Bài 1. Tọa độ của vectơ

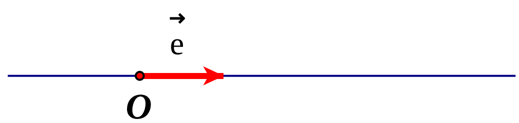
A. Lý thuyết

1. Tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ

1.1. Trục tọa độ

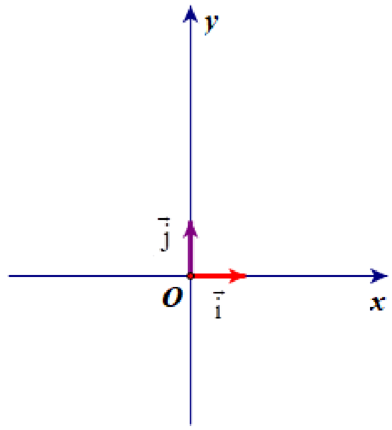
Trục tọa độ (gọi tắt là ***trục***) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O (gọi là ***điểm gốc***) và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị của trục.

Ta kí hiệu trục đó là $(O;\vec{e})$.



1.2. Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$ gồm hai trục $(O;\vec{i})$ và $(O;\vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là ***gốc tọa độ.*** Trục $(O;\vec{i})$ được gọi là ***trục hoành*** và kí hiệu là Ox, trục $(O;\vec{j})$ được gọi là ***trục tung*** và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy. Hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy.



Chú ý: Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là *mặt phẳng tọa độ Oxy*, hay gọi tắt là *mặt phẳng Oxy.*

1.3. Tọa độ của một vectơ

Trong mặt phẳng Oxy, cặp số (x; y) trong biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ được gọi là ***tọa độ của vectơ*** $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ:

+) Cho $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Ta có cặp số (3; 2) là tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

Ta kí hiệu là $\vec{a} = (3; 2)$.

Trong đó 3 là hoành độ của vectơ $\vec{a}$ và 2 là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

+) Cho $\vec{p} = -5\vec{j} = 0\vec{i} - 5\vec{j}$.

Ta có cặp số (0; –5) là tọa độ của vectơ $\vec{p}$.

Ta kí hiệu là $\vec{p} = (0; -5)$.

Trong đó 0 là hoành độ của vectơ $\vec{p}$ và –5 là tung độ của vectơ $\vec{p}$.

Chú ý:

• $\vec{a} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Nếu cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Ví dụ:

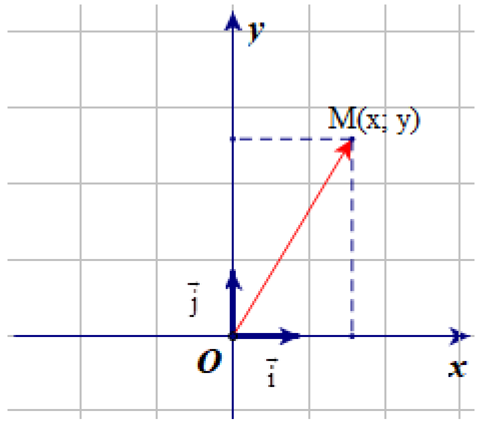
+) Ta có $\vec{h} = (-1; 7) \Leftrightarrow \vec{h} = -1.\vec{i} + 7\vec{j} = -\vec{i} + 7\vec{j}$.

+) Ta có $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (2; -4)$. Khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$.

Nghĩa là, $\vec{a} = (2; -4)$.

1.4. Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***tọa độ của điểm*** M.



Nhận xét:

• Nếu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ thì cặp số (x; y) là tọa độ của điểm M, kí hiệu M(x; y), x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của điểm M.

• M(x; y) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ví dụ:

+) Nếu $\overrightarrow{OM} = (-3; 8)$ thì cặp số (–3; 8) là tọa độ của điểm M.

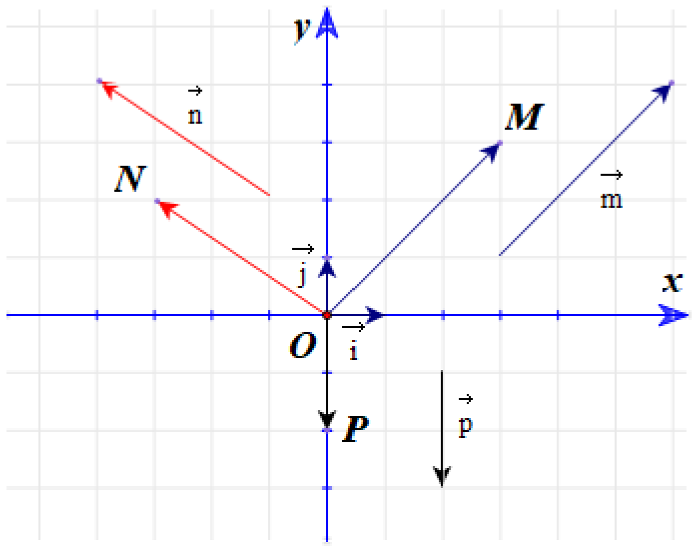
Ta kí hiệu là M(–3; 8).

Trong đó –3 là hoành độ của điểm M và 8 là tung độ của điểm M.

+) Cho điểm M(4; 9) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 9\vec{j}$.

Chú ý: Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M. Khi đó ta viết M(x_M; y_M).

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm M, N, P được biểu diễn như hình bên.



a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ và các điểm M, N, P.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

+) $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

+) $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

+) $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j}$.

Vậy $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j}$.

b) Từ kết quả ở câu a), ta có:

+) $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (3;3)$

$\Rightarrow \vec{m} = \overrightarrow{OM} = (3;3)$ và M(3; 3).

+) $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = (-3;2)$

$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{ON} = (-3;2)$ và N(–3; 2).

+) $\overrightarrow{OP} = 0\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (0;-2)$

$\Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{OP} = (0;-2)$ và P(0; –2).

Vậy $\vec{m} = (3;3)$, $\vec{n} = (-3;2)$, $\vec{p} = (0;-2)$ và M(3; 3), N(–3; 2), P(0; –2).

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và số thực k. Khi đó:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;a_2 + b_2)$;

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;a_2 - b_2)$;

(3) $k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$;

(4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

Ví dụ: Cho hai vectơ $\vec{a} = (10;-8)$, $\vec{b} = (2;5)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $\vec{a} + 4\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $2\vec{a}.(-4\vec{b})$.

Hướng dẫn giải

a) Với $\vec{a}=(10;-8)$, $\vec{b}=(2;5)$ ta có:

+) $\vec{a}+\vec{b}=(10+2;-8+5)=(12;-3)$;

+) $\vec{a}-\vec{b}=(10-2;-8-5)=(8;-13)$;

+) $2\vec{a}=(2.10;2.(-8))=(20;-16)$;

+) $4\vec{b}=(4.2;4.5)=(8;20)$.

Ta suy ra $\vec{a}+4\vec{b}=(10+8;-8+20)=(18;12)$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=(12;-3)$, $\vec{a}-\vec{b}=(8;-13)$, $2\vec{a}=(20;-16)$, $\vec{a}+4\vec{b}=(18;12)$.

b) Với $\vec{a}=(10;-8)$, $\vec{b}=(2;5)$ ta có:

+) $\vec{a}.\vec{b}=10.2+(-8).5=20-40=-20$;

+) Từ kết quả câu a), ta có $2\vec{a}=(20;-16)$ và $4\vec{b}=(8;20)$.

Ta suy ra $2\vec{a}=(20;-16)$ và $-4\vec{b}=(-8;-20)$.

Khi đó ta có $2\vec{a}.(-4\vec{b})=20.(-8)+(-16).(-20)=-160+320=160$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=-20$ và $2\vec{a}.(-4\vec{b})=160$.

3. Áp dụng của tọa độ vectơ

3.1. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm A(x_A; y_A), B(x_B; y_B). Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$.

Ví dụ: Cho ba điểm A(2; 5), B(–1; 1), C(5; –7). Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải

Với A(2; 5), B(–1; 1), C(5; –7) ta có:

• $\overrightarrow{AC} = \left(x_C - x_A; y_C - y_A\right) = \left(5 - 2; -7 - 5\right) = \left(3; -12\right)$.

• $\overrightarrow{CB} = \left(x_B - x_C; y_B - y_C\right) = \left(-1 - 5; 1 - \left(-7\right)\right) = \left(-6; 8\right)$.

• $\overrightarrow{BA} = \left(x_A - x_B; y_A - y_B\right) = \left(2 - \left(-1\right); 5 - 1\right) = \left(3; 4\right)$.

Vậy $\overrightarrow{AC} = \left(3; -12\right), \overrightarrow{CB} = \left(-6; 8\right), \overrightarrow{BA} = \left(3; 4\right)$.

3.2. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Cho hai điểm A(x_A; y_A) và B(x_B; y_B). Tọa độ trung điểm M(x_M; y_M) của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho ΔABC có A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C). Tọa độ trọng tâm G(x_G; y_G) của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ: Cho ΔDEF có tọa độ các đỉnh là D(3; 1), E(5; 8), F(9; 4).

a) Tìm tọa độ trung điểm H của cạnh EF.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔDEF.

Hướng dẫn giải

a) Với E(5; 8), F(9; 4):

Vì H là trung điểm của cạnh EF.

Ta suy ra $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{5+9}{2} = 7 \\ y_M = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6 \end{cases}$

Vậy H(7; 6).

b) Với D(3; 1), E(5; 8), F(9; 4):

Vì G là trọng tâm của ΔDEF.

Ta suy ra $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_D + x_E + x_F}{3} = \dfrac{3+5+9}{3} = \dfrac{17}{3} \\ y_G = \dfrac{y_D + y_E + y_F}{3} = \dfrac{1+8+4}{3} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.

3.3. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm A(x_A; y_A), B(x_B; y_B). Ta có:

• $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;

• $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương ⇔ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$;

• $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;

• $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;

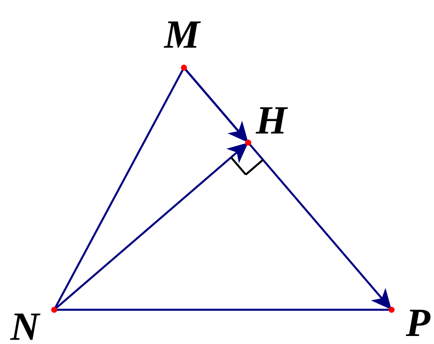
• $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔMNP có M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8).

a) Tìm tọa độ H là chân đường cao của ΔMNP kẻ từ N.

b) Giải tam giác MNP.

Hướng dẫn giải



a) Với M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8).

Gọi H(x; y).

Ta có:

+) $\overrightarrow{NH} = (x - (-3); y - (-2)) = (x + 3; y + 2)$.

+) $\overrightarrow{MH} = \left(x - 2; y - 1\right)$.

+) $\overrightarrow{MP} = \left(7 - 2; -8 - 1\right) = \left(5; -9\right)$

Vì H(x; y) là chân đường cao của ΔMNP kẻ từ N nên ta có NH ⊥ MP.

Ta suy ra $\overrightarrow{NH} \perp \overrightarrow{MP}$.

Do đó $\overrightarrow{NH}.\overrightarrow{MP} = 0$.

⇔ (x + 3).5 + (y + 2).(–9) = 0.

⇔ 5x – 9y – 3 = 0 (1).

Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương

⇔ (x – 2).(–9) – (y – 1).5 = 0.

⇔ –9x – 5y + 23 = 0   (2).

Từ (1), (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5x - 9y - 3 = 0 \\ -9x + 5y + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{7} \\ y = \dfrac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{24}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$.

b) Với M(2; 1), N(–3; –2), P(7; –8) ta có:

+) $\overrightarrow{MN} = \left(-5; -3\right)$ và $\overrightarrow{NM} = \left(5; 3\right)$

$\Rightarrow MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$.

+) $\overrightarrow{MP} = (5;-9)$.

$\Rightarrow MP = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{5^2 + (-9)^2} = \sqrt{106}$.

+) $\overrightarrow{NP} = (10;-6)$.

$\Rightarrow NP = \left|\overrightarrow{NP}\right| = \sqrt{10^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{34}$.

+) $\cos M = \cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}{MN.MP} = \dfrac{-5.5 + (-3).(-9)}{\sqrt{34}.\sqrt{106}} \approx 0,033$.

Suy ra $M \approx 88°7'$.

+) $\cos N = \cos\left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}\right) = \dfrac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP} = \dfrac{5.10 + 3.(-6)}{\sqrt{34}.2\sqrt{34}} = \dfrac{8}{17}$.

Suy ra $N \approx 61°56'$.

+) Ta có $M + N + P = 180°$ (định lí tổng ba góc của một tam giác).

$P = 180° - M - N \approx 180° - 88°7' - 61°56' = 29°57'$.

Vậy $MN = \sqrt{34}$, $MP = \sqrt{106}$, $NP = 2\sqrt{34}$,

$M \approx 88°7'$, $N \approx 61°55'$, $P \approx 29°57'$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của $\vec{u}$, với $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

c) Tìm tọa độ của $\vec{v}$, với $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

d) Tìm các số thực h, k sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

+) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (2;1)$;

+) $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \vec{b} = (3;4)$;

+) $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{c} = (7;2)$.

Vậy $\vec{a} = (2;1), \vec{b} = (3;4), \vec{c} = (7;2)$.

b) Ta có:

+) $2\vec{a} = (2.2;2.1) = (4;2)$.

+) $3\vec{b} = (3.3;3.4) = (9;12)$.

Ta suy ra $2\vec{a} - 3\vec{b} = (4-9;2-12) = (-5;-10)$.

Khi đó ta có $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (-5+7;-10+2) = (2;-8)$.

Vậy $\vec{u} = (2;-8)$.

c) Ta có $\vec{b}-\vec{c}=(3-7;4-2)=(-4;2)$.

Khi đó ta có $\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}=(-4-2;2-1)=(-6;1)$.

Theo đề, ta có: $\vec{v}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

$\Leftrightarrow \vec{v}=\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}=(-6;1)$.

Vậy $\vec{v}=(-6;1)$.

d) Ta có:

+) $k\vec{a}=(2k;k)$;

+) $h\vec{b}=(3h;4h)$.

Suy ra $k\vec{a}+h\vec{b}=(2k+3h;k+4h)$.

Ta có $\vec{c}=k\vec{a}+h\vec{b}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7=2k+3h \\ 2=k+4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{22}{5} \\ h=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $k=\dfrac{22}{5}, h=-\dfrac{3}{5}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC biết A(–3; 2), B(4; 3) và điểm C nằm trên trục Ox.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC và điểm C, biết G nằm trên trục Oy.

b) Giải ΔABC.

c) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.

Hướng dẫn giải

a) Vì C nằm trên trục Ox nên ta có tọa độ C(x_C; 0).

Vì G nằm trên trục Oy nên ta có tọa độ G(0; y_G).

Ta có G là trọng tâm của ΔABC.

Ta suy ra $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-3+4+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{2+3+0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_G = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Vậy $G\left(0;\dfrac{5}{3}\right), C(-1;0)$.

b) Với A(–3; 2), B(4; 3), C(–1; 0) ta có:

+) $\overrightarrow{AB} = (4-(-3);3-2) = (7;1)$.

$\Rightarrow AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{7^2+1^2} = 5\sqrt{2}$.

+) $\overrightarrow{AC} = (-1-(-3);0-2) = (2;-2)$.

$\Rightarrow AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

+) $\overrightarrow{BC} = (-1-4;0-3) = (-5;-3)$.

$\Rightarrow BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$.

+) $\cos A = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{7.2+1.(-2)}{5\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5}$.

Suy ra $A = 53°8'$.

+) $\cos B = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}$

Do đó cosB $=\dfrac{-7.(-5)+(-1).(-3)}{5\sqrt{2}.\sqrt{34}}=\dfrac{19\sqrt{17}}{85}$.

Suy ra $B=22°50'$.

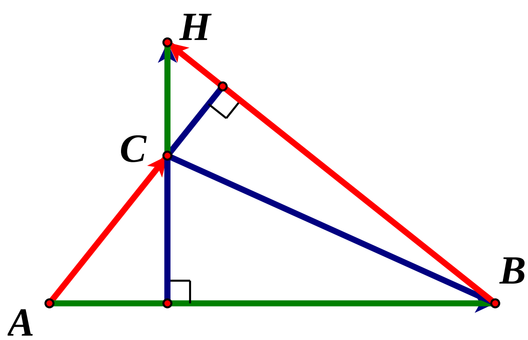
+) Ta có $A+B+C=180°$ (định lí tổng ba góc của một tam giác).

$\Leftrightarrow C=180°-A-B\approx 180°-53°8'-22°50'=104°2'$.

Vậy $AB=5\sqrt{2}, AC=2\sqrt{2}, BC=\sqrt{34},$

$A\approx 53°8', B\approx 22°50', C\approx 104°2'$.

c)



Gọi H(x; y).

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(x-4;y-3)$ và $\overrightarrow{CH}=(x+1;y)$.

Ta có H(x; y) là trực tâm của ΔABC.

Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4).2+(y-3).(-2)=0\\ (x+1).7+y.1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ 7x + y + 7 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Vậy $H\left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$, $\vec{c} = (6;5)$. Tìm m để $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $m\vec{a} = (m;2m)$.

Ta suy ra $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b} = (m - 3; 2m + 1)$.

Ta có $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{c}$ ⇔ (m – 3).5 – (2m + 1).6 = 0.

⇔ –7m – 21 = 0

⇔ m = –3.

Vậy m = –3 thỏa yêu cầu bài toán.