

## Bài 2. Hàm số bậc hai. Đồ thị hàm số bậc hai và ứng dụng

### A. Lý thuyết

#### 1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng  $y = ax^2 + bx + c$ , trong đó  $a, b, c$  là những hằng số và  $a \neq 0$ . Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

#### Ví dụ:

- Hàm số  $y = 2x^2 + 3x - 2$  là hàm số bậc hai có hệ số của  $x^2$  bằng 2, hệ số của  $x$  bằng 3 và hệ số tự do bằng  $-2$ .
- Hàm số  $y = 2x - 3$  không phải là hàm số bậc hai do hệ số của  $x^2$  ở đây bằng 0.

#### 2. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$  và trục đối xứng là đường thẳng  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Chú ý: Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), ta có:  $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Để vẽ đồ thị hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) ta thực hiện các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ đỉnh:  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ;

Bước 2: Vẽ trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a}$ ;

Bước 3: Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ  $(0; c)$ ) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ  $(0; c)$  qua trục

đối xứng  $x = -\frac{b}{2a}$

Bước 4: Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số.

**Ví dụ:** Vẽ đồ thị hàm số bậc hai  $y = x^2 - 2x - 3$

### Hướng dẫn giải

– Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

– Ta có:  $a = 1$ ;  $b = -2$ ;  $c = -3$ ;  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$

– Toạ độ đỉnh  $I = \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left( \frac{2}{2.1}; \frac{-16}{4.1} \right) = (1; -4)$

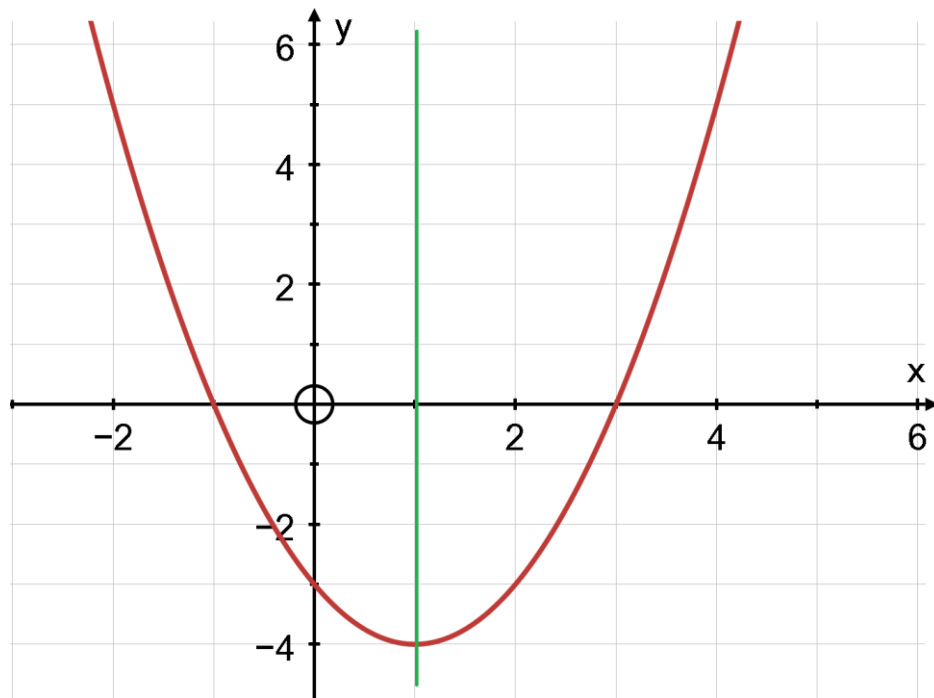
– Trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a} = 1$

– Giao điểm của parabol với trục Oy là  $A(0; -3)$

– Giao điểm của parabol với trục Ox là  $B(-1; 0); (3; 0)$

– Điểm đối xứng với điểm A qua trục đối xứng  $x = 1$  là  $D(2; -3)$

Vẽ parabol qua các điểm trên:



### Chú ý:

Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

– Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ ; đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ .

– Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ ; nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ .

Bảng biến thiên:

$$a > 0$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y$	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$$a < 0$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y$	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

## B. Bài tập tự luyện

### B.1 Bài tập tự luận

**Bài 1.** Xác định parabol  $y = ax^2 + bx + 4$  trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm  $M(1; 12)$  và  $N(-3; 4)$ ;

b) Có đỉnh là  $I(-3; -5)$ .

#### Hướng dẫn giải

a) Thay  $x = 1$ ;  $y = 12$  vào phương trình  $y = ax^2 + bx + 4$  ta được:

$$12 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4 = a + b = 8 \quad (1)$$

Thay  $x = -3$ ;  $y = 4$  vào phương trình  $y = ax^2 + bx + 4$  ta được:

$$4 = a \cdot (-3)^2 + (-3) \cdot b + 4 = 9a - 3b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $\begin{cases} a + b = 8 \\ 9a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$ . Như vậy  $y = 2x^2 + 6x + 4$

b) Ta có: Tọa độ đỉnh  $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-3; -5)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot a \cdot 4 = b^2 - 16a$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ -\frac{b^2 - 16a}{4a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 6a = 0 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6b - 36a = 0 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow b(b - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}. \text{ Như vậy trường } a = 0; b = 0 \text{ không thoả mãn, ta chọn được:}$$

$$a = 1; b = 6 \Rightarrow \text{phương trình } y = x^2 + 6x + 4.$$

**Bài 2.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a)  $y = 2x^2 - 6x + 4$ ;

b)  $y = -3x^2 - 6x - 3$ .

### Hướng dẫn giải

a)

– Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

– Ta có:  $a = 2$ ;  $b = -6$ ;  $c = 4$ ;  $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.2.4 = 4$

– Toạ độ đỉnh  $I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{6}{2.2}; \frac{-4}{4.2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

– Trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$

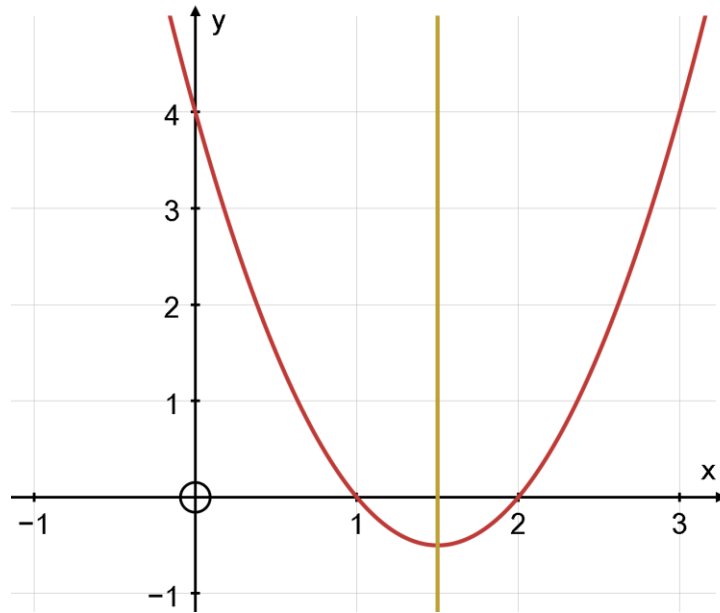
– Giao điểm của parabol với trục Oy là  $A(0; 4)$

– Giao điểm của parabol với trục Ox là  $B(1; 0); (2; 0)$

– Chọn một điểm thuộc đồ thị cho  $x = -1$  thay vào  $y = 2x^2 - 6x + 4$  ta được điểm

$D(-1; 12)$

Vẽ parabol qua các điểm trên:



b)

– Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

– Ta có:  $a = -3$ ;  $b = -6$ ;  $c = -3$ ;  $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.(-3).(-3) = 0$

– Toạ độ đỉnh  $I = \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left( \frac{6}{2.(-3)}; \frac{0}{4.(-3)} \right) = (-1; 0)$

– Trục đối xứng  $x = -\frac{b}{2a} = -1$

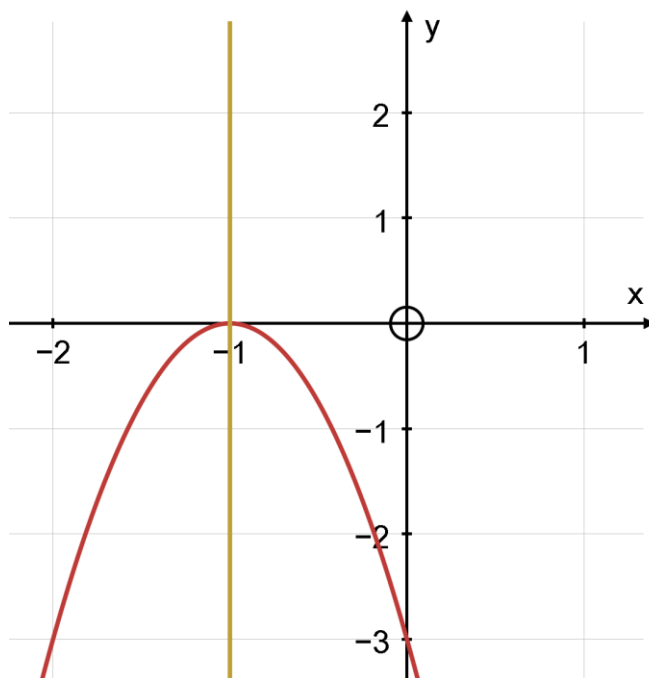
– Giao điểm của parabol với trục Oy là  $A(0; -3)$

– Giao điểm của parabol với trục Ox là  $B(-1; 0)$

– Chọn một điểm thuộc đồ thị cho  $x = 1$  thay vào  $y = -3x^2 - 6x - 3$  ta được điểm  $D(1; -12)$

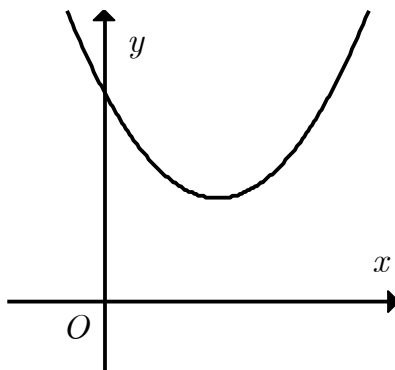
– Chọn một điểm thuộc đồ thị cho  $x = -2$  thay vào  $y = -3x^2 - 6x - 3$  ta được điểm  $D(-2; -3)$

Vẽ parabol qua các điểm trên:



## B.2 Bài tập trắc nghiệm

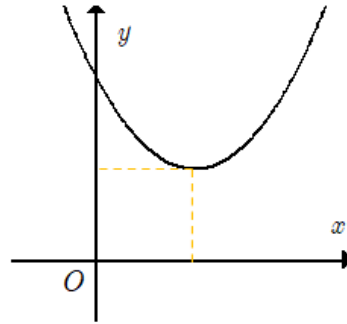
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình sau. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A.  $a > 0, b < 0, c < 0$ ;
- B.  $a > 0, b < 0, c > 0$ ;
- C.  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;
- D.  $a < 0, b < 0, c > 0$ .

### Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

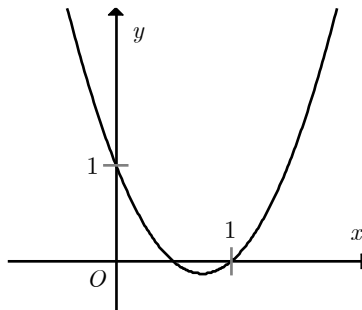


Bề lõm hướng lên nên  $a > 0$ .

Hoành độ đỉnh parabol  $x = -\frac{b}{2a} > 0$  nên  $b < 0$ .

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên  $c > 0$ .

**Câu 2.** Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào trong các phương án dưới đây?



A.  $y = -x^2 + 3x - 1$ ;

B.  $y = -2x^2 + 3x - 1$ ;

C.  $y = 2x^2 - 3x + 1$ ;

D.  $y = x^2 - 3x + 1$ .



### Hướng dẫn giải

#### Đáp án đúng là: C

Parabol có bề lõm hướng lên nên  $a > 0$ . Loại đáp án A, B.

Parabol cắt trục hoành tại điểm  $(1; 0)$ , thay  $x = 1; y = 0$  vào các hàm số ở đáp án C và D:

- Thay  $x = 1; y = 0$  vào  $y = 2x^2 - 3x + 1$ :

$0 = 2.1^2 - 3.1 + 1$  (luôn đúng), như vậy điểm  $(1; 0)$  thuộc đồ thị hàm số ở đáp án C.

- Thay  $x = 1; y = 0$  vào  $y = x^2 - 3x + 1$ :

$0 = 1^2 - 3.1 + 1$  (vô lí), như vậy điểm  $(1; 0)$  không thuộc đồ thị hàm số ở đáp án D.

**Câu 3.** Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

<b>x</b>	$-\infty$	<b>2</b>	$+\infty$
<b>y</b>	$+\infty$	$-5$	$+\infty$

A.  $y = -x^2 + 4x - 9$ ;

B.  $y = x^2 - 4x - 1$ ;

C.  $y = -x^2 + 4x$ ;

D.  $y = x^2 - 4x - 5$ .

### Hướng dẫn giải

#### Đáp án đúng là: B

Bảng biến thiên có bề lõm hướng lên nên  $a > 0$ . Do đó, loại đáp án A và C.

Đỉnh của parabol có tọa độ là  $(2; -5)$ . Xét các đáp án còn lại, ta có:

- Thay  $x = 2; y = -5$  vào phương trình  $y = x^2 - 4x - 1$ :

$-5 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 1 = -5$ . Như vậy điểm  $(2; -5)$  thuộc đồ thị của hàm số.

- Thay  $x = 2; y = -5$  vào phương trình  $y = x^2 - 4x - 5$ :

$-5 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$  (Vô lí). Như vậy  $(2; -5)$  không thuộc đồ thị hàm số.