

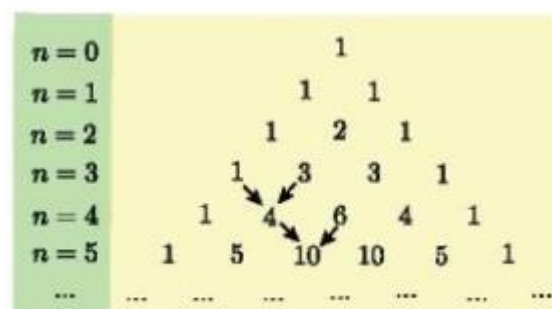
## A. Lý thuyết

$$\begin{aligned} \bullet (a+b)^4 &= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (a+b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$

Hai công thức trên gọi là ***công thức nhị thức Newton*** (gọi tắt là ***nhị thức Newton***)  $(a + b)^n$  ứng với  $n = 4$  và  $n = 5$ .

– Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton  $(a + b)^n$  với  $n = 0; 1; 2; 3; \dots$  được viết thành từng hàng và xếp thành bảng số như dưới đây.



Bảng số này có quy luật: số đầu tiên và số cuối cùng của mỗi hàng đều là 1; tổng của 2 số liên tiếp cùng hàng bằng số của hàng kế dưới ở vị trí giữa hai số đó (được chỉ bởi mũi tên trên bảng).

Bảng số trên được gọi là ***tam giác Pascal*** (đặt theo tên của nhà toán học, vật lý học, triết học người Pháp Blaise Pascal, 1623 – 1662).

**Ví dụ:** Sử dụng công thức nhị thức Newton khai triển biểu thức  $(a + 2)^4$ .

### Hướng dẫn giải

Theo công thức nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned}(a + 2)^4 &= 1.a^4 + 4a^3.2 + 6a^2.2^2 + 4a.2^3 + 2^4 \\ &= a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16.\end{aligned}$$

**Ví dụ:** Khai triển và rút gọn biểu thức:  $(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5$ .

### Hướng dẫn giải

Theo công thức nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned}\bullet (1 + \sqrt{5})^5 &= 1 + 5\sqrt{5} + 10.(\sqrt{5})^2 + 10.(\sqrt{5})^3 + 5.(\sqrt{5})^4 + 1.(\sqrt{5})^5 \\ &= 1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5} \\ &= 176 + 80\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet (1 - \sqrt{5})^5 &= 1 + 5(-\sqrt{5}) + 10.(-\sqrt{5})^2 + 10.(-\sqrt{5})^3 + 5.(-\sqrt{5})^4 + 1.(-\sqrt{5})^5 \\ &= 1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5} \\ &= 176 - 80\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$(1 + \sqrt{5})^5 + (1 - \sqrt{5})^5 = 176 + 80\sqrt{5} + 176 - 80\sqrt{5} = 352.$$

## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1.** Sử dụng công thức nhị thức Newton khai triển biểu thức:

a)  $(2x + y)^4$ ;

b)  $(x - \sqrt{5})^5$ .

**Hướng dẫn giải**

Theo công thức nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x + y)^4 &= (2x)^4 + 4.(2x)^3.y + 6.(2x)^2.y^2 + 4(2x).y^3 + y^4 \\ &= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{5})^5 &= x^5 + 5x^4.(-\sqrt{5}) + 10x^3.(-\sqrt{5})^2 + 10x^2.(-\sqrt{5})^3 + 5x(-\sqrt{5})^4 + (-\sqrt{5})^5 \\ &= x^5 - 5\sqrt{5}x^4 + 50x^3 - 50\sqrt{5}x^2 + 125x - 25\sqrt{5} \end{aligned}$$

**Bài 2.** Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển  $(2x - 3)^5$ .

**Hướng dẫn giải**

Theo công thức nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} (2x + 3)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4.(-3) + 10.(2x)^3.(-3)^2 + 10.(2x)^2.(-3)^3 + 5.2x.(-3)^4 + (-3)^5 \\ &= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243 \end{aligned}$$

Vậy hệ số của  $x^4$  trong khai triển là  $-240$ .

**Bài 3.** Sử dụng công thức nhị thức Newton chứng tỏ rằng:

$$C_5^0 + 2.C_5^1 + 2^2.C_5^2 + 2^3.C_5^3 + 2^4.C_5^4 + 2^5.C_5^5 = 243$$

**Hướng dẫn giải**

Giả sử ta có khai triển  $(a + b)^n$  với  $n = 0; 1; 2; \dots$

Ta thấy trong biểu thức chứng minh có tổ hợp chập  $k$  của  $5$ , nên  $n = 5$ .

Ở đây có xuất hiện lũy thừa của số 2 từ mũ 1 đến mũ 5 nên  $b = 2$ .

Ta có khai triển:

$$(x + 2)^5 = C_5^0 \cdot x^5 + C_5^1 \cdot x^4 \cdot 2 + C_5^2 \cdot x^3 \cdot 2^2 + C_5^3 \cdot x^2 \cdot 2^3 + C_5^4 \cdot x \cdot 2^4 + C_5^5 \cdot 2^5$$

Khi  $x = 1$  thì ta có:

$$(1 + 2)^5 = C_5^0 \cdot 1^5 + C_5^1 \cdot 1^4 \cdot 2 + C_5^2 \cdot 1^3 \cdot 2^2 + C_5^3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 + C_5^4 \cdot 1 \cdot 2^4 + C_5^5 \cdot 2^5$$

$$\Leftrightarrow 3^5 = C_5^0 + 2 \cdot C_5^1 + 2^2 \cdot C_5^2 + 2^3 \cdot C_5^3 + 2^4 \cdot C_5^4 + 2^5 \cdot C_5^5$$

$$\Leftrightarrow 243 = C_5^0 + 2 \cdot C_5^1 + 2^2 \cdot C_5^2 + 2^3 \cdot C_5^3 + 2^4 \cdot C_5^4 + 2^5 \cdot C_5^5$$

$$\text{Vậy } C_5^0 + 2 \cdot C_5^1 + 2^2 \cdot C_5^2 + 2^3 \cdot C_5^3 + 2^4 \cdot C_5^4 + 2^5 \cdot C_5^5 = 243.$$

**Bài 4.** Khai triển và rút gọn biểu thức:  $(x + 2)^4 + (2 - x)^4$ .

Từ đó tính giá trị biểu thức:  $2,05^4 + 1,95^4$ .

### Hướng dẫn giải

Theo công thức nhị thức Newton ta có:

$$\bullet (x + 2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2^2 + 4x \cdot 2^3 + 2^4$$

$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

$$\bullet (2 - x)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot (-x) + 6 \cdot 2^2 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (-x)^3 + (-x)^4$$

$$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$$

Do đó ta có:

$$(x + 2)^4 + (2 - x)^4 = 2x^4 + 48x^2 + 32.$$

Với  $x = 0,05$  ta có:

$$(0,05 + 2)^4 + (2 - 0,05)^4$$

$$= 2 \cdot (0,05)^4 + 48 \cdot (0,05)^2 + 32$$

$$= 32,1200125.$$

$$\text{Vậy } 2,05^4 + 1,95^4 = 32,1200125.$$