Bài 1. Vecto trong không gian

A. Lý thuyết.

I. Định nghĩa và các phép toán về vecto trong không gian.

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B ta có một vecto, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

1. Định nghĩa.

- *Vecto trong không gian là một đoạn thẳng có hướng*. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ v

ecto có điểm đầu là A, điểm cuối là B. Vecto còn được kí hiệu là $\vec{a}; \vec{b}; \vec{x}; \vec{y}$....

- Các khái niệm liên quan đến vecto như giá của vecto, độ dài của vecto, sự cùng phương, cùng hướng của vecto, vecto – không, sự bằng nhau của hai vecto ….được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

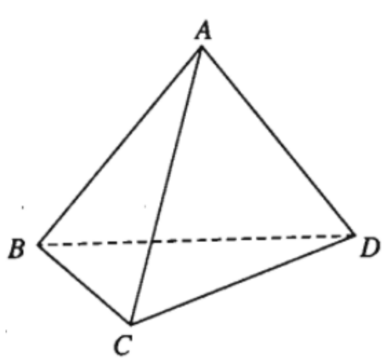
2. Phép cộng và phép trừ vecto trong không gian,

- Phép cộng và phép trừ của hai vecto trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ hai vecto trong mặt phẳng.

- Phép cộng vecto trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vecto trong mặt phẳng. Khi thực hiện phép cộng vecto trong không gian ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vecto trong hình học phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$

Lời giải:



Áp dụng quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$

Ta có:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{DC} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}$$

(điều phải chứng minh).

II. Điều kiện đồng phẳng của ba vecto.

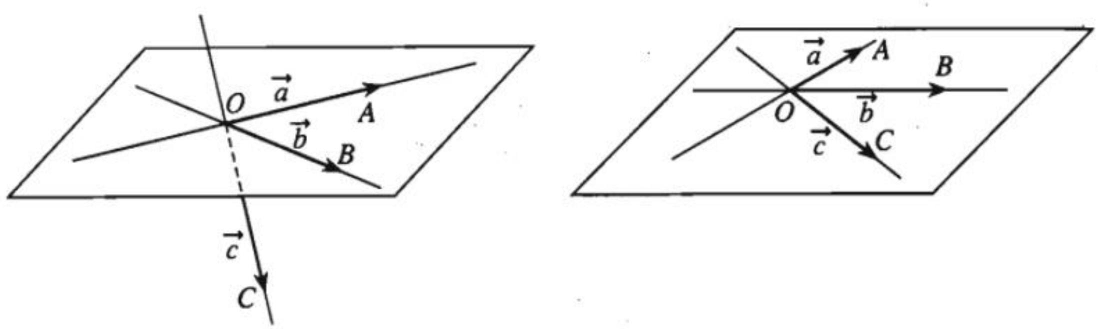
1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vecto trong không gian.

Trong không gian cho ba vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \neq \vec{0}$. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}; \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì có thể xảy ra hai trường hợp:

+ Trường hợp các đường thẳng OA; OB; OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng *ba vecto* $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ *không đồng phẳng*.

+ Trường hợp các đường thẳng OA; OB; OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói rằng *ba vecto* $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ *đồng phẳng*.

Trong trường hợp này, giá của các vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ luôn luôn song song với một mặt phẳng.

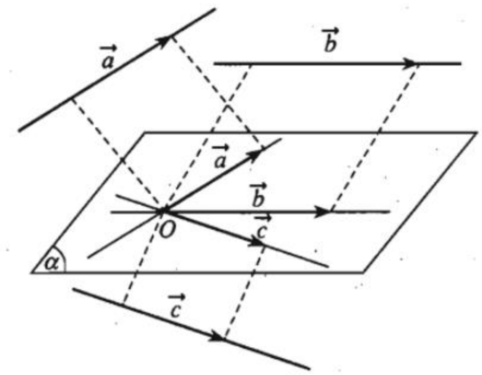


a) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng   b) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

- Chú ý. Việc xác định sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vecto nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm O.

2. Định nghĩa:

Trong không gian ba vecto được gọi là *đồng phẳng* nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



Ví dụ 2. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi I là tâm hình bình hành ABEF và K là tâm hình bình hành BCGF. Chứng minh $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng .

Lời giải :

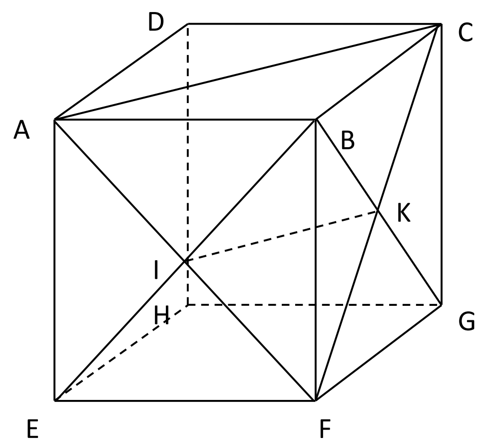
Xét tam giác FAC có I ; K lần lượt là trung điểm của AF và FC nên IK là đường trung bình của tam giác.

$\Rightarrow$ IK// AC nên IK// mp (ABCD) .

Vì BC// GF nên GF // mp(ABCD)

Ta có : $\begin{cases} IK//(ABCD) \\ GF//(ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.



3. Điều kiện để ba vecto đồng phẳng.

Định lí 1.

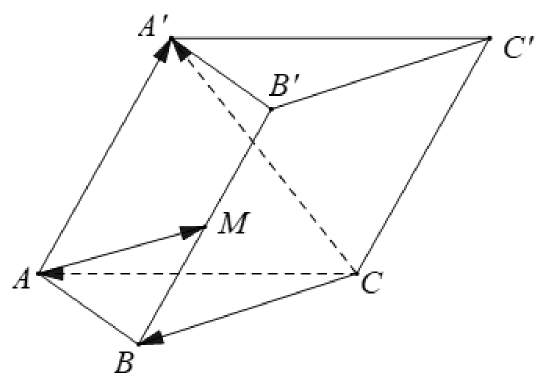
Trong không gian cho hai vecto $\vec{a}; \vec{b}$ không cùng phương và vecto $\vec{c}$. Khi đó, ba vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m; n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\,\vec{b}$. Ngoài ra, cặp số m; n là suy nhất.

- Định lí 2.

Trong không gian cho ba vecto không đồng phẳng $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$. Khi đó, với mọi vecto $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra, bộ ba số m; n; p là duy nhất.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' gọi M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}; \overrightarrow{CB} = \vec{b}; \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vecto $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

Lời giải:



Áp dụng quy tắc 3 điểm và quy tắc hiệu hai vecto ta có :

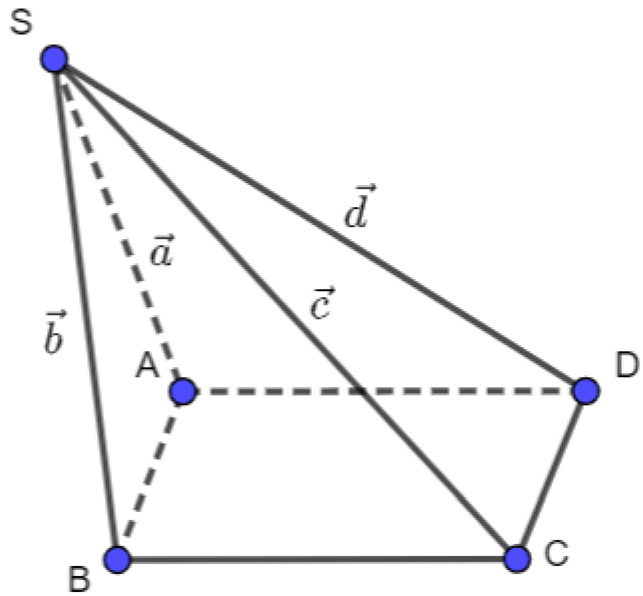
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$ ($\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$ vì M là trung điểm của BB').

$= \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}; \overrightarrow{SB} = \vec{b}; \overrightarrow{SC} = \vec{c}; \overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$

Lời giải:



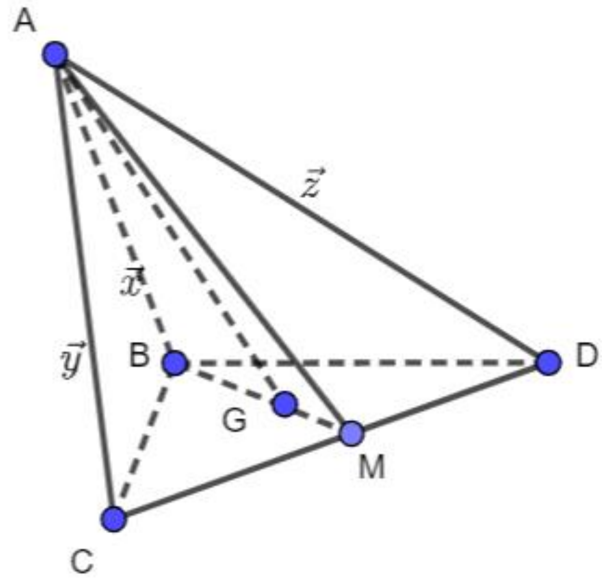
Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$$ (do tính chất của đường trung tuyến)

$\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}; \overrightarrow{AC} = \vec{y}; \overrightarrow{AD} = \vec{z}$;. Phân tích vecto $\overrightarrow{AG}$ theo các vecto $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$

Lời giải:



Gọi M là trung điểm CD.
Ta có :

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right).$$

($\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ (do M là trung điểm của CD)) .

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành ABB’A’ và BCC’B’. Chứng minh:

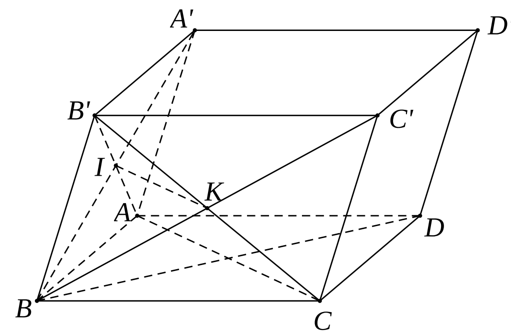
a) $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

b) Bốn điểm I; K; C; A đồng phẳng.

c) $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$.

d) Ba vectơ $\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IK};\overrightarrow{B'C'}$ đồng phẳng.

Lời giải:



a) Do tính chất đường trung bình trong tam giác A’BC’ và tính chất của hình bình hành ACC’A’ nên ta có: $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

b) Do IK là đường trung bình của tam giác AB’C nên IK// AC

Suy ra, bốn điểm I; K; C; A đồng phẳng.

c) Ta có:

$\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$.

d) Vì giá của ba vectơ $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$ đều song song hoặc trùng với mặt phẳng (ABCD). Do đó, theo định nghĩa sự đồng phẳng của các vectơ, ba vectơ trên đồng phẳng.