BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

I. Đạo hàm của một hàm số thường gặp

1. Định lý 1

Hàm số y = x^n $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = n.x^{n-1}$.

2. Định lý 2

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1.

a) Tính đạo hàm y = x^3;

b) Tính đạo hàm $y = \sqrt{x}$ tại x = 5.

Lời giải

a) Ta có: $y' = 3x^2$;

b) Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Đạo hàm của hàm số tại x = 5 là: $y'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

II. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

1. Định lí 3

Giả sử u = u(x), v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định, ta có:

$(u + v)' = u' + v'$;

$(u – v)' = u' – v'$;

$(uv)' = u'.v + u.v'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

2. Hệ quả

Hệ quả 1. Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = k.u'$.

Hệ quả 2. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 2x^2 + 3x + 6$;

b) $y = (x^2 + 1)(2x - 3)$;

c) $y = \frac{7x^2}{x-1}$.

Lời giải

a) $y = x^5 - 2x^2 + 3x$

$\Rightarrow y' = (x^5 - 2x^2 + 3x)'$

$= (x^5)' - (2x^2)' + (3x)'$

$= 5x^4 - 4x + 3.$

b) $y = (x^2 + x).2x$

$\Rightarrow y' = (x^2 + x)'.2x + (x^2 + 1)(2x)'$

$= [(x^2)' + x'].2x + (x^2 + 1).2$

$= (2x + 1).2x + 2x^2 + 2$

$= 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2$

$= 6x^2 + 2x + 2.$

c) $y = \frac{7x^2}{x-1}$

$$\Rightarrow y = \frac{7x^2{}' \;\; x^3 - 2x \; - \; 7x^2 \;\; x^3 - 2x{}'}{x^3 - 2x^{\;\;2}}$$

$$= \frac{14x \;\; x^3 - 2x \;\; - 7x^2 \;\; 2x^2 - 2}{x^3 - 2x^{\;\;2}}$$

$$= \frac{14x^4 - 28x^2 - 14x^2 + 14x}{x^3 - 2x^{\;\;2}}$$

$$= \frac{-28x^2+14x}{x^3-2x\ ^{2}}.$$

III. Đạo hàm hàm hợp

Định lý 4. Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm x là u'_x và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là y'_x thì hàm hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là: $y'_x = y'_u.u'_x$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số: $y=\sqrt{x^2+2x}$

Lời giải

Đặt $u=x^2+2x$ thì $y=\sqrt{u}$

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{x^2+2x\ '}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}.$$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y=x^3-3x^2+2x+1$

2. $y=-x^3+3x+1$

3. $y=\frac{x^4}{4}-x^2+1$

4. $y=-2x^4+\frac{3}{2}x^2+1$

5. $y=\frac{2x+1}{x-3}$

6. $y=\frac{x^2-2x+2}{x+1}$

Lời giải

1. Ta có: $y'= -x^3+3x+1\ ' =3x^2-6x+2$

2. Ta có: $y'= -x^3+3x+1\ ' =-3x^2+3$

3. Ta có: $y'=\left(\frac{x^4}{4}-x^2+1\right)'=x^3-2x$

4. Ta có: $y'=\left(-2x^4+\dfrac{3}{2}x^2+1\right)'=-8x^3+3x$

5. Ta có: $y'=\dfrac{(2x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2}=\dfrac{-7}{(x-3)^2}$

6. Ta có: $y'=\dfrac{(x^2-2x+2)'(x+1)-(x^2-2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=\left(x^7+x\right)^2$

b) $y=\sqrt{2x^2+3x+1}$

Lời giải

a) Đặt u = $(x^7 + x)^2$

$\Rightarrow y'(u)=2\left(x^7+x\right)\left(x^7+x\right)'=2\left(x^7+x\right)\left(7x+1\right)$.

b) Đặt u = $2x^2 + 3x + 1$

$\Rightarrow y'(u)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}=\dfrac{\left(2x^2+3x+1\right)'}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}=\dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}$

Bài 3. Cho $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{32}$ và $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+10\sqrt{3}$. Giải bất phương trình f’(x) > g’(x).

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\left(2x^3-x^2+\sqrt{32}\right)'=6x^2-2x$

$g'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+10\sqrt{3}\right)'=x^2+x$

Xét bất phương trình: f’(x) > g’(x)

$\Leftrightarrow 6x^2-2x>x^2+x$

$\Leftrightarrow 5x^2-3x>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $-\infty;0 \cup \left(\dfrac{3}{5};+\infty\right)$.

Bài 4. Cho f(x) = $x^5 + x^3 - 2x - 3$. Chứng minh rằng:

f’(1) + f’(-1) = -4f(0).

Lời giải

Ta có: f’(x) = $(x^5 + x^3 - 2x - 3)' = 5x^4 + 3x^2 - 2$.

Khi đó:

f’(1) = $5.1^4 + 3.1^2 - 2 = 5 + 3 - 2 = 6$.

f’(-1) = $5.(-1)^4 + 3.(-1)^2 - 2 = 5 + 3 - 2 = 6$.

f(0) = $0^5 + 0^3 - 2.0 - 3 = 0 + 0 - 0 - 3 = -3$.

$\Rightarrow$ f’(1) + f’(-1) = 6 + 6 = 12 và -4f(0) = -4.(-3) = 12.

Vậy f’(1) + f’(-1) = -4f(0).