BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ tại $x_0 = 2$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Do đó hàm số xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ chứa $x_0 = 2$. Khi đó ta có:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{x-1} = \frac{4}{1} = 4 = f(2).$$

Vậy hàm số y = f(x) liên tục tại $x_0 = 2$.

II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

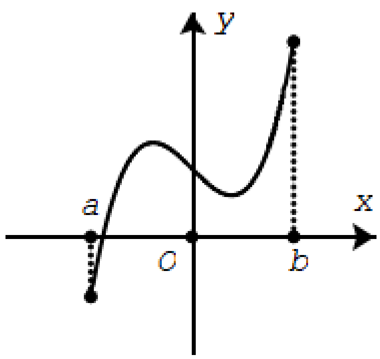
Định nghĩa 2

Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

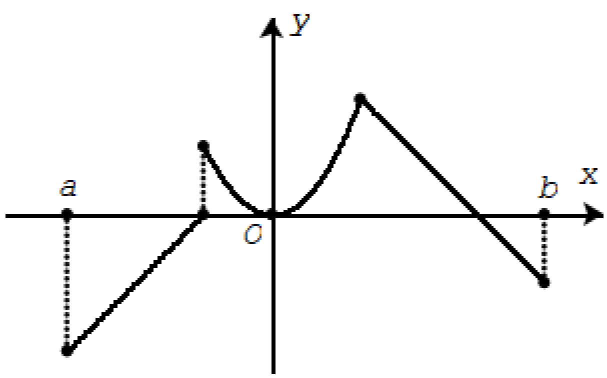
Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng (a;b)



Hàm số không liên tục trên khoảng (a; b).

III. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử y = f(x) và y = g(x) là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x) và y = f(x).g(x) liên tục tại x_0;

b) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

- Nếu x = 3, ta có f(3) = 4,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+1) = 4 = f(3)$$

Do đó f(x) liên tục tại x = 3.

- Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số y = f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Định lí 3

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b) < 0, thì tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a; b) sao cho f(c) = 0.

Định lí 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0, thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng (a, b).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 – 3x – 7 = 0$ luôn có nghiệm.

Giải

Xét hàm $f(x) = x^5 – 3x – 7$

Ta có: f(0) = - 7, f(2) = 19. Do đó f(0).f(2) = (-7).19 < 0.

Vì hàm số f(x) là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số f(x) liên tục trên [0;2]. Từ đó suy ra phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0;2)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ tại x = 1;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Hàm số f(x) xác định trên D và $x_0 \in D$. Ta có:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\sqrt{2x+1} = \sqrt{3} = f(1).$$

Vậy hàm số y = f(x) liên tục tại $x_0 = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

- Nếu x = 2, ta có f(2) = 3,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{\left(x-2\right)^2}=-\infty\neq f\left(2\right)$$

Do đó f(x) không liên tục tại x = 3.

- Nếu $x\neq 2$ thì $f\left(x\right)=\frac{1-x}{\left(x-2\right)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;2\right),\left(2;+\infty\right)$.

Vậy hàm số y = f(x) liên tục trên $\left(-\infty;2\right),\left(2;+\infty\right)$ nhưng không tại liên tục tại điểm x = 2.

Bài 2. Chứng minh phương trình $(1 – m^2)(x + 1)^3 + x^2 – x – 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = (1 – m^2)(x + 1)^3 + x^2 – x – 3$

Ta có: $f(-1) = (1 – m^2)(-1 + 1)^3 + (-1)^2 – (-1) – 3 = -1$

$f(-2) = (1 – m^2)(-2 + 1)^3 + (-2)^2 – (-2) – 3 = - 1 + m^2 + 4 + 2 – 3 = m^2 + 2$

$\Rightarrow f\left(-1\right).f\left(-2\right)=(-1).(m^2+2)<0$

y = f(x) là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn [-2;-1] hay hàm số có ít nhất một nghiệm trên (-2;-1).

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

Bài 3. Tìm a để hàm số sau liên tục tại x = 2:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

Vậy với $a=\dfrac{1}{3}$ thì hàm số liên tục tại x = 2.

b) Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ ax^2+x+1\ =4a+3=f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3=1\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=-\dfrac{1}{2}$ thì hàm số liên tục tại x = 2.