Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có các tính chất như sau:

Với mọi số thực x có: $|x| \geq 0$, $|x| \geq x, |x| \geq -x$

Với mọi số thực x và số thực a > 0 có:

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$

Với mọi số thực a, b có:

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

II. Các công thức.

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$, $|x| \geq x, |x| \geq -x$

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \;\; (a > 0)$

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a \;\; (a > 0)$

$\forall a, b \in \mathbb{R} :$

$|a| - |b| \leq |a + b|$ (Dấu bằng xảy ra khi $|a| \geq |b|$ và $a.b \leq 0$)

$|a| + |b| \geq |a + b|$ (Dấu bằng xảy ra khi $a.b \geq 0$)

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Chứng minh rằng $|x - 1| + |x - 2| \geq 1$ với mọi số thực x.

Lời giải:

Ta có: $|x - 2| = |-(x - 2)| = |2 - x|$

Mặt khác:

$|x - 1| + |2 - x| \geq |x - 1 + 2 - x|$

$\Leftrightarrow |x - 1| + |2 - x| \geq 1$

$\Leftrightarrow |x-1|+|x-2|\ge 1 \ \ \forall x\in \mathbb{R}$ (điều cần phải chứng minh)

Bài 2: Chứng minh rằng: $|a-b|+|c-b|\ge |a-c|$ với mọi số thực a, b, c.

Lời giải:

Ta có:

$|c-b|=|-(c-b)|=|b-c|$

Mặt khác:

$|a-b|+|b-c|\ge |a-b+b-c|$

$\Leftrightarrow |a-b|+|b-c|\ge |a-c|$

$\Leftrightarrow |a-b|+|c-b|\ge |a-c| \ \ \forall a,b,c\in \mathbb{R}$ (điều cần phải chứng minh).

Bài 3: Chứng minh rằng $x+|x|\ge 0$ với mọi số thực x.

Lời giải:

Ta có: $|x|\ge -x$

$\Rightarrow x+|x|\ge x+(-x)$

$\Leftrightarrow x+|x|\ge 0 \ \ \forall x\in \mathbb{R}$ (điều cần phải chứng minh).

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Chứng minh rằng: $|a|+|b|+|c|\ge |a+b+c|$ với mọi số thực a, b, c.

Bài 2: Cho $x\in [-3;7]$. Chứng minh rằng $|x-2|\le 5$.