

Bài 3. Dấu của tam thức bậc hai

A. Các câu hỏi trong bài

Câu hỏi khởi động trang 44 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Như vậy, việc đánh giá hiệu quả kinh doanh loại sản phẩm trên dẫn tới việc xét dấu của $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, tức là ta cần xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Làm thế nào để xét dấu tam thức bậc hai?

Lời giải:

Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) còn gọi là tam thức bậc hai.

Sau bài học này ta biết được cách để xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Ta có: $a = -200$, $b = 92\,000$, $c = -8\,400\,000$.

Phương trình $f(x) = 0$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 92000^2 - 4 \cdot (-200) \cdot (-8\,400\,000) = 1\,744\,000\,000 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1\,744\,000\,000} = 4000\sqrt{109}$$

$$\text{Khi đó } f(x) \text{ có hai nghiệm } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-92000 + 4000\sqrt{109}}{-400} = 230 - 10\sqrt{109};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-92000 - 4000\sqrt{109}}{-400} = 230 + 10\sqrt{109}.$$

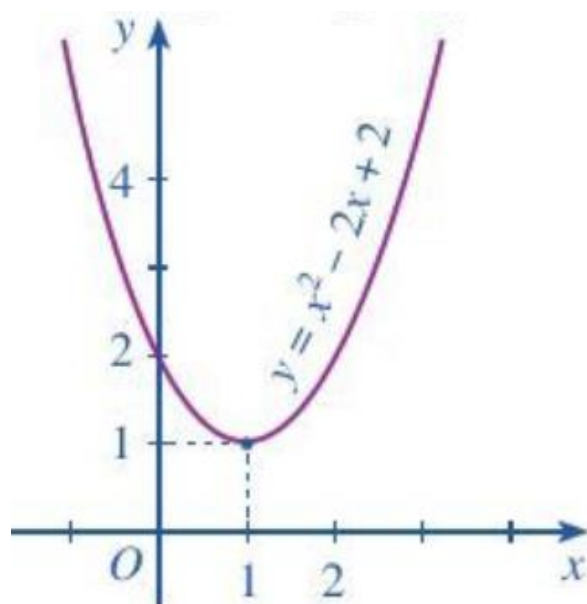
Lại có $a = -200 < 0$.

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; 230 - 10\sqrt{109})$ và $(230 + 10\sqrt{109}; +\infty)$.

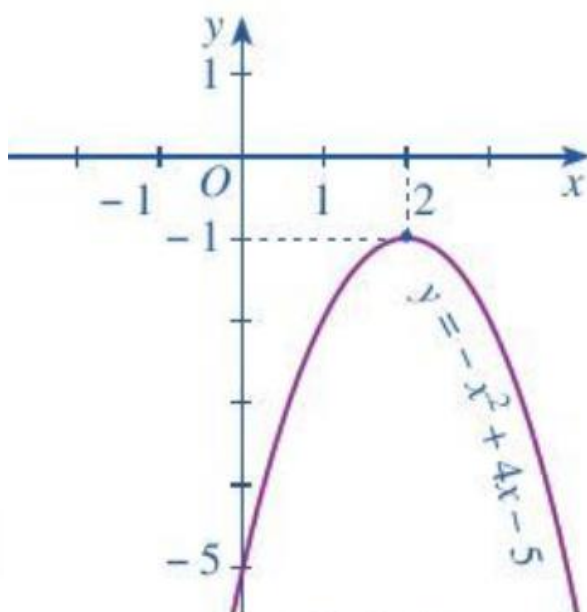
$f(x) > 0$ với mọi x thuộc khoảng $(230 - 10\sqrt{109}; 230 + 10\sqrt{109})$.

Hoạt động 1 trang 44 SGK Toán lớp 10 Tập 1:

- a) Quan sát Hình 17 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
- b) Quan sát Hình 18 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.
- c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta < 0$.



Hình 17



Hình 18

Lời giải:

- a) Quan sát Hình 17 ta thấy parabol nằm hoàn toàn phía trên trục hoành nên với mọi giá trị của x thì giá trị $f(x)$ tương ứng đều mang giá trị dương. Do đó tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2 > 0$ với mọi x .
- b) Quan sát Hình 18 ta thấy parabol nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên với mọi giá trị của x thì giá trị $f(x)$ tương ứng đều mang giá trị âm. Do đó tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5 < 0$ với mọi x .
- c) Nếu $\Delta < 0$ ta có:

- Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$ có $a = 1 > 0$ và $f(x) > 0$ với mọi x nên $f(x)$ luôn cùng dấu với dấu của hệ số a .

- Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ có $a = -1 < 0$ và $f(x) < 0$ với mọi x nên $f(x)$ luôn cùng dấu với dấu của hệ số a .

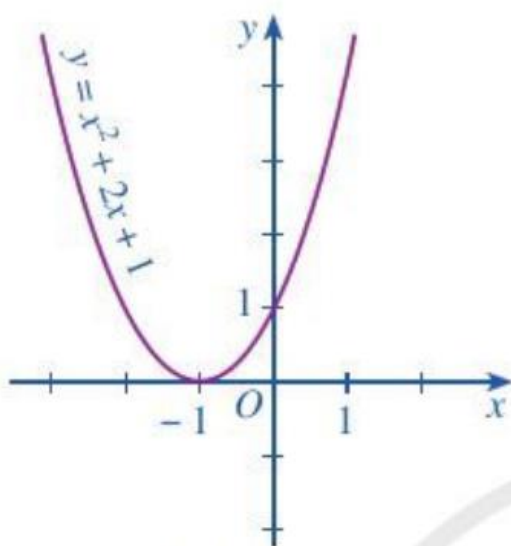
Vậy nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hoạt động 2 trang 45 SGK Toán lớp 10 Tập 1:

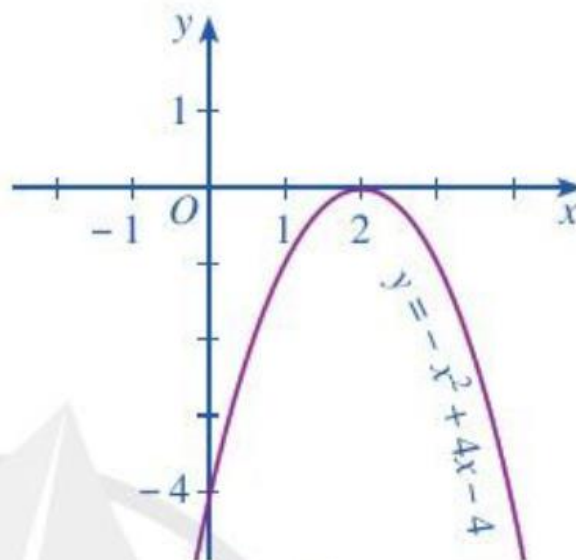
a) Quan sát Hình 19 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

b) Quan sát Hình 20 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta = 0$.



Hình 19



Hình 20

Lời giải:

a) Quan sát Hình 19, ta thấy parabol cắt trục hoành tại một điểm có tọa độ $(-1; 0)$ còn phần còn lại của đồ thị nằm phía trên trục hoành nên tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Quan sát Hình 20, ta thấy parabol cắt trục hoành tại một điểm có tọa độ $(2; 0)$ có đỉnh và phần còn lại nằm phía dưới trục hoành nên tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Nếu $\Delta = 0$ ta có:

- Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$ có $a = 1 > 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên trong khoảng này $f(x)$ luôn cùng dấu với dấu của hệ số a .

- Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ có $a = -1 < 0$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ nên trong khoảng này $f(x)$ luôn cùng dấu với dấu của hệ số a .

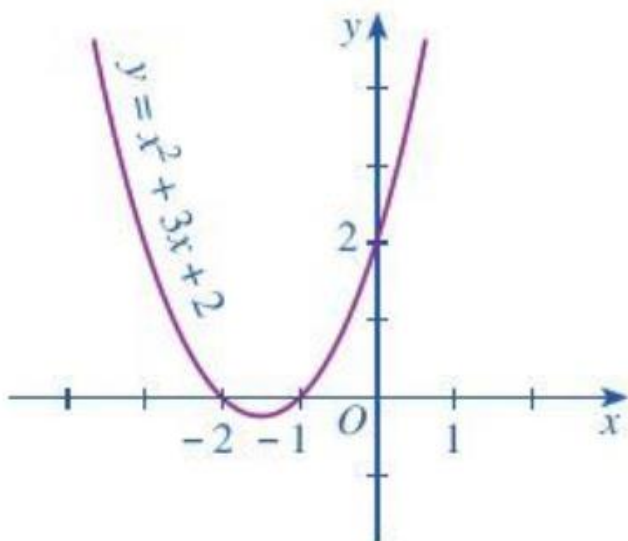
Vậy nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

Hoạt động 3 trang 45 SGK Toán lớp 10 Tập 1:

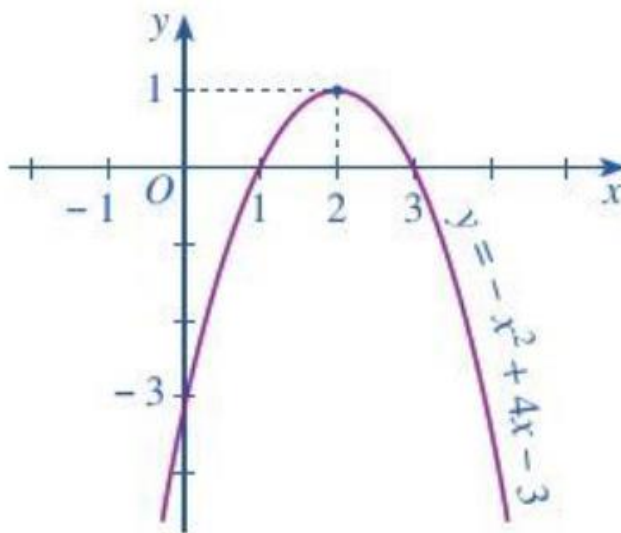
a) Quan sát Hình 21 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2$ tùy theo các khoảng của x .

b) Quan sát Hình 22 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tùy theo các khoảng của x .

c) Từ đó rút ra mối quan hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a tùy theo các khoảng của x trong trường hợp $\Delta > 0$.



Hình 21



Hình 22

Lời giải:

a) Quan sát Hình 21, ta thấy:

Parabol $f(x) = x^2 - 2x + 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x = -2$ và $x = -1$.

+ Trên khoảng $(-2; -1)$, phần parabol nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên trong khoảng này tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2 < 0$.

+ Trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-1; +\infty)$, phần parabol nằm hoàn toàn phía trên trục hoành nên trong khoảng này tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2 > 0$.

b) Quan sát Hình 22, ta thấy:

Parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x = 1$ và $x = 3$.

+ Trên khoảng $(1; 3)$, phần parabol nằm hoàn toàn phía trên trục hoành nên trong khoảng này tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3 > 0$.

+ Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, phần parabol nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên trong khoảng này tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3 < 0$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

Luyện tập 1 trang 46 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$;

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Lời giải:

a) Tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) = -24 < 0$$

Hệ số $a = -2 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$$

$$\text{Suy ra nghiệm kép } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$$

Hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Luyện tập 2 trang 46 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai: $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

Lời giải:

Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ có $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36 > 0$.

Do đó tam thức bậc hai có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và hệ số $a = -1 < 0$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----------

$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
--------	-----	-----	-----	-----	-----

B. Bài tập

Bài 1 trang 48 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1; 3]$.

Lời giải:

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ta có: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$.

Khi đó tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$.

Lại có hệ số $a = 1 > 0$, ta có bảng xét dấu:

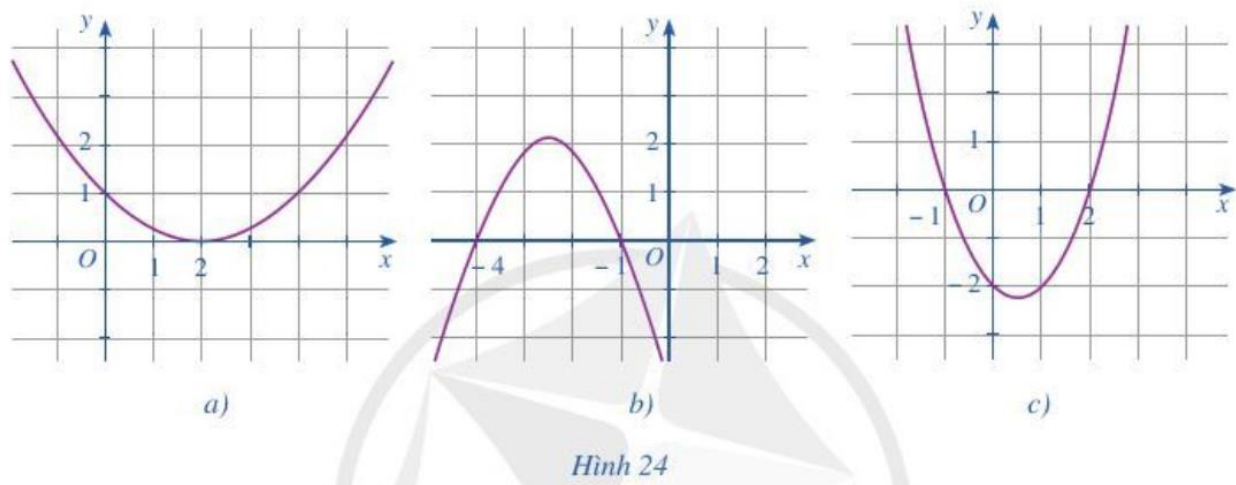
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$y = x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0	+

Do đó $f(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in (-1; 3)$.

Vì $x = -1$ và $x = 3$ là nghiệm của $f(x)$ nên với hai giá trị này $f(x) = 0$ nên phát biểu b) sai.

Vậy phát biểu a) đúng và phát biểu b) sai.

Bài 2 trang 48 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi Hình 24a, 24b, 24c.



Hình 24

Lời giải:

a) Quan sát Hình 24a, ta thấy:

Đồ thị cắt trục hoành tại một điểm có tọa độ $(2; 0)$ hay nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 2$.

Trừ điểm $x = 2$ thì toàn bộ phần còn lại của Parabol nằm phía trên trục hoành do đó trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ tam thức bậc hai $f(x) > 0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

b) Quan sát Hình 24b, ta thấy:

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có tọa độ là $(-4; 0)$ và $(-1; 0)$ hay tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -4$ và $x_2 = -1$.

Trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $(-1; +\infty)$, phần parabol nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên $f(x) < 0$.

Trên khoảng $(-4; -1)$, phần parabol nằm phía trên trục hoành nên $f(x) > 0$.

Ta có bảng xét dấu tam thức $f(x)$ sau:

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$	
f(x)	$-$	0	$+$	0	$-$

c) Quan sát Hình 24c, ta thấy:

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(-1; 0)$ và $(2; 0)$ hay tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$, phần parabol nằm phía trên trục hoành nên $f(x) > 0$.

Trên khoảng $(-1; 2)$ phần parabol nằm phía dưới trục hoành nên $f(x) < 0$.

Ta có bảng xét dấu tam thức $f(x)$ sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
f(x)	$+$	0	$-$	0	$+$

Bài 3 trang 48 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Xét dấu mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$;

b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$;

c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$;

e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$;

g) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.

Lời giải:

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ có $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 > 0$.

Do đó tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_2 = 1$.

Lại có hệ số $a = 3 > 0$, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$y = 3x^2 - 4x + 1$	+	0	-	0	+

Vậy $f(x) > 0$ với mọi x thuộc các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ với mọi x thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ có $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$.

Do đó tam thức $f(x)$ có nghiệm kép là $x_0 = -\frac{1}{3}$.

Lại có hệ số $a = 9 > 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$y = 9x^2 + 6x + 1$	+	0	+

Vậy $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

c) Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$ có $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -71 < 0$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = 2x^2 - 3x + 10$	+	

Vậy $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) Tam thức bậc hai $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$ có $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3 = 64 > 0$.

Suy ra tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -\frac{3}{5}$ và $x_2 = 1$.

Ta lại có hệ số $a = -5 < 0$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$	
$y = -5x^2 + 2x + 3$	-	0	+	0	-

Vậy $f(x) < 0$ với mọi x thuộc các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$ và $(1; +\infty)$; $f(x) > 0$ với mọi x thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

e) Tam thức bậc hai $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$ có $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-4) = 0$.

Do đó tam thức $f(x)$ có nghiệm kép $x_0 = 1$.

Ta có hệ số $a = -4 < 0$, khi đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y = -4x^2 + 8x - 4$	—	0	—

Vậy $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

g) Tam thức bậc hai $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$ có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -3 < 0$ và hệ số $a = -3 < 0$ nên ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = -3x^2 + 3x - 1$	—	

Vậy $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4 trang 48 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng người khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

Lời giải:

a) Gọi x là số lượng người khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm nên $x \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó tổng số khách của nhóm là $50 + x$ (người).

Nếu thêm x người thì giá vé sẽ giảm $5\,000x$ đồng/người.

Do đó, giá vé cho mỗi hành khách trong nhóm $50 + x$ người là: $300\,000 - 5\,000x$ (đồng).

Doanh thu của công ty theo x là: $(300\,000 - 5\,000x) \cdot (50 + x) = -5\,000x^2 + 50\,000x + 15\,000\,000$ (đồng)

Vậy biểu thức biểu thị doanh thu của công ty theo x là: $-5\,000x^2 + 50\,000x + 15\,000\,000$.

b)

Lợi nhuận thu được của công ty là: $-5\,000x^2 + 50\,000x + 15\,000\,000 - 15\,080\,000$
 $= -5\,000x^2 + 50\,000x - 80\,000$ (đồng)

Xét tam thức bậc hai $y = f(x) = -5\,000x^2 + 50\,000x - 80\,000$.

Ta có: $\Delta = 50\,000^2 - 4 \cdot (-5\,000) \cdot (-80\,000) = 900\,000\,000 > 0$

Do đó $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

Ta lại có hệ số $a = -5\,000 < 0$. Khi đó bảng xét dấu là:

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$		
f(x)		–	0	+	0	–

Công ty không lỗ nghĩa là hòa vốn hoặc có lãi

Do đó $f(x) \geq 0$ khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 8$

Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Để số người của nhóm khách du lịch là nhiều nhất khi x là lớn nhất. Suy ra $x = 8$.

Khi đó số người của nhóm khách du lịch là: $50 + 8 = 58$ (người).

Vậy số người của nhóm du lịch nhiều nhất là 58 người thì công ty không bị lỗ.

Bài 5 trang 48 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140\,000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1 200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hòa vốn?

c) Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

Lời giải:

Vì Q là số sản phẩm sản xuất của xí nghiệp nên $Q \in \mathbb{N}^*$.

a) Tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140\,000$ (nghìn đồng).

Doanh thu của xí nghiệp là: $1\,200Q$ (nghìn đồng).

Khi đó lợi nhuận của xí nghiệp khi bán hết Q sản phẩm là:

$$1\,200Q - (Q^2 + 180Q + 140\,000) = -Q^2 + 1\,020Q - 140\,000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Vậy lợi nhuận của xí nghiệp đó là $-Q^2 + 1\,020Q - 140\,000$ (nghìn đồng).

b) Xét tam thức bậc hai $-Q^2 + 1\,020Q - 140\,000$.

$$\text{Ta có: } \Delta = 1\,020^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-140\,000) = 480\,400 > 0$$

Suy ra tam thức này có hai nghiệm phân biệt $Q_1 = 510 - 10\sqrt{1201}$, $Q_2 = 510 + 10\sqrt{1201}$

và hệ số $a = -1 < 0$.

Ta có bảng xét dấu sau:

Q	$-\infty$	Q_1	Q_2	$+\infty$	
$-Q^2 + 1\,020Q - 140\,000$	$-$	0	$+$	0	$-$

Xí nghiệp hòa vốn nếu lợi nhuận bằng 0 nghĩa là $Q = Q_1 = 510 - 10\sqrt{1201} \approx 163,45$
 hoặc $Q = Q_2 = 510 + 10\sqrt{1201} \approx 856,55$.

Do $Q \in \mathbb{N}^*$

Khi đó xí nghiệp hòa vốn khi lợi nhuận bằng 0 hay $y = 0$, tức là $Q = 164$ hoặc $Q = 857$.

Vậy xí nghiệp đó hòa vốn khi sản xuất 164 sản phẩm hoặc 857 sản phẩm.

c) Xí nghiệp không bị lỗ, tức là lời hoặc hòa vốn, nên theo bảng xét dấu ở câu b thì xí nghiệp không bị lỗ khi và chỉ khi $y \geq 0$, tức là $164 \leq Q \leq 857$.

Vậy xí nghiệp không bị lỗ khi sản xuất từ 164 sản phẩm đến 857 sản phẩm.