CHƯƠNG 3. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG.

Bài 8: Sự thống nhất giữa ba đường conic

Trang 59

Luyện tập 1 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Lập phương trình đường conic biết tâm sai bằng $\frac{2}{3}$, một tiêu điểm F(–2; 0) và đường chuẩn tương ứng Δ: $x + \frac{9}{2} = 0$.

Lời giải:

Điểm M(x; y) thuộc đường conic khi và chỉ khi

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{2}{3}\left|x + \frac{9}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = \frac{4}{9}\left(x + \frac{9}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2 + y^2\right] = 4\left(x + \frac{9}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2 + 4x + 4 + y^2\right) = 4\left(x^2 + 9x + \frac{81}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 9y^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 + 9y^2}{45} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Vậy phương trình conic đã cho có phương trình là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

Vận dụng 2 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Hãy cho biết quỹ đạo của từng vật thể trong bảng sau đây là parabol, elip hay hypebol.

Tên	Tâm sai của quỹ đạo	Ngày phát hiện
Sao chổi Halley	0,968	TCN
Sao chổi Hale-Bopp	0,995	23/07/1995
Sao chổi Hyakutake	0,999	31/01/1996
Sao chổi C/1980E1	1,058	11/02/1980
Oumuamua	1,201	19/10/2017

Lời giải:

Sao chổi Halley: elip;

Sao chổi Hale-Bopp: elip.

Sao chổi Hyakutake: elip.

Sao chổi C/1980E1: hypebol.

Oumuamua: hypebol.

Trang 60

Bài 3.17 trang 60 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình các đường chuẩn của các đường conic sau:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$;

c) $y^2 = 8x$.

Lời giải:

a) Elip có a = 5, b = 4 $\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$.

Các đường chuẩn của elip là: $\Delta_1: x=-\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x=-\frac{25}{3}$ và $\Delta_2: x=\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x=\frac{25}{3}$.

b) Hypebol có a = 3, b = 2 $\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Các đường chuẩn của hypebol là: $\Delta_1 : x = -\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{\sqrt{13}}$ và $\Delta_2 : x = \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{13}}$.

c) $2p = 8 \Rightarrow p = 4$. Đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = -2$.

Bài 3.18 trang 60 Chuyên đề Toán 10:

Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa hai tâm sai của các elip đó.

b) Chứng minh rằng với mối điểm M thuộc elip (E_2) thì trung điểm N của đoạn thẳng OM thuộc elip (E_1).

Lời giải:

a) (E_1) có $a_1 = 5$, $b_1 = 4 \Rightarrow c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = 3 \Rightarrow$ tâm sai $e_1 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{3}{5}$.

(E_2) có $a_2 = 10$, $b_2 = 8 \Rightarrow c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = 6 \Rightarrow$ tâm sai $e_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Vậy $e_1 = e_2$.

b) Giả sử M có toạ độ là (x; y). Khi đó N có toạ độ là $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$.

Vì M thuộc (E_2) nên $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4.25} + \frac{y^2}{4.16} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 . \frac{1}{25} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 . \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{25} + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{16} = 1.$$

Như vậy toạ độ của N thoả mãn phương trình của (E_1), do đó N thuộc (E_1).

Bài 3.19 trang 60 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình của đường conic có tâm sai bằng 1, tiêu điểm F(2; 0) và đường chuẩn là Δ: x + 2 = 0.

Lời giải:

Điểm M(x; y) thuộc đường conic khi và chỉ khi

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 8x.$$

Vậy phương trình conic đã cho là $y^2 = 8x$.

Bài 3.20 trang 60 Chuyên đề Toán 10:

Quỹ đạo chuyển động của sao chổi Halley là một elip, nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm, có tâm sai bằng 0,967.

a) Giải thích vì sao ta có thể coi bất kì hình vẽ elip nào với tâm sai bằng 0,967 là hình ảnh thu nhỏ của quỹ đạo sao chổi Halley.

b) Biết khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là khoảng 88.10^6 km, tính khoảng cách xa nhất (Theo: nssdc.gsfc. nasa.gov).

Lời giải:

a) Xét hai elip bất kì có cùng tâm sai:

(E_1): $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ với $e_1 = e_2$, tức là $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1^2} = \frac{a_2^2 + b_2^2}{a_2^2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{a_1^2} = \frac{b_2^2}{a_2^2} \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Xét phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{a_2}{a_1}$. Khi đó:

Với mỗi điểm M(x; y) thuộc (E_1), ta có tương ứng điểm M'(x'; y') = $\left(\frac{a_2}{a_1}x; \frac{a_2}{a_1}y\right)$.

Vì M(x; y) thuộc (E_1) nên $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a_2^2.\frac{x^2}{a_1^2}}{a_2^2} + \frac{b_2^2.\frac{y^2}{b_1^2}}{b_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2}{a_2^2} + \frac{\left(\frac{b_2}{b_1}y\right)^2}{b_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2}{a_2^2} + \frac{\left(\frac{a_2}{a_1}y\right)^2}{b_2^2} = 1$$

$\Rightarrow$ M' thuộc (E_2).

Vậy phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{a_2}{a_1}$ biến (E_1) thành (E_2).

Như vây, một elip có cùng tâm sai với một elip khác đều có thể coi là mô hình thu nhỏ của elip đó. Do đó ta có thể coi bất kì hình vẽ elip nào với tâm sai bằng 0,967 là hình ảnh thu nhỏ của quỹ đạo sao chổi Halley.

b) Chọn hệ trục toạ độ sao cho tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm F_1 của elip, đơn vị trên các trục là triệu kilômét.

Giả sử phương trình chính tắc của quỹ đạo elip này là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0).

Gọi toạ độ của sao chổi Halley là M(x; y).

Khoảng cách giữa sao chổi Halley và tâm Mặt Trời là MF_1.

$MF_1 = a + \frac{c}{a}x$, vì $-a \le x \le a$ nên $a - c \le MF_1 \le a + c$

$\Rightarrow$ Khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là a – c.

Theo đề bài, ta có:

– Khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là khoảng 88.10^6 km

$\Rightarrow$ a – c = 88.

– Elip có tâm sai bằng 0,967

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = 0,967 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{0,967} = \frac{a-c}{1-0,967} = \frac{88}{1-0,967} = \frac{8000}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8000}{3},\ c = \frac{7736}{3}.$$

$\Rightarrow$ Khoảng cách xa nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là:

$a + c = \frac{15736}{3} \approx$ 5245,3 (triệu kilômét).

Vậy khoảng cách xa nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là khoảng $5245,3.10^6$ kilômét.