Các dạng toán về dãy số

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa dãy số

- Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số).

Kí hiệu: $u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$

$n \mapsto u(n).$

Dạng khai triển: $u_1;u_2;u_3;...;u_n;...$

Trong đó ta gọi: u_1 là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ là số thứ n hay số hạng tổng quát của dãy số.

- Mỗi hàm số u xác định trên tập M = {1; 2; 3;... ;m} với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là ***một dãy số hữu hạn***.

Dạng khai triển của nó là $u_1;u_2;u_3;...;u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

- Ba cách cho một dãy số:

+ Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

+ Cho dãy số bằng phương pháp mô tả.

+ Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

b) Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \le M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \ge m, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

Phương pháp giải:

Bài toán 1: Cho dãy số (u_n): u_n = f(n) (trong đó f(n) là một biểu thức của n). Hãy tìm số hạng u_k.

→ Thay trực tiếp n = k vào u_k để tìm.

Bài toán 2: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ (với f(u_n) là một biểu thức của u_n). Hãy tìm số hạng u_k.

→ Tính lần lượt u_2 ;u_3 ;... ;u_k bằng cách thế u_1 vào u_2, thế u_2 vào u_3, …, thế u_{k-1} vào u_k.

Bài toán 3: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k.

→ Tính lần lượt u_3 ;u_4;... ;u_k bằng cách thế u_1; u_2 vào u_3; thế u_2;u_3 vào u_4; … ; thế u_{k-2}; u_{k-1} vào u_k.

Bài toán 4: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(\{n, u_n\}) \end{cases}$. Trong đó f({n; u_n)}) là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n. Hãy tìm số hạng u_k.

→ Tính lần lượt u_2 ;u_3 ;... ;u_k bằng cách thế {1;u_1} vào u_2; thế {2;u_2} vào u_3; … ; thế {k-1;u_{k-1}} vào u_k.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$. Viết năm số hạng đầu của dãy.

Lời giải

Ta có năm số hạng đầu của dãy

$$u_1 = \frac{1^2 + 3.1 + 7}{1 + 1} = \frac{11}{2}$$

$$u_2 = \frac{2^2 + 3.2 + 7}{2 + 1} = \frac{17}{3}$$

$$u_3 = \frac{3^2 + 3.3 + 7}{3 + 1} = \frac{25}{4}$$

$$u_4 = \frac{4^2 + 3.4 + 7}{4 + 1} = 7$$

$$u_5 = \frac{5^2 + 3.5 + 7}{5 + 1} = \frac{47}{6}$$

Vậy năm số hạng đầu của dãy là: $\dfrac{11}{2}; \dfrac{17}{3}; \dfrac{25}{4}; 7; \dfrac{47}{6}$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\left(u_n + 1\right) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11}.

A. $u_{11} = \dfrac{11}{2}$ **B.** $u_{11} = 4$ **C.** $u_{11} = \dfrac{9}{2}$. **D.** $u_{11} = 5$

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1$$

$$u_4 = \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2}$$

$$u_5 = \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2$$

$$u_6 = \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2}$$

$$u_7 = \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3$$

$$u_8 = \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2}$$

$$u_9 = \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4$$

$$u_{10} = \frac{9}{10}(u_9 + 1) = \frac{9}{2}$$

$$u_{11} = \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5$$

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

A. $u_8 = 3050$. **B.** $u_8 = 5003$. **C.** $u_8 = 3500$. **D.** $u_8 = 3005$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$u_3 = 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12$

$u_4 = 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35$

$u_5 = 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111$

$u_6 = 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332$

$u_7 = 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002$

$u_8 = 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005$

Dạng 2: Xét tính tăng giảm của dãy số

Phương pháp giải

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

* Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số

- Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$

- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

+ Không tăng, không giảm khi $q < 0$

+ Giảm khi $0 < q < 1$

+ Tăng khi $q > 1$

- Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn + d > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Tăng khi $ad - bc > 0$

+ Giảm khi $ad - bc < 0$

- Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

- Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số (q^n. u_n) (với q < 0) không tăng, không giảm

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Xét tính tăng, giảm của dãy số sau $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$:

a) $u_n = 3n + 6$

b) $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

c) $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Lời giải

a) Ta có $u_n = 3n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n+9) - (3n+6) = 3 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

b) Ta có $u_n = \dfrac{n+5}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{n+1+5}{n+1+2} = \dfrac{n+6}{n+3}$

Xét hiệu

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+6}{n+3} - \dfrac{n+5}{n+2} = \dfrac{(n+6)(n+2) - (n+5)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0$ (do n là số tự nhiên)

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow u_{n+1} = n + 1 - \sqrt{(n+1)^2 - 1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left[n + 1 - \sqrt{(n+1)^2 - 1}\right] - \left[n - \sqrt{n^2 - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{n + 1 + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 2: Xét tính tăng, giảm của dãy số sau $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$:

a) $u_n = \dfrac{5^n}{n^2}$

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

c) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$

Lời giải

a) Ta có $u_n = \dfrac{5^n}{n^2} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

Xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}.\dfrac{n^2}{5^n} = \dfrac{5n^2}{n^2 + 2n + 1}$

$= \dfrac{n^2 + 2n + 1 + 4n^2 - 2n - 1}{n^2 + 2n + 1}$

$= 1 + \dfrac{2n(n-1) + 2n^2 - 1}{n^2 + 2n + 1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

c) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$

Ta có: $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2 + (n+1) + 1}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1) + 1}}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = \sqrt{\dfrac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Dạng 3: Xét tính bị chặn của hàm số

Phương pháp giải:

- Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n = f(n) \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc

$u_n = f(n) \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Cách 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

Chú ý: Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới

* Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \left(|q| \le 1\right)$ bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \left(q < -1\right)$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với q > 1 bị chặn dưới

Dãy số (u_n) có u_n = an + b bị chặn dưới nếu a > 0 và bị chặn trên nếu a < 0

Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu a > 0 và bị chặn trên nếu a < 0

Dãy số (u_n có $u_n = a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó P(n) và Q(n) là các đa thức, bị chặn nếu bậc của P(n) nhỏ hơn hoặc bằng bậc của Q(n)

Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó P(n) và Q(n) là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của P(n) lớn hơn bậc của Q(n).

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Xét tính bị chặn của dãy số sau (với $\forall n \in \mathbb{N}^*$):

a) $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$

b) $u_n = 3n - 1$

c) $u_n = \frac{n^3}{n^2+1}$

Lời giải

a) $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$

Ta có $u_n = \frac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác $u_n = \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \frac{1}{n+1} \le 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow u_n \le \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $0 < u_n \le \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

b) $u_n = 3n - 1$

Ta có: $n \ge 1 \Leftrightarrow 3n \ge 3 \Leftrightarrow 3n - 1 \ge 2 \Leftrightarrow u_n \ge 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn dưới; không bị chặn trên.

c) $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$

Ta có $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn dưới, không bị chặn trên do bậc của tử cao hơn bậc mẫu.

Ví dụ 2: Xét tính bị chặn của dãy số sau:

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

b) $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

Ta dự đoán dãy số này bị chặn (dùng máy Casio để tính một vài số hạng). Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $-2 \le u_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}*$

Với n = 1 ta có $-2 \le u_1 = 1 \le 1$ (đúng)`

Giả sử mệnh đề trên đúng với $n = k \ge 1$: $-2 \le u_k \le 1$

Ta cần chứng minh mệnh đề trên đúng với n = k + 1

Ta có: $-2 \le u_k \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{1}{2}u_k \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow -2 \le \dfrac{1}{2}u_k - 1 \le -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -2 \le u_{k+1} \le 1$

Theo nguyên lí quy nạp ta đã chứng minh được $-2 \le u_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}*$

Vậy (u_n) bị chặn.

b) $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$

Xét $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k \ge 2$

Suy ra

$$u_n < \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow 0 < u_n < \dfrac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}*$

Vậy (u_n) bị chặn

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{n+1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}.$ **B.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}.$ **C.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}.$ **D.** $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}.$

Câu 2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

A. $u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$

B. $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$

C. $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{8}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$

D. $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{7}{2}, u_5 = \frac{11}{3}$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ khi đó u_5 bằng:

A. 317 **B.** 157 **C.** 77 **D.** 112

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 \end{cases} (n \geq 2)$. Số hạng thứ tư của dãy số đó bằng

A. 0 **B.** 93 **C.** 9 **D.** 34

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}; \, n \geq 2. \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

A. u_8 = - 1803 **B.** u_8 = - 5793 **C.** u_8 = - 18147 **D.** u_8 = - 537

Câu 6. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{5n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Cả A, B, C đều sai

Câu 7. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** $u_{n-1} = \frac{10}{3^n - 1}$

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1)^n(5^n - 1)$. **C.** $u_n = -3^n$. **D.** $u_n = \sqrt{n+4}$.

Câu 9. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào không tăng, không giảm?

A. $u_n = n + \frac{1}{n}$. **B.** $u_n = 5^n + 3n$.

C. $u_n = -3^n$. **D.** $u_n = (-3)^n.\sqrt{n^2+1}$

Câu 10. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+u_n} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng **B.** Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm **D.** Có $u_{10} = 2$

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n + \frac{1}{n}$. **B.** $u_n = n + 1$. **C.** $u_n = \frac{n}{2n^2+1}$. **D.** $u_n = n^2 + n + 1$.

Câu 12. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

A. Tăng, bị chặn trên **B.** Tăng, bị chặn dưới

C. Giảm, bị chặn **D.** Cả A, B, C đều sai

Câu 13. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết: $u_n = \frac{2^n}{n!}$

A. Tăng, bị chặn trên **B.** Tăng, bị chặn dưới

C. Giảm, bị chặn **D.** Cả A, B, C đều sai

Câu 14. Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + ... + \frac{1}{n.(n+2)}$

A. Bị chặn **B.** Không bị chặn **C.** Bị chặn trên **D.** Bị chặn dưới

Câu 15. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}.$$

A. Dãy số tăng, bị chặn **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới

C. Dãy số giảm, bị chặn trên **D.** Cả A, B, C đều sai

Đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	B	D	A	A	B	C	D	B	C	C	C	A	A