

Các bài toán về phương trình bậc nhất đối với sin và cos

1. Lý thuyết

- Phương trình bậc nhất đối với sin và cos có dạng: $a.\sin x + b.\cos x = c$ (với $a; b$ là các số thực, $a; b$ khác 0).

- Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

2. Các dạng bài tập

Dạng 1: Giải phương trình bậc nhất đối với sin và cos

- Phương pháp giải:

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (*)$$

* Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$

Khi đó phương trình (*) đưa về dạng

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

* Hoặc đặt $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$

Khi đó phương trình (*) đưa về dạng

$$\sin x \sin \alpha + \cos x \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

* Phương trình có nghiệm khi $0 \leq \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |c| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$.

Chú ý: Các công thức đặc biệt

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2}$

b) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 13$

c) $\sin^2 x - 2\cos x \sin x + 1 = 0$

Lời giải

a) $\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$

Đặt $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sin 4x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 4x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

b) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 13 \Leftrightarrow \frac{5}{13} \sin 2x + \frac{12}{13} \cos 2x = 1 \quad (2)$

Đặt $\cos \alpha = \frac{5}{13}; \sin \alpha = \frac{12}{13}$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \sin 2x \cos \alpha + \cos 2x \sin \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ với

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}; \sin \alpha = \frac{12}{13}.$$

$$c) \sin^2 x - 2\cos x \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x - 2\sin 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin 2x = 3$$

Ta thấy: $1^2 + 2^2 < 3^2$. Vậy phương trình trên vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

$$a) 3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$$

$$b) \cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$$

Lời giải

$$a) 3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos 9x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 9x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}$; $x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}$; ($k \in \mathbb{Z}$)

$$b) \cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3} \cos 5x - \sqrt{3} \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x \cos \frac{\pi}{3} + \sin 3x \sin \frac{\pi}{3} = \cos 5x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 5x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(5x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = 5x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -5x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{12} - k\pi$; $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để phương trình $a.\sin x + b.\cos x = c$ có chứa tham số m có nghiệm

- *Phương pháp giải:*

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

- *Ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình: $(m-1)\cos x + 2\sin x = m+3$ có nghiệm.

Lời giải

Để phương trình có nghiệm: $(m-1)^2 + 2^2 \geq (m+3)^2$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4 \geq m^2 + 6m + 9$$

$$\Leftrightarrow -8m \geq 4$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}.$$

Vậy $m \leq -\frac{1}{2}$ thì phương trình $(m-1)\cos x + 2\sin x = m+3$ có nghiệm.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình: $(m-1)\sin x + m\cos x = m+1$ có nghiệm.

Lời giải

Để phương trình có nghiệm: $(m-1)^2 + m^2 \geq (m+1)^2$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m^2 \geq m^2 + 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Vậy $m \geq 4$ hoặc $m \leq 0$ thì phương trình $(m-1)\sin x + m\cos x = m+1$ có nghiệm.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Họ nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 2. Có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\cos 4x - \sin 4x = 1$?

A. 5

B. 3

C. 6

D. 7

Câu 3. Họ nghiệm của phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{5} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 4. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{7\pi}{8}$

C. $\frac{21\pi}{8}$

D. $\frac{11\pi}{4}$

Câu 5. Họ nghiệm của phương trình: $\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 5x) = \sin 5x - \cos 2x$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 6. Các nghiệm của phương trình $1 + \sin 2x = \cos 2x$ là:

A. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

C. $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Câu 7. Số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $\sin x(\sin x + 2\cos x) = 2$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 8. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình

$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$ là:

A. π

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

Câu 9. Họ nghiệm của phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 10. Họ nghiệm của phương trình: $\frac{\cos x - 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$ là:

A. $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $3 \sin x - 4 \cos x = 2m$ có nghiệm.

A. $-\frac{5}{2} < m \leq \frac{5}{2}$

B. $m \leq -\frac{5}{2}$

C. $m \geq \frac{5}{2}$

D.

$-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m+1) \sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?

A. 12

B. 13

C. 11

D. 10

Câu 13. Phương trình $2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $-2 \leq m < 2$

B. $-2 \leq m \leq 2$

C. $m \leq 2$

D.

$-2 < m \leq 2$

Câu 14. Tìm m để phương trình $(2m-1) \cos 2x + 2m \sin x \cos x = m - 1$ vô nghiệm.

A. $m \in \emptyset$

B. $m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$

C. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$

D. $0 < m < \frac{1}{2}$

Câu 15. Gọi M, m lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x + 2$. Giá trị của M, m là:

A. $M = 4; m = 0$

B. $M = 2; m = -2$

C. $M = \frac{5}{2}; m = \frac{3}{2}$

D. $M = 3; m =$

1

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	D	D	D	C	C	A	B	D	D	D	A	B	D	A