

Dạng 2: Mệnh đề và suy luận toán học.

1. Lý thuyết:

a. Mệnh đề kéo theo:

Cho mệnh đề P và Q . Mệnh đề “ Nếu P thì Q ” được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là: $P \Rightarrow Q$ (P suy ra Q)

Chú ý: Các định lí toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó:

- P là giả thiết, Q là kết luận.
- P là điều kiện đủ để có Q .
- Q là điều kiện cần để có P .

b. Mệnh đề đảo:

Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

c. Mệnh đề tương đương:

Cho mệnh đề P và Q . Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương.

Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là P tương đương Q , hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q , hoặc P khi và chỉ khi Q .

2. Phương pháp giải:

- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

3. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề sau:

P : “ Tam giác ABC vuông”; Q : “ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”

Hãy phát biểu thành lời văn mệnh đề sau, và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai:

a. $P \Rightarrow Q$

b. $Q \Rightarrow P$

Hướng dẫn:

a. $P \Rightarrow Q$: Nếu tam giác ABC vuông thì $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Mệnh đề này sai vì chưa chắc tam giác ABC vuông tại A.

b. $Q \Rightarrow P$: Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông. Mệnh đề này đúng theo định lý Pitago đảo.

(Định lý Pitago đảo: Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông)

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau:

a. Nếu một số chia hết cho 6 thì số đó chia hết cho 3.

b. Nếu tứ giác ABCD là hình thoi thì hai đường chéo vuông góc với nhau.

c. Nếu $AB = BC = CA$ thì ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn :

a. Ta có: P: “ Một số chia hết cho 6”.

Q: “ Số đó chia hết cho 3”.

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ là: Nếu một số chia hết cho 3 thì số đó chia hết cho 6.

b. Ta có: P: “ Tứ giác ABCD là hình thoi”.

Q: “ ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau”.

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ là: Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

c. Ta có: P: “ $AB = AC = BC$ ”.

Q: “ ABC là tam giác đều”.

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ là: Nếu ABC là tam giác đều thì $AB = BC = CA$.

Ví dụ 3: Phát biểu mỗi mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm “điều kiện cần và đủ”

a. Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.

b. Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là một hình thoi và ngược lại.

c. Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi các biệt thức của nó dương.

Hướng dẫn :

a. Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 là điều kiện cần và đủ để nó chia hết cho 9.

b. Một hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là điều kiện cần và đủ để nó là một hình thoi.

c. Để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt, điều kiện cần và đủ là biệt thức của nó dương.

4. Bài tập tự luyện:

Câu 1: Cách phát biểu nào sau đây không thể dùng để phát biểu mệnh đề $A \Rightarrow B$?

A. Nếu A thì B.

B. A kéo theo B.

C. A là điều kiện đủ để có B.

D. A là điều kiện cần để có B

Hướng dẫn:

Chọn D. Đáp án D sai vì B mới là điều kiện cần để có A.

Các đáp án A; B; C đúng (theo định nghĩa mệnh đề kéo theo).

Câu 2: Giả sử ABC là một tam giác đã cho. Lập mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề này với: P: “ Góc A bằng 90° ”; Q: “ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ”.

A. $P \Leftrightarrow Q$: “ A = 90° khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ” là mệnh đề đúng.

B. $P \Leftrightarrow Q$: “ Nếu A = 90° thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ” là mệnh đề đúng.

C. $P \Leftrightarrow Q$: “ Nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì góc A bằng 90° ” là mệnh đề sai.

D. $P \Leftrightarrow Q$: “Góc A bằng 90° khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ” là mệnh đề đúng.

Hướng dẫn:

Chọn D. Đáp án D đúng vì đây là định lý Pitago thuận và đảo.

Đáp án A sai vì phát biểu sai mệnh đề Q

Đáp án B sai vì “Nếu $A = 90^\circ$ thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ” là mệnh đề kéo theo, không phải mệnh đề tương đương

Đáp án C sai vì “ Nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì góc A bằng 90° ” là mệnh đề kéo theo.

Câu 3: Cho mệnh đề: “ Nếu hai số nguyên chia hết cho 5 thì tổng của chúng chia hết cho 5”. Trong các mệnh đề sau đây, đâu là mệnh đề đảo của mệnh đề trên?

- A. Nếu hai số nguyên chia hết cho 5 thì tổng của chúng không chia hết cho 5.
- B. Nếu hai số nguyên không chia hết cho 5 thì tổng của chúng chia hết cho 5.
- C. Nếu hai số nguyên không chia hết cho 5 thì tổng của chúng không chia hết cho 5.
- D. Nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 5 thì hai số nguyên đó chia hết cho 5.

Hướng dẫn:

Chọn D.

Ta có: P: “ Hai số nguyên chia hết cho 5”.

Q: “ Tổng hai số nguyên chia hết cho 5”

Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ là: Nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 5 thì hai số nguyên đó chia hết cho 5.

Câu 4: Cho mệnh đề: “Nếu n là một số nguyên tố lớn hơn 3 thì $n^2 + 20$ là một hợp số”. Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề đã cho?

- A. Điều kiện cần và đủ để $n^2 + 20$ là một hợp số là n là một số nguyên tố lớn hơn 3.
- B. Điều kiện đủ để $n^2 + 20$ là một hợp số là n là một số nguyên tố lớn hơn 3.
- C. Điều kiện cần để $n^2 + 20$ là một hợp số là n là một số nguyên tố lớn hơn 3.
- D. $n^2 + 20$ là một hợp số là điều kiện đủ để n là một số nguyên tố lớn hơn 3.

Hướng dẫn:

Chọn B.

Xét mệnh đề đúng “ Nếu P thì Q”. Khi đó: P là điều kiện đủ để có Q, hay điều kiện đủ để có Q là P, hoặc để có Q điều kiện đủ là P.

Ta có: P: “ n là một số nguyên tố lớn hơn 3”.

Q: “ $n^2 + 20$ là một hợp số”.

Vậy mệnh đề tương đương với mệnh đề đã cho là: Điều kiện đủ để $n^2 + 20$ là một hợp số là n là một số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 5: Trong các phát biểu dưới đây, phát biểu nào là sai?

- A. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P sai và Q sai.
- B. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q đúng.
- C. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- D. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P sai và Q đúng.

Hướng dẫn:

Chọn C. Theo lý thuyết: Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Câu 6: Cho hai mệnh đề:

A : “ Năm 2019 là năm nhuận ”.

B : “ Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là hình vuông ”.

Hãy cho biết trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ có bao nhiêu mệnh đề sai?

- A. 0.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.

Hướng dẫn:

Chọn A.

- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

-Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Áp dụng vào bài tập:

A sai vì 2019 không chia hết cho 4 nên 2019 không là năm nhuận.

B sai vì tứ giác có 4 cạnh bằng nhau chưa đủ điều kiện để nó là hình vuông.

Ta có: A sai, B sai nên $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng.

Theo chứng minh trên, $A \Rightarrow B$ đúng và $B \Rightarrow A$ đúng nên $A \Leftrightarrow B$ đúng.

Vậy trong các mệnh đề $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ có 0 mệnh đề sai.

Câu 7: Cho mệnh đề: “ Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều”. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Điều kiện đủ để một tam giác là tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

B. Một tam giác là tam giác đều là điều kiện cần để tam giác đó có hai góc bằng nhau.

C. Không thể phát biểu mệnh đề trên dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

D. Điều kiện cần và đủ để tam giác đều là tam giác đó có hai góc bằng nhau.

Hướng dẫn:

Chọn C.

Khái niệm “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” chỉ dùng để phát biểu những mệnh đề đúng.

Mệnh đề đã cho là một mệnh đề sai vì ta xét P: “ Một tam giác có hai góc bằng nhau”, Q: “ Tam giác đó là tam giác đều”. Ở đây P đúng, Q sai nên mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ sai.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. “ABC là tam giác đều \Leftrightarrow Tam giác ABC cân”.

B. “ABC là tam giác đều \Leftrightarrow Tam giác ABC cân và có một góc 60° ” .

C. “ABC là tam giác đều \Leftrightarrow ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau”.

D. “ABC là tam giác đều \Leftrightarrow Tam giác ABC có hai góc bằng 60° ”.

Hướng dẫn:

Chọn A.

Mệnh đề kéo theo “ ABC là tam giác đều \Rightarrow Tam giác ABC cân” là mệnh đề đúng, nhưng mệnh đề đảo “ Tam giác ABC cân \Rightarrow ABC là tam giác đều” là mệnh đề sai.

Do đó, 2 mệnh đề “ ABC là tam giác đều” và “ Tam giác ABC cân” không phải là 2 mệnh đề tương đương.

Các đáp án B,C,D đúng vì đó là các định nghĩa, tính chất và dấu hiệu nhận biết của tam giác đều.

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.
- B. Số tự nhiên chia hết cho 5 là điều kiện đủ để nó có tận cùng bằng 5.
- C. Điều kiện đủ để hình bình hành ABCD là hình thoi.
- D. Tứ giác ABCD là hình thoi là điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Hướng dẫn:

Chọn D. “Tứ giác ABCD là hình thoi suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau” là mệnh đề đúng (theo tính chất hình thoi)

“Tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau suy ra ABCD là hình thoi” là mệnh đề đúng (theo dấu hiệu nhận biết hình thoi)

Do đó hai mệnh đề “Tứ giác ABCD là hình thoi” và “ Tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau” là hai mệnh đề tương đương hay nói cách khác “Tứ giác ABCD là hình thoi là điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc với nhau.”

- Mệnh đề A sai vì: giả sử có hai tam giác diện tích đều bằng 6 nhưng một hình có chiều cao là 3, đáy là 4. Một hình có chiều cao là 2, đáy là 6. Hai tam giác đó không bằng nhau.

- Mệnh đề B sai vì: Số tự nhiên chia hết cho 5 thì nó có tận cùng là 0 hoặc 5.

- Mệnh đề C sai vì : thiếu một vế.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

- A. Nếu số tự nhiên n có tổng các chữ số bằng 9 thì số tự nhiên n chia hết cho 3.

B. Nếu $x > y$ thì $x^2 > y^2$.

C. Nếu $x = y$ thì $t.x = t.y$.

D. Nếu $x > y$ thì $x^3 > y^3$.

Hướng dẫn:

Chọn D. Đây là tính chất của căn bậc 3: “ $x > y$ khi và chỉ khi $x^3 > y^3$ ”.

Xét mệnh đề đảo của đáp án A: “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 3 thì số tự nhiên n có tổng các chữ số bằng 9”. Mệnh đề này sai, chẳng hạn với $n = 123$ thì n chia hết cho 3 nhưng tổng các chữ số của n bằng 6 không chia hết cho 9.

Xét mệnh đề đảo của đáp án B: “Nếu $x^2 > y^2$ thì $x > y$ ” sai vì

$$x^2 > y^2 \Leftrightarrow |x| > |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ x < -y \end{cases}.$$

Xét mệnh đề đảo của đáp án C: “Nếu $t.x = t.y$ thì $x = y$ ” sai vì với $t = 0$ thì $x, y \in \mathbb{R}$.