Ôn tập chương I. Mệnh đề toán học – Tập hợp

A. Lý thuyết

1. Mệnh đề toán học

1.1. Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

• Mệnh đề toán học là mệnh đề khẳng định một sự kiện trong toán học. Mỗi mệnh đề toán học phải đúng hoặc sai, không thể vừa đúng, vừa sai.

– Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề đúng*.

– Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề sai*.

• Ở mệnh đề chứa biến, ta chưa thể khẳng định ngay tính đúng/sai. Với mỗi giá trị cụ thể của biến số, ta có thể khẳng định tính đúng/sai của mệnh đề.

Kí hiệu mệnh đề chứa biến n là P(n), mệnh đề chứa biến x, y là P(x, y), …

1.2. Mệnh đề phủ định

• Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề $\overline{P}$ đúng khi P sai, và ngược lại.

Chú ý: Để phủ định một mệnh đề, ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

1.3. Mệnh đề kéo theo

• Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là *mệnh đề kéo theo*, được kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong tất cả các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG
ĐÚNG	SAI	SAI
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG
SAI	SAI	ĐÚNG

Nhận xét: Các định lí toán học thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo P ⇒ Q.

Khi đó ta nói:

– P là ***giả thiết,*** Q là ***kết luận*** của định lí, hoặc

– P là ***điều kiện đủ*** để có Q, hoặc Q là ***điều kiện cần*** để có P.

1.4. Mệnh đề đảo. Mệnh đề tương đương

• Mệnh đề Q ⇒ P là *mệnh đề đảo* của mệnh đề P ⇒ Q.

Nếu cả hai mệnh đề P ⇒ Q và Q ⇒ P đều đúng, P và Q là hai *mệnh đề tương đương* và kí hiệu P ⇔ Q.

Nhận xét: Mệnh đề P ⇔ Q có thể phát biểu ở những dạng như sau:

+ "P tương đương Q";

+ "P là điều kiện cần và đủ để có Q";

+ "P khi và chỉ khi Q";

+ "P nếu và chỉ nếu Q".

1.5. Kí hiệu ∀ và ∃

• Kí hiệu ∀ đọc là "với mọi".

• Kí hiệu ∃ đọc là "tồn tại", hoặc "có một" (tồn tại một), hoặc "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một).

• Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

• Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

2. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp

2.1. Tập hợp

• Tập hợp (còn gọi là *tập*) là một khái niệm cơ bản trong toán học.

Để chỉ x là một phần tử của tập hợp A, ta viết x ∈ A (đọc là x thuộc A)

Để chỉ x *không phải* một phần tử của tập hợp A, ta viết x ∉ A (đọc là x không thuộc A)

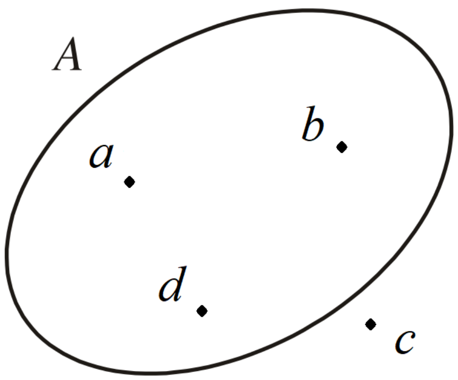
• Biểu diễn tập hợp bằng một trong 2 cách:

+ Liệt kê các phần tử của tập hợp.

+ Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

• Minh hoạ tập hợp bằng biểu đồ Ven. Mỗi phần tử thuộc tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín.

Ở hình dưới, các phần tử thuộc tập hợp A là a, b, d; phần tử không thuộc tập hợp A là c.

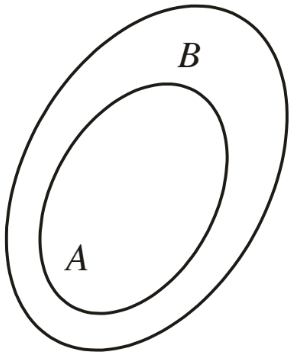


• Một tập hợp có thể không có phần tử nào, có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử. Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là ***tập hợp rỗng***, kí hiệu là $\varnothing$.

Chú ý: Khi C là tập hợp rỗng, ta viết C = $\varnothing$, không được viết $C = \{\varnothing\}$.

2.2. Tập hợp con và tập hợp bằng nhau

• Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một *tập con* của B, kí hiệu là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.



Quy ước: Tập hợp rỗng $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý:

+ $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

+ Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$, đọc là B chứa A.

+ Nếu A không phải tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.

Tính chất:

+ $A \subset A$ với mọi tập hợp A.

+ Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

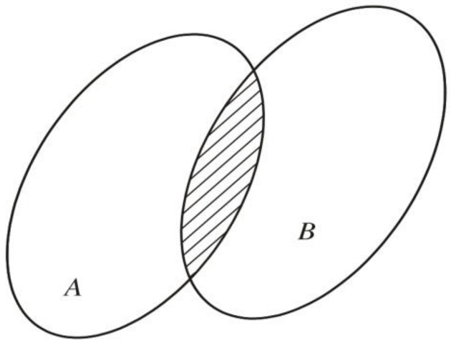
• Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B ***bằng nhau***, viết là $A = B$.

2.3. Giao của hai tập hợp

• Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B được gọi là *giao* của A và B, kí hiệu $A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình dưới.

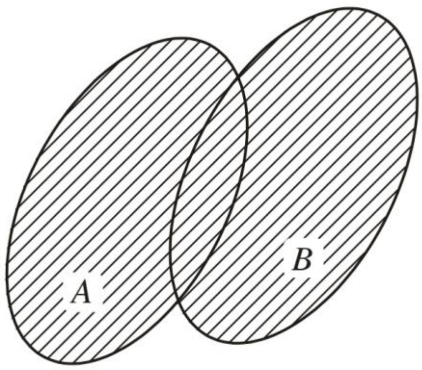


2.4. Hợp của hai tập hợp:

• Tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là *hợp* của A và B, kí hiệu $A \cup B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$.

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình dưới.

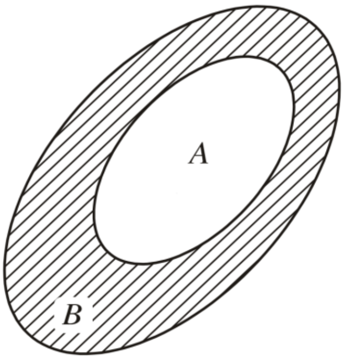


2.5. Phần bù và hiệu của hai tập hợp:

• Cho $A \subset B$. Tập hợp những phần tử của B mà không phải phần tử của A được gọi là *phần bù* của A trong B, kí hiệu C_BA.

Vậy, khi $A \subset B$ ta có $C_BA = \{x \mid x \notin A$ và $x \in B\}$.

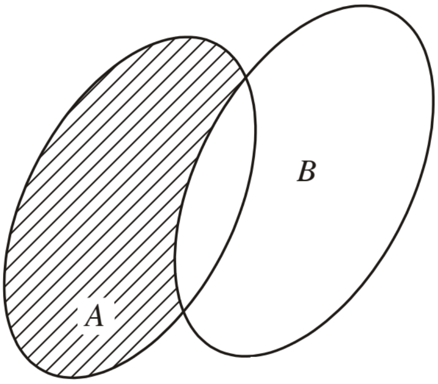
Tập hợp C_BA được mô tả bằng phần gạch chéo trong hình dưới.



• Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là *hiệu* của A và B, kí hiệu A \ B.

Vậy A \ B = {x | x ∈ A và x ∉ B}.

Tập hợp A \ B được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong hình dưới.

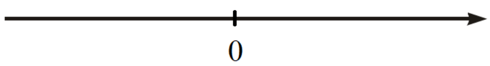


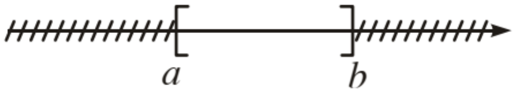
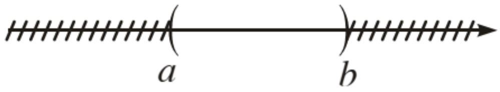
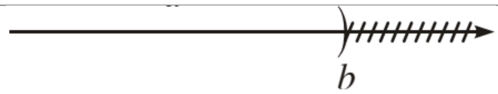
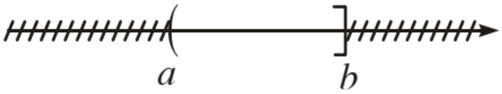
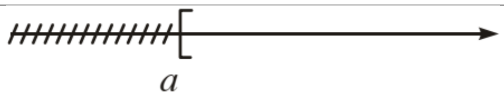
2.6. Các tập hợp số:

• Các tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

• Một số tập con thường dùng của tập số thực:

Tập hợp	**Tên gọi và kí hiệu**	**Biểu diễn trên trục số**
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực $(-\infty; +\infty)$	

{x ∈ ℝ | a ≤ x ≤ b}	Đoạn [a; b]	
{x ∈ ℝ | a < x < b}	Khoảng (a; b)	
{x ∈ ℝ | x > a}	Khoảng (a; +∞)	
{x ∈ ℝ | x < b}	Khoảng (−∞; b)	
{x ∈ ℝ | a ≤ x < b}	Nửa khoảng [a; b)	
{x ∈ ℝ | a < x ≤ b}	Nửa khoảng (a; b]	
{x ∈ ℝ | x ≥ a}	Nửa khoảng [a; +∞)	
{x ∈ ℝ | x ≤ b}	Nửa khoảng (−∞; b]	

Kí hiệu −∞ đọc là âm vô cực (âm vô cùng), kí hiệu +∞ đọc là dương vô cực (dương vô cùng), *a* và *b* là các đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Phát biểu các mệnh đề sau, sử dụng khái niệm *điều kiện cần* và *điều kiện đủ*:

a) Các số tự nhiên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 5.

b) Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Một số tự nhiên có tận cùng bằng 0 là *điều kiện đủ* để số đó chia hết cho 5.

Một số tự nhiên chia hết cho 5 là *điều kiện cần* để số đó có tận cùng bằng 0.

b) *Điều kiện đủ* để hai tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác đó bằng nhau.

Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là hai tam giác đó có diện tích bằng nhau.

Bài 2. Biết P là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 15 và là ước số của 60. Biểu diễn tập hợp P bằng hai cách và tìm tất cả các tập hợp con của nó.

Hướng dẫn giải

Theo cách nêu tính chất đặc trưng, ta có: $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 15 \text{ và } 60 \vdots x\}$.

Ta có: $60 = 2^2.3.5$

Suy ra tập các ước số tự nhiên của 60 là Ư(60) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}.

Trong đó các ước số tự nhiên lớn hơn 15 là: 20; 30; 60.

Do đó theo cách liệt kê: P = {20; 30; 60}

Các tập hợp con của P là:

$\varnothing$, {20}, {30}, {60}, {20; 30}, {20; 60}, {30; 60}, {20; 30; 60}.

Bài 3. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

a) A: "Phương trình $x^2 + 4x + 5 = 0$ có nghiệm";

b) B: "Số 2048 chia hết cho 3";

c) C: "$\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2$ là một số hữu tỉ";

d) D: "$x = 5$ là một nghiệm của phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$".

Hướng dẫn giải:

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là $\overline{A}$: "Phương trình $x^2 + 4x + 5 = 0$ vô nghiệm".

Xét: $\Delta' = 2^2 - 5 = -1 < 0$. Do đó phương trình vô nghiệm.

Mệnh đề $\overline{A}$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề B là $\overline{B}$: "Số 2048 không chia hết cho 3".

Do 2 + 0 + 4 + 8 = 14 không chia hết cho 3, nên 2048 không chia hết cho 3

Do đó mệnh đề $\overline{B}$ là mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề phủ định của mệnh đề C là $\overline{C}$: "$\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2$ không phải số hữu tỉ"

hoặc "$\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2$ là một số vô tỉ".

Xét: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{36} + 12 = 27$ là số hữu tỉ.

Mệnh đề $\overline{C}$ là mệnh đề sai.

d) Mệnh đề phủ định của mệnh đề D là $\overline{D}$: "x = 5 không phải là nghiệm của phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$".

Thay x = 5 vào biểu thức $x^3 - 4x + 1$, ta có: $5^3 - 4.5 + 1 = 106 \neq 0$.

Vậy x = 5 không là nghiệm của phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$.

Do đó mệnh đề $\overline{D}$ là mệnh đề đúng.

Bài 4. Xét các mệnh đề P: "x là một số hữu tỉ" và Q: "x^2 là một số hữu tỉ".

a) Phát biểu mệnh đề P ⇒ Q và xét tính đúng sai của nó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên.

c) Chỉ ra một giá trị của x mà mệnh đề đảo sai.

Hướng dẫn giải:

a) Mệnh đề P ⇒ Q được phát biểu là: "Nếu x là một số hữu tỉ thì x^2 là một số hữu tỉ".

Mệnh đề P ⇒ Q là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đảo Q ⇒ P: "Nếu x^2 là một số hữu tỉ thì x là một số hữu tỉ".

c) Ta thấy nếu $x^2 = 3$ thì $x = \sqrt{3}$ không phải một số hữu tỉ.

Bài 5. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng:

a) P(x): "$\exists x \in \mathbb{Q}$: $x^2 = 2$";

b) Q(n): "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n < 2n$".

Hướng dẫn giải:

a) Mệnh đề phủ định $\overline{P(x)}$: "$\forall x \in \mathbb{Q}$: $x^2 \neq 2$".

Ta có: $x^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$, mà $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ là các số vô tỉ nên không tồn tại số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2, nên $\overline{P(x)}$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề phủ định $\overline{Q(n)}$: "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2n$".

Chọn n = 0 thì 2n = 0, khi đó $n \geq 2n$. $\overline{Q(n)}$ là mệnh đề đúng.

Bài 6. Tìm các tập hợp sau:

a) $A = (-3; 5] \cap \mathbb{Z}$;

b) $B = (-3; 5] \cap \mathbb{N}$;

c) $C = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$;

d) $D = C_{\mathbb{N}}2\mathbb{N}$ (với kí hiệu $2\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn).

Hướng dẫn giải:

a) A là tập hợp các số nguyên lớn hơn −3 và nhỏ hơn hoặc bằng 5.

⇒ A = {−2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}.

b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn −3 và nhỏ hơn hoặc bằng 5.

⇒ B = {0; 1; 2; 3; 4; 5}.

c) C là tập hợp các số thực nhưng không phải số hữu tỉ

⇒ C là tập hợp các số vô tỉ.

d) D là tập hợp các số tự nhiên không phải số chẵn

⇒ D = {1; 3; 5; 7; 9; …} (tập hợp các số tự nhiên lẻ).

Bài 7. Xác định tập hợp A \ B, trong đó:

a) $A = \mathbb{R}$; $B = (-\infty; 3)$;

b) $A = [1; 5]$; $B = (-3; 3) \cup (2; 4)$;

c) $A = (-5; 0) \cup (3; 5)$; $B = (-1; 4) \cap (2; 6)$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $A \setminus B = \mathbb{R} \setminus (-\infty; 3) = [3; +\infty)$.

b) Ta có: $A = [1; 5]$

$B = (-3; 3) \cup (2; 4) = (-3; 4)$

$\Rightarrow A \setminus B = [1; 5] \setminus (-3; 4) = [4; 5]$

c) Ta có: $A = (-5; 0) \cup (3; 5)$

$B = (-1; 4) \cap (2; 6) = (2; 4)$

$\Rightarrow A \setminus B = (-5; 0) \cup (3; 5) \setminus (2; 4) = (-5; 0) \cup [4; 5)$.

Bài 8. Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ và N là tập nghiệm của phương trình $(x - 1)(2x - 4) = 0$.

Tìm các tập hợp $M \cap N$, $M \cup N$.

Hướng dẫn giải:

Lần lượt giải các phương trình:

+) $x^2 – 2x – 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x – 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = − 1$ hoặc $x = 3$

Suy ra: $M = \{− 1; 3\}$

+) $(x – 1)(2x – 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Suy ra: $N = \{1; 2\}$

Vậy:

$M \cap N = \emptyset$

$M \cup N = \{− 1; 1; 2; 3\}$.

Bài 9. Lớp 10B có 40 học sinh, trong đó 28 bạn chơi biết đá bóng và 19 bạn biết chơi cờ vua. Biết rằng có 10 bạn biết chơi cả 2 môn. Hỏi có bao nhiêu bạn không biết chơi cả bóng đá và cờ vua?

Hướng dẫn giải:

Gọi A là tập hợp các bạn biết đá bóng, B là tập hợp các bạn biết chơi cờ vua. Số học sinh biết chơi cả hai môn là số phần tử của tập hợp $A \cup B$.

Ta đếm số phần tử của A (28 bạn), sau đó đếm số phần tử của B (19 bạn). Nhưng khi đó số phần tử của $A \cap B$ (10 bạn) lại được đếm 2 lần.

Suy ra số bạn biết ít nhất một trong 2 môn (số phần tử của $A \cup B$) là $28 + 19 – 10 = 37$.

Vậy, có $40 – 37 = 3$ bạn không biết chơi cả bóng đá và cờ vua.

Bài 10. Những quan hệ trong các quan hệ sau là đúng:

a) $A \subset (A \cup B)$;

b) $A \subset (A \cap B)$;

c) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

Hướng dẫn giải:

a) Chọn phần tử $x \in A$. Có 2 trường hợp xảy ra:

+ Nếu $x \in B$ thì $x \in (A \cup B)$.

+ Nếu $x \notin B$ thì ta vẫn có $x \in (A \cup B)$.

Suy ra: $\forall x \in A$ thì $x \in (A \cup B)$.

Vậy $A \subset (A \cup B)$ là quan hệ **đúng**.

b) Chọn phần tử $x \in A$ sao cho $x \notin B$. Như vậy, $x \notin (A \cap B)$

Vậy $A \not\subset (A \cap B)$. Khẳng định ban đầu là **sai.**

c) Với mọi phần tử $x \in (A \cap B)$ thì $x \in A$, suy ra $x \in (A \cup B)$.

Vậy $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ là quan hệ **đúng**.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 5\}.$$

A. $[-3; 5)$;

B. $[-3; 5]$;

C. $(-3; 5)$;

D. $(-3; 5]$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 5\} = [-3; 5]$.

Câu 2. Xác định tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$ bằng cách liệt kê các phần tử

A. $A = \{-1; 3\}$;

B. A = {1; −3};

C. A = {1};

D. A = {3}.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Mà $x \in \mathbb{N}$ nên x = 3

Vậy A = {3}.

Câu 3. Cho tập hợp A = (−∞; 4] và B = [−2; +∞). Xác định tập hợp A ∩ B?

A. [−2; 4];

B. (−2; 4];

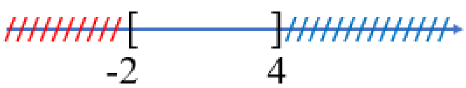
C. [−2; 4);

D. $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

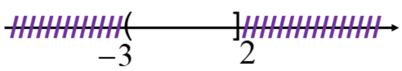
Đáp án đúng là: A

Để xác định giao của hai tập hợp A và B, ta biểu diễn tập A và tập B trên cùng trục số



Suy ra A ∩ B = [−2; 4].

Câu 4. Hình vẽ dưới đây biểu diễn tập hợp nào?



A. (–3; 2);

B. [–3; 2);

C. [–3; 2];

D. (–3; 2].

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Hình vẽ biểu diễn tập hợp (–3; 2].

Câu 5. Xét câu P(n): “n chia hết cho 12”. Với giá trị nào của n sau đây thì P(n) là một mệnh đề đúng?

A. 48;

B. 4;

C. 3;

D. 88.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Mệnh đề P(48): “48 chia hết cho 12” là mệnh đề đúng.