

Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số lượng giác

1. Lý thuyết

a. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- Tập giá trị: $[-1;1]$

b. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- Tập giá trị: $[-1;1]$

c. Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Tập giá trị: \mathbb{R}

d. Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

- Tập giá trị: \mathbb{R}

2. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

- Phương pháp giải:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ xác định khi } g(x) \neq 0$$

$$y = \sqrt{f(x)} \text{ xác định khi } f(x) \geq 0$$

$$y = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \text{ xác định khi } g(x) > 0$$

$$y = \tan[u(x)] \text{ xác định khi } u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \cot[u(x)] \text{ xác định khi } u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x \neq 0 \text{ khi } x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x \neq 0 \text{ khi } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

- Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số sau

a) $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \sqrt{2 - \sin x}$

Lời giải

a) $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)}$

Điều kiện xác định: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) Điều kiện xác định: $2 - \sin x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \leq 2 \text{ (đúng } \forall x \in \mathbb{R} \text{) vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số sau

a) $y = \frac{2}{\sin x - \cos x}$

b) $y = \frac{\tan 3x}{2\sin x + 1} + \cot(x-1)$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \cos x \text{ (*)}$

+ Trường hợp 1: $\cos x = 0$. Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$.

Hiển nhiên $\sin x \neq \cos x$.

+ Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia cả hai vế cho $\cos x$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \neq 1 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) Vì $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ và $\cot(x-1) = \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}$

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin x \neq \frac{-1}{2} \\ \sin(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x-1 \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq 1 + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq 1 + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; 1 + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Dạng 2. Tìm tập giá trị của hàm số lượng giác

- *Phương pháp giải:*

Sử dụng tính bị chặn của hàm số lượng giác

$$-1 \leq \sin[u(x)] \leq 1; 0 \leq \sin^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\sin[u(x)]| \leq 1$$

$$-1 \leq \cos[u(x)] \leq 1; 0 \leq \cos^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\cos[u(x)]| \leq 1$$

- *Ví dụ minh họa:*

Ví dụ 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin 3x - 5$

b) $y = 2\sin^2\left(x^2 - \frac{\pi}{12}\right) + 5$

c) $y = |\cos(3x-2)| + 4$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2\sin 3x \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -7 \leq 2\sin 3x - 5 \leq -3 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị: $T = [-7; -3]$.

b) Ta có: $0 \leq \sin^2 \left(x^2 - \frac{\pi}{12} \right) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sin^2 \left(x^2 - \frac{\pi}{12} \right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 2\sin^2 \left(x^2 - \frac{\pi}{12} \right) + 5 \leq 7 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị: $T = [5; 7]$.

c) Ta có: $0 \leq |\cos(3x - 2)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 4 \leq |\cos(3x - 2)| + 4 \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị: $T = [4; 5]$.

Ví dụ 2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\sin x + 1} - 2$

b) $y = \cos 2x + 4\sin x + 1$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\sin x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\sin x + 1} \leq \sqrt{2} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{\sin x + 1} - 2 \leq \sqrt{2} - 2 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị: $T = [-2; \sqrt{2} - 2]$.

b) $y = \cos 2x + 4\sin x + 1 = 1 - 2\sin^2 x + 4\sin x + 1 = -2\sin^2 x + 4\sin x + 2 = -2(\sin x - 1)^2 + 4$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq -2(\sin x - 1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -2(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị: $T = [-4; 4]$.

Dạng 3. Tìm m để hàm số lượng giác có tập xác định là \mathbb{R}

- Phương pháp giải:

$$m \geq f(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow m \geq \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

$$m > f(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow m > \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

$$m \leq f(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow m \leq \min_{x \in [a; b]} f(x)$$

$$m < f(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow m < \min_{x \in [a; b]} f(x)$$

- Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{\sin x + m}$ xác định trên \mathbb{R} .

Lời giải

Để hàm số xác định trên \mathbb{R} thì $\sin x + m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq -\sin x \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $m \geq 1$.

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m}$ xác định trên \mathbb{R} .

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m} = \sqrt{(\sin x - 1)^2 + m - 1}$$

Hàm số xác định trên \mathbb{R} khi

$$(\sin x - 1)^2 + m - 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 1 - (\sin x - 1)^2 \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 1 - (\sin x - 1)^2 \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $m \geq 1$.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

- A. \mathbb{R} B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D.
 $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 1}$ là:

- A. $D = [-1; +\infty)$ B. $D = \mathbb{R}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $D = (-\infty; -1]$

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3\sin x}{2\cos x - \sqrt{3}}$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D.
 $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2021}{1 - \tan x} + \sin^2 x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x-1}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1-\cos 3x}{1+\sin 4x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 8. Hàm số nào dưới đây có tập xác định là \mathbb{R} ?

A. $y = \sin x + \cot 5x$ B. $y = \frac{\tan 3x}{\sin^2 x + 1}$ C. $y = 2\cos\sqrt{x}$ D. $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $y = 1 - 2|\sin 2x|$ là

A. $[1;3]$

B. $[-1;1]$

C. $[-1;3]$

D. $[-1;0]$

Câu 10. Tập giá trị của hàm số $y = 3 + \sqrt{1 - \sin^2 3x}$ là

A. $[2;3]$

B. $[1;2]$

C. $[2;4]$

D. $[3;4]$

Câu 11. Tập giá trị của hàm số $y = 2 + \sin x \cos x$ có dạng $T = [m;M]$. Giá trị của m là:

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. 1

Câu 12. Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin 3x + 1$ là

A. $[-1;1]$

B. $[-5;7]$

C. $[0;2]$

D. $[-1;3]$

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{\sin x - m}$ xác định trên \mathbb{R} .

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

C. $m \neq 1$

D. $m \in [-1; 1]$

Câu 14. Hàm số $y = \frac{2 - \sin 2x}{\sqrt{2\cos x + m - 1}}$ có tập xác định \mathbb{R} khi và chỉ khi:

A. $m > 3$

B. $m < -1$

C. $m \geq 3$

D. $m \leq -1$

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y = \sqrt{\sin^2 x - 4\cos x + 2m - 1}$ có tập xác định là \mathbb{R} .

A. $m \geq -\frac{3}{2}$

B. $m \geq \frac{5}{2}$

C. Không có m thỏa mãn

D. $m \geq 5$

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	D	B	C	B	C	A	D	B	D	B	D	A	A	B