Ôn tập chương I

A. Lý thuyết

1. Mệnh đề

- Những khẳng định có tính hoặc đúng hoặc sai được gọi là mệnh đề logic (hay mệnh đề).

- Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai.

- Một khẳng định đúng gọi là mệnh đề đúng.

- Một khẳng định sai gọi là mệnh đề sai.

- Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý:

+ Người ta thường sử dùng các chữ cái in hoa P, Q, R, … để kí hiệu các mệnh đề.

+ Những mệnh đề liên quan đến toán học được gọi là mệnh đề toán học.

2. Mệnh đề chứa biến

- Mệnh đề chứa biến là mệnh đề chưa khẳng định được tính đúng sai, cần có giá trị cụ thể của biến mới có thể khẳng định tính đúng sai của mệnh đề đó.

- Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến n là P (n).

- Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

3. Mệnh đề phủ định

- Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\overline{P}$.

- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\overline{P}$ sai, khi P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Nhận xét:

+ Thông thường để phủ định một mệnh đề, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

4. Mệnh đề kéo theo

- Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Nhận xét:

+ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

+ Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai. Ta đã quen với điều này khi chứng minh nhiều định lí ở Trung học cơ sở.

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Chú ý: Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$ (đọc là "P tương đương Q" hoặc "P khi và chỉ khi Q").

- Khi đó ta cũng nói P là điều kiện cần và đủ để có Q (hay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

Nhận xét: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

6. Mệnh đề chứa kí hiệu ∀ và ∃

- Kí hiệu ∀ đọc là "với mọi".

- Kí hiệu ∃ đọc là "tồn tại".

- Mệnh đề "$\forall x \in M, P(x)$" đúng nếu với mọi $x_0 \in M$, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

- Mệnh đề "$\exists x \in M, P(x)$" đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

7. Nhắc lại về tập hợp

- Trong toán học, người ta dùng từ **tập hợp** để chỉ một nhóm đối tượng nào đó hoàn toàn xác định. Mỗi đối tượng trong nhóm gọi là một phần tử của tập hợp đó.

- Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa A, B, C, … và kí hiệu phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường a, b, c, ….

Chú ý: Đôi khi, để ngắn gọn, người ta dùng từ "tập" thay cho "tập hợp".

- Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là "a thuộc A"). Để chỉ a không là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là "a không thuộc A").

- Một tập hợp có thể không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là tập rỗng, kí hiệu $\emptyset$.

- Người ta thường kí hiệu các tập hợp số như sau: $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên, $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên, $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

***Cách xác định tập hợp**

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp;

Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

Chú ý: Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

+ Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tùy ý.

+ Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.

+ Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "…" mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.

- Có những tập hợp ta có thể đếm hết các phần tử của chúng. Những tập hợp như vậy được gọi là tập hợp hữu hạn.

8. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

- Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói tập hợp A là tập con của tập hợp B và kí hiệu $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B), hoặc $B \supset A$ (đọc là B chứa A).

Nhận xét:

+ $A \subset A$ và $\emptyset \subset A$ với mọi tập hợp A.

+ Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là A không chứa trong B hoặc B không chứa A).

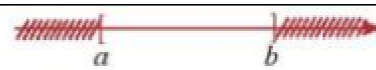
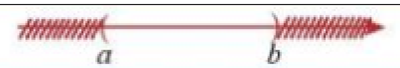
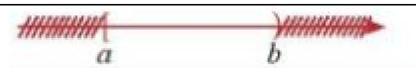
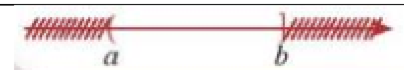
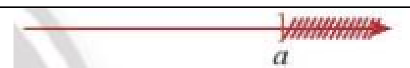
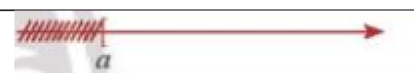
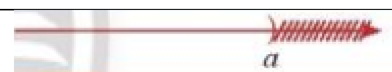
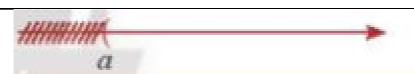
+ Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.

- Trong toán học, người ta thường minh họa một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường cong kín, gọi là biểu đồ Ven.

Chú ý: Giữa các tập hợp số quen thuộc (tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ, tập số thực), ta có quan hệ bao hàm: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

9. Một số tập con của tập hợp số thực

- Ta thường sử dụng các tập con của tập số thực sau đây (a và b là các số thực, a < b):

Tên gọi và kí hiệu	**Tập hợp**	**Biểu diễn trên trục số**
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

- Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (âm vô cùng), kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (dương vô cùng).

10. Hợp và giao của các tập hợp

- Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B gọi là hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Tập hợp các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Nhận xét:

+ Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

+ Đặc biệt, nếu A và B không có phần tử chung, tức $A \cap B = \emptyset$, thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

11. Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con

- Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B, kí hiệu A\B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu A là tập con của E thì hiệu E\A gọi là phần bù của A trong E, kí hiệu C_EA.

Chú ý: Trong các chương sau, để tìm các tập hợp là hợp, giao, hiệu, phần bù của những tập con của tập số thực, ta thường vẽ sơ đồ trên trục số.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai mệnh đề phủ định đó:

a) P: "Số 22 chia hết cho 6".

b) P: "5 là một số nguyên tố".

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P: "Số 22 chia hết cho 6" là $\overline{P}$: "Số 22 không chia hết cho 6". Mệnh đề phủ định này là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P: "5 là một số nguyên tố" là $\overline{P}$: "5 không là một số nguyên tố". Mệnh đề phủ định này là mệnh đề sai.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC có ba góc bằng nhau".

Q: "Tam giác ABC là tam giác đều".

Hai mệnh đề P và Q có tương đương nhau không? Nếu có, phát biểu bằng nhiều cách?

Hướng dẫn giải

$P \Rightarrow Q$: "Tam giác ABC có ba góc bằng nhau thì tam giác ABC là tam giác đều". Do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng.

$Q \Rightarrow P$: "Tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC có ba góc bằng nhau". Do đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ đúng.

P và Q là hai mệnh đề tương đương nhau bởi hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Phát biểu nhiều cách:

- Tam giác ABC có ba góc bằng nhau tương đương tam giác ABC là tam giác đều.
- Tam giác ABC có ba góc bằng nhau khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

+ Để tam giác có ba góc bằng nhau, điều kiện cần và đủ là tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 3. Phát biểu và xét mệnh đề đúng hay sai, viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 < 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x > 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phát biểu mệnh đề: "Mọi số nguyên đều có bình phương nhỏ hơn 0". Đây là mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$".

b) Phát biểu mệnh đề: “Tồn tại số nguyên lớn hơn 0”. Đây là mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định là: “$\forall x \in \mathbb{Z}, x < 0$”.

Bài 4. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng, mệnh đề sai, mệnh đề chứa biến?

a) “4 là số vô tỉ”.

b) “5 chia hết cho y”.

c) “Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường”.

d) “Hồ Tây thật đẹp!”

Hướng dẫn giải

a) “4 là số vô tỉ”: đây là mệnh đề và là mệnh đề sai vì đây là khẳng định sai.

b) “5 chia hết cho y”: đây là mệnh đề chứa biến vì khi y = 1 thì đây là khẳng định đúng, nhưng khi y = 2 thì đây là khẳng định sai.

c) “Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường”: đây là mệnh đề đúng.

d) “Hồ Tây thật đẹp!”: đây là câu cmar thán nên không phải là mệnh đề.

Bài 5. Hãy viết tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp:

a) A = {0; 3; 6; 9}.

b) B = {14; 23; 34; 47}.

Hướng dẫn giải

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 3, x < 10\}$.

b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 2, 3 < n < 8\}$.

Bài 5. Cho A = {3; 4; 5; 6; 7}, B = {1; x}, C = {7; y}, D = {m, n}. Tìm x, y, m, n (nếu có) để:

a) B = C = D.

b) $C = D \subset A$ và $y > 4$.

Hướng dẫn giải

a) Để B = C thì tập B phải có phần tử 7 và tập C phải có phần tử 1.

Do đó x = 7 và y = 1. Khi đó B = C = {1; 7}.

Để D = B = C thì D = {1; 7}. Vậy m = 1, n = 7 hoặc m = 7, n = 1.

b) Để $C \subset A$ thì tập C có các phần tử giống phần tử nằm trong tập A.

Suy ra y có thể bằng 3; 4; 5; 6. Mà y > 4 nên y chỉ có thể bằng 5 hoặc 6.

+ Nếu y = 5 thì để D = C thì C = D = {7; 5}. Vậy m = 5, n = 7 hoặc m = 7, n = 5.

+ Nếu y = 6 thì để D = C thì C = D = {7; 6}. Vậy m = 7, n = 6 hoặc m = 6, n = 7.

Bài 6. Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng viết tập hợp sau và vẽ tập đó trên trục số: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 4\}$.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu: [–1; 4]. Biểu diễn trên trục số:

Bài 7. Xác định tập hợp $A \cap B$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 5, x < 30\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 6, x < 30\}$.

b) $A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$, $B = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, 4 < x < 6\}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta xác định các phần tử của tập hợp A và tập hợp B.

A = {0; 5; 10; 15; 20; 25}.

$B = \{0; 6; 12; 18; 24\}$.

Suy ra $A \cap B = \{0\}$.

b) Ta xác định các phần tử của tập hợp A và tập hợp B.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

$B = \{4\}$.

Suy ra $A \cap B = \{4\}$.

Bài 8. Cho $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\}$, $A = \{x \in U \mid x$ là bội của $4\}$, $B = \{x \in U \mid x$ là ước của $12\}$. Xác định các tập hợp $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_U A$, $C_U B$, $A \cap B$, $A \cup B$.

Hướng dẫn giải

Ta xác định các phần tử của tập hợp U, A, B.

$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\} = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

$A = \{x \in U \mid x$ là bội của $4\} = \{4; 8\}$.

$B = \{x \in U \mid x$ là ước của $12\} = \{4; 6\}$.

Khi đó ta có:

$A \setminus B = \{8\}$.

$B \setminus A = \{6\}$.

$C_U A = \{5; 6; 7\}$.

$C_U B = \{5; 7; 8\}$.

$A \cap B = \{4\}$, $A \cup B = \{4; 6; 8\}$.

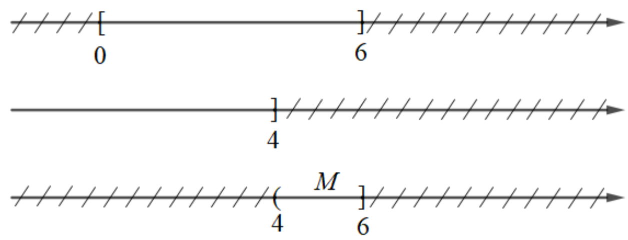
Bài 9. Xác định các tập hợp sau đây:

a) $M = (0; 6] \setminus (-\infty; 4]$.

b) $N = [-5; 5] \cap (-\infty; 3]$.

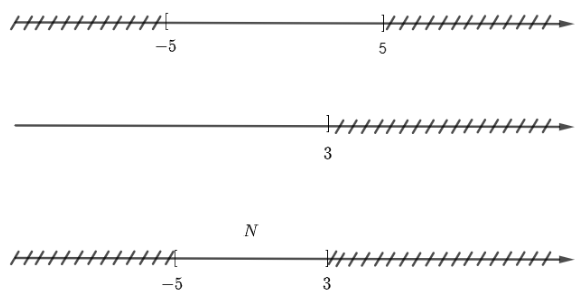
Hướng dẫn giải

a) Để xác định tập M, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ ta thấy, M = (4; 6].

b) Để xác định tập N, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ ta thấy, N = [-5; 3].

Bài 10. Lớp 10E của trường có 25 học sinh thích môn Vật lí, 15 học sinh thích môn Hóa học và 10 học sinh thích cả môn Vật lí và Hóa học và 5 học sinh không thích cả hai môn Vật lí và Hoá học. Hỏi lớp 10A có:

a) Bao nhiêu học sinh thích ít nhất 1 trong 2 môn Lí và môn Hóa?

b) Tất cả bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải

a) Gọi A là tập hợp số học sinh thích môn Vật lí.

B là tập hợp số học sinh thích môn Hóa học.

Số phần tử của A và B lần lượt là n(A) và n(B) thì n (A) = 25, n(B) = 15.

Khi đó:

+) Tập hợp số học sinh thích cả môn Vật lí và Hóa học là A ∩ B. Do đó n(A ∩ B) = 10.

+) Tập hợp số học sinh thích ít nhất 1 trong 2 môn Vật lí và môn Hóa học là $A \cup B$.

Ta có: tổng số học sinh thích ít nhất 1 trong 2 môn Vật lí và môn Hóa học là $n(A \cup B)$.

Suy ra $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 15 – 10 = 30$.

Vậy có 30 học sinh thích ít nhất một trong hai môn Vật lí và Hoá học.

b) Gọi M là tập hợp số học sinh của lớp 10E.

N là tập hợp số học sinh không thích cả hai môn học Vật lí và Hoá học. Do đó $n(N) = 5$.

Ta có: $A \cup B = C_N$

Số học sinh cả lớp 10E là tổng của số học sinh thích ít nhất một trong hai môn với số học sinh không thích môn học nào.

Do đó số học sinh của lớp 10E là: 30 + 5 = 35 (học sinh).

Vậy lớp 10E có 35 học sinh.