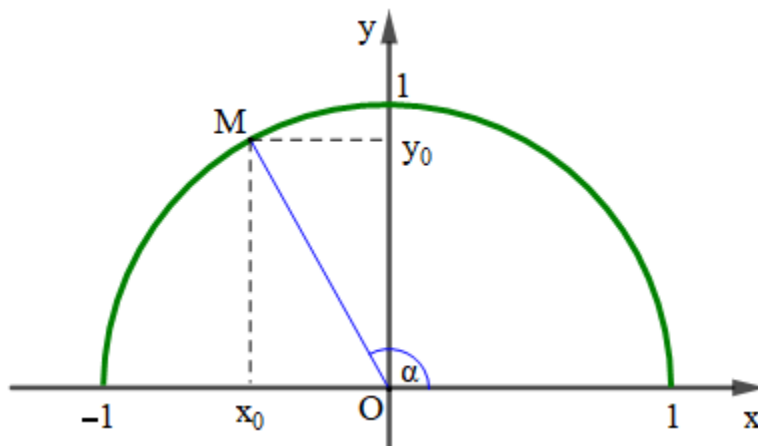


Ôn tập chương IV

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α bất kì với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta có định nghĩa sau đây:



Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, ta có:

- Tung độ y_0 của M là sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M là cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha = x_0$;
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α .

Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.

Nếu α là góc tù thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

b) $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.

$\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Với mọi góc α thoả mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, ta luôn có:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha \ (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt:

α Giá trị lượng giác	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\parallel	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	\parallel	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	\parallel

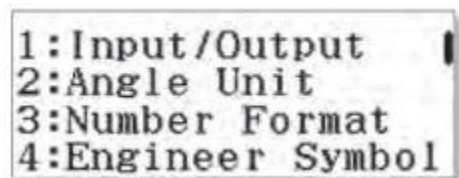
Chú ý: Trong bảng, kí hiệu “ \parallel ” để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

4. Sử dụng máy tính cầm tay về tính giá trị lượng giác của một góc

Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tính nhanh chóng giá trị lượng giác của một góc.

Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím **SHIFT** **MENU** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

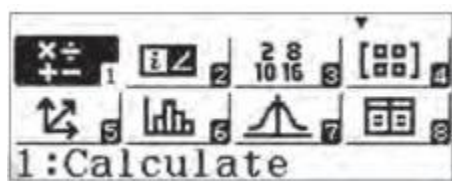


Ấn phím **2** để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



Ấn tiếp phím **1** để xác định đơn vị đo góc là “độ”.

Ấn các phím **MENU** **1** để vào chế độ tính toán như hình ảnh dưới đây:



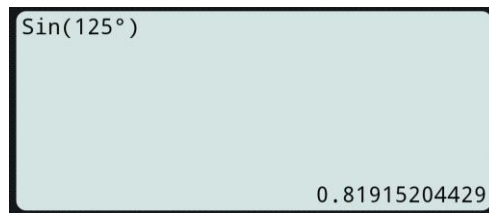
4.1. Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ: Sử dụng máy tính cầm tay, tính $\sin 125^\circ$, $\cos 50^\circ 12'$, $\tan 160^\circ 56' 25''$, $\cot 100^\circ$.

Hướng dẫn giải

- Để tính $\sin 125^\circ$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây: **sin** **1** **2** **5** **° ' "** **)** **=**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Sin(125°)

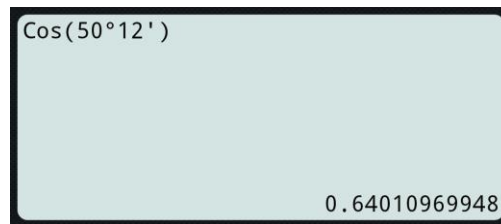
0.81915204429

Vậy $\sin 125^\circ \approx 0,81915204429$.

- Để tính $\cos 50^\circ 12'$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\cos} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{1} \boxed{2} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Cos(50°12')

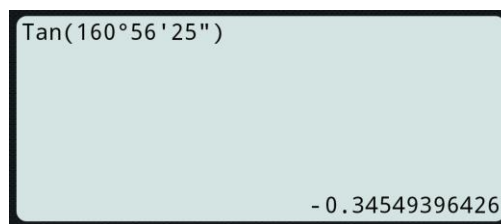
0.64010969948

Vậy $\cos 50^\circ 12' \approx 0,64010969948$.

- Để tính $\tan 160^\circ 56' 25''$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{5} \boxed{6} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{2} \boxed{5} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Tan(160°56'25'')

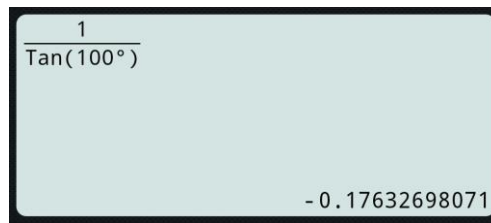
-0.34549396426

Vậy $\tan 160^\circ 56' 25'' \approx -0,34549396426$.

- Để tính $\cot 100^\circ$, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

$\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{^\circ} \boxed{' } \boxed{)} \boxed{=}$

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



A calculator screen with a light blue background and a black border. The display shows the expression $\frac{1}{\tan(100^\circ)}$ and the result -0.17632698071 .

Vậy $\cot 100^\circ \approx -0,17632698071$.

4.2. Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

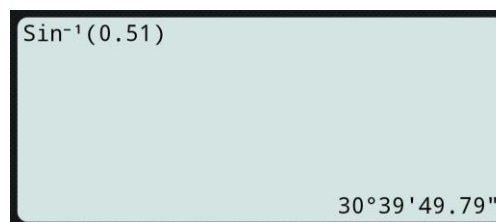
Ví dụ: Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) biết $\sin \alpha = 0,51$; $\cos \alpha = -0,7$; $\tan \alpha = \sqrt{2}$; $\cot \alpha = 1,7$.

Hướng dẫn giải

- Để tìm α khi biết $\sin \alpha = 0,51$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] **[sin]** **[0]** **[.]** **[5]** **[1]** **)** **[=]** **[° ' "]**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



A calculator screen with a light blue background and a black border. The display shows the expression $\sin^{-1}(0.51)$ and the result $30^\circ 39' 49.79''$.

Vậy với $\sin \alpha = 0,51$ thì $\alpha \approx 30^\circ 39' 50''$.

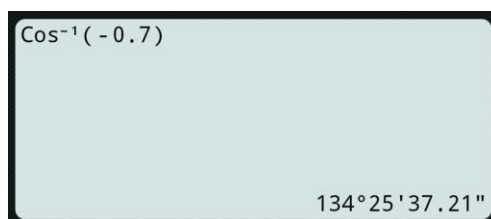
Ta đã được học với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ nên ngoài giá trị $\alpha \approx 30^\circ 39' 50''$ thì ta còn có giá trị $\alpha \approx 180^\circ - 30^\circ 39' 50'' \approx 149^\circ 20' 10''$.

Ta bấm máy tính như sau: **[1]** **[8]** **[0]** **[° ' "]** **[-]** **[3]** **[0]** **[° ' "]** **[3]** **[9]** **[° ' "]** **[5]** **[0]** **[° ' "]** **[=]**

- Để tìm α khi biết $\cos \alpha = -0,7$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

[SHIFT] **[cos]** **[-]** **[0]** **[.]** **[7]** **)** **[=]** **[° ' "]**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\cos \alpha = -0,7$ thì $\alpha \approx 134^\circ 25' 37''$.

- Để tìm α khi biết $\tan \alpha = \sqrt{2}$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

SHIFT **tan** **$\sqrt{}$** **2** **\triangleright** **)** **=** **$^\circ ' ''$**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì $\alpha \approx 54^\circ 44' 8''$.

- Để tìm α khi biết $\cot \alpha = 1,7$, trước hết ta tính $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

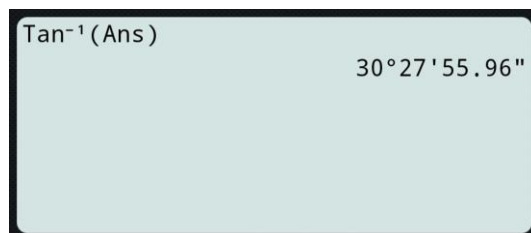
1 **$\frac{\Box}{\Box}$** **1** **.** **7** **=**

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Sau đó ta bấm liên tiếp các phím: SHIFT tan Ans) = ° ' "

Khi đó ta được kết quả hiện trên màn hình là:



Vậy với $\cot \alpha = 1,7$ thì $\alpha \approx 30^\circ 27' 56''$.

5. Định lí côsin trong tam giác

Định lí côsin: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Từ định lí côsin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

6. Định lí sin trong tam giác

Định lí sin: Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

Trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả:

$$a = 2R.\sin A; b = 2R.\sin B; c = 2R.\sin C;$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}.$$

7. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

+) $BC = a, CA = b, AB = c.$

+) h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.

+) R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

+) r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

+) p là nửa chu vi tam giác.

+) S là diện tích tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác sau:

$$(1) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B;$$

$$(3) S = \frac{abc}{4R};$$

$$(4) S = pr;$$

$$(5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Công thức Heron).}$$

8. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

Để giải tam giác, ta thường sử dụng một cách hợp lí các hệ thức lượng như: định lí sin, định lí cosin và các công thức tính diện tích tam giác.

9. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $AB = AC = a$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại A, theo định lí Pythagore ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó nửa chu vi tam giác ABC là } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{a + a + a\sqrt{2}}{2} = a \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$$

Tam giác ABC vuông tại A nên diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Mặt khác } S = pr = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} \quad \text{và} \quad R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} = \frac{a \cdot a \cdot a \sqrt{2}}{4 \cdot \frac{a^2}{2}} = \frac{a \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{R}{r} = \frac{\frac{a \sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2 + \sqrt{2}}} = \frac{a \sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{a} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

Bài 2. Nhà thầu đất Đức đã được cung cấp các kích thước sau đây qua điện thoại: Khu vườn hình tam giác ABC có $\angle CAB = 45^\circ$, $AC = 8$ m, $BC = 6$ m. Nền đất cần phải có độ cao 10 cm.

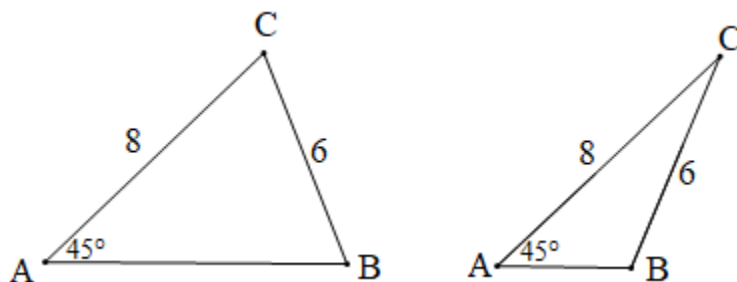
- Giải thích tại sao nhà thầu đất Đức cần thêm thông tin từ khách hàng của mình.
- Cần khối lượng đất tối đa là bao nhiêu (để tạo thành nền của khu đất) nếu khách hàng của anh Đức không thể cung cấp thêm thông tin cần thiết?

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Áp dụng định lí sin với tam giác ABC ta có: } \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin \angle CBA}$$

$$\Rightarrow \sin \angle CBA = \frac{AC \cdot \sin \angle CAB}{BC} = \frac{8 \cdot \sin 45^\circ}{6} \approx 0,943$$

$$\Rightarrow \angle CBA \approx 70^\circ 34' \text{ hoặc } \angle CBA \approx 180^\circ - 70^\circ 34' \approx 109^\circ 26' \text{ (hình vẽ dưới đây)}$$



Như vậy ta có thể có hai giá trị khác nhau của góc CBA nên hình tam giác không được xác định một cách duy nhất.

Điều đó giải thích tại sao anh Đức cần thêm thông tin về khu vườn.

b) Nền đất của khu vườn là một khối lăng trụ đứng với đáy là tam giác ABC và chiều cao không đổi là 10 cm, nên khối lượng đất tối đa để tạo ra nền của khu đất tỉ lệ với diện tích lớn nhất của tam giác ABC.

+) Nếu $CBA \approx 70^\circ 34'$ thì $ACB \approx 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ 34' \approx 64^\circ 26'$.

Khi đó diện tích của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin ACB \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 64^\circ 26' \approx 21,65 \text{ (m}^2\text{)}$$

+) Nếu $CBA \approx 109^\circ 26'$ thì $ACB \approx 180^\circ - 45^\circ - 109^\circ 26' \approx 25^\circ 34'$.

Khi đó diện tích của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin ACB \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 26^\circ 34' \approx 10,36 \text{ (m}^2\text{)}$$

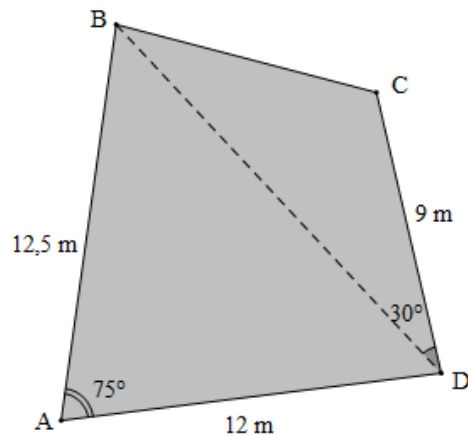
Khi đó diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $21,65 \text{ m}^2$.

Đổi $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$.

Khối lượng đất tối đa cần khoảng: $21,65 \cdot 0,1 \approx 2,165 \text{ (m}^3\text{)}$

Vậy khối lượng đất tối đa cần để tạo thành nền của khu đất khoảng $2,165 \text{ m}^3$.

Bài 3. Vợ chồng anh Minh đang xem xét mua một mảnh đất. Nhân viên nhà đất cung cấp cho họ một bản vẽ chi tiết như hình vẽ dưới. Tính diện tích của mảnh đất và số tỉ đồng vợ chồng anh Minh cần dùng để mua đất biết giá đất là 25 triệu đồng/ m² đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hướng dẫn giải

Diện tích của mảnh đất là diện tích của hai tam giác ABD và tam giác BCD.

$$\text{Ta có: } S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 12 \cdot \sin 75^\circ \approx 72,44 \text{ (m}^2\text{)}$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác BAD ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$$

$$\Rightarrow BD^2 = 12,5^2 + 12^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 12 \cdot \cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow BD \approx 14,92 \text{ (m)}$$

$$\text{Do đó } S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CD \cdot \sin \angle BDC \approx \frac{1}{2} \cdot 14,92 \cdot 9 \cdot \sin 30^\circ \approx 33,57 \text{ (m}^2\text{)}$$

Khi đó diện tích mảnh đất là:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} \approx 72,44 + 33,57 = 106,01 \text{ (m}^2\text{)}$$

Số tiền vợ chồng anh Minh cần dùng để mua mảnh đất này là:

$$106,01 \cdot 25 = 2\,650,25 \text{ (triệu đồng)} = 2,65025 \text{ tỉ đồng} \approx 2,65 \text{ tỉ đồng.}$$

Vậy diện tích mảnh đất khoảng $106,01 \text{ m}^2$ và số tiền cần dùng mua đất là khoảng 2,65 tỉ đồng.

Bài 4. Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } A = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \cos 120^\circ \cdot \tan 135^\circ \cdot \cot 150^\circ.$$

$$\text{b) } B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ;$$

$$\text{c) } C = \sin(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x) + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2(90^\circ - x)} - \tan^2 x.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } A = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \cos 120^\circ \cdot \tan 135^\circ \cdot \cot 150^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (-\sqrt{3})$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{6} + 4\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{b) } B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$$

$$B = (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) \text{ (hai góc bù nhau)}$$

$$B = 0.$$

$$\text{c) } C = \sin(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x) + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2(90^\circ - x)} - \tan^2 x.$$

$$C = \sin x - \sin x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$$

$$C = 0 + \tan^2 x - \tan^2 x$$

$$C = 0.$$

Bài 5. Cho góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) với $\tan \alpha = -\sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức

$$M = \cos \alpha + \cot^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Hướng dẫn giải

Với $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ ta có $\alpha = 120^\circ$.

$$\text{Suy ra: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó:

$$M = \cos \alpha + \cot^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

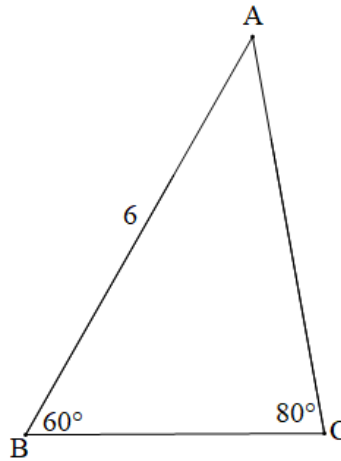
$$M = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$M = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}$$

$$M = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = -\frac{3}{2}.$$

Bài 6. Tính độ dài cạnh và góc chưa biết của tam giác ABC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và đường cao kẻ từ C của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) trong hình sau:



Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $B = 60^\circ, C = 80^\circ$ ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (định lí tổng ba góc trong tam giác)}$$

$$\Rightarrow A = 180^\circ - B - C$$

$$\Rightarrow A = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$$

$$\text{Theo định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 40^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 80^\circ} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \frac{6 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 3,92 \\ AC = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 5,28 \\ R = \frac{6}{2 \cdot \sin 80^\circ} \approx 3,05 \end{cases}$$

Nửa chu vi tam giác ABC là: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} \approx \frac{6 + 5,28 + 3,92}{2} = 7,6$

Áp dụng công thức Heron ta có diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$$

$$S_{ABC} \approx \sqrt{7,6 \cdot (7,6 - 6) \cdot (7,6 - 5,28) \cdot (7,6 - 3,92)} \approx 10,19 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Mặt khác $S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} \approx \frac{10,19}{7,6} \approx 1,34$

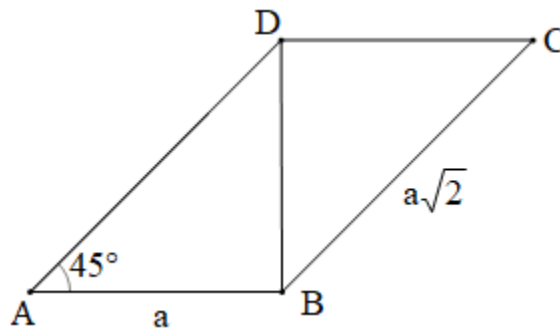
Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_c$ (với h_c là đường cao kẻ từ C đến AB của tam giác ABC)

$$\Rightarrow h_c = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{AB} \approx \frac{2 \cdot 10,19}{6} \approx 3,4.$$

Vậy $A = 40^\circ$; $BC \approx 3,92$; $AC \approx 5,28$; $R \approx 3,05$; $r \approx 1,34$; $h_c \approx 3,4$ và $S \approx 10,19$ (đơn vị diện tích).

Bài 7. Hình bình hành ABCD có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $BAD = 45^\circ$. Tính diện tích hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Vì ABCD là hình bình hành nên $AD = BC$ (tính chất hình bình hành)

Mà $BC = a\sqrt{2}$ nên $AD = a\sqrt{2}$

Diện tích tam giác ABD là:

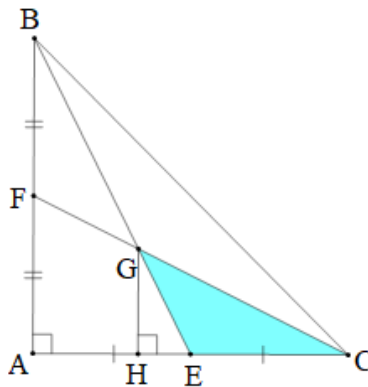
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin BAD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Do đó diện tích hình bình hành ABCD là:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Bài 8. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. Tính diện tích tam giác GEC.

Hướng dẫn giải



Vì BE là trung tuyến của tam giác ABC nên E là trung điểm của AC.

$$\text{Do đó } EC = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ (cm)}$$

Hai đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

$$\text{Khi đó } GE = \frac{1}{3} BE \text{ (tính chất trọng tâm của tam giác)}$$

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống AC.

Suy ra $GH \parallel AB$.

Do đó $\frac{GH}{BA} = \frac{GE}{BE}$ (định lí Ta – let trong tam giác ABE)

$$\text{Hay } \frac{GH}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10(\text{cm})$$

$$\text{Diện tích tam giác GEC là: } S_{\text{GEC}} = \frac{1}{2} \cdot GH \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75(\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích tam giác GEC là 75 cm^2 .

Bài 9. Giải tam giác ABC biết $AC = 16$, $A = 60^\circ$ và $B = 50^\circ$.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có $A = 60^\circ, B = 50^\circ$ ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (định lí tổng ba góc trong tam giác)}$$

$$\Rightarrow C = 180^\circ - A - B$$

$$\Rightarrow C = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

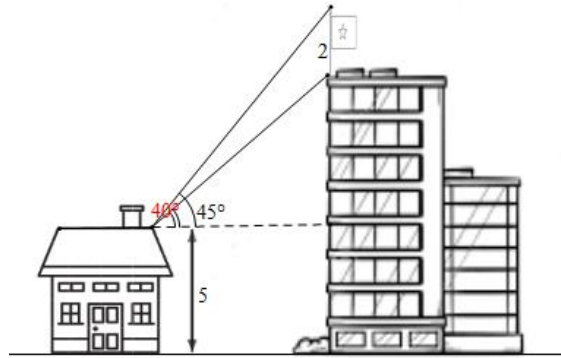
$$\text{Theo định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{16}{\sin 50^\circ} = \frac{AB}{\sin 70^\circ}$$

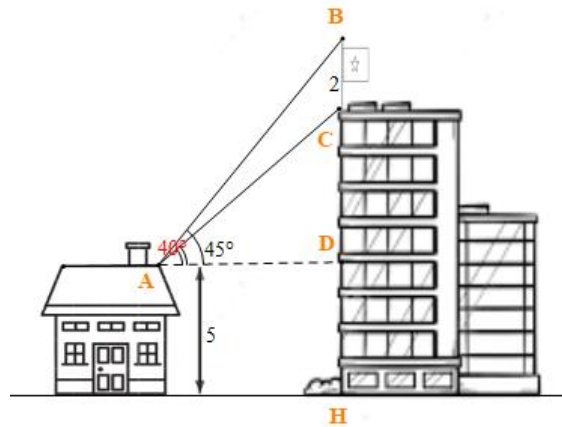
$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \frac{16 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 18,1 \\ AB = \frac{16 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 19,6 \end{cases}$$

Vậy $C = 70^\circ, BC \approx 18,1$ và $AB \approx 19,6$.

Bài 10. Trên nóc một toà nhà có một cột cờ cao 2 m. Từ vị trí quan sát A cao 5 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột cờ dưới góc 45° và 40° so với phương nằm ngang (hình vẽ). Tìm chiều cao của toà nhà.



Hướng dẫn giải



Từ hình vẽ ta có $BAC = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$ và $ABD = 180^\circ - (BAD + ADB)$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

Do đó $ABD = 45^\circ$.

Suy ra: $ABC = ABD = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC có: $\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AC}{\sin ABC}$

$$\text{Suy ra } AC = \frac{BC \cdot \sin ABC}{\sin BAC} = \frac{2 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 5^\circ} \approx 16,2 (\text{m})$$

Trong tam giác vuông ADC có $CD = AC \cdot \sin CAD \approx 16,2 \cdot \sin 40^\circ \approx 10,4 (\text{m})$.

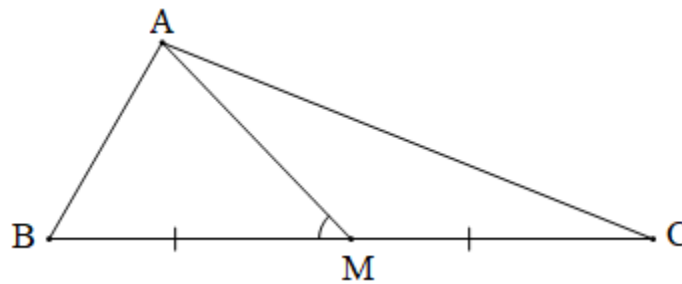
Do đó $CH = CD + DH \approx 10,4 + 5 \approx 15,4 (\text{m})$.

Vậy chiều cao của toà nhà là khoảng 15,4 m.

Bài 11. Tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 8$, M là trung điểm của BC, $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ và

$AM > 3$. Tính AM và giải tam giác ABC biết tam giác ABC là tam giác tù.

Hướng dẫn giải



Vì M là trung điểm của BC nên $BM = MC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

Xét tam giác ABM, áp dụng hệ quả định lí côsin ta có:

$$\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2 \cdot AM \cdot BM}$$

$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{AM^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot AM \cdot 4}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 + 7 = \frac{40\sqrt{13}}{26} AM$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (tm : } AM > 3) \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (ktm : } AM > 3) \end{cases}$$

Do đó $AM = \sqrt{13}$.

Vì AMB và AMC là hai góc kề bù nên $AMB + AMC = 180^\circ$.

$$\text{Suy ra } \cos AMC = -\cos AMB = -\frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

Xét tam giác AMC , áp dụng định lí côsin ta có:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2.AM.CM.\cos AMC$$

$$\Rightarrow AC^2 = (\sqrt{13})^2 + 4^2 - 2.\sqrt{13}.4.\left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)$$

$$\Rightarrow AC^2 = 49$$

$$\Rightarrow AC = 7.$$

Xét tam giác ABM có $AB = 3$, $BM = 4$, $AM = \sqrt{13}$ áp dụng định lí côsin ta có:

$$\cos ABM = \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{2.AB.BM}$$

$$\Rightarrow \cos ABM = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{13})^2}{2.3.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABM = 60^\circ \Rightarrow ABC = 60^\circ.$$

Xét tam giác ABC , áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AC}{\sin ABC}$

$$\Rightarrow \frac{8}{\sin BAC} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin BAC = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\Rightarrow BAC \approx 82^\circ \text{ hoặc } BAC \approx 98^\circ$$

Mà tam giác ABC là tam giác tù nên $BAC \approx 98^\circ$.

Xét tam giác ABC ta có:

$$BAC + ABC + ACB = 180^\circ \text{ (định lí tổng ba góc trong tam giác)}$$

$$\Rightarrow ACB = 180^\circ - BAC - ABC$$

$$\Rightarrow ACB \approx 180^\circ - 98^\circ - 60^\circ = 22^\circ.$$

Vậy $AM = \sqrt{13}$, $AC = 7$, $ABC = 60^\circ$, $BAC \approx 98^\circ$ và $ACB \approx 22^\circ$.