Bài 11: Tích vô hướng của hai vectơ

Bài 4.29 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

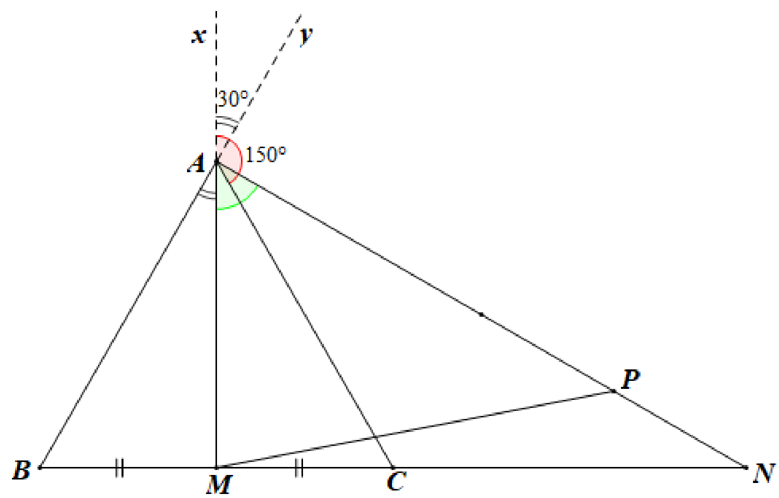
Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Gọi M là trung điểm của BC. Tính tích vô hướng của các cặp vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi N là điểm đối xứng với B qua C. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

c) Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho AP = 3PN. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tính độ dài đoạn MP.

Lời giải



a) Tam giác ABC đều có M là trung điểm của BC nên đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác và đường cao.

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.60° = 30°$$

Gọi Ax là tia đối của tia AM, tia Ay là tia đối của tia AB.

Do đó $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BA}\right) = xAy = BAM = 30°$

$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC}\right) = xAC = 180° - MAC$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC}\right) = 180° - 30° = 150°$

Khi đó ta có:

• $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = \left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BA}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = MA.BA.\cos 30°$

Xét tam giác BAM vuông tại M, theo định lí Pythagoras ta có:

$$MA = \sqrt{BA^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

• $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = MA.AC.\cos 150°$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.1.\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-3}{4}.$$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}$ và $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = \frac{-3}{4}$.

b) • Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

• N đối xứng với B qua C nên C là trung điểm của BN

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{2}.\left(2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{2}.\left(2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}.\left(2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

Mà $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= AB.AC.\cos BAC = 1.1.\cos 60° = \frac{1}{2}.$

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}.\left(2AC^2 - AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}.\left(2.1^2 - 1^2 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

Vậy $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}$

c) • Vì P thuộc đoạn thẳng AN thỏa mãn AP = 3PN $\Rightarrow AP = \frac{3}{4}AN$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}.\left(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

• Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}$

$$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow MP = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right|$$

$$\Rightarrow MP^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 - 2.\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \frac{25}{16}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= AC^2 + \frac{25}{16}AB^2 - \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= 1^2 + \frac{25}{16}.1^2 - \frac{5}{2}.\frac{1}{2}$$

$= \dfrac{21}{16}$

$\Rightarrow MP = \sqrt{\dfrac{21}{16}} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}.$

Vậy $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AC} - \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ và $MP = \dfrac{\sqrt{21}}{4}.$

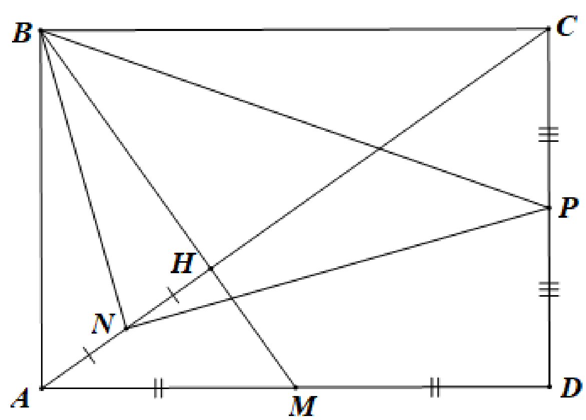
Bài 4.30 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 1, $BC = \sqrt{2}.$ Gọi M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.

b) Gọi H là giao điểm của AC, BM. Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD. Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.

Lời giải



a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ khi đó $|\vec{a}| = 1$ và $|\vec{b}| = \sqrt{2}.$

Vì AB ⊥ AD nên $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{0}$

ABCD là hình chữ nhật nên cũng là hình bình hành nên ta có:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ (quy tắc hình bình hành)

M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right).\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)$

$= \frac{1}{2}\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b}$

$= \frac{1}{2}\vec{0} - \vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}^2 - \vec{0}$ (do $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0}$)

$= -\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2$

$= -1^2 + \frac{1}{2}.\left(\sqrt{2}\right)^2 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BM}$

$\Rightarrow$ AC ⊥ BM.

b) • Xét tam giác ABC vuông tại C, theo định lí Pythagore ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3$

$\Rightarrow AC = \sqrt{3}$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$AB^2 = AH.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{1^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} : \sqrt{3} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Khi đó $\overrightarrow{HC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{HA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}$ (quy tắc ba điiểm)

Vì N là trung điểm của AH nên $\overrightarrow{NA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NB} = \dfrac{1}{2}.\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB}$

$= -\dfrac{1}{6}.\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{a}$

$= \dfrac{5}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{6}\vec{b}$

• Có N là trung điểm của HA và P là trung điểm của CD, theo kết quả bài 4.12, trang 58, Sách giáo khoa Toán 10, tập một, ta có:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}.\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}.\vec{b}$

Khi đó $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NP} = \left(\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}\right).\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}.\vec{b}\right)$

$= \frac{5}{18}\vec{a}^2 + \frac{25}{36}\vec{a}.\vec{b} - \frac{1}{18}\vec{a}.\vec{b} - \frac{5}{36}\vec{b}^2$

$= \frac{5}{18}\vec{a}^2 + \frac{25}{36}\vec{a}.\vec{b} - \frac{1}{18}\vec{a}.\vec{b} - \frac{5}{36}\vec{b}^2$

$= \frac{5}{18}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{25}{36}\vec{0} - \frac{1}{18}\vec{0} - \frac{5}{36}\left|\vec{b}\right|^2$ (do $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0}$)

$= \frac{5}{18}.1^2 - \frac{5}{36}.\left(\sqrt{2}\right)^2$

$= \frac{5}{18} - \frac{5}{36}.2 = 0$

Do đó $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{NB} \perp \overrightarrow{NP}$

$\Rightarrow$ NB $\perp$ NP.

Bài 4.31 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

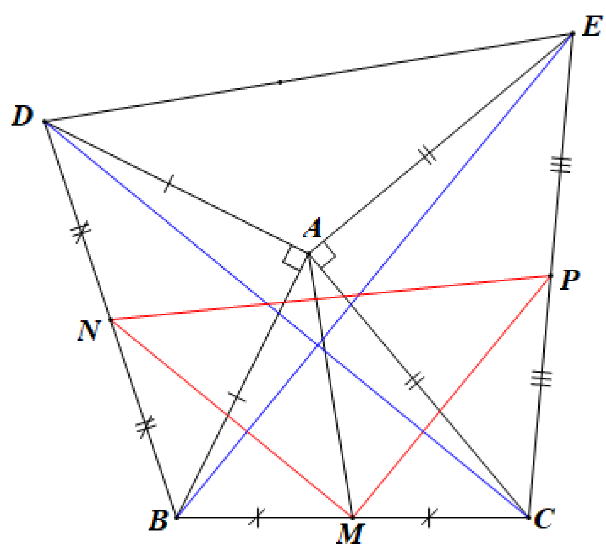
Cho tam giác ABC có $A < 90°$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm BC, BD, CE. Chứng minh rằng:

a) AM vuông góc với DE;

b) BE vuông góc với CD;

c) Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.

Lời giải



a) +) Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

+) Theo quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$

Mà AB ⊥ AD nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

Và AC ⊥ AE nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = 0$

Do đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$

Ta có:

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB.AE.\cos BAE$

Và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC.AD.\cos CAD$

• AB = AD (do ΔABD vuông cân tại A)

Và AC = AE (do ΔACE vuông cân tại A)

• $BAE = BAC + CAE = BAC + 90°$

Và $CAD = BAC + BAD = BAC + 90°$

$\Rightarrow BAE = CAD$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}\right) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE}$

b) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = 0$)

Ta có:

• $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = AE.AD.\cos DAE$

Và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos BAC$

• AB = AD và AC = AE

• $DAE = 360° - DAB - BAC - CAE$

$\Rightarrow DAE = 360° - 90° - BAC - 90°$

$\Rightarrow DAE = 180° - BAC$

$\Rightarrow \cos DAE = \cos\left(180° - BAC\right) = -\cos BAC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow$ BE ⊥ CD.

c) Ta có: $BE^2 = \overrightarrow{BE}^2 = \left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

$= \overrightarrow{AE}^2 - 2.\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$= AE^2 + AB^2 - 2.AE.AB.\cos EAB$

$= AD^2 + AC^2 - 2.AD.AC.\cos CAD$

$= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)^2$

$= \overrightarrow{CD}^2 = CD^2$

$\Rightarrow$ BE = CD (1)

Xét tam giác BCD có M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD

Nên MN là đường trung bình của ΔBCD

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}CD$ và MN // CD (2)

Chứng minh tương tự ta cũng có:

MP là đường trung bình của ΔBCE

$\Rightarrow MP = \frac{1}{2}BE$ và MP // BE (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra MN = MP.

Vì BE ⊥ CD (câu b), MN // CD và MP // BE

Nên MN ⊥ MP

$\Rightarrow \widehat{NMP} = 90°$

Tam giác MNP có MN = MP và $\widehat{NMP} = 90°$

Suy ra tam giác MNP là tam giác vuông cân tại M.

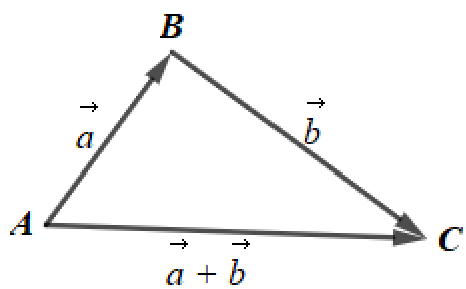
Bài 4.32 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $\left|\vec{a}\right| = 6, \left|\vec{b}\right| = 8$ và $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 10.$

a) Tính tích vô hướng $\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}+\vec{b}$.

Lời giải



Gọi ba điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

Khi đó $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Và AB = 6, BC = 8 và AC = 10.

Xét tam giác ABC có:

• $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

Do đó tam giác ABC vuông tại B (định lí Pythagore đảo)

• $\cos BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

a) Ta có $\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AC\cos BAC$

$= 6.10.\dfrac{3}{5} = 36$

Vậy $\vec{a}.\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 36.$

b) $\cos\left(\vec{a};\vec{a} + \vec{b}\right) = \cos BAC = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow BAC \approx 53°7'48''$

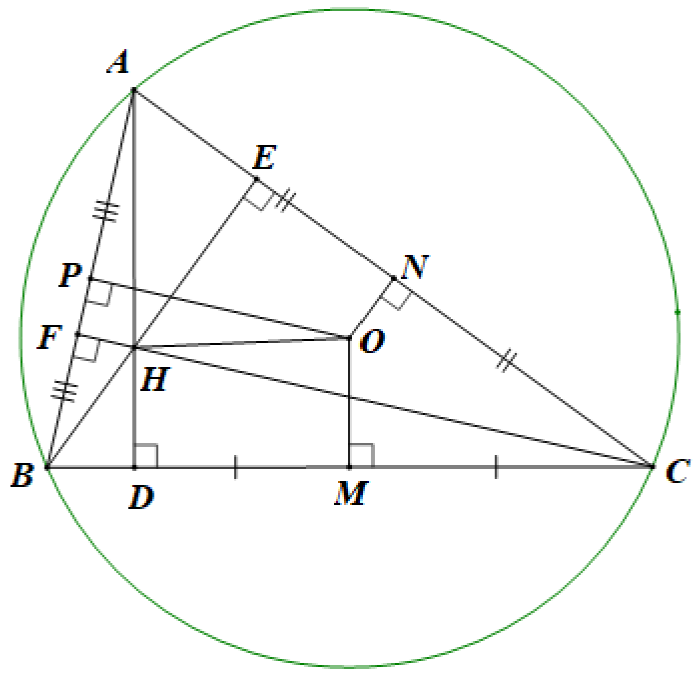
Vậy $\left(\vec{a};\vec{a} + \vec{b}\right) \approx 53°7'48''.$

Bài 4.33 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Lời giải



Gọi H và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

• Vì D, M lần lượt là hình chiếu của H và O lên BC, nên $\overrightarrow{MD}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{OH}$ trên giá của $\overrightarrow{BC}$

Theo định lí hình chiếu (được giới thiệu ở phần Nhận xét của Ví dụ 2, trang 62, Sách Bài tập Toán 10, tập một) ta có:

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH}.\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB}$ (1)

Chứng minh tương tự ta cũng có:

• $\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH}.\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NE}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC}$ (2)

• $\overrightarrow{PF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH}.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA}$

= 0

Vậy $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{AB} = 0.$

Bài 4.34 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(2; 1) và B(4; 3).

a) Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A.

Lời giải

a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên AB ⊥ AC hay $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Giả sử C(x; 0) là điểm thuộc trục hoành.

Với A(2; 1), B(4; 3) và C(x; 0) ta có:

$\overrightarrow{AB} = \left(2;2\right)$ và $\overrightarrow{AC} = \left(x - 2;-1\right)$

Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 2(x – 2) + 2(–1) = 0$

$\Leftrightarrow$ 2x – 4 – 2 = 0

$\Leftrightarrow$ 2x = 6

$\Leftrightarrow$ x = 3

Vậy C(3; 0).

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (1; -1)$

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = (2; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

• $\overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

• $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{10}$ (theo định lí Pythagore)

Khi đó chu vi tam giác ABC là:

AB + AC + BC = $2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{10} = 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$ (đơn vị độ dài)

Diện tích tam giác ABC là:

$\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ (đơn vị diện tích)

b) Tam giác ABD vuông cân tại A nên AB ⊥ AD và AB = AD

• Với AB ⊥ AD ta có $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

Mà $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ (theo câu a)

Nên $\overrightarrow{AD}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$

Gọi D(a; b) là tọa độ điểm D cần tìm.

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (a-2; b-1)$

Mà $\overrightarrow{AC} = (1; -1)$

Do đó $\overrightarrow{AD}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ khi và chỉ khi:

$\dfrac{a-2}{1} = \dfrac{b-1}{-1} \Leftrightarrow a – 2 = 1 – b$

$\Leftrightarrow b – 1 = 2 – a$ (4)

• Với AB = AD ta có $AB^2 = AD^2$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2$

$\Leftrightarrow 8 = (a – 2)^2 + (2 – a)^2$ (do b – 1 = 2 – a)

$\Leftrightarrow 8 = 2.(a – 2)^2$

$\Leftrightarrow (a – 2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=2 \\ a-2=-2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=0 \end{array}\right.$

Với a = 4 thì b – 1 = 2 – 4 $\Rightarrow$ b = –1 ta có điểm $D_1(4; –1)$.

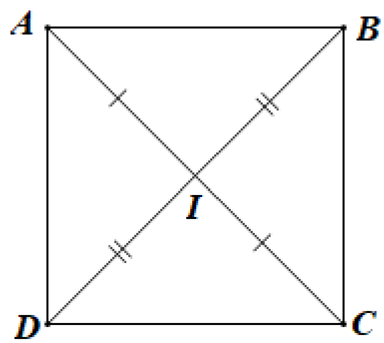
Với a = 0 thì b – 1 = 2 – 0 $\Rightarrow$ b = 3 ta có điểm $D_2(0; 3)$.

Vậy có hai điểm D thỏa mãn yêu cầu đề bài là $D_1(4; –1)$ và $D_2(0; 3)$.

Bài 4.35 SBT Toán 10 trang 65 Tập 1:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(1; 4) và C(9; 2) là hai đỉnh của hình vuông ABCD. Tìm toạ độ các đỉnh B, D, biết rằng tung độ của B là một số âm.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và BD

Vì ABCD là hình vuông nên ta có: I là trung điểm của AC; AC = BD và AC ⊥ BD tại I.

• I là trung điểm của AC nên:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{1+9}{2} = 5 \\ y_I = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(5;\, 3)$$

Giả sử B(x; y) (y < 0) và D(a; b)

Vì I là trung điểm của BD nên ta có:

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{x+a}{2} \\ 3 = \dfrac{y+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 - x \\ b = 6 - y \end{cases} \Rightarrow D(10 - x;\, 6 - y)$$

Với A(1; 4); C(9; 2); B(x; y) và D(10 – x; 6 – y) ta có:

$\overrightarrow{AC} = (8;-2)$ và $\overrightarrow{BD} = (10 - 2x; 6 - 2y)$

• AC ⊥ BD $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow$ 8.(10 – 2x) + (–2).(6 – 2y) = 0

$\Leftrightarrow$ 80 – 16x – 12 + 4y = 0

$\Leftrightarrow$ 4y = 16x – 68

$\Leftrightarrow$ y = 4x – 17 (với y < 0)

• AC = BD $\Leftrightarrow$ $AC^2 = BD^2$

$\Leftrightarrow 8^2 + (-2)^2 = (10 - 2x)^2 + (6 - 2y)^2$

$\Leftrightarrow 64 + 4 = (10 - 2x)^2 + [6 - 2(4x - 17)]^2$

$\Leftrightarrow (10 - 2x)^2 + (6 - 8x + 34)^2 = 68$

$\Leftrightarrow (10 - 2x)^2 + (40 - 8x)^2 = 68$

$\Leftrightarrow 4.(x - 5)^2 + 64.(x - 5)^2 = 68$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = 1 \\ x - 5 = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Với x = 6 ta có y = 4.6 – 17 = 7 (không thỏa mãn y < 0)

Với x = 4 ta có y = 4.4 – 17 = –1 (thỏa mãn y < 0)

Khi đó ta có điểm B(4; –1)

Mà D(10 – x; 6 – y) nên D(6; 7).

Vậy B(4; –1) và D(6; 7).

Bài 4.36 SBT Toán 10 trang 66 Tập 1:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(1; 1) và B(7; 5).

a) Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều A và B.

b) Tìm toạ độ của điểm D thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

Lời giải

a) Vì C cách đều A và B nên CA = CB

⇔ $AC^2 = BC^2$

Giả sử C(x; 0) là điểm thuộc trục hoành

Với A(1; 1); B(7; 5) và C(x; 0) ta có:

• $\overrightarrow{AC}=\left(x-1;-1\right)$ ⇒ $AC^2 = (x – 1)^2 + (–1)^2$

⇒ $AC^2 = x^2 – 2x + 2$

• $\overrightarrow{BC}=\left(x-7;-5\right)$ ⇒ $BC^2 = (x – 7)^2 + (–5)^2$

⇒ $BC^2 = x^2 – 14x + 74$

Do đó $AC^2 = BC^2$

⇔ $x^2 – 2x + 2 = x^2 – 14x + 74$

⇔ 12x = 72

⇔ x = 6

Vậy C(6; 0).

b) Gọi M là trung điểm của AB.

Khi đó $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$

Do đó để vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất thì vectơ $2\overrightarrow{DM}$ có độ dài ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ DM có độ dài ngắn nhất

Hay DM^2 nhỏ nhất.

Giả sử D(0; y) là điểm thuộc trục tung

Với A(1; 1); B(7; 5) và D(0; y) ta có:

• M là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_M = \dfrac{1+7}{2} = 4 \\ y_M = \dfrac{1+5}{2} = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ M(4; 3)

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = (4; 3 - y)$

$\Rightarrow DM^2 = 4^2 + (3 - y)^2$

Hay $DM^2 = (y - 3)^2 + 16$

Vì $(y - 3)^2 \geq 0$ với mọi y

Nên $(y - 3)^2 + 16 \geq 16$ với mọi y

Hay $DM^2 \geq 16$ với mọi y

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$.

Do đó DM đạt giá trị nhỏ nhất khi D(0; 3)

Vậy D(0; 3) thì vectơ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

Bài 4.37 SBT Toán 10 trang 66 Tập 1:

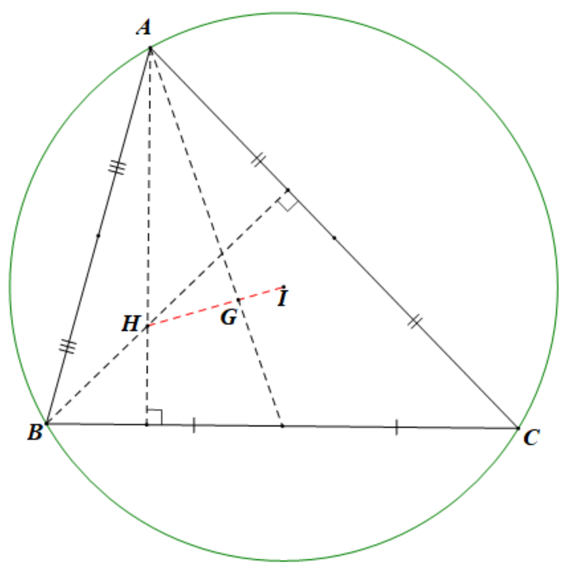
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm A(–3; 2), B(1; 5) và C(3; −1).

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ấy.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm toạ độ của I.

Lời giải



a) Với A(–3; 2), B(1; 5) và C(3; −1) ta có:

$\overrightarrow{AB}=(4;3)$ và $\overrightarrow{AC}=(6;-3)$

Vì $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-3}=-1$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng

Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-3+1+3}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{2+5+(-1)}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{1}{3};2\right)$$

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là: $G\left(\dfrac{1}{3};2\right)$.

b) Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên AH ⊥ BC và BH ⊥ AC

Hay $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$

Giả sử H(x; y) là tọa độ trực tâm tam giác ABC

Với A(–3; 2), B(1; 5), C(3; −1) và H(x; y) ta có:

• $\overrightarrow{AH} = (x+3; y-2)$ và $\overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (x+3).2 + (y-2).(-6) = 0$

$\Rightarrow$ 2x – 6y = –18

$\Rightarrow$ x – 3y = –9   (1)

• $\overrightarrow{BH} = (x-1; y-5)$ và $\overrightarrow{AC} = (6; -3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = (x-1).6 + (y-5).(-3) = 0$

$\Rightarrow$ 6x – 3y = –9   (2)

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có:

$5x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow$ H(0; 3)

Vậy tọa độ trực tâm của tam giác ABC là H(0; 3)

c) Theo kết quả phần a) của Bài 4.15, trang 54, Sách Bài tập, Toán 10, tập một ta có:

$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ với M là trung điểm của BC.

Giả sử I(a; b) là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Với A(–3; 2), B(1; 5), C(3; −1), H(0; 3) và I(a; b) ta có:

• $\overrightarrow{AH} = (3;1)$

• M là trung điểm của BC nên $\begin{cases} x_M = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ M(2; 2)

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2-a; 2-b)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IM} = (4-2a; 4-2b)$

Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4-2a \\ 1 = 4-2b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$$

Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 4.38 SBT Toán 10 trang 66 Tập 1:

Cho ba điểm M, N, P. Nếu một lực $\vec{F}$ không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực $\vec{F}$ trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?

a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P.

b) Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P.

Lời giải

a) Do lực $\vec{F}$ không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm nên công sinh bởi lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P là:

$A_1 = \vec{F}.\overrightarrow{MN} + \vec{F}.\overrightarrow{NP}$

$A_1 = \vec{F}.\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\right)$

$A_1 = \vec{F}.\overrightarrow{MP}$ (1)

b) Do lực $\vec{F}$ không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm nên công sinh bởi lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P là:

$A_2 = \vec{F}.\overrightarrow{MP}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $A_1 = A_2$ $\left(= \vec{F}.\overrightarrow{MP}\right)$

Vậy $A_1 = A_2$.