

Công thức chuyển đổi giữa phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng

I. Lý thuyết tổng hợp.

- Một đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vector chỉ phương hoặc một vector pháp tuyến của đường thẳng đó.

- Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b)$. Phương trình đường tham số của đường thẳng d là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \text{ (tham số } t) \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0.$$

- Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$, ta có phương trình tổng quát của đường thẳng d được viết dưới dạng:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_0 - by_0)$$

II. Các công thức.

- Công thức chuyển đổi từ phương trình tổng quát thành phương trình tham số của đường thẳng:

Cho đường thẳng $d: ax + by + c = 0$

+ Dựa vào phương trình tổng quát, ta xác định một điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng d

+ Dựa vào phương trình tổng quát, đường thẳng d có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$ nên ta có vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (-b; a)$ hoặc $\vec{u} = (b; -a)$

+ Viết phương trình tham số của d có dạng: $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$

- Công thức chuyển đổi từ phương trình tham số thành phương trình tổng quát của đường thẳng:

$$\text{Cho đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

+ Dựa vào phương trình tham số, ta xác định được điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng d

+ Dựa vào phương trình tham số, đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b)$ nên ta có vector pháp tuyến của d là $\vec{n} = (-b; a)$ hoặc $\vec{n} = (b; -a)$

+ Viết phương trình tổng quát của d dưới dạng:

$$-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$$

Hoặc

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho đường thẳng $d: 3x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

Lời giải:

Biết đường thẳng $d: 3x - 2y + 1 = 0$

Ta có:

Điểm $A(1; 2)$ thuộc đường thẳng d do $3.1 - 2.2 + 1 = 0$

Vector pháp tuyến của d là $\vec{n} = (3; -2) \Rightarrow$ Vector chỉ phương của d là: $\vec{u} = (2; 3)$

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Bài 2: Cho đường thẳng $d: 4x + 4 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .

Lời giải:

Biết đường thẳng $d: 4x + 4 = 0$

Ta có:

Điểm $B(-1; 3)$ thuộc đường thẳng d do $4.(-1) + 4 = 0$

(có thể lấy tung độ bất kì vì phương trình đường thẳng d không phụ thuộc tung độ y)

Vector pháp tuyến của d là $\vec{n} = (4; 0) \Rightarrow$ Vector chỉ phương của d là: $\vec{u} = (0; -4)$

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 4t \end{cases}$

Bài 3: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d .

Lời giải:

Biết đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

Ta có:

Điểm $C(-1; 3)$ thuộc vào đường thẳng d dựa vào phương trình tham số. (cho $t = 0$ thay vào phương trình tham số của d , ta tìm được tọa độ C)

Vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (4; -2) \Rightarrow$ Vector pháp tuyến của d là $\vec{n} = (2; 4)$

Phương trình tổng quát của d là:

$$2(x + 1) + 4(y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d .

Bài 2: Cho đường thẳng $d: 4x - y = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d .