

## Bài 7. Các khái niệm mở đầu

**Mở đầu trang 46 SGK Toán 10 tập 1:** Nhiệt độ và gió là hai yếu tố luôn cùng được đề cập trong các bản tin dự báo thời tiết. Tuy nhiên, nhiệt độ là đại lượng chỉ có độ lớn, còn gió có cả hướng và độ lớn. Với một đơn vị đo, ta có thể dùng số liệu biểu diễn nhiệt độ. Đối với các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió thì sao? Ta có thể dùng đối tượng toán học nào để biểu diễn chúng?

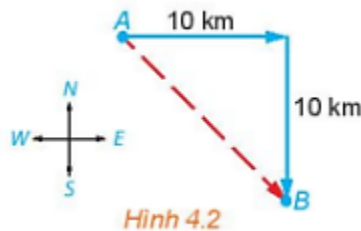
### Lời giải

**Sau bài học này chúng ta sẽ giải quyết được bài toán trên như sau:**

Ta sẽ sử dụng vectơ để biểu diễn các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió.

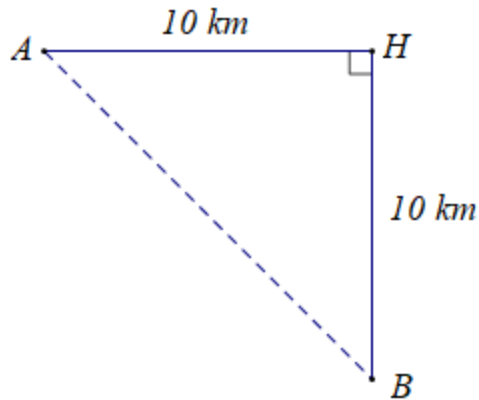
Trong đó hướng của vectơ là hướng gió, độ dài vectơ là độ lớn của vận tốc gió.

**Hoạt động 1 trang 47 SGK Toán 10 tập 1:** Một con tàu khởi hành từ đảo A, đi thẳng về hướng đông 10 km rồi đi thẳng tiếp 10 km về hướng nam thì tới đảo B (H.4.2). Nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải dài bao nhiêu kilômét?



### Lời giải

Ta có hình vẽ sau:



Vì góc giữa hướng đông và hướng nam là bằng  $90^0$  nên  $AHB = 90^0$  do đó tam giác AHB vuông tại H.

Xét  $\triangle AHB$  vuông tại H, áp dụng định lí Py – ta – go ta có:  $AB^2 = AH^2 + BH^2$

Thay số:  $AB^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ (km)}$$

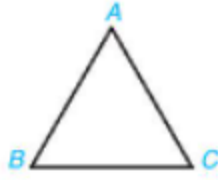
$\triangle AHB$  vuông tại H, có  $AH = BH = 10 \text{ km}$  nên  $\triangle AHB$  cân tại H

$$\Rightarrow HAB = 45^0$$

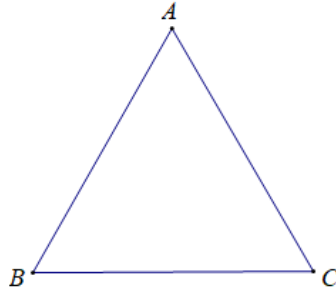
Do đó nếu đi từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B thì phải đi theo đường thẳng AB chính là hướng đông nam, tạo với hướng đông một góc  $45^\circ$ .

Vậy nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng đông nam, tạo với hướng đông một góc  $45^\circ$  và đi quãng đường dài  $10\sqrt{2} \text{ km}$ .

**Luyện tập 1 trang 47 SGK Toán 10 tập 1:** Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vectơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.



### Lời giải



Vì tam giác ABC là tam giác đều với cạnh có độ dài bằng  $a$  nên  $AB = BC = AC = a$ .

Do đó  $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$ ;  $|\overrightarrow{BA}| = BA = a$ ;

$|\overrightarrow{AC}| = AC = a$ ;  $|\overrightarrow{CA}| = CA = a$ ;

$|\overrightarrow{BC}| = BC = a$ ;  $|\overrightarrow{CB}| = CB = a$

Các vector có độ dài bằng  $a$  và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$ .

**Hoạt động 2 trang 48 SGK Toán 10 tập 1:** Quan sát các làn đường trong Hình 4.5 và cho biết những nhận xét nào sau đây là đúng.

- Các làn đường song song với nhau.
- Các xe chạy theo cùng một hướng.
- Hai xe bất kì đều chạy theo cùng một hướng hoặc hai hướng ngược nhau.



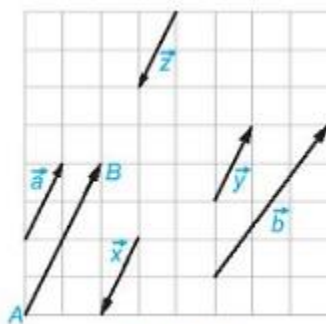
Hình 4.5

### Lời giải

Trên hình vẽ ta quan sát làn đường và hướng di chuyển (mũi tên) của các xe thấy:

- + Các làn đường chạy song song với nhau. Do đó nhận xét a) là đúng.
- + Có hai xe chạy hướng từ dưới lên trên, còn ba xe chạy hướng từ trên xuống dưới. Nên các xe không chạy theo cùng một hướng. Do đó nhận xét b) sai.
- + Hai xe bất kì hoặc chạy cùng hướng (hai xe cùng chạy hướng từ trên xuống dưới hoặc hướng từ dưới lên trên) hoặc chạy ngược hướng nhau (một xe chạy hướng từ dưới lên trên và một xe chạy hướng từ trên xuống dưới). Do đó nhận xét c) đúng.

**Hoạt động 3 trang 48 SGK Toán 10 tập 1:** Xét các vectơ cùng phương trong Hình 4.7. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\overrightarrow{AB}$  được gọi là cùng hướng, còn hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{x}$  được gọi là ngược hướng. Hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  và các vectơ ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$ .



Hình 4.7

## Lời giải

Trong Hình 4.7:

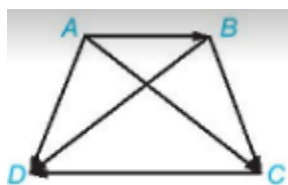
+ Hai vector  $\vec{a}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng ta quan sát thấy hai vector có giá song song với nhau nên hai vector cùng phương, lại thấy vector  $\vec{a}$  và  $\overrightarrow{AB}$  đều có hướng cùng chiều nhau.

+ Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{x}$  ngược hướng nhau ta quan sát thấy hai vector có giá song song với nhau nên hai vector cùng phương, lại thấy vector  $\vec{a}$  và  $\vec{x}$  có hướng ngược chiều nhau.

Do đó các vector cùng hướng với vector  $\vec{a}$  sẽ là những vector có giá song song và cùng chiều với vector  $\vec{a}$ , đó là những vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\vec{y}$ .

Do đó các vector ngược hướng với vector  $\vec{a}$  sẽ là những vector có giá song song và ngược chiều với vector  $\vec{a}$ , đó là những vector  $\vec{x}$  và  $\vec{z}$ .

**Luyện tập 2 trang 49 SGK Toán 10 tập 1:** Cho hình thang cân ABCD với hai đáy AB, CD,  $AB < CD$  (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$ . Có cặp vector nào trong các cặp vector trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

## Lời giải

- Cặp vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ :

+ Độ dài: cùng độ dài vì  $|\overrightarrow{AD}| = AD; |\overrightarrow{BC}| = BC$  mà  $AD = BC$  (tính chất hình thang cân);

+ Phương: không cùng phương do giá của hai vectơ không song song và không trùng nhau;

+ Hướng: không cùng hướng do hai vectơ này không cùng phương.

Do đó hai vectơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  không bằng nhau.

- Cặp vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ :

+ Độ dài: không cùng độ dài do  $|\overrightarrow{AB}| = AB; |\overrightarrow{CD}| = CD$  mà  $AB < CD$ ;

+ Phương: cùng phương do hai vectơ có giá song song với nhau;

+ Hướng: ngược hướng.

Do đó hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  không bằng nhau.

- Cặp vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$ :

+ Độ dài: cùng độ dài do  $|\overrightarrow{AC}| = AC; |\overrightarrow{BD}| = BD$  mà  $AC = BD$  (tính chất hình thang cân);

+ Phương: không cùng phương do giá của hai vectơ không song song và không trùng nhau;

+ Hướng: không cùng hướng do hai vectơ này không cùng phương.

Do đó hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$  không bằng nhau.

Vậy không có cặp vectơ nào bằng nhau.

**Luyện tập 3 trang 49 SGK Toán 10 tập 1:** Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B.

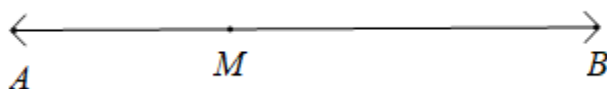
a)  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AM}$  ngược hướng;

b)  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  cùng phương;

c)  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng;

d)  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng.

**Lời giải**



+ Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng.

+ Nếu hai vectơ  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng thì hai vectơ  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  cùng phương

Do đó ba điểm M, A, B thẳng hàng.

Mà hai vectơ  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng nên điểm M nằm giữa hai điểm A và B.

Suy ra điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng.

Vậy điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B là  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng.

Chọn điều kiện d)

**Vận dụng trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h.

a) Hãy thể hiện trên hình vẽ, vector vận tốc  $\vec{v}$  của dòng nước và các vector vận tốc thực tế  $\vec{v}_a, \vec{v}_b$  của ca nô A, B.

b) Trong các vector  $\vec{v}, \vec{v}_a, \vec{v}_b$ , những cặp vector nào cùng phương và những cặp vector nào ngược hướng?

### Lời giải

a) Ta có vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h nên độ lớn của vector  $\vec{v}$  là 3 km/h.

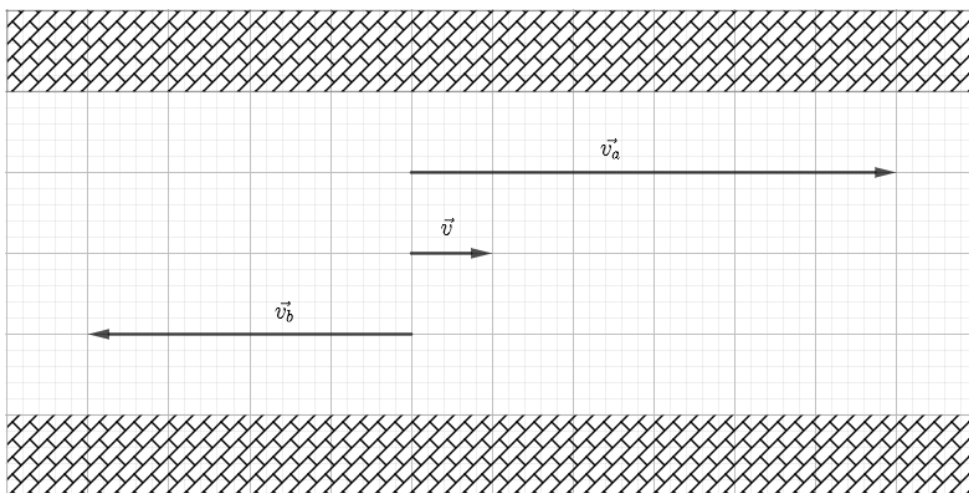
Do ca nô A chạy xuôi dòng nên vận tốc thực tế của ca nô A bằng  $15 + 3 = 18$  km/h hay độ lớn của vector  $\vec{v}_a$  là 18 km/h.

Do ca nô B chạy ngược dòng nên vận tốc thực tế của ca nô B bằng  $15 - 3 = 12$  km/h hay độ lớn của vector  $\vec{v}_b$  là 12 km/h.

Khi đó, ta có tỉ lệ độ dài giữa các vector là  $|\vec{v}| : |\vec{v}_a| : |\vec{v}_b| = 3 : 18 : 12 = 1 : 6 : 4$ .

Giả sử dòng nước chảy theo chiều từ trái qua phải, khi đó ca nô A chạy xuôi dòng từ trái qua phải và ca nô B chạy ngược dòng từ phải qua trái. Ta có sơ đồ như sau:





b) Do ca nô A chạy xuôi dòng nên các vector vận tốc  $\vec{v}$  và  $\vec{v}_a$  cùng phương và cùng hướng, do ca nô B chạy ngược dòng nên các vector vận tốc  $\vec{v}$  và  $\vec{v}_b$  cùng phương và ngược hướng.

Vậy trong các vector  $\vec{v}, \vec{v}_a, \vec{v}_b$  có:

- Các cặp vector cùng phương là:  $\vec{v}_a$  và  $\vec{v}_b$ ;  $\vec{v}_a$  và  $\vec{v}$ ;  $\vec{v}_b$  và  $\vec{v}$ .
- Các cặp vector ngược hướng là:  $\vec{v}_a$  và  $\vec{v}_b$ ;  $\vec{v}$  và  $\vec{v}_b$ .

**Bài 4.1 trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều khác  $\vec{0}$ . Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- a)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều cùng hướng với  $\vec{0}$ ;
- b) Nếu  $\vec{b}$  không cùng hướng với  $\vec{a}$  thì  $\vec{b}$  ngược hướng với  $\vec{a}$ ;
- c) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương;
- d) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

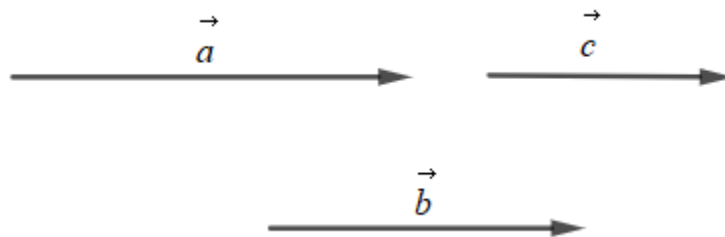
**Lời giải**

+ Do vector  $\vec{a}$  – không cùng hướng với mọi vector nên khẳng định a) là đúng.

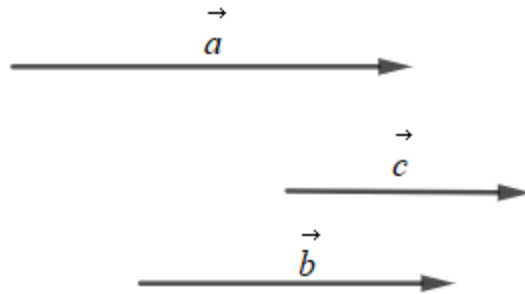
+ Do  $\vec{b}$  không cùng hướng với  $\vec{a}$  nên có thể có hai trường hợp xảy ra đó là: hoặc  $\vec{b}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng hoặc  $\vec{b}$  và  $\vec{a}$  không cùng phương. Do đó khẳng định b) sai.



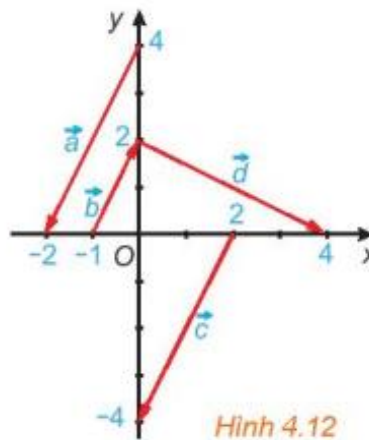
+ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có giá song song hoặc trùng với giá của vector  $\vec{c}$ . Suy ra  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có giá song song hoặc trùng nhau nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương. Do đó khẳng định c) đúng.



+ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng với nhau. Do đó khẳng định d) là đúng.



**Bài 4.2 trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vector cùng phương, các cặp vector ngược hướng và các cặp vector bằng nhau.



Hình 4.12

### Lời giải

+ Quan sát hình vẽ, ta thấy các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có giá song song với nhau nên các vector cùng phương với nhau là:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

+ Các cặp vector ngược hướng:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

+ Độ dài của vector  $\vec{a}$  là:  $\sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ;

Độ dài của vector  $\vec{b}$  là  $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ;

Độ dài của vector  $\vec{c}$  là  $\sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$ ;

Độ dài của vector  $\vec{d}$  là  $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ .

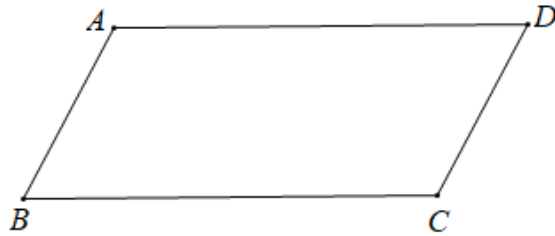
Do đó các vector  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$  có cùng độ dài (cạnh huyền của các tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 2 và 4).

Suy ra  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng và có cùng độ dài nên bằng nhau.

Vậy cặp vector bằng nhau là  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ .

**Bài 4.3 trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Chứng minh rằng tứ giác ABCD là một hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**



+ Giả sử tứ giác ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow AD \parallel BC$  (tính chất hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

Mà  $AD = BC$  (tính chất hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

+ Giả sử tứ giác ABCD có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  suy ra  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{AD}$  cùng phương, cùng hướng và cùng độ dài.

$\Rightarrow BC = AD$  (1) và  $AD, BC$  song song hoặc trùng nhau.

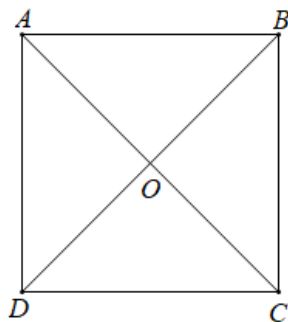
Nếu hai đường thẳng  $AD, BC$  trùng nhau thì bốn điểm  $A, B, C, D$  cùng nằm trên một đường thẳng, điều này không xảy ra vì  $ABCD$  là tứ giác. Vậy  $AD \parallel BC$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

Vậy tứ giác  $ABCD$  là một hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

**Bài 4.4 trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Hãy chỉ ra tập  $S$  gồm tất cả các vector khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp  $\{A; B; C; D; O\}$ . Hãy chia tập  $S$  thành các nhóm sao cho hai vector thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

**Lời giải**



Các vector khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp  $\{A; B; C; D; O\}$  là:  
 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO},$   
 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}.$

Khi đó:  $S = \{ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AO}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC};$   
 $\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD} \}.$

Hai vector bằng nhau trong tập hợp  $S$  là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}; \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO};$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}.$$

Khi đó tập S được chia thành các nhóm là:

$$\text{Nhóm 1: } \{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}\};$$

$$\text{Nhóm 2: } \{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}\};$$

$$\text{Nhóm 3: } \{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}\};$$

$$\text{Nhóm 4: } \{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{CB}\};$$

$$\text{Nhóm 5: } \{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{CO}\};$$

$$\text{Nhóm 6: } \{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{DO}\};$$

$$\text{Nhóm 7: } \{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{AO}\};$$

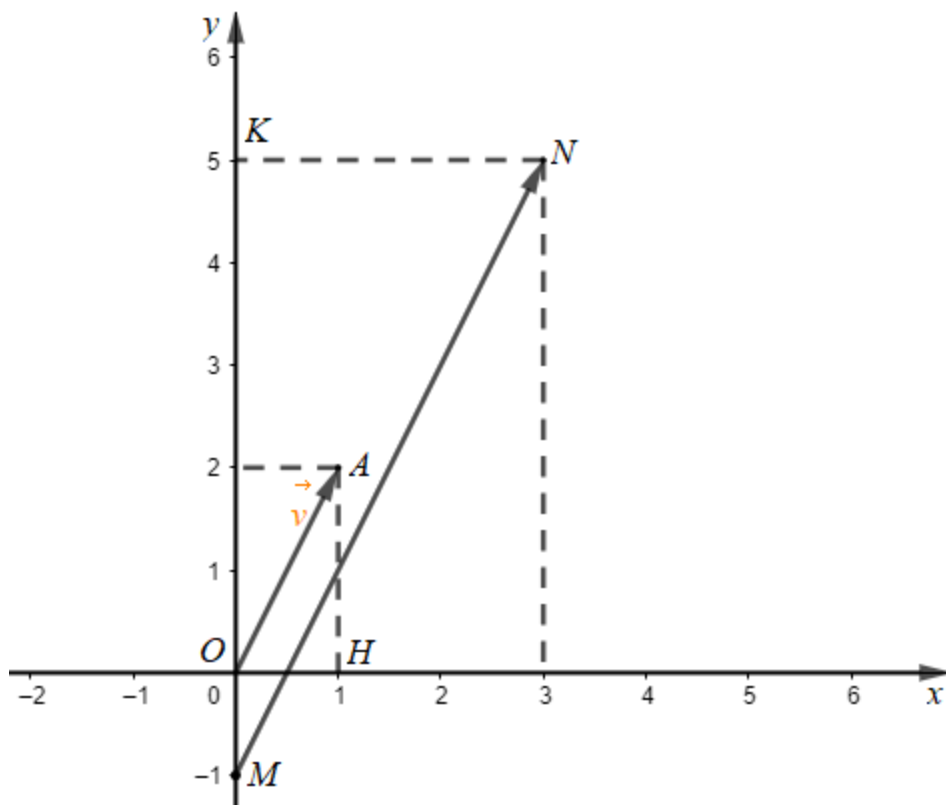
$$\text{Nhóm 8: } \{\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{BO}\}.$$

**Bài 4.5 trang 50 SGK Toán 10 tập 1:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy vẽ các vector  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$  với  $A(1;2), M(0;-1), N(3;5)$

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vector trên.

b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vector  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ . Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N?

**Lời giải**



a) Dựng các điểm B(0; 2) và K(0; 5).

Khi đó  $OB = 2$ ,  $BA = 1$ ,  $MK = 6$ ,  $KN = 3$ .

Suy ra hai tam giác OAB và MNK là các tam giác vuông đồng dạng.

Do đó  $\angle BOA = \angle KMN$ .

Suy ra  $OA \parallel MN$  và  $\frac{MN}{OA} = \frac{KN}{BA} = \frac{MK}{OB} = 3$ .

Như vậy, hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{MN}$  là hai vector cùng hướng và vector  $\overrightarrow{MN}$  có độ dài gấp 3 lần độ dài của vector  $\overrightarrow{OA}$ .

b) Vì  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{MN}$  là hai vector cùng hướng nên khi vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$  thì vật thể đó sẽ đi qua điểm N.

Hơn nữa, sau mỗi giờ vật đó đi được quãng đường bằng  $|\overrightarrow{OA}|$  và  $|\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{OA}|$ .

Vậy nếu coi độ lớn của OA là một đơn vị giờ thì sau khi khởi hành 3 giờ vật sẽ tới N.