Bài 6. Tích vô hướng của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

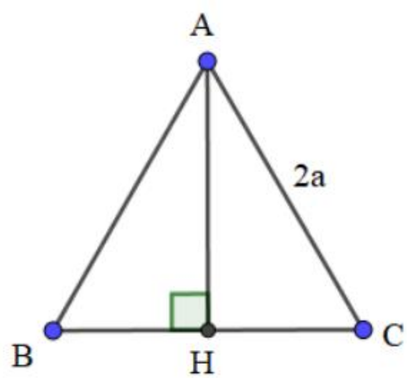
1.1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

– Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

– Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu là $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC đều cạnh 2a có đường cao AH. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải:



Vì tam giác ABC đều nên $BAC = 60°$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = BAC = 60°$

Ta có:

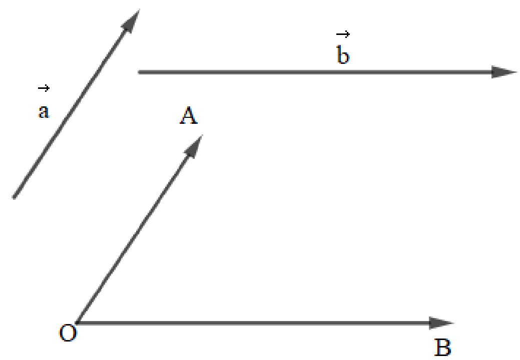
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos BAC = AB.AC.\cos 60° = 2a.2a.\frac{1}{2} = 2a^2$.

1.2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý

Định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (Hình vẽ).



+ Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

+ Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý:

+) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$

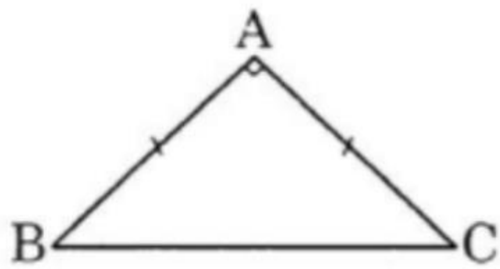
+) Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos 90° = 0$.

+) Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

+) Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ví dụ: Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải:



+ Vì tam giác ABC vuông cân, mà AB = AC

⇒ Tam giác ABC vuông cân tại A.

⇒ AB ⊥ AC

⇒ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos 90° = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.0 = 0$

+ Ta có: BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

⇒ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ = a. $a\sqrt{2}.\cos 135°$ = a. $a\sqrt{2}.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ = $-a^2$.

2. Tính chất

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

+) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

+) $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);

+) $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;

+) $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Trong đó, kí hiệu $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ: Cho 4 điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$

.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ (tính chất phân phối)

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (tính chất phân phối)

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (tính chất phân phối)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$= \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$ (tính chất giao hoán và kết hợp)

= 0

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}=0$ (đpcm).

3. Một số ứng dụng

3.1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét:

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: AB = $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

3.2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét:

+ Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

+ Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u}.\vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.

Ví dụ: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai vectơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Ta có:

$$\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}^2 = 2\left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}.\vec{b} - \left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 2.1^2 + 0 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

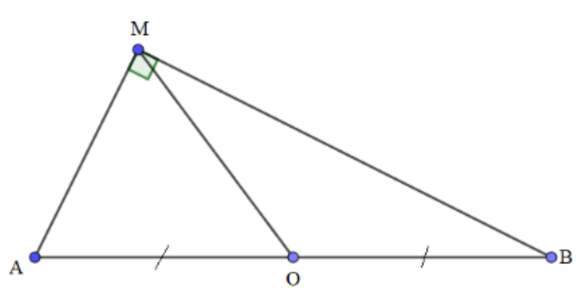
Vì tích của hai vectơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng 0 nên chúng vuông góc với nhau.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm O, điểm M tùy ý khác O, A, B và không thuộc AB, biết $4OM^2 = AB^2$. Sử dụng các kiến thức về vectơ, chứng minh MA ⊥ MB.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$4OM^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2OM)^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{OM}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}^2$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2$

$\Leftrightarrow MA^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + MB^2 = AM^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + MB^2$

$\Leftrightarrow MA^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + MB^2 = AM^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + MB^2$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

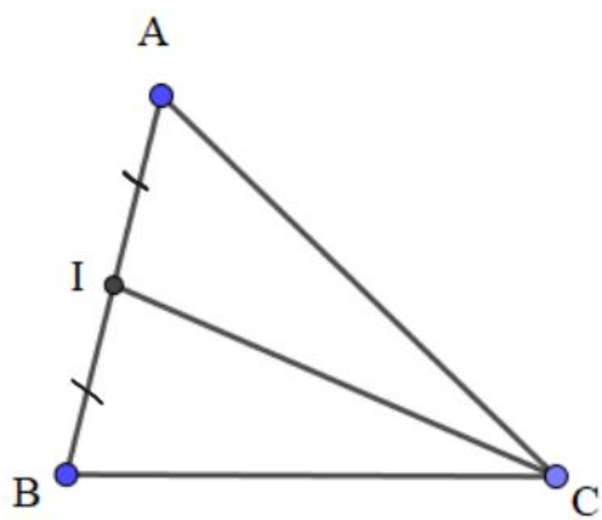
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA \perp MB$ (đpcm).

Bài 2. Cho tam giác ABC bất kì có I là trung điểm của AB. Chứng minh đẳng thức:

$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$VP = 2CI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2VP = 4CI^2 + AB^2$

$\Leftrightarrow 2VP = (2CI)^2 + AB^2$

$\Leftrightarrow 2VP = \left(2\overrightarrow{CI}\right)^2 + \overrightarrow{AB}^2$

$\Leftrightarrow 2VP = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2VP = \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2$

$\Leftrightarrow 2VP = \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2$

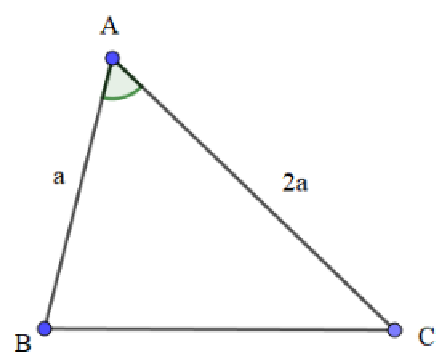
$\Leftrightarrow 2VP = 2\overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CB}^2$

$\Leftrightarrow 2VP = 2CA^2 + 2CB^2 = VT$

$\Rightarrow CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ (đpcm).

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết AB = a, AC = 2a, $\hat{A} = 60°$. Sử dụng các kiến thức về vectơ, tính độ dài cạnh BC.

Hướng dẫn giải:



Áp dụng quy tắc hiệu hai vectơ ta có:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

Ta có:

$\overrightarrow{AC}^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$ = AC^2 = (2a)^2 = 4a^2

$\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ = AB^2 = a^2

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ = $\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$ = AC.AB.cos BAC = 2a.a.cos60° = 2.a.a.$\frac{1}{2}$ = a^2

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}^2$ = 4a^2 – 2a^2 + a^2 = 3a^2

$\Rightarrow$ BC^2 = $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ = $\overrightarrow{BC}^2$ = 3a^2

$\Rightarrow$ BC = $\sqrt{3a^2}$ = $a\sqrt{3}$.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha = 180°$;

B. $\alpha = 0°$;

C. $\alpha = 90°$;

D. $\alpha = 45°$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -1 \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 180°$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$;

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{a^2}{2}$;

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ là góc A nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60°$ (do tam giác ABC đều)

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a.a.\cos 60° = \dfrac{a^2}{2}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Gọi M là trung điểm cạnh BC

Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$;

B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$;

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$;

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\frac{b^2-c^2}{2}.$