Bài 2. Phương trình lượng giác cơ bản

A. Lý thuyết

1. Phương trình sinx = a.

Xét phương trình sinx = a (1)

- Trường hợp |a| > 1

Phương trình (1) vô nghiệm vì |sinx| ≤ 1 với mọi x.

- Trường hợp |a| ≤ 1

Gọi α là số đo bằng radian của một cung lượng giác. Khi đó, phương trình sinx = a có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z};$$
$$x = \pi - \alpha + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = a \end{cases}$ thì ta viết α = arcsina (đọc là ac-sin-a; nghĩa là cung có sin bằng a). Khi đó, các nghiệm của phương trình sinx = a được viết là:

$$x = \arcsin a + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z};$$
$$x = \pi - \arcsin a + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Chú ý:

a) Phương trình sinx = sinα; với α là một số cho trước, có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k2\pi \text{ và } x = \pi - \alpha + k2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

Tổng quát: $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.

b) Phương trình sinx = $\sin\beta^0$ có các nghiệm là:

$$x = \beta^0 + k.360^0 \text{ và } x = 180^0 - \beta^0 + k.360^0\ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Trong một công thức về nghiệm của phương trình lương giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

d) Các trường hợp đặc biệt:

+ Khi a = 1: Phương trình sinx = 1 có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

+ Khi a = – 1: Phương trình sinx = – 1 có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

+ Khi a = 0: Phương trình sinx = 0 có các nghiệm là $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

- Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin x = \frac{2}{3}$.

Lời giải:

a) Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ nên $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

Vậy phương trình có các nghiệm là:

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $\sin x = \frac{2}{3}$ khi $x = \arcsin\frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là:

$x = \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình cosx = a.

- Trường hợp |a| > 1

Phương trình cosx = a vô nghiệm vì $|\cos x| \le 1$ với mọi x.

- Trường hợp $|a| \le 1$.

Gọi α là số đo radian của một cung lượng giác. Khi đó, phương trình cosx = a có các nghiệm là:

$$x = \pm\alpha + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

- Chú ý:

a) Phương trình cosx = cosα, với α là một số cho trước, có các nghiệm là:

$$x = \pm\alpha + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát: cosf(x) = cosg(x) $\Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình cos x= $\cos\beta^0$ có các nghiệm là $x = \pm\beta^0 + k360^0;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = a \end{cases}$ thì ta viết α = arccosa (đọc là ac – cosin- a, có nghĩa là cung có cosin bằng a). Khi đó, các nghiệm của phương trình cos x = a còn được viết là:

$$x = \pm \arccos a + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

d) Các trường hợp đặc biệt:

+ Khi a = 1; phương trình cosx = 1 có các nghiệm là: $x = k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

+ Khi a = – 1; phương trình cosx = – 1 có các nghiệm là: $x = \pi + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

+ Khi a = 0; phương trình cosx = 0 có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{5}$;

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos x = \frac{3}{7}$.

Lời giải:

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{5} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vì $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ nên :

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = \pm\ \arccos\ \frac{3}{7} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình tanx = a.

- Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Kí hiệu x = arctana (đọc là ac– tang– a; nghĩa là cung có tang bằng a). Khi đó, nghiệm của phương trình tanx = a là:

$$x = \arctan a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

- Chú ý:

a) Phương trình tanx = tanα, với α là một số cho trước, có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát; tan f(x) = tan g(x) $\Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình tanx = $\tan\beta^0$ có các nghiệm là: $x = \beta^0 + k.180^0;\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

a) $\tan x = \tan\frac{2\pi}{5}$;

b) $\tan x = \frac{-1}{8}$;

c) $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

a) $\tan x = \tan\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan x = \frac{-1}{8}$

$\Leftrightarrow x = \arctan\frac{-1}{8} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình cotx = a

Điều kiện xác định của phương trình $x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Kí hiệu x = arccota (đọc là ac– côtang – a; nghĩa là cung có côtang bằng a). Khi đó, nghiệm của phương trình cotx = a là:

$$x = \text{arccot}\, a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

- Chú ý:

a) Phương trình cotx = cotα, với α là một số cho trước, có các nghiệm là:

$$x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát; cot f(x) = cot g(x) $\Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình cot x = cot β^0 có các nghiệm là: $x = \beta^0 + k.180^0;\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

a) $\cot x = \cot\frac{\pi}{9}$;

b) $\cot x = \frac{20}{3}$;

c) $\cot 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

a) $\cot x = \cot\frac{\pi}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cot x = \frac{20}{3}$;

$\Leftrightarrow x = \arctan\frac{20}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\cot 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \cot 3x = \cot\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

- Ghi nhớ.

Mỗi phương trình sinx = a ($|a| \le 1$); cosx = a ($|a| \le 1$), tanx = a; cotx = a có vô số nghiệm.

Giải các phương trình trên là tìm tất cả các nghiệm của chúng.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin(2x + 15^0) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$;

c) sinx = cos x.

Lời giải:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các họ nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) $\sin(2x + 15^0) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2x + 15^0) = \sin(-45^0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 15^0 = -45^0 + k.360^0 \\ 2x + 15^0 = 180^0 + 45^0 + k.360^0 \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -60^0 + k.360^0 \\ 2x = 210^0 + k.360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -30^0 + k.180^0 \\ x = 105^0 + k.180^0 \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các họ nghiệm $x = 105^0 + k.180^0; x = -30^0 + k.180^0\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

c) sinx = cos x

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 0x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Bài 2. Giải các phương trình:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$;

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k2\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có các họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Bài 3. Giải các phương trình:

a) $\tan 2x = 1$;

b) $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$;

c) $\sin x.\ \tan 2x = 0$.

Lời giải:

a) tan 2x = 1

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có họ nghiệm $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) sinx. tan2x = 0 (1)

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \tan 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2x = k\pi \end{array}\right.;k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện, vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

b) tanx. tan2x = 1.

Lời giải:

a) $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{5\pi}{6} + x + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có các họ nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) tanx. tan2x = 1.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$

Khi đó: tanx . tan2x = 1

$\Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x}$

$\Leftrightarrow \tan 2x = \cot x$ (vì tanx. cotx = 1),

$$\Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp điều kiện, vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; \, k \neq 3m + 1; \, k; m \in \mathbb{Z}$.