Bài 2. Dãy số

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa.

1. Định nghĩa dãy số.

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$,

Trong đó, $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là ***số hạng đầu***, u_n là số hạng thứ n và là ***số hạng tổng quát*** của dãy số.

- Ví dụ 1:

a) Dãy các số tự nhiên chẵn: 2; 4; 6; 8; …có số hạng đầu $u_1 = 2$, số hạng tổng quát là $u_n = 2n$.

b) Dãy các số tự nhiên chia hết cho 5 là 5; 10; 15; 20; … có số hạng đầu $u_1 = 5$, số hạng tổng quát là $u_n = 5n$.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn.

- Mỗi hàm số u xác định trên tập M = {1, 2, 3,.., m} với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số hữu hạn.***

- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là **số hạng đầu**, u_m là **số hạng cuối**.

- Ví dụ 2.

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19 là dãy số hữu hạn có $u_1 = 4$; $u_6 = 19$.

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ là dãy số hữu hạn có $u_1 = 4$; $u_6 = \frac{1}{6}$.

II. Cách cho một dãy số.

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

- Ví dụ 3.

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2$. (1)

Từ công thức (1), ta có thể xác định được bất kì một số hạng nào của dãy số. Chẳng hạn, $u_{10} = 10^2 = 100$.

Nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển ta được:

$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots, n^2, \ldots$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ có dạng khai triển là:

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ 4. Số $\sqrt{2}$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn

$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

Nếu lập dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng thiếu của số $\sqrt{2}$ với sai số tuyệt đối 10^{-n} thì:

$u_1 = 1,4$; $u_2 = 1,41$; $u_3 = 1,414$; $u_4 = 1,4142, \ldots$

Đó là dãy số được cho bằng ***phương pháp mô tả***, trong đó chỉ ra cách viết các số hạng liên tiếp của dãy.

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho *hệ thức truy hồi*, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

- Ví dụ 5. Dãy số (u_n) được xác định như sau:

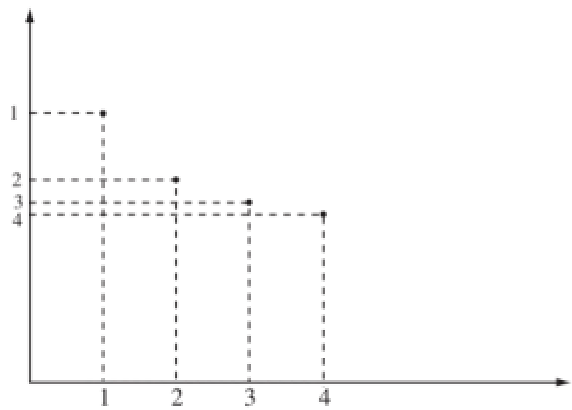
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \ (n \geq 3) \end{cases}.$$

Dãy số như trên là dãy số cho bằng *phương pháp truy hồi*.

III. Biểu diễn hình học của dãy số.

Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó trong mặt phẳng tọa độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ $(n ; u_n)$.

Ví dụ 6: Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ có biểu diễn hình học như sau:



IV. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

1. Dãy số tăng, dãy số giảm.

- Định nghĩa 1:

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Ví dụ 7. Dãy số (u_n) với $u_n = 2 – 2n$ là dãy số giảm.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ xét hiệu $u_{n+1} – u_n$. Ta có:

$u_{n+1} – u_n = 2 – 2(n + 1) – (2 – 2n) = – 2 < 0$

Do $u_{n+1} – u_n < 0$ nên $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

- Chú ý:

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ tức là dãy: – 1, 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1…không tăng cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn.

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho:

$$u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho:

$$u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m; M sao cho:

$$m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Ví dụ 8. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ bị chặn vì $0 < u_n \le 1$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a) $u_n = \frac{n+1}{2^n}$;

b) $u_n = 4 - 2n$;

c) $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Lời giải:

a) Ta có:

$u_1 = \frac{1+1}{2^1} = 1; u_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}; u_3 = \frac{3+1}{2^3} = \frac{1}{2}$

$u_4 = \frac{4+1}{2^4} = \frac{5}{16}; u_5 = \frac{5+1}{2^5} = \frac{3}{16}$

b) Ta có:

$u_1 = 4 – 2.1 = 2$; $u_2 = 4 – 2.2 = 0$; $u_3 = 4 – 2.3 = – 2$;

$u_4 = 4 – 2.4 = – 4$; $u_5 = 4 – 2.5 = – 6$.

c) Ta có: $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{3}; u_3 = \frac{1}{4}; u_4 = \frac{1}{5}; u_5 = \frac{1}{6}$.

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a) Ta có: $(-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1^n = 1$

Do đó; $u_{n+1} = u_n + (– 1)^{2n} = u_n + 1$

Suy ra: $u_2 = u_1 + 1 = 2$; $u_3 = u_2 + 1 = 3$

$u_4 = u_3 + 1 = 4$; $u_5 = u_4 + 1 = 5$.

b) Từ đó, ta dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh $u_n = n$ (1) bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với n = 1 thì $u_1 = 1$.

Vậy (1) đúng với n = 1.

+ Giả sử (1) đúng với mọi $n = k \geq 1$, ta có: $u_k = k$.

Ta đi chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, tức là: $u_{k+1} = k + 1$.

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có:

$u_{k+1} = u_k + (– 1)^{2k} = k + 1$

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 3. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số (u_n) sau :

a) $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$;

b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$.

Lời giải:

a) Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n-11}{3n+1} - \frac{2n-13}{3n-2}$$

$$= \frac{(2n-11).(3n-2)-(2n-13).(3n+1)}{(3n+1).(3n-2)}$$

$$= \frac{6n^2-4n-33n+22-\left(6n^2+2n-39n-13\right)}{(3n+1).(3n-2)} = \frac{35}{(3n+1)(3n-2)} > 0;\ \forall n \geq 1.$$

Suy ra, $u_{n+1} > u_n$ $\forall n > 1$. Do đó, dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow -11 \leq u_n < \dfrac{2}{3}$ $\forall n \geq 1$

(vì $3n - 2 \geq 1$ với $n \geq 1$ nên :

$\dfrac{35}{3(3n-2)} \leq \dfrac{35}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \geq \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3} = -11$)

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

b) Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2} - \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$

$$= \frac{n^2+5n+5}{n+2} - \frac{n^2+3n+1}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} > 0\ \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Lại có : $u_n > \dfrac{n^2+2n+1}{n+1} = n+1 \geq 2$ nên dãy (u_n) bị chặn dưới.

Bài 4. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$;

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Lời giải:

a) Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Xét thương :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}} : \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}} = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \geq 1$ nên dãy (u_n) là dãy số giảm.

- Lại có: $\sqrt{1+n+n^2} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}} < 1$.

Vậy $0 < u_n < 1$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Xét thương :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1 \ \forall n > 1$$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \geq 1$ nên dãy (u_n) là dãy số giảm.

Vì $0 < u_n \leq u_1 = 2 \ \forall n \geq 1$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.