

Cách tính giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Lý thuyết

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

- Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

- Số thực m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D

$$\text{nếu } \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

b) Tính bị chặn của hàm số lượng giác:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Các dạng bài tập

Dạng 1. Sử dụng tính bị chặn của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

$$-1 \leq \sin[u(x)] \leq 1; 0 \leq \sin^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\sin[u(x)]| \leq 1$$

$$-1 \leq \cos[u(x)] \leq 1; 0 \leq \cos^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\cos[u(x)]| \leq 1$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sin 2x + 3$

b) $y = 4\sin 2x \cos 2x + 1$

c) $y = 5 - 3\cos^2 3x$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \sin 2x + 3 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $y = \sin 2x + 3$ có giá trị lớn nhất là 4 và giá trị nhỏ nhất là 2.

b) $y = 4\sin 2x \cos 2x + 1 = 2\sin 4x + 1$

Ta có: $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2\sin 4x + 1 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $y = 4\sin 2x \cos 2x + 1$ có giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -1.

c) Ta có: $0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 3\cos^2 3x \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -3\cos^2 3x \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 5 - 3\cos^2 3x \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = 5 - 3\cos^2 3x$ có giá trị lớn nhất là 5 và giá trị nhỏ nhất là 2.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2 - \sin 2x}$

b) $y = \cos 2x + 4\sin x - 5$

c) $y = 4|\cos(3x-1)| + 1$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $2 - \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \leq 2$ (Luôn đúng với mọi x)

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\sin 2x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 - \sin 2x \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2 - \sin 2x} \leq \sqrt{3} \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $y = \sqrt{2 - \sin 2x}$ có giá trị lớn nhất là $\sqrt{3}$ và giá trị nhỏ nhất là 1.

b) $y = \cos 2x + 4\sin x - 5$

$$= 1 - 2\sin^2 x + 4\sin x - 5$$

$$= -2\sin^2 x + 4\sin x - 4$$

$$= -2(\sin^2 x - 2\sin x + 1) - 2$$

$$= -2(\sin x - 1)^2 - 2$$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq -2(\sin x - 1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq -2(\sin x - 1)^2 - 2 \leq -2 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = \cos 2x + 4\sin x - 5$ có giá trị lớn nhất là -2 và giá trị nhỏ nhất là -10.

c) Ta có: $0 \leq |\cos(3x-1)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 4|\cos(3x-1)| \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 4|\cos(3x-1)| + 1 \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = 4|\cos(3x-1)| + 1$ có giá trị lớn nhất là 5 và giá trị nhỏ nhất là 1.

Dạng 2. Hàm số có dạng $y = a\sin x + b\cos x + c$ (với a, b khác 0)

Phương pháp giải:

Bước 1: Ta đưa hàm số về dạng chỉ chứa $\sin[u(x)]$ hoặc $\cos[u(x)]$:

$$y = a\sin x + b\cos x + c = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) + c$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha) + c \text{ với } \alpha \text{ thỏa mãn}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bước 2: Đánh giá $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + c \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1$

b) $y = 3\sin x + 4\cos x + 6$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} y &= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) + 1 \\ &= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1$ có giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -1.

$$b) y = 3 \sin x + 4 \cos x + 6 = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) + 6$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ (vì } \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 = 1)$$

$$\text{Ta được: } y = 5(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) + 6 = 5 \sin(x + \alpha) + 6.$$

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin(x + \alpha) \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 5 \sin(x + \alpha) + 6 \leq 11 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 6$ có giá trị lớn nhất là 11 và giá trị nhỏ nhất là 1.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{3} \sin 2x + \sin^2 x - \cos^2 x + 1$$

Lời giải

$$y = \sqrt{3} \sin 2x + \sin^2 x - \cos^2 x + 1$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - (\cos^2 x - \sin^2 x) + 1$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 1$$

$$= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) + 1$$

$$= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 1$$

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -1.

Dạng 3: Hàm số có dạng $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$

Lý thuyết: Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$ (Lý thuyết có trong phần 7)

Phương pháp giải:

Bước 1: Điều kiện xác định: $a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2 \neq 0$.

Bước 2: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$

$$\Leftrightarrow ya_2 \sin x + yb_2 \cos x + yc_2 = a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1$$

$$\Leftrightarrow (ya_2 - a_1) \sin x + (yb_2 - b_1) \cos x = -yc_2 + c_1 \quad (*)$$

Bước 3: Để phương trình (*) có nghiệm x thì

$$(ya_2 - a_1)^2 + (yb_2 - b_1)^2 \geq (-yc_2 + c_1)^2$$

Tìm đoạn chứa y, sau đó đưa ra kết luận về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x + \cos x + 2 \neq 0$

Ta có: $\sin x + \cos x + 2$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + 2 = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 2$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \geq -\sqrt{2} + 2 > 0.$$

Do đó $\sin x + \cos x + 2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$$

$$\Leftrightarrow y\sin x + y\cos x + 2y = \sin x + 2\cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y \quad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $(y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + y^2 - 4y + 4 \geq 1 - 4y + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y-1)(y+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 \geq 0 \\ y+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -2 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 \leq 0 \\ y+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$$

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất là 1 và giá trị nhỏ nhất là -2.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2\sin x - 2\cos x}{\sin x - \cos x + 3}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x - \cos x + 3 \neq 0$

Ta có: $\sin x - \cos x + 3$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + 3 = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 3$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 3 \geq -\sqrt{2} + 3 > 0.$$

Do đó $\sin x - \cos x + 3 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{2\sin x - 2\cos x}{\sin x - \cos x + 3}$$

$$\Leftrightarrow y\sin x - y\cos x + 3y = 2\sin x - 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\sin x - (y+2)\cos x = -3y \quad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm x thì $(y-2)^2 + (y+2)^2 \geq (-3y)^2$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + y^2 + 4y + 4 \geq 9y^2$$

$$\Leftrightarrow 7y^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{8}{7} \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{\frac{8}{7}} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{56}}{7} \leq y \leq \frac{\sqrt{56}}{7}$$

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất là $\frac{\sqrt{56}}{7}$ và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\sqrt{56}}{7}$.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 5x - 1$

A. min $y = -3$, max $y = 3$

B. min $y = -1$, max $y = 1$

C. min $y = -1$, max $y = 3$ **D.** min $y = -3$, max $y = 1$

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$

A. min $y = -2$, max $y = 4$

B. min $y = 2$, max $y = 4$

C. min $y = -2$, max $y = 3$

D. min $y = -1$, max $y = 4$

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \cos\left(-2x^2 + \frac{\pi}{3}\right) \right| + 1$

A. max $y = 1$, min $y = 0$

B. max $y = 2$, min $y = 0$

C. max $y = 1$, min $y = -1$

D. max $y = 2$, min $y = 1$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

A. min $y = 2$, max $y = 5$ **B.** min $y = 1$, max $y = 4$

C. min $y = 1$, max $y = 5$ **D.** min $y = 1$, max $y = 3$

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$

A. max $y = \sqrt{5}$, min $y = 1$

B. max $y = \sqrt{5}$, min $y = 2\sqrt{5}$

C. max $y = \sqrt{5}$, min $y = 2$

D. max $y = \sqrt{5}$, min $y = 3$

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + 2\sqrt{2 + \sin^2 2x}$

A. min $y = 3 + 2\sqrt{2}$, max $y = 3 + 2\sqrt{3}$

B.

min $y = 2 + 2\sqrt{2}$, max $y = 3 + 2\sqrt{3}$

C. $\min y = 3 - 2\sqrt{2}, \max y = 3 + 2\sqrt{3}$ D.

$\min y = 3 + 2\sqrt{2}, \max y = 3 + 3\sqrt{3}$

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2\cos^2 3x$

A. $\min y = 1, \max y = 2$ B. $\min y = 1, \max y = 3$

C. $\min y = 2, \max y = 3$ D. $\min y = -1, \max y = 3$

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5$

A. $\max y = 9, \min y = 2$

B. $\max y = 10, \min y = 2$

C. $\max y = 6, \min y = 1$ D. $\max y = 5, \min y = 1$

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x + 4\cos x - 2$

A. $\max y = 3, \min y = -7$

B. $\max y = -1, \min y = -5$

C. $\max y = 4, \min y = -1$

D. $\max y = 3, \min y = -5$

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$

A. $\max y = 6, \min y = -2$

B. $\max y = 4, \min y = -4$

C. $\max y = 6, \min y = -4$

D. $\max y = 6, \min y = -1$

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x + 4$

A. $\min y = 2, \max y = 4$ B. $\min y = 2, \max y = 6$

C. $\min y = 4, \max y = 6$ D. $\min y = 2, \max y = 8$

Câu 12. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin 6x + 3\cos 6x$

A. $\min y = -5, \max y = 5$

B. $\min y = -4, \max y = 4$

C. $\min y = -3, \max y = 5$

D. $\min y = -6, \max y = 6$

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$

A. $\min y = -3\sqrt{2} - 1, \max y = 3\sqrt{2} + 1$ B.

$\min y = -3\sqrt{2} - 1, \max y = 3\sqrt{2} - 1$

C. $\min y = -3\sqrt{2}, \max y = 3\sqrt{2} - 1$ D.

$\min y = -3\sqrt{2} - 2, \max y = 3\sqrt{2} - 1$

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x + 2}$ là

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

Câu 15. Gọi M, m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$. Giá

trị của M+m là:

A. $\frac{20}{11}$

B. $\frac{24}{11}$

C. $\frac{4}{11}$

D. $\frac{15}{2}$

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	A	D	C	A	A	B	B	D	C	B	A	B	A	B