Bài 4. Cấp số nhân

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa

- **Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

- Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n.\, q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Đặc biệt

Khi q = 0, cấp số nhân có dạng u_1, 0, 0, …., 0,…..

Khi q = 1, cấp số nhân có dạng u_1, u_1, u_1, …., u_1,…

Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng 0, 0, 0, 0, 0,…, 0..

- Ví dụ 1. Dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân: 2, 4, 8, 16, 32 với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội q = 2.

II. Số hạng tổng quát.

- Định lí: Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

- Ví dụ 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -1$; $q = -2$.

a) Tính u_6;

b) Hỏi 128 là số hạng thứ mấy.

Lời giải:

a) Ta có: $u_6 = u_1.\, q^5 = -1.\, (-2)^5 = 32$.

b) Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1}$ nên $128 = -1.\, (-2)^{n-1}$

$\Leftrightarrow (-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7$.

$\Leftrightarrow$ n – 1 = 7 nên n = 8.

Vậy 128 là số hạng thứ 8.

III. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

- Định lí: Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\ ;\ k \geq 2\ (\text{ hay } |u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}).$$

IV. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân.

- Định lí: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Khi đó: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

- Chú ý: Nếu q = 1 thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, \ldots u_1, \ldots$ Khi đó, $S_n = n.u_1$.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$; $u_2 = 9$. Tính tổng của 8 số hạng đầu tiên?

Lời giải:

Ta có: $u_2 = u_1.q$ nên 9 = 3q.

Suy ra, công bội q = 3.

Khi đó, tổng của 8 số hạng đầu tiên là:

$$S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3.(1-3^8)}{1-3} = 9840.$$

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_4 = 108$ và $u_2 = 3$. Viết số hạng tổng quát của cấp số nhân; biết q > 0 ?

Lời giải:

Theo đầu bài ta có:

$$\begin{cases} u_4 = 108 \\ u_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 = 108\ \ (1) \\ u_1.q = 3\ \ (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2), vế chia vế ta được:

$\frac{u_1q^3}{u_1q} = \frac{108}{3}$ hay $q^2 = 36$.

Suy ra; $q = 6$ (vì $q > 0$)

Thay vào (2) ta được: $u_1.6 = 3$ nên $u_1 = \frac{1}{2}$.

Do đó, số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là: $u_n = \frac{1}{2}.6^n$.

Bài 2. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm bốn số đó?

Lời giải:

Khi chèn thêm 4 số nữa vào giữa các số 160 và 5, ta được cấp số nhân với:

$u_1 = 160$ và $u_6 = 5$.

Vì $u_6 = u_1.q^5$ nên $5 = 160.q^5$.

$\Rightarrow q^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Khi đó:

$u_2 = 160.\frac{1}{2} = 80; u_3 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 40;$

$u_4 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20; u_5 = 160.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 10$

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$. Tính u_1?

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ \frac{u_1(1-q^3)}{1-q} = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1(1+q+q^2) = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{6}{q} \quad (1) \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \quad (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được:

$\frac{6}{q}+\frac{6}{q}.q+\frac{6}{q}.q^2=43$

Suy ra: $6 + 6q + 6q^2 = 43q$

$\Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=6 \\ q=\frac{1}{6} \end{array}\right.$

+ Với q = 6 thì $u_1=\frac{6}{6}=1$

+ Với $q=\frac{1}{6}\Rightarrow u_1=\frac{6}{\frac{1}{6}}=36$.

Vậy $u_1 = 1$ hoặc $u_1 = 36$.

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4+u_6=120 \\ u_3+u_5=60 \end{cases}$. Tính S_7?

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} u_4+u_6=120 \\ u_3+u_5=60 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3+u_1q^5=120 \\ u_1q^2+u_1q^4=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3(1+q^2)=120 & (1) \\ u_1q^2(1+q^2)=60 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) chia (2), vế chia vế ta được: q = 2.

Thay q = 2 vào (1) ta được: $u_1.\ 2^3.\ (1 + 2^2) = 120$ nên $u_1 = 3$.

Khi đó: $S_7=\frac{u_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{3.(1-2^7)}{1-2}=381$

Vậy $S_7 = 381$.