## Bài tập Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm - Toán 11

### I. Bài tập trắc nghiệm

**Bài 1:** Xét ba mệnh đề sau: (1) Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x = $x_0$ thì f(x) liên tục tại điểm đó. (2) Nếu hàm số f(x) liên tục tại điểm x = $x_0$ thì f(x) có đạo hàm tại điểm đó. (3) Nếu f(x) gián đoạn tại x = $x_0$ thì chắc chắn f(x) không có đạo hàm tại điểm đó. Trong ba câu trên:

A. Có hai câu đúng và một câu sai.

B. Có một câu đúng và hai câu sai.

C. Cả ba đều đúng.

D. Cả ba đều sai.

**Lời giải:**

(1) Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x = $x_0$ thì f(x) liên tục tại điểm đó. Đây là mệnh đề đúng.

(2) Nếu hàm số f(x) liên tục tại điểm x = $x_0$ thì f(x) có đạo hàm tại điểm đó.

Phản ví dụ

Lấy hàm f(x) = |x| ta có D = R nên hàm số f(x) liên tục trên R.

Nhưng ta có

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x-0}{x-0} = -1 \end{array}\right.$$

Nên hàm số không có đạo hàm tại x = 0.

Vậy mệnh đề (2) là mệnh đề sai.

(3) Nếu f(x) gián đoạn tại $x = x_0$ thì chắc chắn f(x) không có đạo hàm tại điểm đó.

Vì (1) là mệnh đề đúng nên ta có f(x) không liên tục tại $x = x_0$ thì f(x) không có đạo hàm tại điểm đó.

Vậy (3) là mệnh đề đúng.

**Chọn đáp án A**

**Bài 2:** Cho hàm số $f(x) = x^2 - x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia của đối số x tại x0 là

A. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x\right)$.

B. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\Delta x + 2x - 1\right)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\Delta x + 2x + 1\right)$.

D. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x\right)$.

**Lời giải:**

Ta có :

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)$$

$$=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0-\Delta x-x_0^2+x_0$$

$$=(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x$$

Nên

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$$

Vậy $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-1)$

**Chọn đáp án B**

**Bài 3:** Xét hai câu sau: (1) Hàm số $y=\frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại x= 0. (2) Hàm số $y=\frac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại x=0 . Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng.

B. Chỉ có (1) đúng.

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Lời giải:**

Ta có :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = f(0). \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại x= 0

Ta có :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{|x|}{x+1} - 0}{x} = \frac{|x|}{x(x+1)} (\text{với } x \neq 0)$$

Do đó :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1 \end{cases}$$

Vì giới hạn hai bên khác nhau

Nên không tồn tại giới hạn của $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

khi $x \to 0$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ không có đạo hàm tại x= 0.

**Chọn đáp án B**

**Bài 4:** Cho hàm số f(x) = $x^2$ + |x|. Xét hai câu sau: (1). Hàm số trên có đạo hàm tại x= 0 (2). Hàm số trên liên tục tại x= 0 Trong hai câu trên:

A. Chỉ (1) đúng.

B. Chỉ (2) đúng.

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

**Lời giải:**

Ta có:

+) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+x) = 0$.

+) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-x) = 0$.

+) $f(0)=0$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Vậy hàm số liên tục tại x= 0.

Mặt khác:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

$\Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại x= 0.

**Chọn đáp án B**

**Bài 5:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại điểm $x = 2$

A. 9

B. 4

C. 7

D. 6

**Lời giải:**

Cách 1: Cho $x_0 = 2$ một số gia $\Delta x$.

Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= 2(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x) + 1 - (2.2^2 + 2 + 1)$$
$$= 8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2 + \Delta x + 1 - 11$$
$$= \Delta x(9 + 2\Delta x)$$

Ta có:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(9 + 2\Delta x)}{\Delta x}.$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(9 + 2\Delta x) = 9$$

Cách 2: Ta có: f(2) = 11

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x + 1 - 11}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2}(2x + 5) = 9$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại x = 2 và f'(2) = 9.

**Chọn đáp án A**

**Bài 6:** Tính số gia của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ tại $x_0 = 1$

A.

B.

C.

D. Đáp án khác

**Lời giải:**

Cho $x_0$ = 1 một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(1 + \Delta x\right) - f\left(1\right)$$
$$= \sqrt{2(1+\Delta x)+1} - \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{2\Delta x + 3} - \sqrt{3} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{3 + 2\Delta x} + \sqrt{3}}$$

**Chọn đáp án B**

**Bài 7:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại x = 3

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{3}{16}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{4}{5}$

**Lời giải:**

Cách 1: Cho $x_0 = 3$ một số gia $\Delta x$.

Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(3+\Delta x) - f(3)$$

$$= \frac{2(3+\Delta x)-1}{3+\Delta x+1} - \frac{5}{4} = \frac{5+2\Delta x}{4+\Delta x} - \frac{5}{4} = \frac{3\Delta x}{4(4+\Delta x)}$$

Ta có:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x.4(4+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{4(4+\Delta x)} = \frac{3}{16}.$$

Cách 2:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{2x-1}{x+1} - \frac{5}{4}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)4} = \lim_{x \to 3} \frac{3}{(x+1)4} = \frac{3}{16}$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại:

x=3 và $f'(3) = \frac{3}{16}$.

**Chọn đáp án B**

**Bài 8:** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & khi\ x \ge 1 \\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

A. 0

B. 4

C. 5

D. Đáp án khác

**Lời giải:**

Ta có:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(2x+3\right) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x^2+3x-4) = 0$$

Dẫn tới $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$

Nên hàm số không liên tục tại x =1

Nên hàm số không có đạo hàm tại x=1.

**Chọn đáp án D**

**Bài 9:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Khi đó f'(0) là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{32}$

D. Không tồn tại.

**Lời giải:**

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\frac{1}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{16}.$$

**Chọn đáp án B**

**Bài 10:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\le 2 \\ -\frac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2 \end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại x = 2 thì giá trị của b là

A. b = 3

B. b = -6

C. b = 1

D. b = 6

**Lời giải:**

Ta có :

- $f(2)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=2b-8$

F(x) có đạo hàm tại x = 2

Nên f(x) liên tục tại x= 2

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2b-8=4\Leftrightarrow b=6.$

**Chọn đáp án D**

**II. Bài tập tự luận có giải**

**Bài 1:** Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm tại $x_0$ là $f'(x_0)$ . Khẳng định nào sau đây sai?

**Lời giải:**

A. Đúng (theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm).

B. Đúng vì

$$\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=\Delta x+x_0$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x+x_0-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

C. Đúng vì

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0,\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h+x_0-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**Bài 2:** Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

**Lời giải:**

Gọi $\Delta x$ là số gia của đối số và $\Delta y$ là số gia tương ứng của hàm số.

Ta có :

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - 2^3 \\ &= x_0^3 + (\Delta x)^3 + 3x_0\Delta x(x_0+\Delta x) - 8\end{aligned}.$$

Với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ thì $\Delta y = 19$.

**Bài 3:** Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số f(x) = 2x.( x - 1) theo x và $\Delta x$ là?

**Lời giải:**

* Ta có: $f(x) = 2x.(x-1) = 2x^2 - 2x$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= 2(x+\Delta x)^2 - 2.(x+\Delta x) - (2x^2 - 2x) \\ &= 2x^2 + 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 2x^2 + 2x \\ &= 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2\Delta x\end{aligned}$$

* Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2.\Delta x - 2$

**Bài 4:** Số gia của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ứng với số gia $\Delta x$ của đối số x tại $x_0 = -1$ là

**Lời giải:**

Với số gia $\Delta x$ của đối số x tại $x_0 = -1$ ,ta có:

$$\Delta y=\frac{(-1+\Delta x)^2}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1+(\Delta x)^2-2\Delta x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x$$

**Bài 5**: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

**Lời giải:**

Ta có: f(1) = 0 và

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)^2.(\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2.(\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Vậy $f'(1)=\frac{1}{2}$.

**Bài 6:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có đạo hàm tại x = 1?

**Lời giải:**

Hàm số liên tục tại x = 1

nên ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a + b$

Hàm số có đạo hàm tại x = 1

nên giới hạn 2 bên của $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ bằng nhau

Ta có

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{a(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} a = a$$

( Vì $f(1) = \frac{1}{2} = a + b$ )

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{2} = 1$$

Vậy $a = 1; b = -\frac{1}{2}$

**Bài 7:** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$ tại x = 1.

**Lời giải:**

Ta có hàm số liên tục tại x = 1 và

$$f(-1) = -1; \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$$

Nên

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1).(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x} = 2$$

Do đó $\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm x = -1.

Nhận xét: Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x = $x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

**Bài 8:** Tìm số gia của hàm số f(x) = $x^3$, biết rằng:

**Lời giải:**

Số gia của hàm số được tính theo công thức:

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

a. Δy = f(1 + 1) – f(1) = f(2) – f(1) = 23 – 13 = 7

b. Δy = f(1 – 0,1) – f(1) = f(0,9) – f(1) = (0,9)3 – 13 = -0,271.

**Bài 9**

Tính $\Delta y$ và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và $\Delta x$

a. $y = 2x - 5$

b. $y = x^2 - 1$

c. $y = 2x^3$

d. $y = \dfrac{1}{x}$

**Lời giải:**

Ta có: $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x_0 = x - \Delta x$ ;

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x - \Delta x)$

a.* $\Delta y = 2x - 5 - f(x - \Delta x)$

$= 2x - 5 - [2(x - \Delta x) - 5]$

$= 2x - 5 - 2x + 2\Delta x + 5 = 2\Delta x$

$* \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

b. * $\Delta y = x^2 - 1 - f(x - \Delta x) = x^2 - 1 - [(x - \Delta x)^2 - 1] = \Delta x(2x - \Delta x)$

$* \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x - \Delta x)}{\Delta x} = 2x - \Delta x$

c. * $\Delta y = 2x^3 - f(x - \Delta x) = 2x^3 - 2(x - \Delta x)^3$

$= 2x^3 - 2[x^3 - 3x^2.\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3]$

$= 2\Delta x[3x^2 - 3x.\Delta x + (\Delta x)^2]$

$* \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2[3x^2 - 3x.\Delta x + (\Delta \Delta x^2]}{\Delta x} = 6x^2 - 6x.\Delta x + 2(\Delta x)^2$

d.* $\Delta y = \dfrac{1}{x} - f(x - \Delta x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - \Delta x} = \dfrac{x - \Delta x - x}{x(x - \Delta x)} = -\dfrac{\Delta x}{x(x - \Delta x)}$

$* \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x(x - \Delta x)}$

**Bài 10** Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số tại các điểm đã chỉ ra:

a. $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

b. $y = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

c. $y = \frac{x+1}{x-1}$

**Lời giải:**

$y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

*Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x_0 = 1$. Ta có:

$\Delta\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f(1-\Delta x) = f(1)$

= (1+Δx)2 +(1+Δx)-(12 +1)

= Δx(3+Δx)

* $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ = 3+x

* lim $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ = lim(3-Δx) = 3(vớiΔx →0)

b. $y = f(x) = \frac{1}{x}\ tại\ x_0 = 2$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$= \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{2(2 + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{4}$$

c. $y = \frac{x+1}{x-1}\ tại\ x_0 = 0$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0)$$

$$= \frac{(\Delta x + 1)}{(\Delta x - 1)} + 1 = 2\frac{\Delta x}{\Delta x - 1}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2}{\Delta x - 1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$$

## III. Bài tập vận dụng

**Bài 1** Chứng minh rằng hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2\ (nếu\ x \geq 0) \\ -x^2\ (nếu\ x < 0) \end{cases}$$

Không có đạo hàm tại điểm x = 0 nhưng có đạo hàm tại điểm x = 2.

**Bài 2** Viết phương trình tiếp tuyến đường cong $y = x^3$

a. Tại điểm (-1; -1);

b. Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c. Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

**Bài 3** Viết phương trình tiếp tuyến của hypebol y = 1/x

Viết phương trình tiếp tuyến của hypebol $y = \frac{1}{x}$

a. Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$;

b. Tại điểm có hoành độ bằng -1;

c. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

**Bài 4** Một vật rơi tự do theo phương trình $s=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8 m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t (t = 5s) đến $t+\Delta t$, trong các trường hợp $\Delta t = 0{,}1s$; $\Delta t = 0{,}05s$; $\Delta t = 0{,}001s$.

b. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 5s.

**Bài 5** Tìm số gia của hàm số f(x)=x3, biết rằng :

a) x0=1;Δx=1

b) x0=1;Δx=−0,1

**Bài 6** Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx :

a) $y=2x-5$;

b) $y=x^2-1$;

c) $y=2x^3$;

d) $y=\frac{1}{x}$

**Bài 7** Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y=x^2+x$ tại $x_0=1$;

b) y= $\frac{1}{x}$ tại $x_0=2$;

c) y= $\frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=0$.

**Bài 8** Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 \text{ nếu } x\geq 0\\ -x^2 \text{ nếu } x<0\end{cases}$$

không có đạo hàm tại điểm x=0 nhưng có đạo hàm tại điểm x=2.

**Bài 9** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong y=x3:

a) Tại điểm có tọa độ (−1;−1);

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

**Bài 10** Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol y= $\frac{1}{x}$:

a) Tại điểm ($\frac{1}{2}$;2)

b) Tại điểm có hoành độ bằng −1;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.