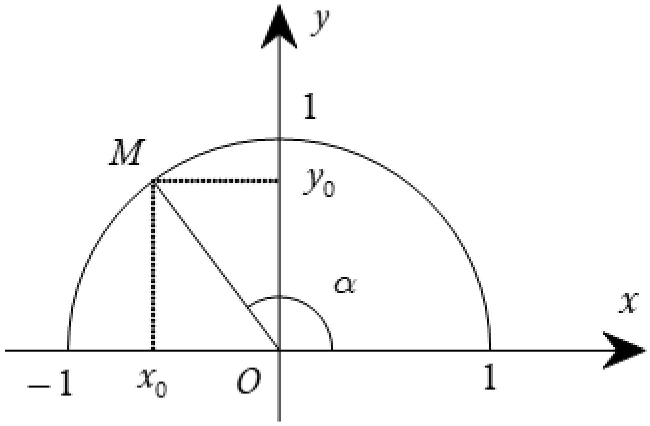
**Bài tập cuối chương 4**

**A. Lý thuyết.**

**1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°**

**1.1 Định nghĩa**




Với mỗi góc α ($0 \le \alpha \le 180°$) ta xác định một điểm M ($x_0$, $y_0$) trên nửa đường tròn đơn vị sao cho góc $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó ta có định nghĩa:

+) sin của góc α, kí hiệu là sinα, được xác định bởi: sinα = $y_0$;

+) côsin của góc α, kí hiệu là cosα, được xác định bởi: cosα = $x_0$;

+) tang của góc α, kí hiệu là tanα, được xác định bởi: tanα = $\frac{y_0}{x_0}(x_0 \neq 0)$;

+) côtang của góc α, kí hiệu là cotα, được xác định bởi: cotα = $\frac{x_0}{y_0}(y_0 \neq 0)$.

Các số sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

**Chú ý:**

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha \neq 90°)$;

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(0 < \alpha < 180°)$.

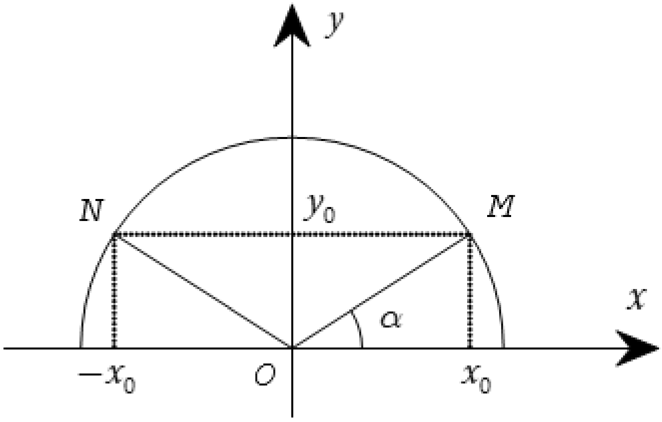
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha\ (0° \le \alpha \le 90°)$;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\ (0° \le \alpha \le 90°)$;

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha\ (0° \le \alpha \le 90°)$;

$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha\ (0° \le \alpha \le 90°)$.

**1.2. Tính chất**




Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu xOM = α thì xON = 180º – α. Với 0° ≤ α ≤ 180° thì:

sin(180° – α) = sinα,

cos(180° – α) = – cosα,

tan(180° – α) = – tanα (α ≠ 90°),

cot(180° – α) = – cotα (α ≠ 0°, α ≠ 180°).

**1.3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

| **Góc** $\alpha$ | **$0^0$** | **$30^0$** | **$45^0$** | **$60^0$** | **$90^0$** | **$120^0$** | **$135^0$** | **$150^0$** | **$180^0$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | –1 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ‖ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\cot\alpha$ | ‖ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | ‖ |

**Chú ý:** Cách sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác:

– Ta có thể tìm giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0° đến 180° bằng cách sử dụng các phím: sin, cos, tan trên máy tính cầm tay.

**2. Định lí côsin**

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Khi đó:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc\cos A$,

$b^2 = c^2 + a^2 – 2ca\cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$.

**Lưu ý:**

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$,

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

**3. Định lí sin**

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

**Lưu ý:**

a = 2RsinA,

b = 2RsinB,

c = 2RsinC.

**4. Tính diện tích tam giác**

**Công thức tính diện tích tam giác:**

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A = \dfrac{1}{2}ca.\sin = \dfrac{1}{2}ab.\sin C$

**Công thức Heron:**

Công thức toán học Heron được sử dụng để tính diện tích của một tam giác theo độ dài ba cạnh như sau:

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

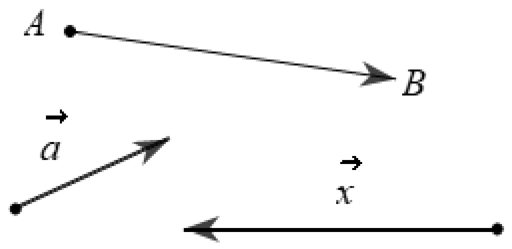
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC.

**5. Vectơ**

**Định nghĩa:** Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và đọc là "vectơ AB". Để vẽ được vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu nút B.




Đối với vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

– Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

– Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

**Ví dụ:** Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài là 5, ta có thể viết như sau: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$.

**6. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng**

**Định nghĩa:**

– Hai vectơ cùng phương: Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

– Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

**7. Hai vectơ bằng nhau**

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

**Nhận xét:**

– Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

– Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

**8. Vectơ–không**

Ta biết rằng mỗi vectơ có một điểm đầu và một điểm cuối và hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Bây giờ với một điểm A bất kì ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và được gọi là vectơ – không.

**Định nghĩa:** Vectơ–không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$

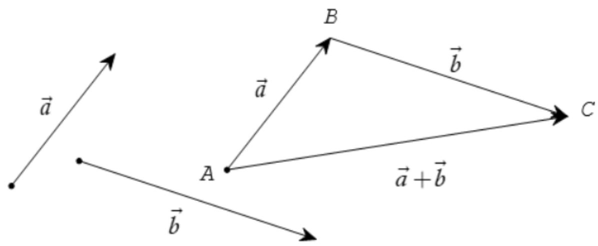
Ta quy ước $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ và $\left|\vec{0}\right| = 0$.

**Nhận xét:** Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

**9. Tổng của hai vectơ**

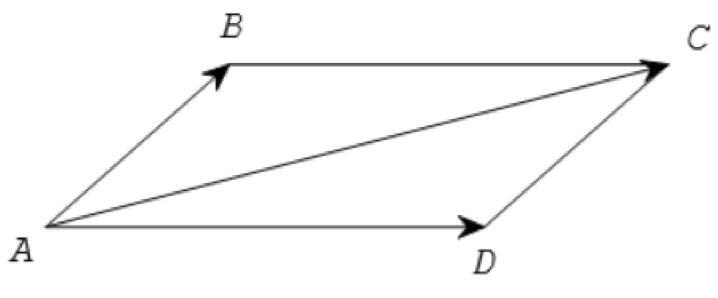
**9.1. Định nghĩa**

– Với ba điểm bất kì A, B, C, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.




Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

**9.2. Quy tắc hình bình hành**




Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

**9.3. Tính chất**

Với ba vectơ tùy ý $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta có:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán) ;

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ–không).

**Chú ý:** Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách sau:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

**10. Hiệu của hai vectơ**

**10.1. Hai vectơ đối nhau**

**Định nghĩa:** Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

**Quy ước:** Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

**Nhận xét:**

+) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

+) Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

+) Với hai điểm A, B, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

**Lưu ý:** Cho hai điểm A, B. Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

**Chú ý:**

– I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

– G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

**10.2. Hiệu của hai vectơ**

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, tức là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ hai vectơ.

**Nhận xét:** Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

**11. Tích của vectơ với một số**

Cho một số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

+ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0;

+ có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$

**Quy ước:** $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là phép nhân một số với một vectơ.

**Tính chất**

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k, ta có:

+) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b};$

+) $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$

+) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$

+) $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$

**Nhận xét:** $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi k = 0 hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

– Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

– Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

– Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq 0$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

– Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

**Nhận xét:** Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số (x; y) thoả mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

**12. Tích vô hướng của hai vectơ**

**12.1. Tích vô hướng của hai vectơ có chung điểm đầu**

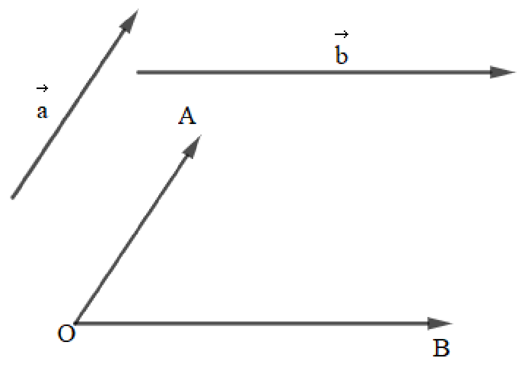
– Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

– Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu là $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

**12.2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý**

**Định nghĩa:**

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (Hình vẽ).




+ Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

+ Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

**Quy ước:** Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

**Chú ý:**

+) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$

+) Nếu $(\vec{a},\vec{b}) = 90°$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 90° = 0$.

+) Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

+) Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

**12.3. Tính chất**

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

+) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

+) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);

+) $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;

+) $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

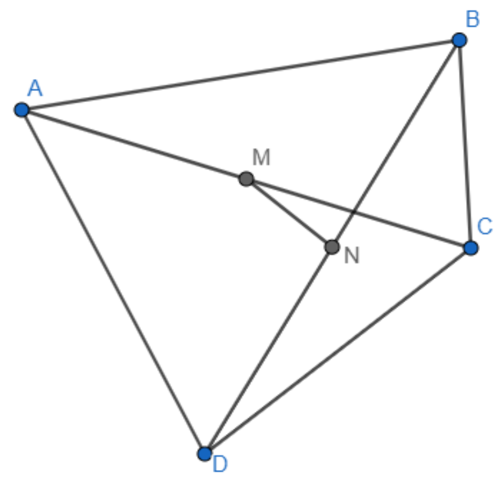
Trong đó, kí hiệu $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

**B. Bài tập tự luyện**

**B.1 Bài tập tự luận**

**Bài 1.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$.

**Hướng dẫn giải:**




Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD

Suy ra:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$

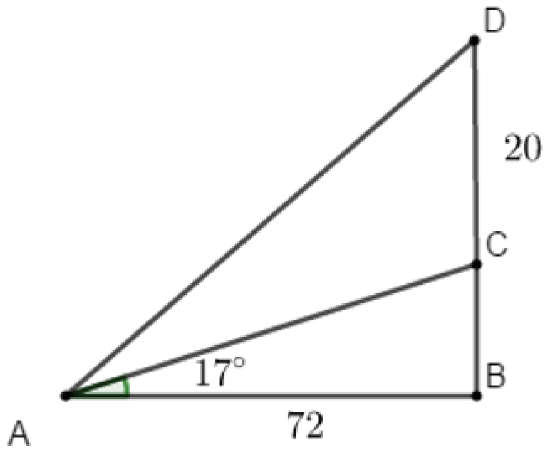
$= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN}\right)$

$= \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (đpcm).

**Bài 2.** Một cây cột điện cao 20 m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17°. Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tính chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cọc đến cuối dốc bằng 72 m (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

**Hướng dẫn giải:**




Bài toán được mô phỏng lại như hình vẽ với A, B lần lượt là điểm cuối dốc, chân của triền dốc; C, D lần lượt là chân và đỉnh của cây cột điện.

Suy ra chiều dài của dây cáp là đoạn AD.

Theo bài ra ta có: CD = 20 m, AB = 72 m, $CAB = 17°$, $ABD = 90°$.

$ACB = 180° - CAB - ABD = 180° - 17° - 90° = 73°$ (tổng ba góc một tam giác bằng 180°).

$ACD = 180° - ACB = 180° - 73° = 107°$

Tam giác ABC vuông tại B ⇒ $AC = \dfrac{AB}{\cos CAB} = \dfrac{72}{\cos 17°} \approx 75{,}3$ (m)

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ACD, ta có:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos ACD$

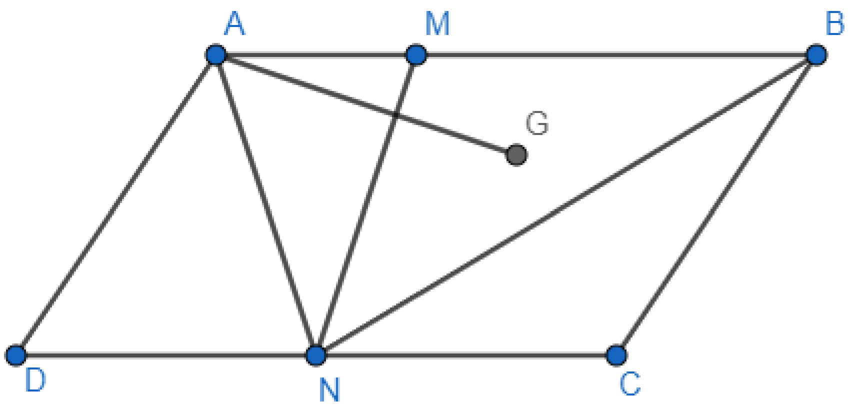
$\quad = (75{,}3)^2 + 20^2 - 2.75{,}3.20.\cos 107° \approx 6950{,}7$

AD = 83,4m

Vậy chiều dài của dây cáp là 83,4m.

**Bài 3.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho AB = 3AM, CD = 2CN và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

**Hướng dẫn giải:**




+ Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Ta lại có: CD = 2CN nên N là trung điểm của CD.

Mà $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ cùng hướng.

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CN}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Suy ra :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

+ Ta có: AB = 3AM $\Rightarrow$ AM = $\frac{1}{3}$AB

Mà $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên:

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Vậy:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Có đường cao AH, G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

**Hướng dẫn giải:**

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta áp dụng quy tắc trọng tâm có:

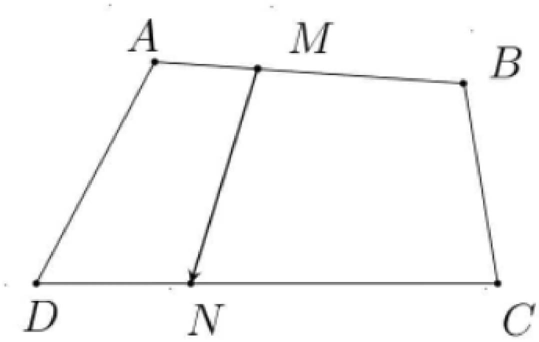
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right| = \left|\vec{0}\right| = 0$

Vậy độ dài vectơ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ là 0.

**Bài 5.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho MB = 2MA và NC = 2ND. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

**Hướng dẫn giải:**




Áp dụng quy tắc cộng vectơ, ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (2)

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 ta có:

$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DN}$ (3)

Cộng hai vế của (2) và (3) ta có:

$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DN}$

$\Leftrightarrow\ 3\overrightarrow{MN} = \left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \left(2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right)$

Vì M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD (M, N lần lượt nằm giữa đoạn thẳng AB và CD).

$\Rightarrow\ \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{CN}$ là hai cặp vectơ ngược hướng.

Mà MB = 2MA và NC = 2ND nên ta có:

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Suy ra:

$3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{MN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (đpcm).

**B.2 Bài tập trắc nghiệm**

**Câu 1.** Cho tam giác ABC, có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C.

A. 3;

B. 6;

C. 7;

D. 9.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: B**

Các vectơ khác vectơ - không, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$. Vậy có 6 vectơ thỏa mãn.

**Câu 2.** Cho hình thoi ABCD cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính độ dài AC.

A. $AC = \sqrt{3}$;

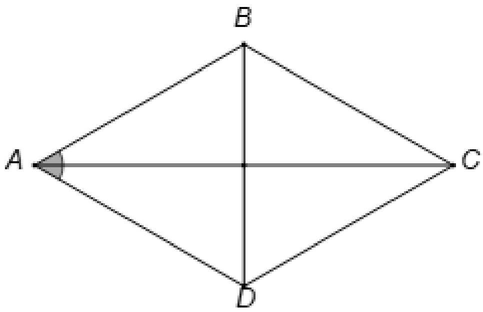
B. $AC = \sqrt{2}$;

C. $AC = 2\sqrt{3}$;

D. AC = 2.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: A**




Do ABCD là hình thoi, có $BAD = 60° \Rightarrow ABC = 120°$.

Theo định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos ABC$

$\Rightarrow AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120° = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$.

**Câu 3.** Cho tứ giác ABCD. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

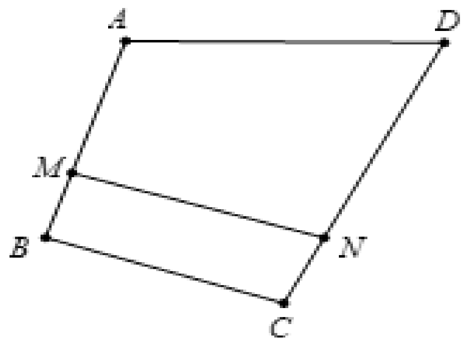
B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$;

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$;

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: C**




Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$

Suy ra $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\right)$

$= \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN}\right).$

Theo bài ra, ta có:

+) $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = 0$.

+) $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DN} = 2(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN} = 0$

Vậy $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

**Câu 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A và có AB = c; AC = b. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2;$

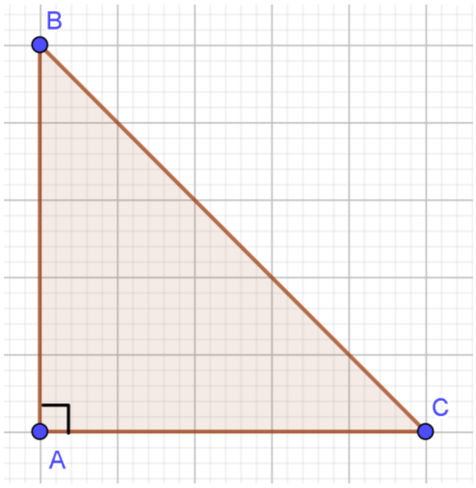
B. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = c^2;$

C. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$;

D. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: B**




Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$

Ta có: cosB = $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Lại có: cosB chính là cos $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.

Do đó,

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = BA.BC.\cos B = c.\sqrt{b^2 + c^2}.\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2.$$

**Câu 5.** Tam giác ABC có $AC = 4$, $BAC = 30°$, $ACB = 75°$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC} = 8$;

B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$;

C. $S_{\Delta ABC} = 4$;

D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: C**

Ta có: $ABC = 180° - \left(BAC + ACB\right) = 75° = ACB$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên AB = AC = 4.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC\sin BAC = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30° = 4$ (đvdt).