

Công thức về phép quay

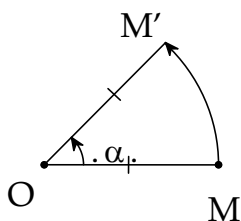
1. Lý thuyết

* Định nghĩa: Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .

Điểm O được gọi là tâm quay, còn α được gọi là góc quay của phép quay đó.

Phép quay tâm O góc α biến điểm M thành M' thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$$



* Tính chất:

- Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

2. Công thức:

Phép quay tâm O, góc 90° : $Q_{(O;90^\circ)}[M(x;y)] = M'(x';y')$. Khi đó: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

Phép quay tâm O, góc -90° : $Q_{(O;-90^\circ)}[M(x;y)] = M'(x';y')$. Khi đó: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

Phép quay tâm O, góc 180° : $Q_{(O;180^\circ)}[M(x;y)] = M'(x';y')$. Khi đó: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Tổng quát:

Phép quay tâm O, góc quay α : $Q_{(O;\alpha)}[M(x;y)] = M'(x';y')$.

Khi đó: $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$

Phép quay tâm I(a;b), góc quay α : $Q_{(I;\alpha)}[M(x;y)] = M'(x';y')$.

Khi đó:
$$\begin{cases} x' = a + (x - a)\cos \alpha - (y - b)\sin \alpha \\ y' = b + (x - a)\sin \alpha + (y - b)\cos \alpha \end{cases}$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(-1;5).

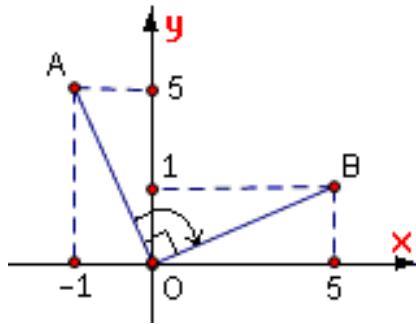
- a) Tìm tọa độ điểm B là ảnh của điểm A qua phép quay tâm O(0; 0) góc quay -90° .
- b) Tìm tọa độ điểm C là ảnh của điểm A qua phép quay tâm O(0; 0) góc quay 45° .

Lời giải

- a) Điểm B là ảnh của điểm A qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$

Cách 1: Vẽ hình

Dựa vào vẽ, ta suy ra B(5;1).



Cách 2: Áp dụng công thức:

Do $Q_{(O, -90^\circ)}(A) = B$ nên
$$\begin{cases} x_B = y_A = 5 \\ y_B = -x_A = 1 \end{cases}$$
. Vậy B(5;1).

- b) Điểm C là ảnh của điểm A qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$

Áp dụng công thức tọa độ:
$$\begin{cases} x_c = x_A \cos \alpha - y_A \sin \alpha \\ y_c = x_A \sin \alpha + y_A \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_c = (-1)\cos 45^\circ - 5\sin 45^\circ \\ y_c = (-1)\sin 45^\circ + 5\cos 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -3\sqrt{2} \\ y_c = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $C(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d: $5x - 3y + 15 = 0$.
Tìm đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O(0;0) góc quay -90° .

Lời giải

Đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$

Cách 1:

Do $Q_{(O, -90^\circ)}(d) = d'$ nên $d' \perp d$. Do đó phương trình d' có dạng: $3x + 5y + c = 0$.

Lấy điểm $M(-3; 0) \in d$, gọi $M'(x'; y') \in d'$ là ảnh của điểm M qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x' = y_M = 0 \\ y' = -x_M = 3 \end{cases} \Rightarrow M'(0; 3).$$

Do $M'(0; 3) \in d'$ nên $3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -15$

Vậy d' có phương trình là $3x + 5y - 15 = 0$.

Cách 2:

Với mọi điểm $M(x; y) \in d$, $M'(x'; y') \in d'$ sao cho $Q_{(O, -90^\circ)}(M) = M'$.

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases}.$$

Do $M(x; y) \in d$ nên ta có $5x - 3y + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow 5(-y') - 3x' + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 5y' - 15 = 0.$$

Do $M'(x'; y') \in d'$ nên d' có phương trình: $3x + 5y - 15 = 0$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1; -5)$. Tìm ảnh của M qua phép quay tâm O , góc quay 90°

A. $N(5; 1)$

B. $N(5; -1)$

C. $N(1; 5)$

D. $N(1; -5)$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 5x - 2y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay -180°

A. $d': 5x - 2y + 6 = 0$

B. $d': 5x - 2y - 3 = 0$

C. $d': 2x - 5y - 3 = 0$

D. $d': 2x - 5y + 6 = 0$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O , góc quay 90° là:

A. $x^2 + (y - 3)^2 = 4$

B. $x^2 + y^2 + 6x - 6 = 0$

C. $x^2 + (y + 3)^2 = 4$

D. $x^2 + y^2 + 6x - 5 = 0$

Đáp án 1A, 2B, 3C