Các bài toán về giới hạn dãy số

1. Lý thuyết

a) Dãy số có giới hạn 0

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số kể từ một số hạng nào đó trở đi, $|u_n|$ nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

b) Dãy số có giới hạn hữu hạn

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim (u_n – L) = 0$

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ hay $\lim u_n = L$ hay $u_n \to L$ khi $n \to +\infty$.

c) Dãy số có giới hạn vô cực

Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ký hiệu : $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$

Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$

Ký hiệu : $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$

d) Một vài giới hạn đặc biệt

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0; \qquad \lim \frac{1}{n^k} = 0, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right); \qquad \lim n^k = +\infty, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } q > 1 \end{cases}$$

e) Định lý về giới hạn hữu hạn

* Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó ta có :

$\lim(u_n + v_n) = a + b$

$\lim(u_n - v_n) = a - b$

$\lim(u_n v_n) = a.b$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$$

$\lim(cu_n) = c.a$

$\lim|u_n| = |a|$

$\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$

Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

* ***Định lí kẹp:*** Cho ba dãy số (v_n); (u_n) và (w_n):

Nếu $\begin{cases}(v_n) \leq (u_n) \leq (w_n),\ \forall n \in N^* \\ \lim v_n = \lim w_n = a\end{cases}$ thì $\lim u_n = a$.

Hệ quả: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n):

Nếu $\begin{cases}|u_n| \leq v_n,\ \forall n \in N^* \\ \lim v_n = 0\end{cases}$ thì $\lim u_n = 0$.

f) Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

* Quy tắc tìm giới hạn tích $\lim(u_nv_n)$

Nếu $\lim u_n = L \neq 0,\ \lim v_n = +\infty(\text{hay} -\infty)$. Khi đó: $\lim(u_nv_n)$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

* Quy tắc tìm giới hạn thương $\lim\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
	0	-	$-\infty$

L < 0	0	+	$-\infty$
	0	-	$+\infty$

g) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Xét cấp số nhân vô hạn u_1; u_1q; u_1q^2; … u_1q^n; … có công bội $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \dfrac{u_1}{1-q}\ \left(|q| < 1\right)$

2. Các dạng toán

Dạng 1. Tính giới hạn sử dụng một vài giới hạn đặc biệt

Phương pháp giải:

Sử dụng các giới hạn đặc biệt:

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0; \quad \lim \frac{1}{n^k} = 0, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right); \qquad \lim n^k = +\infty, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } q > 1 \end{cases}$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1}{n^2}$

b) $\lim \dfrac{1}{n^2 + n + 3}$

c) $\lim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Lời giải

Áp dụng công thức tính giới hạn đặc biệt, ta có:

a) $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$

b) $\lim \dfrac{1}{n^2 + n + 3} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}$

c) $\lim (-0,999)^n$

Lời giải

a) $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ vì $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

b) $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} = +\infty$ vì $\frac{5}{4} > 1$

c) $\lim (-0,999)^n = 0$ vì $|-0,999| < 1$.

Dạng 2. Tính giới hạn hữu hạn của phân thức

Phương pháp giải:

Trường hợp lũy thừa của n: Chia cả tử và và mẫu cho n^k (với n^k là lũy thừa với số mũ lớn nhất).

Trường hợp lũy thừa mũ n: Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa có cơ số lớn nhất.

Sử dụng một vài giới hạn đặc biệt:

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0; \quad \lim \frac{1}{n^k} = 0, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right); \quad \lim n^k = +\infty, \left(k > 0, k \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } q > 1 \end{cases}$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n}$

b) $\lim \dfrac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}}$

c) $\lim \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2 + 2\sqrt{n} - 3}$

Lời giải

a) $$\lim \frac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n} = \lim \frac{\dfrac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4}}{\dfrac{n^4 + 4n^3 + n}{n^4}}$$

$$= \lim \frac{-\dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{4}{n^4}}{1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^3}} = \frac{-0 + 0 + 4}{1 + 0 + 0} = 0$$

Vì $\lim \dfrac{2}{n} = 0$, $\lim \dfrac{3}{n^2} = 0$, $\lim \dfrac{4}{n^4} = 0$, $\lim \dfrac{4}{n} = 0$ và $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$.

b) $$\lim \frac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}} = \lim \frac{\dfrac{(-5)^n}{(-7)^{n+1}} + \dfrac{4^n}{(-7)^{n+1}}}{\dfrac{(-7)^{n+1}}{(-7)^{n+1}} + \dfrac{4^{n+1}}{(-7)^{n+1}}}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{1}{-7}.\left(\dfrac{-5}{-7}\right)^n + \dfrac{1}{-7}.\left(\dfrac{4}{-7}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{4}{-7}\right)^{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{-7}.0 + \dfrac{1}{-7}.0}{1+0} = 0$$

Vì $\lim \left(\dfrac{-5}{-7}\right)^n = \lim \left(\dfrac{4}{-7}\right)^n = 0$

c) $$\lim \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2 + 2\sqrt{n} - 3} = \lim \frac{\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2}}{\dfrac{n^2 + 2\sqrt{n} - 3}{n^2}}$$

$$=\lim \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n\sqrt{n}}-\frac{3}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0-0}=0$$

Vì $\lim \frac{2}{\sqrt{n}}=0,\ \lim \frac{1}{n^2}=0$, $\lim \frac{2}{n\sqrt{n}}=0,\ \lim \frac{3}{n^2}=0$.

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{5n^2+3n-7}{n^2}$

b) $\lim \frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

c) $\lim \frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

d) $\lim \frac{4^n}{2.3^n+4^n}$

Lời giải

a) $\lim \frac{5n^2+3n-7}{n^2}=\lim \left(\frac{5n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{7}{n^2}\right)=\lim \left(5+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)=5$

b) $\lim \frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}=\lim \frac{\frac{-4n^2+n+2}{n^2}}{\frac{2n^2+n+1}{n^2}}=\lim \frac{-4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{-4}{2}=-2$

c) $\lim \frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim \frac{\frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=\lim \frac{\sqrt{2+\frac{2}{n}}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

d) $\lim \frac{4^n}{2.3^n+4^n}=\lim \frac{\frac{4^n}{4^n}}{2.\frac{3^n}{4^n}+\frac{4^n}{4^n}}=\lim \frac{1}{2.\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=1$

Dạng 3: Tính giới hạn hữu hạn sử dụng phương pháp liên hợp

Phương pháp giải: Sử dụng các công thức liên hợp (thường sử dụng trong các bài toán chứa căn)

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a}-b=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$$

$$\sqrt{a}+b=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}-b}$$

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\sqrt[3]{a}-b=\frac{a-b^3}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$$

$$\sqrt[3]{a}+b=\frac{a+b^3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$

b) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)=\lim\dfrac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}$

$=\lim\dfrac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}=0$

b) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$=\lim\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=\lim\frac{n^2+3n+5-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=\lim\frac{\frac{3n}{n}+\frac{5}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+3n+5}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{n^3+3n^2-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{3n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{\frac{3n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}}{n^2}+\frac{n\sqrt[3]{n^3+3n^2}}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}$$

$$=\lim \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{\left(n^3+3n^2\right)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{n^3+3n^2}{n^3}}+1}$$

$$=\lim \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{1+1+1}=1$$

Dạng 4: Tính giới hạn ra vô cực dạng chứa đa thức hoặc căn thức

Phương pháp giải:

Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung.

Sử dụng quy tắc giới hạn tới vô cực lim $(u_n v_n)$

Nếu $\lim u_n = L \neq 0,\ \lim v_n = +\infty (\text{hay} -\infty)$. Khi đó: lim $(u_n v_n)$

lim u_n = L	lim v_n	lim $(u_n v_n)$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)$

b) $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)$

c) $\lim\left(5^n-2^n\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)=\lim n^4\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)=+\infty$

Vì $\lim n^4=+\infty$; $\lim\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)=1>0$.

b) $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)=\lim n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=-\infty$

Vì $\lim n^3 = +\infty$; $\lim\left(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) = -2 < 0$

c) $\lim\left(5^n - 2^n\right) = \lim\left[5^n.\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right] = +\infty$

Vì $\lim 5^n = +\infty$ và $\lim\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 1 > 0$.

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2}\right)$

b) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{4n+1}\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2}\right)$

$= \lim\left(2n - \sqrt{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}\right)$

$= \lim n\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\right) = -\infty$

Vì $\lim n\sqrt{n} = +\infty$; $\lim\left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\right) = 0 - \sqrt{1} = -1 < 0$

b) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{4n+1}\right)$

$= \lim\left(n^2 - n.\sqrt{n^2\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)$

$= \lim n^2\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = +\infty$

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = 1 > 0$.

Dạng 5: Tính giới hạn ra vô cực dạng phân thức

Phương pháp giải:

Rút bậc lớn nhất của tử và mẫu ra làm nhân tử chung.

Sử dụng quy tắc giới hạn tới vô cực lim $(u_n v_n)$

Nếu $\lim u_n = L \neq 0,\ \lim v_n = +\infty (\text{hay} - \infty)$. Khi đó: lim $(u_n v_n)$

lim u_n = L	lim v_n	lim $(u_n v_n)$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^4 - 3n^3 + 2}{n^3 + 2}$

b) $\lim \dfrac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5 + 4n^3 - 1}$

Lời giải

a) $\lim \dfrac{2n^4 - 3n^3 + 2}{n^3 + 2} = \lim \dfrac{n^4\left(2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^4}\right)}{n^3\left(1 + \dfrac{2}{n^3}\right)}$

$= \lim \left[n.\dfrac{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^4}}{1 + \dfrac{2}{n^3}} \right] = +\infty$

Vì $\lim n = +\infty$; $\lim \dfrac{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^4}}{1 + \dfrac{2}{n^3}} = 2 > 0$.

b) $\lim \dfrac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5 + 4n^3 - 1}$

$$=\lim \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right).\left(n^2\right)^3\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{n^5\left(-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}\right)}$$

$$=\lim n^2.\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}=-\infty$$

Vì $\lim n^2=+\infty$; $\lim \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}=\frac{2.3^3}{-2}=-27<0$

Ví dụ 2: Tính giới hạn sau $\lim \frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}$.

Lời giải

$$\lim \frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}$$

$$=\lim \frac{n^2\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{n\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}$$

$$=\lim n\frac{\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}=+\infty$$

Vì $\lim n=+\infty$; $\lim \frac{\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}=\frac{3-\sqrt{2}}{4-\sqrt{3}}>0$.

Dạng 6: Tính giới hạn sử dụng định lý kẹp

Phương pháp giải:

Sử dụng định lý kẹp và hệ quả của định lý kẹp

Định lí kẹp: Cho ba dãy số (v_n); (u_n) và (w_n): Nếu $\begin{cases}(v_n)\le(u_n)\le(w_n),\ \forall n\in N^*\\ \lim v_n=\lim w_n=a\end{cases}$ thì $\lim u_n = a$

Hệ quả: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n): Nếu $\begin{cases}|u_n|\le v_n,\ \forall n\in N^*\\ \lim v_n=0\end{cases}$ thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{(-1)^n}{n+4}$

b) $\lim\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

Lời giải

a) Vì $\left|\frac{(-1)^n}{n+4}\right|\le\frac{1}{n+4}$ và $\lim\frac{1}{n+4}=0$

Nên $\lim\frac{(-1)^n}{n+4}=0$.

b) Vì $\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}$

và $\lim\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]=0+0=0$

Nên $\lim\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)=0$.

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{\sin^2 n}{n+2}$

b) $\lim\frac{1+\cos n^3}{2n+3}$

Lời giải

a) Vì $\left|\dfrac{\sin^2 n}{n+2}\right| \le \dfrac{1}{n+2}$ và $\lim \dfrac{1}{n+2} = 0$

Nên $\lim \dfrac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

b) Vì $\left|\dfrac{1+\cos n^3}{2n+3}\right| \le \dfrac{2}{2n+3}$ và $\lim \dfrac{2}{2n+3} = 0$

Nên $\lim \dfrac{1+\cos n^3}{2n+3} = 0$.

Dạng 7: Giới hạn dãy số có công thức truy hồi

Phương pháp giải:

Cho dãy số (u_n) ở dạng công thức truy hồi, biết (u_n) có giới hạn hữu hạn

Giả sử lim u_n = a (a là số thực) thì lim u_{n+1} = a.

Thay a vào công thức truy hồi. Giải phương trình tìm a.

Ta được giới hạn của (u_n) là lim u_n = a.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm lim u_n biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Lời giải

Giả sử lim u_n = a, khi đó lim u_{n+1} = a

Suy ra $a = \dfrac{2a+3}{a+2} \Rightarrow a^2 + 2a = 2a + 3 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$.

Do $u_1 = 1 > 0, u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{3}$.

Ví dụ 2: Tìm lim u_n biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n): \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Lời giải

Vì $u_1 = \sqrt{2} > 0; u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} > 0$

Giả sử lim u_n = a (a > 0), khi đó lim u_{n+1} = a

Suy ra $a=\sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2=a+2 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \text{ (Loai)} \\ a=2 \end{array}\right.$.

Vậy lim u_n = 2.

Dạng 8: Giới hạn của tổng vô hạn hoặc tích vô hạn

Phương pháp giải:

* Rút gọn (u_n) (sử dụng tổng cấp số cộng, cấp số nhân hoặc phương pháp làm trội)

* Rồi tìm lim u_n theo định lí hoặc dùng nguyên lí định lí kẹp.

* Định lí kẹp: Cho ba dãy số (v_n); (u_n) và (w_n): Nếu $\begin{cases} (v_n) \le (u_n) \le (w_n),\ \forall n \in N^* \\ \lim v_n = \lim w_n = a \end{cases}$ thì lim u_n = a

Hệ quả: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n): Nếu $\begin{cases} |u_n| \le v_n,\ \forall n \in N^* \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$ thì lim u_n = 0.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

b) $\lim\frac{1+2+3+4+...+n}{\left(1+3+3^2+3^3+...+3^n\right).(n+1)}$

Lời giải

a) $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$=\lim\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$=\lim\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

b) $L=\lim\frac{1+2+3+4+...+n}{\left(1+3+3^2+3^3+...+3^n\right).(n+1)}$

Xét tử số: Ta thấy 1; 2; 3; 4; … ; n là một dãy số thuộc cấp số cộng có n số hạng với $u_1 = 1$ và $d = 1$.

Tổng n số hạng của cấp số cộng: $S_n=\frac{\left(u_1+u_n\right)n}{2}=\frac{\left(1+n\right)n}{2}$.

Xét mẫu số: Ta thấy 1; 3 ; 3^2 ; 3^3 ; … ; 3^n là một dãy số thuộc cấp số nhân có (n+1) số hạng với $u_1 = 1$ và $q = 3$.

Tổng (n + 1) số hạng của cấp số nhân: $S_{n+1}=u_1.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-3^{n+1}}{1-3}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Khi đó : $L=\lim\frac{\frac{\left(1+n\right)n}{2}}{\frac{3^{n+1}-1}{2}.(n+1)}=\lim\frac{n}{3^{n+1}-1}$

Vì $\left|\frac{n}{3^{n+1}-1}\right|=\left|\frac{n}{3.3^n-1}\right|<\frac{n}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

Nên $L=\lim\frac{n}{3^{n+1}-1}=0$

(Bằng quy nạp ta luôn có $n<2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ và

$3^n>1,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3^{n+1}-3^n=2.3^n>2>1\Rightarrow 3^{n+1}-1>3^n$).

Ví dụ 2: Tính giới hạn sau: $\lim\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$

Lời giải

Xét $u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$

Ta có $\frac{2k-1}{2k}=\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2}}<\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}},\left(\forall k\in\mathbb{N}*\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ \Rightarrow \dfrac{3}{4} < \sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{2n-1}{2n} < \sqrt{\dfrac{2n-1}{2n+1}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}...\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Do đó $|u_n| < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n$ và $\lim \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

Nên $\lim u_n = 0$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

Dạng 9: Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp giải:

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \dfrac{u_1}{1-q}\ \left(|q| < 1\right)$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính tổng

a) $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$

b) $S = 1 + 0{,}9 + (0{,}9)^2 + (0{,}9)^3 + \ldots$

Lời giải

a) $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = \dfrac{1}{2}$.

Nên $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$.

b) $S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+\ldots$ là cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = 0,9$.

Nên $S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+\ldots=\dfrac{1}{1-0,9}=10$.

Ví dụ 2: Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn ra phân số:

a) $a=0,32111...$

b) $b=2,151515...$

Lời giải

a) Ta có $a=0,32111...=\dfrac{32}{100}+\dfrac{1}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{1}{10^5}+...$

Vì $\dfrac{1}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{1}{10^5}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=\dfrac{1}{10^3}$ và $q=\dfrac{1}{10}$

Nên $b=\dfrac{32}{100}+\dfrac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{289}{900}$.

b) Ta có $b=2,151515...=2+\dfrac{15}{100}+\dfrac{15}{100^2}+\dfrac{15}{100^3}+...$

Vì $\dfrac{15}{100}+\dfrac{15}{100^2}+\dfrac{15}{100^3}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=\dfrac{15}{100}$ và $q=\dfrac{1}{100}$

Nên $b=2+\dfrac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{71}{33}$.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **Sai**?

A. $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$. **B.** $\lim\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$. **C.** $\lim\dfrac{1}{n^3}=-1$. **D.** $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **B.** $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$. **C.** $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Câu 3. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\lim\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **B.** $\lim\frac{1-2n}{5n+5}$. **C.** $\lim\frac{1-2n^2}{5n+5}$. **D.** $\lim\frac{1-2n}{5n+5n^2}$.

Câu 4. Tính giới hạn $\lim\frac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{3n^2+4}$. Khi đó lim u_n bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó lim u_n bằng

A. 2 **B.**1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Câu 7. Tính $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 8. Tính $\lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)$ bằng:

A. $-\frac{4}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** -4.

Câu 9. Tính $\lim\frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 10. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}$.

B. $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

C. $\lim\dfrac{1-2n^2}{n^2+2n}$.

D. $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n\ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, lim u_n bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 12. Giới hạn dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** 0.

Câu 13. Chọn kết quả đúng của $\lim\dfrac{\sqrt{n^3-2n+5}}{3+5n}$.

A. 5. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 14. Tổng $S=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}+...$ bằng:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$

Câu 15. Biểu diễn số thập phân 1,24545454545… như một phân số:

A. $\dfrac{249}{200}$ **B.** $\dfrac{137}{110}$ **C.** $\dfrac{27}{22}$ **D.** $\dfrac{69}{55}$

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	D	D	A	A	B	B	C	D	D	B	A	D	B	B