BÀI 3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Giới hạn $\frac{\sin x}{x}$

Định lý 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

Lời giải

Đặt x – 1 = t.

Khi x tiến đến 1 thì t tiến đến 0.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}.\frac{1}{t+2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}.\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Đạo hàm của hàm số y = sinx

Định lý 2.

Hàm số y = sinx có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và (sinx)’ = cosx.

Chú ý:

Nếu y = sinu và u = u(x) thì: (sinu)’ = u’.cosu

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left[\sin(2x+3)\right]^2$

Lời giải

$$y'=2\left[\sin(2x+3)\right]'.\sin(2x+3)=2\left[\cos(2x+3).(2x+3)'\right].\sin(2x+3)$$

$$y'=4\cos(2x+3).\sin(2x+3).$$

3. Đạo hàm của hàm số y = cosx

Định lý 3.

Hàm số y = cosx có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và (cosx)’ = - sinx.

Chú ý:

Nếu y = cosu và u = u(x) thì: (cosu)’ = - u’.sinu

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ tại $x=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-x$

$\Rightarrow y'=(\cos u)'=-u'.\sin u=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$

Thay $x=\frac{\pi}{3}$ vào y’ ta được:

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$

Vậy giá trị của đạo hàm của hàm số tại $x=\frac{\pi}{3}$ là $\frac{1}{2}$.

4. Đạo hàm của hàm số y = tanx

Định lý 4.

Hàm số y = tanx có đạo hàm tại mọi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và (tanx)’ = $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Chú ý:

Nếu y = u và u = u(x) thì: (tanu)’ = $\frac{u'}{\cos^2 u}$.

Ví dụ 4. Tính đạo hàm $y=\sqrt{2+\tan x}$

Lời giải

Đặt u = 2 + tanx

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{(2+\tan x)'}{2\sqrt{2+\tan x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{2+\tan x}}=\frac{1}{2.\cos^2 x\sqrt{2+\tan x}}.$$

5. Đạo hàm của hàm số y = cotx

Định lý 5.

Hàm số y = cotx có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và (cotx)’ = $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Chú ý:

Nếu y = u và u = u(x) thì: (cotu)’ = $-\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm y = cot x^2.

Lời giải

y’ = (cot x^2)’ = (x^2)’.$-\frac{1}{\sin^2 x^2} = -\frac{2x}{\sin^2 x^2}$.

6. Bảng quy tắc tính đạo hàm tổng hợp:

Đạo hàm của hàm f(x) với x là biến số	**Đạo hàm của hàm f(u) với u là một hàm số**
(c)’ = 0	(c)’ = 0
(x)’ = 1	(u)’ = u’
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
(sinx)’ = cosx	(sinu)’ = u’.cosu
(cosx)’ = - sinx	(cosu)’ = -u’. sinx
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các đạo hàm sau:

a) $y = \sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}$

b) $y = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{4}{3}\cot x$

c) $y = \cos^2\ \sin^3 x$

d) $y = \frac{x}{\sin x}$

Lời giải

a) $y'=\dfrac{\left(3\tan^2x+\cot 2x\right)'}{2\sqrt{3\tan^2x+\cot 2x}}=\dfrac{6\tan x.\dfrac{1}{\cos^2x}-\dfrac{2}{\sin^2 2x}}{2\sqrt{3\tan^2x+\cot 2x}}=\dfrac{\dfrac{6\sin x}{\cos^3x}-\dfrac{1}{2.\sin^2x.\cos^2x}}{2\sqrt{3\tan^2x+\cot 2x}}$

b) $y'=\left(-\dfrac{\cos x}{3\sin^3x}+\dfrac{4}{3}\cot x\right)'=\dfrac{\sin x.3\sin^3x+\cos x.9.\sin^2x.\cos x}{\left(3\sin^3x\right)^2}-\dfrac{4}{3\sin^2x}$

$=\dfrac{\sin^2x+3\cos^2x}{3\sin^4x}-\dfrac{4}{3\sin^2x}=\dfrac{3\cos^2x-3\sin^2x}{3\sin^4x}=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^4x}$.

c) $y'=\left(\cos^2\left(\sin^3x\right)\right)'=2.\cos\left(\sin^3x\right).\left[\cos\left(\sin^3x\right)\right]'=2.\cos\left(\sin^3x\right).\left[\cos\left(\sin^3x\right)\right]'$

$=2.\cos\left(\sin^3x\right).\left[-\sin\left(\sin^3x\right)\right]\left(\sin^3x\right)'=-2.\cos\left(\sin^3x\right).\sin\left(\sin^3x\right)\left(3\sin^2x.\cos x\right)$

$=-6.\cos\left(\sin^3x\right).\sin\left(\sin^3x\right)\sin^2x.\cos x$

d) $y'=\dfrac{x'.\sin x-x.\left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2}=\dfrac{\sin x-x.\cos x}{\left(\sin x\right)^2}$.

Bài 2. Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x.

a) $y=\sin^6x+\cos^6x+3\sin^2x\cos^2x$

b) $y=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2x$

Lời giải

a) $y'=\left(\sin^6x+\cos^6x+3\sin^2x\cos^2x\right)'$

$=6\sin^5x\cos x-6\cos^5x.\sin x+6\sin x\cos^3x-6\sin^3x\cos x$

$=6\sin x\cos x\left(\sin^4x-\cos^4x\right)+6\sin x\cos x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$

$=6\sin x\cos x\left(\sin^2x-\cos^2x\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)+6\sin x\cos x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$

$=6\sin x\cos x\left(\sin^2x-\cos^2x\right)+6\sin x\cos x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$

$=-6\sin x\cos x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)+6\sin x\cos x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$

$=0$

b) $y'=\left(\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2x\right)'$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

$$-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-4\sin x\cos x$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)-2\sin 2x$$

$$=-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin 2x-2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sin 2x-2\sin 2x$$

$$=\sin 2x+\sin 2x-2\sin 2x$$

$$=0$$

Bài 3. Tìm f'(2) biết f(x) = x^2.sin(x – 2).

Lời giải

Ta có : f'(x) = 2x.sin(x – 2) + x^2cos(x – 2)

Khi đó: f'(2) = 2.2.sin(2 – 2) + 2^2.cos(2 – 2)

= 4.0 + 4.1

= 0 + 4

= 4.

Vậy f'(2) = 4.