Bài 2. Định lí côsin và định lí sin

A. Lý thuyết

1. Định lí côsin trong tam giác

Định lí côsin: Trong tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.

Từ định lí côsin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 5 và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính độ dài cạnh BC, số đo góc B và C (làm tròn số đo góc đến độ).

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có AB = 4, AC = 5 và $\cos A = \frac{3}{5}$, áp dụng định lí côsin ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$

$$\Rightarrow BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow BC^2 = 17$

$\Rightarrow BC = \sqrt{17}.$

Áp dụng hệ quả định lí côsin ta có:

$+)\ \cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC}$

$\Rightarrow \cos B = \dfrac{4^2 + 17 - 5^2}{2.4.\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \cos B = \dfrac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow B \approx 76°.$

$+)\ \cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC}$

$\Rightarrow \cos B = \dfrac{5^2 + 17 - 4^2}{2.5.\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \cos C = \dfrac{13\sqrt{17}}{85} \Rightarrow C \approx 51°.$

Vậy $BC = \sqrt{17}, B \approx 76°$ và $C \approx 51°.$

2. Định lí sin trong tam giác

Định lí sin: Trong tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

Trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

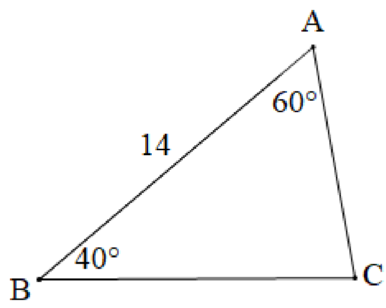
Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả:

a = 2R.sinA; b = 2R.sinB; c = 2R.sinC;

$\sin A = \dfrac{a}{2R}; \sin B = \dfrac{b}{2R}; \sin C = \dfrac{c}{2R}.$

Ví dụ 2. Cho hình vẽ:



Tính các cạnh, các góc chưa biết và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC (làm tròn độ dài đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $A = 60°, B = 40°$ ta có:

$A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow C = 180° - A - B$

$\Rightarrow C = 180° - 60° - 40° = 80°$

Theo định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin 40°} = \frac{14}{\sin 80°} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{14.\sin 60°}{\sin 80°} \approx 12,3 \\ AC = \dfrac{14.\sin 40°}{\sin 80°} \approx 9,1 \\ R = \dfrac{14}{2.\sin 80°} \approx 7,1 \end{cases}$$

Vậy $C = 80°; BC \approx 12,3; AC \approx 9,1$ và $R \approx 7,1$.

3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

+) BC = a, CA = b, AB = c.

+) h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.

+) R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

+) r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

+) p là nửa chu vi tam giác.

+) S là diện tích tam giác.

Ta có các **công thức tính diện tích tam giác** sau:

(1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

(2) $S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B$;

(3) $S = \frac{abc}{4R}$;

(4) S = pr;

(5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (**Công thức Heron**).

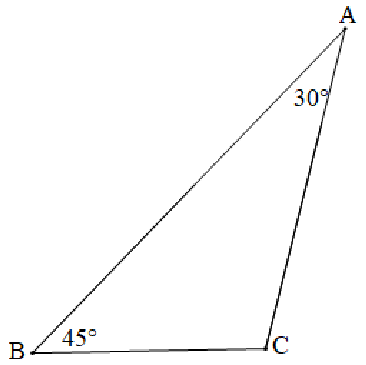
Ví dụ 3. Tính diện tích S của tam giác ABC, bán kính đường tròn nội tiếp r và bán kính đường tròn ngoại tiếp R (nếu chưa biết) (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba) trong các trường hợp sau:

a) $A = 30°, B = 45°, R = 3$;

b) AB = 10, AC = 17, BC = 21.

Hướng dẫn giải

a)



Xét tam giác ABC có $\hat{A} = 30°, \hat{B} = 45°$ ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\Rightarrow \hat{C} = 180° - 30° - 45° = 105°$

Theo hệ quả định lí sin ta có:

+) BC = 2.R.sinA = 2.3.sin30° = $6.\dfrac{1}{2}$ = 3;

+) AC = 2.R.sinB = 2.3.sin45° = $6.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$;

+) AB = 2.R.sinC = 2.3.sin105° ≈ 5,796.

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin A \approx \dfrac{1}{2}.5,796.3\sqrt{2}.\sin 30° \approx 6,148$ (đơn vị diện tích)

Ta có nửa chu vi tam giác ABC là: $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} \approx \dfrac{5,796 + 3 + 3\sqrt{2}}{2} \approx 6,519.$

Mà S_{ABC} = pr $\Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} \approx \frac{6,148}{6,519} \approx 0,943.$

Vậy $S_{ABC} \approx 6,148$ (đơn vị diện tích) và $r \approx 0,943$.

b) Nửa chu vi tam giác ABC là: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{10 + 17 + 21}{2} = 24$

Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{24.(24 - 10).(24 - 17).(24 - 21)} = 84 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

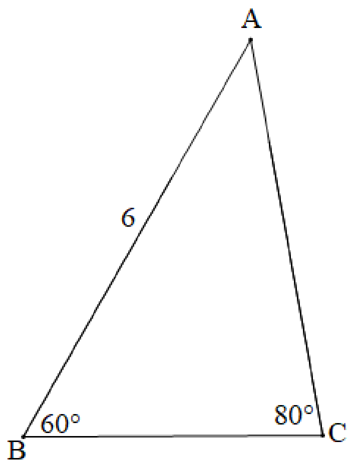
Mà S_{ABC} = pr $\Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{84}{24} = 3,5$

Lại có $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.AC.BC}{4S} = \frac{10.17.21}{4.84} = 10,625.$

Vậy S = 84 (đơn vị diện tích) và r = 3,5; R = 10,625.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính độ dài cạnh và góc chưa biết của tam giác ABC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và đường cao kẻ từ C của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) trong hình sau:



Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $B = 60°, C = 80°$ ta có:

$A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow A = 180° - B - C$

$\Rightarrow A = 180° - 60° - 80° = 40°$

Theo định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 40°} = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{6}{\sin 80°} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{6.\sin 40°}{\sin 80°} \approx 3,92 \\ AC = \dfrac{6.\sin 60°}{\sin 80°} \approx 5,28 \\ R = \dfrac{6}{2.\sin 80°} \approx 3,05 \end{cases}$$

Nửa chu vi tam giác ABC là: $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} \approx \dfrac{6 + 5,28 + 3,92}{2} = 7,6$

Áp dụng công thức Heron ta có diện tích tam giác ABC là:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$

$S_{ABC} \approx \sqrt{7,6.(7,6-6).(7,6-5,28).(7,6-3,92)} \approx 10,19$ (đơn vị diện tích)

Mặt khác $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{ABC}}{p} \approx \dfrac{10,19}{7,6} \approx 1,34$

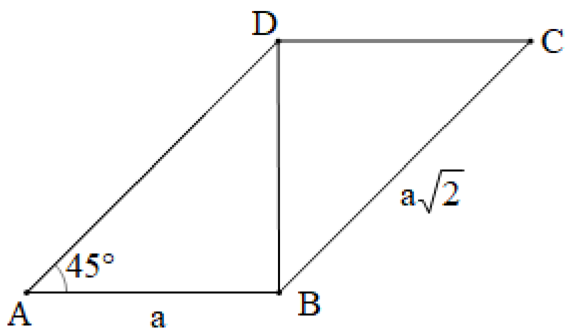
Lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.h_C$ (với h_C là đường cao kẻ từ C đến AB của tam giác ABC)

$\Rightarrow h_C = \dfrac{2.S_{ABC}}{AB} \approx \dfrac{2.10,19}{6} \approx 3,4.$

Vậy $A = 40°$; $BC \approx 3,92$; $AC \approx 5,28$; $R \approx 3,05$; $r \approx 1,34$; $h_C \approx 3,4$ và $S \approx 10,19$ (đơn vị diện tích).

Bài 2. Hình bình hành ABCD có AB = a, $BC = a\sqrt{2}$ và $BAD = 45°$. Tính diện tích hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Vì ABCD là hình bình hành nên AD = BC (tính chất hình bình hành)

Mà $BC = a\sqrt{2}$ nên $AD = a\sqrt{2}$

Diện tích tam giác ABD là:

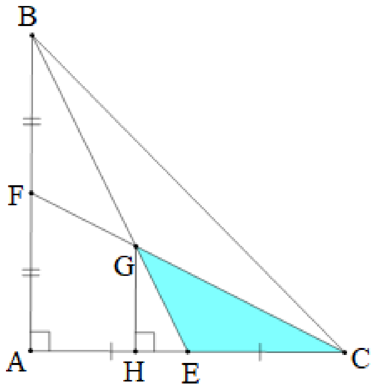
$S_{ABD} = \dfrac{1}{2}.AB.AD.\sin BAD = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45° = \dfrac{a^2}{2}$ (đơn vị diện tích)

Do đó diện tích hình bình hành ABCD là:

$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2}{2} = a^2$ (đơn vị diện tích)

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A có AB = AC = 30 cm. Hai đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Tính diện tích tam giác GEC.

Hướng dẫn giải



Vì BE là trung tuyến của tam giác ABC nên E là trung điểm của AC.

Do đó $EC = \frac{1}{2}.AC = \frac{1}{2}.30 = 15\left(cm\right)$

Hai đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó $GE = \frac{1}{3}BE$ (tính chất trọng tâm của tam giác)

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống AC.

Suy ra GH // AB.

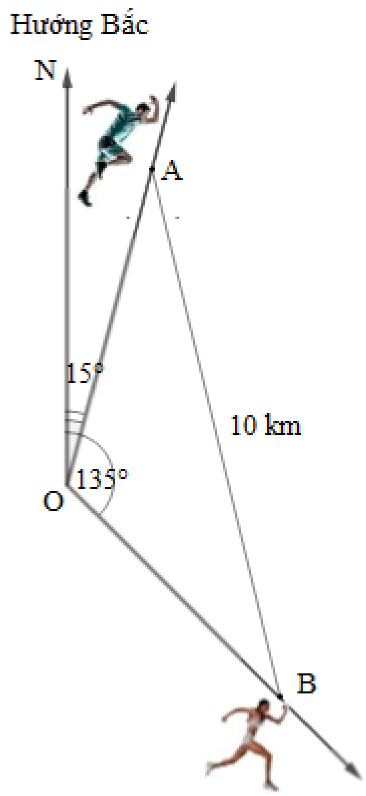
Do đó $\frac{GH}{BA} = \frac{GE}{BE}$ (định lí Ta – let trong tam giác ABE)

Hay $\frac{GH}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH = \frac{1}{3}.30 = 10\left(cm\right)$

Diện tích tam giác GEC là: $S_{GEC} = \frac{1}{2}.GH.EC = \frac{1}{2}.10.15 = 75\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích tam giác GEC là 75 cm^2.

Bài 4. Vào lúc 9 giờ sáng, hai vận động viên A và B xuất phát từ cùng một vị trí O. Vận động viên A chạy với vận tốc 13 km/h theo một góc so với hướng Bắc là 15°, vận động viên B chạy với vận tốc 12 km/h theo một góc so với hướng Bắc là 135° (hình vẽ). Tại thời điểm nào thì vận động viên A cách vận động viên B một khoảng 10 km (làm tròn kết quả đến phút)?



Hướng dẫn giải

Gọi x giờ (x > 0) là khoảng thời gian kể từ khi bắt đầu chạy từ điểm O đến khi hai vận động viên cách nhau 10 km.

Khi đó đoạn đường mà vận động viên A chạy được là 13x (km);

Đoạn đường mà vận động viên B chạy được là 12x (km).

Theo hình vẽ trên ta có: AB = 10, OA = 13x, OB = 12x và $AOB = 135° - 15° = 120°$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OAB ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\sin AOB$

$\Rightarrow 10^2 = (13x)^2 + (12x)^2 - 2.13x.12x.\sin 120°$

$\Rightarrow 10^2 = 169x^2 + 144x^2 - 312x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 10^2 = \left(313 - 156\sqrt{3}\right)x^2$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{10}{313 - 156\sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 0{,}483$ (giờ) (vì x > 0) ≈ 29 phút.

Vì hai vận động viên bắt đầu chạy từ 9 giờ, do đó thời điểm mà hai vận động viên cách nhau 10 km là khoảng: 9 giờ 29 phút.

Vậy vào khoảng 9 giờ 29 phút thì hai vận động viên sẽ cách nhau 10 km.