Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

I. Lý thuyết ngắn gọn

1. Các khái niệm

- Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

- Mặt phẳng:

Ví dụ: mặt bảng, mặt bàn, cho ta một phần của mặt phẳng.

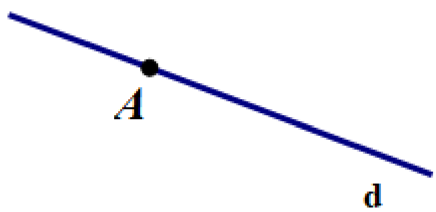
Biểu diễn mặt phẳng: ta thường dùng các hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.

Kí hiệu: Mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q)

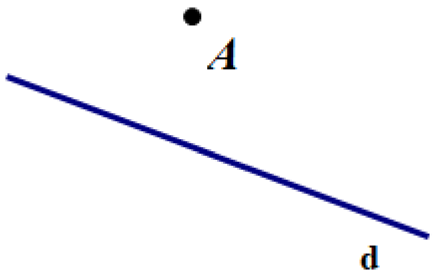
- Quan hệ thuộc trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:

+ Điểm A thuộc đường thẳng d, kí hiệu $A \in d$.

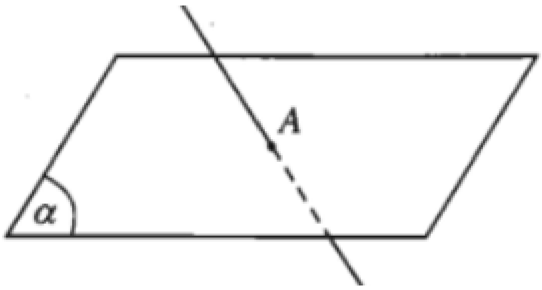


+ Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin d$.

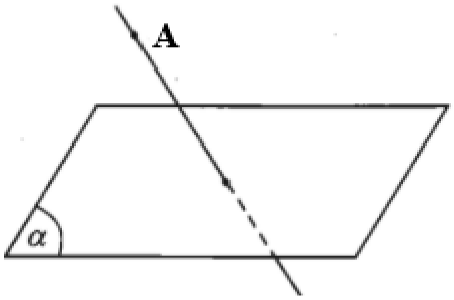


b. Với một điểm A và một mặt phẳng (α) có thể xảy ra hai trường hợp:

+ Điểm A thuộc mặt thẳng (α), kí hiệu A ∈ (α).



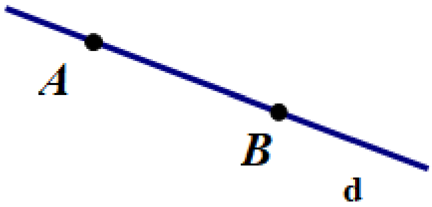
+ Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu A ∉ (α).



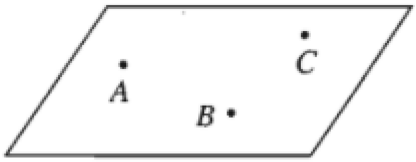
- Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian:
+ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
+ Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
+ Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
+ Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

2. Các tính chất thừa nhận

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

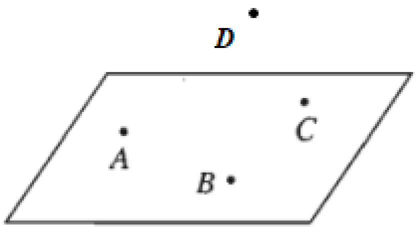


- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.



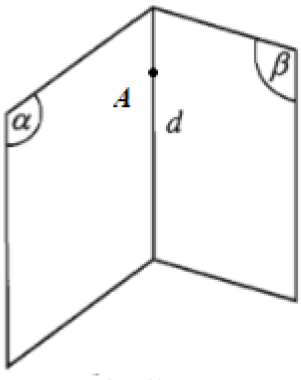
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

- Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.



- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

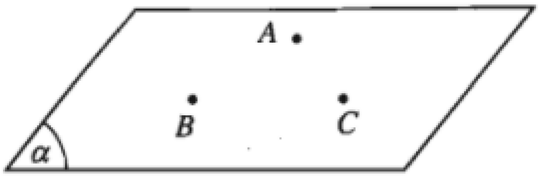


- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3. Các cách xác định một mặt phẳng: 3 cách

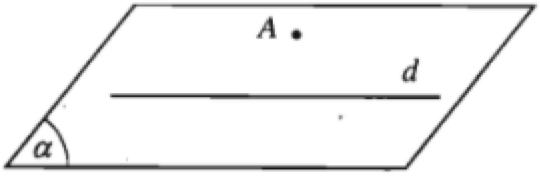
a. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C kí hiệu là: mp (ABC) hoặc (ABC).



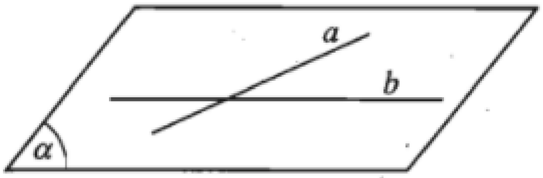
b. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d, khi đó ta xác định được mặt phẳng, kí hiệu là: mp (A, d) hay (A, d).



c. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là: mp (a, b) hay (a, b), hoặc mp (b, a) hay (b, a).



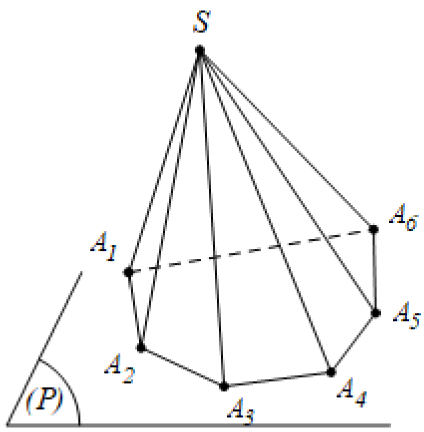
4. Hình chóp và hình tứ diện

a. Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là mặt đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên.

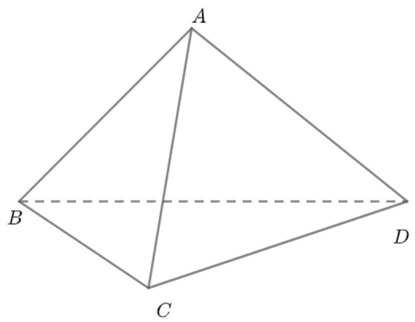
Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác,… thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…



b. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và BCD được gọi là tứ diện ABCD.

Các điểm A, B, C, D được gọi là các đỉnh của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện. Hai cạnh không có điểm chung gọi là hai cạnh đối diện. Các tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là các mặt của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

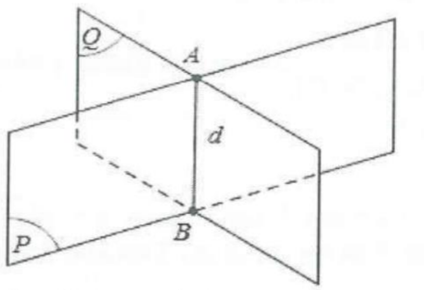


II. Các dạng bài về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải:

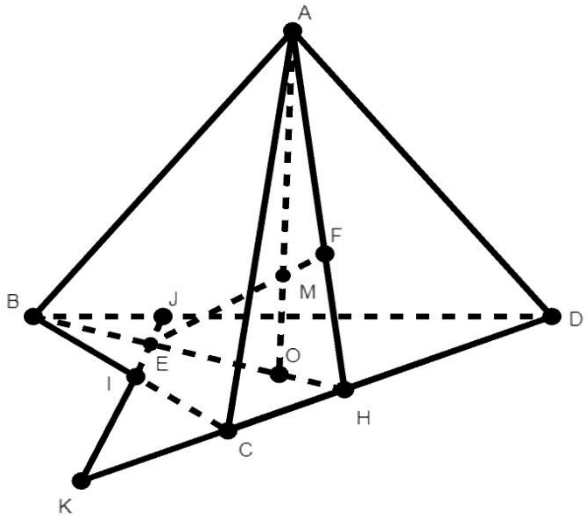
Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) thường được tìm như sau:
Tìm hai đường thẳng a và b lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và (Q) cùng nằm trong một mặt phẳng (R). Giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của mặt phẳng (P) và (Q).

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi O là một điểm bên trong tam giác BCD và M là một điểm trên AO. Gọi I, J là hai điểm trên BC, BD. Giả sử IJ cắt CD tại K, BO cắt IJ tại E và cắt CD tại H, ME cắt AH tại F. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MIJ) và (ACD).



Lời giải:

Do K là giao điểm của IJ và CD nên $K \in (MIJ) \cap (ACD)$ (1)

Ta có F là giao điểm của ME và AH

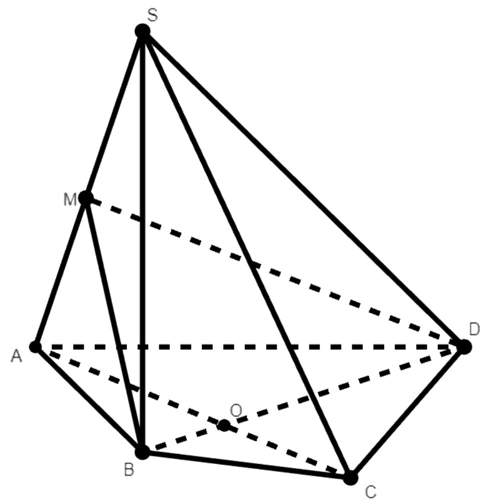
Mà $AH \subset (ACD), ME \subset (MIJ)$ nên $F \in (MIJ) \cap (ACD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(MIJ) \cap (ACD) = KF$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng:

a. (SAC) và (SBD);

b. (SAC) và (MBD).



Lời giải:

a. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Suy ra: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

Lại có:

$S \in (SAC) \cap (SBD)$

Do đó: $SO = (SAC) \cap (SBD)$

b.

$O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$

Lại có: $\begin{cases} M \in SA \subset (SAC) \\ M \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (MBD)$

Do đó: $OM = (SAC) \cap (MBD)$

Dạng 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp giải: Cơ sở của phương pháp tìm giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là xét hai khả năng xảy ra:

TH1: (α) chứa đường thẳng Δ và Δ cắt đường thẳng d tại I

Khi đó: $I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

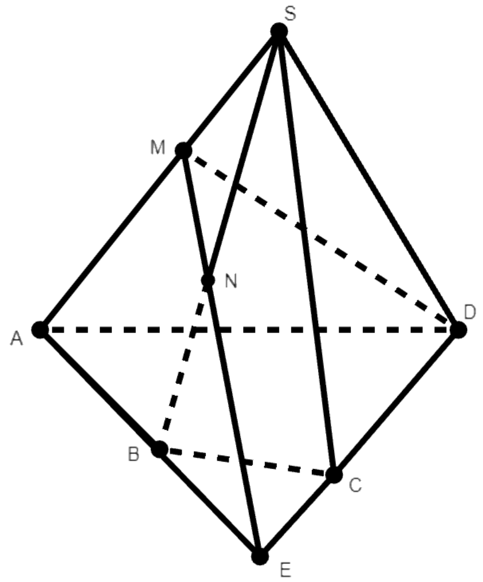
TH2: (α) không chứa đường thẳng nào cắt d

+ Tìm $(\beta) \supset d, (\alpha) \cap (\beta) = \Delta$

+ Tìm $I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với đáy ABCD có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA. Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).



Lời giải:

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi E là giao điểm AB và CD.

Trong mặt phẳng (SAB) gọi N là giao điểm của ME và SB.

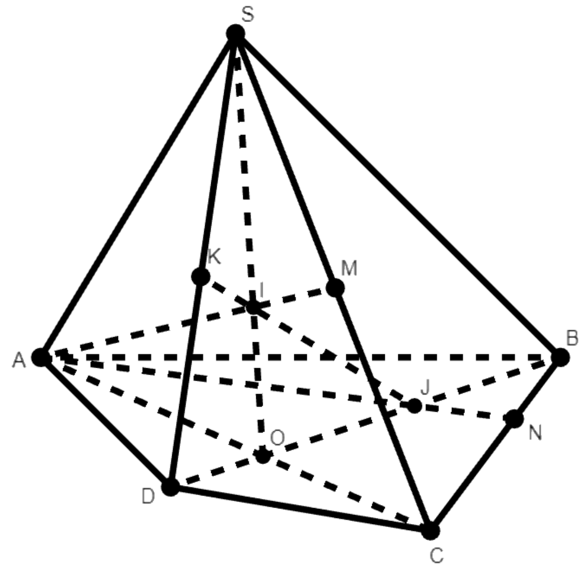
Ta có: $N \in EM \subset (MCD)$ (Do $E \in CD \subset \left(MCD\right)$ nên $ME \subset \left(MCD\right)$)

$\Rightarrow N \in (MCD)$

Mà $N \in SB$.

Nên $N = SB \cap (MCD)$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, M là một điểm trên cạnh SC, N trên BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).



Lời giải:

Trong mặt phẳng (ABCD) gọi O là giao điểm AC và BD, J là giao điểm AN và BD

Trong (SAC) gọi I là giao điểm SO và AM

Trong (SBD), gọi K là giao điểm IJ và SD

Ta có: $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$

$\Rightarrow IJ \subset (AMN)$

Do đó: $K \in IJ \subset (AMN)$

$\Rightarrow K \in (AMN)$ mà $K \in SD$

Vậy $K = SD \cap (AMN)$.

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

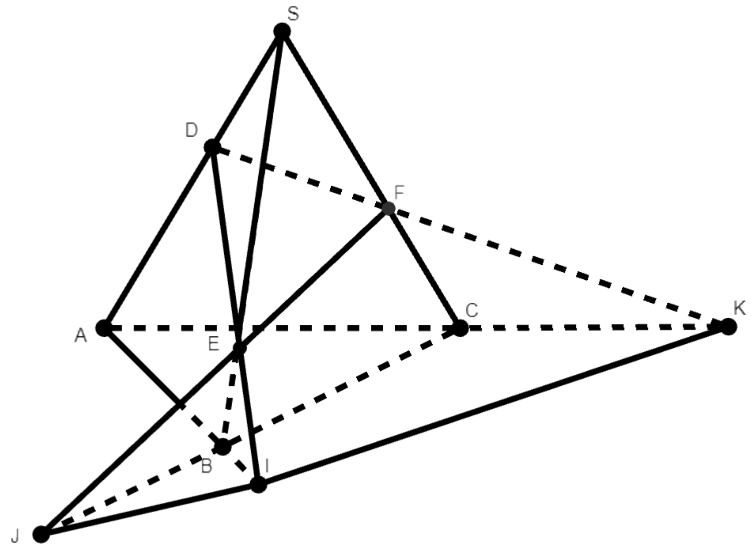
Phương pháp giải:

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chỉ ra đó là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng phân biệt.

- Để chứng minh ba đường thẳng dồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường thẳng còn lại.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 5: Cho tứ diện S.ABC. Trên SA, SB, SC lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



Lời giải:

Ta có: $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$

Lại có $I \in AB \subset \left(ABC\right) \Rightarrow I \in (ABC)$

Tương tự:

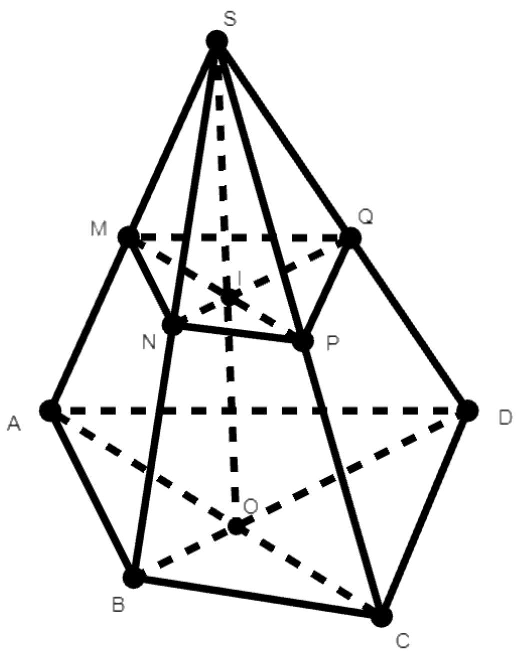
+) $J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \subset (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$

+) $K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$

Do đó: I, J, K là các điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng trên.

Vậy I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 6: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh MP, NQ, SO đồng quy.



Lời giải:

Trong mặt phẳng (MNPQ) gọi I là giao điểm của MP và NQ.

Ta sẽ chứng minh $I \in SO$

Dễ thấy: $SO = (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in \left(SAC\right) \cap \left(SBD\right) (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I \in SO$

Vậy MP, NQ, SO đồng quy.

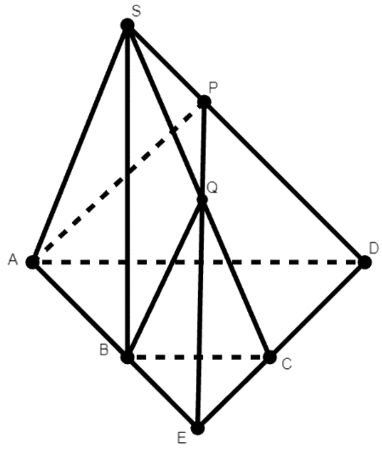
Dạng 4: Tìm thiết diện

Phương pháp giải: Muốn tìm thiết diện của (P) với hình chóp, ta dùng 1 trong 2 cách:

- Cách 1: Tìm giao tuyến của (P) với từng mặt của hình chóp
- Cách 2: Tìm giao điểm của (P) với từng cạnh của hình chóp

Ví dụ minh họa

Ví dụ 7: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?



Lời giải:

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi E là giao điểm của AB và CD

Trong mặt phẳng (SCD), gọi Q là giao điểm của SC và EP

Ta có:

$E \in AB \Rightarrow EP \subset (ABP)$

Mà $Q \in EP \Rightarrow Q \in (ABP)$

Do đó: $Q = SC \cap (ABP)$

Khi đó ta có:

$\left(PAB\right) \cap \left(SAD\right) = PA$

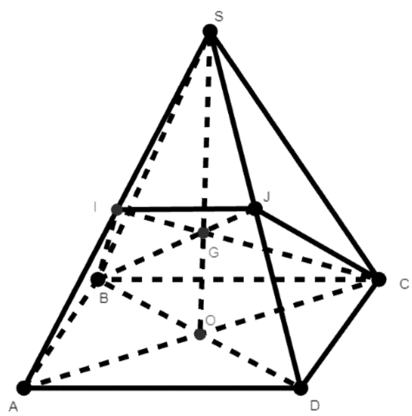
$\left(PAB\right) \cap \left(ABCD\right) = AB$

$\left(PAB\right) \cap \left(SCD\right) = PQ$

$\left(PAB\right) \cap \left(SBC\right) = BQ$

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là tứ giác ABQP.

Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình gì ?



Lời giải:

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng (SAC), gọi G là giao điểm của CI và SO.

Vì O là trung điểm của AC (tính chất đường chéo hình bình hành ABCD) và I là trung điểm của SA nên SO và CI là hai đường trung tuyến trong tam giác SAC.

Khi đó G là trọng tâm tam giác SAC.

$$\Rightarrow SG = \frac{2}{3}SO$$

Suy ra G là trọng tâm tam giác SBD.

Trong mặt phẳng (SBD), gọi J là giao điểm của BG và SD.

Khi đó J là trung điểm của SD.

Ta có:

$$\left(IBC\right) \cap \left(ABCD\right) = BC$$

$$\left(IBC\right) \cap \left(SAB\right) = IB$$

$$\left(IBC\right) \cap \left(SAD\right) = IJ$$

$$\left(IBC\right) \cap \left(SCD\right) = JC$$

Nên thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (IBC) là tứ giác IJCB.

Ta lại có: IJ là đường trung bình của tam giác SAD (Vì I, J lần lượt là trung điểm của SA và SD) $\Rightarrow$ IJ // AD

Mà AD // BC (hình bình hành ABCD)

Do đó: IJ // BC.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi (IBC) là hình thang IJCB.

III. Bài tập áp dụng

1. Tự luận

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD. Điểm C′ nằm trên cạnh SC. Thiết diện của hình chóp với mp (ABC′) là một đa giác có bao nhiêu cạnh?

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và điểm M ở trên cạnh SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

Bài 4: Cho tứ diện ABCD, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC).

2. Trắc nghiệm

Bài 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng a. Trong (P) lấy hai điểm A, B, nhưng không thuộc a và S là một điểm không thuộc (P). Các đường thẳng SA, SB cắt (Q) tương ứng tại các điểm C, D. Gọi E là giao điểm của AB và a. Khẳng định nào đúng?

A. AB, CD và a đồng quy

B. AB, CD và a chéo nhau

C. AB, CD và a song song nhau

D. AB, CD và a trùng nhau

Bài 2: Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A. Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Bài 3: Cho tứ giác lồi ABCD và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABCD). Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng được xác định bởi các điểm A, B, C, D, S?

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C

B. I, B, D

C. I, A, B

D. I, C, D

Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng qua MN cắt tứ diện ABCD theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (T) là hình chữ nhật

B. (T) là tam giác

C. (T) là hình thoi

D. (T) là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SAC) và (SBD)

b. (SAC) và (MBD)

c. (MBC) và (SAD)

d. (SAB) và (SCD)