## Các bài toán về phép vị tự

### I. Lý thuyết ngắn gọn

- Cho điểm I và một số thực và $k \neq 0$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k

Kí hiệu: $V_{(I;k)}$

$$V_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_0; y_0), M(x; y)$, gọi

$M'(x'; y') = V_{(I;k)}(M)$ thì $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

- Nếu $V_{(I;k)}(M) = M', V_{(I;k)}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$

- Phép vị tự tỉ số k:

+ Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó

+ Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng

+ Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng góc đã cho

+ Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$

- Tâm vị tự của hai đường tròn:

+ Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia, tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I; R) và (I’; R’)

+ Nếu $I \equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I; \pm\frac{R'}{R}\right)}$ biến (I;R) thành (I’;R’)

+ Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O; \frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O_1; -\frac{R'}{R}\right)}$ biến (I;R) thành (I’;R’). Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn $O_1$ là tâm vị tự trong của hai đường tròn

+ Nếu $I \neq I'$ và R = R’ thì có $V_{(O_1; -1)}$ biến (I;R) thành (I’;R’)

### II. Các dạng toán phép vị tự

**Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép vị tự**

**Phương pháp giải:** Dùng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép vị tự

**Ví dụ 1:** Cho điểm A (1; 2) và điểm I (2; 3). Tìm tọa độ A' là ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm I tỉ số 2

**Lời giải**

Gọi A' (x';y') suy ra $\overrightarrow{IA'} = (x'-2; y'-3); \overrightarrow{IA} = (-1;-1)$

Vì A' là ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm I tỉ số k=2 nên ta có:

$$\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (x'-2; y'-3) = 2(-1;-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2=-2 \\ y'-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=1 \end{cases} \Rightarrow A'(0;-1)$$

**Ví dụ 2:** Cho điểm M (-2; 5) và điểm E (2; -1). Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm E tỉ số -2

**Lời giải**

Gọi $M'(x';y') \Rightarrow \overrightarrow{EM'} = (x'-2; y'+1); \overrightarrow{EM} = (-4;6)$

Vì M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm E tỉ số k = 2 nên ta có:

$$\overrightarrow{EM'} = -2\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow (x'-2; y'+1) = -2(-4;6) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2=8 \\ y'+1=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=10 \\ y'=-13 \end{cases} \Rightarrow M'(10;-13)$$

**Dạng 2: Tìm tâm vị tự của hai đường tròn**

**Phương pháp giải:** Sử dụng phương pháp tìm tâm vị tự của hai đường tròn

**Ví dụ 3:** Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ và đường tròn (C') có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') biết tỉ số vị tự bằng 2

**Lời giải**

Đường tròn (C) có tâm là A (2; -3) bán kính R = 3

Đường tròn (C') có tâm là A' (1; 4) bán kính R' = 4

Hai đường tròn (C) và (C') có tâm không trùng nhau, bán kính khác nhau. Do đó tồn tại hai phép vị tự tâm $I_1$ tỉ số k = 2 và tâm $I_2$ tỉ số k = -2 biến đường tròn (C) thành đường tròn (C')

TH1: Xét k = 2

Gọi $I_1(x;y)$ là tâm vị tự, ta có: $\overrightarrow{IA} = (2-x;-3-y); \overrightarrow{IA'} = (1-x;4-y)$

$\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (1-x;4-y) = 2(2-x;-3-y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 4-2x \\ 4-y = -6-2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -10 \end{cases} \Rightarrow I_1(3;-10)$

Do đó với k = 2 ta có một tâm vị tự ngoài là $I_1(3;-10)$

TH2: Xét k = -2

Gọi $I_2(x;y)$ là tâm vị tự ta có: $\overrightarrow{IA} = (2-x;-3-y); \overrightarrow{IA'} = (1-x;4-y)$

Ta có: $\overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (1-x;4-y) = -2(2-x;-3-y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -4+2x \\ 4-y = 6+2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow I_2(\dfrac{5}{3};\dfrac{-2}{3})$

Do đó với k = -2 ta có một tâm vị tự trong là $I_2(\dfrac{5}{3};\dfrac{-2}{3})$

**Ví dụ 4:** Cho hai đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=4$

và $(C'):(x-8)^2+(y-4)^2=16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

**Lời giải**

Ta có: Đường tròn (C) có tâm I (2; 1) bán kính R = 2, đường tròn (C’) có tâm I’ (8; 4) bán kính R’ = 4

Do $I \neq I', R \neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(J';-2)}$ biến (C) thành (C’)

Gọi J (x; y)

Với k = 2 ta có: $\overrightarrow{JI'} = 2\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x = 2(2-x) \\ 4-y = 2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow J(-4;-2)$

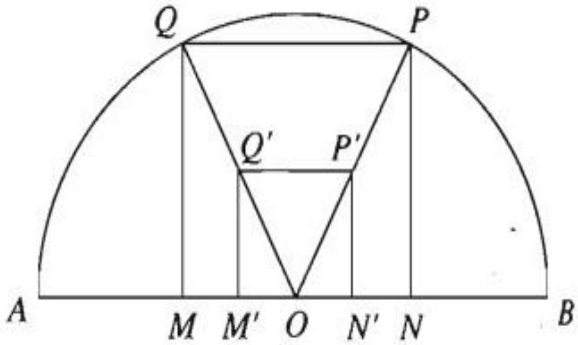
Tương tự với k = -2 ta được J’ (4; 2)

**Dạng 3: Sử dụng phép vị tự để giải các bài toán dựng hình**

**Phương pháp giải:** Để dựng một hình (H) nào đó ta quy về dựng một số điểm (đủ để xác định hình (H)) khi đó ta xem các điểm cần dựng đó là giao của hai đường trong đó một đường có sẵn và một đường là ảnh vị tự của một đường khác

**Ví dụ 5:** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên nửa đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính AB của nửa đường tròn đó

**Lời giải**




- Phân tích

Giả sử hình vuông MNPQ đã dựng xong thỏa mãn yêu cầu bài toán (với M, N nằm trên AB, còn P,Q nằm trên nửa đường tròn)

Gọi O là trung điểm của AB. Nối OQ và OP, dựng hình vuông M’N’P’Q’ sao cho M’, N’ nằm trên AB và O là trung điểm của M’N’ . Khi đó ta có:

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = k$$

Ta xem như MNPQ là ảnh của M’N’P’Q’ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{PQ}{P'Q'}$

- Cách dựng:

Dựng hình vuông M’N’P’Q’ ( có M’N’ thuộc AB và O là trung điểm của M’N’)

Nối OP’ và OQ’. Chúng cắt (O, AB) tại P và Q

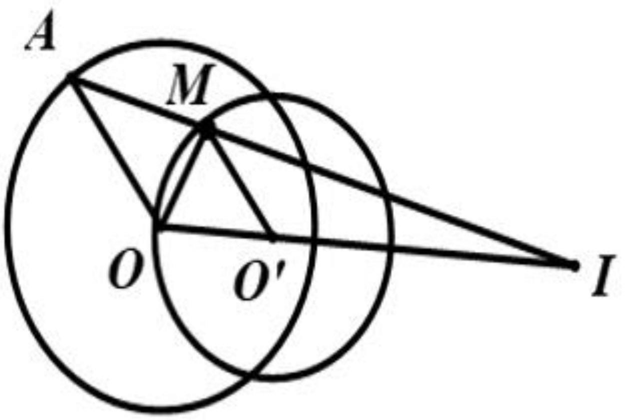
Hình chiếu của P và Q trên AB là N và M. Khi đó MNPQ chính là hình vuông cần dựng

**Dạng 4: Sử dụng phép vị tự để giải các bài toán tìm tập hợp điểm**

**Phương pháp giải**: Để tìm tập hợp điểm M ta có thể quy về tìm tập hợp điểm N và tìm một phép vị tự $V_{(I;k)}$ nào đó sao cho $V_{(I;k)}(N) = M$. Suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của quỹ tích N qua $V_{(I;k)}$

**Ví dụ 6:** Cho đường tròn (O; R) và một điểm I nằm ngoài đường tròn sao cho OI = 3R, A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O; R). Phân giác trong góc $\widehat{IOA}$ cắt IA tại điểm M. Tìm tập hợp điểm M khi A di động trên (O; R)

**Lời giải**




Theo tính chất đường phân giác ta có:

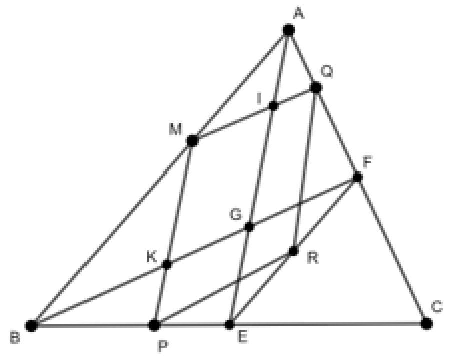
$$\frac{MI}{MA} = \frac{OI}{OA} = \frac{3R}{R} = 3 \Rightarrow IM = \frac{3}{4}IA \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$$

Suy ra $V_{(I;\frac{3}{4})}(A) = M$ mà A thuộc đường tròn (O; R) nên M thuộc $(O';\frac{3}{4}R)$ ảnh của (O; R) qua $V_{(I;\frac{3}{4})}$

Vậy tập hợp điểm M là $(O';\frac{3}{4}R)$ ảnh của (O; R) qua $V_{(I;\frac{3}{4})}$

**Ví dụ 7:** Cho tam giác ABC. Qua điểm M trên cạnh AB vẽ các đường song song với các đường trung tuyến AE và BF, tương ứng cắt BC và CA tai P, Q. Tìm tập hợp điểm R sao cho MPRQ là hình bình hành

**Lời giải**




Gọi $I = MQ \cap AE, K = MP \cap BF$ và G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\frac{MI}{BG} = \frac{AM}{AB} = \frac{AQ}{AF} = \frac{IQ}{GF} \Rightarrow \frac{MI}{IQ} = \frac{BG}{GF} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$$

Tương tự ta có: $\overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

Suy ra: $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MR}$

Do đó: $\overrightarrow{GR} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V_{(G;\frac{-1}{2})}(M) = R$

Mà M thuộc cạnh AB nên R thuộc ảnh của cạnh AB qua $V_{(G;\frac{-1}{2})}$ đoạn chính là đoạn EF

Vậy tập hợp điểm R là đoạn EF

## III. Bài tập áp dụng

**Bài 1:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$

Hãy viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I (1; 2) tỉ số k = -2

**Bài 2:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình 2x + y – 4 = 0. Hãy viết phương trình của đường thẳng $d_1$ là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k = 3

**Bài 3**: Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài với nhau tại A (có bán kính khác nhau). Một điểm M nằm trên đường tròn (O). Dựng đường tròn đi qua M và tiếp xúc với O và O’

**Bài 4:** Gọi A là giao hai đường đường tròn cắt nhau O và O’ Hãy dựng qua A một đường thẳng cắt hai đường tròn tại B và C sao cho AC = 2AB

**Bài 5:** Cho đường tròn (O; R). Có bao nhiêu phép vị tự biến (O; R) thành chính nó?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

**Bài 6:** Có bao nhiêu phép vị tự biến đường tròn (O; R) thành đường tròn (O’; R’) với $R \neq R'$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

**Bài 7:** Có hai đường thẳng song song d và d’. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số k = 20 biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

**Bài 8:** Có hai đường thẳng song song d và d’ và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số

**Bài 9:** Cho hình thang ABCD với hai cạnh đáy AB và CD thỏa mãn AB = 3CD. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số k là?

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{-1}{3}$

**Bài 10:** Một hình vuông có diện tích bằng 4. Qua phép vị tự $V_{(I;-2)}$ thì ảnh của hình vuông trên có diện tích tăng gấp mấy lần diện tích ban đầu?

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. 4

D. 8