Các bài toán về giới hạn hàm số

1. Lý thuyết

a) Giới hạn của hàm số tại một điểm:

*** Giới hạn hữu hạn:** Cho khoảng K chứa điểm x_0 . Ta nói rằng hàm số f(x) xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét: Nếu f(x) là hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*** Giới hạn ra vô cực:**

Hàm số y = f(x) có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Hàm số y = f(x) có giới hạn dần tới âm vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

b) Giới hạn của hàm số tại vô cực

*** Giới hạn ra hữu hạn:**

- Ta nói hàm số y = f(x) xác định trên $(a;+\infty)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Ta nói hàm số y = f(x) xác định trên $(-\infty;b)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

*** Giới hạn ra vô cực:**

- Ta nói hàm số y = f(x) xác định trên $(a;+\infty)$ có giới hạn dần tới dương vô cùng (hoặc âm vô cùng) khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to +\infty$ (hoặc $f(x_n) \to -\infty$).

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$).

- Ta nói hàm số y = f(x) xác định trên $(-\infty;b)$ có giới hạn là dần tới dương vô cùng (hoặc âm vô cùng) khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to +\infty$. (hoặc $f(x_n) \to -\infty$).

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).

c) Các giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ với c là hằng số

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ với k lẻ, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ với k chẵn

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{k}{f(x)} = 0 \quad (k \neq 0)$

d) Một vài định lý về giới hạn hữu hạn

* Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ thì:

$\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$

$\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x).g(x)\right] = L.M$; nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} \left[cf(x)\right] = cL$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} \quad (M \neq 0)$

* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$

* $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

* Nếu $f(x) \geq 0, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Chú ý:

- Các định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

- Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực.

*** Nguyên lí kẹp**

Cho ba hàm số f(x), g(x), h(x) xác định trên K chứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in K \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

e) Quy tắc về giới hạn vô cực

Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x)g(x)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
	0	-	$+\infty$

f) Giới hạn một bên

*** Giới hạn hữu hạn**

- Định nghĩa 1: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b), (x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

- Định nghĩa 2: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $\left(a;x_0\right),\left(x_0\in\mathbb{R}\right)$. Ta nói rằng hàm số có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy bất kì (x_n) những số thuộc khoảng (a; x_0) mà lim $x_n = x_0$ ta đều có lim $f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=L$ hoặc $f\left(x\right)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

- Nhận xét:

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L$.

Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^-$ hoặc $x\to x_0^+$.

*** Giới hạn vô cực**

- Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=-\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

- Nhận xét: Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng nếu thay L bởi $+\infty$ hoặc $-\infty$

2. Các dạng bài tập

Dạng 1: Giới hạn tại một điểm

Phương pháp giải:

- Nếu f(x) là hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$

- Áp dụng quy tắc về giới hạn tới vô cực:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
	0	-	$-\infty$
L < 0	0	+	$-\infty$
	0	-	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 1}(x+3)$

b) $\lim_{x\to 2}(x^2-3x-5)$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-1}$

Lời giải

a) $\lim_{x\to 1}(x+3)=1+3=4$

b) $\lim_{x\to 2}(x^2-3x-5)=2^2-3.2-5=-7$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3+2}{3-1}=\frac{5}{2}$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$

Lời giải

a) Vì $\begin{cases}\lim_{x\to 1}(2x-1)=1>0\\ \lim_{x\to 1}(x-1)^2=0\\ (x-1)^2>0\forall x\neq 1\end{cases}$ nên $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$.

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{(x+1)^2}=+\infty$

Vì $\begin{cases}\lim_{x\to -1}x^2=1>0\\ \lim_{x\to -1}(x+1)^2=0\\ (x+1)^2>0,\forall x\neq -1\end{cases}$

Dạng 2: Giới hạn tại vô cực

Phương pháp giải:

- Rút lũy thừa có số mũ lớn nhất

- Áp dụng quy tắc giới hạn tới vô cực

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^5+5x^2-x+7)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^5+5x^2-x+7)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\left(7+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{7}{x^5}\right)=+\infty$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{7}{x^5}\right)=7>0\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=-\infty$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=4>0\end{cases}$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^6+5x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^6+5x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|x^3\right|\sqrt{1+\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{1}{x^6}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\sqrt{1+\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{1}{x^6}}=+\infty$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{1}{x^6}} = 1 > 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = +\infty$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = 1-\sqrt{2} < 0 \end{cases}$

Dạng 3: Sử dụng nguyên lý kẹp

Nguyên lí kẹp

Cho ba hàm số f(x), g(x), h(x) xác định trên K chứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in K \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Phương pháp giải:

Xét tính bị chặn của hàm số f(x) bởi hai hàm số g(x) và h(x) sao cho

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

Chú ý tính bị chặn của hàm số lượng giác:

$-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính giới hạn của hàm số:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\dfrac{2}{nx}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos 5x}{2x}$

Lời giải

a) Ta có: $0 \le \left|\cos\dfrac{2}{nx}\right| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \left|x^2\cos\dfrac{2}{nx}\right| \le x^2$

Mà $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{2}{nx} = 0$

b) Ta có: $0 \le |\cos 5x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \left|\frac{\cos 5x}{2x}\right| \le \frac{1}{|2x|}, \forall x \ne 0$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|2x|} = 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos 5x}{2x} = 0$

Ví dụ 2: Tính giới hạn của hàm số: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\sin x + \cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

Lời giải

$L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\sin x + \cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\sin x + \cos^3 x\right)\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sin x + \cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Ta có: $0 \le \left|\frac{2\sin x + \cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \le \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$ nên $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sin x + \cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.

Dạng 4: Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$

Nhận biết dạng vô định $\frac{0}{0}$**:** Tính $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Phương pháp giải:

Để khử dạng vô định này ta phân tích f(x) và g(x) sao cho xuất hiện nhân tử chung là $(x - x_0)$

Định lí: Nếu đa thức f(x) có nghiệm $x = x_0$ thì ta có: $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$.

* Nếu f(x) và g(x) là các đa thức thì ta phân tích $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0)g_1(x)$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

Chú ý: Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 thì ta luôn có sự phân tích: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

* Nếu f(x) và g(x) là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b$$

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b$$

* Nếu f(x) và g(x) là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích:

$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c)$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{4}$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1-9}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-8}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-8}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)}=\dfrac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5(x-1)\left[\sqrt{4x+5}+3\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5\left[\sqrt{4x+5}+3\right]}=\dfrac{8}{5}$.

d) Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2-\left(\sqrt{5x-1}-2\right)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=I-J$

$I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x+1-2^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}+2\sqrt[3]{7x-1}+4}=\dfrac{7}{12}$.

$J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-1-2^2}{(x-1)(\sqrt{5x-1}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+1}=\dfrac{5}{3}$

Vậy $A=\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{13}{12}$.

Dạng 5: Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \pm\infty$

Phương pháp giải:

- Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).
- Nếu u(x) hoặc v(x) có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 7}{x^4 - x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x^4}{x^5 + 6x + 5}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 7}{x^4 - x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^4 + 3x^2 + 7}{x^4}}{\frac{x^4 - x + 1}{x^4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^5\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}\right)}{x^2\left(3 - \frac{7}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}\right)}{3 - \frac{7}{x^2}} = +\infty$$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}}{3 - \frac{7}{x^2}} = \dfrac{-2}{3} < 0 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x^4}{x^5 + 6x + 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{3x^2 - x^4}{x^5}}{\frac{x^5 + 6x + 5}{x^5}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{6}{x^4} + \frac{5}{x^5}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}} == \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - |x|\sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}}{5x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x\sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}}{5x + x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \sqrt{3 + \frac{2}{x^2}}}{5 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 3x}{|x|\sqrt{2 + \frac{3}{x}}}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1+3x}{-x\sqrt{2+\frac{3}{x}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}+3}{-\sqrt{2+\frac{3}{x}}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}-x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{1}} = \sqrt{3}.$$

Dạng 6: Giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$ và $0.\infty$

Phương pháp giải:

- Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp

- Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{5+x^2}-\sqrt{7+x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5+x^2}-\sqrt{7+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+x^2-\left(7+x^2\right)}{\sqrt{5+x^2}+\sqrt{7+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{5+x^2}+\sqrt{7+x^2}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x-5x^2}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{|x|\sqrt{5+\dfrac{2}{x}}-x\sqrt{5}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{5+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{5}}=\dfrac{2}{-\sqrt{5}-\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3+2x-8x^3}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x}+4x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}+2x.x\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^2}}+4x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}}{\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^2}}+4}=0$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ x^2 > 0 \forall x \neq 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}.\frac{-x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x+1} = -1.$

Dạng 7: Tính giới hạn một bên

Phương pháp giải:

Sử dụng quy tắc tính giới hạn tới vô cực

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
	0	-	$+\infty$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{5x-15}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{5x-15} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{5(x-3)} = -\frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=-\infty$. Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-1)=2.2-1=3>0\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0\\ x\to 2^-\Rightarrow x<2\Rightarrow x-2<0\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x-1}{x+3}=-\infty$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^+}(2x-1)=-7<0\\ \lim\limits_{x\to -3^+}(x+3)=0\\ x\to -3^+\Rightarrow x>-3\Rightarrow x+3>0\end{cases}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x}\text{ khi } x<1\\ \sqrt{2x-2}\text{ khi } x\ge 1\end{cases}$. Tính:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{2x-2}=\sqrt{2.1-2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2>0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0\\ x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow 1-x>0\end{cases}$

Dạng 8: Tìm tham số m để hàm số có giới hạn tại 1 điểm cho trước

Phương pháp giải:

Sử dụng nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$

- Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x);\ \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

- Để hàm số có giới hạn tại x = x_0 cho trước thì $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. Tìm m.

Khi đó với m vừa tìm được, hàm số có giới hạn tại x = x_0 cho trước và giới hạn đó bằng $L=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x>2\\ a & x\le 2\end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho có giới hạn tại điểm x = 2?

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=a\end{cases}$.

Để hàm số có giới hạn tại x = 2 thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Rightarrow a=1$.

Vậy a = 1.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m-3 & \text{khi } x<1\\ 2m-13 & \text{khi } x=1\\ 1-\sqrt{7x^2+2} & \text{khi } x>1\end{cases}$ để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(m-3)=m-3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\sqrt{7x^2+2}\right)=-2\end{cases}$

Để hàm số có giới hạn tại x = 1 thì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow m-3=-2\Leftrightarrow m=1$.

Vậy m = 1.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x-1}{x-1}$ bằng:

A. -1 **B.** $-\infty$ **C.** $+\infty$ **D.** -3

Câu 2. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. -2 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 2

Câu 3. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ bằng:

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Câu 4. Tính $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng:

A. -1 **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{5}{4}$

Câu 5. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 6. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$ bằng:

A. 4 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 7. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng

A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

Câu 8. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}\right)$ bằng

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** 4

Câu 9. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}$ là:

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** -2 **D.** $-\infty$

Câu 10. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$

A. -2 **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** $+\infty$

Câu 11. Cho $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Giá trị của a là:

A. 6 **B.** 10 **C.** -10 **D.** -6

Câu 12. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 3

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$

Câu 14. Cho $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & -2\le x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & x>2\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$.

A. 0 **B.** 4 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

Câu 15. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x+m \text{ khi } x<0\\ x^2+1 \text{ khi } x\ge 0\end{cases}$ có giới hạn tại x = 0.

A. m = - 1 **B.** m = 2 **C.** m = -2 **D.** m = 1

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	A	A	B	A	C	A	C	B	A	C	C	B	A	D