Bài tập Hàm số liên tục - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x>-2\\ 0 & x=-2\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$.

(II) $f(x)$ liên tục tại x = -2

(III) $f(x)$ gián đoạn tại x= -2

A. Chỉ (I) và (III).

B. Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (I).

D. Chỉ (II)

Lời giải:

$$\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2x+8-4}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)\sqrt{x+2}}.$$

$$=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)}=0$$

Vậy $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$

Nên hàm số liên tục tại x= -2

Chọn đáp án B

Bài 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để f(x) gián đoạn tại x= 1.

A. k $\neq \pm 2$.

B. k $\neq$ 2.

C. k $\neq$ -2.

D. k $\neq \pm 1$.

Lời giải:

TXĐ : D= R

Với x= 1 ta có f(1) = k^2

Với $x \neq 1$ ta có

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3)=4$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2=4$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại x= 1

Khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq k^2 \Leftrightarrow k^2\neq 4 \Leftrightarrow k\neq \pm 2$.

Chọn đáp án A

Bài 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại x = 1

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại x = 1

D. Tất cả đều sai

Lời giải:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\left[\sqrt{x-1}.(x+2)+2\right]=2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Hàm số không liên tục tại x = 1

Chọn đáp án C

Bài 4: Chọn giá trị f(0) để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm x= 0.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải:

Ta có :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \frac{2}{(0+1).(1+1)} = 1$$

Vậy để hàm số đã cho liên tục tại x = 0 thì:

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Chọn đáp án A

Bài 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 0$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm nhưng gián đoạn tại $x_0 = 0$

C. Hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$

D. Tất cả đều sai

Lời giải:

Ta có: f(0) = 2

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right) = 2 = f(0)$$

Vậy hàm số liên tục tại x= 0.

Chọn đáp án A

Bài 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} + 2x & \text{khi } x > 2 \\ x^2 - x + 3 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

B. Hàm số liên tục tại mọi điẻm

C. Hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$

D. Tất cả đều sai

Lời giải:

Ta có :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}} + 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x-2}.(x+1) + 2x\right]$$

$$= (\sqrt{2-2}).(2+1) + 2.2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2 - x + 3\right) = 5 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Do đó, không tồn tại $\lim_{x\to 2} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

Chọn đáp án C

Bài 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & , 0 < x < 9 \\ m & , x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & , x \geq 9 \end{cases}$. Tìm m để f(x) liên tục trên [0; +∞) là.

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{6}$

D. 1

Lời giải:

TXĐ: $D = [0;+\infty)$.

Với x= 0 ta có f(0) = m.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3-\sqrt{9-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{9-(9-x)}{x.(3+\sqrt{9-x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3+\sqrt{9-x}} = \frac{1}{6}.$$

Vậy để hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$

Khi hàm số liên tục tại x = 0 nên:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = m \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án C

Bài 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & , x \le \sqrt{2}, a \in \mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & , x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để f(x) liên tục trên R là:

A. 1 và 2.

B. 1 và -1

C. -1 và 2.

D. 1 và -2

Lời giải:

TXĐ: D= R.

Với $x>\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=a^2x^2$

liên tục trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Với $x<\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=(2-a)x^2$

liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$.

Với $x=\sqrt{2}$ ta có $f\left(\sqrt{2}\right)=2a^2$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}(2-a)x^2=2(2-a);$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} a^2x^2=2a^2$.

Để hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2=2(2-a)\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-2\end{array}\right.$.

Vậy a = 1 hoặc a = -2 thì hàm số liên tục trên R.

Chọn đáp án D

Bài 9: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x^3-4x}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x = -2

B. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x = 0

C. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x = 0,5

D. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x = 2

Lời giải:

Hàm số đã cho không xác định tại x = 0, x = -2, x = 2 nên không liên tục tại các điểm đó. Hàm số liên tục tại x = 0,5 vì nó thuộc tập xác định của hàm phân thức f(x).

Chọn đáp án C

Bài 10: Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$ với x ≠ 0. Phải bổ sung thêm giá trị f(0) bằng bao nhiêu để hàm số f(x) liên tục tại x=0?

A. 0 B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Lời giải:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+2-2+x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hàm số liên tục tại x = 0

Khi và chỉ khi f(0)= $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Chọn đáp án C

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ và $f(2) = m^2 - 2$ với $x \neq 2$. Giá trị của m để f(x) liên tục tại x =2 là:

Lời giải:

Hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.

Vậy $m^2-2=1 \Leftrightarrow m^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Bài 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & x\neq 3;\ x\neq 2 \\ b+\sqrt{3} & x=3;\ b\in\mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để f(x) liên tục tại x = 3.

Lời giải:

Hàm số liên tục tại $x=3$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}}=\sqrt{\dfrac{3^2+1}{3^3-3+6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$f(3)=b+\sqrt{3}$.

Vậy:

$b+\sqrt{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b=-\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$.

Bài 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

Lời giải:

Hàm số xác định với mọi x thuộc R

- Với $x<1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}$

$\Rightarrow$ hàm số liên tục

- Với $x>1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$\Rightarrow$ hàm số liên tục

- Tại x= 1 ta có : $f(1)=\dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}=\frac{2}{3}=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

Hàm số liên tục tại x= 1.

Vậy hàm số liên tục trên R.

Bài 4: Cho phương trình $f\left(x\right)=x^4-3x^2+x-\dfrac{1}{8}=0$ (1) .Chọn khẳng định đúng?

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng (-1; 3).

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng (-1; 3).

C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng (-1; 3).

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng (-1; 3).

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}=0$

liên tục trên $[-1;3]$.

Ta có :

$f(-1)=\frac{23}{8}; f(0)=-\frac{1}{8};$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}; f(1)=-\frac{9}{8}; f(3)=\frac{23}{8}$

Suy ra : $f(-1).f(0)<0$; $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$;

$f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$ và $f(1).f(3)<0$

Do đó phương trình có ít nhất 4 ngiệm thuộc khoảng (-1; 3).

Mặt khác phương trình bậc 4 có tối đa bốn nghiệm.

Vậy phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc khoảng (-1; 3).

Bài 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ gián đoạn tại x= 1

(II) $f(x)$ liên tục tại x =1

(III) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III)

C. Chỉ (I) và (III)

D. Chỉ (II) và (III)

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Hàm số không xác định tại x= 1.

Nên hàm số gián đoạn tại x=1.

Bài 6: Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số f(x) = x^3+2x-1 tại x_0=3.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = x^3 + 2x - 1 \; tại \; x_0 = 3$

*Khi đó: $f(x_0) = f(3) = 3^3 + 2.3 - 1$

*Xét dãy số bất kì x_a với $x_a \neq 3$ và $\lim\limits_{a \to +\infty} x_n = 3$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n^3 + 2x_n - 1) = 3^3 + 2.3 - 1 = f(3)$

Vậy theo định nghĩa, f(x) liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 7

a. Xét tính liên tục của hàm số y = g(X) tại $x_0 = 2$. Biết:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} \; (nếu \; x \neq 2 \\ 5 \; (nếu = 2) \end{cases}$$

b.Trong biểu thức g(x) ở trên, cần thay số 5 bởi số nào đó để hàm số liên tục tại x_0=2.

Lời giải:

a. với $x \neq 2 => g(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{x^3-2^3}{x-2}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 2^2+2.2+4 = 12$$

Với x = 2 => g(2) = 5 => $\lim_{x\to 2} g(x) = 12 \neq g(2) = 5$

Vậy hàm số đã cho không liên tục tại điểm x = 2.

b. Nếu hàm số g(x) xác định như sau:

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \ (\text{nếu } x \neq 2\ ) \\ 12\ (\text{nếu} = 2) \end{cases}$ khi đó g(x) liên tục tại x =2

Vậy khi thay số 5 bởi số 12 thì hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

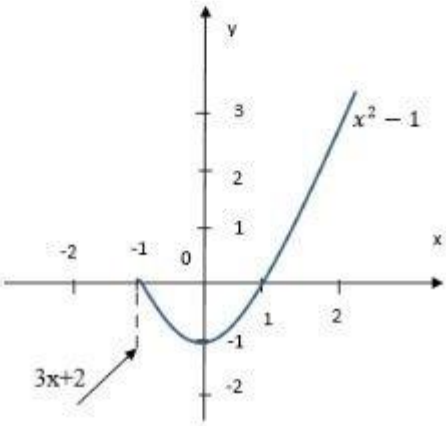
Bài 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+2\ (\text{nếu} < -1) \\ x^2-1(\text{nếu } x \geq -1) \end{cases}$

a. Vẽ đồ thị hàm số y= f(x). Từ đó nêu nhận xét vê tính liên tục của hàm sso trên tập xác định của nó.

b. Khẳng định nhận xét trên bằng 1 chứng minh.

Lời giải:

a. Đồ thị hàm số (hình bên). Từ đồ thị ta thấy số gián đoạn tại x = -1.



b) Ta có: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + 2) = 3.(-1) + 2 = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 1) = 0$

⇨ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

Cho các hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 6}$ và g(x) = tan(x) + sin(x)

Bài 9 Với mỗi hàm số, hãy xác định các khoảng trên đó hàm liên tục.

Lời giải:

*Đặt $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$

Hàm số xác định khi: $x^2+x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2; x\neq -3$

Vậy hàm số xác định khi $x\neq 2; x\neq -3$

Hàm f(x) là hàm phân thức nên liên tục tại mọi điểm thuộc tập xá

Do đó, hàm số f(x) liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3);(-3;2);(2$

*Với $g(x) = tanx + sinx = \frac{sinx}{cosx} + sinx$

Điều kiện g(x) có nghĩa: $cosx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$

vậy hàm số không liên tục tại điểm x = $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (k∈ Z)

vì g(x) là hàm số lượng giác liên tục tại mọi x và tại đó g(x) xác đ

Do đó g(x) liên tục trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad ,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ với k

Bài 10: Ý kiến sau đúng hay sai?

"Nếu hàm số y = f(x) liên tục tại điểm x_0 và hàm số y = g(x) không liên tục tại x_0, thì y = f(x) + g(x) là một hàm số không liên tục tại x_0".

Lời giải:

Ý kiến trên đúng, vì y = h(x) = f(x) + g(x) liên tục tại x_0 thì h(x) – f(x) = g(x) liên tục tại x_0 (theo định lý 2 về hàm số liên tục) trái với giả thiết g(x) không liên tục tại x_0.

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình:

a. $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

b. cos x = x có nghiệm

Bài 2 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 3x+2; & x<-1 \\ x^2-1 & x\geq -1 \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số y=f(x). Từ đó nêu nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh.

Bài 3 a. Xét tính liên tục của hàm số y=g(x) tại $x_0=2$, biết

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}; & x\neq 2 \\ 5; & x=2 \end{cases}$$

b. Trong biểu thức xác định g(x) ở trên, cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại x0=2.

Bài 4 Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ và g(x)=tanx+sinx.

Bài 5 Ý kiến sau đúng hay sai ?

"Nếu hàm số y=f(x) liên tục tại điểm x0 còn hàm số y=g(x) không liên tục
tại x0 thì
y=f(x)+g(x) là một hàm số không liên tục tại x0"

Bài 6 Chứng minh rằng phương trình:

a) $2^{x^3} - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm;

b) cosx=x có nghiệm.

Bài 7 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x > -2 \\ 0 & x = -2 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Bài 8 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , x > 1 \\ x^2 + 3 & , x < 1 \\ k^2 & , x = 1 \end{cases}$. Tìm k để f(x) gián đoạn tại x= 1

Bài 9 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1}} + 2 & \text{khi } x > 1 \\ 3x^2 + x - 1 & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

Bài 10 Chọn giá trị f(0) để các hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm x= 0.