

## Bài 2: Hoán vị. Chỉnh hợp

### A. Lý thuyết

#### I. Hoán vị

##### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

**Ví dụ:** Từ 3 chữ số 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau ?

##### Hướng dẫn giải

Mỗi cách sắp xếp ba chữ số đã cho để lập thành một số có ba chữ số khác nhau là một hoán vị của ba chữ số đó.

Ta có các số sau : 357 ; 375 ; 537 ; 573 ; 735 ; 753.

Vậy có 6 số có ba chữ số khác nhau lập từ ba chữ số 3, 5, 7.

##### 2. Số các hoán vị

Kí hiệu  $P_n$  là số các hoán vị của n phần tử. Ta có  $P_n = n \cdot (n - 1) \dots 2 \cdot 1$

Quy ước : Tích  $1 \cdot 2 \dots n$  được viết là  $n!$  (đọc là n giai thừa), tức là  $n! = 1 \cdot 2 \dots n$ .

Như vậy  $P_n = n!$ .

**Ví dụ:** Có ba bạn học sinh Nam, Long, Vinh. Giáo viên muốn xếp ba bạn này vào 3 vị trí chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp.

##### Hướng dẫn giải

Xếp ba bạn Nam, Long, Vinh vào 3 vị trí chỗ ngồi là một hoán vị của 3 bạn.

Ta có  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

Vậy có 6 cách xếp 3 bạn Nam, Long, Vinh vào ba vị trí chỗ ngồi.

#### II. Chỉnh hợp

##### 1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

**Ví dụ:** Một nhóm có 10 học sinh trong đó có 3 bạn học sinh ưu tú là: Long, Hoa, Trung. Giáo viên muốn chọn ra 2 trong 3 bạn để bầu làm nhóm trưởng và nhóm phó. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn.

### **Hướng dẫn giải**

Có các cách để chọn 2 bạn một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó trong ba bạn là : Long – Hoa ; Hoa – Long ; Long – Trung ; Trung – Long ; Hoa – Trung ; Trung – Hoa.

Vậy có 6 cách để chọn một học sinh nam và một học sinh nữ trong 3 bạn để làm nhóm trưởng và nhóm phó.

## **2. Số cách chỉnh hợp**

Kí hiệu  $A_n^k$  là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ( $1 \leq k \leq n$ ).

Ta có:  $A_n^k = n.(n - 1) \dots (n - k + 1)$ .

**Ví dụ:** Có 6 chữ số {1; 2; 3 ; 4 ; 5; 6}. Hỏi từ 6 chữ số trên ta lập được bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau.

### **Hướng dẫn giải**

Từ 6 chữ số, ta lấy ba chữ số sau đó sắp xếp để được một số có ba chữ số khác nhau. Khi đó, số các số tạo thành là một chỉnh hợp chập 3 của 6 chữ số.

Ta có  $A_6^3 = 6.5.4 = 120$ .

⇒ Có 120 số được tạo thành.

Vậy từ 6 chữ số trên ta lập được 120 số có 3 chữ số đôi một khác nhau.

## **B. Bài tập tự luyện**

### **B.1 Bài tập tự luận**

**Bài 1.** Có 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh. Giáo viên muốn xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau.

**Hướng dẫn giải**

Xếp 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh vào 4 tổ khác nhau là một hoán vị của 4 bạn đó.

Ta có  $P_4 = 4! = 24$ .

$\Rightarrow$  Có 24 cách sắp xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau.

Vậy có 24 cách xếp 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh vào 4 tổ khác nhau.

**Bài 2.** Một nhóm có 7 học sinh, giáo viên muốn chọn ra ba bạn, trong đó một bạn làm nhóm trưởng và một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

**Hướng dẫn giải**

Mỗi cách chọn lần lượt 3 bạn trong 7 bạn, một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư kí là một chỉnh hợp chập 3 của 7 học sinh.

Ta có :  $A_7^3 = 7.6.5 = 210$ .

Vậy có 210 cách chọn ra 3 trong 7 bạn, một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư ký.

**Bài 3.** Bạn Minh muốn đặt mật khẩu cho máy tính của mình. Biết 4 kí tự đầu bạn Minh lấy đúng tên của mình, 3 kí tự sau là chữ số. Bạn Minh có bao nhiêu cách đặt mật khẩu.

**Hướng dẫn giải**

- Vì 4 kí tự đầu Minh lấy đúng tên của mình nên có 1 cách chọn 4 kí tự đầu.
- Vì 3 kí tự sau là chữ số nên ta có số cách chọn lấy 3 trong 10 chữ số sau đó sắp xếp chúng là một chỉnh hợp chập 3 của 10 chữ số  $A_{10}^3 = 720$ .

Theo quy tắc nhân ta có:  $1 \cdot 720 = 720$  cách để Minh chọn đặt mật khẩu.

Vậy bạn Minh có 720 cách đặt mật khẩu cho máy tính của mình.

## B.2 Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Xếp ngẫu nhiên 3 bạn nam và 4 bạn nữ ngồi vào bảy ghế kê theo hàng ngang.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 3 bạn nam ngồi cạnh nhau?

- A. 720;
- B. 1 440;
- C. 288;
- D. 240.

### Hướng dẫn giải

**Đáp án đúng là: B**

Vì xếp 3 bạn nam luôn ngồi cạnh nhau nên ta coi 3 bạn nam là một vị trí xếp. Vậy ta còn 5 vị trí để xếp. Mỗi cách xếp 5 vị trí này là một hoán vị của 5 phần tử. Vậy số cách xếp 5 vị trí là:  $5! = 120$  (cách)

Ngoài 5 vị trí xếp trên trong nhóm 3 bạn nam ta cũng xếp 3 bạn vào 3 vị trí số cách xếp này là  $3! = 12$  (cách)

Áp dụng quy tắc nhân ta có số cách xếp 3 bạn nam và 4 bạn nữ ngồi thành một hàng ngang thoả mãn 3 bạn nam ngồi cạnh nhau là:  $12 \cdot 120 = 1\,440$  (cách).

**Câu 2.** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa  $A_n^2 = 210$ .

- A. 15;
- B. 12;
- C. 21;
- D. 18.

### Hướng dẫn giải

**Đáp án đúng là: A**

Điều kiện  $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } A_n^2 = 210 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 210 \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0 \Leftrightarrow n = 15 \text{ hoặc } n = -14$$

Kết hợp với điều kiện  $n = 15$  thỏa mãn.

**Câu 3.** Trong một biểu kỉ niệm ngày thành lập trường, bí thư Đoàn trường cần chọn 4 tiết mục từ 6 tiết mục mục hát và 4 tiết mục từ 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn và xếp thứ tự sao cho các tiết mục hát và múa xen kẽ nhau?

A. 43 200;

B. 75;

C. 86 400;

D. 480.

### Hướng dẫn giải

**Đáp án đúng là: C**

Giả sử các tiết mục được biểu diễn đánh số thứ tự từ 1 đến 8. Vì số lượng tiết mục hát và múa bằng nhau nên có hai trường hợp:

*Trường hợp 1:* Tiết mục hát diễn ra đầu tiên

Khi đó, các tiết mục hát có số thứ tự là số lẻ, còn các tiết mục múa có số thứ tự là số chẵn. Như vậy, thứ tự của các tiết mục múa và hát được cố định, chỉ thay đổi thứ tự giữa các tiết mục múa, hoặc giữa các tiết mục hát.

Chọn 4 tiết mục hát từ 6 tiết mục hát và xếp thứ tự có:

$$A_6^4 = 360 \text{ (cách)}$$

Chọn 4 tiết mục múa từ 5 tiết mục múa và xếp thứ tự có:

$$A_5^4 = 120 \text{ (cách)}$$

Khi đó, số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ trong trường hợp tiết mục hát diễn ra đầu tiên là:

$$360.120 = 43\,200$$

*Trường hợp 2:* Tiết mục múa diễn ra đầu tiên

Tương tự, số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ trong trường hợp tiết mục múa diễn ra đầu tiên là:

$$120.360 = 43\,200$$

Vậy số cách chọn và xếp thứ tự các tiết mục văn nghệ sao cho các tiết mục hát và múa xen kẽ nhau là:

$$43\,200 + 43\,200 = 86\,400.$$