

Bài tập Giới hạn của dãy số - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1:

$\lim \frac{n+\sin 2n}{n+5}$ bằng:

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. 0

D. 1

Lời giải:

Chia cả tử thức mẫu thức cho n , ta có:

$$\lim \frac{n + \sin 2n}{n + 5} = \lim \frac{1 + \frac{\sin 2n}{n}}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

Chọn đáp án D

Bài 2: $\lim(-3n^3+2n^2-5)$ bằng:

A. -3

B. 0

C. $-\infty$

D. $+\infty$

Lời giải:

Ta có:

$$-3n^3 + 2n^2 - 5 = n^3\left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^3}\right)$$

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^3}\right) = -3 < 0$ nên $\lim(-3n^3 + 2n^2 - 5) = -\infty$

Chọn đáp án C

Bài 3: $\lim(2n^4 + 5n^2 - 7n)$ bằng

A. $-\infty$

B. 0

C. 2

D. $+\infty$

Lời giải:

Ta có:

$$2n^4 + 5n^2 - 7n = n^4\left(2 + \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^3}\right)$$

Vì $\lim n^4 = +\infty$ và $\lim\left(2 + \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^3}\right) = 2$
 nên $\lim(2n^4 + 5n^2 - 7n) = +\infty$

Chọn đáp án D

Bài 4: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = 9n^2 - 2n^5$

B. $u_n = n^4 - 4n^5$

C. $u_n = 4n^2 - 3n$

D. $u_n = n^3 - 5n^4$

Lời giải:

Chỉ có dãy $u_n = 4n^2 - 3n$ có giới hạn là $+\infty$, các dãy còn lại đều có giới hạn là $-\infty$. Đáp án C

Thật vậy, ta có:

$$\lim (4n^2 - 3n) = \lim n^2 \left(4 - \frac{3}{n} \right) = +\infty$$

$$\text{Vì } \lim n^2 = +\infty; \lim \left(4 - \frac{3}{n} \right) = 4 > 0$$

Chọn đáp án C

Bài 5: Nếu $\lim u_n = L, u_n + 9 > 0 \forall n$ thì $\lim \sqrt{(u_n + 9)}$ bằng số nào sau đây?

A. $L+9$

B. $L+3$

C. $\sqrt{L+9}$

D. $\sqrt{L+3}$

Lời giải:

Vì $\lim u_n = L$ nên $\lim(u_n + 9) = L + 9$ do đó $\lim \sqrt{(u_n + 9)} = \sqrt{L + 9}$

Chọn đáp án C

Bài 6:

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2+5}-\sqrt{n+4}}{2n-1} \text{ bằng:}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. $+\infty$

Lời giải:

- Cách 1: Chia tử thức và mẫu thức cho n:

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 5} - \sqrt{n + 4}}{2n - 1} = \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Đáp án là B

- Cách 2: Thực chất có thể coi bậc cao nhất của tử thức và mẫu thức là 1, do đó chỉ cần để ý hệ số bậc 1 của tử thức là $\sqrt{4}$, của mẫu thức là 2, từ đó tính được kết quả bằng 1.

Chọn đáp án B

Bài 7: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3})$ bằng:

A. $+\infty$

B. 4

C. 2

D. -1

Lời giải:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2 + 3)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} = \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 8:

$\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}$ bằng

A. $\frac{5}{7}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 1

D. $+\infty$

Lời giải:

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho \sqrt{n} , ta được:

$$\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{2+\frac{5}{\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Chọn đáp án C

Bài 9: Tổng của cấp số nhân vô hạn :

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \dots$ là:

A. 1

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{-2}{3}$

Lời giải:

Đây là tổng của cấp số nhân vô hạn

$$\text{Có } u_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{-1}{2}$$

Tổng của chúng là:

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Chọn đáp án B

Bài 10: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515\ldots$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m, n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m + n$.

A. 104

B. 312

C. 38

D. 114

Lời giải:

Ta có:

$$a = 2,151515... = 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$$

Vì $\frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$ là tổng của cấp số nhân,

lũy vô hạn với số hạng đầu

$$u_1 = \frac{15}{100}, \text{ công bội } q = \frac{1}{100}$$

$$\text{nên } a = 2 + \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{71}{33}.$$

Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m + n = 104$.

Chọn đáp án A

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Tính $\lim(n^3 - 2n + 1)$?

Lời giải:

$$\text{Ta có: } n^3 - 2n + 1 = n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right).$$

$$\text{Vì } \lim n^3 = +\infty \text{ và } \lim \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 1 > 0$$

$$\text{Nên theo quy tắc 2, } \lim (n^3 - 2n + 1) = +\infty$$

Bài 2: Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

Lời giải:

- Cách 1:

$$\lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

- Cách 2 (phương pháp loại trừ): Từ các định lí ta thấy:

Các dãy ở phương án A,B đều bằng 0, do đó loại phương án A,B

$$\forall \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$$

Bài 3: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

Lời giải:

- Cách 1: Dãy $\left(\frac{1}{3}\right)_n$ có giới hạn 0 vì $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$. Đáp án là D

- Cách 2: Các dãy ở các phương án A,B,C đều có dạng $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ nhưng $|q| > 1$ nên không có giới hạn 0, do đó loại phương án A,B,C. Chọn đáp án D

Bài 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n}{5n}\right)$ có giá trị bằng:

Lời giải:

- Cách 1: Chia tử và mẫu của phân tử cho n (n là lũy thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n}{5n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5n} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

- Cách 2: Sử dụng nhận xét:

$$\text{Cho } u_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

khi tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ta thường chia tử và mẫu của phân thức cho n^k (n^k là lũy thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), từ đó được kết quả:

$$u_n = \frac{am}{bp}$$

Nếu $m < p$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Nếu $m = p$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{am}{bp}$

Nếu $m > p$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ nếu $am \cdot bp > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ nếu $am \cdot bp < 0$

Vì tử và mẫu của phân thức đã cho đều có bậc 1 nên kết quả

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n}{5n}\right) = -\frac{4}{5},$$

Bài 5:

$$\lim \frac{3n^2-2n+1}{4n^4+2n+1} \text{ bằng}$$

Lời giải:

- Cách 1: Sử dụng nhận xét trên, vì bậc của tử thức nhỏ hơn bậc của mẫu thức nên kết quả :

$$\lim \frac{3n^2-2n+1}{4n^4+2n+1} = 0$$

Bài 6:

$$\lim \frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3} \text{ bằng:}$$

Lời giải:

- Cách 1: Sử dụng nhận xét trên, vì bậc của tử thức lớn hơn bậc của mẫu thức, hệ số lũy thừa bậc cao nhất của n cả tử và mẫu là số dương nên kết quả :

$$\lim \frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3} = +\infty$$

Bài 7: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

Lời giải:

Ta có:

$$\lim \frac{n^2-2n}{5n+5n^2} = \lim \frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+5} = \frac{1-0}{0+5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vì } \lim \frac{2}{n} = 0; \lim \frac{5}{n} = 0$$

Bài 8:

$\lim \frac{2^n + 3^n}{3^n}$ có giá trị bằng:

Lời giải:

$$\lim \frac{2^n + 3^n}{3^n} = \lim \left(\frac{2^n}{3^n} + 1 \right)$$

$$= \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Vì } \lim \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

Bài 9:

$\lim \frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}+1}$ có giá trị bằng:

Lời giải:

Chia cả tử thức và mẫu thức cho \sqrt{n}

$$\lim \frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}+1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$$

Bài 10:

$\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$ bằng:

Lời giải:

Trước hết tính :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{4}$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 $\lim (5^n - 2^n)$ bằng ?

Bài 2 $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ bằng ?

Bài 3 Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,32111... được biểu diễn dưới dạng phân số tối

giản $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính a - b

Bài 4 $\lim \frac{3+3^2+3^3+\dots+3^n}{1+2+2^2+\dots+2^n}$ bằng?

Bài 5 Giá trị của $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2 + 1}$ bằng?

Bài 6 Kết quả đúng của $\lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right)$ là?

Bài 7 Giá trị của $C = \lim \frac{(2n^2 + 1)^4 (n + 2)^9}{n^{17} + 1}$ bằng?

Bài 8 Cho dãy số u_n với $u_n = (n-1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4 + n^2 - 1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim u_n$ là?

Bài 9 Tính giới hạn: $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2 + 4}$

Bài 10 Giá trị của $H = \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$ bằng?