

Chuyên đề Đường thẳng và mặt phẳng song song - Toán 11

A. Lý thuyết.

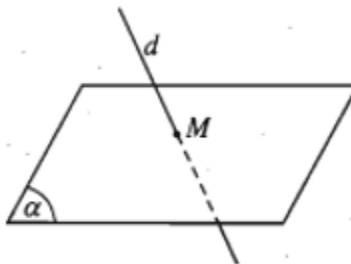
I. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Tùy theo số điểm chung của d và (α) , ta có ba trường hợp sau:

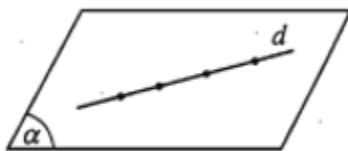
- d và (α) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.



- d và (α) chỉ có một điểm chung duy nhất M . Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = M$.

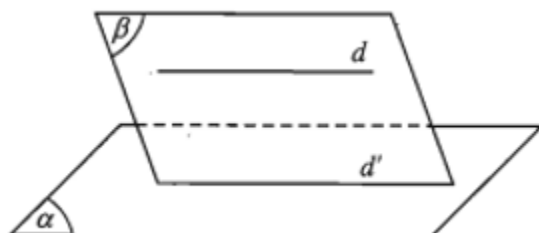


- d và (α) có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó, d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$.



II. Tính chất

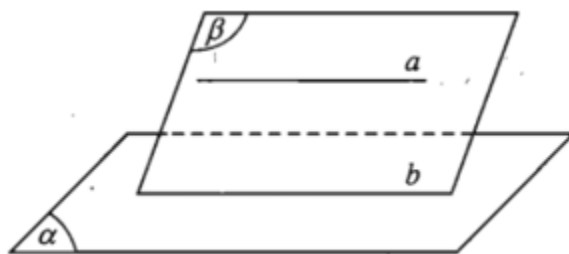
- **Định lí.** Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} d // d' \\ d' \subset (\alpha), d \not\subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d // (\alpha).$$

- **Định lí.** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



- **Hệ quả.** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

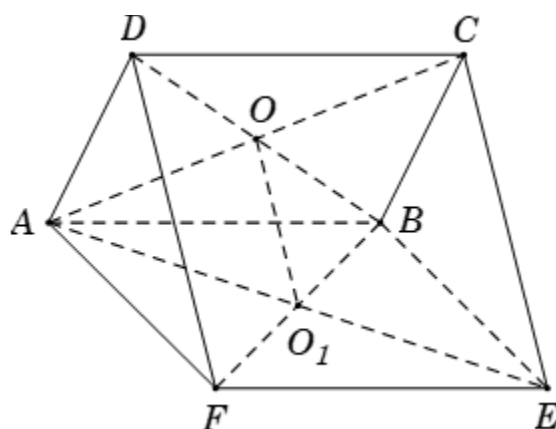
- **Định lí.** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của ABCD và ABEF, gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh:

a) $OO_1 \parallel mp(BEC)$.

b) $OO_1 \parallel mp(AFD)$

Lời giải.



a) Xét tam giác ACE có O; O_1 lần lượt là trung điểm của AC; AE (tính chất hình hình hành).

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác ACE và $OO_1 \parallel EC$.

Mà EC thuộc mp (BEC) nên $OO_1 \parallel mp(BEC)$ (đpcm).

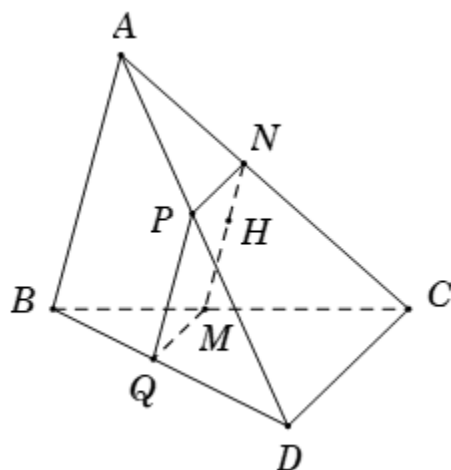
b) Tương tự; OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

Mà FD nằm trong mp(AFD)

Suy ra: $OO_1 \parallel mp(AFD)$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC và (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là hình gì?

Lời giải:



+ Qua H kẻ đường thẳng song song AB và đường thẳng này cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

+ Từ N kẻ NP song song với CD $P \in AD$

Từ P kẻ PQ song song với AB $Q \in BD$.

+ Ta có: $MN \parallel PQ \parallel AB$

Suy ra 4 điểm M; N; P và Q đồng phẳng .

Suy ra thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là tứ giác MNPQ.

+ Ta chứng minh MNPQ là hình bình hành.

Trước tiên, ta chứng minh $PN \parallel QM$.

Ta có:

$PN \parallel CDPN \subset mp(MNPQ), CD \subset mp(BCD)QM = mp(MNPQ) \cap mp(BCD)$

Suy ra: $QM \parallel PN \parallel CD$

Lại có: $PQ \parallel MN$

Do đó, tứ giác MNPQ là hình bình hành.

B. Bài tập

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC

B. BD

C. AD

D. SC

Lời giải:

Đáp án: C

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD, M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MNPQ là hình bình hành.

B. MNPQ là hình thoi.

C. MNPQ là hình thang chỉ có một cặp cạnh đối song song.

D. MNPQ là tứ giác không có cặp cạnh nào song song.

Lời giải:

Đáp án: A

Bài 3: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là giao điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) là hình gì?

A. thiết diện là hình thang cân.

B. hình bình hành.

C. tam giác.

D. tứ giác không có cặp cạnh nào song song.

Lời giải:

Đáp án: A

I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC nên $IJ \parallel AB$. Do đó giao tuyến của (IJK) với (ABD) là đường thẳng đi qua K và song song với AB cắt AD tại H. Vậy $IJ \parallel KH \parallel AB$. Ta có $\triangle BJK = \triangle AIH \Rightarrow JK = IH$. Hơn nữa $KH \neq IJ$.

Vậy thiết diện là hình thang cân IJKH.

Bài 4: Cho hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:

A. song song với hai đường thẳng đó

B. song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

C. trùng với một trong hai đường thẳng đó

D. cắt một trong hai đường thẳng đó

Lời giải:

Đáp án: B

Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi IJ lần lượt là trung điểm của BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là đường nào sau đây?

A. đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BC$.

B. đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BD$.

C. đường thẳng d đi qua A và $d \parallel CD$.

D. đường thẳng d đi qua A, M trong đó M là giao điểm IJ và CD.

Lời giải:

Đáp án: C

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD. E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $IJ \parallel (SBD)$

B. $IJ \parallel (SEF)$

C. $IJ \parallel (SAB)$

D. $IJ \parallel (SAD)$

Lời giải:

Đáp án: A

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNC) và (ABD) là đường nào trong các đường thẳng sau đây?

A. OA

B. OM

C. OC

D. CD

Lời giải:

Đáp án: D

Bài 8: Với điều kiện nào sau đây thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

A. $a // b$ và $b \cap (\alpha) = \emptyset$

B. $a // b$ và $b // (\alpha)$

C. $a // b$ và $b \subset (\alpha)$

D. $a \cap (\alpha) = \emptyset$

Lời giải:

Đáp án: D

Các phương án A, B, C sai vì α có thể thuộc (α) . Phương án D đúng vì theo định nghĩa. Đáp án D.

Bài 9: Cho tứ diện ABCD, M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

(1) $MN \parallel (BCD)$

(2) $MN \parallel (ACD)$

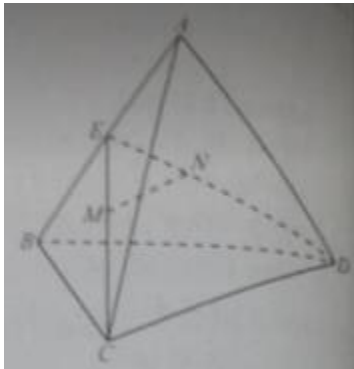
(3) $MN \parallel (ABD)$

A. Chỉ có (1) đúng

B. (2) và (3)

C. (1) và (2)

D. (1) và (3)



Lời giải:

Đáp án: C

Gọi E là trung điểm của AB, M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD nên:

$$\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{ED} = \frac{1}{3},$$

Theo định lí Ta – lét ta có: $MN \parallel CD$. Vậy $MN \parallel (BCD)$, $MN \parallel (ACD)$. Đáp

án C.

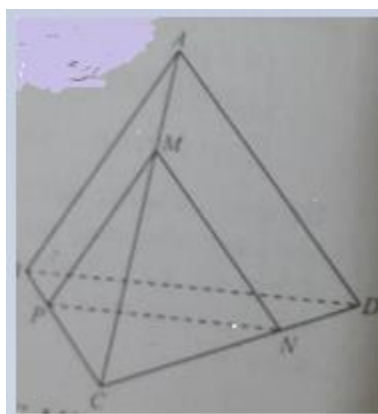
Bài 10: Cho tứ diện ABCD, điểm M thuộc AC. Mặt phẳng (α) đi qua M, song song với AB và AD. Thiết diện (α) với tứ diện ABCD là hình gì?

A. Thiết diện là tam giác

B. Hình bình hành

C. Hình thoi

D. Hình thang



Lời giải:

Đáp án: A

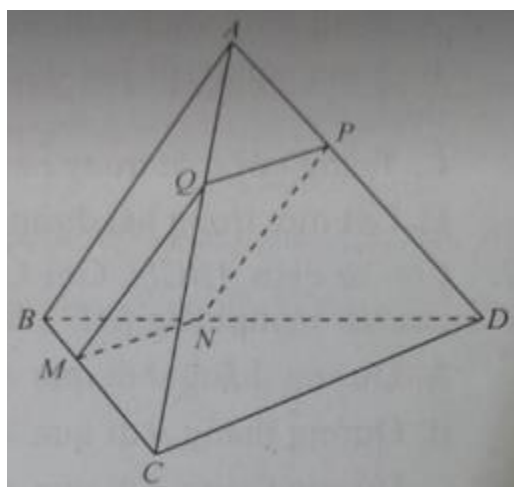
$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M, song song với AB cắt BC tại P.

$(\alpha) \parallel AD$ nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M, song song với AD, cắt DC tại N.

Vậy thiết diện là tam giác MNP. Đáp án A

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Giả sử M thuộc đoạn BC. Một mặt (α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) và hình tứ diện ABCD là hình gì?



Lời giải:

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M, song song với AB và cắt AC tại Q.

$(\alpha) \parallel CD$ nên giao tuyến của (α) với (BCD) là đường thẳng đi qua N, song song với CD và cắt BD tại N.

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng đi qua N, song song với AB và cắt AD tại P.

Ta có: $MN \parallel PQ \parallel CD$, $MQ \parallel PN \parallel AB$.

Vậy thiết diện là hình bình hành MNPQ. Đáp án B.

Bài 2: Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng ?

Lời giải:

Đáp án: 3

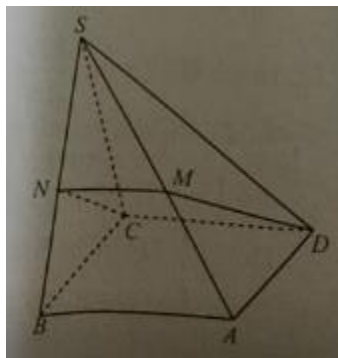
Bài 3: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

Lời giải: vô số

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA . Thiết diện của mặt phẳng (MCD) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

Lời giải:

Vì $CD \subset (MCD)$, $CD \parallel AB$, $AB \subset (SAB)$ nên giao tuyến của (MCD) và (SAB) là đường thẳng qua M và song song với AB , cắt SB tại N là trung điểm của SB . Vậy $MN \parallel CD$. Hơn nữa $MN \neq CD$. Vậy thiết diện là hình thang $CNMD$.



Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng, có tâm lần lượt là O và O' . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- $OO' \parallel (ABCD)$

-. $OO' \parallel (ABEF)$

- $OO' \parallel (BDF)$

- $OO' \parallel (ADF)$

Lời giải:

$OO' \parallel (ADF)$

Bài 6: Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với AB. Thiết diện của (α) với tứ diện ABCD là:

Lời giải:

Đáp án: Bình hành

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) đồng thời song song với AC và SB lần lượt cắt các đoạn thẳng SA, AB, BC, SC, SD và BD tại M, N, E, F, I, J. khi đó ta có.

Lời giải:

$IJ \parallel (SAB)$

Bài 8: Cho tứ diện ABCD. M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (α) chứa MN và song song với AB là hình gì?

Lời giải:

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt BC tại Q, cắt AC tại G

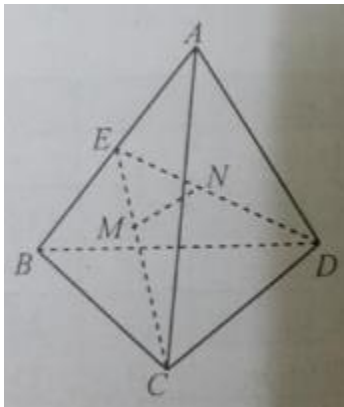
$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt BD tại P, cắt AD tại F

Gọi E là trung điểm của AB. M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD nên

$$\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{ED} = \frac{1}{3}$$

theo định lí Ta- lét ta có $MN \parallel CD$.

Do $MN \parallel CD$ nên $PQ \parallel GF \parallel CD$, lại có $QG \parallel FP$ nên thiết diện là hình bình hành GQPF.

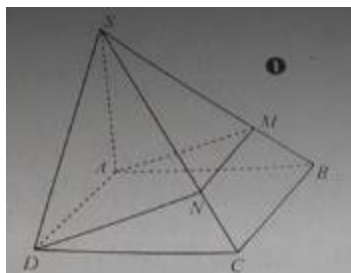


Bài 9: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Giả sử M thuộc đoạn thẳng SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình:

Lời giải:

(hình 1) Do $AD \parallel BC$, M thuộc (SBC) nên giao tuyến của (ADM) với (SBC) là đường thẳng qua M và song song với BC, đường thẳng này cắt SC tại N.

Ta có $MN \parallel AD$. Vậy thiết diện là hình thang AMND.



Bài 10: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, điểm M là trung điểm của AB. Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD).

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

C. $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNO) và (ABCD) là đường nào trong các đường thẳng sau đây?

Bài 2 Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α) . Trên a, b và c lần lượt lấy ba điểm A', B' và C' tùy ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng (A'B'C').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

Bài 3 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'.

a) Chứng minh rằng AM song song với A'M'.

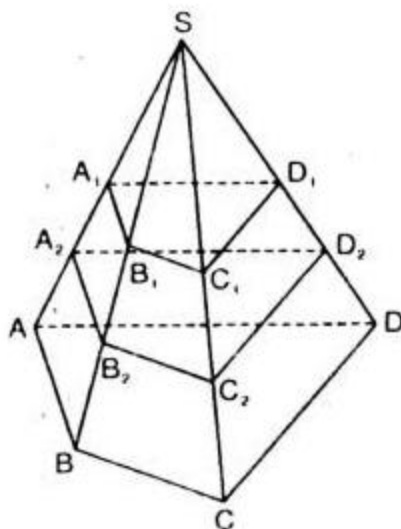
- b) Tìm giao điểm của mặt phẳng $(A'B'C')$ với đường thẳng $A'M$.
- c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
- d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với $mp(AMA')$. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

Bài 4 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.
- b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 lần lượt của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.
- c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.
- d) Gọi O và I lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$ và $AA'C'C$. Xác định thiết diện của mặt phẳng $(A'IO)$ với hình hộp đã cho.

Bài 5 Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1 . Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1 . Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2 . Chứng minh:

- a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD .
- b) $B_1B_2 = B_2B, C_1C_2 = C_2C, D_1D_2 = D_2D$.
- c) Chỉ ra các hình chóp cắt có một đáy là tứ giác $ABCD$.



Bài 6 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCF)
- Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF)

Bài 7 Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD

- Tìm giao tuyến của (α) với các mặt tứ diện
- Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

Bài 8 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?

Bài 9 Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) , mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- d' // d hoặc d' \equiv d

- $d' \parallel d$

- $d' \equiv d$

- d' và d chéo nhau

Bài 10 Cho tứ diện ABCD. Lấy M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện ABCD là hình gì?