

Bài 12. Số gần đúng và sai số

Mở đầu trang 73 SGK Toán 10 tập 1: Đỉnh Everest được mệnh danh là “nóc nhà của thế giới”, bởi đây là đỉnh núi cao nhất trên Trái Đất so với mực nước biển. Có rất nhiều con số khác nhau đã từng được công bố về chiều cao của đỉnh Everest:

8 848 m; 8 848,13m; 8 844,43m; 8 850m; ...

Vì sao lại có nhiều kết quả khác nhau như vậy và đâu là con số chính xác? Chúng ta sẽ cùng tìm câu trả lời trong bài học này, sau khi tìm hiểu về số gần đúng và sai số.

Lời giải:

Khi đo độ cao đỉnh núi Everest người ta không thể đo trực tiếp một cách chính xác mà phải thông qua tính toán.

Mỗi vị trí quan sát hoặc trong tính toán, có những con số không thể lấy chính xác do đó kết quả thu được cũng không giống nhau.

Ngoài ra có thể người ta đã làm tròn kết quả để được một con số gọn mà chính xác nhất có thể, nên các kết quả cũng khác nhau.

Qua nhiều lần đo, người ta đưa ra được chiều cao của đỉnh Everest là 8 848,86 m.

Hoạt động 1 trang 74 SGK Toán 10 tập 1: Ngày 8–12–2020, Trung Quốc và Nepal ra thông cáo chung khẳng định chiều cao mới đo được của đỉnh núi cao nhất thế giới Everest là 8 848,86m.

Trong các số được đưa ra ở tình huống mở đầu, số nào gần với số được công bố ở trên?

Lời giải:

Ta có:

$$|8\,848,86 - 8\,848| = 0,86;$$

$$|8\,848,86 - 8\,848,13| = 0,73;$$

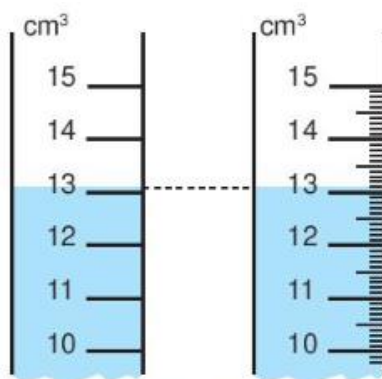
$$|8\,848,86 - 8\,844,43| = 4,43;$$

$$|8\,848,86 - 8\,850| = 1,14.$$

Trong các số 0,86; 0,73; 4,43; 1,14 thì số 0,73 là số nhỏ nhất.

Do đó trong các số 8 848 m; 8 848,13 m; 8 844,43 m; 8 850 m thì số 8 848,13 m là số gần nhất với số được công bố ngày 8–12–2020.

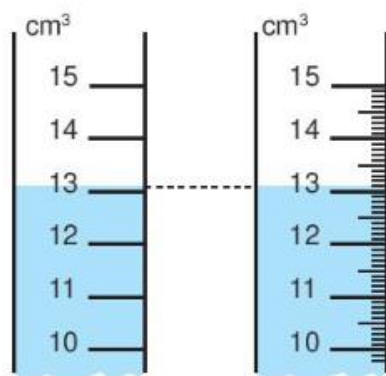
Hoạt động 2 trang 74 SGK Toán 10 tập 1: Trang và Hòa thực hiện đo thể tích một cốc nước bằng hai ống đong có vạch chia được kết quả như Hình 5.1. Hãy cho biết số đo thể tích trên mỗi ống.



Hình 5.1

Lời giải

Giả sử ống đong nước thứ nhất là Trang đo và ống đong nước thứ hai là Hòa đo.



Hình 5.1

Khi đó ống thứ nhất đo được là 13 cm^3 , ống thứ hai là $13,1 \text{ cm}^3$.

Câu hỏi trang 74 SGK Toán 10 tập 1: Hãy lấy một ví dụ khác về số gần đúng.

Lời giải:

Ta không thể biết chính xác giá trị của $\sqrt{5}$.

Ta có: $\sqrt{5} \approx 2,236$.

Do đó số gần đúng của $\sqrt{5}$ là 2,236.

Luyện tập 1 trang 74 SGK Toán 10 tập 1: Gọi P là chu vi của đường tròn bán kính 1 cm. Hãy tìm một giá trị gần đúng của P .

Lời giải:

Chu vi đường tròn bán kính 1 cm là:

$$P = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ (cm)}$$

Bấm máy tính ta thấy $2\pi \approx 6,283$.

Vậy giá trị gần đúng của P là 6,283 cm.

Hoạt động 3 trang 74 SGK Toán 10 tập 1: Trong HĐ2, Hòa dùng kính lúp để quan sát mực nước trên ống đo thứ hai được hình ảnh như Hình 5.2. Kí hiệu \bar{a} (cm^3) là số đo thể tích của nước.

Quan sát hình vẽ để so sánh $|13 - \bar{a}|$ và $|13,1 - \bar{a}|$ rồi cho biết trong hai số đo thể tích 13 cm^3 và $13,1 \text{ cm}^3$, số đo nào gần với thể tích của cốc nước hơn.



Lời giải:

Quan sát hình vẽ trên, ta thấy số 13,1 gần \bar{a} hơn số 13.

Do đó $13,1 \text{ cm}^3$ gần với thể tích của cốc nước hơn.

Luyện tập 2 trang 75 SGK Toán 10 tập 1: Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 3 \text{ }\mu\text{m}$. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

Lời giải:

Gọi \bar{a} là đường kính thực của nhân tế bào.

Vì phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 3 \text{ }\mu\text{m}$.

Suy ra: $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$; $d = 0,3 \text{ }\mu\text{m}$.

Tuy không biết \bar{a} nhưng ta xem đường kính của nhân tế bào là $5\mu\text{m}$ nên 5 là số gần đúng cho \bar{a} . Độ chính xác là $0,3\mu\text{m}$.

Do đó, giá trị của \bar{a} nằm trong đoạn: $[5 - 0,3; 5 + 0,3]$ hay $[4,7; 5,3] \text{ }\mu\text{m}$.

Hoạt động 4 trang 75 SGK Toán 10 tập 1: Công ty (trong Ví dụ 2) cũng sử dụng dây chuyền B để đóng gạo với khối lượng chính xác là 20 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là: $20 \pm 0,5$ (kg).

Khẳng định “Dây chuyền A tốt hơn dây chuyền B” là đúng hay sai?

Lời giải:

Công ty sử dụng dây chuyền A đóng bao gạo với khối lượng mỗi bao là 5 kg và sai số tuyệt đối là 0,2 kg.

Công ty sử dụng dây chuyền B đóng bao gạo với khối lượng mỗi bao là 20 kg và sai số tuyệt đối là 0,5 kg.

Mặc dù độ chính xác của khối lượng bao gạo đóng bằng dây chuyền A nhỏ hơn nhưng do bao gạo đóng bằng dây chuyền B nặng hơn nhiều nên ta không dựa vào sai số tuyệt đối để so sánh.

Do đó câu hỏi này ta chưa thể trả lời chính xác được nếu chỉ dựa vào các kiến thức đã học trước đó.

Luyện tập 3 trang 76 SGK Toán 10 tập 1: Đánh giá sai số tương đối của khối lượng bao gạo được đóng gói theo hai dây chuyền A, B ở Ví dụ 2 và HĐ4. Dựa trên tiêu chí này, dây chuyền nào tốt hơn?

Lời giải:

Xét dây chuyền A, ta có: $a = 5$ và $d = 0,2$.

Khi đó, sai số tương đối của dây chuyền A là:

$$S_1 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,2}{|5|} = 0,04 = 4\%.$$

Đối với dây chuyền B, ta có: $a = 20$ và $d = 0,5$.

Khi đó, sai số tương đối của dây chuyền B là:

$$S_2 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,5}{|20|} = 0,025 = 2,5\%.$$

Ta thấy $2,5\% < 4\%$ nên chất lượng của dây chuyền B tốt hơn.

Vậy chất lượng của dây chuyền B tốt hơn.

Luyện tập 4 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $11\,251\,900 \pm 300$;

b) $18,2857 \pm 0,01$.

Lời giải:

a) Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 300$) nên hàng làm tròn là hàng nghìn. Chữ số hàng nghìn của số $11\,251\,900$ là 1.

Ta thấy bên phải chữ số hàng nghìn 1 là chữ số $9 > 5$ nên ta tăng chữ số hàng nghìn thêm 1 đơn vị là 2 đồng thời các chữ số từ hàng trăm trở đi thay bằng các chữ số 0.

Vậy số quy tròn của $11\,251\,900$ là $11\,252\,000$

b) Vì độ chính xác đến hàng phần trăm ($d = 0,01$) nên hàng làm tròn là hàng phần mười. Chữ số hàng phần mười của số $18,2857$ là 2.

Vì số bên phải chữ số 2 là chữ số $8 > 5$ nên ta tăng chữ số hàng phần mười thêm 1 đơn vị là 3 đồng thời bỏ đi các số từ hàng phần trăm trở đi.

Vậy số quy tròn của $18,2857$ là $18,3$.

Vận dụng trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Các nhà vật lí sử dụng hai phương pháp khác nhau để đo tuổi của vũ trụ (đơn vị tỉ năm) lần lượt cho hai kết quả $13,807 \pm 0,026$ và $13,799 \pm 0,021$.

Hãy đánh giá sai số tương đối của mỗi phương pháp. Căn cứ trên tiêu chí này, phương pháp nào cho kết quả chính xác hơn?

Lời giải:

Xét phương pháp 1, ta có: $a = 13,807$ và $d = 0,026$.

Khi đó, sai số tương đối của phương pháp 1 là:

$$S_1 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,026}{|13,807|} \approx 0,0019 = 0,19\%.$$

Xét phương pháp 2, ta có: $a = 13,799$ và $d = 0,021$.

Khi đó, sai số tương đối của phương pháp 2 là:

$$S_2 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,021}{|13,799|} \approx 0,0015 = 0,15\%.$$

Vì $0,15\% < 0,19\%$ nên phương pháp 2 cho kết quả chính xác hơn.

Vậy phương pháp 2 cho kết quả chính xác hơn.

Bài 5.1 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Trong các số sau, những số nào là số gần đúng?

- a) Cân một túi gạo cho kết quả là 10,2 kg.
- b) Bán kính Trái Đất là 6 371 km.
- c) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày.

Lời giải:

a) Mỗi loại cân có độ chia khác nhau nên khi đo hiển nhiên sẽ có sai số và ta không thể cân chính xác được khối lượng của túi gạo.

Vậy khối lượng túi gạo là 10,2 kg là số gần đúng.

b) Vì bề mặt Trái Đất không bằng phẳng nên không thể xác định được chính xác tâm của Trái Đất.

Do đó không thể xác định được chính xác bán kính của Trái Đất.

Vậy bán kính Trái Đất là 6 371 km là số gần đúng.

c) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày, 5 giờ, 59 phút và 16 giây.

Vậy Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày là số gần đúng.

Bài 5.2 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Giải thích kết quả: “Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là $1\,235 \pm 5$ m” và thực hiện làm tròn số gần đúng.

Lời giải:

“Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là $1\,235 \pm 5$ m” tức là độ cao gần đúng của ngọn núi là $a = 1\,235$ m và độ chính xác là $d = 5$.

Do đó độ cao của một ngọn núi nằm trong khoảng $[1\,235 - 5; 1\,235 + 5]$ hay $[1\,230; 1\,240]$.

Làm tròn số gần đúng $a = 1\,235$.

Vì độ chính xác đến hàng đơn vị ($d = 5$) nên ta làm tròn a đến hàng chục theo quy tắc làm tròn. Số quy tròn của a là 1 240.

Bài 5.3 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng cho $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác 0,0005.

Lời giải:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có: $\sqrt[3]{7} \approx 1,912931183...$

Độ chính xác $d = 0,0005$ nên ta có hàng làm tròn là hàng phần nghìn.

Chữ số ở hàng phần nghìn là số 2, chữ số bên phải là chữ số $9 > 5$ nên ta tăng chữ số hàng phần nghìn thêm 1 đơn vị là 3 đồng thời bỏ các chữ số từ hàng phần chục nghìn trở đi.

Do đó, số quy tròn của 1,912931183 là 1,913.

Vậy số gần đúng của $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác 0,0005 là 1,913.

Bài 5.4 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Các nhà vật lí sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

$$67,31 \pm 0,96;$$

$$67,90 \pm 0,55;$$

$$67,74 \pm 0,46.$$

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

Lời giải:

· Phương pháp 1: $67,31 \pm 0,96$.

Ta có: $a = 67,31$ và $d = 0,96$.

Khi đó, sai số tương đối của phương pháp 1 là:

$$S_1 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,96}{|67,31|} \approx 0,0143 = 1,43\%.$$

· Phương pháp 2: $67,9 \pm 0,55$.

Ta có: $a = 67,90$ và $d = 0,55$.

Khi đó, sai số tương đối của phương pháp 2 là:

$$S_2 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,55}{|67,90|} \approx 0,0081 = 0,81\%.$$

· Phương pháp 3: $67,74 \pm 0,46$.

Ta có: $a = 67,74$ và $d = 0,46$.

Khi đó, sai số tương đối của phương pháp 3 là:

$$S_3 \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,46}{|67,74|} \approx 0,0068 = 0,68\%.$$

Vì $0,68 < 0,81 < 1,43$ nên sai số tương đối của phương pháp 3 là nhỏ nhất. Do đó phương pháp 3 cho kết quả chính xác nhất.

Vậy phương pháp 3 cho kết quả chính xác nhất theo sai số tương đối.

Bài 5.5 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: An và Bình cùng tính chu vi của hình tròn bán kính 2 cm với hai kết quả như sau:

Kết quả của An: $S_1 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56$ cm;

Kết quả của Bình: $S_2 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,1 \cdot 2 = 12,4$ cm.

Hỏi:

a) Hai giá trị tính được có phải là các số gần đúng không?

b) Giá trị nào chính xác hơn?

Lời giải

a) Vì công thức chu vi đường tròn là $2\pi R$ với R là độ dài bán kính, trong đó π là số không thể tính chính xác được mà chỉ có thể lấy số gần đúng nên hai giá trị tính được là số gần đúng.

Vậy giá trị tính được của An và Bình là các số gần đúng.

b) Kết quả của An: $S_1 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56$ (cm);

Kết quả của Bình: $S_2 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,1 \cdot 2 = 12,4$ (cm).

Ta thấy $3,14 > 3,1$ hay $S_1 > S_2$.

Do đó $|2\pi R - S_1| < |2\pi R - S_2|$.

Vậy giá trị của An chính xác hơn.

Bài 5.6 trang 77 SGK Toán 10 tập 1: Làm tròn số 8 316,4 đến hàng chục và 9,754 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Lời giải:

* Làm tròn số 8 316,4 đến hàng chục:

Chữ số hàng chục của số 8 316,4 là 1, chữ số bên phải chữ số 1 là 6.

Mà $6 > 5$ nên ta tăng chữ số hàng chục thêm 1 đơn vị là 2 đồng thời đổi chữ số hàng đơn vị là chữ số 0.

Khi đó, làm tròn số 8 316,4 đến hàng chục là 8 320.

Do đó số quy tròn là: 8 320.

Sai số tuyệt đối: $|8320 - 8316,4| = 3,6$.

* Làm tròn số 9,754 đến hàng phần trăm:

Chữ số hàng phần trăm của số 9,754 là 5, chữ số bên phải chữ số 5 là 4.

Mà $4 < 5$ nên ta giữ nguyên chữ số hàng phần trăm là 5 và bỏ đi chữ số bên phải.

Khi đó, làm tròn số 9,754 đến hàng phần trăm là 9,75.

Do đó số quy tròn là: 9,75.

Sai số tuyệt đối: $|9,754 - 9,75| = 0,004$.