Tích của vectơ với một số

A. Lí thuyết.

- Tích của vectơ với một số: Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược lại, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0 và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

- Tính chất: Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có:

+) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

+) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

+) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

+) $1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

- Quy tắc trung điểm: Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

- Quy tắc trọng tâm: Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

- Điều kiện để hai vectơ cùng phương: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

- Điều kiện ba điểm thẳng hàng: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có tồn tại một số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

- Chú ý: Đối với vectơ – không : $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

B. Các dạng bài.

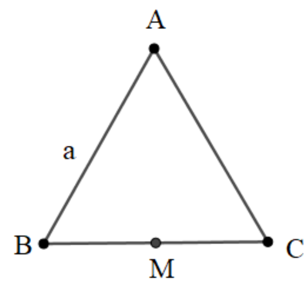
Dạng 1: Tính độ dài vectơ khi biết tích vectơ với một số.

Phương pháp giải:

Sử dụng định nghĩa tích của vectơ với một số, các quy tắc về tổng, hiệu của các vectơ và các hệ thức lượng, định lý Py-ta-go để tính độ dài vectơ đó.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Biết M là trung điểm BC. Tính độ dài vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$.



Giải:

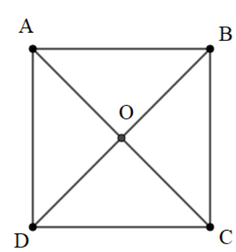
Ta có: $CM=\frac{1}{2}CB$ (do M là trung điểm BC) và B, C, M thẳng hàng.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$

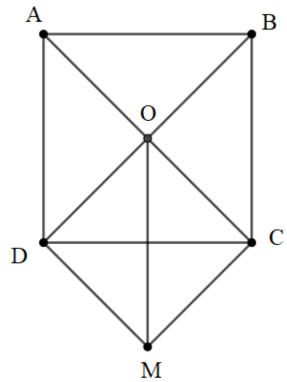
$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=CA=a$ (ABC là tam giác đều cạnh a)

Bài 2: Cho hình vuông ABCD cạnh 2a tâm O. Tính độ dài vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Giải:



+) Vì B, O, D thẳng hàng và $OD = \frac{1}{2}BD$ (do O là tâm hình vuông ABCD)

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

+) Vì A, O, C thẳng thàng và $OC = \frac{1}{2}AC$ (do O là tâm hình vuông ABCD)

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

+) Ta có: $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$

+) Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$.

+) Xét hình bình hành OCMD có:

$COD = 90^o$

OC = OD

$\Rightarrow$ OCMD là hình vuông.

+) Xét tam giác DAB vuông tại A

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$BD^2 = AD^2 + AB^2$

$\Rightarrow BD^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

$\Rightarrow BD = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow OD = OC = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}.2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

+) Xét tam giác ODM vuông tại D

DM = OC = $a\sqrt{2}$ (do OCMD là hình vuông)

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$OM^2 = OD^2 + DM^2$

$\Rightarrow OM^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2$

$\Rightarrow OM = \sqrt{4a^2} = 2a$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = 2a$

Dạng 2: Tìm một điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ cho trước.

Phương pháp giải:

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ trong đó A là một điểm cố định, $\vec{u}$ cố định và dựng điểm M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm C sao cho $3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Giải:

$3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

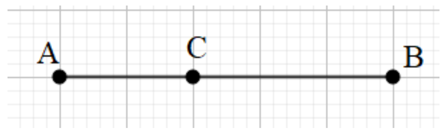
$\Rightarrow 5\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

Vậy ta dựng được điểm C thỏa mãn C, A, B thẳng hàng và $CA = \frac{2}{5}AB$.



Bài 2: Cho tam giác ABC. Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Giải:

+) Ta có: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

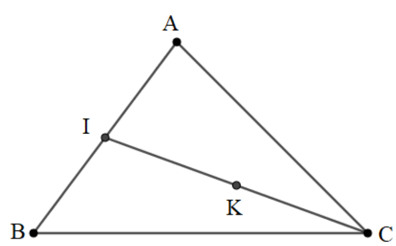
$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = -2\overrightarrow{KC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{CK}$ (1)

+) Gọi I là trung điểm của AB. $\Rightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KI}$ (2)

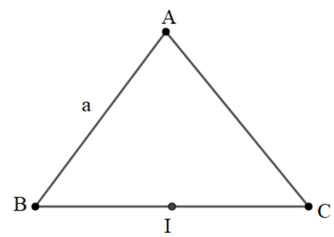
+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KI}$

Vậy ta dựng được điểm K là trung điểm của CI.



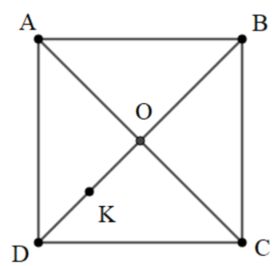
C. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



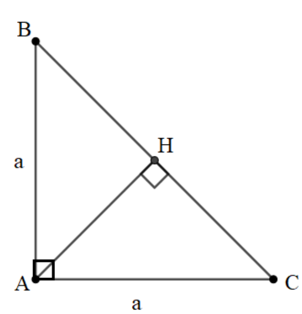
Đáp án: $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 2: Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh a. Biết K là trung điểm của OD. Tính độ dài vectơ $\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



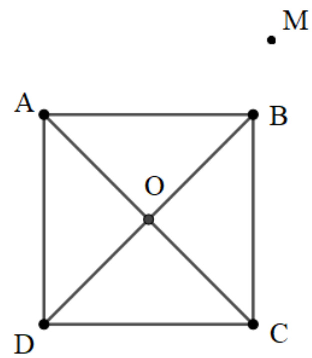
Đáp án: $\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|=\frac{a\sqrt{10}}{4}$

Bài 3: Cho tam giác vuông ABC có đường cao AH. Biết AB = AC = a. Tính độ dài vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.



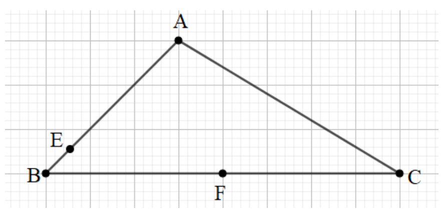
Đáp án: $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD cạnh a tâm O. Cho M là điểm có vị trí tùy ý. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

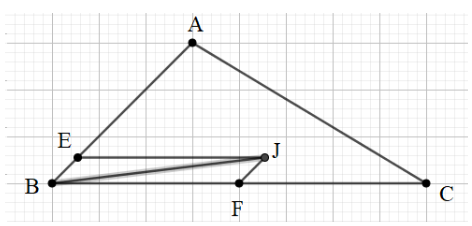


Đáp án: $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{5}$

Bài 5: Cho tam giác ABC, có điểm E trên AB sao cho $EB = \frac{1}{6}AB$ và điểm F là trung điểm của BC. Biết $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Dựng điểm J.

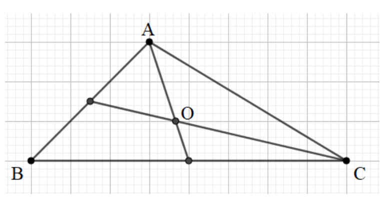


Đáp án:

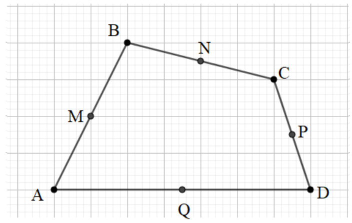


Bài 6: Cho tam giác ABC. Dựng điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

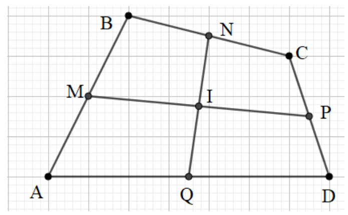
Đáp án: O là trọng tâm tam giác ABC.



Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Biết M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Dựng điểm I sao cho $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IQ}=\vec{0}$.

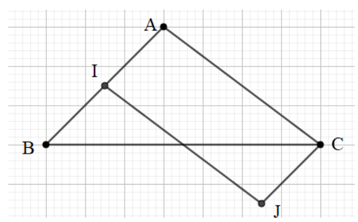


Đáp án:



Bài 8: Cho tam giác ABC. Tìm điểm J sao cho $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Biết I là trung điểm của AB.

Đáp án:



Bài 9: Cho 4 điểm A, B, C, M. Tìm điểm C sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Đáp án: C là trung điểm của AB.

Bài 10: Cho 3 điểm M, P, Q. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MQ}=3\overrightarrow{QN}-3\overrightarrow{QM}$.

Đáp án: