Bài 1. Phương pháp quy nạp toán học

A. Lý thuyết

I. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.

- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

Đó là **phương pháp quy nạp toán học**, hay còn gọi tắt là **phương pháp quy nạp**.

II. Ví dụ áp dụng

- Ví dụ 1. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

Lời giải:

Bước 1: Với n = 1 ta có:

Vế trái = 1 và vế phải = 1

Vậy hệ thức đúng với n = 1.

Bước 2: Giả sử hệ thức đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

Ta cần chứng minh hệ thức đúng với n = k + 1, tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (2)$$

Thật vậy:

Vế trái = 1 + 2 + 3+ … + k + k + 1

$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$ (Do đẳng thức (1))

$= (k+1).\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1).(k+2)}{2} = VP$

Vậy hệ thức đã cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

- Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $\forall\ n \geq 1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Lời giải:

- Với n = 1, bất đẳng thức cho trở thành: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đúng).

Vậy bất đẳng thức cho đúng với n = 1.

- Giả sử bất đẳng thức cho đúng với mọi số tự nhiên $n = k \geq 1$, tức là :

$$\frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad (1)$$

-Ta chứng minh bất đẳng thức cho đúng với n = k + 1, tức là :

$$\frac{1.3.5....(2k-1)(2k+1)}{2.4.6...2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$$VT(2) = \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...2k}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \quad \text{(theo (1))}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \Leftrightarrow \sqrt{2k+1}.\sqrt{2k+3} < 2k+2 \quad \text{(do hai vế đều dương)}$$

Hay $(2k + 1).(2k + 3) < (2k + 2)^2$

$\Leftrightarrow 4k^2 + 6k + 2k + 3 < 4k^2 + 8k + 4$

$\Leftrightarrow$ 3 < 4 (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

- Chú ý:

Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh:

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1).(2n+1)}{6}$.

Lời giải:

- Với n = 1 thì vế trái = 1^2 = 1 và vế phải = $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với n = 1.

- Giả sử đẳng thức đúng với n = k ≥ 1, tức là:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1).(2k+1)}{6}$$

- Ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với n = k + 1, tức là chứng minh

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1).(2k+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1).(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \quad (1)$$

Mà

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k^2+4k+3k+6\right)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k(k+2)+3(k+2)\right)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (2)$$

Từ (1); (2) suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với n = k + 1. Suy ra có điều phải chứng minh.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$, ta có: $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

Lời giải:

Bước 1: Với n = 4 thì vế trái bằng $2^{4+1} = 32$ và vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28$.

Do 32 > 28 nên bất đẳng thức đúng với n = 4.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 4$, nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k$.

Suy ra, $2.2^{k+1} > 2.(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$.

Mặt khác: $2k^2 + 6k - (k^2 + 5k + 4) = k^2 + k - 4 \geq 4^2 + 4 - 3 = 16$ với mọi $k \geq 4$.

Do đó, $2^{k+2} > 2k^2 + 6k > k^2 + 5k + 4$ hay bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng $7^n + 5$ chia hết cho 6 với $n \geq 1$.

Lời giải:

Thật vậy: Với n = 1 thì $7^1 + 5 = 12 \vdots 6$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $7^k + 5$ chia hết cho 6.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, nghĩa là phaỉ chứng minh $7^{k+1} + 5$ chia hết cho 6.

Ta có: $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) - 30$.

Theo giả thiết quy nạp thì $(7^k + 5) \vdots 6$ nên $7(7^k + 5) \vdots 6$

Lại có: $30 \vdots 6$ nên $(7^{k+1} + 5) \vdots 6$

Vậy $7^n + 5$ chia hết cho 6 với mọi $n \geq 1$.