Bài 1: Dấu của tam thức bậc hai

C. BÀI TẬP

Bài 1 trang 8 SBT Toán 7 tập 1. Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai sau. Xác định dấu của chúng tại x = -2.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$;

b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 8$;

c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 10$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.(-2).(-4) = -23 < 0$ nên f(x) vô nghiệm và f (x) cùng dấu với a với mọi giá trị x.

Ta lại có: a = 0 – 2 < 0 nên tại x = – 2 thì f(– 2) < 0.

Vì vậy f(x) âm tại x = –2.

b) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4.2.8 = 0$ nên g (x) = 0 có nghiệm kép là:

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2.2} = -2$. Do đó g (– 2) = 0.

Vì vậy g(x) không âm cũng không dương tại x = –2.

c) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4.3.(-10) = 169 > 0$ nên h(x) có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2.3} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2.3} = \frac{-10}{3}$$

$h(-2) = 3.(-2)^2 + 7.(-2) - 10 = -12 < 0$.

Vì vậy h(x) âm tại x = – 2.

Bài 2 trang 9 SBT Toán 7 tập 1. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f(x) = (2m - 8)x^2 + 2mx + 1$ là một tam thức bậc hai;

b) $f\left(x\right)=\left(2m+3\right)x^2+3x-4m^2$ là một tam thức bậc hai có x = 3 là một nghiệm;

c) $f\left(x\right)=2x^2+mx-3$ dương tại x = 2.

Lời giải

a) $f\left(x\right)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi 2m – 8 ≠ 0 hay m ≠ 4.

b) $f\left(x\right)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi 2m + 3 ≠ 0 hay m ≠ $\frac{-3}{2}$.

Tam thức $f\left(x\right)$ có x = 3 là một nghiệm khi và chỉ khi f (3) = (2m + 3) . 3^2 + 3.3 – $4m^2$ = 0

Suy ra – $4m^2$ + 18m + 36 = 0 hay – $2m^2$ + 9m + 18 = 0

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4.(-2).18 = 225 > 0$ nên phương trình ẩn m có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$m_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+\sqrt{225}}{2.(-2)} = \frac{-3}{2}$ (loại vì m ≠ $\frac{-3}{2}$)

$m_2 = \frac{-b\ -\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-\sqrt{225}}{2.(-2)} = 6$.

Vậy m = 6 thỏa mãn f(x) là tam thức bậc hai có x = 3 là một nghiệm.

c) $f\left(x\right)=2x^2+mx-3$ dương tại x = 2 khi và chỉ khi f (2) = 2.2^2 + 2m – 3 > 0

Suy ra 2m + 5 > 0 ⇔ m > $\frac{-5}{2}$.

Vậy m > $\frac{-5}{2}$ thì f(x) dương tại x = 2.

Bài 3 trang 9 SBT Toán 7 tập 1. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f\left(x\right)=\left(m^2+9\right)x^2+\left(m+6\right)x+1$ là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất;

b) $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^2+3x+1$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt;

c) $f\left(x\right) = mx^2 + \left(m+2\right)x + 1$ là một tam thức bậc hai vô nghiệm.

Lời giải

a) $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m^2 + 9 \neq 0$, mà $m^2 + 9 > 0$, đúng với mọi $m \in R$.

$f\left(x\right)$ có một nghiệm duy nhất khi $\Delta = b^2 - 4ac = (m + 6)^2 - 4.(m^2 + 9).1 = 0$

$\Leftrightarrow -3m^2 + 12m = 0$

$\Leftrightarrow 3m.(4 - m) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 4$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$ là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất.

b) $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0$ hay $m \neq 1$.

$f\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.\ (m - 1).1 > 0$

$\Leftrightarrow 13 - 4m > 0$

$\Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$.

Vậy $m < \frac{13}{4}$ thì f(x) là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

c) f(x) là một tam thức bậc hai khi $a = m \neq 0$.

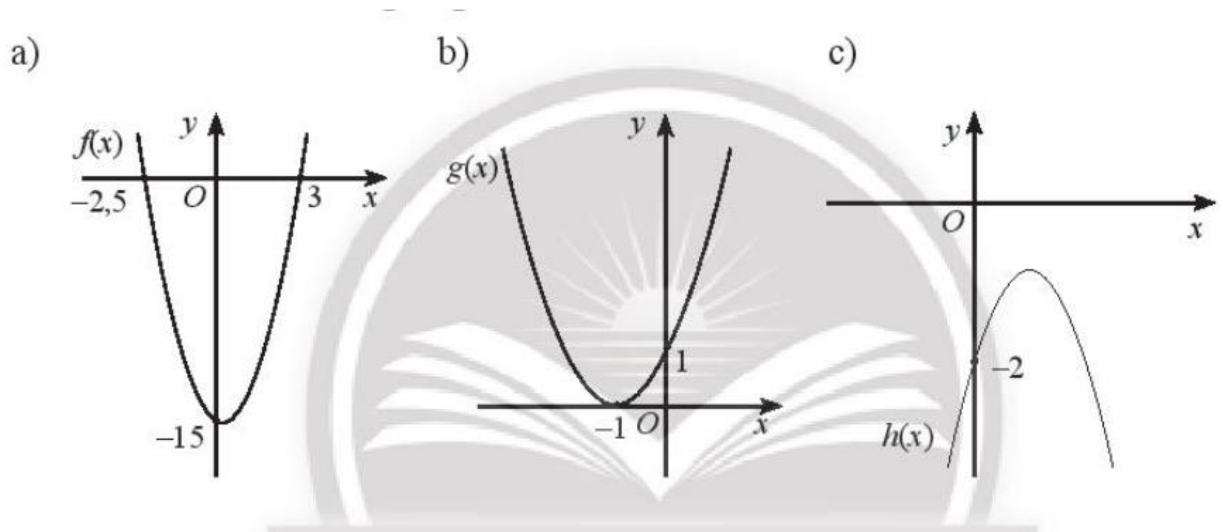
Ta có: $\Delta = (m + 2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0$

Để f(x) vô nghiệm thì $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 < 0$

Mà $m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên không tồn tại giá trị của m thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu.

Bài 4 trang 9 SBT Toán 7 tập 1. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai được cho trong hình dưới đây, xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng:



Lời giải:

a) Quan sát hình vẽ a), ta thấy:

Đồ thị hàm số nằm trên trục hoành khi x < – 2,5 hoặc x > 3 hay f(x) > 0 khi x ∈ (–∞; – 2,5) ∪ (3; + ∞).

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm x = – 2,5 và x = 3 hay f(x) = 0 khi x = – 2,5 và x = 3.

Đồ thị hàm số nằm dưới trục hoành khi – 2,5 < x < 3 hay f(x) < 0 khi x ∈ (– 2,5; 3).

b) Quan sát hình vẽ b) ta thấy:

Đồ thị hàm số nằm trên trục hoành khi x ≠ –1 hay g(x) > 0 khi x ≠ –1.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm x = –1 hay fgx) = 0 khi x = – 1.

c) Đồ thị hàm số nằm dưới trục hoành với mọi x ∈ ℝ hay f(x) < 0 với mọi x ∈ ℝ.

Bài 5 trang 9 SBT Toán 7 tập 1. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f\left(x\right)=x^2-5x+4$;

b) $f\left(x\right)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$;

c) $f\left(x\right)=3x^2+6x+4$;

d) $f\left(x\right)=-2x^2+3x+5$;

e) $f\left(x\right)=-6x^2+3x-1$;

g) $f\left(x\right)=4x^2+12x+9$.

Lời giải:

a) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.4 = 9 > 0$ nên f (x) có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = 4.$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2} = 1.$

Như vậy, f (x) có a = 1 > 0, $\Delta > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ nên áp dụng định lí dấu tam thức bậc hai, ta có:

f (x) âm trong khoảng (1; 4).

f (x) dương trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(4; +\infty)$.

b) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.\left(\dfrac{-1}{3}\right).(-3) = 0$ nên f (x) có nghiệm kép $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = 3$.

Như vậy, f (x) có $a = \dfrac{-1}{3} < 0$, $\Delta = 0$ nên f (x) âm với mọi $x \neq 3$.

c) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.3.4 = -12 < 0$, a = 3 > 0 nên f (x) dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.(-2).5 = 49 > 0$ nên f (x) có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{49}}{-2.2} = -1$.

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{49}}{-2.2} = \dfrac{5}{2}$.

Như vậy, f (x) có a = –2 < 0, Δ > 0 và có hai nghiệm $x_1 = –1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ nên:

f (x) dương trong khoảng $(–1; \frac{5}{2})$.

f (x) âm trong khoảng $(-\infty; –1)$ và $(\frac{5}{2}; +\infty)$.

e) Ta có: $\Delta = b^2 – 4ac = 3^2 – 4.(–6) .(–1) = –15 < 0$, a = –6 < 0 nên f (x) âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

g) Ta có: $\Delta = b^2 – 4ac = 12^2 – 4.4.9 = 0$ nên f (x) có nghiệm kép $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$.

Như vậy, f (x) có a = 4 > 0, Δ = 0 nên f (x) dương với mọi $x \neq \frac{-3}{2}$.

Bài 6 trang 9 SBT Toán 7 tập 1. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f(x) = (m+1)x^2 + 5x + 2$ là tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$,

b) $f(x) = mx^2 - 7x + 4$ là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + (3m-1)$ là tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = (m^2+1)x^2 - 3mx + 1$ là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) f (x) là tam thức bậc hai khi và chỉ khi m + 1 ≠ 0 hay m ≠ –1

f (x) không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = b^2 – 4ac = 5^2 – 4.(m + 1). 2 < 0$

⇔ 17 – 8m < 0

⇔ $m > \frac{17}{8}$.

Vậy $m > \frac{17}{8}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) f (x) là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi m < 0 và

$\Delta = b^2 – 4ac = 49 – 16m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{49}{16}$

Do đó m thỏa mãn đồng thời m < 0 và m > $\frac{49}{16}$ (vô lí).

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

c) Do f (x) có a = 3 > 0 nên f (x) là tam thức bậc hai dương với mọi x ∈ $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi Δ' = 4 – 3.(3m – 1) < 0

⇔ 7 – 9m < 0

⇔ m > $\frac{7}{9}$

Vậy m > $\frac{7}{9}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

d) f (x) là tam thức bậc hai âm với mọi x ∈ $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi a = m^2 + 1 < 0 và Δ < 0.

Ta có $m^2 \geq 0$ với mọi x ∈ $\mathbb{R}$

⇒ a = m^2 + 1 > 0 với mọi x ∈ $\mathbb{R}$.

Như vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 7 trang 10 SBT Toán 7 tập 1. Chứng minh rằng:

a) $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$ với mọi x ∈ $\mathbb{R}$;

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$ với mọi x ∈ $\mathbb{R}$,

c) $-x^2 < -2x + 3$ với mọi x ∈ $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 + \sqrt{3}x + 1$ có a = 2 > 0, Δ = 3 – 4.2.1 = –5 < 0 với mọi x ∈ $\mathbb{R}$. Như vậy $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$ với mọi x ∈ $\mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $x^2 + x + \frac{1}{4}$ có a = 1 > 0, $\Delta = 1 - 4.1.\frac{1}{4} = 0$ nên $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$ với mọi x ∈ ℝ.

c) Tam thức bậc hai $-x^2 + 2x - 3$ có a = –1 < 0, Δ = 4 – 4.(–1).(–3) = –8 < 0 với mọi x ∈ ℝ. Như vậy $-x^2 + 2x - 3 < 0$ với mọi x ∈ ℝ hay $-x^2 < -2x + 3$ với mọi x ∈ ℝ.

Bài 8 trang 10 SBT Toán 7 tập 1. Xác định giá trị của các hệ số a, b, c và xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua ba điểm có toạ độ là (– 1; – 4), (0; 3) và (1; – 14);

b) Đồ thị của hàm số y = f(x) đi qua ba điểm có toa độ là (0; –2), (2; 6) và (3; 13);

c) f(– 5) = 33, f (0) = 3 và f(2) = l9.

Lời giải:

a) Theo đề bài:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm có toạ độ là (– 1; – 4) nên –4 = a – b + c (1)

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm có toạ độ là (0; 3) nên 3 = c (2)

Đồ thị của hàm số y = f(x) đi qua điểm có toạ độ là (1; – 14) nên –14 = a + b + c (3)

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có:

$$\begin{cases} a - b = -7 \\ a + b = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -24 \\ a + b = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ -12 + b = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = -5 \end{cases}.$$

Vậy f (x) = $-12x^2 - 5x + 3$.

Xét f (x) = $-12x^2 - 5x + 3$ có Δ = $(-5)^2 - 4.(-12).3 = 169 > 0$ nên f (x) có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{169}}{-12.2} = -\dfrac{3}{4}$.

$x_2 = \dfrac{-b\ -\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{169}}{-12.2} = \dfrac{1}{3}$.

Như vậy, f (x) có a = –12 < 0, Δ > 0 và có hai nghiệm $x_1 = -\dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ nên:

f (x) dương trong khoảng ($-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{3}$).

f (x) âm trong khoảng ($-\infty; -\dfrac{3}{4}$) và ($\dfrac{1}{3}; +\infty$).

b) Ta có:

Đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$đi qua điểm có toạ độ là (0; – 2) nên –2 = c (1)

Đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$đi qua ba điểm có toạ độ là (2; 6) nên 6 = 4a + 2b + c (2)

Đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$đi qua ba điểm có toạ độ là (3; 13) nên 13 = 9a + 3b + c (3).

Thay (1) vào phương trình (2) và (3) ta có:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ 9a + 3b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ = 1 \\ 3.1 + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Do đó f (x) = x^2 + 2x – 2.

Xét f (x) = x^2 + 2x – 2 có Δ = 2^2 – 4.(–2).1 = 12 nên f (x) có hai nghiệm phân biệt lần lượt là:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

$x_2 = \dfrac{-b\ -\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{12}}{2} = -1 - \sqrt{3}$.

Như vậy, f (x) có a = 1 > 0, $\Delta > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ nên:

f (x) âm trong khoảng ($-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}$).

f (x) dương trong khoảng ($-\infty; -1 - \sqrt{3}$) và ($-1 + \sqrt{3}; +\infty$).

c) Ta có:

f(– 5) = 33 nên 33 = 25a – 5b + c (1)

f (0) = 3 nên 3 = c (2)

f(2) = 19 nên 19 = 4a + 2b + c (3)

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có $\begin{cases} 25a - 5b = 30 \\ 4a + 2b = 16 \end{cases}$. Giải hệ phương trình ta được a = 2 và b = 4.

Vậy f (x) = $2x^2 + 4x + 3$.

Xét f (x) = $2x^2 + 4x + 3$ có $\Delta = 4^2 - 4.2.3 = -8 < 0$, a = 2 > 0 nên f (x) dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.