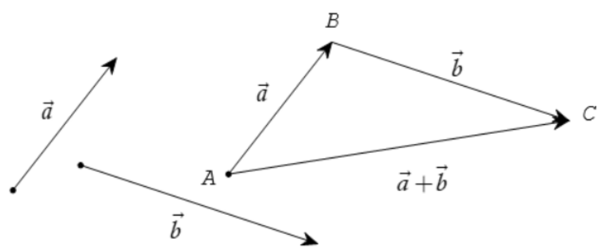
Bài 4. Tổng và hiệu của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Tổng của hai vectơ

1.1. Định nghĩa

– Với ba điểm bất kì A, B, C, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



– Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

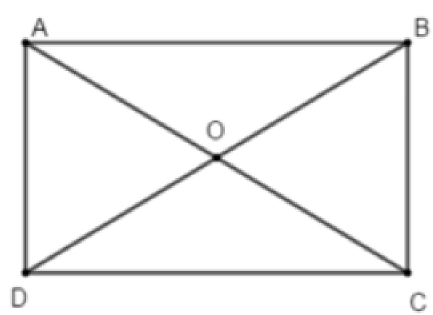
Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

Ví dụ: Cho hình chữ nhật ABCD tâm O. Tính:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$

Hướng dẫn giải:



a) Vì ABCD là hình chữ nhật nên AB // CD và AB = CD.

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

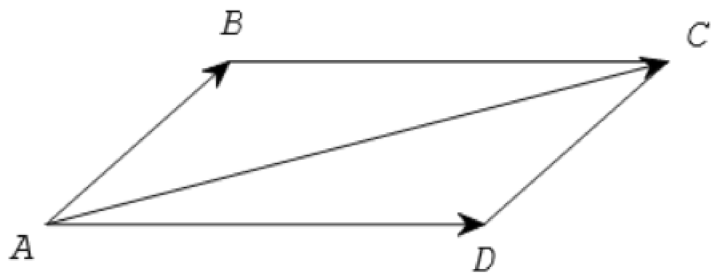
$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

b) Vì A, O, C thẳng hàng (O là trung điểm của đường chéo AC)

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$.

1.2. Quy tắc hình bình hành



Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ: Chứng minh quy tắc hình bình hành.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

1.3. Tính chất

Với ba vectơ tùy ý $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta có:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ–không).

Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách sau:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ví dụ: Cho 5 điểm tùy ý A, B, C, D, E. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}$

$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$ (áp dụng tính chất giao hoán)

$=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}\right)$ (áp dụng tính chất kết hợp)

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ (áp dụng quy tắc cộng vectơ)

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ (áp dụng tính chất giao hoán)

$=\overrightarrow{BA}$ (áp dụng quy tắc cộng vectơ) (đpcm).

Vậy $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}$.

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)$ (áp dụng quy tắc cộng vectơ)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ (áp dụng tính chất giao hoán)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}$ (áp dụng tính chất kết hợp)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$ (áp dụng quy tắc cộng vectơ)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)$ (áp dụng tính chất kết hợp)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AA}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\vec{0}$ (vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau là vectơ–không)

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ (áp dụng tính chất vectơ–không) (đpcm).

2. Hiệu của hai vectơ

2.1. Hai vectơ đối nhau

Định nghĩa: Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Nhận xét:

+) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

+) Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

+) Với hai điểm A, B, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

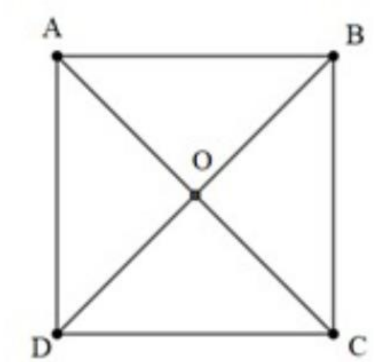
Lưu ý: Cho hai điểm A, B. Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Chú ý:

– I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

– G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ví dụ: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Tìm vectơ đối của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$.



Hướng dẫn giải:

+ Vì $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ = AB và $\overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

+ Vì AB = CD, AB // CD (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vì A, O, C là ba điểm thẳng hàng và OA = OC (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CO}$ và $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$

$\Rightarrow \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CO}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AO}$.

Vậy $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CO}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AO}$.

2.2. Hiệu của hai vectơ

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, tức là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ hai vectơ.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ví dụ: Cho 4 điểm A, B, C, D phân biệt. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ (áp dụng quy tắc về hiệu hai vectơ) (1)

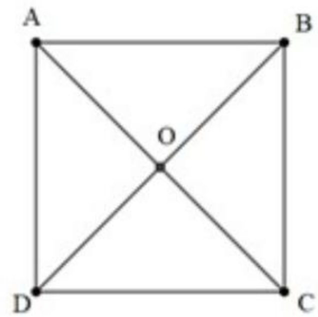
$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \left(-\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$ (vectơ đối) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$ (đpcm).

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Cho hình vuông ABCD tâm O. Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AD}$.



Hướng dẫn giải:

+ Vì ABCD là hình vuông nên AB // DC và AB = DC.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

Áp dụng quy tắc cộng hai vectơ ta có:

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

Do đó, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.

+ Vì A, O, C cùng nằm trên một đường thẳng và OA = OC (O là tâm hình vuông ABCD).

$\Rightarrow \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

Áp dụng quy tắc công hai vectơ ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$

Vậy $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm của tam giác.

Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Hướng dẫn giải:

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta áp dụng quy tắc trọng tâm có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\vec{0}\right|=0$

Vậy độ dài vectơ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ là 0.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$;

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$;

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$;

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$. Vậy A sai.

- Đáp án B sai vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.

- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 2. Cho 5 điểm bất kỳ A, B, C, D, E. Tính tổng $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}$.

A. $\overrightarrow{BC}$;

B. $\overrightarrow{CA}$;

C. $\overrightarrow{EC}$;

D. $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}$

$=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$ (tính chất giao hoán và kết hợp)

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ (quy tắc ba điểm)

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ (tính chất giao hoán)

$=\overrightarrow{BA}$.

Câu 3. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Khi đó, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=?$

A. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$;

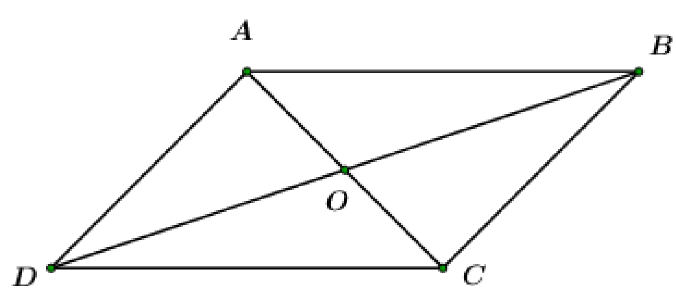
B. $\overrightarrow{AB}$;

C. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$;

D. $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án đúng là: D.



Áp dụng tính chất giao hoán và quy tắc ba điểm cho ba điểm A, O, B ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$.

Xét hình bình hành ABCD có: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.