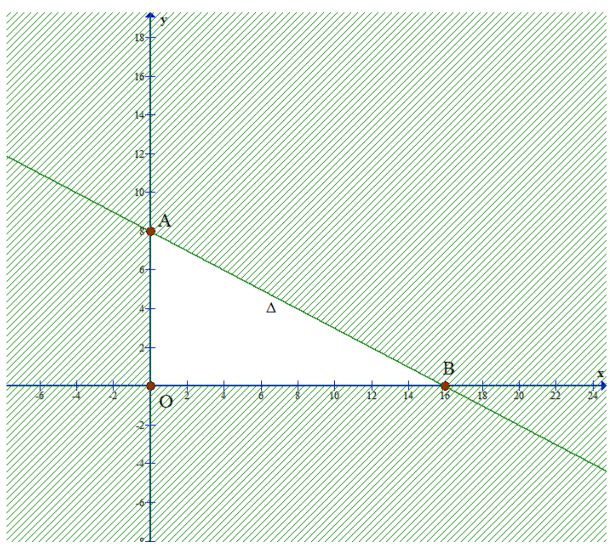
- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox (kể cả trục Ox) nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $0,5x + y \leq 8$:

+ Vẽ đường thẳng Δ: $0,5x + y = 8$.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0,5. 0 + 0 = 0 \leq 8$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $0,5x + y \leq 8$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $0,5x + y \leq 8$ là nửa mặt phẳng bờ Δ (kể cả bờ Δ) chứa gốc tọa độ O.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác OAB với: O(0; 0), A(0; 8), B(16; 0).

Số nến bác An làm được là: F (x; y) = x + y.

Tại O(0; 0): F = 0 + 0 = 0;

Tại A(0; 8): F = 0 + 8 = 8;

Tại B(16; 0): F = 16 + 0 = 16;

Do đó giá trị lớn nhất của F(x; y) là 16 khi x = 16 và y = 0.

Vậy bác An làm được nhiều nhất 16 cây nến khi bác làm 16 cây nến loại A và không làm cây nến loại B.