Các tính chất của bất đẳng thức lớp 10 đầy đủ, chi tiết

I. Lí thuyết tổng hợp.

1. Khái niệm bất đẳng thức:

Các mệnh đề dạng “a < b”, “a > b”, “$a \le b$” hoặc “$a \ge b$” được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả:

Nếu mệnh đề “$a < b \Rightarrow c < d$” đúng thì ta nói bất đẳng thức c < d là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức a < b và viết là $a < b \Rightarrow c < d$.

3. Bất đẳng thức tương đương:

Nếu bất đẳng thức a < b là hệ quả của bất đẳng thức c < d và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

4. Tính chất của bất đẳng thức:

+ Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số (biểu thức):

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

+ Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số (biểu thức), với c dương:

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc$$

+ Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số (biểu thức), với c âm:

$$a < b \Leftrightarrow ac > bc$$

+ Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều: $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$

+ Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều: Với a > 0, c > 0 : $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$

+ Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$

Với $n \in \mathbb{N}^*$ và a > 0, $a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$

+ Khai căn hai vế của một bất đẳng thức:

$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ (a > 0, b > 0)

$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

- Chú ý:

+ Các mệnh đề "a < b" hoặc "a > b" gọi là các bất đẳng thức ngặt.

+ Các mệnh đề "$a \le b$" hoặc "$a \ge b$" gọi là các bất đẳng thức không ngặt.

+ Các tính chất của bất đẳng thức đúng với cả bất đẳng thức ngặt và bất đẳng thức không ngặt.

II. Các công thức.

$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

$a < b \Leftrightarrow ac < bc \ (c > 0)$

$a < b \Leftrightarrow ac > bc \ (c < 0)$

$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$

$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd \ (a > 0, c > 0)$

$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} \ (n \in \mathbb{N}^*)$

$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n} \ (n \in \mathbb{N}^* \text{ và } a > 0)$

$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ (a > 0, b > 0)

$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Chứng minh rằng $x^3 + y^3 \ge x^2y + xy^2$ với $\forall x, y \ge 0$.

Lời giải:

Với $\forall x, y \ge 0 \Rightarrow x + y \ge 0$

Ta có: $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2)\ge x^2y+xy^2-(x^2y+xy^2)$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng $\forall x,y\ge 0$ vì $x+y\ge 0$ và $(x-y)^2\ge 0$)

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho số thực x, y. Chứng minh rằng:

a) $x^4+3\ge 4x$;

b) $x\ge y\Leftrightarrow x^5\ge y^5$;

c) $xy\le \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Lời giải:

a)

$x^4+3\ge 4x$

$\Leftrightarrow x^4+3-4x\ge 4x-4x$

$\Leftrightarrow x^4+3-4x\ge 0$

$\Leftrightarrow x^4-x-3x+3\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x^3-1)-3(x-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[x(x^2+x+1)-3\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x-3)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3-x^2+2x^2+x-3)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x^3-x^2)+(2x^2+x-3)\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2(x-1)+(2x+3)(x-1)\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(x+1)^2+2\right] \geq 0$ (*)

Có: $(x-1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+2 \geq 2 \Rightarrow (x+1)^2+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (*) luôn đúng với mọi số thực x.

$\Rightarrow x^4+3 \geq 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (điều cần phải chứng minh)

b)

$x \geq y$

$\Leftrightarrow x^{2.2+1} \geq y^{2.2+1}$

$\Leftrightarrow x^5 \geq y^5$ (điều cần phải chứng minh)

c)

$xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2xy \leq \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right).2$

$\Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 2xy - 2xy \leq x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng với mọi số thực x, y)

$\Rightarrow xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$ với mọi số thực x, y (điều cần phải chứng minh).

Bài 3: So sánh các số sau bằng cách áp dụng tính chất của bất đẳng thức:

a) $\sqrt{27}$ và $\sqrt{34}$;

b) $\sqrt[3]{78}$ và $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải:

a)

Có: 27 < 34

$\Leftrightarrow \sqrt{27} < \sqrt{34}$

b)

Có: 78 > 3

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{78} > \sqrt[3]{3}$

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Chứng minh rằng $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$

Bài 2: So sánh hai số bằng cách áp dụng tính chất của bất đẳng thức: $\sqrt{7}$ và $2\sqrt{2}$.