Bài 3. Tích của một số với một vectơ

A. Lý thuyết

1. Tích của một số với một vectơ và các tính chất

Cho số $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

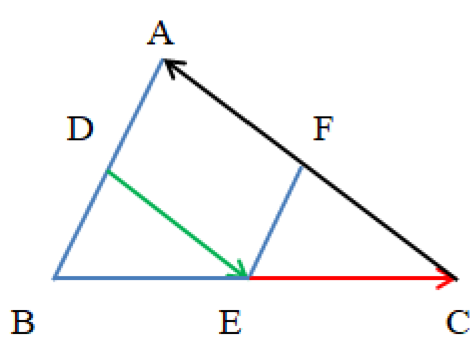
Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0 và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Ta quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

Người ta còn gọi tích của một số với một vectơ là tích của một vectơ với một số.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Tìm các vectơ bằng: $2\overrightarrow{DE}; -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}; -2\overrightarrow{EC}$.

Hướng dẫn giải



+ Vectơ bằng $2\overrightarrow{DE}$:

Tam giác ABC có D, E lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Do đó DE là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra DE // AC và 2DE = AC.

Vì k = 2 > 0 nên vectơ cần tìm cùng hướng với $\overrightarrow{DE}$ và có độ dài bằng 2DE.

Ta có $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{DE}$ và 2DE = AC.

Do đó $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$.

+ Vectơ bằng $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$:

Ta có F là trung điểm CA.

Do đó FA = CF = $\frac{1}{2}CA$.

Vì k = $-\frac{1}{2}$ < 0, nên vectơ cần tìm ngược hướng với $\overrightarrow{CA}$ và có độ dài bằng $\frac{1}{2}CA$.

Ta có $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CA}$ và AF = FC = $\frac{1}{2}CA$.

Do đó $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

+ Vectơ bằng $-2\overrightarrow{EC}$:

Ta có E là trung điểm BC.

Do đó CB = 2EC.

Vì k = –2 < 0, nên vectơ cần tìm ngược hướng với $\overrightarrow{EC}$ và có độ dài bằng 2EC.

Ta có $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{EC}$ và CB = 2EC.

Do đó $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{EC}$.

Tính chất:

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

+) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$;

+) $\left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;

+) $h\left(k\vec{a}\right)=\left(hk\right)\vec{a}$;

+) $1.\vec{a}=\vec{a}$;

+) $\left(-1\right).\vec{a}=-\vec{a}$.

Ví dụ: Ta có:

a) $6\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=6\vec{x}+6\vec{y}$;

b) $\left(3+x\right)\vec{u}=3\vec{u}+x\vec{u}$;

c) $6.\left(-5\vec{i}\right)=\left[6.\left(-5\right)\right]\vec{i}=-30\vec{i}$;

d) $2\vec{c}-7\vec{c}=\left(2-7\right)\vec{c}=-5\vec{c}$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}$ (quy tắc ba điểm)

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}$

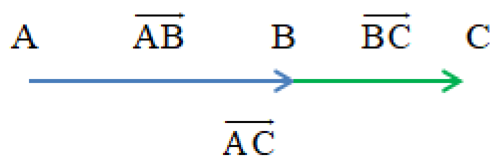
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC (đpcm).

2. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$
.



Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực (m; n) sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

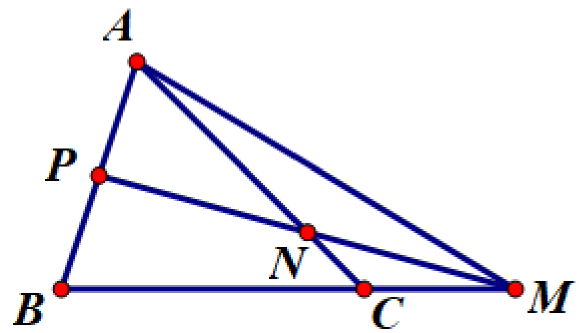
Ví dụ: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh rằng: 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MB}\right| = |3|.\left|\overrightarrow{MC}\right| \Rightarrow MB = 3MC$.

Mà $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ cùng hướng (do k = 3 > 0)

Do đó ba điểm B, C, M thẳng hàng và C nằm giữa B, M sao cho MB = 3MC.

Ta có $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ nên P là trung điểm AB.

Do đó AP = $\frac{1}{2}$AB.

Mà $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng.

Suy ra $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ta có: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Ta có $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = -3\overrightarrow{NC}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{NA}\right| = |-3|.\left|\overrightarrow{NC}\right|$ hay NA = 3NC.

Khi đó ta có AN = $\frac{3}{4}$AC.

Mà $\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NC}$ ngược hướng (do k = –3 < 0).

Do đó ba điểm A, N, C thẳng hàng và N nằm giữa hai điểm A và C sao cho $AN = \frac{3}{4}AC$.

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. (2)

c) Từ (1), ta suy ra $2\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Từ (2), ta suy ra $4\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

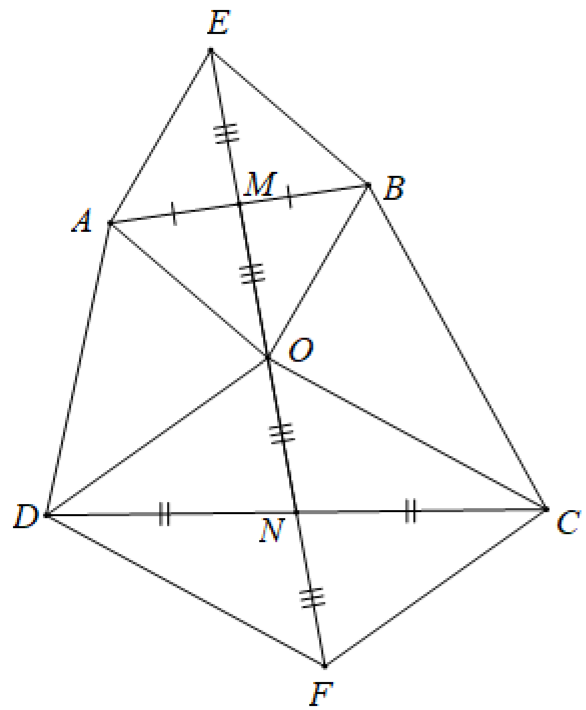
Do đó ta có $2\overrightarrow{MP} = 4\overrightarrow{MN}$ hay $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$.

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải



Gọi E và F lần lượt là điểm đối xứng với O qua M và N.

Suy ra M là trung điểm của AB và EO; N là trung điểm của DC và OF.

Khi đó các tứ giác OAEB và OCFD là các hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành trong hình bình hành OAEB)

Và $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$(quy tắc hình bình hành trong hình bình hành OCFD).

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$

Vì O là trung điểm của MN nên OM = ON, mà OM = ME, ON = MF.

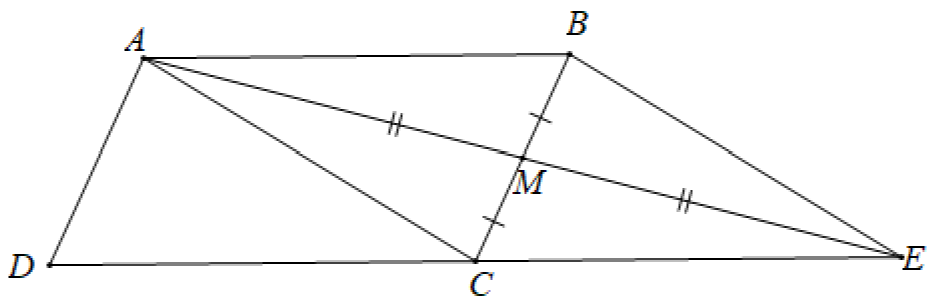
Do đó OE = OF hay O là trung điểm của EF

Suy ra $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải



Gọi E là điểm đối xứng với A qua M.

Khi đó M là trung điểm của BC và AE.

Suy ra tứ giác ABEC là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ (quy tắc hình bình hành)

Mà $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của AE)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

Xét hình bình hành ABCD có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{AD}}{2}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}.$

Hướng dẫn giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

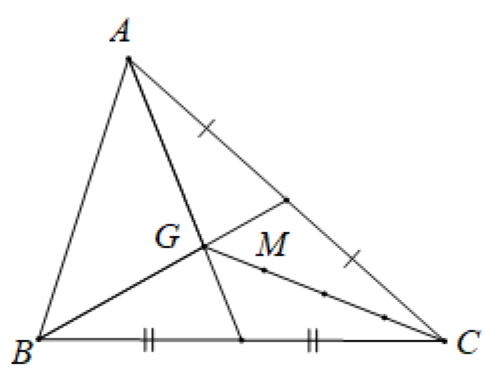
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$

Do đó vecto $\overrightarrow{GM}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{GC}$ và $GM=\frac{1}{4}GC.$



Vậy điểm M nằm giữa G và C sao cho $GM = \frac{1}{4}GC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}\right)$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC}$

$= \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)$

$= 4\overrightarrow{OM} + \vec{0}$ (vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$)

$= 4\overrightarrow{OM}$

Vậy với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.