

Các bài toán về phương trình bậc hai của hàm số lượng giác

1. Lý thuyết

Một số dạng phương trình bậc hai của một hàm số lượng giác

$$a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0, (a \neq 0)$$

$$a.\cos^2 x + b.\cos x + c = 0, (a \neq 0)$$

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0, (a \neq 0)$$

$$a.\cot^2 x + b.\cot x + c = 0, (a \neq 0)$$

2. Phương pháp giải:

Phương trình dạng	Điều kiện xác định	Cách làm	Điều kiện ẩn phụ (ẩn t)
$f(\sin x)$		Đặt $t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$f(\cos x)$		Đặt $t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$f(\tan x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	Đặt $t = \tan x$	
$f(\cot x)$	$x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	Đặt $t = \cot x$	

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

b) $5\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$

c) $\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0$

Lời giải

a) Đặt $t = \sin x$ với $-1 \leq t \leq 1$.

Ta được phương trình: $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 4t - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

b) Đặt $t = \cos x$ với $-1 \leq t \leq 1$

Ta được phương trình: $5t^2 - 6t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 5t - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (5t - 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{1}{5} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = k2\pi; x = \pm \arccos \frac{1}{5} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

c) Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \tan x$. Ta được phương trình: $t^2 + 2t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t - t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 3)(t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -3 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan(-3) + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (Thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-3) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

$$\text{a) } \sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$$

$$b) \cos 2x - 4 \sin x = 3$$

$$c) \cos 2x - 3 \cos x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

Lời giải

$$a) \sin^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x + 2 \cos x + 3 = 0$$

Đặt $t = \cos x$ với $-1 \leq t \leq 1$

Ta được phương trình: $-t^2 + 2t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -(t+1)(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

Khi đó $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

$$b) \cos 2x - 4 \sin x = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 4 \sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x - 4 \sin x - 2 = 0$$

Đặt $t = \sin x$ với $-1 \leq t \leq 1$

Ta được phương trình: $-2t^2 - 4t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow -2(t+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Khi đó: $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

$$c) \cos 2x - 3 \cos x + 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 4 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Đặt $t = \cos x$ với $-1 \leq t \leq 1$

Ta được phương trình: $2t^2 - t + 1 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4.2.1 = -7 < 0$. Do đó phương trình (*) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $\tan x + 5\cot x = 6$

b) $\frac{1}{\sin x} + 3\cot^2 x + 1 = 0$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Ta có: $\tan x + 5\cot x = 6 \Leftrightarrow \tan x + \frac{5}{\tan x} = 6$

Đặt $t = \tan x$. Ta được phương trình: $t + \frac{5}{t} = 6$ (Điều kiện: $t \neq 0$)

$$\Rightarrow t^2 + 5 = 6t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 5 + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan 5 + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

b) Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vì $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ nên $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

Thay vào phương trình ta có: $\frac{1}{\sin x} + 3\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0$$

Đặt $t = \frac{1}{\sin x}$ (Vì $-1 \leq \sin x \leq 1; \sin x \neq 0$ nên $t \geq 1$ hoặc $t \leq -1$)

$$\text{Ta được phương trình: } 3t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{2}{3} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{\sin x} = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Nghiệm của phương trình lượng giác: $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = \frac{\pi}{6}$ D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Câu 2. Các họ nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin x = 0$ là:

- A. $\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ B. $\frac{5\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$
C. $\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$ D. $-\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$

Câu 3. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2}$ B. $x = \frac{3\pi}{2}$ C. $x = \frac{5\pi}{6}$ D. $x = \frac{\pi}{6}$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Câu 5. Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\sin x = 1 - \cos^2 x$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$

B. $\{0; \pi\}$

C. $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$

D.

$\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$

Câu 6. Có bao nhiêu nghiệm của phương trình $\cos 4x + 3\sin 2x + 1 = 0$ thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 7. Phương trình $\sin^2 \frac{x}{3} - 2\cos \frac{x}{3} + 2 = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D.

$x = k6\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 8. Họ nghiệm của phương trình $3\cos 4x + 2\cos 2x - 5 = 0$ là:

A. $k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

B. $\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

C. $k\pi; k \in \mathbb{Z}$

D.

$-\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Câu 9. Phương trình $\tan^2 x + 5\tan x - 6 = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-6) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \arctan(-6) + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-6) + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

D. $x = k\pi; x = \arctan(-6) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Một họ nghiệm của phương trình $3\tan 2x + 2\cot 2x - 5 = 0$ là

A. $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

B. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

C. $-\frac{1}{2}\arctan \frac{2}{3} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

D. $\frac{1}{2}\arctan \frac{2}{3} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là :

A. 2

B. 1

C. 4

D. 3

Câu 12. Phương trình $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Câu 13. Các nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \tan x + \cot x - \sqrt{3} - 1 = 0$ là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k3\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k3\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1$ thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ là:

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 15. Họ nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ B. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	D	A	C	D	D	C	A	D	D	D	D	B	A