CHUYÊN ĐỀ 3. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG
BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3.

Trang 61

Bài tập 3.21 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Cho conic (S) có tâm sai e = 2, một tiêu điểm F(–2; 5) và đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó là Δ: x + y – 1 = 0. Chứng minh rằng, điểm M(x; y) thuộc đường conic (S) khi và chỉ khi $x^2 + y^2 + 4xy - 8x + 6y - 27 = 0$ (được gọi là phương trình của (S), tuy vậy không phải là phương trình chính tắc). Hỏi (S) là đường gì trong ba đường conic?

Lời giải:

+) M(x; y) thuộc đường conic (S) khi và chỉ khi

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = 2\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = 2\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-5)^2 = 2(x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4) + (y^2-10y+25) = 2(x^2+y^2+1+2xy-2x-2y)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-10y+29 = 2x^2+2y^2+2+4xy-4x-4y$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4xy-8x+6y-27 = 0.$$

+) (S) là hypebol vì có tâm sai lớn hơn 1.

Bài tập 3.22 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình đường conic có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, một tiêu điểm F(–1; 0) và đường chuẩn tương ứng là Δ: x + y + 1 = 0. Cho biết conic đó là đường gì?

Lời giải:

Xét điểm M(x; y) thuộc conic.

M(x; y) thuộc đường conic đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}}{\frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{|x+y+1|}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x+y+1|$$

$$\Leftrightarrow 4\left[(x+1)^2 + y^2\right] = (x+y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[(x^2+2x+1) + y^2\right] = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x - 2y + 3 = 0.$$

Conic này là elip vì có tâm sai lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1.

Bài tập 3.23 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số y = ax^2 + bx + c (a ≠ 0) là một parabol có tiêu điểm là $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ và đường chuẩn là $\Delta: y = -\frac{1+\Delta}{4a}$, trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lời giải:

+) Mỗi điểm M thuộc đồ thị của hàm số y = $ax^2 + bx + c$ đều có toạ độ (x; $ax^2 + bx + c$).

Ta cần chứng minh M cũng thuộc parabol đã cho, tức là $\frac{MF}{d\left(M,\Delta\right)} = 1$ hay MF = d(M, Δ). Thật vậy:

$$MF = d(M, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(ax^2+bx+c-\frac{1-\Delta}{4a}\right)^2} = \left|ax^2+bx+c+\frac{1+\Delta}{4a}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(ax^2+bx+c-\frac{1-\Delta}{4a}\right)^2 = \left(ax^2+bx+c+\frac{1+\Delta}{4a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{4a^2x^2+4abx+4ac-\left(1-\Delta\right)}{4a}\right]^2 = \left[\frac{4a^2x^2+4abx+4ac+\left(1+\Delta\right)}{4a}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{4a^2x^2+4abx+4ac-\left(1-b^2+4ac\right)}{4a}\right]^2 = \left[\frac{4a^2x^2+4abx+4ac+\left(1+b^2-4ac\right)}{4a}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4a^2x^2+4abx+b^2-1}{4a}\right)^2 = \left(\frac{4a^2x^2+4abx+b^2+1}{4a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{\left(2ax+b\right)^2-1}{4a}\right]^2 = \left[\frac{\left(2ax+b\right)^2+1}{4a}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2ax+b\right)^2 + \left[\left(2ax+b\right)^2-1\right]^2 = \left[\left(2ax+b\right)^2+1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2ax+b\right)^2 + \left[\left(2ax+b\right)^4-2\left(2ax+b\right)^2+1\right] = \left(2ax+b\right)^4+2\left(2ax+b\right)^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(2ax+b\right)^4+2\left(2ax+b\right)^2+1 = \left(2ax+b\right)^4+2\left(2ax+b\right)^2+1.$$

Đẳng thức cuối đúng, do đó ta có điều phải chứng minh.

+) Ngược lại, với mỗi điểm M(x; y) thuộc parabol đã cho, ta phải chứng minh M thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Thật vậy:

Vì M(x; y) thuộc parabol đã cho nên $\frac{MF}{d\left(M,\Delta\right)}=1$ hay MF = d(M, Δ)

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{1-\Delta}{4a}\right)^2}=\left|y+\frac{1+\Delta}{4a}\right|$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{1-\Delta}{4a}\right)^2=\left(y+\frac{1+\Delta}{4a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2+\left[\frac{4ay-\left(1-\Delta\right)}{4a}\right]^2=\left[\frac{4ay+\left(1+\Delta\right)}{4a}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2+\left[\frac{4ay-\left(1-b^2+4ac\right)}{4a}\right]^2=\left[\frac{4ay+\left(1+b^2-4ac\right)}{4a}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2+\left[\frac{\left(4ay-4ac+b^2\right)-1}{4a}\right]^2=\left[\frac{\left(4ay-4ac+b^2\right)+1}{4a}\right]^2$$

$$\Rightarrow 4\left(2ax+b\right)^2+\left[\left(4ay-4ac+b^2\right)-1\right]^2=\left[\left(4ay-4ac+b^2\right)+1\right]^2$$

$$\Rightarrow 4\left(2ax+b\right)^2=\left[\left(4ay-4ac+b^2\right)+1\right]^2-\left[\left(4ay-4ac+b^2\right)-1\right]^2$$

$$\Rightarrow 4\left(4a^2x^2+4abx+b^2\right)=4\left(4ay-4ac+b^2\right)$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx=4ay-4ac$$

$$\Rightarrow 4ay=4a^2x^2+4abx+4ac$$

$$\Rightarrow y=ax^2+bx+c.$$

Vậy M(x; y) thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

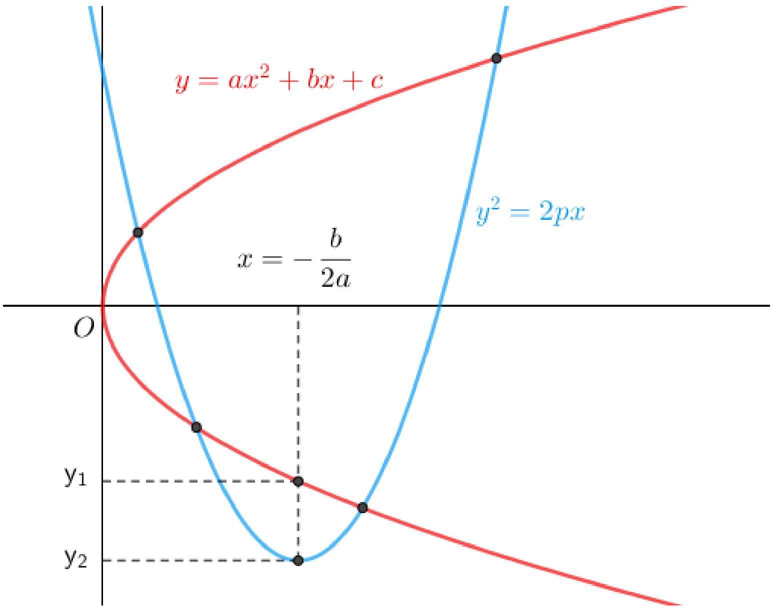
Chứng minh được hoàn tất.

Bài tập 3.24 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Cho hai parabol có phương trình $y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó cùng nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 + \left(\frac{b}{a} - 2p\right)x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} = 0$.

Lời giải:

+) Xét trường hợp a > 0.



Để hai parabol cắt nhau tại 4 điểm phân biệt thì đỉnh của parabol $y = ax^2 + bx + c$ phải nằm ở góc phần tư thứ IV (như hình vẽ).

Khi đó ta suy ra b < 0 và phương trình $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow b^2 - 4ac > 0.$

Xét phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 + \left(\frac{b}{a} - 2p\right)x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} = 0.$

có $\left[\frac{\left(\frac{b}{a}-2p\right)}{2}\right]^2+\left[\frac{\frac{1}{a}}{2}\right]^2-\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}-p\right)^2+\left(\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

$$=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b}{a}.p+p^2+\frac{1}{4a^2}-\frac{c}{a}=\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)-\frac{b}{a}.p+p^2+\frac{1}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\frac{b}{a}.p+p^2+\frac{1}{4a^2}$$

Vì b < 0 và $b^2-4ac>0$ (chứng minh trên) nên $-\frac{b}{a}.p>0$ và $\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$

Do đó $\left[\frac{\left(\frac{b}{a}-2p\right)}{2}\right]^2+\left[\frac{\frac{1}{a}}{2}\right]^2-\frac{c}{a}>0.$

Vậy (C) đúng là phương trình một đường tròn.

+) Trường hợp a < 0: Chứng minh tương tự ta được (C) đúng là phương trình một đưởng tròn.

+) Giờ ta chứng minh bốn giao điểm của hai parabol nằm trên đường tròn này. Thật vậy:

Nếu điểm M(x; y) là giao điểm của hai parabol trên thì ta có:

$y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y^2 - 2px = 0$ và $ax^2 + bx + c - y = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2px = 0$ và $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{y}{a}=0$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{y}{a}\right)+\left(y^2-2px\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\left(\frac{b}{a}x-2px\right)-\frac{y}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\left(\frac{b}{a}-2p\right)x-\frac{1}{a}y+\frac{c}{a}=0.$$

Do đó M thuộc đường tròn (C). Vậy bốn giao điểm của parabol đều nằm trên (C).

Bài tập 3.25 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(2; 1) và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho MA = MB.

Lời giải:

Giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Ta thấy M nằm trong elip, do đó MA = MB khi M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow x_1+x_2=2x_M=2.2=4,\ y_1+y_2=2y_M=2.1=2.$

Vì A, B thuộc elip nên $\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1$ và $\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{16}=1.$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}\right)-\left(\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{16}\right)=1-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{x_1^2-x_2^2}{25}+\frac{y_1^2-y_2^2}{16}=0\Rightarrow\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{25}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{16}=0$$

$$\Rightarrow\frac{4(x_1-x_2)}{25}+\frac{2(y_1-y_2)}{16}=0\Rightarrow\frac{x_1-x_2}{25}+\frac{y_1-y_2}{32}=0\Rightarrow\frac{x_1-x_2}{25}=\frac{y_1-y_2}{-32}.$$

Mà $\overrightarrow{BA}$ có toạ độ là $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ nên (25; –32) là một vectơ chỉ phương của AB

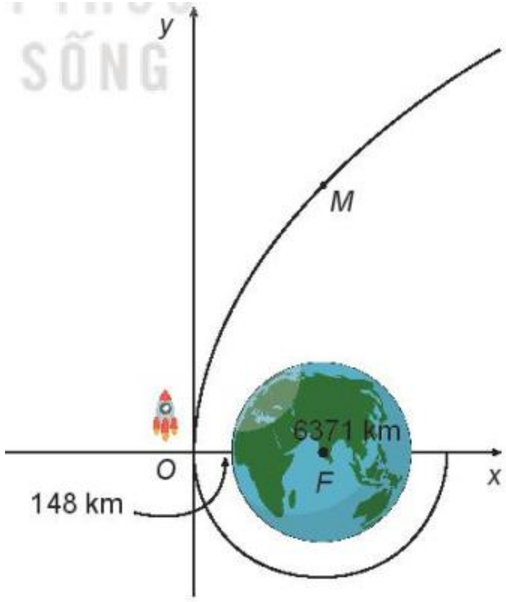
$\Rightarrow$ (32; 25) là một vectơ pháp tuyến của AB

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng AB là: 32(x – 2) + 25(y – 1) = 0 hay 32x + 25y – 89 = 0.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là 32x + 25y – 89 = 0.

Bài tập 3.26 trang 61 Chuyên đề Toán 10:

Một tàu vũ trụ nằm trong một quỹ đạo tròn và ở độ cao 148 km so với bề mặt Trái Đất (H.3.27). Sau khi đạt được vận tốc cần thiết để thoát khỏi lực hấp dẫn của Trái Đất, tàu vũ trụ sẽ đi theo quỹ đạo parabol với tâm Trái Đất là tiêu điểm; điểm khởi đầu của quỹ đạo này là đỉnh parabol quỹ đạo.



Hình 3.27

a) Viết phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo (1 đơn vị đo trên mặt phẳng toạ độ ứng với 1 km trên thực tế, lấy bán kính Trái Đất là 6371 km).

b) Giải thích vì sao, kể từ khi đi vào quỹ đạo parabol, càng ngày, tàu vũ trụ càng cách xa Trái Đất.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo là $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

Nhìn hình vẽ ta thấy: OF = 148 + 6371 = 6519 (km)

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = 6519 \Rightarrow p = 13038$$

$\Rightarrow$ phương trình chính tắc của parabol quỹ đạo là $y^2 = 26076x$.

b) Giả sử tàu vụ trụ có toạ độ M(x; y).

Khi đó, theo công thức bán kính qua tiêu ta có: $MF = x + \frac{p}{2}$.

Đây cũng là khoảng cách từ tàu vũ trụ đến tâm Trái Đất.

Kể từ khi đi vào quỹ đạo parabol, hoành độ x của tàu vũ trụ sẽ ngày càng tăng, do đó tàu ngày càng xa Trái Đất hơn.