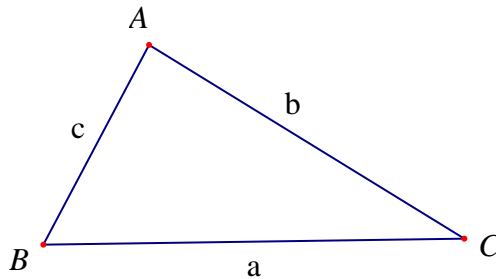


Bài 6. Hệ thức lượng trong tam giác

A. Lý thuyết

1. Định lí Côsin

Đối với tam giác ABC, ta thường kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.



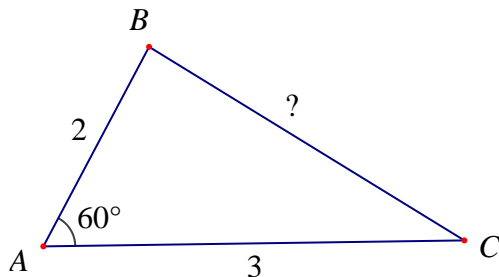
Định lí Côsin. Trong tam giác ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC có góc A bằng 60° và $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm. Tính độ dài cạnh BC.



Hướng dẫn giải

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

Suy ra $BC = \sqrt{7}$ (cm)

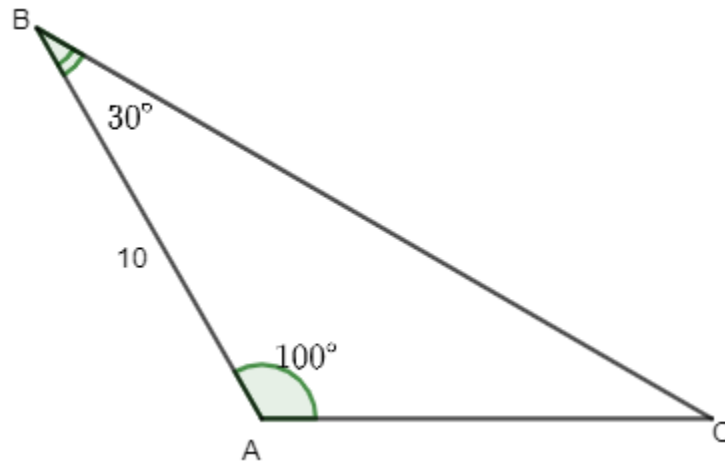
Vậy $BC = \sqrt{7}$ cm.

2. Định lí sin

Trong tam giác ABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$, $B = 30^\circ$, $c = 10$. Tính số đo góc C và a, b, R.

Hướng dẫn giải



Theo Định lí tổng ba góc của tam giác, ta có: $A + B + C = 180^\circ$.

Suy ra $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R.$$

Suy ra:

$$a = \frac{10}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 10\sqrt{3}$$

$$b = \frac{10}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 30^\circ = 10$$

$$R = \frac{10}{2 \sin 30^\circ} = 10.$$

Vậy $a = 10\sqrt{3}$; $b = 10$; $R = 10$; $C = 30^\circ$.

3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

- Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Chú ý: Áp dụng định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

+ Biết hai cạnh và góc xen giữa.

+ Biết ba cạnh.

+ Biết một cạnh và hai góc kề.

Ví dụ: Giải tam giác ABC biết $b = 12$, $C = 60^\circ$, $A = 100^\circ$.

Hướng dẫn giải

Theo định lí tổng ba góc của tam giác, ta có: $A + B + C = 180^\circ$.

Suy ra $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (100^\circ + 60^\circ) = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{12}{\sin 20^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

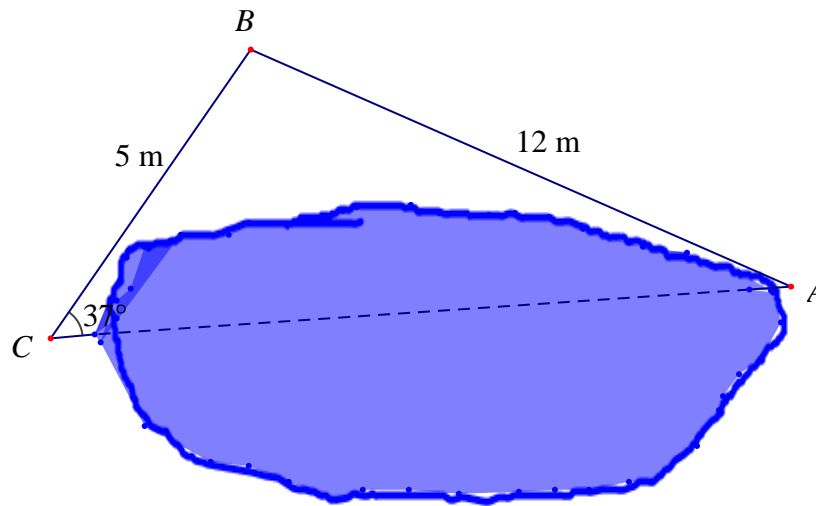
Suy ra:

$$a = \frac{12}{\sin 20^\circ} \cdot \sin 100^\circ \approx 34,6$$

$$c = \frac{12}{\sin 20^\circ} \cdot \sin 60^\circ \approx 30,4$$

Vậy tam giác ABC có: $A = 100^\circ$, $B = 20^\circ$, $C = 60^\circ$; $a \approx 34,6$; $b = 12$; $c \approx 30,4$.

Ví dụ: Để đo khoảng cách giữa hai đầu C và A của một hồ nước người ta không thể đi trực tiếp từ C đến A, người ta tiến hành như sau: Chọn 1 điểm B sao cho đo được khoảng cách BC, BA và góc BCA. Sau khi đo, ta nhận được $BC = 5\text{m}$, $BA = 12\text{m}$, $\angle BCA = 37^\circ$. Tính khoảng cách AC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí sin đối với tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{12}{\sin 37^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{5 \cdot \sin 37^\circ}{12} \approx 0,2508$$

$$\Rightarrow A \approx 14^\circ 31'$$

$$\Rightarrow B \approx 180^\circ - (37^\circ + 14^\circ 31') = 128^\circ 29'.$$

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin B = \frac{12}{\sin 37^\circ} \cdot \sin 128^\circ 29' \approx 15,61 \text{ (m)}$$

Vậy khoảng cách $AC \approx 15,61 \text{ m}$.

4. Công thức tính diện tích tam giác

Đối với tam giác ABC: A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác ABC sau:

$$+) S = pr = \frac{(a + b + c)r}{2}$$

$$+) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

$$+) S = \frac{abc}{4R}$$

$$+) \text{ Công thức Heron: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ:

a) Tính diện tích tam giác ABC biết các cạnh $b = 14 \text{ cm}$, $c = 35 \text{ cm}$ và $A = 60^\circ$.

b) Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC, biết các cạnh $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{245\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC là: $\frac{245\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

b) Ta có nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}.$

Áp dụng công thức Heron, ta có diện tích tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6 \cdot (6-4) \cdot (6-5) \cdot (6-3)} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Mặt khác: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (cm)}.$

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1 \text{ (cm)}.$

Vậy diện tích tam giác ABC là 6 cm^2 , bán kính đường tròn ngoại tiếp là $2,5 \text{ cm}$; bán kính đường tròn nội tiếp là 1 cm .

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập tự luận

Bài 1: Giải tam giác ABC biết $AB = 15$, $BC = 35$, $B = 60^\circ$. (Độ dài cạnh AC làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất, số đo góc A và C làm tròn đến độ).

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925.$$

Do đó $AC = \sqrt{925} \approx 30,4$.

Mặt khác:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}} \approx -0,08.$$

$$\Rightarrow A \approx 95^\circ$$

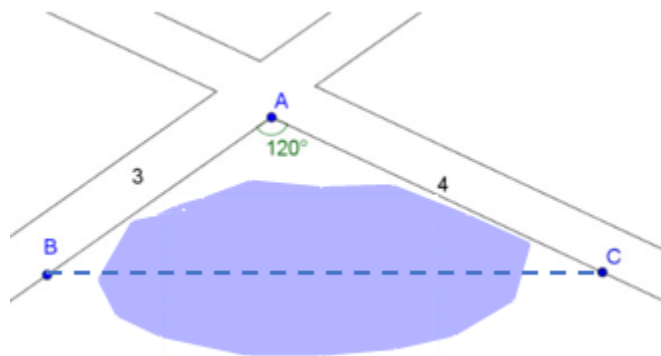
$$\Rightarrow C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (95^\circ + 60^\circ) = 25^\circ$$

Vậy tam giác ABC có:

$$A \approx 95^\circ; B = 60^\circ; C \approx 25^\circ.$$

$$AB = 15, AC \approx 30,4; BC = 35.$$

Bài 2: Một hồ nước nằm ở góc tạo bởi hai con đường. Hãy tính khoảng cách từ B đến C, biết góc tạo bởi hai con đường là góc A bằng 120° và khoảng cách từ A đến B là 3 km, khoảng cách từ A đến C là 4 km.



Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 120^\circ = 37.$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{37} \approx 6,08 \text{ (km)}.$$

Vậy khoảng cách từ B đến C khoảng 6,08 km.

Bài 3: Tính diện tích tam giác ABC biết $a = 12 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 23 \text{ cm}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{12 + 15 + 23}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng công thức Heron cho tam giác ABC ta có:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$S = \sqrt{25.(25 - 12).(25 - 15).(25 - 23)} = \sqrt{6500} \approx 80,62 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC là $80,62 \text{ cm}^2$.

B2. Bài tập trắc nghiệm

Bài 4. Tam giác ABC có $AC = 3\sqrt{3}$, $AB = 3$, $BC = 6$. Tính số đo góc B

A. 60° ;

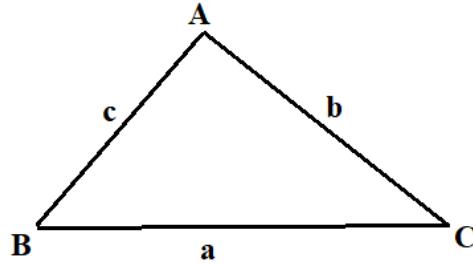
B. 45° ;

C. 30° ;

D. 120° .

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A



Áp dụng hệ quả của định lý côsin, ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 3^2 - (3\sqrt{3})^2}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^\circ.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

A. $\sqrt{2}$;

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$;

D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{6}^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45^\circ.$

Do đó: $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{2}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \sqrt{2}.$

Bài 6. Tính diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là 5; 12; 13.

A. 60;

B. 30;

C. 34;

D. $7\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Nửa chu vi của tam giác là: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$

Diện tích của tam giác là:

$$S = \sqrt{p(p-5)(p-12)(p-13)} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = 30.$$