Bài 2. Hàm số bậc hai

A. Lý thuyết

1. Hàm số bậc hai

- Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực và a khác 0.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Ví dụ:

+) $y = 5x^2 + 2x + 1$ là hàm số bậc hai bởi hàm số này được cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a = 5 \neq 0$, $b = 2$, $c = 1$.

+) $y = 3x^3 + x – 1$ không phải là hàm số bậc hai bởi hàm số này có chứa x^3, không được cho bởi công thức dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) là một parabol (P):

+ Có đỉnh S với hoành độ $x_S = -\dfrac{b}{2a}$, tung độ $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$; ($\Delta = b^2 – 4ac$)

+ Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

+ Bề lõm quay lên trên nếu a > 0, quay xuống dưới nếu a < 0;

+ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm có tọa độ (0; c).

Chú ý:

+ Nếu b = 2b’ thì (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b'}{a};-\frac{\Delta'}{a}\right)$.

+ Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2 thì đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm lần lượt có hoành độ là hai nghiệm này.

Ví dụ: Cho hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x + 1$.

Ta xác định a = 1; b = 2; c = 1; $\Delta = b^2 – 4ac = 0$.

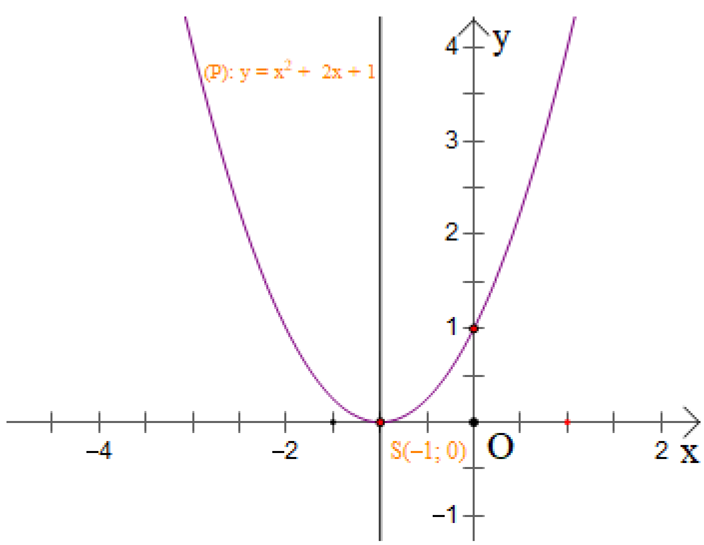
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x + 1$ là một parabol (P):

+ Có đỉnh S với hoành độ $x_S = -\frac{b}{2a} = -1$, tung độ $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = 0$;

+ Có trục đối xứng d là đường thẳng x = –1 (đường thẳng này đi qua đỉnh S(–1; 0) và song song với trục Oy);

+ Bề lõm của parabol quay lên trên do a = 1 > 0;

+ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; 1).



Đối với hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x + 1$ ta thấy hệ số $b = 2$ là số chẵn nên cũng có thể tìm toạ độ đỉnh $S\left(-\frac{b'}{a};-\frac{\Delta'}{a}\right)$ với $a = 1$, $b' = 1$, $c = 1$ và $\Delta' = b'^2 - ac = 0$.

Khi đó ta cũng tìm được $S(-1; 0)$.

***Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai:**

Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$):

- Xác định tọa độ đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

- Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

- Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung (điểm $A(0; c)$) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có).

Xác định thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng d, là điểm $B\left(-\frac{b}{a};c\right)$.

- Vẽ parabol có đỉnh S, có trục đối xứng d, đi qua các điểm tìm được.

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = 2x^2 + 3x + 1$.

Ta có: $a = 2$; $b = 3$; $c = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 1$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = 2x^2 + 3x + 1$ là một parabol (P):

+ Có toạ độ đỉnh S với $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4}$; tung độ $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{8}$ hay $S\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{8}\right)$;

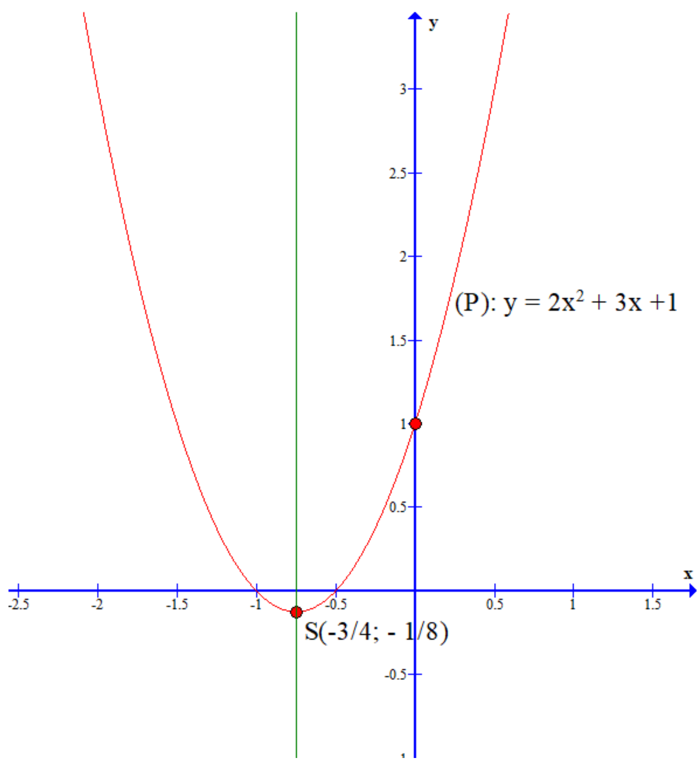
+ Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{3}{4}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

+ Bề lõm của parabol (P) quay lên trên do a = 2 > 0;

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, tức là đồ thị (P) đi qua điểm có tọa độ (0; 1)

Ngoài ra phương trình $2x^2 + 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (–1; 0) và $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Ta vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 3x + 1$ như hình vẽ dưới đây:



3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

- Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$), ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số này như sau:

<table>
<tr><th>a > 0</th><th>a < 0</th></tr>
<tr>
<td>
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\frac{-b}{2a}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$+\infty$ ↘ $\frac{-\Delta}{4a}$ ↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\frac{-b}{2a}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$-\infty$ ↗ $\frac{-\Delta}{4a}$ ↘ $-\infty$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Chú ý: Từ bảng biến thiên của hàm số bậc hai, ta thấy:

- Khi a > 0, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại x = $\frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T=\left[-\frac{\Delta}{4a};+\infty\right)$.

- Khi a < 0, hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại x = $\frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T=\left(-\infty;-\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Ví dụ: Lập bảng biến thiên và tìm giá trị lớn nhất của hàm số y = – x^2 + 3x – 2.

Hướng dẫn giải

Ta xác định các tham số: a = –1; b = 3; c = –2, Δ = b^2 – 4ac = 1.

Đỉnh S có tọa độ: $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$; $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4}$.

Hay $S\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Vì hàm số bậc hai có a = –1 < 0 nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ $-\infty$

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi x = $\frac{3}{2}$

4. Ứng dụng của hàm số bậc hai

Tầm bay cao và bay xa

Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, chọn điểm có tọa độ (0; y_0) là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2v_0^{\ 2}.\cos^2\alpha} + \tan(\alpha).x + y_0$$

Trong đó:

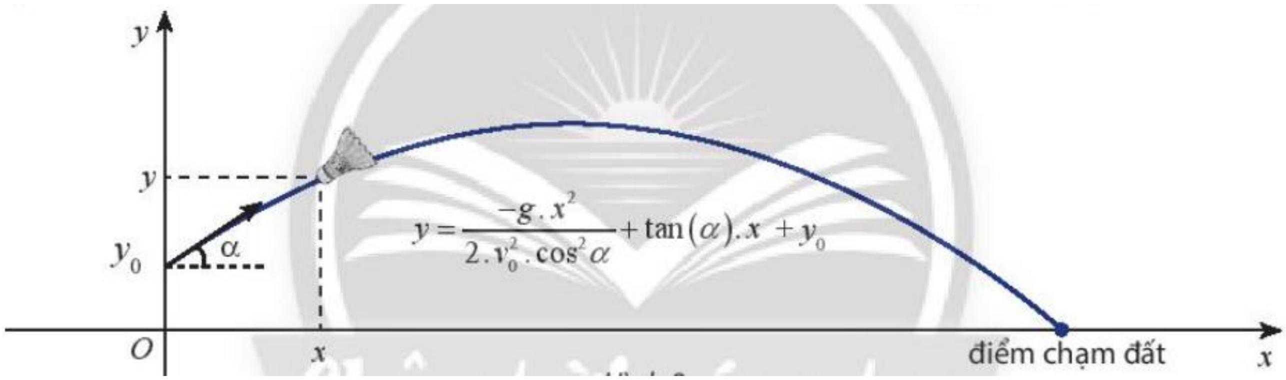
+ g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là 9,8 m/s^2);

+ α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);

+ v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;

+ y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.



Xét trường hợp lặng gió, với vận tốc ban đầu và góc phát cầu đã biết, cầu chuyển động theo quỹ đạo parabol nên sẽ:

- Đạt vị trí cao nhất tại đỉnh parabol, gọi là tầm bay cao;

- Rơi chạm đất ở vị trí cách nơi đứng phát cầu một khoảng, gọi là tầm bay xa.

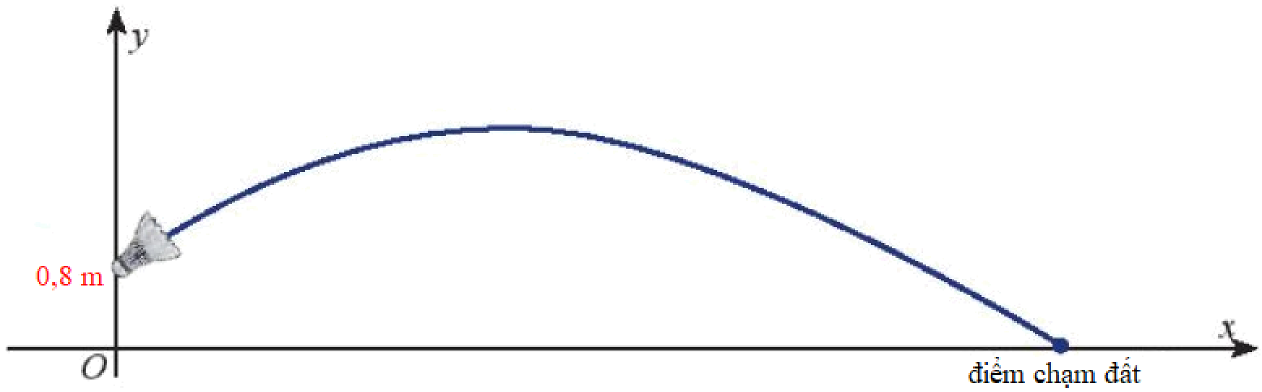
Ví dụ: Một người đang tập chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 15 độ so với mặt đất.

a) Hãy tính khoảng cách từ vị trí người phát cầu đến vị trí cầu chạm đất, biết cầu rời vợt ở độ cao 0,8 m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 10 m/s (bỏ qua sức cản của gió và quỹ đạo của cầu trong mặt phẳng thẳng đứng, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s^2).

b) Giả thiết như câu a và cho biết khoảng cách từ vị trí phát cầu đến lưới là 4,5 m. Lần phát cầu này có hỏng không? Cho biết mép trên của lưới cách mặt đất 1,524 m.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ với vị trị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung.



Với $g = 9,8$ m/s^2, góc phát cầu $\alpha = 15^o$, vận tốc ban đầu của cầu là $v_0 = 10$ m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2{v_0}^2.\cos^2\alpha} + \tan(\alpha).x + y_0$$

$$y = \frac{-9,8.x^2}{2.10^2.(\cos15°)^2} + \tan15°.x + 0,8$$

$$y = -\frac{49}{125\left(1+\sqrt{3}\right)^2}x^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)x + 0,8 \text{ (với } x \geq 0)$$

Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên $y = 0$.

Giải phương trình $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{49}{125\left(1+\sqrt{3}\right)^2}x^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)x + 0,8 = 0$ ta được 2 nghiệm là

$x_1 \approx 7,21$ (thỏa mãn) và $x_2 \approx -2,11$ (không thỏa mãn)

Giá trị nghiệm cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi đến vị trí cầu rơi chạm đất là 7,21 m.

b) Khi cầu bay tới vị trí lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.

Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc tọa độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.

Khi x = 4,5 thay vào $y = -\frac{49}{125\left(1+\sqrt{3}\right)^2}x^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)x + 0,8$ ta có:

$$y = -\frac{49}{125\left(1+\sqrt{3}\right)^2}.4,5^2 + \left(2-\sqrt{3}\right).4,5 + 0,8 \approx 0,942 \text{ m} < 1,524 \text{ m}$$

Vậy quả phát cầu này không hợp lệ.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

a) $y = 5x^2 + 2x - 1$.

b) $y = x^3 + x + 1$.

c) $y = x^2 + \sqrt{x} + 1$.

d) $y = 1 - x - x^2$.

Hướng dẫn giải

+) Hàm số $y = 5x^2 + 2x - 1$ là hàm số bậc hai bởi hàm số này được cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a = 5 \neq 0$, $b = 2$, $c = -1$.

+) Hàm số $y = x^3 + x + 1$ không phải là hàm số bậc hai bởi hàm số này có chứa x^3, không được cho bởi công thức dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

+) Hàm số $y = x^2 + \sqrt{x} + 1$ không phải là hàm số bậc hai bởi hàm số này chứa $\sqrt{x}$, không được cho bởi công thức dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

+) Hàm số $y = 1 – x – x^2$ là hàm số bậc hai bởi hàm số này được cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a = –1 \neq 0$, $b = –1$, $c = 1$.

Vậy có các hàm số $y = 5x^2 + 2x – 1$, $y = 1 – x – x^2$ là hàm số bậc hai.

Bài 2. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = mx^2 + 4mx + 3$ là hàm số bậc hai. Khi m = 1, hãy vẽ đồ thị của hàm số đó và xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số đó.

Hướng dẫn giải

Để hàm số $y = mx^2 + 4mx + 3$ là hàm số bậc hai thì hệ số của x^2 phải khác 0

$\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi m = 1 (thỏa mãn $m \neq 0$) thì hàm số sẽ trở thành: $y = x^2 + 4x + 3$ là hàm số bậc hai.

Khi đó đồ thị của hàm số là một parabol (P).

Vẽ đồ thị: (các tham số $a = 1$, $b' = 2$, $c = 3$, $\Delta' = b'^2 – ac = 1$)

+ Có tọa độ đỉnh S(–2; –1);

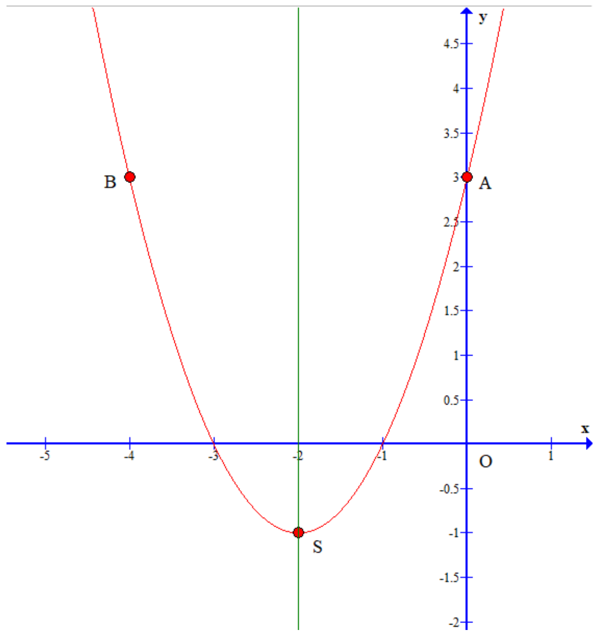
+ Có trục đối xứng d là đường thẳng $x = –2$ (đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

+ Bề lõm của parabol quay lên trên do $a = 1 > 0$;

+ Đồ thị cắt trục tung tại điểm A(0; 3). Điểm B đối xứng với A qua trục đối xứng d có tọa độ B(–4; 3);

Phương trình $x^2 + 4x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = –3$ và $x_2 = –1$ nên đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (–3; 0) và (–1; 0).

Ta có parabol sau:



Do a = 1 > 0 nên hàm số nghịch biến trên khoảng (–∞; –2) và đồng biến trên khoảng (–2; + ∞).

Bài 3. Cho hàm số bậc hai y = f(x) = ax^2 + bx + c có f(0) = 6, f(1) = 11, f(2) = 18.

a) Hãy xác định giá trị của các hệ số a, b, c.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số tìm được ở câu a. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất không? Tìm giá trị đó.

Hướng dẫn giải

a) +) Với f(0) = 6, thay x = 0 vào hàm số ta có:

f(0) = a. 0^2 + b. 0 + c = 6 ⇔ c = 6.

+) Với f(1) = 11, thay x = 1 vào hàm số ta có:

f(1) = a. 1^2 + b. 1 + c = 11 ⇔ a + b + c = 11 ⇔ a + b = 5.   (1)

+) Với f(2) = 18, thay x = 2 vào hàm số ta có:

f(2) = a. 2^2 + b. 2 + c = 18 ⇔ 4a + 2b + c = 18 ⇔ 4a + 2b = 12 ⇔ 2a + b = 6.   (2)

Trừ theo vế phương trình (2) cho phương trình (1) ta được: a = 1

Suy ra b = 4.

Khi đó phương trình bậc hai trở thành $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Xét hàm số $y = x^2 + 4x + 6$ có a = 1, b' = 2, c = 6 và $\Delta' = b'^2 - ac = -2$.

Đỉnh S của đồ thị hàm số có tọa độ:

$$x_S = \frac{-b'}{a} = -2;\ y_S = -\frac{\Delta'}{a} = 2.$$

Hay S(–2; 2).

Vì hàm số bậc hai có a = 1 > 0 nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi x = –2.

Bài 4. Một người đang tập chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 45 độ so với mặt đất.

a) Hãy tính khoảng cách từ vị trí người phát cầu đến vị trí cầu chạm đất, biết cầu rời vợt ở độ cao 0,9 m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 9 m/s (bỏ qua sức cản của gió và quỹ đạo của cầu trong mặt phẳng thẳng đứng, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s^2).

b) Giả thiết như câu a và cho biết khoảng cách từ vị trí phát cầu đến lưới là 3 m. Lần phát cầu này có hỏng không? Cho biết mép trên của lưới cách mặt đất 1,524 m.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ với vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung.

Với $g = 9,8$ m/s^2, góc phát cầu $\alpha = 45^o$, vận tốc ban đầu của cầu là $v_0 = 9$ m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2{v_0}^2.\cos^2\alpha} + \tan(\alpha).x + y_0$$

$$= \frac{-9,8.x^2}{2.9^2.\cos^2 45°} + \tan 45°.x + 0,9$$

$$= \frac{-9,8.x^2}{2.9^2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + 1.x + 0,9$$

$$= -\frac{49}{405}x^2 + x + 0,9 \text{ (với } x \geq 0\text{)}$$

Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên $y = 0$.

Giải phương trình $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{49}{405}x^2 + x + 0,9 = 0$ ta được 2 nghiệm là $x_1 \approx 9,08$ (thỏa mãn) và $x_2 \approx -0,82$ (không thỏa mãn)

Giá trị nghiệm cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi đến vị trí cầu rơi chạm đất là 9,08 m.

b) Khi cầu bay tới vị trí lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.

Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc tọa độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.

Khi $x = 3$, ta có $y = -\frac{49}{405}.3^2 + 3 + 0,9 \approx 2,81$ m $> 1,524$ m

Như vậy lần phát cầu này thỏa mãn qua lưới.

Ta có:

Điểm bên trong sẽ cách vị trí phát: 3 + 1,98 = 4,98m.

Điểm bên ngoài sẽ cách vị trí phát: 3 + 6,7 = 9,7 m.

Do vị trí cầu rơi chạm đất là 9,08 m, nằm trong khoảng giữa điểm trong và điểm ngoài nên lần phát cầu này hợp lệ.

Vậy với vận tốc xuất phát của cầu là 9 m/s thì lần phát này hợp lệ.

Bài 5. Cho một vật rơi từ trên cao xuống với vận tốc ban đầu là 5 m/s. Viết hàm số biểu thị quãng đường rơi s theo thời gian t và vẽ đồ thị của hàm số đó, lúc t = 5s thì vật đã rơi được bao nhiêu mét, biết $g = 10m/s^2$, hệ trục tọa độ chọn mốc từ lúc vật bắt đầu rơi, gốc tọa độ ở vật tại thời điểm bắt đầu rơi.

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc ban đầu của vật là $v_0 = 5$ m/s.

Do đây là vật rơi nên vật sẽ chuyển động nhanh dần đều.

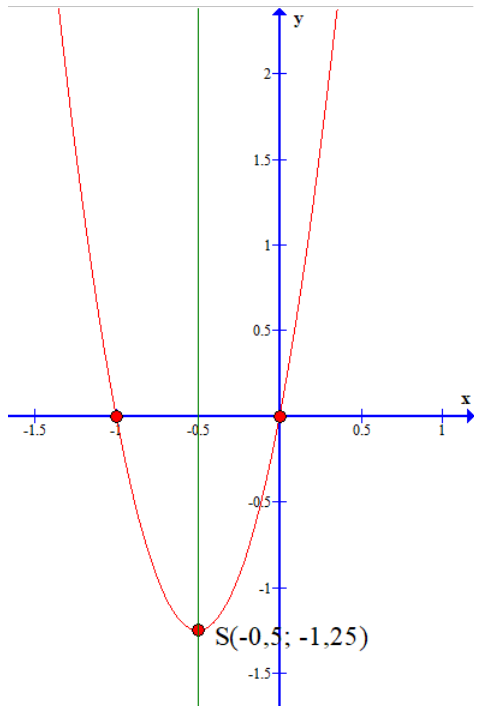
Suy ra hàm số biểu thị quãng đường rơi s theo thời gian t là:

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

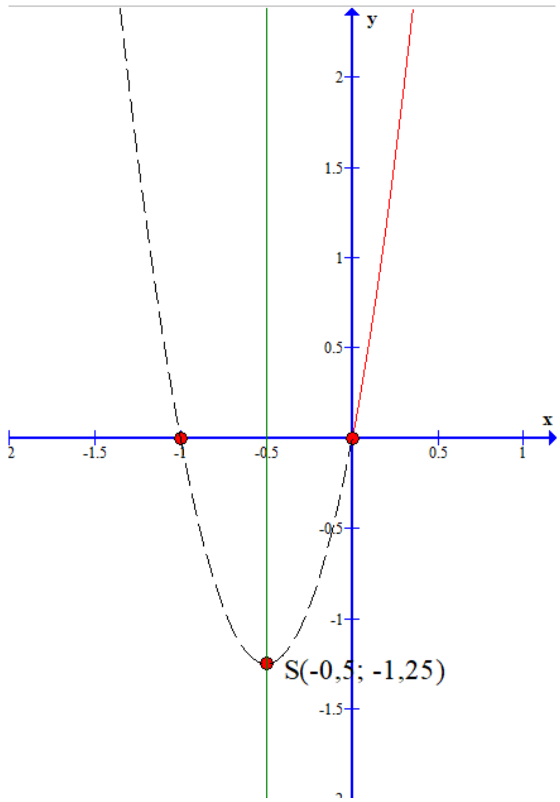
Ta thấy hệ trục tọa độ chọn mốc từ lúc vật bắt đầu rơi, gốc tọa độ ở vật tại thời điểm bắt đầu rơi nên $s_0 = 0$, thời gian là đại lượng không âm nên $t \geq 0$.

Ta vẽ đồ thị hàm số: $s = f(t) = 5t + 5t^2$.

Đồ thị hàm số $s = f(t) = 5t + 5t^2$ trên hệ trục tọa độ Oxy (trục Oy thay cho Os, Ox thay cho Ot) là Parabol có đỉnh S(-0,5; -1,25), trục đối xứng x = -0,5, đi qua các điểm (0; 0) và (-1; 0).



Đồ thị hàm số: $s = f(t) = 5t + 5t^2$ với $t \geq 0$ thì ta chỉ lấy phần $x \geq 0$ của (P) nên ta có phần đồ thị nét liền như hình vẽ dưới đây.



Khi t = 5 thì vật đã rơi được quãng đường là:

s = f(5) = 5. 5 + 5. 5^2 = 150 (m).

Vậy sau 5s thì vật rơi được 150 m.