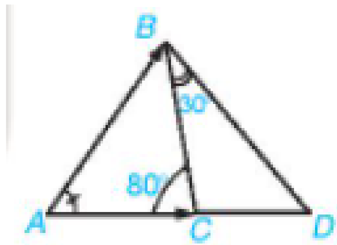
Bài 11. Tích vô hướng của hai vecto

Hoạt động 1 trang 66 SGK Toán 10 tập 1: Trong Hình 4.39, số đo góc BAC cũng được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Hãy tìm số đo các góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$.



Hình 4.39

Lời giải

Số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$ là góc CBD bằng 30°.

Xét tam giác BCD có BCA là góc ngoài của tam giác tại đỉnh C nên:

$BCA = CBD + CDB \Rightarrow CDB = BCA - CBD = 80° - 30° = 50°$

$\Rightarrow ADB = 50°$

Suy ra số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$ là góc ADB bằng 50°.

Vậy số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 30° và số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$ bằng 50°.

Câu hỏi trang 66 SGK Toán 10 tập 1: Khi nào thì góc giữa hai vectơ bằng 0°, bằng 180°.

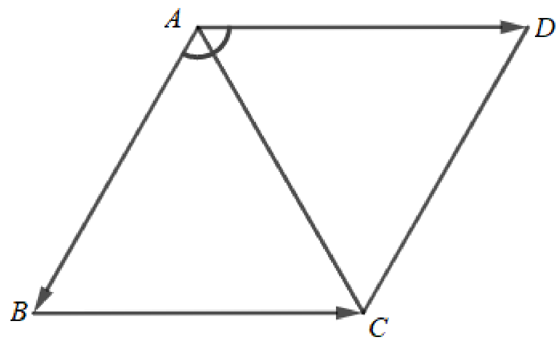
Lời giải

Góc giữa hai vectơ bằng 0° khi hai vectơ cùng hướng.

Góc giữa hai vectơ bằng 180° khi hai vectơ ngược hướng.

Luyện tập 1 trang 66 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác đều ABC. Tính $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

Lời giải



Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = BAD$.

Vì ABC là tam giác đều nên $ABC = 60°$.

Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow$ AD // BC (tính chất hình bình hành)

$\Rightarrow BAD + ABC = 180°$ (hai góc trong cùng phía)

$\Rightarrow BAD = 180° - ABC = 180° - 60° = 120°$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = BAD = 120°$

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 120°$.

Câu hỏi trang 67 SGK Toán 10 tập 1: Khi nào tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương? Là một số âm?

Lời giải

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ được tính bởi công thức sau:

$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

Vì $\left|\vec{u}\right| > 0, \left|\vec{v}\right| > 0$ nên dấu của tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$ phụ thuộc vào dấu của $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

+) Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương thì $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) > 0$.

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là góc nhọn hoặc bằng 0°.

+) Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là một số âm thì $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) < 0$.

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là góc tù hoặc bằng 180°.

Vậy khi $0° \le \left(\vec{u},\vec{v}\right) < 90°$ thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là một số dương;

Khi $90° < \left(\vec{u},\vec{v}\right) \le 180°$ thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là một số âm.

Câu hỏi trang 67 SGK Toán 10 tập 1: Khi nào thì $\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2$?

Lời giải

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2 = \left[\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2.\cos^2\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Để $\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2$ thì $\vec{u}^2.\vec{v}^2.\cos^2\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \vec{u}^2.\vec{v}^2$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 1\\ \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0°\\ \left(\vec{u},\vec{v}\right) = 180°\end{array}\right.$$

+) Với $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0°$ thì hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

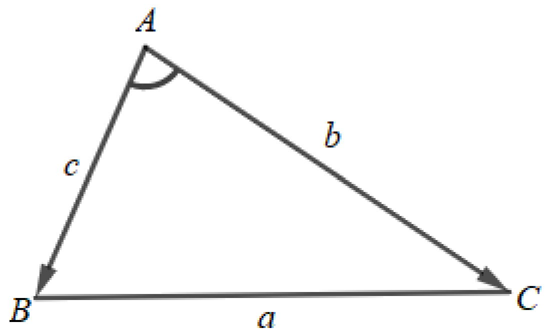
+) Với $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 180°$ thì hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng

Suy ra cả hai trường hợp thì hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

Vậy khi hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương thì $\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2.\vec{v}^2$.

Luyện tập 2 trang 67 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Hãy tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos BAC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc.\cos BAC$

Xét tam giác ABC, theo định lí côsin ta có: $\cos BAC = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC.AB}$

$\Rightarrow \cos BAC = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

Hoạt động 2 trang 68 SGK Toán 10 tập 1: Cho hai vectơ cùng phương $\vec{u} = (x;y)$ và $\vec{v} = (kx;ky)$. Hãy kiểm tra công thức $\vec{u}.\vec{v} = k\left(x^2 + y^2\right)$ theo từng trường hợp sau:

a) $\vec{u} = \vec{0}$;

b) $\vec{u} \ne \vec{0}$ và $k \ge 0$;

c) $\vec{u} \ne \vec{0}$ và k < 0.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} = (x; y) \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{v} = (kx; ky) \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2} = \sqrt{k^2\left(x^2 + y^2\right)} = |k|\sqrt{x^2 + y^2}$

a) Vì vectơ $\vec{0}$ vuông góc với mọi vectơ nên vectơ $\vec{v}$ vuông góc với $\vec{u} = \vec{0}$

Do đó $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Ta có: $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = (0; 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Do đó $k\left(x^2 + y^2\right) = k\left(0^2 + 0^2\right) = 0$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = k\left(x^2 + y^2\right) = 0$

Vậy với $\vec{u} = \vec{0}$ thì công thức $\vec{u}.\vec{v} = k\left(x^2 + y^2\right)$ đúng.

b) Vì $k \ge 0$ nên vectơ $\vec{v} = (kx; ky)$ cùng hướng với vectơ $\vec{u} = (x; y)$

$\Rightarrow \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0°$

Do đó $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

$= \sqrt{x^2 + y^2}.|k|\sqrt{x^2 + y^2}.\cos 0° = k.\left(x^2 + y^2\right).1 = k\left(x^2 + y^2\right)$

Vậy với $\vec{u} \ne \vec{0}$ và $k \ge 0$ thì công thức $\vec{u}.\vec{v} = k\left(x^2 + y^2\right)$ đúng.

c) Vì k < 0 nên vectơ $\vec{v} = (kx; ky)$ ngược hướng với vectơ $\vec{u} = (x; y)$

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180°$

Do đó: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= \sqrt{x^2 + y^2}.|k|\sqrt{x^2 + y^2}.\cos180° = -k.(x^2 + y^2).(-1) = k(x^2 + y^2)$

Vậy với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và k < 0 thì công thức $\vec{u}.\vec{v} = k(x^2 + y^2)$ đúng.

Hoạt động 3 trang 68 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

a) Xác định tọa độ các điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

b) Tính AB^2, OA^2, OB^2 theo tọa độ của A và B.

c) Tính $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ theo tọa độ của A, B.

Lời giải

a) Vì $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ mà $\vec{u} = (x; y)$ nên $\overrightarrow{OA} = (x; y)$ suy ra A(x; y).

Vì $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ mà $\vec{v} = (x'; y')$ nên $\overrightarrow{OB} = (x'; y')$ suy ra B(x'; y').

b) +) Ta có: A(x; y) và B(x'; y') $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x' - x; y' - y)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

$\Rightarrow AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

+) Ta có $\overrightarrow{OA}=\left(x;y\right)\Rightarrow OA=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow OA^2=x^2+y^2$.

+) Ta có: $\overrightarrow{OB}=\left(x';y'\right)\Rightarrow OB=\sqrt{x'^2+y'^2}\Rightarrow OB^2=x'^2+y'^2$.

Vậy $AB^2=\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2$; $OA^2=x^2+y^2$ và $OB^2=x'^2+y'^2$.

c) Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA.OB.\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=OA.OB.\cos AOB$

Xét tam giác OAB, theo định lí côsin ta có: $\cos AOB=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2-\left[\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2\right]}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2-\left(x'^2-2x'x+x^2+y'^2-2y'y+y^2\right)}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{x^2+y^2+x'^2+y'^2-x'^2+2x'x-x^2-y'^2+2y'y-y^2}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{2x'x+2y'y}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{2.\left(x'x+y'y\right)}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos AOB=\frac{x'x+y'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Do đó $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA.OB.\cos AOB$

$= \sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}.\dfrac{x'x + y'y}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x'x + y'y$.

Vậy $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x'x + y'y$.

Luyện tập 3 trang 68 SGK Toán 10 tập 1: Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -5), \vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$

Lời giải

Với $\vec{u} = (0; -5), \vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$

Suy ra:

+) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5;$

+) $|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2;$

+) Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}.\vec{v} = 0.\sqrt{3} + (-5).1 = -5.$

Ta có: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{-5}{5.2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 120°$

Vậy $\vec{u}.\vec{v} = -5$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 120°.

Hoạt động 4 trang 68 SGK Toán 10 tập 1: Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1), \vec{v} = (x_2; y_2)$, $\vec{w} = (x_3; y_3)$.

a) Tính $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$, $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ theo tọa độ các vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

b) So sánh $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ và $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

c) So sánh $\vec{u}.\vec{v}$ và $\vec{v}.\vec{u}$.

Lời giải

a) Với $\vec{u}=\left(x_1; y_1\right), \vec{v}=\left(x_2; y_2\right)$ và $\vec{w}=\left(x_3; y_3\right)$ ta có:

+) $\vec{v}+\vec{w}=\left(x_2+x_3; y_2+y_3\right)$

$\Rightarrow \vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=x_1.\left(x_2+x_3\right)+y_1.\left(y_2+y_3\right)=x_1.x_2+x_1.x_3+y_1.y_2+y_1.y_3$.

+) $\vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2$ và $\vec{u}.\vec{w}=x_1.x_3+y_1.y_3$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}=x_1.x_2+y_1.y_2+x_1.x_3+y_1.y_3$.

b) Theo câu a ta có:

$\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=x_1.x_2+y_1.y_2+x_1.x_3+y_1.y_3$ và $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}=x_1.x_2+y_1.y_2+x_1.x_3+y_1.y_3$

$\Rightarrow \vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

Vậy $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

c) Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2$ và $\vec{v}.\vec{u}=x_2.x_1+y_2.y_1=x_1.x_2+y_1.y_2$.

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.

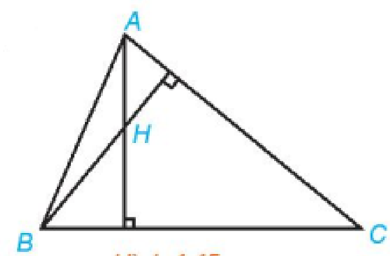
Vậy $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.

Luyện tập 4 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC với A(–1;2), B(8;–1), C(8;8). Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$.

b) Tìm tọa độ của H.

c) Giải tam giác ABC.



Hình 4.45

Lời giải

a) Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên:

+) $AH\perp BC\Rightarrow \overrightarrow{AH}\perp \overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0;$

+) $BH\perp CA\Rightarrow \overrightarrow{BH}\perp \overrightarrow{CA}\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$.

Vậy $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$.

b) Gọi tọa độ điểm H là H(x; y).

Ta có: A(–1;2), B(8;–1), C(8;8) và H(x; y).

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(x+1;y-2\right);\overrightarrow{BC}=\left(0;9\right)$ và $\overrightarrow{BH}=\left(x-8;y+1\right);\overrightarrow{AC}=\left(9;6\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=\left(x+1\right).0+\left(y-2\right).9=9\left(y-2\right)$.

Và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=\left(x-8\right).9+\left(y+1\right).6=9x-72+6y+6=9x+6y-66$.

Theo câu a ta có: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$ 9(y – 2) = 0 ⇔ y – 2 = 0 ⇔ y = 2.

Và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ (do BH ⊥ AC) ⇔ 9x + 6y – 66 = 0.

Thay y = 2 vào 9x + 6y – 66 = 0 ta được: 9x + 6.2 – 66 = 0

⇔ 9x – 54 = 0

⇔ 9x = 54

⇔ x = 6

⇒ H(6; 2)

Vậy H(6; 2).

c) Với A(–1;2), B(8;–1), C(8;8) ta có:

+) $\overrightarrow{AB} = (9;-3) \Rightarrow AB = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10};$

+) $\overrightarrow{AC} = (9;6) \Rightarrow AC = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13};$

+) $\overrightarrow{BC} = (0;9) \Rightarrow BC = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9;$

+) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9.9 + (-3).6 = 63;$

Có: $\cos BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{63}{3\sqrt{10}.3\sqrt{13}} = \dfrac{63}{9.\sqrt{130}} = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$

$\Rightarrow BAC \approx 52°8'$

+) $\overrightarrow{AB} = (9;-3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-9;3) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-9).0 + 3.9 = 27;$

Có: $\cos ABC = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC} = \dfrac{27}{3\sqrt{10}.9} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow ABC \approx 71°34'$

Xét tam giác ABC, theo định lí tổng ba góc trong một tam giác ta có: $BAC + ABC + ACB = 180°$

$\Rightarrow ACB = 180° - \left(BAC + ABC\right)$

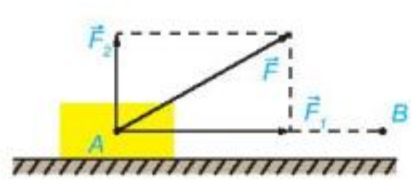
$\Rightarrow ACB \approx 180° - \left(52°8' + 71°34'\right) \approx 56°18'$

Vậy $AB = 3\sqrt{10}, AC = 3\sqrt{13}, BC = 9, BAC \approx 52°8', ABC \approx 71°34', ACB \approx 56°18'$.

Vận dụng trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Một lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B. Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ $\left(\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\vec{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.

b) Giả sử các lực thành phần $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\vec{F}$ và lực $\vec{F_1}$.



Hình 4.46

Lời giải

a) Một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật làm vật dịch chuyển tịnh tiến theo một vectơ độ rời $\vec{s}$.

+) Công sinh bởi lực $\vec{F}$ là $A_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{s}$

+) Công sinh bởi lực $\overrightarrow{F_1}$ là $A_{\overrightarrow{F_1}} = \overrightarrow{F_1}.\vec{s}$

+) Công sinh bởi lực $\overrightarrow{F_2}$ là $A_{\overrightarrow{F_2}} = \overrightarrow{F_2}.\vec{s}$

Suy ra $A_{\overrightarrow{F_1}} + A_{\overrightarrow{F_2}} = \overrightarrow{F_1}.\vec{s} + \overrightarrow{F_2}.\vec{s} = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right).\vec{s}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng của tích vô hướng)

Mà $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ do đó $A_{\overrightarrow{F_1}} + A_{\overrightarrow{F_2}} = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right).\vec{s} = \vec{F}.\vec{s} = A_{\vec{F}}$

Vậy $A_{\vec{F}} = A_{\overrightarrow{F_1}} + A_{\overrightarrow{F_2}}$.

b) +) Công sinh bởi lực $\vec{F}$ là $A_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{s} = F.s.\cos\left(\vec{F}, \vec{s}\right)$

Do vật chuyển động thẳng từ A đến B nên $\vec{s}$ cùng hướng với $\overrightarrow{F_1}$.

Suy ra $\left(\vec{F}, \vec{s}\right) = \left(\vec{F}, \overrightarrow{F_1}\right)$

Do đó $A_{\vec{F}} = F.s.\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{F_1}\right)$

Ta lại có: $F_1 = F.\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{F_1}\right)$

$\Rightarrow A_{\vec{F}} = F_1.s \qquad (1)$

+) Công sinh bởi lực $\overrightarrow{F_1}$ là $A_{\overrightarrow{F_1}} = \overrightarrow{F_1}.\vec{s} = F_1.s.\cos\left(\overrightarrow{F_1}, \vec{s}\right)$

Do $\vec{s}$ cùng hướng với $\vec{F_1}$ nên $\left(\vec{F_1}, \vec{s}\right) = 0°$

$\Rightarrow A_{\vec{F_1}} = F_1.s.\cos 0^0 = F_1.s$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A_{\vec{F}} = A_{\vec{F_1}} \left(= F_1.s\right)$.

Vậy $A_{\vec{F}} = A_{\vec{F_1}}$.

Bài 4.21 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = \left(-3;1\right), \vec{b} = \left(2;6\right)$;

b) $\vec{a} = \left(3;1\right), \vec{b} = \left(2;4\right)$;

c) $\vec{a} = \left(-\sqrt{2};1\right), \vec{b} = \left(2;-\sqrt{2}\right)$;

Lời giải

a) Với $\vec{a} = \left(-3;1\right)$ và $\vec{b} = \left(2;6\right)$ ta có $\vec{a}.\vec{b} = \left(-3\right).2 + 1.6 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^0$.

b) Với $\vec{a} = \left(3;1\right)$ và $\vec{b} = \left(2;4\right)$ ta có:

+) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$;

+) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

+) $\vec{a}.\vec{b} = 3.2 + 1.4 = 10$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{10}{\sqrt{10}.2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)=45°.$$

c) Với $\vec{a}=\left(-\sqrt{2};1\right)$ và $\vec{b}=\left(2;-\sqrt{2}\right)$ ta có:

+) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3};$

+) $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}$

+) $\vec{a}.\vec{b}=\left(-\sqrt{2}\right).2+1.\left(-\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{6}}=-1$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)=180°.$$

Bài 4.22 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Tìm điều kiện của $\vec{u},\vec{v}$ để:

a) $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|;$

b) $\vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|;$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Để $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ thì $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$

$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\vec{u},\vec{v}\right)=0°$

Suy ra $\vec{u},\vec{v}$ là hai vectơ cùng hướng.

Vậy hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng thì $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$.

b) Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Để $\vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ thì $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$

$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\vec{u},\vec{v}\right)=180°$

Suy ra $\vec{u},\vec{v}$ là hai vectơ ngược hướng.

Vậy hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng thì $\vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$.

Bài 4.23 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(1; 2), B(–4; 3). Gọi M(t; 0) là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ theo t;

b) Tính t để $AMB = 90°$.

Lời giải

a) Với A(1; 2), B(–4; 3) và M(t; 0) ta có: $\overrightarrow{AM}=\left(t-1;-2\right),\overrightarrow{BM}=\left(t+4;-3\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=\left(t-1\right)\left(t+4\right)+\left(-2\right).\left(-3\right)=t^2+3t-4+6=t^2+3t+2.$

b) Để $AMB = 90°$ thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

$$\Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow (t+1)(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Vậy với $t \in \{-1;-2\}$ thì $AMB = 90°$.

Bài 4.24 trang 70 SGK Toán 10 tập 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2).

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải

a) Với A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2) ta có:

+) $\overrightarrow{AB} = (6;3) \Rightarrow AB = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$;

+) $\overrightarrow{AC} = (6;-3) \Rightarrow AC = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$;

+) $\overrightarrow{BC} = (0;-6) \Rightarrow BC = \sqrt{0^2+(-6)^2} = 6$;

+) Theo định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC} = \frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2-6^2}{2.3\sqrt{5}.3\sqrt{5}} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow A \approx 53°8'$

Tam giác ABC có AB = AC nên tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow B = C = \dfrac{180° - A}{2} \approx \dfrac{180° - 53°8'}{2} = 63°26'$.

Vậy $AB = AC = 3\sqrt{5}, BC = 6, A \approx 53°8', B = C \approx 63°26'$.

b) Giả sử trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ là H(x; y).

Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $AH \perp BC; BH \perp AC$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

Với A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2) và H(x; y) ta có:

$\overrightarrow{AH} = (x+4; y-1); \overrightarrow{BC} = (0; -6); \overrightarrow{BH} = (x-2; y-4); \overrightarrow{AC} = (6; -3)$

Vì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$ (x + 4).0 + (y – 1).(–6) = 0 ⇔ –6.(y – 1) = 0 ⇔ y = 1.

Vì $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow$ (x – 2).6 + (y – 4).(–3) = 0

⇔ (x – 2).2 + (y – 4).(–1) = 0 ⇔ 2x – y = 0.

Mà y = 1 $\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy toạ độ trực tâm H của tam giác ABC là $H\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 4.25 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{\sin^2\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$

$=\frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1-\cos^2\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$

$$=\frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}{AB^2.AC^2}}$$

$$=\frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{\frac{AB^2.AC^2-\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}{AB^2.AC^2}}$$

$$=\frac{1}{2}AB.AC.\frac{1}{AB.AC}.\sqrt{AB^2.AC^2-\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}$$

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2.\cos^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2.\left[1-\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2.\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

Mà $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2, \overrightarrow{AC}^2 = AC^2$

Do đó: $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2 - \left[AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2.\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right]$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2 + AB^2.AC^2.\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2.\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \sqrt{AB^2.AC^2.\sin^2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = AB.AC.\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$$

Mà $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = BAC$ và $0^\circ < BAC < 180^\circ$

$$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) > 0 \Rightarrow \left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

Do đó $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = AB.AC.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Bài 4.26 trang 70 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$ (Quy tắc ba điểm)

$= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2$

$= \left(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}^2\right) + \left(2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$

$= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (tính chất trọng tâm tam giác)

$\Rightarrow \overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \overrightarrow{MG}.\vec{0} = 0$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$.

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.