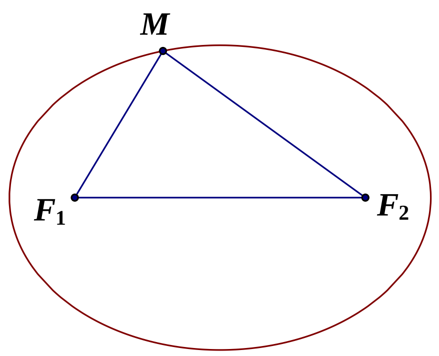
Bài 4. Ba đường conic trong mặt phẳng tọa độ

A. Lý thuyết

1. Elip

1.1. Nhận biết elip

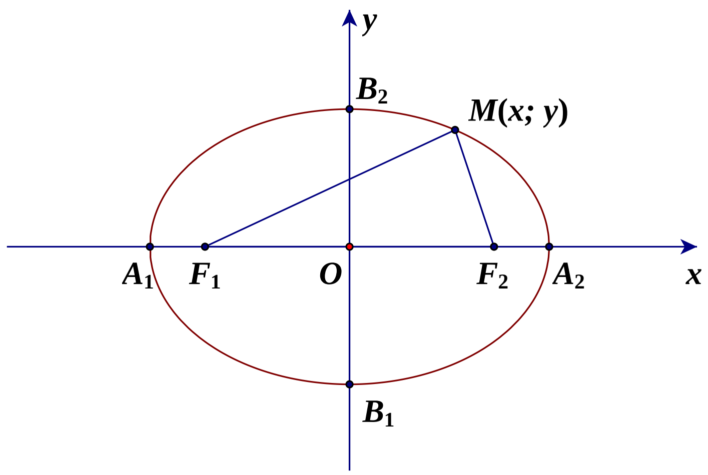


Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi 2a lớn hơn F_1F_2. ***Elip*** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip (a > c).

1.2. Phương trình chính tắc của elip



Cho elip (E) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(–c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

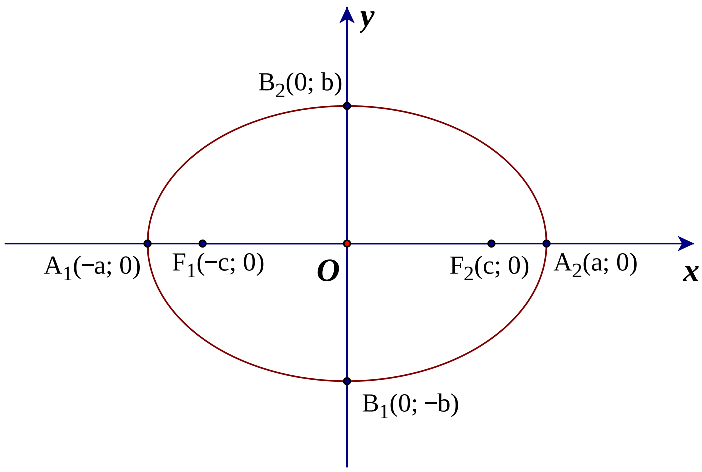
Người ta chứng minh được:

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1),$$

trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc của elip.***

Chú ý:



• (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(–a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0; –b)$, $B_2(0; b)$.

• Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các ***đỉnh*** của elip.

• Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục lớn***, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục nhỏ*** của elip.

• Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

• Nếu $M(x; y) \in (E)$ thì $|x| \le a$, $|y| \ge b$.

Ví dụ: Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\frac{2}{5}$.

a) Tính độ dài trục nhỏ của elip.

b) Viết phương trình chính tắc của elip.

Hướng dẫn giải

a) Ta có độ dài trục lớn bằng 10. Ta suy ra 2a = 10.

Suy ra a = 5.

Theo đề, ta có tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\frac{2}{5}$.

Suy ra $\frac{2c}{2a}=\frac{2}{5}$.

$\Leftrightarrow c=\frac{2}{5}.a=\frac{2}{5}.10=4$.

Ta có $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Suy ra 2b = 2.3 = 6.

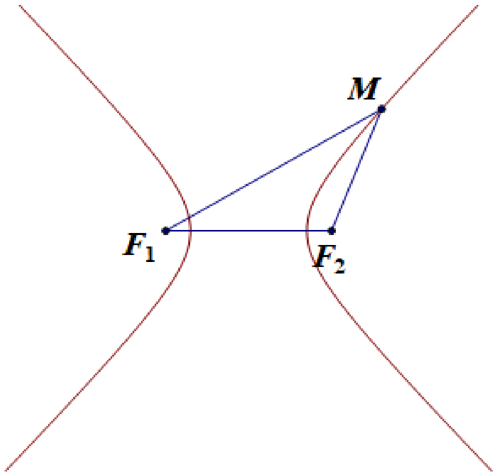
Vậy độ dài trục nhỏ của elip (E) bằng 6.

b) Ta có a = 5 và b = 3.

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. Hypebol

2.1. Nhận biết hypebol

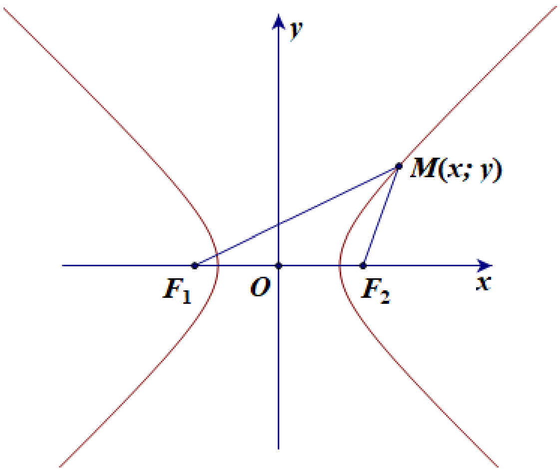


Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi 2a nhỏ hơn F_1F_2. ***Hypebol*** (H) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol (c > a).

2.2. Phương trình chính tắc của hypebol



Cho hypebol (H) có các tiêu điểm F_1 và F_2 và đặt $F_1F_2 = 2c$. Điểm M thuộc hypebol (H) khi và chỉ khi $|F_1M - F_2M| = 2a$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

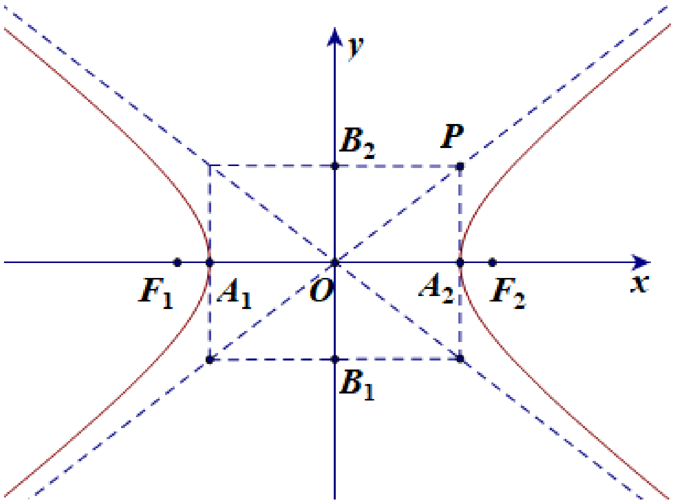
Người ta chứng minh được:

$$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2),$$

trong đó $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Phương trình (2) gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol.***

Chú ý:



• (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$. Nếu ta vẽ hai điểm $B_1(0; -b)$ và $B_2(0; b)$ vào hình chữ nhật OA_2PB_2 thì $OP=\sqrt{a^2+b^2}=c$.

• Các điểm A_1, A_2 gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.

• Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục thực***, đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục ảo*** của hypebol.

• Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của hypebol.

• Nếu $M(x; y) \in (H)$ thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.

Ví dụ: Cho hypebol (H) có một tiêu điểm $F_2(8; 0)$ và (H) đi qua điểm A(5; 0). Viết phương trình chính tắc của hypebol (H).

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó a, b > 0.

Vì A(5; 0) ∈ (H) nên ta có $\frac{5^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$. Suy ra a = 5.

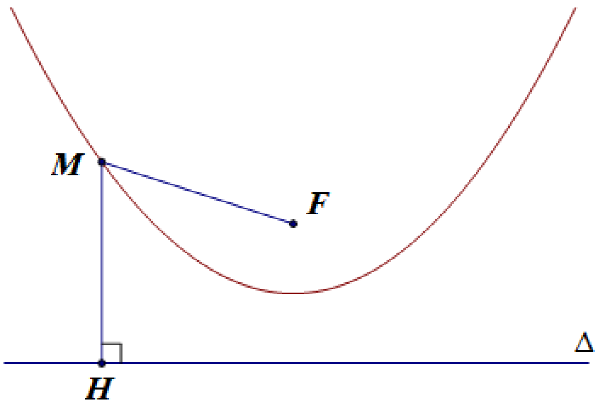
Do (H) có một tiêu điểm $F_2(8; 0)$ nên ta có c = 8.

Suy ra $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{64-25}=\sqrt{39}$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$.

3. Parabol

3.1. Nhận biết parabol



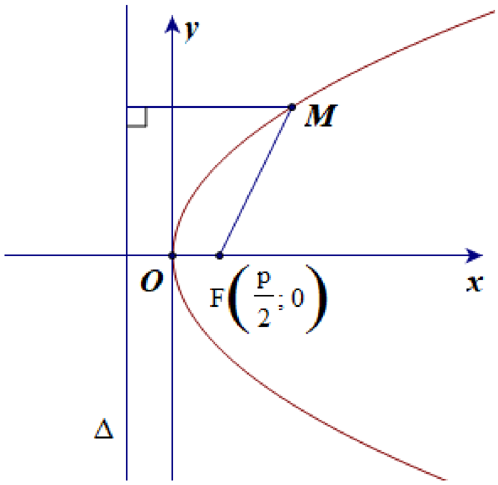
Cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và Δ.

F gọi là ***tiêu điểm*** và Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P).

3.2. Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là p, hiển nhiên p > 0.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và Δ: $x+\frac{p}{2}=0$.



Người ta chứng minh được:

M(x; y) ∈ (P) ⇔ $y^2 = 2px$ (3).

Phương trình (3) gọi là ***phương trình chính tắc của parabol.***

Chú ý:

• O gọi là ***đỉnh*** của parabol (P).

• Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).

• p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).

• Nếu M(x; y) ∈ (P) thì x ≥ 0 và M'(x; –y) ∈ (P).

Ví dụ: Viết phương trình chính tắc của parabol (P), biết (P) có đường chuẩn Δ: x + 4 = 0.

Hướng dẫn giải

(P) có đường chuẩn Δ: x + 4 = 0.

Ta suy ra $\frac{p}{2} = 4$.

Khi đó p = 2.4 = 8.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 16x$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm tiêu điểm của các đường conic sau:

a) Elip (E): $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

b) Hypebol (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

c) Parabol (P): $y^2 = 2x$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a = 10, b = 8.

Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6$.

Vậy elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-6; 0)$ và $F_2(6; 0)$.

b) Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với a = 2, b = 3.

Suy ra $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Vậy hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$.

c) Phương trình parabol (P) có dạng: $y^2 = 2px$, với p = 1.

Ta suy ra $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$.

Vậy parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của các đường conic trong các trường hợp sau:

a) Elip (E) đi qua điểm B(0; 3) và có tiêu cự bằng 6.

b) Hypebol (H) đi qua điểm M(2; 4) và có độ dài trục ảo bằng 8.

c) Parabol (P) có tiêu điểm F(10; 0).

Hướng dẫn giải

a) Phương trình elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a, b > 0.

Vì B(0; 3) ∈ (E) nên ta có $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$.

Suy ra b = 3.

Theo đề, ta có tiêu cự bằng 6. Suy ra 2c = 6. Nghĩa là c = 3.

Ta có $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình elip (E) là: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

b) Phương trình hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với a, b > 0.

Vì (H) có độ dài trục ảo bằng 8 nên ta có 2b = 8. Suy ra b = 4.

Khi đó $b^2 = 16$.

Vì M(2; 4) ∈ (H) nên ta có $\frac{4}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$.

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}-\frac{16}{16}=1$.

$\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}=2$

$\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{2}=2$.

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{16}=1$.

c) Parabol (P) có tiêu điểm F(10; 0) nên ta có $\frac{p}{2}=10$.

Suy ra p = 2.10 = 20.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 40x$.

Bài 3. Cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và C(2; 0). Tìm A, B thuộc (E), biết A có tung độ dương, A và B đối xứng nhau qua trục hoành và ΔABC cân tại A.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x_0; y_0)$ với $y_0 > 0$.

Vì A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có tọa độ $B(x_0; -y_0)$.

Vì A ∈ (E) nên ta có $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1$.

$\Leftrightarrow y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$ (1).

Với $A(x_0; y_0)$, $B(x_0; -y_0)$ và C(2; 0) ta có:

$\overrightarrow{AB}=\left(0;-2y_0\right)$ và $\overrightarrow{AC}=\left(2-x_0;-y_0\right)$

Vì ΔABC cân tại A nên ta có $AB^2 = AC^2$.

$\Leftrightarrow (-2y_0)^2 = (2 - x_0)^2 + (-y_0)^2$

$\Leftrightarrow 4y_0^2=4-4x_0+x_0^2+y_0^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2=4-4x_0+x_0^2$ (2).

Thế (1) vào (2), ta được: $3\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)=4-4x_0+x_0^2$.

$\Leftrightarrow 3-3.\frac{x_0^2}{4}=4-4x_0+x_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x_0^2-4x_0+1=0$.

$\Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0=\frac{2}{7}$.

• Với $x_0 = 2$, ta có $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} = 1 - \frac{4}{4} = 0$. Suy ra $y_0 = 0$.

Khi A(2; 0).

Lúc này A ≡ C (mâu thuẫn vì ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác).

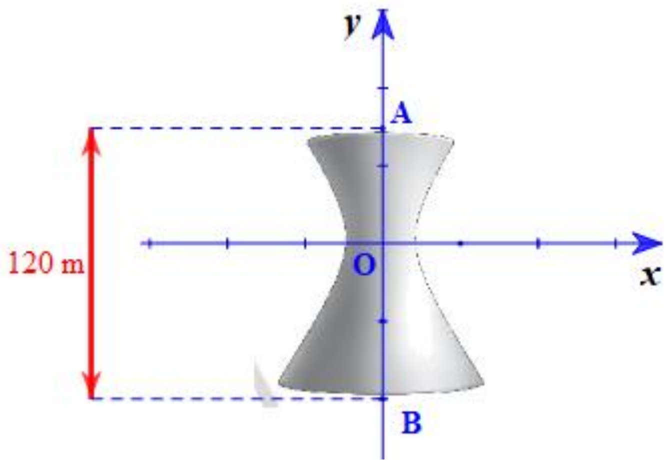
Vậy ta loại trường hợp $x_0 = 2$.

• Với $x_0 = \frac{2}{7}$, ta có $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4} = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$. Suy ra $y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vì $y_0 > 0$ nên ta nhận $y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Một tháp triển lãm có mặt cắt là một hypebol có phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 120 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ dưới đây, tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải

Theo bài ra, khoảng cách từ nóc tháp đến tâm O bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm O đến đáy nên ta có: OA = $\frac{2}{3}$OB và OA + OB = 120 m.

Suy ra: OA = 48 m, OB = 72 m.

$\Rightarrow$ A (0; 48), B(0 ; –72).

Thay y = 48 vào phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$, ta được:

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{48^2}{40^2} = 1$$

$\Rightarrow x^2 = 1\,525 \Rightarrow x \approx 39,1$ hoặc $x \approx -39,1$.

Suy ra bán kính nóc khoảng 39,1 (m).

Thay y = –72 vào phương trình $\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$ ta được:

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{(-72)^2}{40^2} = 1$$

$\Rightarrow x^2 = 2\,650 \Rightarrow x \approx 51,5$ hoặc $x \approx -51,5$.

Suy ra bán kính đáy khoảng 51,5 (m).

Vậy bán kính nóc và bán kính đáy của tháp triển lãm lần lượt là 39,1 (m) và 51,5 (m).