

Bài tập cuối chương 3

A. Trắc nghiệm

Bài 3.12 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có $B = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a)

A. $S = \frac{1}{2}ca$.

B. $S = \frac{-\sqrt{2}}{4}ac$.

C. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$.

D. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.

b)

A. $R = \frac{a}{\sin A}$.

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$.

C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c)

A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$.

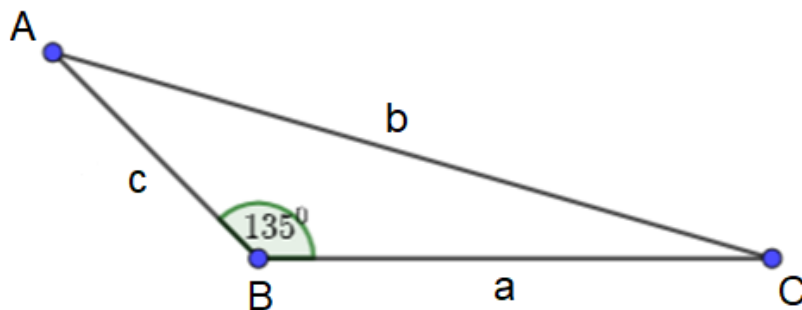
B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$.

C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos 135^\circ$.

Lời giải:

Tam giác ABC có $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $B = 135^\circ$.



a) Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ac \cdot \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}ac.$$

Chọn D.

b) Theo định lí sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

A. $R = \frac{a}{\sin A}$ sai vì $R = \frac{a}{2\sin A}$

$$B. R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$$\text{Mà } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{b}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}b.$$

Do đó B đúng.

$$C. R = \frac{\sqrt{2}}{2}c \text{ (loại vì không có dữ kiện về góc } C \text{ nên không thể tính } R \text{ theo } c).$$

$$D. R = \frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ (loại vì không có dữ kiện về góc } A \text{ nên không thể tính } R \text{ theo } a).$$

Chọn B.

c)

$$A. a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab.$$

Vì theo định lí côsin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Không đủ dữ kiện để suy ra: $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab.$

Do đó A sai.

$$B. \frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}.$$

Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\text{Nên } \frac{b}{\sin A} \neq \frac{a}{\sin B}.$$

Do đó B sai.

$$C. \sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vì theo câu a, } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó C sai.

$$D. b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos 135^\circ. \text{ đúng.}$$

Theo định lý côsin ta có:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \quad (*)$$

$$\text{Mà } B = 135^\circ \Rightarrow \cos B = \cos 135^\circ.$$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được: } b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos 135^\circ.$$

Do đó D đúng.

Chọn D.

Bài 3.13 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a)

$$A. S = \frac{abc}{4r}.$$

$$B. r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

$$C. a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A.$$

$$D. S = r(a + b + c).$$

b)

$$A. \sin A = \sin(B + C).$$

B. $\cos A = \cos(B + C)$.

C. $\cos A > 0$.

D. $\sin A \leq 0$.

Lời giải:

a)

A. $S = \frac{abc}{4r}$.

Ta có $S = \frac{abc}{4R}$. Mà $r < R$ nên $S = \frac{abc}{4R} < \frac{abc}{4r}$.

Do đó A sai.

B. $r = \frac{2S}{a + b + c}$.

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$.

Mà $p = \frac{a + b + c}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{S}{\frac{a + b + c}{2}} = \frac{2S}{a + b + c}$.

Do đó B đúng.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$.

Sai vì theo định lí côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

D. $S = r(a + b + c)$.

Sai vì $S = pr = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$.

Chọn B.

b)

A. $\sin A = \sin(B + C)$.

Ta có $A + B + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A$$

$$\Rightarrow \sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A.$$

Do đó, đáp án A đúng.

B. $\cos A = \cos(B + C)$.

Sai vì $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ (do $B + C = 180^\circ - A$).

C. $\cos A > 0$.

· Nếu $0^\circ < A < 90^\circ$ thì $\cos A > 0$.

· Nếu $90^\circ < A < 180^\circ$ thì $\cos A < 0$.

Do đó C không đủ dữ kiện để kết luận.

D. $\sin A \leq 0$.

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A > 0$

Mà $b, c > 0$ nên $\sin A > 0$.

Do đó D sai.

Chọn D.

B. Tự luận

Bài 3.14 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$;

b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$;

d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$.

Lời giải:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

Ta có: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Thay vào M, ta được:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thay vào N, ta được:

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$

Ta có: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Thay vào P, ta được: $P = 1 + \sqrt{3}^2 = 1 + 3 = 4$.

$$\text{d) } Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ.$$

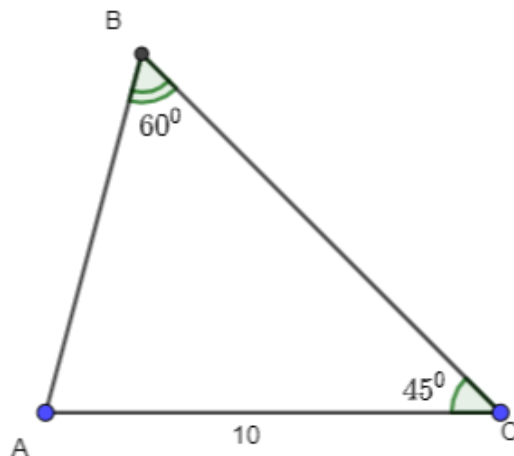
Ta có: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cot 120^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

Thay vào Q, ta được:

$$Q = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$$

Bài 3.15 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $C = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính a, R, S, r.

Lời giải:



Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Ta có:

$$+ R = \frac{b}{2\sin B}.$$

Mà $b = AC = 10$, $B = 60^\circ$.

$$\text{Nên } R = \frac{10}{2\sin 60^\circ} = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

$$+ R = \frac{a}{2\sin A} \Rightarrow a = 2R \cdot \sin A.$$

$$\text{Mà } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

$$\text{Nên } a = 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 75^\circ \approx 11,15.$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 11,15 \cdot 10 \cdot \sin 45^\circ \approx 39,42 \text{ (đvdt)}$$

Khi đó:

$$+ R = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow c = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8,16.$$

$$+ p = \frac{a+b+c}{2} \approx \frac{5,58+10+8,165}{2} \approx 14,66.$$

$$+ r = \frac{S}{p} \approx \frac{48,3}{14,66} \approx 2,69.$$

$$\text{Vậy } a \approx 11,15; R = \frac{10\sqrt{3}}{3}, c \approx 8,16, r \approx 2,69.$$

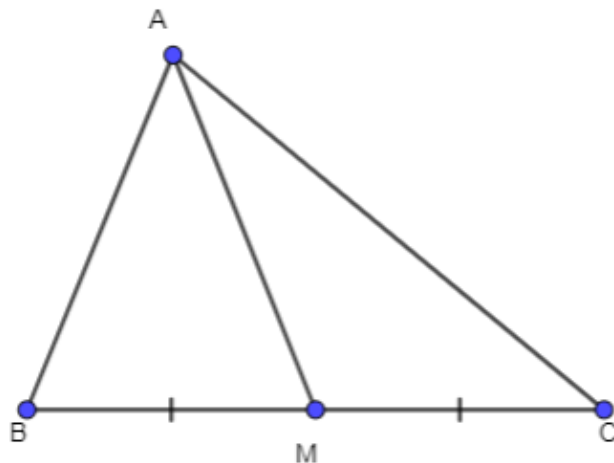
Bài 3.16 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) $\cos \angle AMB + \cos \angle AMC = 0$;

b) $MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2MA \cdot MB \cdot \cos \angle AMB$ và $MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA \cdot MC \cdot \cos \angle AMC$;

c) $MA^2 = \frac{2AB^2 + AC^2 - BC^2}{4}$ (công thức đường trung tuyến).

Lời giải:



a) Ta có: $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle AMC = 180^\circ - \angle AMB$$

$$\Rightarrow \cos \angle AMB = -\cos (180^\circ - \angle AMB) = -\cos \angle AMC$$

$$\Rightarrow \cos \angle AMB + \cos \angle AMC = -\cos \angle AMC + \cos \angle AMC = 0$$

Vậy $\cos \angle AMB + \cos \angle AMC = 0$ (đpcm)

b) Áp dụng định lí côsin trong $\triangle AMB$, ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos \angle AMB$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2MA.MB.\cos \angle AMB \quad (1)$$

Áp dụng định lí côsin trong $\triangle AMC$, ta có:

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos \angle AMC$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA.MC.\cos \angle AMC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

$$c) \text{ Từ (1) suy ra: } MA^2 = AB^2 - MB^2 + 2MA.MB.\cos \angle AMB$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } MA^2 = AC^2 - MC^2 + 2MA.MC.\cos \angle AMC$$

Cộng vế với vế, ta được:

$$2MA^2 = (AB^2 - MB^2 + 2MA.MB.\cos \angle AMB) + (AC^2 - MC^2 + 2MA.MC.\cos \angle AMC)$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - MB^2 - MC^2 + 2MA.MB.\cos \angle AMB + 2MA.MC.\cos \angle AMC$$

Mà $MB = MC = \frac{BC}{2}$ (do AM là trung tuyến) nên:

$$2MA^2 = AB^2 + AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MA.MB.\cos \angle AMB + 2MA.MB.\cos \angle AMC$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - 2.\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MA.MB.(\cos \angle AMB + \cos \angle AMC)$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2} \text{ --- (bỏ dòng này đi)}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2AB^2 + AC^2 - BC^2}{4} \text{ (công thức đường trung tuyến).}$$

Bài 3.17 trang 44 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$;

b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$;

c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$.

Lời giải:

Theo định lí côsin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A.$$

a) Nếu góc A nhọn thì $\cos A > 0 \Rightarrow 2bccosA > 0$

$$\text{Do đó: } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A > 0.$$

Vậy $b^2 + c^2 > a^2$ (đpcm).

b) Nếu góc A tù thì $\cos A < 0 \Rightarrow 2bccosA < 0$

$$\text{Do đó: } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A < 0.$$

Vậy $b^2 + c^2 < a^2$ (đpcm).

c) Nếu góc A vuông thì $\cos A = 0 \Rightarrow 2bc \cos A = 0$

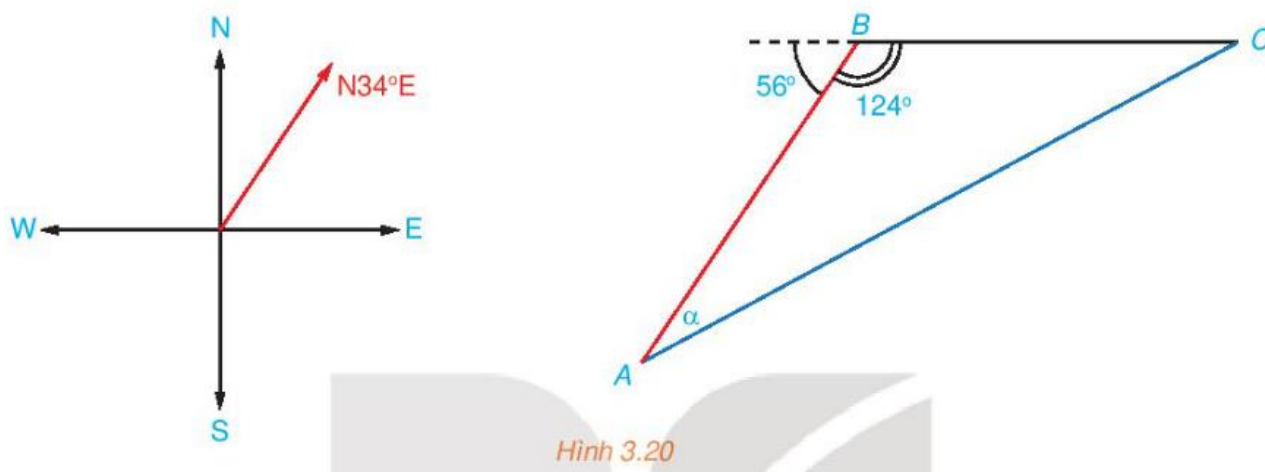
Do đó: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A = 0$.

Vậy $b^2 + c^2 = a^2$ (đpcm).

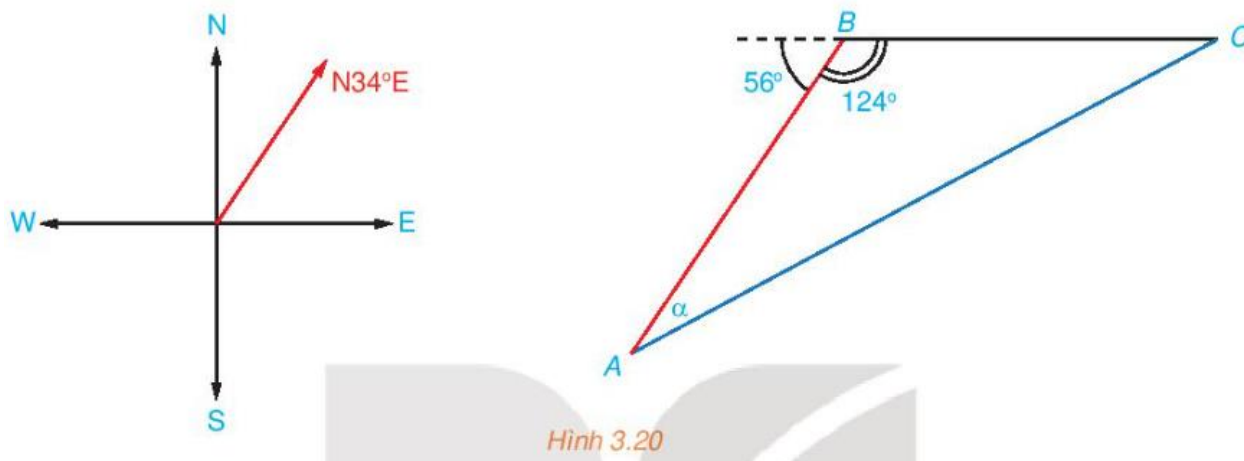
Bài 3.18 trang 45 SGK Toán 10 tập 1: Trên biển, tàu B ở vị trí cách tàu A 53 km về hướng N34°E. Sau đó, tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30 km/h về hướng đông và tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50 km/h để gặp tàu B.

a) Hỏi tàu A cần phải chuyển động theo hướng nào?

b) Với hướng chuyển động đó thì sau bao lâu tàu A gặp tàu B?



Lời giải:



a) Gọi t (giờ) là thời gian đi cho đến khi hai tàu gặp nhau tại C.

Tàu B đi với vận tốc có độ lớn 30 km/h nên quãng đường $BC = 30t$.

Tàu A đi với vận tốc có độ lớn 50 km/h nên quãng đường $AC = 50t$.

Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin ABC}$.

Trong đó: $a = BC = 30t$, $b = AC = 50t$, $B = 124^\circ$, $\alpha = BAC$.

$$\text{Khi đó, } \frac{30t}{\sin \alpha} = \frac{50t}{\sin 124^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{30t \cdot \sin 124^\circ}{50t} = \frac{3 \sin 124^\circ}{5} \approx 0,497$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 30^\circ \text{ hoặc } \alpha \approx 150^\circ \text{ (loại)}.$$

Do đó AC hợp với hướng bắc một góc $34^\circ + 30^\circ = 64^\circ$.

Vậy tàu A chuyển động theo hướng N 64° E.

b) Xét tam giác ABC, ta có: $A = 30^\circ$; $ABC = 124^\circ$.

$$\Rightarrow C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 124^\circ) = 26^\circ.$$

Theo định lí sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$$

$$\text{Mà } a = BC = 30t, c = AB = 53, A = 30^\circ; C = 26^\circ.$$

$$\text{Khi đó, } 30t = \frac{53 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 26^\circ}$$

$$\Leftrightarrow 30t \approx 60$$

$$\Leftrightarrow t \approx 2 \text{ (h)}$$

Vậy sau 2 giờ thì tàu A gặp tàu B.

Bài 3.19 trang 45 SGK Toán 10 tập 1: Trên sân bóng chày dành cho nam, các vị trí gôn Nhà (Home plate), gôn 1 (First base), gôn 2 (Second base), gôn 3 (Third base) là bốn đỉnh của một hình vuông có cạnh dài 27,4m. Vị trí đứng ném bóng (Pitcher's mound) nằm trên đường nối gôn Nhà với gôn 2 và cách gôn Nhà 18,44m. Tính các khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3.



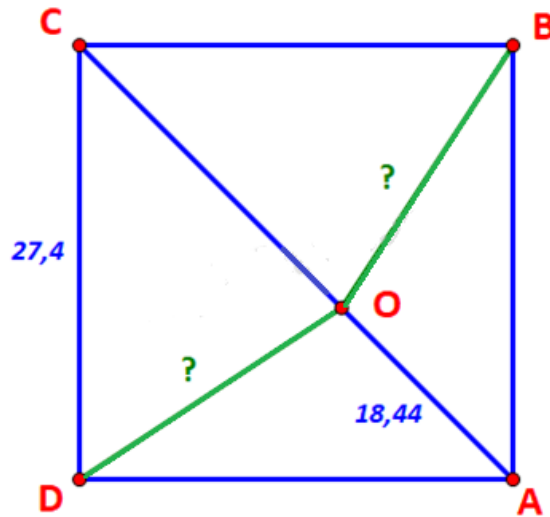
Hình 3.21

Lời giải:

Kí hiệu gôn Nhà, gôn 1, gôn 2, gôn 3 và vị trí ném bóng lần lượt là các điểm A, B, C, D, O như hình vẽ.

Khi đó, tứ giác ABCD là hình vuông với đường chéo CA là tia phân giác của góc BCD.

Hay $\angle OCD = \angle ACD = 45^\circ$.



Ta có: $CD = 27,4 \Rightarrow AC = CD \cdot \sqrt{2} = 27,4 \cdot \sqrt{2} \approx 38,75$.

$\Rightarrow OC = AC - OA \approx 38,75 - 18,44 = 20,31$.

Xét tam giác OCD, áp dụng định lí côsin ta có:

$$OD^2 = CD^2 + CO^2 - 2 \cdot CD \cdot CO \cdot \cos ACD.$$

Trong đó $CD = 27,4$; $CO = 20,31$; $ACD = 45^\circ$

Khi đó: $OD^2 = 27,4^2 + 20,31^2 - 2 \cdot 27 \cdot 20,31 \cdot \cos 45^\circ$

$$\Leftrightarrow OD^2 \approx 376,255$$

$$\Leftrightarrow OD \approx 19,4 \text{ (m)}$$

Xét $\triangle COB$ và $\triangle COD$, có:

$BC = CD$ (ABCD là hình vuông)

$BCO = DCO = 45^\circ$ (CA là tia phân giác của góc BCD)

Cạnh CO chung

Do đó $\triangle COB = \triangle COD$ (c.g.c)

Suy ra $OB = OD \approx 19,4$ (m) (hai cạnh tương ứng).

Vậy khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3 khoảng 19,4 m.