Bài tập cuối chương IV

Bài 67 trang 106 SBT Toán 10 Tập 1: Cho góc nhọn α. Biểu thức $(\sin\alpha . \cot\alpha)^2 + (\cos\alpha . \tan\alpha)^2$ bằng:

A. 2.

B. $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$.

C. 1.

D. $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Lời giải:

Đáp án đúng là C

Ta có: $(\sin\alpha . \cot\alpha)^2 + (\cos\alpha . \tan\alpha)^2$

$= (\sin\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})^2 + (\cos\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$= 1$.

Bài 68 trang 106 SBT Toán 10 Tập 1: Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\left|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right|$.

B. $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

D. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Lời giải:

Đáp án đúng là D

Với $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ ta có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Bài 69 trang 106 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tứ giác ABCD. Biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$ bằng:

A. CD^2.

B. 0.

C. $\vec{0}$.

D. 1.

Lời giải:

Đáp án đúng là B

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$=\overrightarrow{CD}.\vec{0}=0$

Bài 70 trang 106 SBT Toán 10 Tập 1: Cho góc nhọn α. Biểu thức tanα . tan(90°– α) bằng:

A. tanα + cotα.

B. $\tan^2\alpha$

C. 1.

D. $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$.

Lời giải:

Đáp án đúng là C

tanα . tan(90°– α)

= tanα . cotα

= 1.

Bài 71 trang 106 SBT Toán 10 Tập 1: Cho α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính cosα, tanα, cotα, sin(90° – α), cos(90° – α), sin(180° – α), cos(180° – α) trong các trường hợp sau:

a) 0° < α < 90°;

b) 90° < α < 180°;

Lời giải:

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

a) Vì 0° < α < 90° nên $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Áp dụng công thức lượng giác của hai góc bù nhau, ta được:

$\sin(90° – \alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{5}$;

$\cos(90° – \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\sin(180° – \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\cos(180° – \alpha) = –\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

b) Vì $90° < \alpha < 180°$ nên $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Áp dụng công thức lượng giác của hai góc bù nhau, ta được:

$\sin(90° – \alpha) = \cos\alpha = -\frac{4}{5}$;

$\cos(90° – \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\sin(180° – \alpha) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$;

$\cos(180° – \alpha) = –\cos\alpha = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Bài 72 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 6, $\widehat{BAC} = 60°$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp R;

c) Diện tích của tam giác ABC;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;

e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$ với M là trung điểm của BC.

Lời giải:

a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

Xét tam giác ABC, có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 – 2AB.AC.\cos BAC$

$= 4^2 + 6^2 – 2.4.6.\cos 60°$

$= 4^2 + 6^2 – 24$

$= 28$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{28}$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta được:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \frac{6.\sin 60°}{\sqrt{28}} \approx 0,98$$

$\Leftrightarrow B \approx 79°$.

Vậy BC = $\sqrt{28}$ và $B \approx 79°$.

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$\Leftrightarrow\ R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{28}}{2\sin 60^\circ} \approx 3$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 3.

c) Áp dụng công thức tính diện tích tam giác, ta được:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \dfrac{1}{2}.4.6.\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ (đvdt)

Vậy diện tích của tam giác ABC là $6\sqrt{3}$ (đvdt).

d) Gọi AH là đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh A

Ngoài ra diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.\sqrt{28}.AH$

Theo ý c) ta tính được diện tích tam giác là $6\sqrt{3}$

Do đó ta có: $\dfrac{1}{2}.\sqrt{28}.AH = 6\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ AH = \dfrac{2.6\sqrt{3}}{\sqrt{28}} \approx 4$

Vậy độ dài đường cao xuất phát từ A là 4.

e) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4.6.\cos 60^\circ = 12.$

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}.\overrightarrow{AC}^2 = \dfrac{1}{2}.12 + \dfrac{1}{2}.6^2 = 24$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$ và $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 24$.

Bài 73 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AC}^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AC}^2\right]$

$=\frac{1}{2}.2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

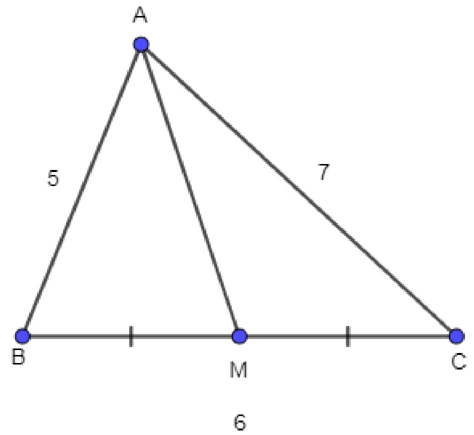
Bài 74 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 6, CA = 7. Tính:

a) $\sin\widehat{ABC}$;

b) Diện tích tam giác ABC;

c) Độ dài đường trung tuyến AM.

Lời giải:



a) Xét tam giác ABC, có:

Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta được:

$$\cos ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2.5.6} = \frac{1}{5}$$

Ta có: $\cos^2 ABC + \sin^2 ABC = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 ABC = 1 - \cos^2 ABC = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

Vì ABC là góc trong tam giác nên $0° < ABC < 180°$

$$\Rightarrow \sin ABC = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Vậy $\sin ABC = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

b) Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.\sin ABC = \frac{1}{2}.5.6.\frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}\ \text{(đvdt)}$$

Vậy diện tích tam giác ABC là $6\sqrt{6}$.

c) Vì M là trung điểm của BC nên BM = MC = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{2}$.6 = 3.

Xét tam giác ABM:

Áp dụng định lí cos, ta có:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 – 2.AM.BM.\cos B$

$\Leftrightarrow AM^2 = 5^2 + 3^2 – 2.5.3.\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow AM^2 = 28$

$\Leftrightarrow AM = 2\sqrt{7}$

Vậy độ dài đường trung tuyến AM là $2\sqrt{7}$.

Bài 75 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho ba điểm I, A, B và số thực k ≠ 1 thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$. Chứng minh với O là điểm bất kì ta có: $\overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}$

.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Xét vế phải của đẳng thức ta có:

$$\left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) - \left(\frac{k}{1-k}\right)\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right)$$

$$= \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{IA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OI} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{IB}$$

$$= \left(\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OI} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OI}\right) + \left(\frac{1}{1-k}\overrightarrow{IA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{IB}\right)$$

$$= \overrightarrow{OI}\left(\frac{1}{1-k} - \frac{k}{1-k}\right) + \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{IA} - k\overrightarrow{IB}\right)$$

$$= \overrightarrow{OI} + \frac{1}{1-k}\vec{0}$$

$= \overrightarrow{OI}$.

Bài 76 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 5, $BAC = 120^\circ$. Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC, điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và chứng minh AM ⊥ BD.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4.5.\cos 120^\circ = -10$

Ta lại có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

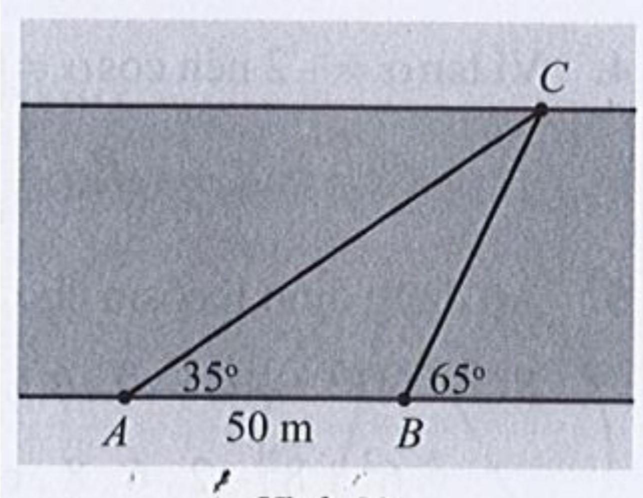
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}.4^2 + \frac{1}{5}(-10) - \frac{1}{2}(-10) + \frac{1}{5}.5^2 = 0$

Suy ra AM vuông góc BD.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$ và AM vuông góc BD.

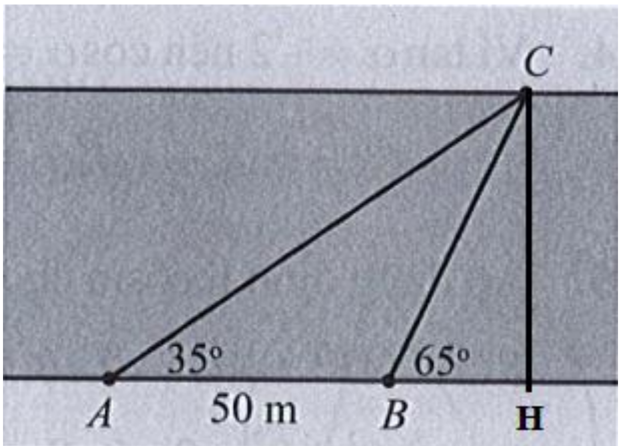
Bài 77 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Một người quan sát đứng ở bờ sông muốn đo độ rộng của khúc sông chỗ chảy qua vị trí đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ sông song song).



Hình 53

Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35°$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đi dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng d = 50m và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65°$ so với bờ sông tới vị trí C đã chọn (Hình 53). Hỏi độ rộng của con sông chỗ chảy qua vị trí người quan sát đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải:



Hình 53

Kẻ CH vuông góc với bờ AB.

Xét tam giác ABC, có:

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{BAC} + \mathrm{ACB} = 180°$$

$$\Rightarrow \mathrm{ACB} = 180° - \left(\mathrm{ABC} + \mathrm{BAC}\right) = 180° - \left(35° + 115°\right) = 30°$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác, ta được:

$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin CAB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 35^\circ}$$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{50\sin 35^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 57,36$$

Xét tam giác CHB vuông tại B, có:

$$\sin CBH = \frac{CH}{BC} \Leftrightarrow CH = \sin CBH.BC \approx \sin 65^\circ.57,36 \approx 51,98.$$

Vậy độ rộng của con sông chỗ chảy qua vị trí người quan sát khoảng 51,98 mét.

Bài 78 trang 107 SBT Toán 10 Tập 1: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\left|\vec{a}\right| = 4, \left|\vec{b}\right| = 5, \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 135^\circ$. Tính $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$.

Lời giải:

$$\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b} + 4\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 3\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + 3\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - 2\vec{b}^2$$

$$= 2.4^2 + 3.4.5.\cos 135^\circ - 2.5^2 = -18 - 30\sqrt{2}$$

Bài 79 trang 108 SBT Toán 10 Tập 1: a) Chứng minh đẳng thức $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì.

b) Cho $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3, \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{7}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Lời giải:

a) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}$.

b) Áp dụng công thức trên ta được:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2.\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7}^2=2^2+3^2+2.\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow 7=4+9+2.\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=-3$$

Mặt khác ta lại có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$

$$\Leftrightarrow -3=2.3.\cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a}.\vec{b}\right)=120^\circ.$$

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=-3$ và $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=120^\circ$.

Bài 80 trang 108 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC, có ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$= 0$

Bài 81 trang 108 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tứ giác ABCD, M là điểm thay đổi trong mặt phẳng thỏa mãn $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$. Chứng minh M luôn nằm trên đường tròn cố định.

Lời giải:

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right).\left(2\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \ IMJ=90°$

Vậy M là điểm thuộc đường tròn đường kính IJ.

Bài 82 trang 108 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác ABC và đường thẳng d không có điểm chung với bất kì cạnh nào của tam giác. M là điểm thay đổi trên đường thẳng d. Xác định vị trí của M sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Xét biểu thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$

$=3\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=3\overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|$

Do đó để biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left|3\overrightarrow{MG}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất và MG nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.

Vậy để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì điểm M là hình chiếu vuông góc của G trên đường thẳng d.