CHUYÊN ĐỀ 3. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 3. PARABOL

Trang 57, 58

Khám phá 1 trang 57 Chuyên đề Toán 10:

Chứng tỏ rằng nếu điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên parabol (P) thì điểm $M'(x_0; -y_0)$ cũng nằm trên parabol (P).

Lời giải:

$M(x_0; y_0)$ thuộc (P) thì $y_0^2 = 2px_0$.

Có $(-y_0)^2 = y_0^2 = 2px_0$ nên $M'(x_0; -y_0)$ cũng thuộc (P).

Thực hành 1 trang 58 Chuyên đề Toán 10:

Tìm toạ độ tiêu điểm, toạ độ đỉnh, phương trình đường chuẩn và trục đối xứng của các parabol sau:

a) (P_1): $y^2 = 2x$;

b) (P_2): $y^2 = x$;

c) $(P_3): y^2 = \frac{1}{5}x$.

Lời giải:

a) Có 2p = 2, suy ra p = 1.

Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Toạ độ đỉnh của parabol là O(0; 0).

Phương trình đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{1}{2}$.

Trục đối xứng của parabol là trục Ox.

b) Có 2p = 1, suy ra $p = \frac{1}{2}$.

Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{1}{4};0\right)$.

Toạ độ đỉnh của parabol là O(0; 0).

Phương trình đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{1}{4}$.

Trục đối xứng của parabol là trục Ox.

c) Có $2p = \frac{1}{5}$, suy ra $p = \frac{1}{10}$.

Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{1}{20};0\right)$.

Toạ độ đỉnh của parabol là O(0; 0).

Phương trình đường chuẩn của parabol là $x = -\frac{1}{20}$.

Trục đối xứng của parabol là trục Ox.

Vận dụng 1 trang 58 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(2; 0) và đường thẳng d: x + 2 = 0. Viết phương trình của đường (L) là tập hợp các tâm J(x; y) của các đường tròn (C) thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A và tiếp xúc với d.

Lời giải:

Có $JA = \sqrt{(2-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + y^2}$.

Khoảng cách từ J đến d là: d(J; d) = |x + 2|.

Đường tròn (C) luôn đi qua A và tiếp xúc với d $\Leftrightarrow$ JA = d(J; d)

$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + y^2} = |x+2|$

$\Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 = |x+2|^2$

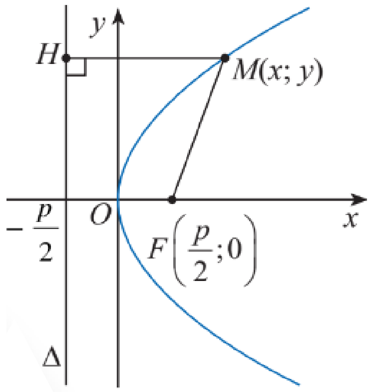
$\Leftrightarrow (4-4x+x^2) + y^2 = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow y^2 = 8x.$

Vậy (L) là một parabol có phương trình $y^2 = 8x$.

Khám phá 2 trang 58 Chuyên đề Toán 10:

Cho điểm M(x; y) trên parabol (P): $y^2 = 2px$ (Hình 2). Tính khoảng cách từ điểm M đến tiêu điểm F của (P).



Hình 2

Lời giải:

Vì M thuộc (P) nên $y^2 = 2px$.

Khoảng cách từ điểm M đến tiêu điểm F là: MF = $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$

$$=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2} \text{ (vì } x+\frac{p}{2}>0).$$

Thực hành 2 trang 58 Chuyên đề Toán 10:

Tính bán kính qua tiêu của điểm dưới đây trên parabol tương ứng:

a) Điểm $M_1(1; -4)$ trên (P_1): $y^2 = 16x$;

b) Điểm $M_2(3; -3)$ trên (P_2): $y^2 = 3x$;

c) Điểm $M_3(4; 1)$ trên (P_3): $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Lời giải:

a) Có 2p = 16, suy ra p = 8.

Bán kính qua tiêu của M_1 là: $FM_1 = x + \frac{p}{2} = 1 + \frac{8}{2} = 5$.

b) Có 2p = 3, suy ra $p = \frac{3}{2}$.

Bán kính qua tiêu của M_2 là: $FM_2 = x + \frac{p}{2} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

c) Có $2p = \frac{1}{4}$, suy ra $p = \frac{1}{8}$.

Bán kính qua tiêu của M_3 là: $FM_3 = x + \frac{p}{2} = 4 + \frac{1}{16} = \frac{65}{16}$.

Trang 59

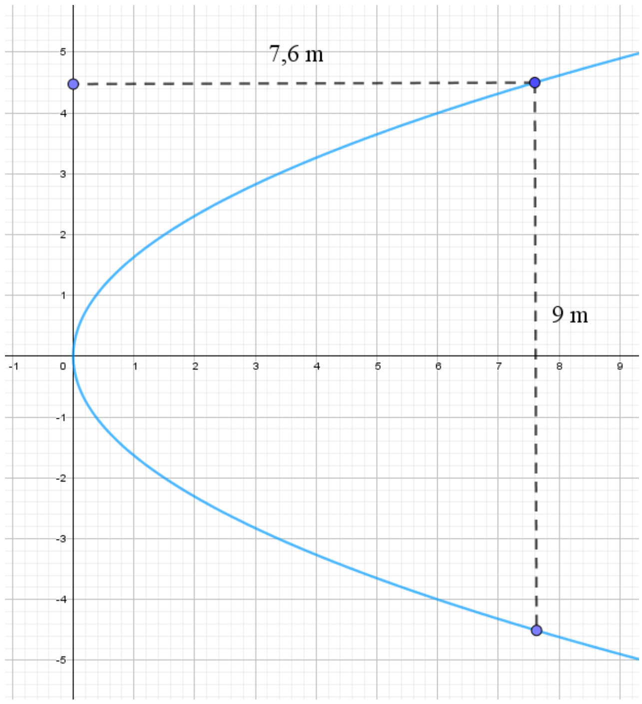
Vận dụng 2 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Một cổng có dạng một đường parabol (P). Biết chiều cao của cổng là 7,6 m và khoảng cách giữa hai chân cổng là 9 m. Người ta muốn treo một ngôi sao tại tiêu điểm F của (P) bằng một đoạn dây nối từ đỉnh S của cổng. Tính khoảng cách từ tâm ngôi sao đến đỉnh cổng.

Hình 3

Lời giải:

Chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc O trùng với đỉnh của parabol và trục Ox trùng với tâm đối xứng của parabol, đơn vị trên hai trục toạ độ là mét.



Giả sử parabol có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Vì chiều cao của cổng là 7,6 m và khoảng cách giữa hai chân cổng là 9 m nên ta có:

khi $x = 7,6$ thì $y = \frac{9}{2} = 4,5 \Rightarrow 4,5^2 = 2p \cdot 7,6 \Rightarrow p = \frac{405}{304}$

$\Rightarrow$ Toạ độ của tâm ngôi sao là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ hay $F\left(\frac{405}{608};0\right)$

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ tâm ngôi sao đến đỉnh cổng là $\frac{405}{608}$ mét.

Vận dụng 3 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Mặt cắt của một chảo ăng-ten có dạng một parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 0,25x$. Biết đầu thu tín hiệu của chảo ăng-ten đặt tại tiêu điểm F của (P). Tính khoảng cách từ điểm M(0,25; 0,25) trên ăng-ten đến F.

Hình 4

Lời giải:

Có 2p = 0,25 $\Rightarrow$ p = 0,125 $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = 0,0625$.

Khoảng cách từ điểm M(0,25; 0,25) trên ăng-ten đến F bằng khoảng cách từ M đến đường chuẩn $x + \frac{p}{2} = 0$ hay x + 0,0625 = 0 của parabol:

$MF = x + \frac{p}{2} = 0,25 + 0,0625 = 0,3125.$

Bài 1 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol sau:

a) (P_1): $y^2 = 7x$;

b) $(P_2): y^2 = \frac{1}{3}x$;

c) $(P_3): y^2 = \sqrt{2}x$.

Lời giải:

a) Có 2p = 7 $\Rightarrow$ p = $\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow$ Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{7}{4};0\right)$, phương trình đường chuẩn của parabol là $x + \frac{7}{4} = 0.$

b) Có 2p = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ p = $\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{1}{12};0\right)$, phương trình đường chuẩn của parabol là $x + \frac{1}{12} = 0.$

a) Có 2p = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ p = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow$ Toạ độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$, phương trình đường chuẩn của parabol là $x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0.$

Bài 2 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Tính bán kính qua tiêu của điểm đã cho trên các parabol sau:

a) Điểm $M_1(3; –6)$ trên (P_1): $y^2 = 12x$;

b) Điểm $M_2(6; 1)$ trên $\left(P_2\right): y^2=\frac{1}{6}x$;

c) Điểm $M_3(\sqrt{3};\sqrt{3})$ trên $\left(P_3\right): y^2=\sqrt{3}x$.

Lời giải:

a) Có 2p = 12, suy ra p = 6.

Bán kính qua tiêu của M_1 là: $FM_1 = x + \frac{p}{2} = 3 + \frac{6}{2} = 6$.

b) Có $2p = \frac{1}{6}$, suy ra $p = \frac{1}{12}$.

Bán kính qua tiêu của M_2 là: $FM_2 = x + \frac{p}{2} = 6 + \frac{1}{24} = \frac{145}{24}$.

b) Có $2p = \sqrt{3}$, suy ra $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính qua tiêu của M_3 là: $FM_3 = x + \frac{p}{2} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(\frac{1}{4}; 0)$ và đường thẳng $d: x+\frac{1}{4}=0$. Viết phương trình của đường (P) là tập hợp tâm M(x; y) của các đường tròn (C) di động nhưng luôn luôn đi qua A và tiếp xúc với d.

Lời giải:

Có MA = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x\right)^2+(0-y)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-x\right)^2+y^2}$.

Khoảng cách từ M đến d là: d(M; d) = $\left|x+\frac{1}{4}\right|$.

Đường tròn (C) luôn đi qua A và tiếp xúc với d $\Leftrightarrow$ MA = d(M; d)

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{4}-x\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{1}{4}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}-x\right)^2+y^2=\left|x+\frac{1}{4}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{16}-\frac{x}{2}+x^2\right)+y^2=x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow y^2=x.$$

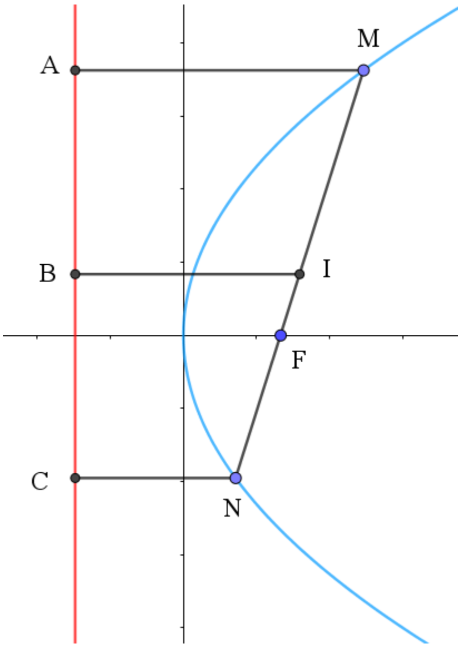
Vậy (P) là một parabol có phương trình $y^2 = 8x$.

Bài 4 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Cho parabol (P). Trên (P) lấy hai điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN đi qua tiêu điểm F của (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của đoạn thẳng MN đến đường chuẩn Δ của (P) bằng $\frac{1}{2}MN$ và đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ.

Lời giải:

Giả sử parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ (p > 0).



Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M, I, N lên Δ.

Vì I là trung điểm của MN nên IB là đường trung bình của hình thang MACN

$\Rightarrow IB = \frac{1}{2}(MA + CN) = \frac{1}{2}(MF + CF) = \frac{1}{2}MN.$

$\Rightarrow$ Đường tròn đường kính MN chính là đường tròn tâm I, bán kính IB

Lại có Δ vuông góc với IB tại B

$\Rightarrow$ đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ tại B.

Bài 5 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Hãy so sánh bán kính qua tiêu của điểm M trên parabol (P) với bán kính của đường tròn tâm M, tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

Lời giải:

Giả sử parabol (P) có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ (p > 0).

Gọi toạ độ của M là (x; y).

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ là tiêu điểm của (P), H là hình chiếu của M lên đường chuẩn Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$ của (P).

Khi đó:

$MF = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - px + x^2 + 2px} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + px + x^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$

$MH = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$

Vậy MF = MH, mặt khác MH chính là bán kính của đường tròn tâm M, tiếp xúc với đường chuẩn của (P), do đó bán kính qua tiêu của điểm M trên parabol (P) bằng bán kính của đường tròn tâm M, tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

Bài 6 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Một sao chổi A chuyển động theo quỹ đạo có dạng một parabol (P) nhận tâm Mặt Trời là tiêu điểm. Cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là khoảng 112 km.

a) Viết phương trình chính tắc của parabol (P).

b) Tính khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P).

Lời giải:

a) Chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc toạ độ O trùng với đỉnh của parabol, tâm Mặt Trời trùng với tiêu điểm của parabol, đơn vị trên các trục là kilômét.

Gọi phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Gọi F là tiêu điêm của (P), (x; y) là toạ độ của sao chổi A.

Khi đó khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là AF = $x + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2}$ (vì $x \geq 0$)

$\Rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời là $\frac{p}{2}$ (km)

$\Rightarrow \frac{p}{2} = 112 \Rightarrow p = 224.$

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 448x$.

b) Khi sao chổi nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục đối xứng của (P) thì sao chổi có hoành độ là $x = \frac{p}{2}$.

Khoảng cách giữa sao chổi A và tâm Mặt Trời khi đó là:

AF = $x + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p = 224$ (km).

Bài 7 trang 59 Chuyên đề Toán 10:

Mặt cắt của gương phản chiếu của một đèn pha có dạng một parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 6x$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;\sqrt{6})$ trên gương đến tiêu điểm của (P) (với đơn vị trên hệ trục toạ độ là xentimét).

Lời giải:

Có 2p = 6, suy ra p = 3.

Khoảng cách từ điểm $M(1;\sqrt{6})$ trên gương đến tiêu điểm của (P) là:

MF = $x + \frac{p}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm).