

Chuyên đề 3. Ba đường conic và ứng dụng

Bài 3: Parabol

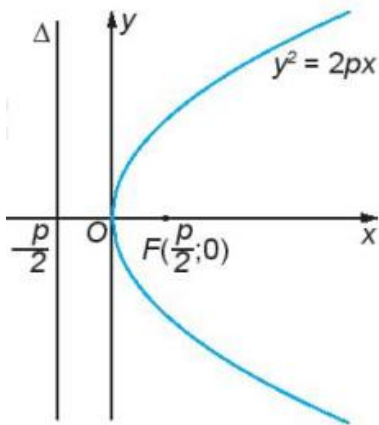
Trang 54, 55

Trang 56

Trang 54, 55

HD1 trang 54 Chuyên đề Toán 10:

Cho parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ (H.3.18).



Hình 3.18

- Nếu điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc parabol thì điểm $N(x_0; -y_0)$ có thuộc parabol hay không?
- Từ phương trình chính tắc của parabol, có thể rút ra điều gì về hoành độ của những điểm thuộc parabol?

Lời giải:

a) $M(x_0; y_0)$ thuộc parabol thì $y_0^2 = 2px_0$.

Có $(-y_0)^2 = y_0^2 = 2px_0$ nên $N(x_0; -y_0)$ cũng thuộc parabol.

b) Từ phương trình chính tắc của parabol, ta thấy hoành độ của những điểm thuộc parabol đều không âm.

Luyện tập 1 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, parabol (P) có phương trình chính tắc và đi qua điểm A(6; 6). Tìm tham số tiêu và phương trình đường chuẩn của (P).

Lời giải:

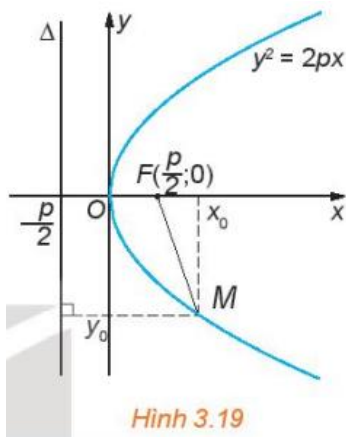
Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Theo đề bài, (P) đi qua điểm A(6; 6) $\Rightarrow 6^2 = 2p \cdot 6 \Rightarrow p = 3$.

Suy ra phương trình đường chuẩn của (P) là $x = -\frac{3}{2}$.

Hoạt động 2 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Cho parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ (H.3. 19).



- Nêu tọa độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn Δ của parabol.
- Cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc parabol. Hãy so sánh MF với $d(M; \Delta)$, từ đó, tính MF theo x_0 và y_0 . Độ dài MF gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.

Lời giải:

a) Điểm F có tọa độ là $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $\Delta: x = -\frac{p}{2}$.

b) Theo định nghĩa parabol thì $MF = d(M; \Delta)$.

Ta viết lại phương trình $\Delta: x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x + 0 \cdot y + \frac{p}{2} = 0$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường chuẩn Δ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{\left| x_0 + 0.y_0 + \frac{p}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left| x_0 + \frac{p}{2} \right| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

Vậy $MF = d(M; \Delta) = x_0 + \frac{p}{2}.$

Luyện tập 2 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Cho parabol có phương trình $y^2 = 8x$. Tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol. Tính bán kính qua tiêu của điểm M thuộc parabol biết điểm M có tung độ bằng 4.

Lời giải:

Có $2p = 8 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow$ Tọa độ tiêu điểm là $F(2; 0)$ và phương trình đường chuẩn của parabol là $x = -2$.

Giả sử M có tọa độ là $(x; 4)$. Khi đó ta có $4^2 = 8x \Rightarrow x = 2$. Vậy $M(2; 4)$.

Suy ra bán kính qua tiêu của điểm M là $MF = x + \frac{p}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

Trang 56

Luyện tập 3 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Một sao chổi chuyển động theo quỹ đạo parabol nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Khoảng cách ngắn nhất từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là 106 km. Lập phương trình chính tắc của quỹ đạo theo đơn vị kilômét. Hỏi khi sao chổi nằm trên đường vuông góc với trục đối xứng của quỹ đạo tại tâm Mặt Trời, thì khoảng cách từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là bao nhiêu kilômét?

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm của parabol, đơn vị trên các trục là kilômét.

Gọi phương trình chính tắc của quỹ đạo parabol là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Giả sử sao chổi có toạ độ là $M(x; y)$.

Khi đó khoảng cách từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là $MF = x + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2}$.

Do đó khoảng cách ngắn nhất từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là $\frac{p}{2}$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = 106 \Rightarrow p = 212.$$

Vậy phương trình chính tắc của quỹ đạo parabol là $y^2 = 424x$.

Khi sao chổi nằm trên đường vuông góc với trục đối xứng của quỹ đạo tại tâm Mặt Trời, tức điểm M nằm trên đường thẳng $x = \frac{p}{2}$ thì M có hoành độ là $x = \frac{p}{2} = 106$

\Rightarrow Khoảng cách từ sao chổi đến tâm Mặt Trời là:

$$MF = x + \frac{p}{2} = 106 + 106 = 212 \text{ (km)}.$$

Vận dụng trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Theo các bước sau, hãy giải quyết vấn đề đã được nêu ra ở phần mở đầu bài học.

- a) Tìm chiều cao của công mà bác Vinh đã tham quan;
- b) Tìm chiều cao và chiều rộng của mô hình thu nhỏ mà bác Vinh dự định làm;
- c) Tìm phương trình chính tắc của mô hình đó, theo đơn vị mét;
- d) Nếu tại tiêu điểm của mô hình, bác Vinh treo một ngôi sao thì ngôi sao đó ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Lời giải:

a) Gọi toạ độ của điểm chân cầu có tung độ dương là $M(x; y)$.

Công rộng 192 m tức là tung độ của điểm chân cầu là $y = 192 : 2 = 96$

$$\Rightarrow 96^2 = 48x \Rightarrow x = 192.$$

Vậy chiều cao của công là 192 mét.

b) Vì mô hình bác Vinh làm có tỉ lệ là 1 : 100 nên:

– Chiều cao của mô hình là: $h = 192 : 100 = 1,92$ (m).

– Chiều rộng của mô hình là: $d = 192 : 100 = 1,92$ (m).

c) Gọi phương trình chính tắc của mô hình là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Khi đó toạ độ của điểm chân cầu là $\left(h; \frac{d}{2}\right) = \left(1,92; \frac{1,92}{2}\right) = (1,92; 0,96)$.

$$\Rightarrow 0,96^2 = 2p \cdot 1,92 \Rightarrow p = 0,24.$$

Vậy phương trình chính tắc của mô hình là $y^2 = 0,48x$.

d) Tiêu điểm của mô hình có toạ độ là $\left(\frac{p}{2}; 0\right) = \left(\frac{0,24}{2}; 0\right) = (0,12; 0)$.

Do đó ngôi sao cách đỉnh của mô hình 0,12 m

$$\Rightarrow \text{Độ cao của ngôi sao so với mặt đất là: } 1,92 - 0,12 = 1,8 \text{ (m).}$$

Vậy ngôi sao đó ở độ cao 1,8 mét so với mặt đất.

Bài 3.13 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Cho parabol có phương trình $y^2 = 12x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol. Tính bán kính qua tiêu của điểm M thuộc parabol và có hoành độ bằng 5.

Lời giải:

Có $2p = 12 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow$ Toạ độ tiêu điểm là $F(3; 0)$ và phương trình đường chuẩn của parabol là $x = -3$.

Bán kính qua tiêu của điểm M thuộc parabol và có hoành độ bằng 5 là $MF = x +$

$$\frac{p}{2} = 5 + \frac{6}{2} = 8.$$

Bài 3.14 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, parabol (P) có phương trình chính tắc và đi qua điểm $M(3; 3\sqrt{2})$. Tìm bán kính qua tiêu và khoảng cách từ tiêu điểm tới đường chuẩn của (P).

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

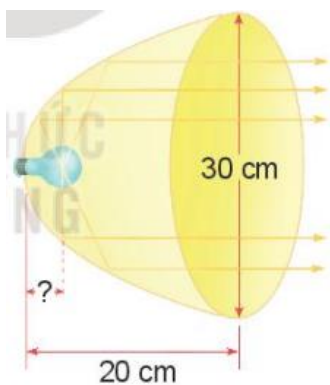
Theo đề bài, (P) đi qua điểm $M(3; 3\sqrt{2}) \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = 3$.

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ là $MF = x + \frac{p}{2} = x + \frac{3}{2}$.

Khoảng cách từ tiêu điểm tới đường chuẩn của (P) là $p = 3$.

Bài 3.15 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Xét đèn có bát đáy parabol với kích thước được thể hiện trên Hình 3.20.



Hình 3.20

Dây tóc bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm. Tính khoảng cách từ dây tóc tới đỉnh bát đáy.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với đỉnh bát đáy và trục Ox đi qua dây tóc (tiêu điểm).

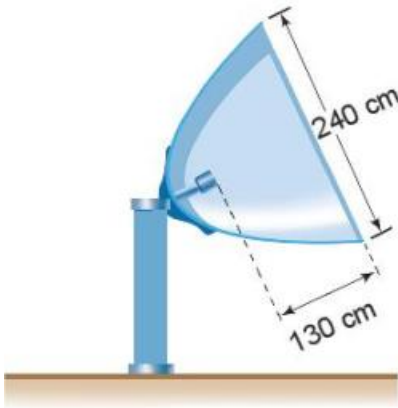
Giả sử phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Theo hình vẽ, khi $x = 20$ thì $y = 15$ hoặc $y = -15$, do đó $15^2 = 2p \cdot 20 \Rightarrow p = 5,625$.

Khoảng cách từ dây tóc tới đỉnh bát đáy là $\frac{p}{2} = \frac{5,625}{2} = 2,815$ (cm).

Bài 3.16 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Anten vệ tinh parabol ở Hình 3.21 có đầu thu đặt tại tiêu điểm, đường kính miệng anten là 240 cm, khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới miệng anten là 130 cm. Tính khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới đỉnh anten.



Hình 3.21

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với đỉnh anten và trục Ox đi qua đầu thu.

Giả sử phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Theo hình vẽ, khi $x = p + 130$ thì $y = 120$ hoặc $y = -120$, do đó $120^2 = 2p(\frac{p}{2} + 130)$

$\Rightarrow p \approx 46,92$.

Khoảng cách từ vị trí đặt đầu thu tới đỉnh anten là $\frac{p}{2} \approx \frac{46,92}{2} = 23,26$ (cm).