BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a;b)$. Khi đó, hệ thức y' = f'(x) xác định một hàm số mới trên khoảng (a; b). Nếu hàm số y' = f'(x) lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số y = f(x) và kí hiệu là y'' hoặc f''(x).

Chú ý:

+ Đạo hàm cấp 3 của hàm số y = f(x) được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hoặc f'''(x) hoặc $f^{(3)}(x)$.

+ Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp n – 1 , kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của f(x), kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Ví dụ 1. Với $y = 7x^4 + 8x + 12$. Tính $y^{(5)}$

Lời giải

Ta có: $y' = 28x^3 + 8$, $y'' = 84x^2$, $y''' = 168x$, $y^{(4)} = 168$, $y^{(5)} = 0$.

Vậy $y^{(5)} = 0$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động xác định bởi phương trình s = f(t), trong đó s = f(t) là một hàm số có đạo hàm đến cấp hai. Vận tốc tức thời tại t của chuyển động là v(t) = f'(t).

Lấy số gia Δt tại t thì v(t) có số gia tương ứng là Δv.

Tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ được gọi là gia tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian Δt. Nếu tồn tại: $v'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \gamma(t)$.

Ta gọi $v'(t) = \gamma(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

Vì v(t) = f'(t) nên: $\boxed{\gamma(t) = f''(t)}$.

Đạo hàm cấp hai f''(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s = f(t) tại thời điểm t.

Ví dụ 2. Tính gia tốc tức thời của sự rơi tự do $s=\frac{1}{2}gt^2$.

Lời giải

Ta có: $s'=gt$.

Gia tốc tức thời của sự tơi tự do là: $\gamma=s"(t)=s'(t)=g\approx 9,8\ (m/s^2)$.

Vậy gia tốc tức thời của sự rơi tự do là: $g\approx 9,8m/s^2$.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính đạp hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) y = sin5x.cos2x;

b) $y=x\sqrt{x^2+1}$;

c) y = (1 – x^2)cosx;

d) y = $y=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

Lời giải

a) y’ = (sin5x.cos2x)’ = 5cos5x.cos2x – 2sin5x.sin2x

$\Rightarrow$ y” = (5cos5x.cos2x – 2sin5x.sin2x)’

= - 25sin5x.cos2x – 10cos5xsin2x – 10cos5xsin2x – 4sin5x.cos2x.

b) $y'=\left(x\sqrt{x^2+1}\right)'=x'\sqrt{x^2+1}+x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow y''=\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{4x\sqrt{x^2+1}-\left(2x^2+1\right).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{2x^3+3x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}.$$

c) y’ = [(1 – x^2)cosx]’ = -2x.cosx – (1- x^2).sinx

$\Rightarrow$ y” = [-2x.cosx – (1- x^2).sinx]’ = -2cosx + 2xsinx + 2xsinx – (1 – x^2).cosx.

d) $y'=\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}\right)'=\frac{2\left(x^2+x-2\right)-\left(2x+1\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 4 - 4x^2 - 4x - 1}{\left(x^2 + x - 2\right)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 5}{\left(x^2 + x - 2\right)^2}$$

$$y'' = \left[\frac{-2x^2 - 2x - 5}{\left(x^2 + x - 2\right)^2}\right]' = \frac{\left(-4x - 2\right)\left(x^2 + x - 2\right)^2 - \left(-2x^2 - 2x - 5\right) 2.\left(x^2 + x - 2\right)\left(2x + 1\right)}{\left(x^2 + x - 2\right)^4}$$

Bài 2. Cho hàm số y = $(3x – 4)^6$. Tính y''(2) và $y^{(4)}(2)$.

Lời giải

Ta có: y' = $6(3x – 4)^5.3 = 18(3x – 4)^5$

$$\Rightarrow y'' = 18.5(3x - 4)^4.3 = 270(3x - 4)^4$$

$$\Rightarrow y''' = 270.4.(3x - 4)^3.3 = 3240(3x - 4)^3$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = 3240.3.(3x - 4)^2.3 = 29160(3x - 4)^2$$

Khi đó, ta có:

$$y''\left(2\right) = 270(3.2 - 4)^4 = 4320;$$

$$y^{(4)}\left(2\right) = 29160(3.2 - 4)^2 = 116640.$$

Vậy y''(2) = 4320 và $y^{(4)}(2)$ = 116640.