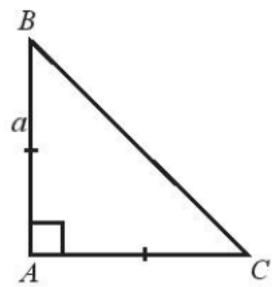
Bài 4. Tích vô hướng của hai vectơ

Bài 1 trang 100 SBT Toán 10 Tập 1: Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a.

Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

Lời giải:



Hình 1

Do tam giác ABC vuông tại A nên AB ⊥ AC ⇒ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$;

Ta có: CB = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{ACB} = 45°$

Như vậy: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}) = -|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|.\cos 45° = -\,a.\,a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$

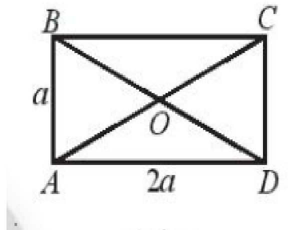
Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -a^2$.

Bài 2 trang 100 SBT Toán 10 Tập 1: Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và AD = 2a, AB = a. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Lời giải:



Hình 2

a) Vì ABCD là hình chữ nhật nên AB = CD = a, AD = BC = 2a.

Ta có: AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ = $\sqrt{a^2 + (2a)^2}$ = $a\sqrt{5}$.

Xét tam giác BAC vuông tại B, có: $\cos \widehat{BAO} = \cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{5}a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

ABCD là hình chữ nhật nên O là trung điểm của AC và BD

$\Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AO}\right|.\cos\widehat{BAO} = a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{a^2}{2}$.

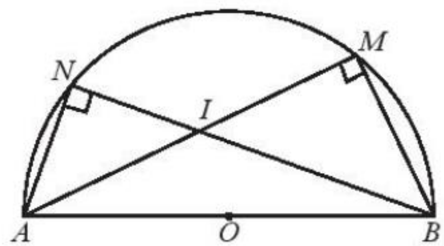
Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \dfrac{a^2}{2}$.

b) Do ABCD là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$.

Bài 3 trang 101 SBT Toán 10 Tập 1: Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB = 2R. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R.



Hình 5

Lời giải:

a) AB là đường kính nên $AMB = ANB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$AM \perp MB$ và $AN \perp NB$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BM}$

Mà $AI \perp BM$ do $AM \perp MB$ nên $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Như vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$.

Tương tự ta có: $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AN}$

Mà $BI \perp AN$ do $AN \perp NB$ nên $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AN} = 0$.

Như vậy $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} + 0 = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI})$

$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2$.

Bài 4 trang 101 SBT Toán 10 Tập 1: Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 60N kéo một vật dịch chuyển một vectơ $\vec{d}$ có độ dài 200 m. Biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60°$.

Lời giải:

Áp dụng công thức tính công ta có:

$A = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{F}, \vec{d}\right)$ = 60.200.cos60° = 6000 (J).

Vậy công sinh bởi lực $\vec{F}$ bằng 6000 J.

Bài 5 trang 101 SBT Toán 10 Tập 1: Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 6 và 8 có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Lời giải:

Gọi hai vectơ lần lượt là $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ và góc giữa hai vectơ là α.

Ta có $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = \left|\overrightarrow{v_1}\right|.\left|\overrightarrow{v_2}\right|.\cos\alpha = 6.8.\cos\alpha = 24$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Vậy góc giữa hai vectơ đề cho là 60°.