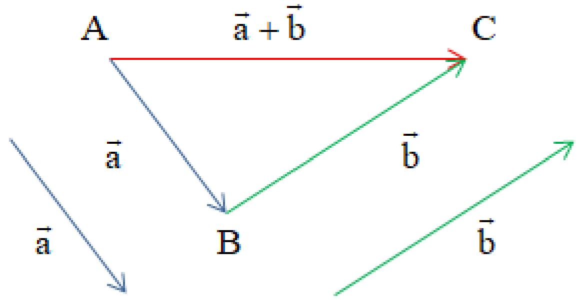
Bài 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Tổng của hai vectơ



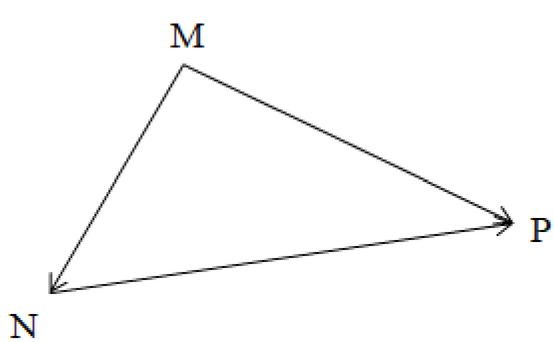
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tùy ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Phép toán tìm tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

Quy tắc ba điểm

Với ba điểm M, N, P, ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.



Chú ý: Khi cộng vectơ theo quy tắc ba điểm, điểm cuối của vectơ thứ nhất phải là điểm đầu của vectơ thứ hai.

Ví dụ: Cho các điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Thực hiện phép cộng các vectơ:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

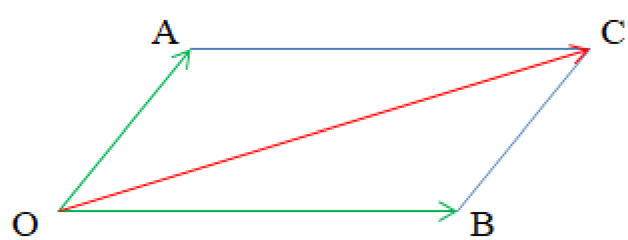
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

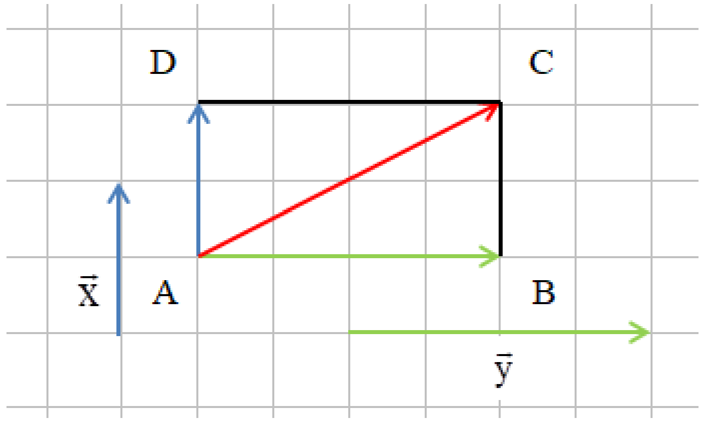
$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}$.

Quy tắc hình bình hành

Nếu OACB là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.



Ví dụ: Cho hình chữ nhật MNPQ và hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ như hình bên. Tính tổng của hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.



Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{AD}, \vec{y} = \overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AC}$.

2. Tính chất của phép cộng các vectơ

Phép cộng vectơ có các tính chất sau:

+ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

+ Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

+ Với mọi $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ với $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

Ví dụ: Cho tứ giác MNPQ. Thực hiện các phép cộng vectơ sau:

a) $\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}\right)+\overrightarrow{NQ}$.

b) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{PM}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất giao hoán và tính chất kết hợp của phép cộng vectơ, ta được:

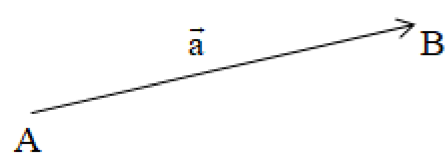
a) $\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}\right)+\overrightarrow{NQ}=\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}\right)+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}$.

b) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{PM}=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}\right)+\left(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}\right)=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}$.

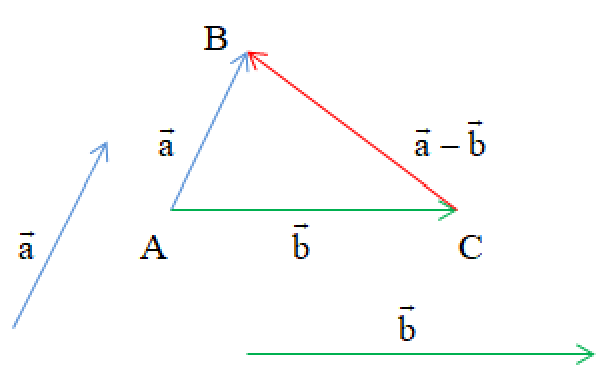
Chú ý: Cho vectơ tùy ý $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Tổng hai vectơ đối nhau luôn bằng vectơ-không: $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.



3. Hiệu của hai vectơ



Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép toán tìm hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

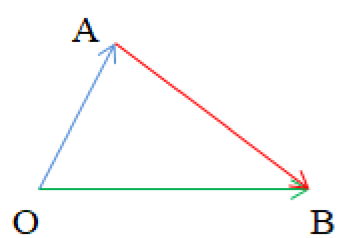
Ví dụ: Cho các điểm D, E, F, G phân biệt. Thực hiện các phép trừ vectơ sau: $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GF}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DE}+\left(-\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}$.

$\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GD}+\left(-\overrightarrow{GF}\right)=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{FD}$.

Chú ý: Cho ba điểm O, A, B, ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



Ví dụ: Cho hình vuông ABCD và một điểm M tùy ý. Thực hiện các phép trừ vectơ sau: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}; \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DB}$.

$\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

4. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

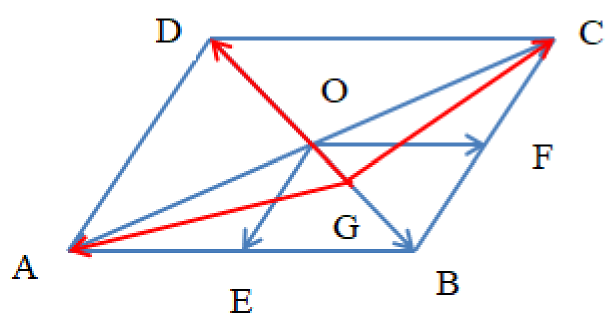
Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Hai điểm E, F lần lượt là trung điểm AB, BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì ABCD là hình bình hành tâm O nên O là trung điểm AC (tính chất hình bình hành).

Lại có E là trung điểm AB (gt)

Do đó OE là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra OE // BC và OE = $\frac{1}{2}$BC = BF (với F là trung điểm BC).

Khi đó ta có tứ giác OEBF là hình bình hành.

Áp dụng quy tắc hình bình hành cho OEBF, ta được: $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}$.

Vì ABCD là hình bình hành tâm O nên O là trung điểm AC và BD (tính chất hình bình hành).

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OD}+\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

$=\vec{0}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Theo quy tắc ba điểm, ta có: $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$=\vec{0}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}$.

Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$.

B. Bài tập tự luyện

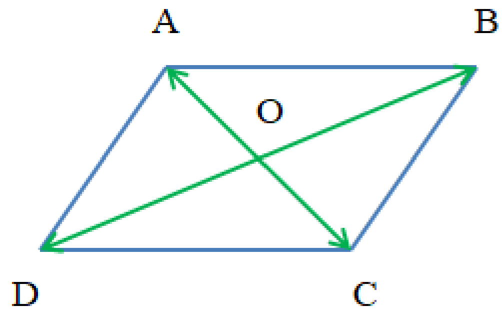
Bài 1. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì O là tâm của hình bình hành ABCD nên O là trung điểm của AC và BD (tính chất hình bình hành).

Do đó ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (1) và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (2).

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

b) Vì ABCD là hình bình hành nên BA // DC và BA = DC.

Mà $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}$ ngược hướng.

Do đó $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{DC}$.

Ta suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

c) Ta có O là trung điểm BD nên DO = OB.

Mà $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OB}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$.

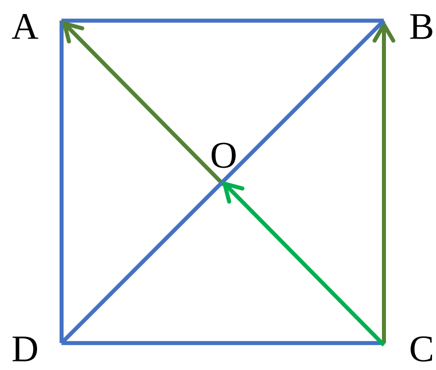
Ta có $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài các vectơ:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$.

b) Vì ABCD là hình vuông nên ta có BD = AC = $a\sqrt{2}$ và AD = CB.

Mà $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}$ ngược hướng.

Do đó $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$.

Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=OD$.

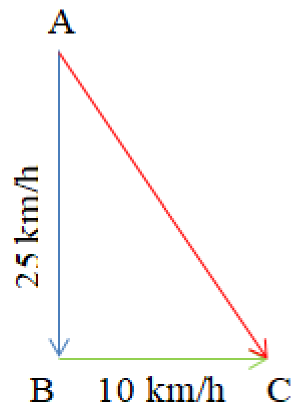
Vì O là tâm của hình vuông ABCD nên O là trung điểm BD.

Do đó OD = $\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. Một con thuyền trôi theo hướng nam vận tốc 25 km/h, dòng nước chảy theo hướng đông với vận tốc 10 km/h. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng trăm).

Hướng dẫn giải



Gọi A là vị trí con thuyền xuất phát.

Vận tốc của con thuyền được biểu diễn bởi $\overrightarrow{AB}$.

Vận tốc của dòng nước được biểu diễn bởi $\overrightarrow{BC}$.

Khi đó ta có vectơ tổng của hai vectơ nói trên là $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó độ lớn của vectơ cần tìm là: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Vì con thuyền trôi theo hướng nam và dòng nước chảy theo hướng đông.

Nên ta có AB ⊥ BC.

Ta có độ lớn vận tốc con thuyền là 25 km/h.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = AB = 25.

Ta có độ lớn vận tốc dòng nước là 10 km/h.

Suy ra $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ = BC = 10.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AC^2 = 25^2 + 10^2 = 725$.

$\Rightarrow AC = 5\sqrt{29} \approx 26{,}93$.

Vậy độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói đến trong bài xấp xỉ bằng 26,93 (km/h).