

Bài tập Phép vị tự - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành d' ?

- A. không có phép vị tự nào
- B. có một phép vị tự duy nhất
- C. có hai phép vị tự
- D. có vô số phép vị tự

Lời giải:

Đáp án: A

Không có phép vị tự nào biến d thành d' (Phép vị tự biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó).

Bài 2: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ (O không trùng với O'). Có bao nhiêu phép vị tự biến (O) thành (O') ?

- A. không có phép vị tự nào
- B. có một phép vị tự duy nhất
- C. có hai phép vị tự
- D. có vô số phép vị tự

Lời giải:

Đáp án: B

Có một phép vị tự duy nhất, tâm vị tự là trung điểm OO' , tỉ số vị tự là $k = -1$.

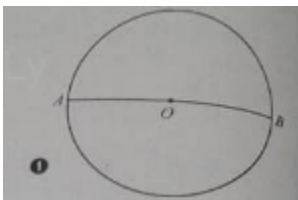
Bài 3: Có bao nhiêu phép vị tự biến một đường tròn thành chính nó?

- A. không có phép vị tự nào
- B. có một phép vị tự duy nhất
- C. có hai phép vị tự
- D. có vô số phép vị tự

Lời giải:

Đáp án: C

(hình 1) Có hai phép vị tự: $V(O; 1)(O; OA) = (O; OA)$ và $V(O; -1)(O; OA) = (O; OB)$



Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). BC cố định, I là trung điểm BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi A di động trên (O) thì G di động trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép vị tự nào sau đây?

- A. phép vị tự tâm A tỉ số $k = \frac{2}{3}$
- B. phép vị tự tâm A tỉ số $k = -\frac{2}{3}$
- C. phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{3}$
- D. phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{3}$

A cố định, G là trọng tâm tam giác ABC nên $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$

\Rightarrow có phép vị tự tâm A tỉ số $k = \frac{2}{3}$ biến đường tròn $(O; \frac{R\sqrt{3}}{2})$ thành đường tròn

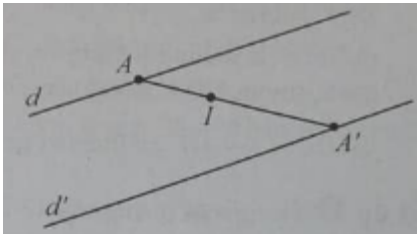
$$R' = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$(O'; R')$ với

Chọn đáp án C

Bài 6: Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau. Tìm mệnh đề đúng:

- A. Có duy nhất một phép vị tự biến d thành d'
- B. Có đúng hai phép vị tự biến d thành d'
- C. Có vô số phép vị tự biến d thành d'
- D. Không có phép vị tự nào biến d thành d'



Lời giải:

Đáp án: C

Lấy điểm A, A' bất kì lần lượt trên d và d' .

Trên đường thẳng AA' lấy điểm I bất kì, đặt $\frac{IA'}{IA} = k$.

Khi đó, phép vị tự tâm I tỉ số k biến A thành A', biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.

Vì A và A' là 2 điểm bất kì trên d và d' nên có vô số phép vị tự biến d thành d'

Đáp án C

Bài 7: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O. gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến:

A. Điểm A thành điểm G

B. Điểm A thành điểm D

C. Điểm D thành điểm A

D. Điểm G thành điểm A

b) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành

A. Tam giác GBC

B. Tam giác DEF

C. Tam giác AEF

D. Tam giác AFE

c) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến \overrightarrow{AH} thành

A. \overrightarrow{OD}

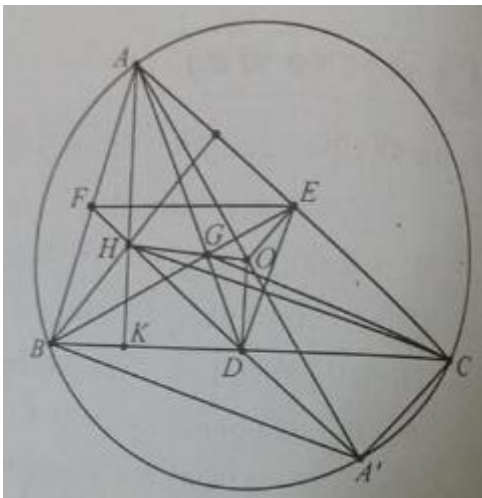
B. \overrightarrow{DO}

C. \overrightarrow{HK}

D. \overrightarrow{KH}

Lời giải:

Đáp án: B



a) $\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow$ phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến A thành D.

Đáp án B.

b) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến A thành D; biến B thành E; biến C thành F \Rightarrow biến tam giác ABC thành tam giác DEF.

Đáp án B

c) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua tâm O. Chứng minh BHCA' là hình bình hành, suy ra H; A'; D thẳng hàng và DO là đường trung bình của tam giác

$AHA' \Rightarrow \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \Rightarrow$ phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến $\overrightarrow{AH} \rightarrow \overrightarrow{DO}$

Bài 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự $H(1;2)$ tỉ số $k = -3$ điểm $M(4;7)$ biến thành điểm M' có tọa độ

A. $M'(-13;-8)$

B. $M'(8;13)$

C. $M'(-8;-13)$

D. $M'(-8;13)$

Lời giải:

Đáp án: C

$$\overrightarrow{HM'} = -3\overrightarrow{HM} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -3(4 - 1) \\ y - 2 = -3(7 - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'(-8;-13)$$

Đáp án C

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x + y + 6 = 0$. Qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k = 2$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d' có phương trình.

A. $-3x + y - 6 = 0$

B. $-3x + y + 12 = 0$

C. $3x - y + 12 = 0$

D. $3x + y + 18 = 0$

Lời giải:

Đáp án: D

Lấy $M(-2;0)$ thuộc d . Phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=2$ biến d thành $d'//d$ và biến M thành M' thì $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow M'(-4;0)$. Phương trình d' : $3(x+4) + y + 6 = 0 \Rightarrow 3x + y + 18 = 0$. Đáp án D.

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường (C) có phương trình.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Qua phép vị tự tâm $H(1;3)$ tỉ số $k=-2$, đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có phương trình.

A. $x^2 + y^2 + 2x - 30y + 60 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 2x - 30y + 62 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2x - 30y + 62 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x - 30y + 60 = 0$

Lời giải:

Đáp án: C

$(C) \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=4$.

$V(H;-2)(I) = I'(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{HI'} = -2\overrightarrow{HI}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2(2-1) \\ y-3 = -2(-3-3) \end{cases}$$

$\rightarrow I'(-1;15)$

$R' = |k|R = 8 \rightarrow (\widehat{C'}) : (x+1)^2 + (y-15)^2 = 64 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 30y + 62 = 0$

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm I(1;4) tỉ số $k = -2$, biến đường thẳng d có phương trình : $7x + 3y - 4 = 0$ thành đường thẳng d' có phương trình?

Lời giải:

Phép vị tự tâm I (1; 4) tỉ số $k = -2$, biến M(x; y) thuộc d thành M'(x';y') thuộc d;

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = -2(x - 1) \\ y' - 4 = -2(y - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}(x' - 3) \\ y = -\frac{1}{2}(y' - 12) \end{cases}$$

$$7 \cdot \frac{-1}{2}(x' - 3) + 3 \cdot \frac{-1}{2}(y' - 12) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x' - 3) + 3(y' - 12) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x' + 3y' - 49 = 0$$

Thay vào phương trình d ta được:

\Rightarrow d' có phương trình là: $7x + 3y - 49 = 0$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm O(0;0) tỉ số $k = -2$, biến đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 = 9$ thành đường tròn (C') có phương trình:

Lời giải:

Phép vị tự tâm O(0; 0) tỉ số $k = -2$ biến tâm O của (C) thành O, biến bán kính $R = 3$ thành $R' = 6 \Rightarrow$ phương trình (C') là $x^2 + y^2 = 36$

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm O(0;0) tỉ số $k = 2$ biến đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 12$ thành đường tròn (C') có phương trình:

Lời giải:

$(C) \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Phép vị tự tâm $O(0; 0)$ tỉ số $k = 2$ biến tâm $I(-2; -3)$ của (C) thành $I'(-4; -6)$, biến bán kính $R = 5$ thành $R' = 10 \Rightarrow$ phương trình (C') là:
 $(x + 4)^2 + (y + 6)^2 = 100$

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm $H(1; 0)$ tỉ số $k = 2$, biến đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + 4x + y^2 + 6y = 12$ thành đường tròn (C') có phương trình

Lời giải:

$(C) \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Phép vị tự tâm $H(1; 0)$ tỉ số $k = 2$, biến tâm $I(-2; -3)$ của (C) thành $I'(x; y)$

$$\Rightarrow \vec{HI'} = 2\vec{HI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2(-2 - 1) \\ y = 2(-3 - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$$

biến bán kính $R = 5$ thành $R' = 10 \Rightarrow$ Phương trình (C') là: $(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 100$

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm $H(1; -3)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$, biến đường tròn (C) có phương trình : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 32$ thành đường tròn (C') có phương trình:

Lời giải:

Phép vị tự tâm $H(1; -3)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$, biến tâm $I(2; 3)$ của (C) thành $I'(x; y)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HI}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{2}(2 - 1) \\ y + 3 = \frac{1}{2}(3 + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

biến bán kính $R = 4\sqrt{2}$ thành $R' = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình (C') là:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 8$$

Bài 6: Cho hình thang ABCD có $AD \parallel BC$ và $AD = 2 BC$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình thang. Phép vị tự tâm A biến C thành O có tỉ số vị tự là:

Lời giải:

Vì $BC \parallel AD$ nên áp dụng hệ quả định lí ta – let ta có:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = 2 \quad (\text{vì } AD = 2BC)$$

Suy ra: $AO = 2OC$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$$

Do đó, phép vị tự tâm A hệ số biến điểm C thành O.

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k = -3$, biến điểm $M(-4;3)$ thành điểm M' có tọa độ

Lời giải:

$$\overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3(-4) = 12 \\ y = -3.3 = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'(12; -9)$$

Bài 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm I(1;2) tỉ số k = 5, biến điểm M(2;-3) thành điểm M' có tọa độ:

Lời giải:

$$\overrightarrow{IM'} = 5\overrightarrow{IM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 5(2 - 1) \\ y - 2 = 5(-3 - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M'(6; -23)$$

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm I(0;2) tỉ số k = $-\frac{1}{2}$, biến điểm M(12;-3) thành điểm M' có tọa độ:

Lời giải:

$$\overrightarrow{IM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = -\frac{1}{2} \cdot (12 - 0) = -6 \\ y - 2 = -\frac{1}{2}(-3 - 2) = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép vị tự tâm O(0;0) tỉ số k = -5, biến đường thẳng d có phương trình : $2x + 3y - 4 = 0$ thành đường thẳng d' có phương trình:

Lời giải:

Phép vị tự tâm O(0; 0) tỉ số k = -5, biến M(x; y) thuộc d thành M'(x', y') thuộc d'

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = -5\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -5x \\ y' = -5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}x' \\ y = -\frac{1}{5}y' \end{cases}$$

Thay vào phương trình d ta được:

$$2 \cdot \frac{-1}{5}x' + 3 \cdot \frac{-1}{5}y' - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{5}x' + \frac{-3}{5}y' - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + 3y' + 20 = 0$$

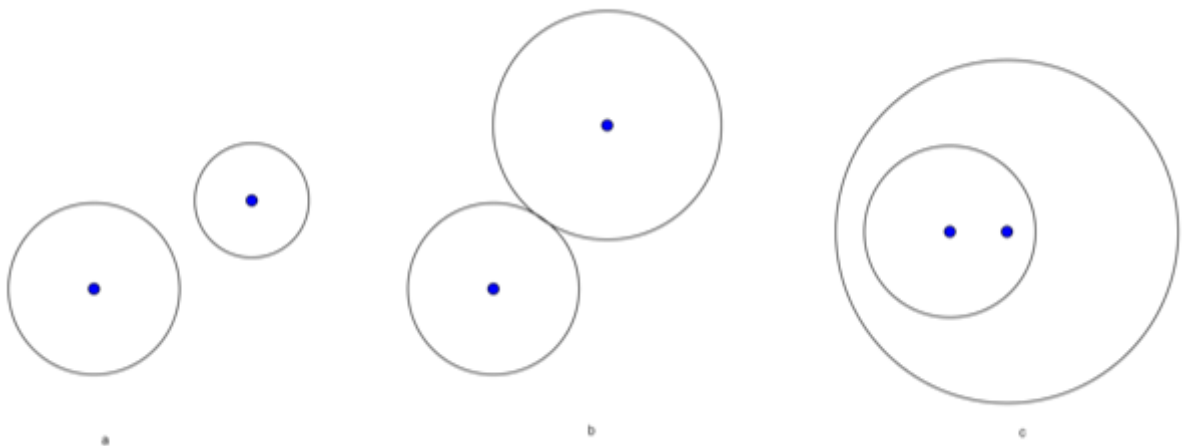
\Rightarrow phương trình của d' là $2x + 3y + 20 = 0$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác

ABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bài 2 Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau.



Bài 3 Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O.

Bài 4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác

ABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$

Bài 5 Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O

Bài 6 Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành đường thẳng d'?

Bài 7 Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k=20$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

Bài 8 Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

Bài 9 Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành d'?

Bài 10 Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ (O không trùng với O'). Có bao nhiêu phép vị tự biến (O) thành (O')?