

Bài 4. Tổng và hiệu của hai vector

A. Câu hỏi

Câu hỏi khởi động trang 83 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Quan sát hình ảnh hai người cùng kéo một chiếc thuyền theo hai hướng khác nhau (Hình 48). Tuy nhiên, chiếc thuyền lại không di chuyển theo cùng hướng với một trong hai người đó mà di chuyển theo hướng khác.



Hình 48

Tại sao chiếc thuyền lại di chuyển như vậy?

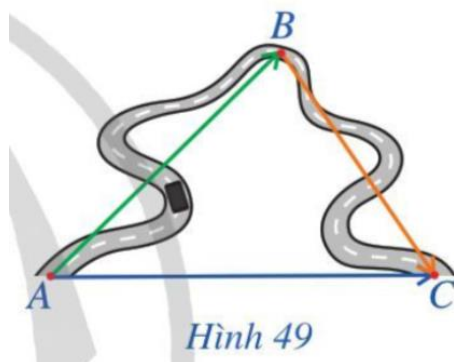
Sau bài học này chúng ta sẽ giải quyết được câu hỏi trên như sau:

Lời giải:

Chiếc thuyền di chuyển theo hướng hợp lực của hai người.

Hoạt động 1 trang 83 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một vật dịch chuyển từ A đến B và tiếp tục dịch chuyển từ B đến C (Hình 49).

- Biểu diễn vector dịch chuyển của vật từ A đến B và từ B đến C.
- Xác định vector dịch chuyển tổng hợp của vật.



Lời giải:

a) Vectơ dịch chuyển của vật từ A đến B là: \overrightarrow{AB} .

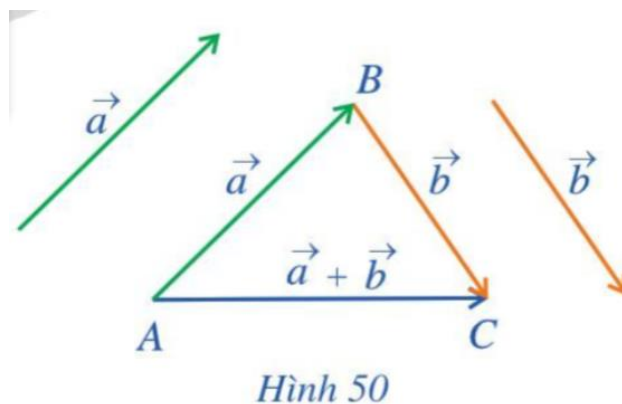
Vectơ dịch chuyển của vật từ B đến C là: \overrightarrow{BC} .

b) Vectơ dịch chuyển tổng hợp của vật là: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Hoạt động 2 trang 83 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho hai vectơ \vec{a} , \vec{b} . Lấy một điểm A tùy ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (Hình 50).

b) Tổng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} bằng vectơ nào?



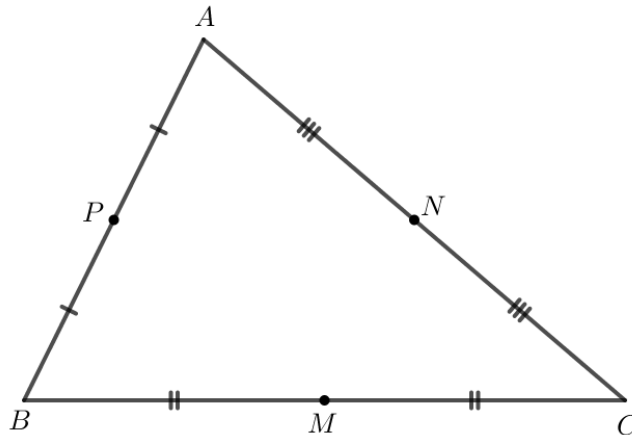
Lời giải:

a) Thực hiện vẽ như Hình 50.

b) Tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} bằng vector \vec{AC} .

Luyện tập 1 trang 84 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $\vec{PB} + \vec{MC} = \vec{AN}$.

Lời giải:



Do P là trung điểm của AB nên $\vec{AP} = \vec{PB}$.

Do đó $\vec{AP} + \vec{PB} = \vec{PB} + \vec{PB}$ hay $\vec{AB} = \vec{PB} + \vec{PB}$.

Do M là trung điểm của BC nên $\vec{MC} = \vec{BM}$.

Do đó $\vec{BM} + \vec{MC} = \vec{BM} + \vec{BM}$ hay $\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{BM}$.

Do N là trung điểm của AC nên $\vec{AN} = \vec{NC}$.

Do đó $\vec{AN} + \vec{NC} = \vec{NC} + \vec{NC}$ hay $\vec{AC} = \vec{NC} + \vec{NC}$.

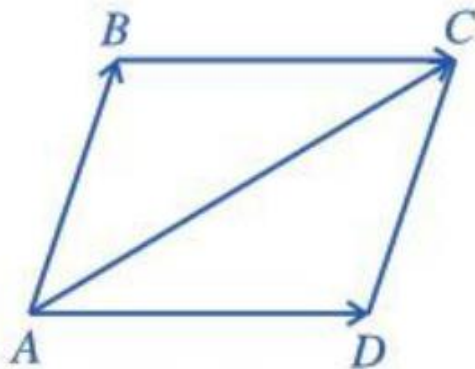
Mà $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ hay $\vec{PB} + \vec{PB} + \vec{MC} + \vec{MC} = \vec{NC} + \vec{NC}$.

Do đó $\vec{PB} + \vec{MC} = \vec{AN}$.

Hoạt động 3 trang 84 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho ABCD là hình bình hành (Hình 52). So sánh:

a) Hai vector \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{BC} .

b) Vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và vector \overrightarrow{AC} .



Hình 52

Lời giải:

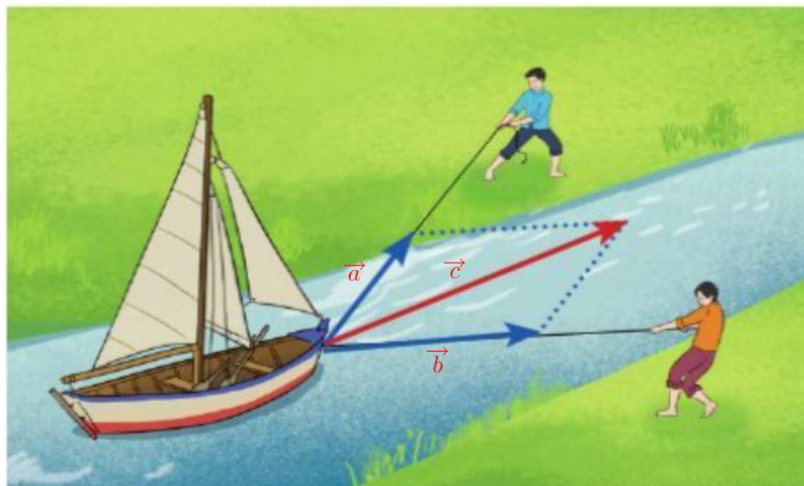
a) Do ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$ và $AD = BC$.

Do đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

b) Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Luyện tập 2 trang 84 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Hãy giải thích hướng đi của thuyền ở Hình 48.

Lời giải:



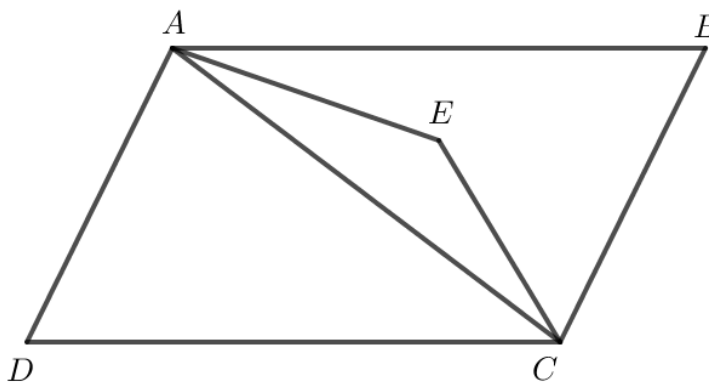
Gọi hướng kéo của 2 người ở 2 bên bờ sông lần lượt là \vec{a} và \vec{b} .

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Do đó thuyền sẽ di chuyển theo hướng \vec{c} .

Luyện tập 3 trang 85 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình bình hành ABCD và điểm E bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

Lời giải:



Do ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{AE}$$

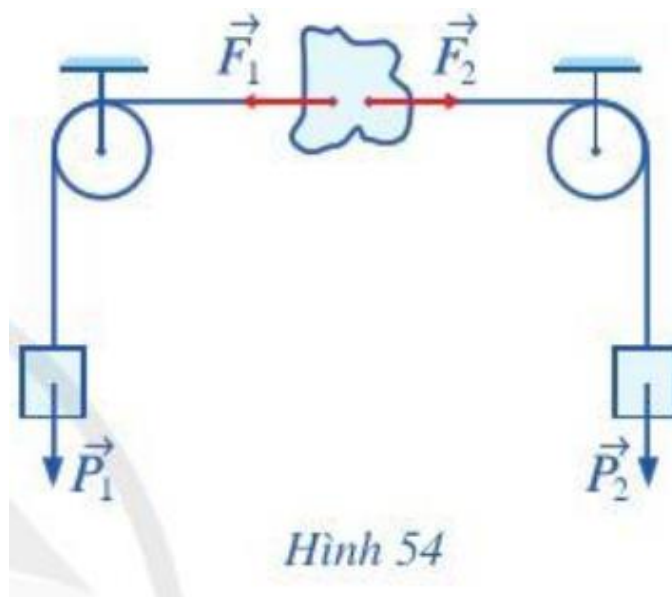
$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.$$

Hoạt động 4 trang 85 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Trong Hình 54, hai ròng rọc có trục quay nằm ngang và song song với nhau, hai vật có trọng lượng bằng nhau. Mỗi dây có một đầu buộc vào vật, một đầu buộc vào một mảnh nhựa cứng. Hai vật lần lượt tác động lên mảnh nhựa các lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 . Nhận xét về hướng và độ dài của mỗi cặp vector sau:

a) \vec{P}_1 và \vec{P}_2 biểu diễn trọng lực của hai vật;

b) \vec{F}_1 và \vec{F}_2 .

(Bỏ qua trọng lượng của các dây và các lực ma sát)



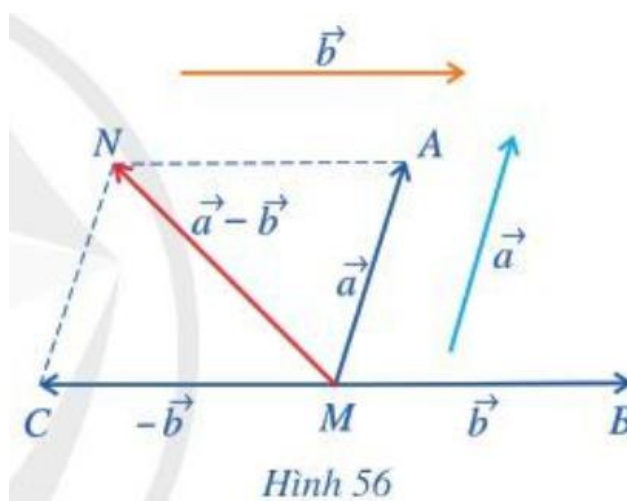
Hình 54

Lời giải:

- b) Ta thấy hai vector \vec{F}_1 và \vec{F}_2 ngược hướng và cùng độ dài.

Hoạt động 5 trang 86 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Lấy một điểm M tùy ý.

- a) Vẽ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = -\vec{b}$ (Hình 56).



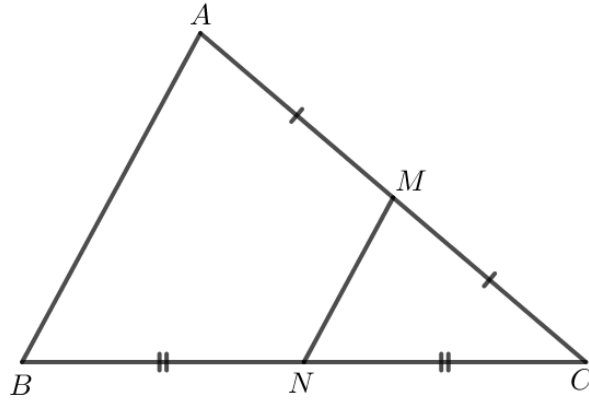
Lời giải:

- a) Thực hiện vẽ như Hình 56.

b) Tổng của hai vector \vec{a} và $(-\vec{b})$ bằng vector \overrightarrow{MN} với N là một điểm sao cho AMCN là hình bình hành.

Luyện tập 4 trang 86 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AC, N là trung điểm của BC và $AB = a$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}$.

Lời giải:



Xét tam giác ABC có M là trung điểm của AC; N là trung điểm của BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Do đó $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Do N là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}$.

Do đó $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NM}$.

Khi đó $|\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NM}| = \frac{a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}| = \frac{a}{2}$.

B. Bài tập

Bài 1 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho ba điểm M, N, P. Vector

$\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vector nào sau đây?

A. \overrightarrow{PN} ;

B. \overrightarrow{PM} ;

C. \overrightarrow{MP} ;

D. \overrightarrow{NM} .

Lời giải:

$$\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Bài 2 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho ba điểm D, E, G. Vector

$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vector nào sau đây?

A. \overrightarrow{EG} ;

B. \overrightarrow{GE} ;

C. \overrightarrow{GD} ;

D. \overrightarrow{ED} .

Lời giải:

$$\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG}) = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GE}.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án B.

Bài 3 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

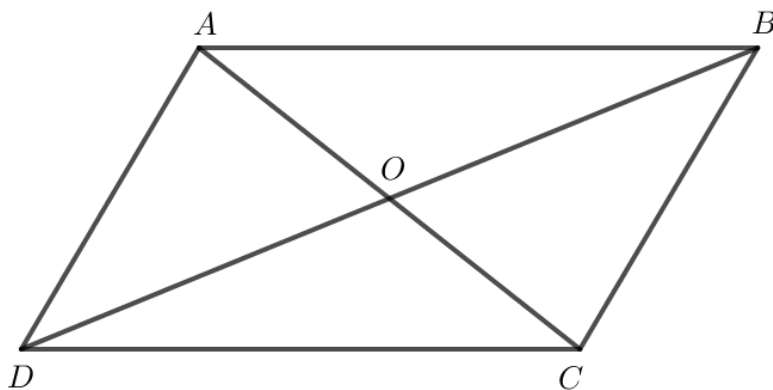
Bài 4 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình bình hành ABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD. Các khẳng định sau đúng hay sai?

$$\text{a) } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|;$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB};$$

$$\text{c) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Lời giải:



$$\text{a) Do } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ hay } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Vậy khẳng định a đúng.

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Mà $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên khẳng định b sai.

c) Do O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD nên $OA = OC$, $OB = OD$.

Mà A và C nằm ở hai phía so với điểm O, B và D nằm ở hai phía so với điểm O nên $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Vậy khẳng định c sai.

Bài 5 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho đường tròn tâm O. Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau.

Lời giải:

Để hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau thì $OA = OB$ và $\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}$ ngược hướng nhau.

Do A và B là hai điểm nằm trên đường tròn nên $OA = OB = R$.

Do đó cần thêm điều kiện hai vector $\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}$ ngược hướng nhau.

Để hai vector $\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}$ ngược hướng nhau thì O nằm giữa A và B.

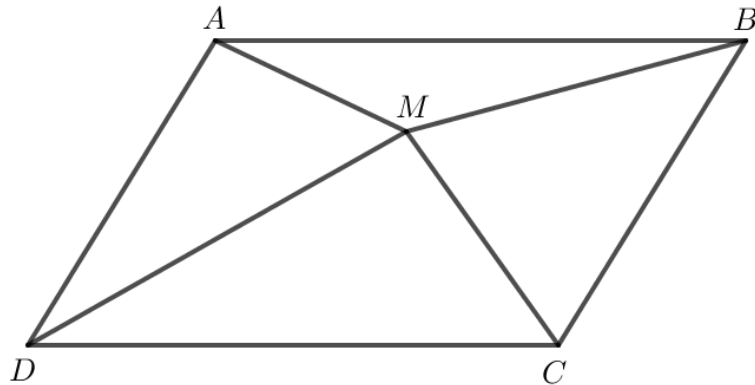
Mà $OA = OB$ nên O là trung điểm của AB.

Lại có O là tâm của đường tròn nên AB là đường kính của đường tròn (O).

Vậy AB là đường kính của đường tròn (O) thì hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau.

Bài 6 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC}$.

Do ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

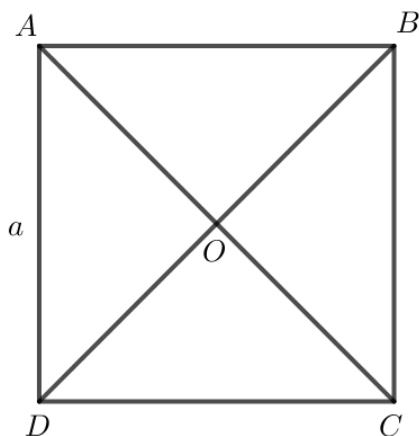
Bài 7 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Tính độ dài của các vector sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải:



a) Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.

Do đó $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = a$.

Vậy $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = a$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = a$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = a$.

c) Do O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông ABCD nên O là trung điểm của AC và BD.

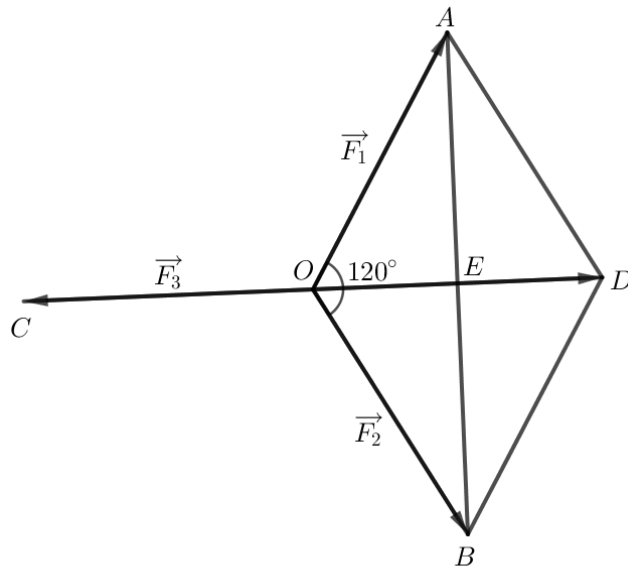
Do O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

Do đó $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DA}$.

Vậy $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{DA}| = a$.

Bài 8 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều là 120 N và $\angle AOB = 120^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực \vec{F}_3 .

Lời giải:



Do ba lực $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$ cùng tác động lên vật và vật đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2).$$

Dựng hình bình hành AOBD.

Gọi E là giao điểm hai đường chéo AB và OD.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ hay $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OD}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -\overrightarrow{OD}.$$

Do $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 120 \text{ N}$ nên $OA = OB$.

Hình bình hành AOBD có $OA = OB$ nên AOBD là hình thoi.

Do đó $AB \perp OD$ tại E.

Do AOBD là hình thoi nên OD là tia phân giác của $\angle AOB$.

$$\text{Do đó } \angle AOE = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Trong tam giác AOE vuông tại E ta có:

$$\cos \angle AOE = \frac{OE}{OA}$$

$$\Rightarrow OE = OA \cdot \cos \angle AOE = 120 \cdot \cos 60^\circ = 60 \text{ N.}$$

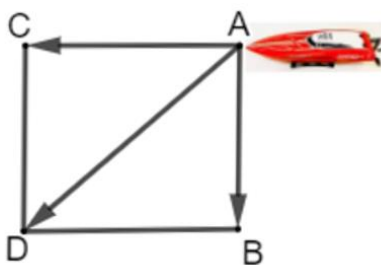
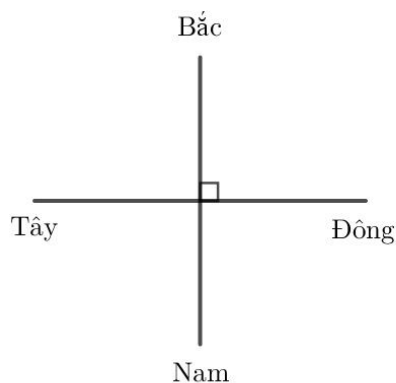
Do E là giao điểm hai đường chéo của hình thoi AOBD nên E là trung điểm của OD.

Do đó $OD = 120 \text{ N}$.

Vậy vector \vec{F}_3 ngược hướng với vector \vec{OD} và $|\vec{F}_3| = |-\vec{OD}| = 120 \text{ N}$.

Bài 9 trang 87 SGK Toán lớp 10 Tập 1: Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

Lời giải:



Cano chuyển động từ phía đông sang phía tây nên giả sử cano di chuyển từ A sang C, vector biểu thị vận tốc so với mặt nước của cano là vector \overrightarrow{AC} .

Khi đó $|\overrightarrow{AC}| = 40$.

Dòng nước chảy từ phía bắc xuống phía nam nên vector biểu thị vận tốc của dòng nước là vector \overrightarrow{AB} .

Khi đó $|\overrightarrow{AB}| = 10$.

Khi đó vận tốc của cano so với bờ sông được biểu thị bằng vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ trên.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Do hướng đông tây vuông góc với hướng bắc nam nên AC vuông góc với AB.

Do đó ACDB là hình chữ nhật.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác ABD vuông tại B:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 10^2 + 40^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 1\,700$$

$$\Rightarrow AD = 10\sqrt{17} \text{ km/h}$$

Vậy vận tốc của cano so với bờ sông bằng $10\sqrt{17}$ km/h.