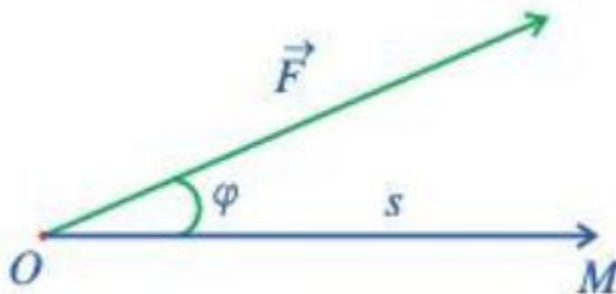


## Bài 6. Tích vô hướng của hai vector

### A. Câu hỏi

**Câu hỏi khởi động trang 93 Toán lớp 10 Tập 1:** Trong vật lí, nếu có một lực  $\vec{F}$  tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường  $s = OM$  (Hình 63) thì công A của lực  $\vec{F}$  được tính theo công thức  $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \cos \varphi$  trong đó  $|\vec{F}|$  gọi là cường độ của lực  $\vec{F}$  tính bằng Newton (N),  $|\overline{OM}|$  là độ dài của vector  $\overline{OM}$  tính bằng mét (m),  $\varphi$  là góc giữa hai vector  $\overline{OM}$  và  $\vec{F}$ , còn công A tính bằng Jun (J).



Hình 63

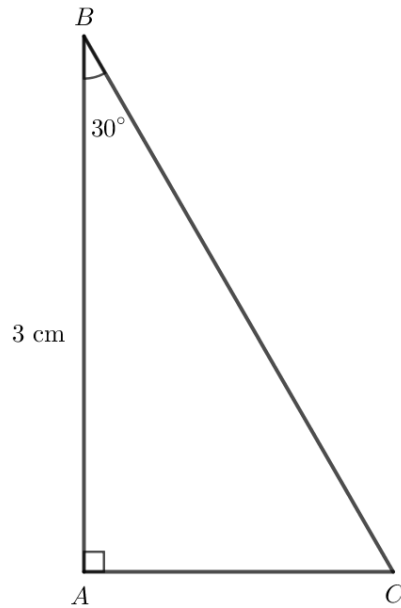
Trong toán học, giá trị của biểu thức  $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \cos \varphi$  (không kể đơn vị đo) được gọi là gì?

### Lời giải:

Giá trị của biểu thức  $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \cos \varphi$  là tích vô hướng của hai vector  $\vec{F}$  và  $\overline{OM}$ .

**Luyện tập 1 trang 93 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $B = 30^\circ$ ,  $AB = 3$  cm. Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải:**



Tam giác ABC vuông tại A nên  $\cos ABC = \frac{BA}{BC}$ .

$$\Rightarrow BC = BA : \cos 30^\circ = 3 : \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\sin ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

$B + C = 90^\circ$  (trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau).

$$\Rightarrow C = 90^\circ - B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 9.$$

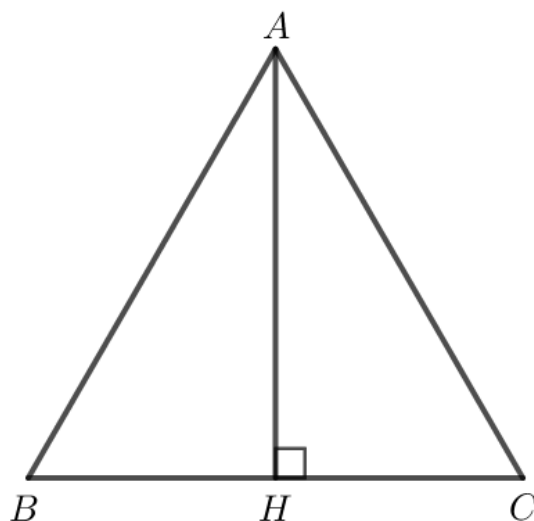
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3.$$

**Luyện tập 2 trang 95 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho tam giác ABC đều cạnh a, AH là đường cao. Tính:

a)  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$ ;

b)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải:**



a) Do tam giác ABC đều nên  $\angle BAC = \angle ABC = 60^\circ$  và  $AB = BC = CA = a$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$= -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

b) Do AH là đường cao của tam giác ABC nên  $AH \perp BC$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \text{ nên } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

**Luyện tập 3 trang 96 Toán lớp 10 Tập 1:** Chứng minh rằng với hai vectơ bất kì  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , ta có:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

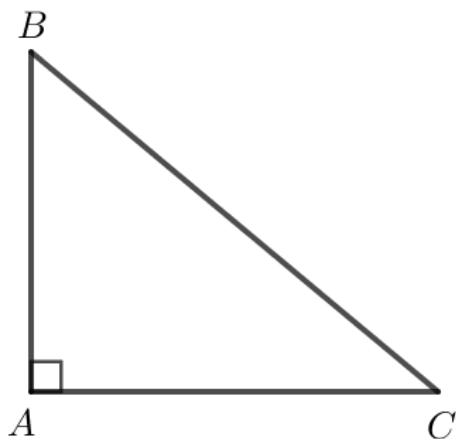
$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

**Luyện tập 4 trang 96 Toán lớp 10 Tập 1:** Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lý Pythagore: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

**Lời giải:**

Phần thuận: Tam giác ABC vuông tại A thì  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



Do tam giác ABC vuông tại A nên  $A = 90^\circ$ .

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC:

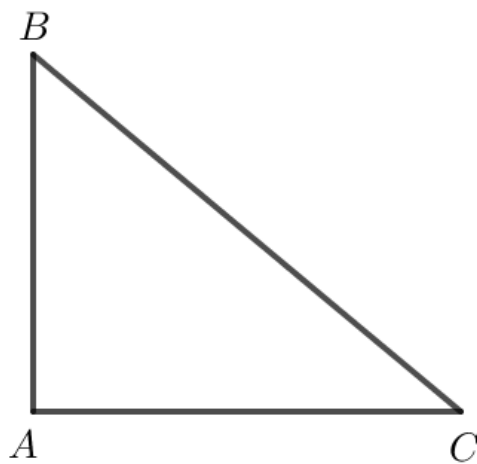
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 90^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.0$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Phản đảo: Tam giác ABC có  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  thì tam giác ABC vuông tại A.



Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$$

$$\text{Mà } BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ nên } -2.AB.AC.\cos A = 0.$$

Do AB và AC là độ dài các cạnh của tam giác nên  $\cos A = 0$ .

Do đó  $A = 90^\circ$ .

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

## B. Bài tập

**Bài 1 trang 97 Toán lớp 10 Tập 1:** Nếu hai điểm M, N thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A.  $MN = 4$ ;

B.  $MN = 2$ ;

C.  $MN = 16$ ;

D.  $MN = 256$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MN} \cdot -\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}^2 = -MN^2.$$

$$\text{Do đó } -MN^2 = -4 \text{ nên } MN^2 = 4.$$

$$\text{Mà } MN > 0 \text{ (độ dài đoạn thẳng) nên } MN = 2.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án B.

**Bài 2 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

B. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

C. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

D. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Lời giải:**

Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ .

Do đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ .

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

**Bài 3 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;

b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;

c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;

d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**Lời giải:**

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$ .

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 5 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = -15$ .

c) Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng nên  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 2 \cdot 3 = 6$ .

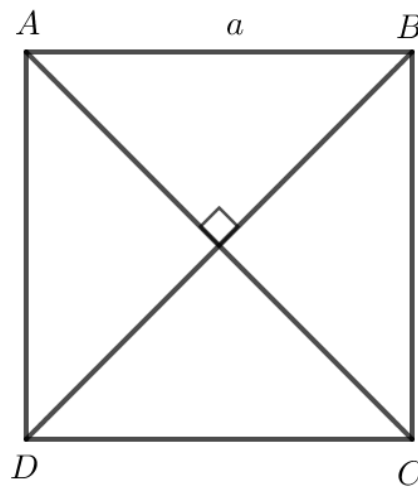
d) Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng nên  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = -2 \cdot 3 = -6$ .

**Bài 4 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính các tích vô hướng sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;

b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải:**



a) Do ABCD là hình vuông nên  $\angle BAC = 45^\circ$ .

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABC vuông tại B:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2}a.$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\angle BAC) = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \cos 45^\circ = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

b) ABCD là hình vuông nên hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

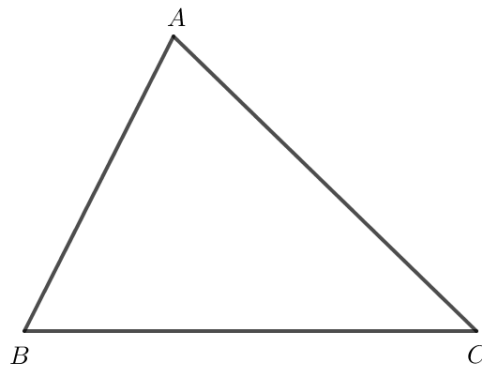


Do đó  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$  nên  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

**Bài 5 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$

**Lời giải:**



$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0}$$

$$= 0.$$

$$\text{Vậy } AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$

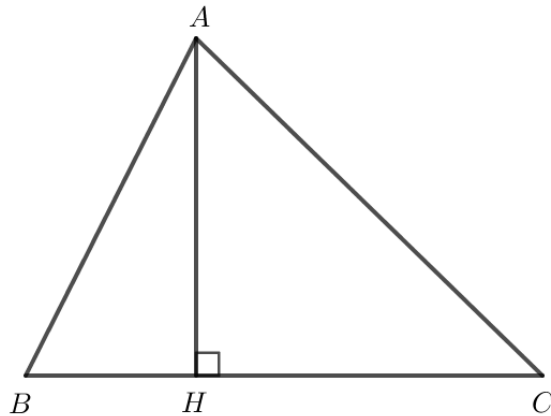
**Bài 6 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho tam giác nhọn ABC, kẻ đường cao AH.

Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH};$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

**Lời giải:**



a) Do AH là đường cao của tam giác ABC nên  $AH \perp BC$ .

Do đó  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$  nên  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

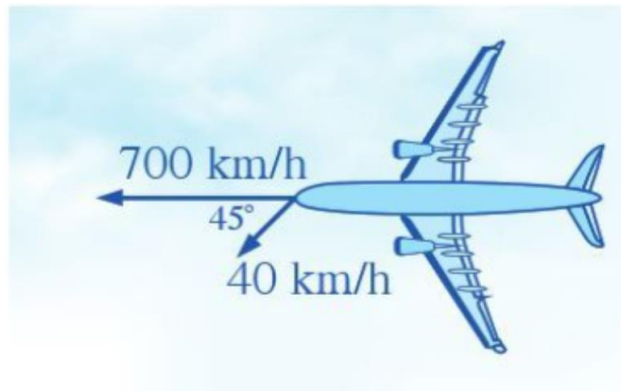
$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

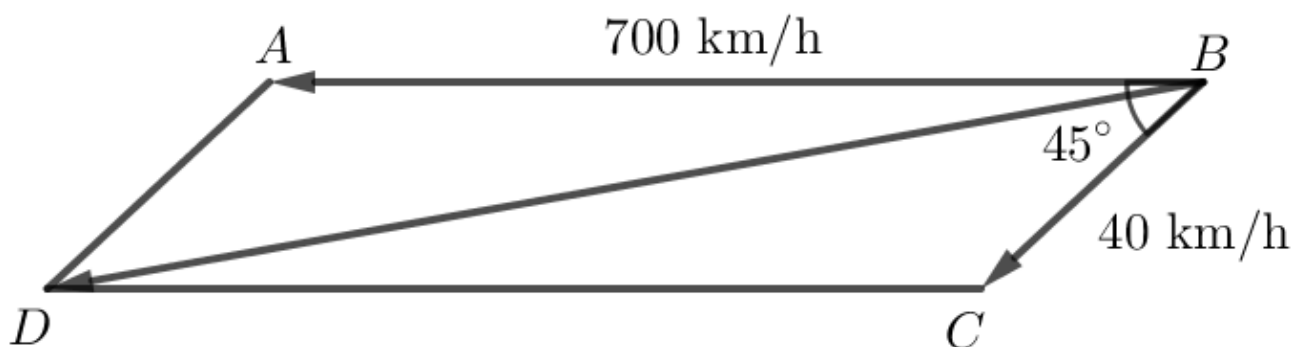
$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

**Bài 7 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình 69). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Hình 69

**Lời giải:**



Gọi vận tốc của máy bay theo hướng từ đông sang tây là  $\overrightarrow{BA}$ , vận tốc gió thổi từ hướng đông bắc sang tây nam là  $\overrightarrow{BC}$ , khi đó vận tốc mới của máy bay là  $\overrightarrow{BD}$ .

Ta có  $|\overrightarrow{AB}| = 700$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = 40$ .

Do ABCD là hình bình hành nên  $AB = CD = 700$  và  $ABC + BCD = 180^\circ$ .

Do đó  $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

Áp dụng định lí côsin vào tam giác BCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD.$$

$$\Rightarrow BD^2 = 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ.$$

$$\Rightarrow BD^2 \approx 531\,197,98.$$

$$\Rightarrow BD \approx 728,83 \text{ km}.$$

Vậy vận tốc mới của máy bay sau khi gặp gió thổi khoảng 728,83 km/h.

**Bài 8 trang 98 Toán lớp 10 Tập 1:** Cho tam giác ABC có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm D thỏa mãn

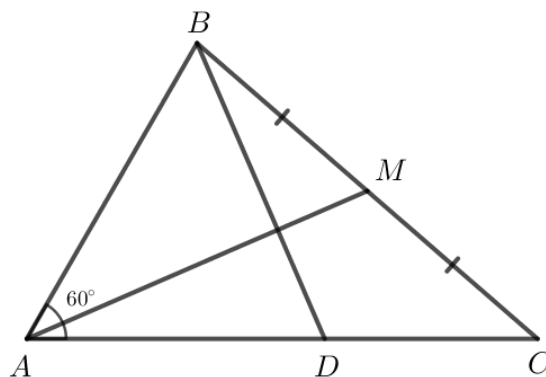
$$\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}.$$

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Lời giải:**



a) Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3.$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3.$

b) Do M là trung điểm của BC nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Ta có  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$

c) Ta có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$$= \frac{7}{24}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{7}{24} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$= 0.$$

Do đó  $AM \perp BD.$