

Dấu của tam thức bậc hai chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- **Tam thức bậc hai** đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

- **Dấu của tam thức bậc hai:** Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$ (biệt thức của tam thức bậc hai), ta có:

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi số thực x

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a và bằng 0 khi $x = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$, trong đó x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

- Chú ý: Có thể thay $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$

II. Các công thức.

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

+) Nếu $\Delta < 0$ thì với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

+) Nếu $\Delta = 0$ thì

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

+) Nếu $\Delta > 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \quad (x_1 < x_2)$ thì

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ f(x) > 0 \forall x \in (x_1; x_2) \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ f(x) < 0 \forall x \in (x_1; x_2) \end{cases}$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Xét dấu tam thức bậc hai: $5x^2 - 3x + 1$.

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = 5x^2 - 3x + 1$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (-3)^2 - 4.5.1 = -11 < 0$$

$$\text{Và hệ số } a = 5 > 0 \text{ nên ta có: } f(x) = 5x^2 - 3x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 2: Xét dấu tam thức bậc hai: $x^2 - 4x - 5$.

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-2)^2 - 1.(-5) = 9 > 0$$

Nghiệm của $f(x) = 0$ là:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{9}}{1} = 5, \quad x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{9}}{1} = -1$$

Có hệ số $a = 1 > 0$ nên ta có:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 > 0 \text{ khi } x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 < 0 \text{ khi } x \in (-1; 5).$$

Bài 3: Xét dấu tam thức bậc hai: $x^2 - 2x + 1$.

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 0$$

$$\text{Và hệ số } a = 1 > 0 \text{ nên ta có: Nghiệm } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2.1} = 1$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ khi } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ khi } x = 1$$

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Xét dấu tam thức bậc hai: $-3x^2 + 4x - 6$.

Bài 2: Xét dấu tam thức bậc hai: $-4x^2 + 5x + 8$.