Bài 6. Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau.

A. Lý thuyết.

I. Khái niệm về phép dời hình.

- **Định nghĩa:** Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M’; N’ thì

MN = M’N’.

- Nhận xét:

1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

- **Ví dụ 1**. Vì phép tịnh tiến và phép đối xứng tâm là phép dời hình nên thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm O ta được một phép dời hình.

II. Tính chất

Phép dời hình:

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.

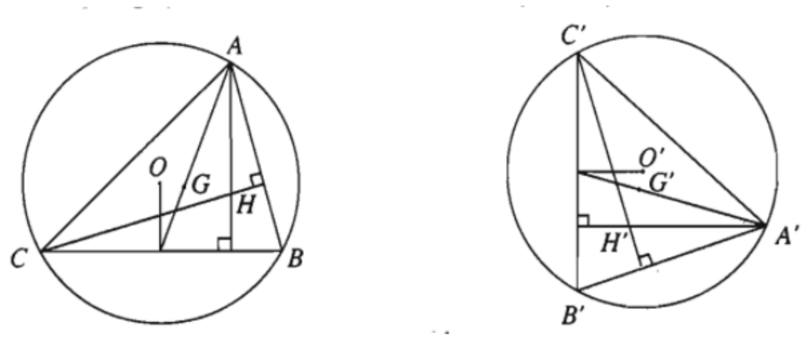
2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

- Chú ý:

a) Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A’B’C’ thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A’B’C’.



b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

- Ví dụ 2. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x + 4)^2 + (y – 3)^2 = 49$. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục qua đường thẳng d và phép quay tâm O góc quay 90^0 ta được đường tròn (C’).

Bán kính đường tròn (C’) là: R’ = R = 7.

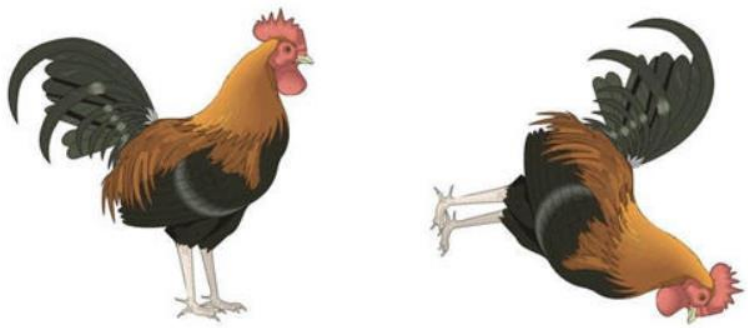
III. Khái niệm hai hình bằng nhau.

- Định nghĩa. Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

- Ví dụ 3.

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến tam giác ABC thành tam giác A’B’C’. Sau đó, ta thực hiện tiếp phép đối xứng trục qua đường thẳng d biến tam giác A’B’C’ thành tam giác A”B”C”. Khi đó: ΔABC = ΔA”B”C”.

b) Hình ảnh dưới đây cho ta hai hình bằng nhau:



B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho đường thẳng d: 3x + y + 3 = 0. Viết phương trình của đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I(1 ; 2) và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-2;1)$.

Lời giải:

Gọi F là phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I và phép tịnh tiến theo $\vec{v}(-2;1)$.

Gọi $d_1 = Đ_I(d), d' = T_{\vec{v}}(d_1) \Rightarrow d' = F(d)$.

Do d’ song song hoặc trùng với d do đó phương trình của d’ có dạng 3x + y + c = 0

- Lấy M(0 ; – 3)$\in d$ ta có $Đ_I$(M) = M’. Khi đó, I là trung điểm MM’.

Áp dụng biểu thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ của M’ là:

$$\begin{cases} x' = 2.1 - 0 = 2 \\ y' = 2.2 - (-3) = 7 \end{cases} \Rightarrow M'(2;7).$$

- Tịnh tiến theo $\vec{v}(-2;1)$ biến M’ thành M”. Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được: M”(0 ; 8)

Mà M” thuộc d’ nên thay tọa độ M” vào d’ ta được:

3.0 + 8 + c = 0 nên c = – 8.

Vậy phương trình đường thẳng d’ là 3x + y – 8 = 0.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M(2 ; 1). Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O(0; 0) và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2\,;3)$ biến điểm M thành điểm nào?

Lời giải:

+ Gọi $Đ_O(M)$ = M'.

Suy ra, O là trung điểm của MM'.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_O \\ y_M + y_{M'} = 2y_O \end{cases} \Leftrightarrow M'(-2;-1).$$

+ Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2\,;3)$ biến M' thành M''

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M''} - x_{M'} = 2 \\ y_{M''} - y_{M'} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M''(0;2).$$

Vậy khi ta thực hiện liên tiếp phép đối xứng và phép tịnh tiến trên biến M thành M''(0 ; 2).

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2\,;3)$ biến (C) thành đường tròn nào?

Lời giải :

Đường tròn (C) có tâm I(1 ; – 2) và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 1} = 2$.

+ Thực hiện phép đối xứng qua trục Oy biến tâm I thành tâm I'(– 1 ; – 2) ; R' = R = 2.

+ Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2\,;3)$ biến I' thành I''

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được I''(1 ; 1) và R'' = R' = 2.

Vậy đường tròn cần tìm có tâm I''(1 ; 1) và bán kính R'' = 2.

Phương trình (C'') : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.