Công thức khai triển nhị thức Niu – tơn

1. Tổng hợp lý thuyết

a) Định nghĩa:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

b) Nhận xét:

Trong khai triển Niu - tơn $(a + b)^n$ có các tính chất sau

- Gồm có n + 1 số hạng
- Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n
- Các hệ số có tính đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Quan hệ giữa hai hệ số liên tiếp: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
- Số hạng thứ k + 1 của khai triển: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Ví dụ: Số hạng thứ nhất $T_1 = T_{0+1} = C_n^0 a^n$, số hạng thứ k: $T_k = T_{(k-1)+1} = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$

c) Hệ quả:

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + \ldots + x^n C_n^n$

Từ khai triển này ta có các kết quả sau

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

2. Công thức tính

Công thức khai triển nhị thức Niu – tơn:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Khai triển $(1 – 3x)^6$ thành tổng các đơn thức.

Lời giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Niu – tơn:

$(1 – 3x)^6$

$$= C_6^0.1^6 + C_6^1.1^5(-3x)^1 + C_6^2.1^4(-3x)^2 + C_6^3.1^3(-3x)^3 + C_6^4.1^2(-3x)^4 + C_6^5.1^1(-3x)^5 + C_6^6(-3$$

$= 1 – 18x + 135x^2 – 540x^3 + 1215x^4 – 1458x^5 + 729x^6$.

Ví dụ 2: Khai triển $(x + 2y)^5$ thành tổng các đơn thức.

Lời giải

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Niu – tơn:

$(x + 2y)^5$

$= C_5^0x^5 + C_5^1x^4(2y) + C_5^2x^3(2y)^2 + C_5^3x^2(2y)^3 + C_5^4x(2y)^4 + C_5^5(2y)^5$

$= x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$.