Bài 3. Ôn tập chương II

A. Lý thuyết

1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng $ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$,

trong đó a, b, c là những số cho trước, a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$ được định nghĩa tương tự.

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

- Người ta chứng minh được: Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a, b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành 2 nửa mặt phẳng, trong đó một nửa (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm (x; y) thỏa mãn $ax + by + c > 0$, nửa còn lại (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm (x; y) thỏa mãn $ax + by + c < 0$.

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by + c < 0$ như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$.

Bước 2: Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ. Tính $ax_0 + by_0 + c$.

+ Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

+ Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \leq 0$ (hoặc $ax + by + c \geq 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

4. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

5. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta thực hiện như sau:

- Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một miền đa giác.

6. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức F = ax + by trên một miền đa giác

Người ta chứng minh được F = ax + by đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $3x + 5y – 1 < 0$

b) $2x^2 – y^2 – 1 > 0$

c) $4y^2 – 3 > 0$

d) $4x – 5y < 1$

e) $2x – 5y – 6 – 6t \geq 0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3x + 5y – 1 < 0$ có dạng $ax + by + c < 0$ với a = 3, b = 5 và c = – 1. Do đó bất phương trình a) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có: $2x^2 – y – 1 > 0$ có chứa x^2 nên bất phương trình b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có: $4y^2 – 3 \leq 0$ có chứa ẩn y^2 nên bất phương trình c) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có $4x – 5y < 1 \Leftrightarrow 4x – 5y – 1 < 0$ có dạng $ax + by + c < 0$ với a = 4, b = – 5 và c = – 1. Do đó bất phương trình d) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta có $2x – 5y – 6t \geq 0$ là bất phương trình bậc nhất ba ẩn x, y, t. Do đó bất phương trình e) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vậy $3x + 5y – 1 < 0$; $4x – 5y < 1$ là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 2. Bất phương trình sau có phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không? Nếu có biểu diễn miền nghiệm của nó trên trục tọa độ Oxy: $2x + y – 1 \leq 0$?

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $2x + y - 1 \le 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có dạng $ax + by + c \le 0$ với $a = 2$, $b = 1$ và $c = -1$.

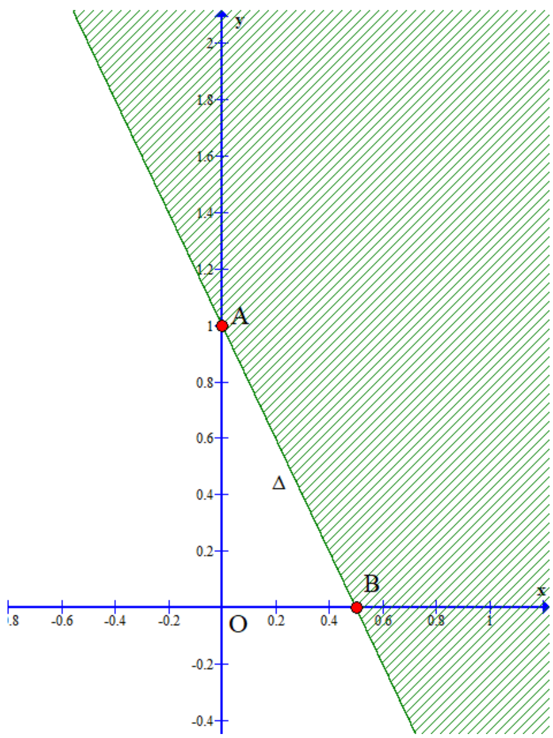
- Biểu diễn miền nghiệm trên trục tọa độ Oxy:

+ Vẽ đường thẳng Δ: $2x + y - 1 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Lấy điểm O(0;0) không thuộc Δ thay vào bất phương trình ta có: $2.0 + 0 - 1 = -1 \le 0$ là một mệnh đề đúng.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên trục tọa độ Oxy là nửa mặt phẳng bờ Δ (kể cả bờ Δ) chứa gốc tọa độ O.

Miền nghiệm biểu diễn trên trục tọa độ Oxy:



Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ x - 3y \ge 0 \end{cases}$. Hỏi đây có phải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không? Khi cho $y = 0$, x có thể nhận các giá trị nguyên nào?

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x + 2y < 1 \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn bởi vì có hai bất phương trình x + 2y < 1 và x – 3y ≥ 0 là bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Khi y = 0, hệ trở thành: $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

Mà x nguyên nên x = 0.

Vậy x = 0 thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 160 \end{cases}$

a) Tìm 2 nghiệm của hệ trên.

b) Cho F (x; y) = x + 2y. Tìm giá trị lớn nhất của F (x; y).

Hướng dẫn giải

a) Chọn (x; y) = (1; 1).

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình x ≥ 0 ta được 1 ≥ 0 là mệnh đề đúng. Do đó cặp số (1; 1) là nghiệm của bất phương trình x ≥ 0.

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình y ≥ 0 ta được 1 ≥ 0 là mệnh đề đúng. Do đó cặp số (1; 1) là nghiệm của bất phương trình y ≥ 0.

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình x + y ≤ 100 ta được 1 + 1 ≤ 100 là mệnh đề đúng. Do đó cặp số (1; 1) là nghiệm của bất phương trình x + y ≤ 100.

Thay x = 1 và y = 1 vào bất phương trình x + 2y ≤ 160 ta được 1 + 2.1 ≤ 160 là mệnh đề đúng. Do đó cặp số (1; 1) là nghiệm của bất phương trình x + 2y ≤ 160.

Vậy (x; y) = (1; 1) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 160 \end{cases}$.

Tương tự ta chọn được (x; y) = (2; 2) là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 160 \end{cases}$.

Vậy hai cặp số (1; 1) và (2; 2) là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

b) - Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy nằm bên phải trục Oy.

- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 100$:

+ Vẽ đường thẳng d_1: x + y = 100.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 0 \leq 100$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 100$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1) chứa gốc tọa độ O.

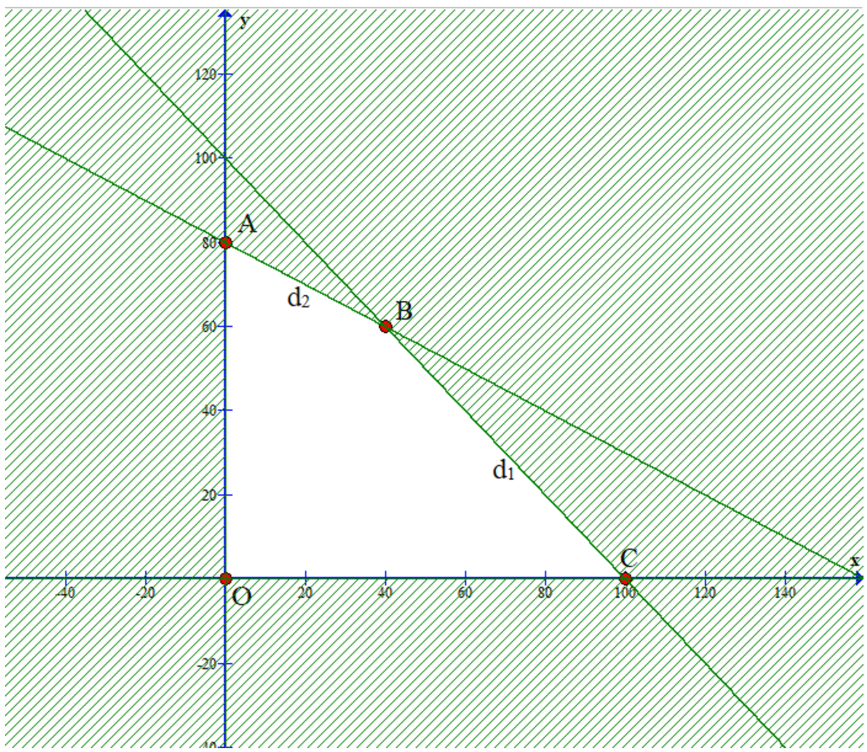
- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $x + 2y \leq 160$:

+ Vẽ đường thẳng d_2: x + 2y = 160.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 2.0 \le 160$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + 2y \le 160$.

Do đó, miền nghiệm D_4 của bất phương trình $x + 2y \le 160$ là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2) chứa gốc tọa độ O.

Từ đó ta có miền nghiệm không bị gạch là giao miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác OABC với:

O(0; 0), A(0; 80), B(40; 60), C(100; 0).

Tại O(0; 0): $F = 0 + 2.0 = 0$;

Tại A(0; 80): $F = 0 + 2.80 = 160$;

Tại B(40; 60): $F = 40 + 2.60 = 160$;

Tại C(100; 0): $F = 100 + 2.0 = 100$;

Vậy giá trị lớn nhất của F (x; y) là 160 khi (x; y) = (0; 80) hoặc (x; y) = (40, 60).

Bài 5. Bạn Minh cần phải làm bài tập trong vòng không quá 2 giờ để nộp. Mỗi bài toán cần 10 phút để làm xong, mỗi bài Vật lí cần 20 phút để làm xong. Gọi x, y lần lượt là số bài tập Toán, Lí bạn Minh sẽ làm được. Lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x và y và biểu diễn miền nghiệm của hệ đó. Số bài nhiều nhất mà bạn Minh có thể làm được là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số phút bạn Minh làm xong x bài Toán là: 10x (phút).

Số phút bạn Minh làm xong y bài Vật lí là: 20y (phút).

Tổng số phút để Minh làm x bài toán và y bài lí là: 10x + 20y (phút).

Do bạn Minh cần phải làm bài tập trong vòng không quá 2 giờ = 120 phút nên ta có:

$10x + 20y \leq 120$ hay $x + 2y \leq 12$.

Số bài tập bạn Minh làm luôn không âm nên $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

- Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục tọa độ Oy.

+ Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả trục Oy) nằm bên phải trục Oy.

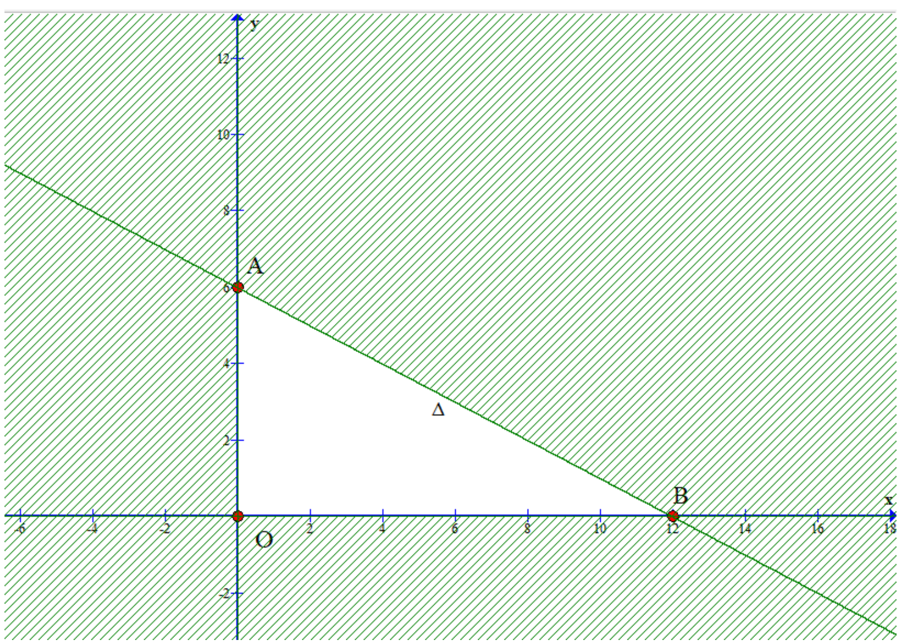
- Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox (kể cả trục Ox) nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + 2y \leq 12$:

+ Vẽ đường thẳng Δ: $x + 2y = 12$.

+ Xét gốc toạ độ O(0; 0) có: $0 + 2.\ 0 = 0 \leq 12$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x + 2y \leq 12$.

Do đó, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + 2y \leq 12$ là nửa mặt phẳng bờ Δ (kể cả bờ Δ) chứa gốc tọa độ O.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác OAB với:

O(0; 0), A(0; 6), B(12; 0).

Số bài mà bạn Minh làm được là: F(x; y) = x+ y.

Tại O(0; 0): F = 0 + 0 = 0;

Tại A(0; 6): F = 0 + 6 = 6;

Tại B(12; 0): F = 12 + 0 = 12;

Do đó giá trị lớn nhất của F (x; y) là 12 khi (x; y) = (12; 0).

Vậy bạn Minh làm được nhiều nhất là 12 bài khi làm 12 bài Toán và không làm bài tập Vật lí.

Bài 6. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mãi hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó loại xe A có 10 chiếc, loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng. Xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi x là số xe loại A được thuê, y là số xe loại B được thuê. ($x \geq 0$, $y \geq 0$)

Do loại xe A có 10 chiếc, loại xe B có 9 chiếc nên $x \leq 10$, $y \leq 9$.

Do xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng, xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng mà cần thuê xe để chở trên 140 người và trên 9 tấn hàng nên:

$$\begin{cases} 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ bất phương trình của x và y như sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy:

- Biểu diễn miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục Oy.

Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả bờ Oy) nằm bên phải trục Oy.

* Tương tự ta biểu diễn các miền nghiệm:

- Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$: là nửa mặt phẳng bờ Ox (kể cả bờ Ox) nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \leq 10$: là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1: x = 10) chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $y \leq 9$: là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2: y = 9) chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_5 của bất phương trình $2x + y \geq 14$:

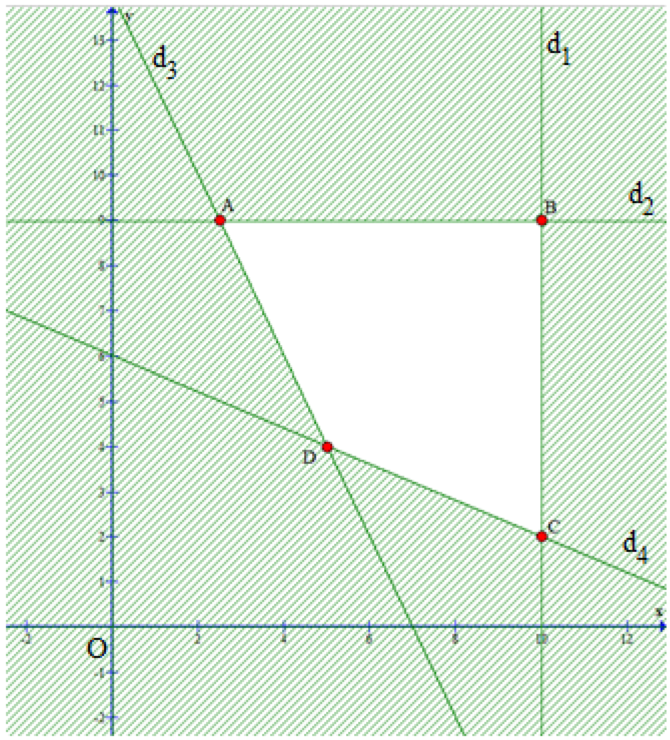
+ Vẽ đường thẳng d_3: 2x + y = 14.

+ Xét điểm O(0; 0): thay x = 0, y = 0 vào bất phương trình ta có 2. 0 + 0 = 0 ≥ 14 là mệnh đề sai nên điểm O(0; 0) không thỏa mãn bất phương trình 2x + y ≥ 14.

Miền nghiệm D_5 của bất phương trình $2x + y \geq 14$ là nửa mặt phẳng bờ d_3 (kể cả bờ d_3) không chứa điểm O.

- Tương tự miền nghiệm D_6 của bất phương trình 2x + 5y ≥ 30 là nửa mặt phẳng bờ d_4 (kể cả bờ d_4: 2x + 5y = 30) không chứa điểm O.

Ta có đồ thị:



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác ABCD:

A(2,5; 9), B(10; 9), C(10; 2), D(5; 4)

Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu nên tổng số tiền thuê là:

F (x; y) = 4x + 3y.

Để chi phí vận chuyển là thấp nhất thì F (x; y) là nhỏ nhất.

Tại A(2,5; 9): F = 4. 2,5 + 3. 9 = 37;

Tại B(10; 9): F = 4. 10 + 3. 9 = 67;

Tại C(10; 2): F = 4. 10 + 3. 2 = 46;

Tại D(5; 4): F = 4. 5 + 3. 4 = 32;

Vậy F (x; y) đạt giá trị nhỏ nhất là 32 khi x = 5 và y = 4.

Vậy cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B để số tiền thuê nhỏ nhất.

Bài 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi ki – lo – gam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi ki – lo – gam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 250 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $x^2 + y^2$.

Hướng dẫn giải

Gia đình chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn nên $0 \le x \le 1,6$; $0 \le y \le 1,1$.

Mỗi ki – lo – gam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit; mỗi ki – lo – gam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit mà gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên:

$$\begin{cases} 800x + 600y \ge 900 \\ 200x + 400y \ge 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \ge 9 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 8x + 6y \ge 9 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1,6 \\ y \ge 0 \\ y \le 1,1 \\ 8x + 6y \ge 9 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục toạ độ Oxy:

- Biểu diễn miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \ge 0$.

+ Đường thẳng x = 0 là trục Oy.

Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy (kể cả bờ Oy) nằm bên phải trục Oy.

* Tương tự ta biểu diễn các miền nghiệm:

- Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$: là nửa mặt phẳng bờ Ox (kể cả bờ Ox) nằm bên trên trục Ox.

- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \leq 1,6$: là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1: $x = 1,6$) chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $y \leq 1,1$: là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2: $y = 1,1$) chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_5 của bất phương trình $8x + 6y \geq 9$.

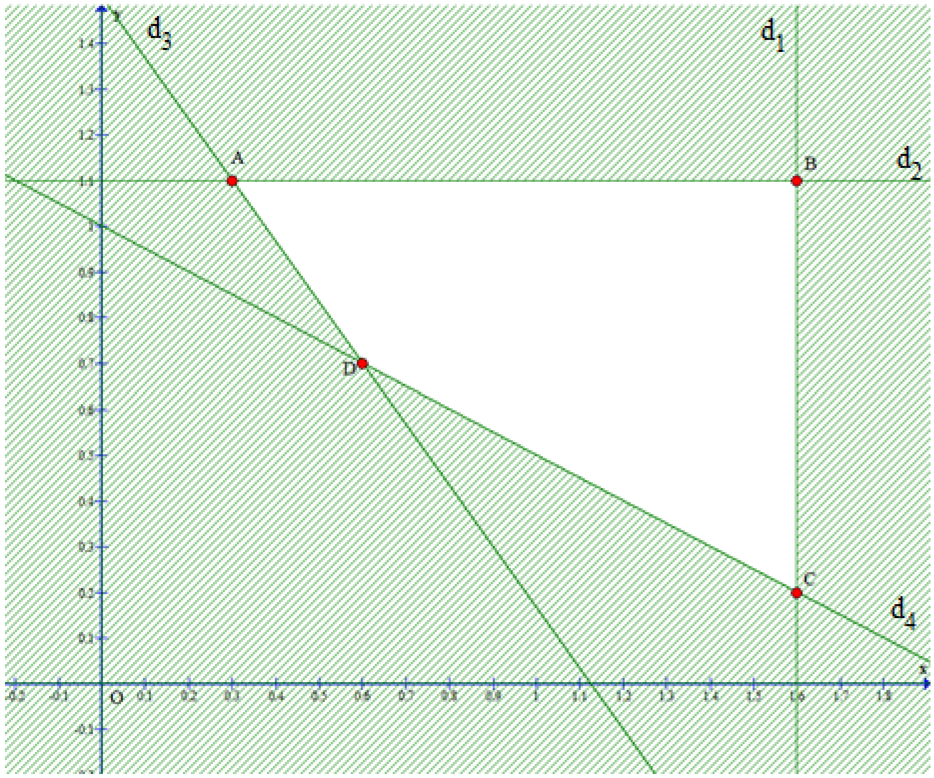
+ Vẽ đường thẳng d_3: $8x + 6y = 9$.

+ Xét điểm O(0; 0): Thay x = 0, y = 0 vào bất phương trình ta có $8.\ 0 + 6.\ 0 = 0 \geq 9$ là mệnh đề sai nên điểm O(0; 0) không thỏa mãn bất phương trình $8x + 6y \geq 9$.

Miền nghiệm D_5 của bất phương trình $8x + 6y \geq 9$ là nửa mặt phẳng bờ d_3 (kể cả bờ d_3) không chứa điểm O.

- Tương tự miền nghiệm D_6 của bất phương trình $x + 2y \geq 2$ là nửa mặt phẳng bờ d_4 (kể cả bờ d_4) không chứa điểm O.

Ta có đồ thị:



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác ABCD:

A(0,3; 1,1), B(1,6; 1,1), C(1,6; 0,2), D(0,6; 0,7).

Giá tiền một kg thịt bò là 250 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng nên tổng số tiền cần mua là F (x; y) = 250x + 110y (nghìn đồng) phải nhỏ nhất.

Tại A(0,3; 1,1), F = 250. 0,3 + 110. 1,1 = 196;

Tại B(1,6; 1,1), F = 250. 1,6 + 110. 1,1 = 521;

Tại C(1,6; 0,2), F = 250. 1,6 + 110. 0,2 = 422;

Tại D(0,6; 0,7), F = 250. 0,6 + 110. 0,7 = 227.

Vậy F (x; y) nhỏ nhất là 196 khi x = 0,3 và y = 1,1.

Khi đó $x^2 + y^2 = 0{,}3^2 + 1{,}1^2 = 1{,}3$.

Bài 8. Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau:

- Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

- Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1 000 đơn vị vitamin cả A và B.

Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.

Biết giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng. Hãy tìm phương án dùng hai loại vitamin A, B thoả mãn các điều kiện trên để có số tiền phải trả là ít nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi x là số đơn vị vitamin A mỗi người tiếp nhận trong một ngày. ($x \ge 0$)

Gọi y là số đơn vị vitamin A mỗi người tiếp nhận trong một ngày. ($y \ge 0$)

Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên $x \le 600$ và $y \le 500$.

Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1 000 đơn vị vitamin cả A và B nên:

$400 \le x + y \le 1000$.

Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên:

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{2}x \\ y \le 3x \end{cases}.$$

Ta có hệ bất phương trình giữa x và y:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 600 \\ y \le 500 \\ x + y \ge 400 \\ x + y \le 1000 \\ y \ge \frac{1}{2}x \\ y \le 3x \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

- Biểu diễn miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \le 600$:

+ Vẽ đường thẳng d_1: $x = 600$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Thay $x = 0$, $y = 0$ vào bất phương trình ta được $0 \le 600$ là mệnh đề đúng nên tọa độ điểm O(0; 0) thỏa mãn bất phương trình $x \le 600$.

Vậy miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \le 600$ là nửa mặt phẳng bờ d_1 (kể cả bờ d_1) chứa điểm O.

* Tương tự ta biểu diễn các miền nghiệm:

- Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \le 500$: là nửa mặt phẳng bờ d_2 (kể cả bờ d_2: $y = 500$) chứa điểm O.

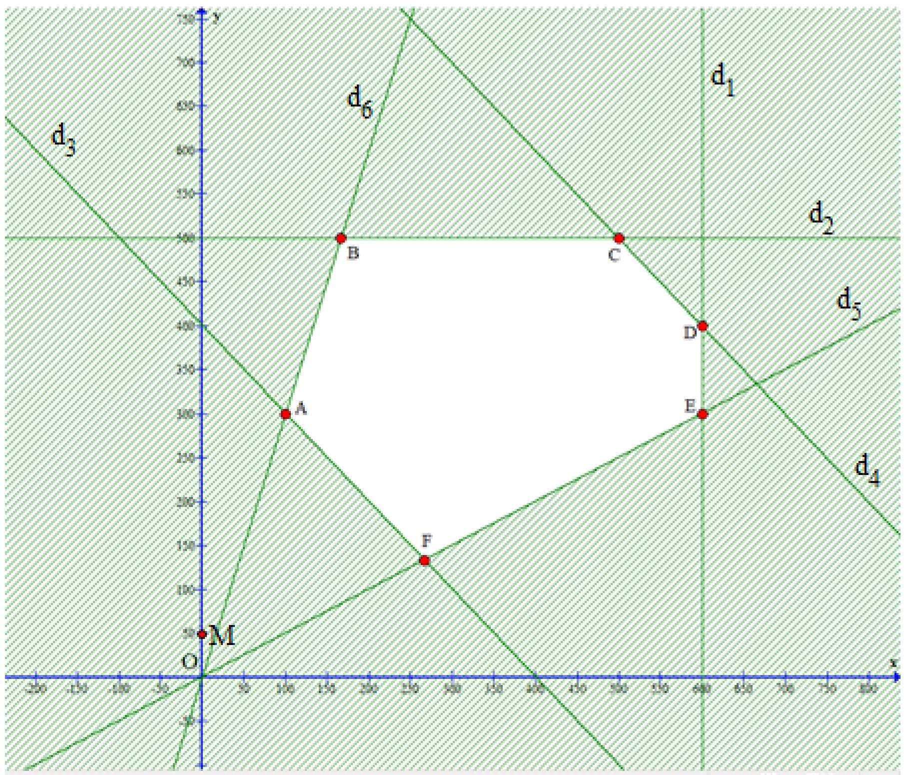
- Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \ge 400$: là nửa mặt phẳng bờ d_3 (kể cả bờ d_3: $x + y = 400$) không chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_4 của bất phương trình $x + y \le 1000$: là nửa mặt phẳng bờ d_4 (kể cả bờ d_4: $x + y = 1000$) chứa điểm O.

- Miền nghiệm D_5 của bất phương trình $y \geq \frac{1}{2}x$: là nửa mặt phẳng bờ d_5 (kể cả bờ d_5: $y = \frac{1}{2}x$) chứa điểm M(0; 50).

- Miền nghiệm D_6 của bất phương trình $y \leq 3x$: là nửa mặt phẳng bờ d_6 (kể cả bờ d_6: $y = 3x$) không chứa điểm M (0; 50).

Ta có đồ thị sau:



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền của đa giác ABCDEF với:

A(100; 300), $B\left(\frac{500}{3};500\right)$, C(500; 500), D(600, 400), E(600, 300), $F\left(\frac{800}{3};\frac{400}{3}\right)$

Số tiền trả cho x đơn vị vitamin A và y đơn vị vitamin B là: F (x; y) = 9x + 7,5y.

Để có số tiền phải trả là ít nhất thì F(x; y) phải nhỏ nhất.

Tại A(100; 300): F = 9.100 + 7,5. 300 = 3150;

Tại B$\left(\frac{500}{3};500\right)$: F = 9. $\frac{500}{3}$ + 7,5. 500 = 5250;

Tại C(500; 500): F = 9. 500 + 7,5. 500 = 8250;

Tại D(600, 400): F = 9. 600 + 7,5. 400 = 8400;

Tại E(600, 300): F = 9. 600 + 7,5. 300 = 7650;

Tại F$\left(\frac{800}{3};\frac{400}{3}\right)$: F = 9. $\frac{800}{3}$ + 7,5. $\frac{400}{3}$ = 3400;

Vậy F(x; y) nhỏ nhất là 3150 khi x =100 và y = 300.

Vậy mỗi người sẽ dùng 100 đơn vị vitamin A và 300 đơn vị vitamin B để đảm bảo các điều kiện số lượng sử dụng và chi phí phải trả là ít nhất.