CHUYÊN ĐỀ 2. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC.
NHỊ THỨC NEWTON.
BÀI 2. NHỊ THỨC NEWTON.

Trang 32, 33

HĐ1 trang 32 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển $(a + b)^n$, $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Trong Bài 25 SGK Toán 10 (bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống), ta đã biết:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Với $n \in \{1; 2: 3; 4; 5\}$, trong khai triển của mỗi nhị thức $(a + b)^n$:

a) Có bao nhiêu số hạng?

b) Tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng bao nhiêu?

c) Số mũ của a và b thay đổi thế nào khi chuyển từ số hạng này đến số hạng tiếp theo, tính từ trái sang phải?

Lời giải:

a) Có n + 1 số hạng, số hạng đầu tiên là a^n và số hạng cuối cùng là b^n.

b) Tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng đều bằng n.

c) Số mũ của a giảm 1 đơn vị và số mũ của b tăng 1 đơn vị khi chuyển từ số hạng này đến số hạng tiếp theo, tính từ trái sang phải.

HĐ2 trang 33 Chuyên đề Toán 10: Tam giác Pascal

Viết các hệ số của khai triển $(a + b)^n$ với một số giá trị đầu tiên của n, trong bảng tam giác sau đây, gọi là tam giác Pascal

$(a + b)^0$

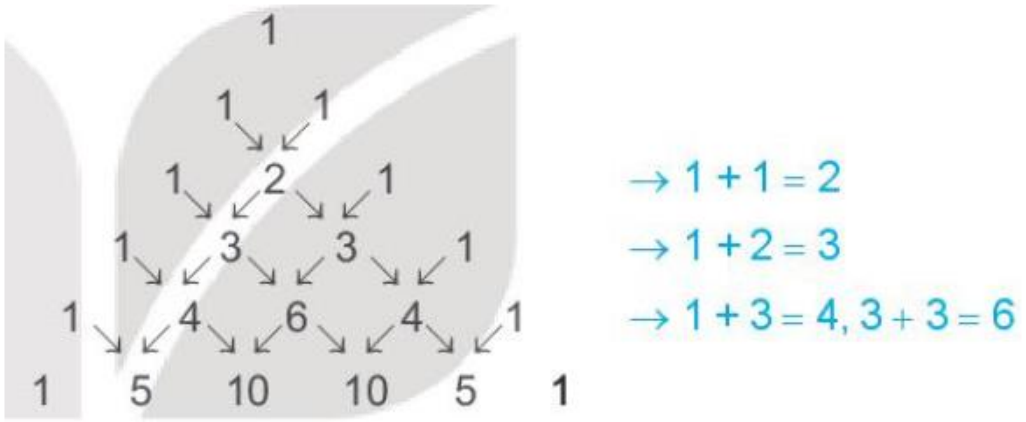
$(a + b)^1$

$(a + b)^2$

$(a + b)^3$

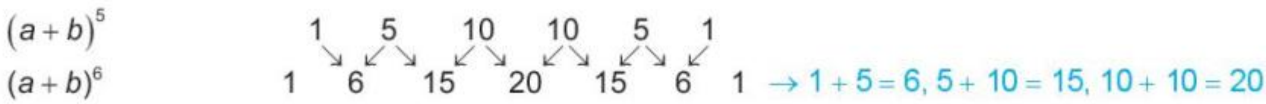
$(a + b)^4$

$(a + b)^5$



Hàng đầu quy ước gọi là hàng 0. Hàng n ứng với các hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$.

Từ tính chất này ta có thể tìm bất kì hàng nào của tam giác Oasscal từ hàng ở ngay phía trên nó. Chẳng hạn ta có thể tìm hàng 6 từ hàng 5 như sau:



Trang 34

Luyện tập 1 trang 34 Chuyên đề Toán 10:

a) Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của $(a + b)^7$.

b) Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của $(2x – 1)^4$.

Lời giải:

a) $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

b) $(2x – 1)^4 = [(2x + (–1)]^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(–1) + 6(2x)^2(–1)^2 + 4(2x)(–1)^3 + (–1)^4$

$= 16x^4 – 32x^3 + 24x^2 – 8x + 1$.

HĐ3 trang 34 Chuyên đề Toán 10:

Tính chất của các số C_n^k

a) Quan sát ba dòng đầu, hoàn thành tiếp hai dòng cuối theo mẫu:

$(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^0 b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^0 b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^0 b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = ...$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = ...$

Nhận xét rằng các hệ số khai triển của hai số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối luôn bằng nhau. Hãy so sánh, chẳng hạn, C_4^1 và C_4^3, C_5^2 và C_5^3. Từ đó hãy dự đoán hệ thức giữa C_n^k và C_n^{n-k} $(0 \le k \le n)$.

b) Dựa vào kết quả của HĐ3a, ta có thể viết những hàng đầu của tam giác Pascal dưới dạng:

$(a + b)^1$ $\qquad C_0^0$

$(a + b)^2$ $\qquad C_1^0 \quad C_1^1$

$(a + b)^3$ $\qquad C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$(a + b)^4$ $\qquad C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$(a + b)^5$ $\qquad C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

$\qquad C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$

Từ tính chất của tam giác Pascal, hãy so sánh $C_1^0 + C_1^1$ và C_2^1, $C_2^0 + C_2^1$ và C_3^1,... Từ đó hãy dự đoán hệ thức giữa $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ và C_n^k.

Lời giải:

a) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$.

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$.

Ta thấy $C_4^1 = C_4^3,\ C_5^2 = C_5^3,...$

Dự đoán: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

b) Ta thấy $C_1^0 + C_1^1 = C_2^1,\ C_2^0 + C_2^1 = C_3^1,...$

Dự đoán: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

Trang 35, 36

HĐ4 trang 35 Chuyên đề Toán 10:

Quan sát khai triển nhị thức của $(a + b)^n$ với $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ở HĐ3, hãy dự đoán công thức khai triển trong trường hợp tổng quát.

Lời giải:

Dự đoán công thức khai triển trong trường hợp tổng quát:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n.$$

Luyện tập 2 trang 36 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển $(x – 2y)^6$.

Lời giải:

$(x – 2y)^6$

$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5(-2y) + C_6^2x^4(-2y)^2 + C_6^3x^3(-2y)^3$

$+ C_6^4x^2(-2y)^4 + C_6^5x(-2y)^5 + C_6^6(-2y)^6$

$$= x^6 - C_6^1 2x^5y + C_6^2 2^2 x^4y^2 - C_6^3 2^3 x^3y^3 + C_6^4 2^4 x^2y^4 - C_6^5 2^5 xy^5 + 2^6 y^6.$$

Luyện tập 3 trang 36 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2 – 3x)^{10}$.

Lời giải:

Số hạng chứa x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2 – 3x)^{10}$ hay $(–3x + 2)^{10}$ là

$$C_{10}^{10-7}\left(-3x\right)^7 2^{10-7} = C_{10}^3\left(-3\right)^7 2^3 x^7 = -2099520x^7.$$

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2 – 3x)^{10}$ là –2099520.

Vận dụng trang 36 Chuyên đề Toán 10:

(Số các tập con của tập hợp có n phần tử)

a) Viết khai triển nhị thức Newton của $(1 + x)^n$.

b) Cho x = 1 trong khai triển ở câu a), viết đẳng thức nhận được. Giải thích ý nghĩa của đẳng thức này với lưu ý rằng C_n^k (0 < k < n) chính là số tập con gồm k phần tử của một tập hợp có n phần tử.

c) Tương tự, cho x = –1 trong khai triển ở câu a), viết đẳng thức nhận được. Giải thích ý nghĩa của đẳng thức này.

Lời giải:

a) Ta có:

$$(x+1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}1 + C_n^2x^{n-2}1^2 + \ldots + C_n^{n-1}x1^{n-1} + C_n^n1^n$$
$$= C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}x + C_n^n.$$

b) Cho x = 1, ta được:

$$(1+1)^n = C_2^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} + C_n^2 1^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}1 + C_n^n$$

hay $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$

Ý nghĩa của đẳng thức này là tổng số tập con của một tập hợp gồm n phần tử là 2^n.

c) Cho x = –1, ta được:

$$(-1+1)^n = C_n^0\left(-1\right)^n + C_n^1\left(-1\right)^{n-1} + C_n^2\left(-1\right)^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}\left(-1\right) + C_n^n$$

hay $0 = C_n^0(-1)^n + C_n^1(-1)^{n-1} + C_n^2(-1)^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}(-1) + C_n^n$.

Ý nghĩa của đẳng thức này là số tập con có chẵn phần tử và số tập hợp con có lẻ phần tử của một tập hợp gồm n phần tử là bằng nhau.

Trang 37

Bài 2.9 trang 37 Chuyên đề Toán 10: Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển:

a) $(x – 1)^5$;

b) $(2x – 3y)^4$.

Lời giải:

a) $(x – 1)^5 = [x + (–1)]^5 = x^5 + 5x^4(–1) + 10x^3(–1)^2 + 10x^2(–1)^3 + 5x(–1)^4 + (–1)^5$

$= x^5 – 5x^4 + 10x^3 – 10x^2 + 5x – 1$.

b) $(2x – 3y)^4 = [(2x + (–3y)]^4$

$= (2x)^4 + 4(2x)^3(–3y) + 6(2x)^2(–3y)^2 + 4(2x)(–3y)^3 + (–3y)^4$

$= 16x^4 – 96x^3y + 216x^2y^2 – 216xy^3 + 81y^4$.

Bài 2.10 trang 37 Chuyên đề Toán 10: Viết khai triển theo nhị thức Newton:

a) $(x + y)^6$;

b) $(1 – 2x)^5$.

Lời giải:

a) $(x + y)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5y + C_6^2x^4y^2 + C_6^3x^3y^3 + C_6^4x^2y^4 + C_6^5xy^5 + C_6^6y^6$

$= x^6 + C_6^1x^5y + C_6^2x^4y^2 + C_6^3x^3y^3 + C_6^4x^2y^4 + C_6^5xy^5 + y^6$.

b) $(1 – 2x)^5 = [(–2x) + 1]^5$

$= C_5^0(–2x)^5 + C_5^1(–2x)^4 1 + C_5^2(–2x)^3 1^2 + C_5^3(–2x)^2 1^3 + C_5^4(–2x)1^4 + C_5^5 1^5$

$= –2^5x^5 + C_5^1 2^4x^4 – C_5^2 2^3x^3 + C_5^3 2^2x^1 + C_5^4 2x + 1$.

Bài 2.11 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x + 3)^{10}$.

Lời giải:

Số hạng chứa x^8 trong khai triển của $(2x + 3)^{10}$ là

$C_{10}^{10-8}(2x)^8 3^{10-8} = C_{10}^2 2^8 3^2 x^8 = 103680x^8$.

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x + 3)^{10}$ là 103680.

Bài 2.12 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 – 3x)^n$ là 90 . Tìm n.

Lời giải:

Số hạng chứa x^2 trong khai triển của $(1 – 3x)^n$ hay $[(–3x) +1]^n$ là

$C_n^{n-2}\left(-3x\right)^2 1^{n-2} = 9C_n^2 x^2.$

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 – 3x)^n$ là $9C_n^2$.

$$\Rightarrow 9C_n^2 = 90 \Rightarrow C_n^2 = 10 \Rightarrow \frac{n\left(n-1\right)}{2} = 10 \Rightarrow n = 5.$$

Bài 2.13 trang 37 Chuyên đề Toán 10: Từ khai triển biểu thức $(3x – 5)^4$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lời giải:

Sử dụng tam giác Pascal, ta có:

$(3x – 5)^4 = (3x)^4 + 4(3x)^3(–5) + 6(3x)^2(–5)^2 + 4(3x)(–5)^3 + (–5)^4$

$= 81x^4 – 540x^3 + 1350x^2 – 1500x + 625.$

Tổng các hệ số của đa thức này là: 81 – 540 + 1350 – 1500 + 625 = 16.

Bài 2.14 trang 37 Chuyên đề Toán 10: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1 – 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.

Lời giải:

+) Số hạng chứa x^4 trong khai triển của $(1 – 2x)^5$ hay $[(–2x) +1]^5$ là

$C_5^{5-4}\left(-2x\right)^4 1^{5-4} = 80x^4.$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển của $(1 – 2x)^5$ là 80

$\Rightarrow$ hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1 – 2x)^5$ là 1.80 = 80 (1).

+) Số hạng chứa x^3 trong khai triển của $(1 + 3x)^{10}$ hay $[3x +1]^{10}$ là

$C_{10}^{10-3}\left(3x\right)^3 1^{10-3} = 3240x^3.$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển của $(1 + 3x)^{10}$ là 3240

$\Rightarrow$ hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2(1 + 3x)^{10}$ là 1.3240 = 3240 (2).

+) Từ (1) và (2) suy ra hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1 – 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$ là 80 + 3240 = 3320.

Bài 2.15 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Tính tổng sau đây:

$C_{2021}^{0}-2C_{2021}^{1}+2^{2}C_{2021}^{2}-2^{3}C_{2021}^{3}+\ldots-2^{2021}C_{2021}^{2021}$.

Lời giải:

$C_{2021}^{0}-2C_{2021}^{1}+2^{2}C_{2021}^{2}-2^{3}C_{2021}^{3}+\ldots-2^{2021}C_{2021}^{2021}$

$=C_{2021}^{0}+C_{2021}^{1}(-2)+C_{2021}^{2}(-2)^{2}+C_{2021}^{3}(-2)^{3}+\ldots+C_{2021}^{2021}(-2)^{2021}$

$=C_{2021}^{0}1^{2021}+C_{2021}^{1}1^{2020}(-2)+C_{2021}^{2}1^{2019}(-2)^{2}+C_{2021}^{3}1^{2018}(-2)^{3}+\ldots+C_{2021}^{2021}(-2)^{2021}$

$=\left[1+(-2)\right]^{2021}=(-1)^{2021}=-1.$

Bài 2.16 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Tìm số tự nhiên n thoả mãn $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+\ldots+C_{2n}^{2n}=2^{2021}$.

Lời giải:

Áp dụng câu c) phần Vận dụng trang 36 ta có:

$C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}-C_{2n}^{3}+C_{2n}^{4}+\ldots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0$

$\Rightarrow C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+\ldots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+C_{2n}^{5}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$.

Mặt khác, áp dụng câu b) phần Vận dụng trang 36 ta có:

$C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}+C_{2n}^{4}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=2^{2n}$

$\Rightarrow C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+\ldots+C_{2n}^{2n}$

$=\dfrac{C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}+C_{2n}^{4}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}}{2}$

$=\dfrac{2^{2n}}{2}=2^{2n-1}\Rightarrow 2n-1=2021\Rightarrow n=1011.$

Bài 2.17 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Tìm số nguyên dương n sao cho $C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+\ldots+2^{n}C_{n}^{n}=243$.

Lời giải:

Có:

$C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+\ldots+2^{n}C_{n}^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}2+C_{n}^{2}2^{2}+\ldots+C_{n}^{n}2^{n}$

$=C_{n}^{0}1^{n}+C_{n}^{1}1^{n-1}2+C_{n}^{2}1^{n-2}2^{2}+\ldots+C_{n}^{n}2^{n}=(1+2)^{n}=3^{n}$

$\Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5.$

Bài 2.18 trang 37 Chuyên đề Toán 10:

Biết rằng $(2 + x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0 \le k \le 100)$ thì a_k lớn nhất?

Lời giải:

+) Ta có:

Số hạng chứa x^k trong khai triển của $(2 + x)^{100}$ hay $(x +2)^{100}$ là

$$C_{100}^{100-k}x^k 2^{100-k} = C_{100}^k 2^{100-k} x^k = 2^{100}\frac{C_{100}^k}{2^k}x^k.$$

Vậy hệ số của x^k trong khai triển của $(x + 2)^{100}$ là $2^{100}\frac{C_{100}^k}{2^k} \Rightarrow a_k = 2^{100}\frac{C_{100}^k}{2^k}$.

+) Giải bất phương trình: $a_k \le a_{k+1}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2^{100}\frac{C_{100}^k}{2^k} \le 2^{100}\frac{C_{100}^{k+1}}{2^{k+1}} \Leftrightarrow \frac{C_{100}^k}{2^k} \le \frac{C_{100}^{k+1}}{2^{k+1}} \Leftrightarrow \frac{C_{100}^k}{C_{100}^{k+1}} \le \frac{2^k}{2^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{100!}{k!(100-k)!}}{\frac{100!}{(k+1)!(100-k-1)!}} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!(100-k-1)!}{k!(100-k)!} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{k+1}{100-k} \le \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2(k+1) \le 100 - k \Leftrightarrow 3k \le 98 \Leftrightarrow k \le 32$ (vì k là số tự nhiên).

+) Vì $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow k \le 32$ nên $a_k \ge a_{k+1} \Leftrightarrow k \ge 32$.

Do đó $a_1 \le a_2 \le ... \le a_{32} \le a_{33} \ge a_{34} \ge a_{35} \ge ... \ge a_{100}$.

Ta thấy dấu "=" không xảy ra với bất kì giá trị nào của k.

Do đó a_{33} là giá trị lớn nhất trong các a_k.