

Bài 3. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A. Lý thuyết

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by \leq c, ax + by \geq c, ax + by < c, ax + by > c$$

Trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

- Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.

Nhận xét: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

Ví dụ:

$5x + 2y < 4$ có dạng $ax + by < c$ với $a = 5, b = 2, c = 4$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

$5x + 2y - 3z > 3$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có ba ẩn x, y, z .

Nghiệm của bất phương trình $5x + 2y < 4$:

Xét cặp số $(-1; -2)$ có $5 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -9 < 4$ nên cặp số $(-1; -2)$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét cặp số $(0; 0)$ có $5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 4$ nên cặp số $(0; 0)$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét cặp số $(-1;2)$ có $5.(-1) + 2.2 = -1 < 4$ nên cặp số $(-1;2)$ là nghiệm của bất phương trình.

Ta có thể tìm thêm được nhiều cặp số thỏa mãn bất phương trình đã cho. Do đó bất phương trình bậc nhất hai ẩn $5x + 2y < 4$ có các cặp nghiệm là $(-1; -2)$; $(0; 0)$; $(-1; 2)$... hay bất phương trình này có vô số nghiệm.

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

- Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành 2 nửa mặt phẳng bờ d :

+ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x;y)$ thỏa mãn $ax + by > c$;

+ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x;y)$ thỏa mãn $ax + by < c$;

Bờ d gồm các điểm có tọa độ $(x;y)$ thỏa mãn $ax + by = c$.

- Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$:

+ Vẽ đường thẳng $d : ax + by = c$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc d .

+ Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .

+ Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

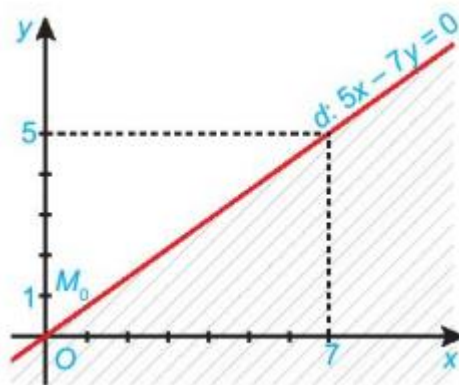
Chú ý: Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.

Ví dụ: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $5x - 7y \leq 0$ trên mặt phẳng tọa độ:

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d: 5x - 7y = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước 2: Lấy điểm $M_0(0;1)$ không thuộc d và thay $x = 0$ và $y = 1$ vào biểu thức $5x - 7y$ ta được $5.0 - 7.1 = -7 < 0$ là mệnh đề đúng.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M_0 (miền không bị gạch)



B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập tự luận

Bài 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- a) $0.x + 7y < 8$;
- b) $x^2 + y \geq -18$;
- c) $3x + 0y^2 < 19$;
- d) $4x - 5 < 3y$.

Hướng dẫn giải

Các bất phương trình là bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- a) $0.x + 7y < 8$ có dạng $ax + by < c$ với $a = 0$, $b = 7$ và $c = 8$. Do đó a) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- b) $x^2 + y \geq -18$ là bất phương trình bậc hai nên b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- c) $3x + 0y^2 < 19 \Leftrightarrow 3x < 19$ có dạng $ax + by < c$ với $a = 3$, $b = 0$ và $c = 19$. Do đó c) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- d) $4x - 5 < 3y \Leftrightarrow 4x - 3y < 5$ có dạng $ax + by < c$ với $a = 4$, $b = -3$ và $c = 5$. Do đó d) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vậy các bất phương trình a, c, d là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 2. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $2x - y < 10$. Cặp nghiệm nào sau đây là nghiệm của bất phương trình trên?

$$(x; y) = (2; 5), (4; 8), (10; 6), (4; -7), (11; 12).$$

Hướng dẫn giải

Thay $(x; y) = (2; 5)$ vào bất phương trình ta có: $2.2 - 5 < 10$ (luôn đúng). Do đó cặp số $(2; 5)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay $(x; y) = (4; 8)$ vào bất phương trình ta có: $2.4 - 8 < 10$ (luôn đúng). Do đó cặp số $(4; 8)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay $(x; y) = (10; 6)$ vào bất phương trình ta có: $2.10 - 6 < 10$ (vô lí). Do đó cặp số $(5;6)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay $(x; y) = (4; -7)$ vào bất phương trình ta có: $2.4 - (-7) < 10$ (vô lí). Do đó cặp số $(4;-7)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Thay $(x; y) = (11; 12)$ vào bất phương trình ta có: $2.11 - 12 < 10$ (vô lí). Do đó cặp số $(11;12)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy ta có cặp nghiệm thỏa mãn là: $(x; y) = (2; 5), (4; 8)$.

Bài 3. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $4x + y \leq 15$.

a) Chỉ ra 2 nghiệm của bất phương trình trên.

b) Với $x = 0$ thì có bao nhiêu giá trị của y thỏa mãn bất phương trình.

Hướng dẫn giải

a) Chọn $(x; y) = (0; 0)$

Thay $x = 0$ và $y = 0$ vào bất phương trình đã cho ta được $4.0 + 0 \leq 15$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(0; 0)$ là nghiệm của bất phương trình.

Chọn $(x; y) = (0; 1)$

Thay $x = 0$ và $y = 1$ vào bất phương trình đã cho ta được $4.0 + 1 \leq 15$ là mệnh đề đúng. Do đó cặp $(0; 1)$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy hai cặp nghiệm của bất phương trình: $(x; y) = (0; 0), (0; 1)$.

b) Với $x = 0$ thì bất phương trình trở thành: $y \leq 15$ và có vô số giá trị của y thỏa mãn bất phương trình.

B2. Bài tập trắc nghiệm

Bài 4. Bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x - y > 7(x - 4y) + 1$?

A. $4x - 27y + 1 > 0$;

B. $4x - 27y + 1 \geq 0$;

C. $4x - 27y < -1$;

D. $4x - 27y + 1 \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Ta có:

$$3x - y > 7(x - 4y) + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - y > 7x - 28y + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 > 7x - 3x - 28y + y + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x - 27y + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 27y < -1.$$

Vậy ta chọn phương án C.

Bài 5. Bạn Lan để dành được 300 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ học sinh khó khăn, bạn Lan đã ủng hộ x tờ tiền loại 10 nghìn đồng, y tờ tiền loại 20 nghìn đồng từ tiền để dành của mình. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào diễn tả giới hạn về tổng số tiền mà bạn Lan đã ủng hộ.

A. $x + y < 300$;

B. $10x + y < 300$;

C. $10x + 20y > 300$;

D. $10x + 20y \leq 300$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Số tiền mệnh giá 10 nghìn đồng là: $10x$ (nghìn đồng)

Số tiền mệnh giá 20 nghìn đồng là: $20y$ (nghìn đồng)

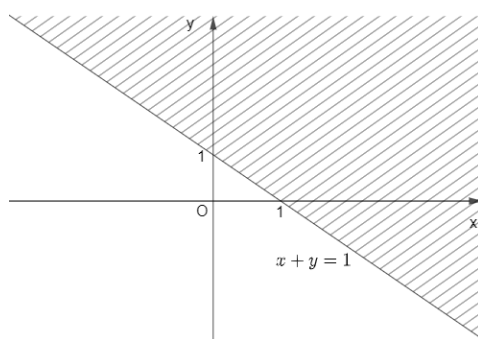
Tổng số tiền bạn Lan đã ủng hộ là: $10x + 20y$ (nghìn đồng)

Vì tổng số tiền Lan ủng hộ không vượt quá số tiền Lan đã dành được là 300 nghìn đồng nên ta có bất phương trình: $10x + 20y \leq 300$

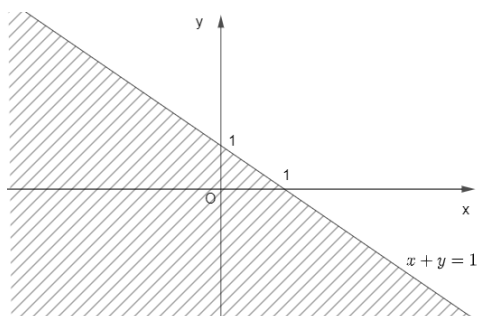
Vậy ta chọn đáp án D.

Bài 6. Miền nghiệm của bất phương trình $x + y < 1$ là miền không bị gạch trong hình vẽ nào sau đây?

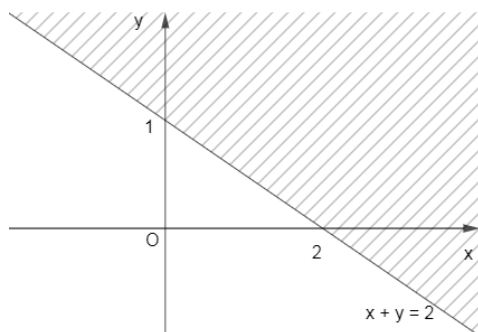
A.



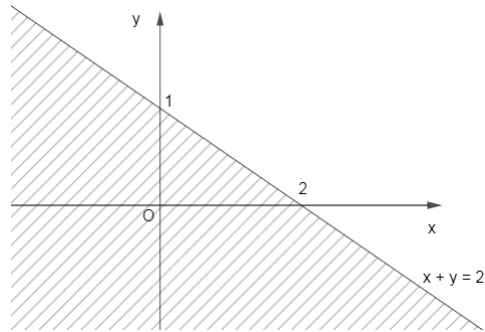
B.



C.



D.



Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Đường thẳng $x + y = 1$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

Với cặp số $(x ; y) = (0;0)$ ta có: $0 + 0 = 0 < 1$ nên cặp số $(x ; y) = (0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y < 1$.

Do đó điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y < 1$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + y < 1$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y = 1$, chứa điểm $O(0;0)$ (không kể bờ).

Vậy ta chọn đáp án A.