Bài tập cuối chương 3

A. Lý thuyết

1. Hàm số

1.1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng D ⊂ ℝ. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực ℝ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.

Tập D được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: y = f(x), x ∈ D.

1.2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Hàm số được cho bằng biểu thức, cùng cách nói với hàm số cho bằng công thức.

Tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức.

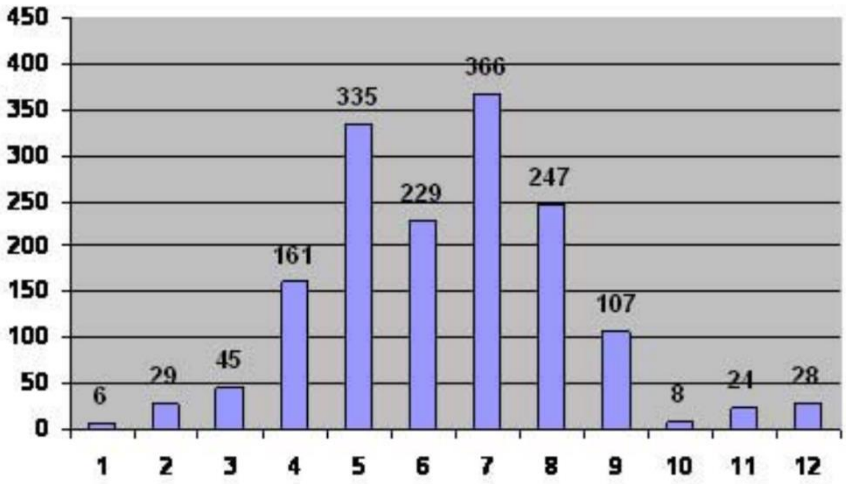
Ví dụ:

Cho hàm số: f(x) = $\begin{cases} -1 \text{ khi } x < 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ 1 \text{ khi } x > 0 \end{cases}$.

c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng không thức (hoặc nhiều công thức).

Ví dụ: Biểu đồ lượng mưa tại Hà Nội trong năm 2021 (Đơn vị: mm)



2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số y = f(x) xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm M(x; f(x)) trong mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi x thuộc D.

Chú ý:

– Điểm M(a; b) trong mặt phẳng toạ độ Oxy thuộc đồ thị hàm số y = f(x), x ∈ D khi và chỉ khi $\begin{cases} a \in D \\ b = f(a) \end{cases}$.

– Để chứng tỏ điểm M(a; b) trong mặt phẳng toạ độ không thuộc đồ thị hàm số y = f(x), x ∈ D, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Chứng tỏ rằng a ∉ D

Khả năng 2: Khi a ∈ D thì chứng tỏ rằng b ≠ f(a).

3. Sự biến của hàm số

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b):

– Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến trên khoảng (a; b) nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

– Hàm số y = f(x) gọi là nghịch biến trên khoảng (a; b) nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng y = $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a ≠ 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

5. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai y = $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với toạ độ $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Các bước vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Bước 1: Xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;

Bước 2: Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

Bước 3: Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có toạ độ (0; c)) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có toạ độ (0; c) qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$

Bước 4: Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số

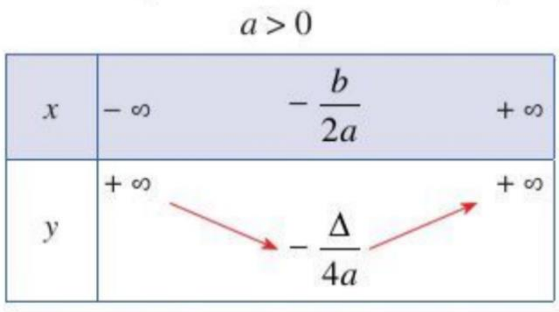
– Sự đồng biến nghịch của hàm số bậc hai.

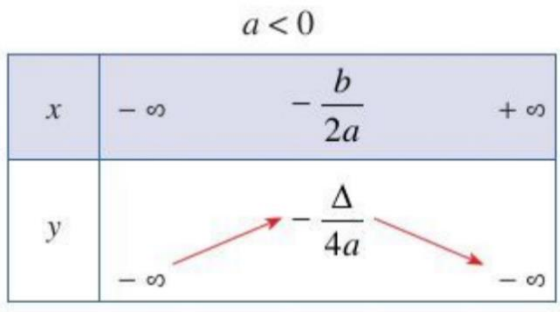
Cho hàm số f(x) = $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

– Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$

– Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$

Bảng biến thiên:





6. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai f(x) = $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$

+ Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Khi đó:

– f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty;\ x_1)$; $(x_2;\ +\infty)$

– f(x) trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1;\ x_2)$

7. Bất phương trình bậc hai một ẩn

– Bất phương trình bậc hai một ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau: $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

– Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^{\ 2} + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

8. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

*Cách 1: Xét dấu tam thức bậc hai

f(x) > 0 (f(x) = ax^2 + bx + c), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho f(x) mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số *a* và tìm nghiệm của f(x) (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho f(x) mang dấu "+".

Các bất phương trình bậc hai có dạng f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0 được giải bằng cách tương tự.

*Cách 2: Sử dụng hàm số

– Giải bất phương trình bậc hai ax^2 +bx + c > 0 là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol y = ax^2 + bx + c nằm phía trên trục hoành.

– Tương tự, giải bất phương trình bậc hai ax^2 + bx + c < 0 là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol y = ax^2 + bx + c nằm phía dưới trục hoành.

Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng:

f(x) > 0 (f(x) = ax^2 + bx + c) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol y = ax^2 + bx + c, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối vỗi các bất phương trình bậc hai có dạng f(x) < 0, f(x) ≥ 0, ,f(x) ≤ 0, ta cũng làm tương tự.

9. Hai dạng phương trình quy về phương trình bậc hai

* Phương trình có dạng $\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{g\left(x\right)}$ (I)

Để giải phương trình (I) ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình f(x) = g(x) rồi tìm nghiệm của phương trình này

Bước 2: Thay từng nghiệm của phương trình f(x) = g(x) vào bất phương trình

f(x) ≥ 0 hoặc g(x) ≥ 0. Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3: Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I)

* Phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1: Giải bất phương trình g(x) ≥ 0 để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó

Bước 2: Bình phương hai vế của phương trình dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3: Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình g(x) ≥ 0. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số sau: $y = 2x^2 - 6x + 4$

Hướng dẫn giải

– Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

– Ta có: a = 2; b = –6; c = 4; $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.2.4 = 4$

– Toạ độ đỉnh I = $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{6}{2.2};\frac{-4}{4.2}\right) = \left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

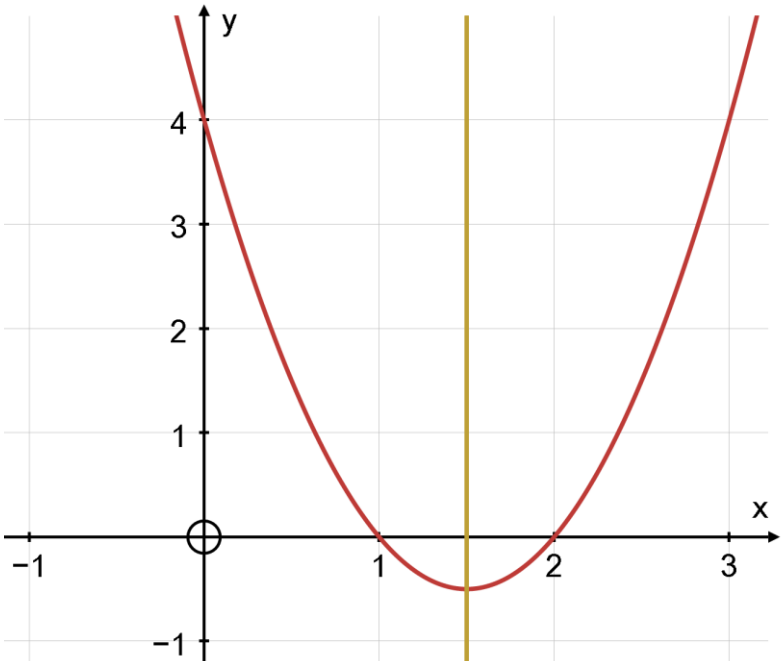
– Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$

– Giao điểm của parabol với trục Oy là A(0; 4)

– Giao điểm của parabol với trục Ox là B (1; 0); (2; 0)

– Chọn một điểm thuộc đồ thị cho x = –1 thay vào $y = 2x^2 - 6x + 4$ ta được điểm D(–1; 12)

Vẽ parabol qua các điểm trên:



Bài 2. Khi nào thì tam thức bậc hai $f\left(x\right)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}$ nhận giá trị dương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f\left(x\right)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Bài 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1<0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f\left(x\right)=\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1.$

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{-2x^2-3x+12}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ x^2-5x+4=-2x^2-3x+12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-1\right)\left(x-4\right)\ge 0\\ 3x^2-2x-8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{-8}{6}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-8}{6}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm S = $\left\{\frac{-8}{6}\right\}$.

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$

Hướng dẫn giải

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ge 0\\ 3x^2-9x+1=\left(x-2\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 3x^2-9x+1=x^2-4x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-3)(2x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3(\text{tm}) \\ x = \dfrac{-1}{2}(\text{ktm}) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm S = {3}.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tập xác định của hàm số y = $\sqrt{x-1}$ là:

A. D = $\mathbb{R}$;

B. D = (1; 0);

C. D = (– ∞; 1);

D. D = [1; + ∞).

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Hàm số y = $\sqrt{x-1}$ xác định ⇔ x – 1 ≥ 0 ⇔ x ≥ 1.

Như vậy tập xác định của hàm số là D = [1; + ∞).

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số y = 4x + 1?

A. (2; 3);

B. (0; 1);

C. (4; 5);

D. (0; 0).

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

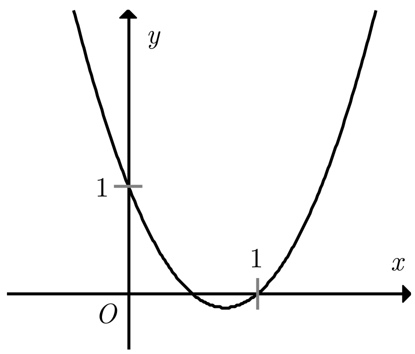
- Thay x = 2; y = 3 vào hàm số ta được: 3 = 4.2 + 1 (vô lí). Do đó, (2; 3) không thuộc đồ thị hàm số.

- Thay x = 0; y = 1 vào hàm số ta được: 1 = 4.0 + 1 (luôn đúng). Do đó, (0; 1) thuộc đồ thị hàm số.

- Thay x = 4; y = 5 vào hàm số ta được: 5 = 4.4 + 1 (vô lí). Do đó, (4; 5) không thuộc đồ thị hàm số.

- Thay x = 0; y = 0 vào hàm số ta được: 0 = 4.0 + 1 (vô lí). Do đó, (0; 0) không thuộc đồ thị hàm số.

Câu 3. Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào trong các phương án dưới đây?



A. $y = -x^2 + 3x - 1$;

B. $y = -2x^2 + 3x - 1$;

C. $y = 2x^2 - 3x + 1$;

D. $y = x^2 - 3x + 1$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Parabol có bề lõm hướng lên nên a > 0. Loại đáp án A, B.

Parabol cắt trục hoành tại điểm (1; 0), thay x = 1; y = 0 vào các hàm số ở đáp án C và D ta có:

- Thay x = 1; y = 0 vào $y = 2x^2 - 3x + 1$:

$0 = 2.1^2 - 3 . 1 + 1$ (luôn đúng), như vậy điểm (1; 0) thuộc đồ thị hàm số.

- Thay x = 1; y = 0 vào $y = x^2 - 3x + 1$:

$0 = 1^2 - 3 . 1 + 1$ (vô lí), như vậy điểm (1; 0) không thuộc đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số trên hình là đồ thị của hàm số ở đáp án C.

Câu 4. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x - 3$ là:

A. $S = \{6; 2\}$;

B. $S = \{2\}$;

C. $S = \{6\}$;

D. $S = \varnothing$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Ta có: $\sqrt{2x-3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = $\{6\}$.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là:

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$;

B. $\left(2;+\infty\right)$;

C. $\left(1;2\right)$;

D. $\left(-\infty;1\right)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Ta có: $f\left(x\right)=x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow1<x<2$.