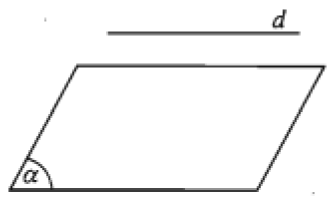
Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song.

A. Lý thuyết.

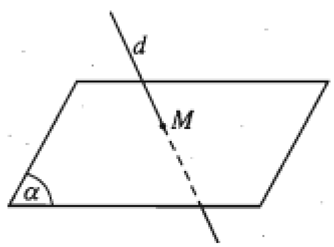
I. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tùy theo số điểm chung của d và (α), ta có ba trường hợp sau:

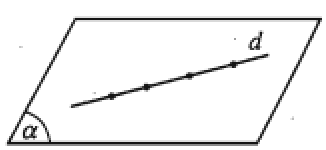
- d và (α) *không có điểm chung*. Khi đó ta nói d *song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là d // (α) hay (α) // d.



- d và (α) chỉ *có một điểm chung duy nhất* M. Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = M$.

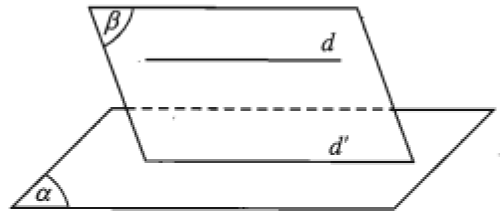


- d và (α) có từ *hai điểm chung trở lên*. Khi đó, d *nằm trong* (α) hay (α) *chứa* d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$.



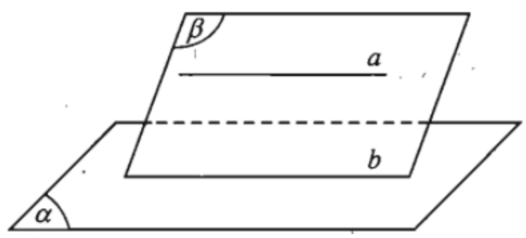
II. Tính chất

- Định lí. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d’ nằm trong (α) thì d song song với (α).



Ta có: $\left.\begin{matrix} d // d' \\ d' \subset (\alpha), d \not\subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // (\alpha)$.

- Định lí. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



- Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

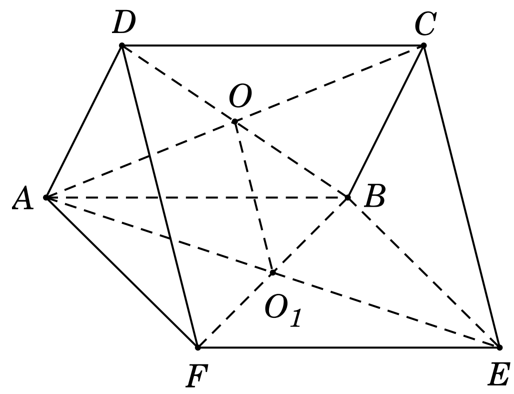
- Định lí. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của ABCD và ABEF, gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh:

a) OO_1 // mp (BEC).

b) OO_1 // mp (AFD)

Lời giải.



a) Xét tam giác ACE có O; O_1 lần lượt là trung điểm của AC; AE (tính chất hình hình hành).

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác ACE và OO_1 // EC.

Mà EC thuộc mp (BEC) nên OO_1 // mp (BEC) (đpcm).

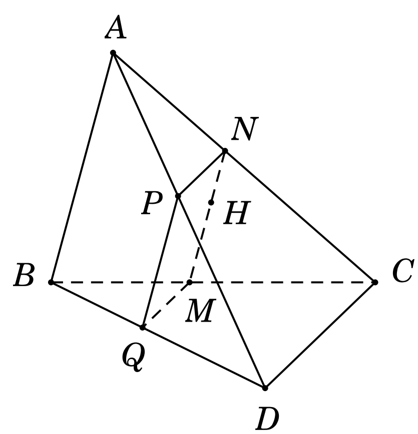
b) Tương tự; OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên OO_1 // FD.

Mà FD nằm trong mp(AFD)

Suy ra: OO_1 // mp (AFD) (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC và (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là hình gì?

Lời giải:



+ Qua H kẻ đường thẳng song song AB và đường thẳng này cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

+ Từ N kẻ NP song song với CD $\left(P \in AD\right)$

Từ P kẻ PQ song song với AB $\left(Q \in BD\right)$.

+ Ta có: MN // PQ // AB

Suy ra 4 điểm M; N; P và Q đồng phẳng .

Suy ra thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là tứ giác MNPQ.

+ Ta chứng minh MNPQ là hình bình hành.

Trước tiên, ta chứng minh PN // QM.

Ta có: $\begin{cases} PN \,//\, CD \\ PN \subset mp(MNPQ),\ CD \subset mp(BCD) \\ QM = mp(MNPQ) \cap mp(BCD) \end{cases}$

Suy ra: QM // PN // CD

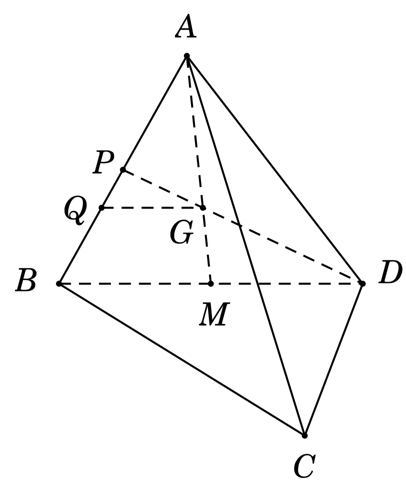
Lại có: PQ // MN

Do đó, tứ giác MNPQ là hình bình hành.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho AQ = 2QB. Gọi P là trung điểm của AB. Chứng minh: GQ // mp (BCD).

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của BD.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ (1)

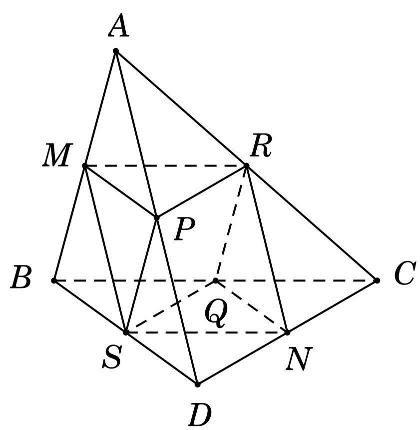
Điểm Q thuộc AB thỏa mãn: AQ = 2QB nên $\frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$.

Suy ra, GQ // BD (định lí Ta-let đảo)
Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD).
Do đó, GQ // mp(BCD) (đpcm).

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, AC, BD. Chứng minh:
a) P, R, Q, S đồng phẳng
b) P, M, N, Q đồng phẳng.
c) M, R, N, S đồng phẳng.

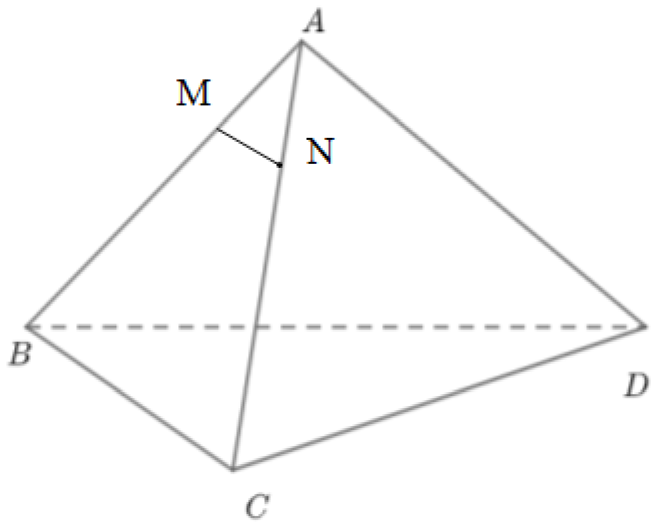
Lời giải:



a) Tam giác ABD có PS là đường trung bình nên PS // AB. (1)
Tam giác ABC có RQ là đường trung bình nên RQ // AB (2).
Từ (1) và (2) suy ra PS // RQ nên 4 điểm P, R, Q, S đồng phẳng (đpcm).
b) Tương tự ý a, ta có được PM // NQ // BD
Suy ra 4 điểm P, M, N, Q đồng phẳng.
c) Ta có NR // AD // MS suy ra M, R, N, S đồng phẳng.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD, lấy điểm M trên cạnh AB sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho MN // mp(BCD) . Tính tỉ số $\frac{AN}{NC}$?

Lời giải:



- Từ MN // mp(BCD) ta chứng minh MN // BC .

Thật vậy, giả sử MN cắt BC tại P.

Mà BC $\subset$ mp(BCD)

$\Rightarrow$ Đường thẳng MN cắt mp(BCD) tại P (mâu thuẫn với MN // mp(BCD)).

Vậy MN // BC.

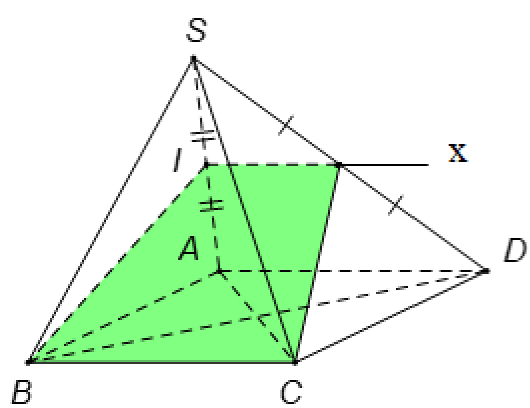
- Xét tam giác ABC có: MN // BC

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$ (định lí Ta- let).

$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Tìm giao tuyến của mp(IBC) và mp(SAD) và chứng minh giao tuyến đó song song với mp(SBC).

Lời giải:



- Ta tìm giao tuyến của mp(IBC) và mp(SAD) .

Ta có: $\begin{cases} I \in (IBC) \cap (SAD) \\ BC \,//\, AD \\ BC \subset (IBC);\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

Suy ra: $(IBC) \cap (SAD) = Ix \,//\, BC \,//\, AD \quad (1)$

- Lại có: $BC \subset (SBC) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: Ix // mp(SBC).