

Công thức tổng n số hạng tổng quát của cấp số nhân

1. Lý thuyết

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Trong đó, u_1 là số hạng đầu tiên, q là công bội của cấp số nhân.

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1; u_1; u_1; \dots u_1; \dots$ khi đó $S_n = n \cdot u_1$.

2. Công thức

- Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$

- Công thức tính nhanh tổng:

$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ số } 9} = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 10$ và $u_5 = 1250$.

a) Tính tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

b) Tính tổng $S = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \dots + u_{99}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} u_2 = 10 \\ u_5 = 1250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 10 \\ u_1 q^4 = 1250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 125 = 5^3 \\ u_1 q = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 5 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

$$S_{20} = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2 \cdot [1 - 5^{20}]}{1 - 5} = \frac{1}{2} \cdot (5^{20} - 1)$$

b) Dãy số $u_1; u_3; u_5; u_7; \dots u_{99}$ là cấp số nhân với số hạng đầu tiên là $u_1 = 2$ và công bội

$$q' = \frac{u_3}{u_1} = q^2 = 25.$$

Dãy số đó có: $\frac{99-1}{2} + 1 = 50$ số hạng

$$\text{Tổng } S = u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \dots + u_{99} = \frac{2(1 - 25^{50})}{1 - 25} = \frac{1}{12} \cdot (25^{50} - 1) = \frac{1}{12} \cdot (5^{100} - 1).$$

Ví dụ 2: Tính tổng: $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underset{n \text{ số } 1}{11\dots1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + 11 + 111 + \dots + \underset{n \text{ số } 1}{11\dots1} \\
 &= \frac{1}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underset{n \text{ số } 9}{99\dots9} \right) \\
 &= \frac{1}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) \\
 &= \frac{1}{9} [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n] \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{10 \cdot (1 - 10^n)}{1 - 10} - n \right) \\
 &= \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{1}{9}n.
 \end{aligned}$$