Công thức giải bất phương trình bậc hai một ẩn chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (hoặc $ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a\ne 0$.

- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó f(x) = ax^2+bx+c cùng dấu với hệ số a hay trái dấu với hệ số a.

II. Các công thức.

Cho tam thức bậc hai f(x) = ax^2+bx+c có $a\ne 0$, $\Delta=b^2-4ac$, ta có:

$$ax^2+bx+c>0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}$$

$$ax^2+bx+c\ge 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}$$

$$ax^2+bx+c<0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}$$

$$ax^2+bx+c\le 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}$$

+) Nếu $\Delta>0$ và $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\end{array}\right.\ (x_1<x_2)$

thì :

$$a<0\Rightarrow\begin{cases}f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>x_2\\ x<x_1\end{array}\right.\\ f(x)>0\Leftrightarrow x_1<x<x_2\end{cases}$$

$$a>0\Rightarrow\begin{cases}f(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>x_2\\ x<x_1\end{array}\right.\\ f(x)<0\Leftrightarrow x_1<x<x_2\end{cases}$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Giải bất phương trình: $x^2 + 5x - 6 > 0$.

Lời giải:

Xét tam thức bậc hai: $x^2 + 5x - 6$

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4.(-6).1 = 49 > 0$

Nghiệm của tam thức là: $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{49}}{2.1} = 1$, $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{49}}{2.1} = -6$

Hệ số a = 1 > 0 nên ta có:

$$x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(-\infty; -6\right) \cup \left(5; +\infty\right)$.

Bài 2: Giải bất phương trình: $3x^2 + 2x + 5 > 0$

Lời giải:

Xét tam thức bậc hai: $3x^2 + 2x + 5$

Ta có: $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta = 2^2 - 4.3.5 = -54 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2 + 2x + 5 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Bài 3: Giải bất phương trình: $2x^2 - 4x - 5 < 0$.

Lời giải:

Xét tam thức bậc hai: $2x^2 - 4x - 5$

Ta có: $\Delta' = (-2)^2 - 2.(-5) = 14 > 0$

Nghiệm của tam thức là: $x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{14}}{2} = \frac{2+\sqrt{14}}{2}$, $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{14}}{2} = \frac{2-\sqrt{14}}{2}$

Hệ số a = 2 > 0 nên ta có:

$$2x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{14}}{2} < x < \frac{2+\sqrt{14}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}; \frac{2+\sqrt{14}}{2}\right)$.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải bất phương trình $-3x^2 + 7x - 4 < 0$.

Bài 2: Giải bất phương trình $x^2 - 3x - 1 \geq 0$.