CHUYÊN ĐỀ II. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON.
BÀI 2. NHỊ THỨC NEWTON.

Trang 31, 32

Hoạt động 1 trang 31 Chuyên đề Toán 10:

a) Chọn số thích hợp cho ? trong khai triển biểu thức sau:

$(a+b)^3 = C_3^? a^{3-?} + C_3^? a^{3-?} b^1 + C_3^? a^{3-?} b^2 + C_3^? a^{3-?} b^3.$

Từ đó nêu dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^3$.

b) Xét biểu thức $(a + b)^n$.

Nêu dự đoán về dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^n$.

Lời giải:

a) $(a+b)^3 = C_3^0 a^{3-0} + C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 a^{3-3} b^3.$

Mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^3$ đều có dạng $C_3^k a^{3-k} b^k$.

b) Cũng như thế, mỗi số hạng trong khai triển biểu thức $(a + b)^n$ đều có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Luyện tập 1 trang 32 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển biểu thức $(x + 2)^7$.

Lời giải:

$$(x+2)^7 = x^7 + C_7^1 x^6\, 2 + C_7^2 x^5\, 2^2 + C_7^3 x^4\, 2^3 + C_7^4 x^3\, 2^4 + C_7^5 x^2\, 2^5 + C_7^6 x\, 2^6 + 2^7.$$

Luyện tập 2 trang 32 Chuyên đề Toán 10:

Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Lời giải:

Ta có:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}.1 + C_n^2 x^{n-2}.1^2 + ... + C_n^{n-1} x.1^{n-1} + C_n^n.1^n$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

Cho x = 1, ta được:

$$(1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} + C_n^2 1^{n-2} + ... + C_n^{n-1} 1 + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Vậy $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Trang 33, 34

Hoạt động 2 trang 33 Chuyên đề Toán 10:

Ta đã biết:

$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$;

$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$;

$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$;

$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$.

Ta sắp xếp những hệ số tổ hợp ở trên như sau:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
\end{array}
$$

Nêu phép toán để từ hai số hạng của dòng trên suy ra được số hạng tương ứng (thể hiện ở mũi tên ↓) ở dòng dưới trong bảng các hệ số nói trên.

Lời giải:

Tổng của hai số hạng của dòng trên bằng số hạng tương ứng ở dòng dưới.

Luyện tập 3 trang 34 Chuyên đề Toán 10:

Sử dụng tam giác Pascal để khai triển:

a) $(x + y)^7$;

b) $(x - 2)^7$.

Lời giải:

Tam giác Pascal ứng với $n \le 7$ là:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Vậy:

a) $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$.

b) $(x-2)^7$

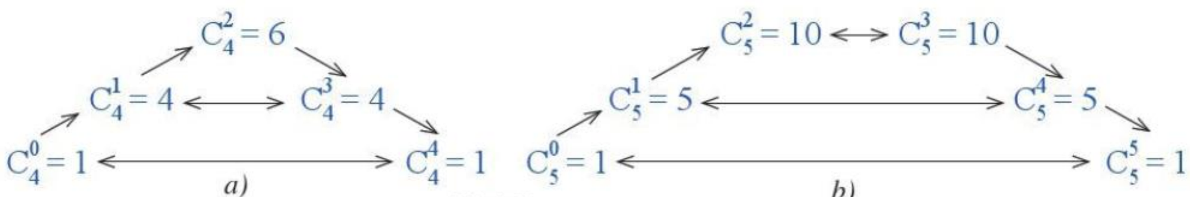
$= x^7 + 7x^6.(-2) + 21x^5(-2)^2 + 35x^4(-2)^3 + 35x^3(-2)^4 + 21x^2(-2)^5 + 7x(-2)^6 + (-2)^7$

$= x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128.$

Trang 35

Hoạt động 3 trang 35 Chuyên đề Toán 10:

Xét dãy các hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^4$ (Hình 7a) và nhị thức $(a + b)^5$ (Hình 7b) sau:



Hình 7

a) So sánh từng cặp hệ số C_4^0 và C_4^4; C_4^1 và C_4^3 ở Hình 7a.

So sánh từng cặp hệ số C_5^0 và C_5^5; C_5^1 và C_5^4; C_5^2 và C_5^3 ở Hình 7b.

b) Nêu nhận xét về sự tăng giảm của mỗi dãy hệ số:

$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$ (trong khai triển $(a + b)^4$)

$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$ (trong khai triển $(a + b)^5$)

Lời giải:

a) $C_4^0 = 1 = C_4^4$; $C_4^1 = 4 = C_4^3$.

$C_5^0 = 1 = C_5^5$; $C_5^1 = 5 = C_5^4$; $C_5^2 = 10 = C_5^3$.

b) Dãy $C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$ tăng từ C_4^0 đến C_4^2 rồi giảm từ C_4^2 đến C_4^4.

Dãy $C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$ tăng từ C_5^0 đến C_5^2, $C_5^2 = C_5^3$, rồi giảm từ C_5^3 đến C_5^5.

Luyện tập 4 trang 35 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a + b)^{2022}$;

b) $(a + b)^{2023}$.

Lời giải:

Vì dãy hệ số của khai triển $(a + b)^n$ tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần nên:

a) Hệ số lớn nhất của $(a + b)^{2022}$ là C_{2022}^{1011}.

b) Hệ số lớn nhất của $(a + b)^{2023}$ là C_{2023}^{1011} và C_{2023}^{1012}.

Trang 36

Hoạt động 4 trang SCĐ 36 Toán lớp 10:

Quan sát khai triển nhị thức:

$$(ax+b)^n = C_n^0(ax)^n + C_n^1(ax)^{n-1}b + C_n^2(ax)^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}(ax)b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= C_n^0 a^n x^n + C_n^1 a^{n-1}bx^{n-1} + C_n^2 a^{n-2}b^2x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1}x + C_n^n b^n.$$

Nêu công thức tính hệ số của x^k trong khai triển trên.

Lời giải:

Hệ số của x^k trong khai triển trên là $C_n^{n-k}a^k b^{n-k}$ với $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Luyện tập 5 trang 36 Chuyên đề Toán 10:

Xét khai triển của $(x + 5)^{15}$.

a) Nêu số hạng chứa x^7, từ đó nêu hệ số của x^7.

b) Nêu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nêu hệ số a_k của x^k với $0 \le k \le 15$.

Lời giải:

a) Số hạng chứa x^7 là $C_{15}^5 x^7 . 5^5$. Hệ số của x^7 là $C_{15}^5 5^5$.

b) Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_{15}^{15-k}x^k 5^{15-k}$. Hệ số của x^k là $C_{15}^{15-k}5^{15-k}$.

Trang 37

Bài 1 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x + y)^6$;

b) $(x – 3y)^6$;

c) $(x – 1)^n$;

d) $(x + 2)^n$;

e) $(x + y)^{2n}$;

g) $(x – y)^{2n}$;

trong đó n lả số nguyên dương.

Lời giải:

a) $(2x + y)^6$

$$= C_6^0(2x)^6 + C_6^1(2x)^5y + C_6^2(2x)^4y^2 + C_6^3(2x)^3y^3 + C_6^2(2x)^2y^2 + C_6^1(2x)y^5 + C_6^6y^6$$

$$= 2^6x^6 + C_6^12^5x^5y + C_6^22^4x^4y^2 + C_6^32^3x^3y^3 + C_6^42^2x^2y^4 + C_6^52xy^5 + y^6.$$

b) $(x – 3y)^6$

$= [x + (–3y)]^6$

$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5(-3y) + C_6^2x^4(-3y)^2 + C_6^3x^3(-3y)^3 + C_6^4x^2(-3y)^4 + C_6^5x(-3y)^5 + C_6^6(-3y)^6$$

$$= x^6 - C_6^13x^5y + C_6^23^2x^4y^2 - C_6^33^3x^3y^3 + C_6^43^4x^2y^4 - C_6^53^5xy^5 + 3^6y^6.$$

c) $(x – 1)^n$

$= [(x + (–1)]^n$

$$= C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}(-1) + C_n^2x^{n-2}(-1)^2 + ... + C_n^{n-1}x(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n$$

$$= x^n + C_n^1(-1)x^{n-1} + C_n^2(-1)^2x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}(-1)^{n-1}x + (-1)^n.$$

d) $(x + 2)^n$

$$= C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}2 + C_n^2x^{n-2}2^2 + ... + C_n^{n-1}x2^{n-1} + C_n^n2^n$$

$$= x^n + C_n^12x^{n-1} + C_n^22^2x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}2^{n-1}x + 2^n.$$

e) $(x + y)^{2n}$

$$= C_{2n}^0x^{2n} + C_{2n}^1x^{2n-1}y + C_{2n}^2x^{2n-2}y^2 + ... + C_{2n}^{2n-1}xy^{2n-1} + C_{2n}^{2n}y^{2n}$$

$= x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1}y + C_{2n}^2 x^{2n-2}y^2 + ... + C_{2n}^{2n-1}xy^{2n-1} + y^{2n}.$

g) $(x-y)^{2n}$

$= C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1}(-y) + C_{2n}^2 x^{2n-2}(-y)^2 + ... + C_{2n}^{2n-1}x(-y)^{2n-1} + C_{2n}^{2n}(-y)^{2n}$

$= C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1}y + C_{2n}^2 x^{2n-2}y^2 - ... - C_{2n}^{2n-1}xy^{2n-1} + C_{2n}^{2n}y^{2n}$

$= x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1}y + C_{2n}^2 x^{2n-2}y^2 - ... - C_{2n}^{2n-1}xy^{2n-1} + y^{2n}.$

Bài 2 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Tính:

a) $S = C_{2022}^0 9^{2022} + C_{2022}^1 9^{2021} + ... + C_{2022}^k 9^{2022-k} + ... + C_{2022}^{2021} 9 + C_{2022}^{2022}.$

b) $T = C_{2022}^0 4^{2022} - C_{2022}^1 4^{2021}.3 + ... - C_{2022}^{2021} 4.3^{2021} + C_{2022}^{2022} 3^{2022}.$

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có:

a) $S = C_{2022}^0 9^{2022} + C_{2022}^1 9^{2021} + ... + C_{2022}^k 9^{2022-k} + ... + C_{2022}^{2021} 9 + C_{2022}^{2022}$

$= C_{2022}^0 9^{2022} + C_{2022}^1 9^{2021}.1 + ... + C_{2022}^k 9^{2022-k}.1^k + ... + C_{2022}^{2021} 9.1^{2021} + C_{2022}^{2022}.1^{2022}$

$= (9+1)^{2020} = 10^{2022}.$

b) $T = C_{2022}^0 4^{2022} - C_{2022}^1 4^{2021}.3 + ... - C_{2022}^{2021} 4.3^{2021} + C_{2022}^{2022} 3^{2022}$

$= C_{2022}^0 4^{2022} + C_{2022}^1 4^{2021}.(-3)^1 + ... + C_{2022}^{2021} 4.(-3)^{2021} + C_{2022}^{2022} (-3)^{2022}$

$= [4 + (-3)]^{2022} = 1^{2022} = 1.$

Bài 3 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh:

$C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + ... + C_n^k 3^{n-k} + ... + C_n^{n-1} 3 + C_n^n$

$= C_n^0 + C_n^1 3 + ... + C_n^k 3^k + ... + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n$ với $0 \le k \le n$; $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

$C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + ... + C_n^k 3^{n-k} + ... + C_n^{n-1} 3 + C_n^n$

$= C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}.1^1 + ... + C_n^k 3^{n-k}.1^k + ... + C_n^{n-1} 3.1^{n-1} + C_n^n.1^n$

$= (3+1)^n = 4^n.$

$C_n^0 + C_n^1 3 + ... + C_n^k 3^k + ... + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n$

$= C_n^0.1^n + C_n^1.1^{n-1}3 + ... + C_n^k.1^{n-k}3^k + ... + C_n^{n-1}.1^{n-1}3^{n-1} + C_n^n 3^n$

$= (1+3)^n = 4^n.$

Vậy $C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + ... + C_n^k 3^{n-k} + ... + C_n^{n-1} 3 + C_n^n$

$= C_n^0 + C_n^1 3 + ... + C_n^k 3^k + ... + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n.$

Bài 4 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Xác định hệ số của:

a) x^{12} trong khai triển của $(x + 4)^{30}$;

b) x^{10} trong khai triển của $(3 + 2x)^{30}$;

c) x^{15} và x^{16} trong khai triển của $\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{7}\right)^{51}$.

Lời giải:

a) Số hạng chứa x^{12} là $C_{30}^{18} x^{12} 4^{18}$. Hệ số của x^{12} là $C_{30}^{18} 4^{18}$.

b) Số hạng chứa x^{10} là $C_{30}^{10} 3^{20} (2x)^{10} = C_{30}^{10} 3^{20} 2^{10} x^{10}$. Hệ số của x^{10} là $C_{30}^{10} 3^{20} 2^{10}$.

c) Số hạng chứa x^{15} là $C_{51}^{36} \left(\frac{2x}{3}\right)^{15} \left(-\frac{1}{7}\right)^{36} = C_{51}^{36} \frac{2^{15}}{3^{15} 7^{36}} x^{15}$.

Hệ số của x^{15} là $C_{51}^{36} \frac{2^{15}}{3^{15} 7^{36}}$.

Số hạng chứa x^{16} là $C_{51}^{35} \left(\frac{2x}{3}\right)^{16} \left(-\frac{1}{7}\right)^{35} = -C_{51}^{35} \frac{2^{16}}{3^{16} 7^{35}} x^{15}$.

Hệ số của x^{16} là $-C_{51}^{35} \frac{2^{16}}{3^{16} 7^{35}}$.

Bài 5 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Xét khai triển của $\left(x + \frac{5}{2}\right)^{12}$.

a) Xác định hệ số của x^7.

b) Nêu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nêu hệ số a_k của x^k với $0 \le k \le 12$.

Lời giải:

a) Số hạng chứa x^7 là $C_{12}^{5}x^7\left(\frac{5}{2}\right)^5$. Hệ số của x^7 là $C_{12}^{5}\left(\frac{5}{2}\right)^5$.

b) Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_{12}^{12-k}x^k\left(\frac{5}{2}\right)^{12-k}$. Hệ số của x^k là $C_{12}^{12-k}\left(\frac{5}{2}\right)^{12-k}$.

Bài 6 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Xét khai triển của $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\right)^{21}$.

a) Xác định hệ số của x^{10}.

b) Nêu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, tư đó nêu hệ số a_k của x^k với $0 \le k \le 21$.

Lời giải:

a) Số hạng chứa x^{10} là $C_{21}^{11}\left(\frac{x}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$. Hệ số của x^{10} là $C_{21}^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{11} = C_{21}^{11}\frac{1}{2^{10}5^{11}}$.

b) Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_{21}^{21-k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{21-k}$. Hệ số của x^k là $C_{21}^{21-k}\frac{1}{2^k5^{21-k}}$.

Trang 38

Bài 7 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a) $(a + b)^8$;

b) $(a + b)^9$.

Lời giải:

Vì dãy hệ số của khai triển $(a + b)^n$ tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần nên:

a) Hệ số lớn nhất của $(a + b)^8$ là C_8^4.

b) Hệ số lớn nhất của $(a + b)^9$ là C_9^4 và C_9^5.

Bài 8 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

+) Với n = 1, ta có: $(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$.

Vậy công thức đúng với n = 1.

+) Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà mệnh đề đúng, ta phải chứng minh công thức cũng đúng với k + 1, tức là:

$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1}b + ... + C_{k+1}^{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k$.

Khi đó:

$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$= a(a+b)^k + b(a+b)^k$

$= a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k\right)$

$+ b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + ... + C_k^{k-1}ab^{k-1} + C_k^k b^k\right)$

$= \left(C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + ... + C_k^{k-1}a^2b^{k-1} + C_k^k ab^k\right)$

$+ \left(C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1}b^2 + ... + C_k^{k-2}a^2b^{k-1} + C_k^{k-1}ab^k + C_k^k b^{k+1}\right)$

$= C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right)a^k b + \left(C_k^1 + C_k^2\right)a^{k-1}b^2 + ...$

$+ \left(C_k^{k-2} + C_k^{k-1}\right)a^2b^{k-1} + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right)ab^k + C_k^k b^{k+1}$

$= 1.a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 + ... + C_{k+1}^{k-1}a^2b^{k-1} + C_{k+1}^k ab^k + 1.b^{k+1}$

(vì $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}\ \forall 0 \le i \le k,\ i \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*$)

$= C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1}b + ... + C_{k+1}^{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$.

Vậy công thức cũng đúng với n = k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh:

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $n^7 - n$ chia hết cho 7 $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a)

+) Với n = 1, ta có: $1^5 - 1 = 0 \vdots 5$.

Vậy mệnh đề đúng với n = 1.

+) Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà mệnh đề đúng, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với k + 1, tức là: $(k + 1)^5 - (k + 1) \vdots 5$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có: $k^5 - k \vdots 5$.

Khi đó:

$(k + 1)^5 - (k + 1)$

$= \left(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right) - \left(k + 1\right)$

$= \left(k^5 - k\right) + \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\right)$

Mà $\left(k^5 - k\right)$ và $\left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\right)$ đều chia hết cho 5, do đó

$\left(k^5 - k\right) + \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\right) \vdots 5$ hay $(k + 1)^5 - (k + 1) \vdots 5$.

Vậy mệnh đề cũng đúng với n = k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b)

+) Với n = 1, ta có: $1^7 - 1 = 0 \vdots 7$.

Vậy mệnh đề đúng với n = 1.

+) Với k là một số nguyên dương tuỳ ý mà mệnh đề đúng, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với k + 1, tức là: $(k + 1)^7 - (k + 1) \vdots 7$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có: $k^7 - k \vdots 7$.

Khi đó:

$(k + 1)^7 - (k + 1)$

$= \left(k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1\right) - \left(k + 1\right)$

$= \left(k^7 - k\right) + \left(7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k\right)$

Mà $\left(k^7-k\right)$ và $\left(7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k\right)$ đều chia hết cho 7, do đó $\left(k^7-k\right)+\left(7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k\right)\;\vdots\;7$ hay $(k+1)^7-(k+1)\;\vdots\;7$.

Vậy mệnh đề cũng đúng với n = k + 1. Do đó theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Cho tập hợp A = $\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ có n phần tử. Tính số tập hợp con của A.

Lời giải:

Vì A có n phần tử nên số tập hợp con có k phần tử của tập hợp A là: C_n^k.

Như vậy tổng số tập con của tập hợp A là: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n$.

Lại có $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$ (theo luyện tập 2).

Vậy tập hợp A có tất cả 2^n tập con.

Bài 11 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Một nhóm gồm 10 học sinh tham gia chiến dịch Mùa hè xanh. Nhà trường muốn chọn ra một đội công tác có ít nhất hai học sinh trong những học sinh trên. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội công tác như thế?

Lời giải:

Đội công tác có thể có từ 2 đến 10 học sinh.

Nếu đội công tác có k học sinh thì ta có C_{10}^k cách chọn.

Như vậy tổng số cách chọn là: $C_{10}^2+C_{10}^3+\ldots+C_{10}^{10}$.

Lại có $C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}=1024$ (áp dụng luyện tập 2 với n = 10).

$\Rightarrow C_{10}^2+C_{10}^3+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}=1024-\left(C_{10}^0+C_{10}^1\right)=1024-\left(1+10\right)=1013$.

Vậy có 1013 cách.

Bài 12 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Để tham gia một cuộc thi làm bánh, bạn Tiến làm 12 chiếc bánh có màu khác nhau và chọn ra số nguyên dương chẵn chiếc bánh để cho vào một hộp trưng bày. Hỏi bạn Tiến có bao nhiêu cách để chọn bánh cho vào hộp trưng bày đó?

Lời giải:

Số bánh bạn Tiến có thể chọn để cho vào hộp có thể là 2, 4, 6, 8, 10 hoặc 12.

Như vậy tổng số cách chọn là: $C_{12}^{2}+C_{12}^{4}+...+C_{12}^{12}$.

Lại có $C_{12}^{0}+C_{12}^{2}+C_{12}^{4}+...+C_{12}^{12}=2^{2.6-1}=2^{11}=2048$ (áp dụng câu c Ví dụ 3 với n = 6).

$\Rightarrow C_{12}^{2}+C_{12}^{4}+...+C_{12}^{12}=2^{2.6-1}=2048-C_{12}^{0}=2048-1=2047$.

Vậy có 2047 cách.

Bài 13 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Bác Thành muốn mua quà cho con nhân dịp sinh nhật nên đã đến một cửa hàng đồ chơi. Bác dự định chọn một trong năm loại đồ chơi. Ở cửa hàng, mỗi loại đồ chơi đó chỉ có 10 sản phẩm khác nhau bày bán. Biết rằng nếu mua bộ trực thăng điều khiển từ xa, bác sẽ chỉ mua 1 sản phẩm; nếu mua bộ đồ chơi lego, bác sẽ mua 3 sản phẩm khác nhau; nếu mua bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời, bác sẽ mua 5 sản phẩm khác nhau; nếu mua rubik, bác sẽ mua 7 sản phẩm khác nhau; còn nếu mua mô hình khủng long, bác sẽ mua 9 sản phẩm khác nhau. Bác Thành có bao nhiêu cách chọn quà sinh nhật cho con?

Lời giải:

Số cách chọn nếu bác Thành mua:

– Bộ trực thăng điều khiển từ xa là: C_{10}^{1}.

– Bộ đồ chơi lego là: C_{10}^{3}.

– Bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời là: C_{10}^{5}.

– Rubik là: C_{10}^{7}.

– Mô hình khủng long là: C_{10}^{9}.

Vậy tổng số cách chọn là: $C_{10}^{1}+C_{10}^{3}+C_{10}^{5}+C_{10}^{7}+C_{10}^{9}$.

Lại có $C_{10}^{1}+C_{10}^{3}+C_{10}^{5}+C_{10}^{7}+C_{10}^{9}=2^{2.5-1}=2^{9}=512$ (áp dụng câu c Ví dụ 3 với n = 5).

Vậy có 512 cách.

Bài 14 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Giả sử tính trạng ở một loài cây được quy định do tác động cộng gộp của n cặp alen phân li độc lập A_1a_1, A_2a_2, ..., A_na_n. Cho cây F_1 dị hợp về n cặp alen giao phối với nhau. Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là hệ số của khai triển nhị thức Newton $(a + b)^{2n}$, nghĩa là tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là $C_{2n}^{0}:C_{2n}^{1}:C_{2n}^{2}:...:C_{2n}^{2n-2}:C_{2n}^{2b-1}:C_{2n}^{2n}$.

Cho biết một loài cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

Lời giải:

Thay n = 4 vào công thức trong đề bài, ta được:

Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau là:

$C_{2.4}^{0} : C_{2.4}^{1} : C_{2.4}^{2} : ... : C_{2.4}^{2.4}$ hay $C_8^0 : C_8^1 : C_8^2 : C_8^3 : C_8^4 : C_8^5 : C_8^6 : C_8^7 : C_8^8$.