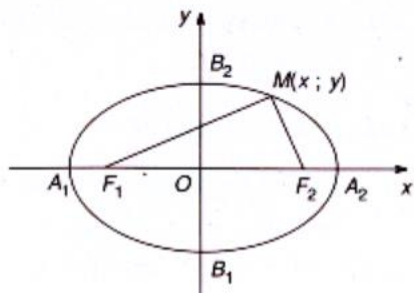


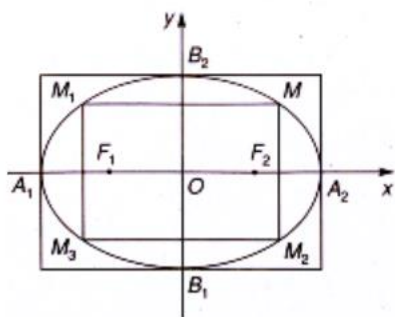
## Phương trình đường elip và cách giải bài tập

### A. Lí thuyết tổng hợp.

- **Định nghĩa:** Cho hai điểm cố định  $F_1$  và  $F_2$  và một độ dài không đổi  $2a$  lớn hơn  $F_1F_2$ . Elip là tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho  $F_1M + F_2M = 2a$ .



- **Các thành phần của Elip:** Trong mặt phẳng Oxy



+ Hai tiêu điểm:  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$

+ Bốn đỉnh:  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$  và  $B_2(0; b)$

+ Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a$

+ Độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b$

+ Tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$

- **Phương trình chính tắc của elip:** Cho elip (E) có các tiêu điểm  $F_1$  và  $F_2$ . Điểm  $M$  thuộc elip khi và chỉ khi  $F_1M + F_2M = 2a$ . Chọn hệ trục tọa độ Oxy, cho  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$ . Khi đó ta có:

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1) \quad \text{với } b^2 = a^2 - c^2$$

Phương trình (1) là phương trình chính tắc của elip.

- **Hình dạng của elip:** Elip có hai trục đối xứng là Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

- **Liên hệ giữa đường tròn và đường elip:**

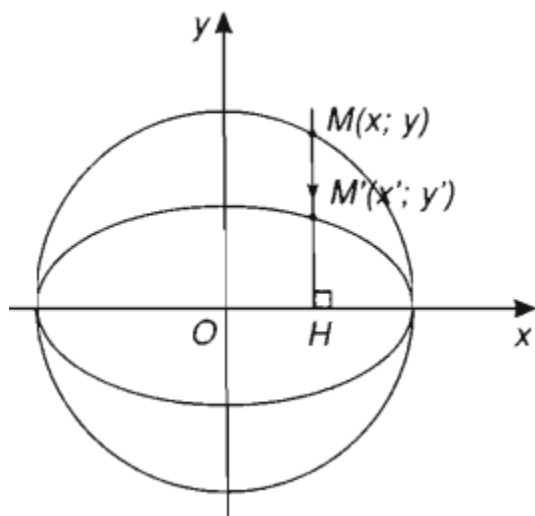
+ Từ hệ thức  $b^2 = a^2 - c^2$  ta thấy nếu tiêu cự của elip càng nhỏ thì b càng gần bằng a, tức là trục nhỏ của elip càng gần bằng trục lớn. Lúc đó elip có dạng gần như đường tròn

+ Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình  $x^2 + y^2 = a^2$ . Với mỗi

điểm M (x; y) thuộc đường tròn ta xét điểm M'(x'; y') sao cho :  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases}$  với  $(0$

$< b < a)$  thì tập hợp các điểm M' có tọa độ thỏa mãn phương trình:

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$  là một elip (E). Khi đó ta nói đường tròn (C) được co thành elip (E).



## B. Các dạng bài

**Dạng 1:** Tìm tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai, trục lớn, trục nhỏ của Elip.

**Phương pháp giải:**

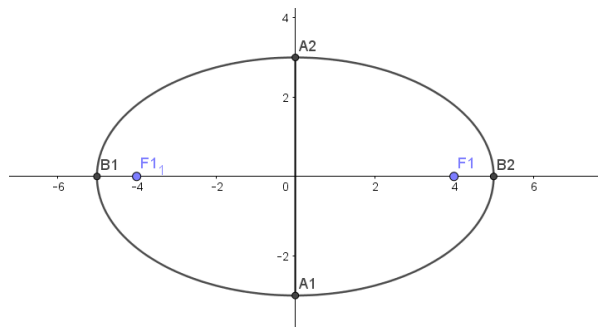
Cho elip (E) có phương trình  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Trục lớn của (E) nằm trên Ox:  $A_1A_2 = 2a$
- Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy:  $B_1B_2 = 2b$
- Tiêu cự của (E):  $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$
- Tiêu điểm của (E):  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$  với  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- Tâm sai của (E):  $e = \frac{c}{a} < 1$  với  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

### Ví dụ minh họa:

**Bài 1:** Xác định độ dài các trục, tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của elip (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

### Lời giải:



Xét phương trình elip (E) :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , ta có:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Từ đó ta có:

Tiêu điểm của (E):  $F_1(-4; 0)$  và  $F_2(4; 0)$

Tiêu cự của (E):  $F_1F_2 = 2.4 = 8$

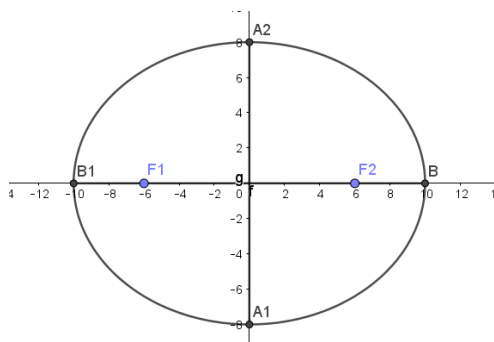
Tâm sai của (E):  $e = \frac{4}{5}$

Trục lớn của (E) nằm trên Ox:  $A_1A_2 = 2.5 = 10$

Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy:  $B_1B_2 = 2.3 = 6$

**Bài 2:** Cho elip có phương trình  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ . Tìm tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai, trục lớn, trục nhỏ của elip.

**Lời giải:**



Xét phương trình elip :  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ , ta có:

$$a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

Từ đó ta có:

Tiêu điểm của (E):  $F_1(-6; 0)$  và  $F_2(6; 0)$

Tiêu cự của (E):  $F_1F_2 = 2.6 = 12$

Tâm sai của (E):  $e = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Trục lớn của (E) nằm trên Ox:  $A_1A_2 = 2.10 = 20$

Trục nhỏ của (E) nằm trên Oy:  $B_1B_2 = 2.8 = 16$

**Dạng 2:** Viết phương trình chính tắc của Elip.

**Phương pháp giải:**

Từ các thông tin đề bài cho, ta áp dụng các hệ thức:

+ Hai tiêu điểm:  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$

+ Bốn đỉnh:  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$  và  $B_2(0; b)$

+ Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a$

+ Độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b$

+ Tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$

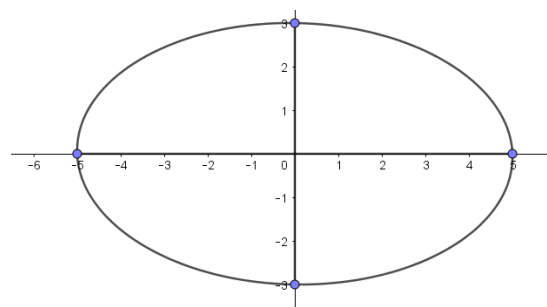
+ Tâm sai của (E):  $e = \frac{c}{a} < 1$

+  $b^2 = a^2 - c^2$

Từ đó tìm ra a và b để viết phương trình chính tắc của elip:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Lập phương trình elip (E) biết độ dài trục lớn là 10, độ dài trục nhỏ là 6.



**Lời giải:**

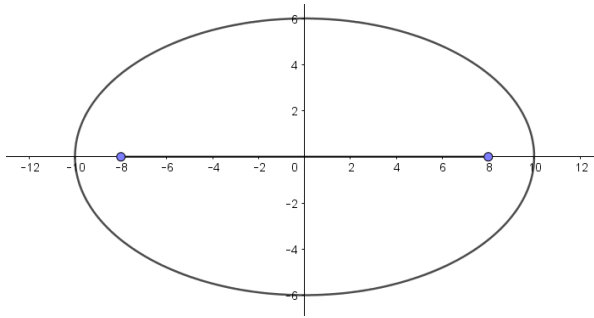
Gọi các đỉnh của elip là:  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$  và  $B_2(0; b)$

Ta có độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

Ta có độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Ta có phương trình chính tắc của elip:  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Bài 2:** Cho elip (E) có tiêu cự là 16 và tâm sai là 0,8 . Lập phương trình chính tắc của elip (E).



**Lời giải:**

Gọi tiêu điểm của elip là:  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$

Ta có tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c = 16 \Rightarrow c = 8$

Ta có tâm sai:  $e = \frac{c}{a} = 0,8 \Rightarrow \frac{8}{a} = 0,8 \Rightarrow a = 10$

Có:  $b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

Từ đó ta có phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

**Dạng 3:** Lập phương trình Elip đi qua 2 điểm hoặc qua 1 điểm thỏa mãn điều kiện.

**Phương pháp giải:**

- Lập phương trình elip (E) đi qua hai điểm A và B:

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

+ Do hai điểm A và B thuộc elip (E) nên thay tọa độ hai điểm này vào phương trình (E) ta được hai phương trình ẩn  $a^2, b^2$ .

+ Giải hệ phương trình ta được  $a^2, b^2 \Rightarrow$  Phương trình chính tắc của elip.

- Lập phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm M và thỏa mãn điều kiện về tiêu cự ; độ dài trục lớn, trục nhỏ; tâm sai...

+ Gọi phương trình chính tắc của elip (E) :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

+ Do điểm M thuộc elip (E) nên thay tọa độ điểm này vào phương trình (E) ta được một phương trình ẩn  $a^2, b^2$

+ Từ điều kiện của đề bài thiết lập một phương trình ẩn  $a^2, b^2$ , với  $a^2 - b^2 = c^2$

Kết hợp ba phương trình trên để tìm  $a^2, b^2 \Rightarrow$  Phương trình chính tắc của elip (E)

### Ví dụ minh họa:

**Bài 1:** Lập phương trình chính tắc của elip (E) khi biết một tiêu điểm là  $F_1(-\sqrt{3};0)$  và elip đi qua điểm A  $\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

### Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

Một tiêu điểm là  $F_1(-\sqrt{3};0) \Rightarrow$  Tiêu điểm còn lại là  $F_2(\sqrt{3};0)$

$\Rightarrow$  Tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 3 + b^2$  (1)

Biết elip đi qua điểm A  $\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ta có:

$$\frac{1^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\frac{1}{3+b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 9 + 3b^2 = 4b^2(3 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 7b^2 + 9 = 12b^2 + 4b^4$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b^2 = \frac{-9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Loại } b^2 = \frac{-9}{4} < 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 4$$

Phương trình chính tắc của elip là:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

**Bài 2:** Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết elip đi qua hai điểm  $N(0; 1)$  và  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**Lời giải:**

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

Biết elip đi qua điểm  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ta có:  $\frac{1^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$  (1)

Biết elip đi qua điểm  $N(0; 1)$  ta có:  $\frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1$  (2)

Thế (2) vào (1) ta có:  $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4 \cdot 1} = 1 \Rightarrow a^2 = 4$



Phương trình chính tắc của elip là:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

**Dạng 4:** Tìm giao điểm của đường thẳng và Elip

**Phương pháp giải:**

+ Phương trình elip có dạng:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  và đường thẳng  $\Delta: y = mx + n$ .

+ Ta xét phương trình:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + n)^2}{b^2} = 1$  (\*). Ta có 3 trường hợp:

TH1: (\*) có 2 nghiệm thì số giao điểm là 2 (đường thẳng cắt elip).

TH2: (\*) có 1 nghiệm thì số giao điểm là 1 (đường thẳng tiếp xúc elip).

TH3: (\*) vô nghiệm thì số giao điểm là 0 (đường thẳng và elip không có điểm chung).

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Cho elip (E):  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  và đường thẳng d:  $3x + 4y - 12 = 0$ . Có bao nhiêu giao điểm của đường thẳng d và elip (E)?

**Lời giải:**

Ta có d:  $3x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3 - \frac{3x}{4}$ , thay vào phương trình (E):  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  ta được

$$\frac{x^2}{16} + \frac{\left(3 - \frac{3x}{4}\right)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{(x - 4)^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Vậy d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A(0; 3), B(4; 0).

**Bài 2:** Cho elip (E):  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng d:  $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ . Số giao điểm của đường thẳng d và elip (E) là bao nhiêu?

**Lời giải**

Tọa độ giao điểm của elip và đường thẳng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - \sqrt{2}y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ x = \sqrt{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \sqrt{2}y - 1 = 0 \\ x = \sqrt{2}y - 2 \end{cases}$$

Có 2 nghiệm y nên có 2 nghiệm x  $\Rightarrow$  có 2 giao điểm.

### C. Bài tập tự luyện.

**Bài 1:** Xác định tiêu cự, độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip có phương trình:

$$\frac{x^2}{49} + y^2 = 1.$$

Đáp án:  $A_1A_2 = 14; B_1B_2 = 2; F_1F_2 = 8\sqrt{3}$

**Bài 2:** Xác định tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình:  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

Đáp án:  $F_1(-4\sqrt{3}; 0), F_2(4\sqrt{3}; 0), e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Bài 3:** Xác định tiêu cự, tâm sai của elip có phương trình:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

Đáp án:  $F_1F_2 = 2\sqrt{2}, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Bài 4:** Viết phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn là 10 và độ dài trục nhỏ là 4.

Lời giải:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

**Bài 5:** Viết phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn là 20 và có một tiêu điểm là  $F_2(3; 0)$ .

Đáp án:  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1$

**Bài 6:** Viết phương trình chính tắc của elip có độ dài trục nhỏ là 12 và có một tiêu điểm là  $F_1(-2; 0)$ .

Đáp án:  $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$

**Bài 7:** Viết phương trình chính tắc của elip đi qua điểm  $A(3; 0)$  và có một tiêu điểm là  $F_1(-2; 0)$ .

Đáp án:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

**Bài 8:** Viết phương trình chính tắc của elip đi qua điểm  $A(0; 5)$  và có độ dài tiêu cự là 6.

Đáp án:  $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

**Bài 9:** Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm  $A(6; 0)$  và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng  $\frac{1}{2}$ .

Đáp án:  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

**Bài 10:** Lập phương trình chính tắc của elip, biết elip đi qua hai điểm  $A(7; 0)$  và  $B(0; 3)$ .

Đáp án:  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$