

CHUYÊN ĐỀ 3. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 2. HYPEBOL

Trang 50, 51

Khám phá 1 trang 50 Chuyên đề Toán 10:

Cho hypebol (H) với phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (H). Các điểm $M_1(-x_0; y_0)$, $M_2(x_0; -y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$ có thuộc (H) không?

Lời giải:

Nếu điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) thì ta có: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{(-y_0)^2}{b^2} = \frac{(-x_0)^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{(-x_0)^2}{a^2} - \frac{(-y_0)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ nên các điểm có toạ độ $M_1(-x_0; y_0)$, $M_2(x_0; -y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$ cũng thuộc (H).

Thực hành 1 trang 51 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của hypebol có kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6. Xác định đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục của hypebol này.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Hypebol kích thước của hình chữ nhật cơ sở là 8 và 6, suy ra $2a = 8$, $2b = 6$, suy ra $a = 4$ và $b = 3$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Có $c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, suy ra $c = 5$.

Toạ độ các đỉnh của hypebol là $A_1(-4; 0)$ và $A_2(4; 0)$.

Toạ độ các tiêu điểm của hypebol là $F_1(-5; 0)$ và $F_2(5; 0)$.

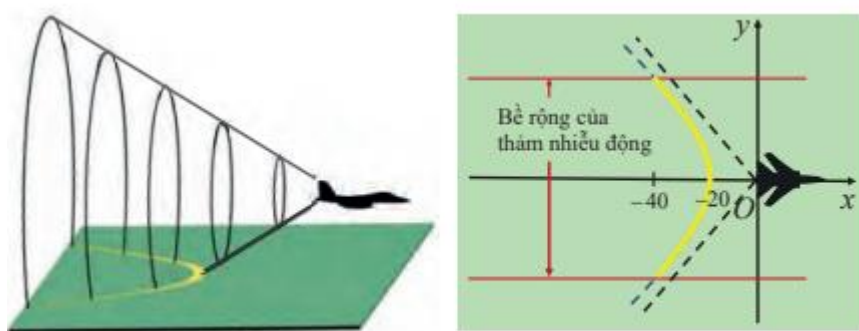
Tiêu cự của hypebol là $2c = 10$.

Độ dài trục thực là $2a = 8$, độ dài trục ảo là $2b = 6$.

Vận dụng 1 trang 51 Chuyên đề Toán 10:

Khi bay với vận tốc siêu thanh (tốc độ chuyển động lớn hơn tốc độ âm thanh trong cùng môi trường), một máy bay tạo ra một vùng nhiễu động trên mặt đất dọc theo một nhánh của hypebol (H) (Hình 4). Phần nghe rõ nhất tiếng ồn của vùng nói trên được gọi là thảm nhiễu động. Bề rộng của thảm này gấp khoảng 5 lần cao độ của máy bay. Tính cao độ của máy bay, biết bề rộng của thảm nhiễu động được đo cách phía sau máy bay một khoảng là 40 mile (mile (dặm) là đơn vị đo khoảng cách, $1 \text{ mile} \approx 1,6 \text{ km}$) và

(H) có phương trình: $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1$.



Hình 4

Lời giải:

$$\text{Khi } x = 40 \text{ thì } \frac{40^2}{400} - \frac{y^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} = 3 \Rightarrow y^2 = 300 \Rightarrow \begin{cases} y = 10\sqrt{3} \\ y = -10\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Bề rộng của thảm nhiễu là } 20\sqrt{3} \text{ (mile)}$$

$$\Rightarrow \text{Cao độ của máy bay là } \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ (mlie)}$$

Vậy cao độ của máy bay là khoảng 6,93 dặm.

Trang 52, 53

Khám phá 2 trang 52 Chuyên đề Toán 10:

Cho điểm $M(x; y)$ nằm trên hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

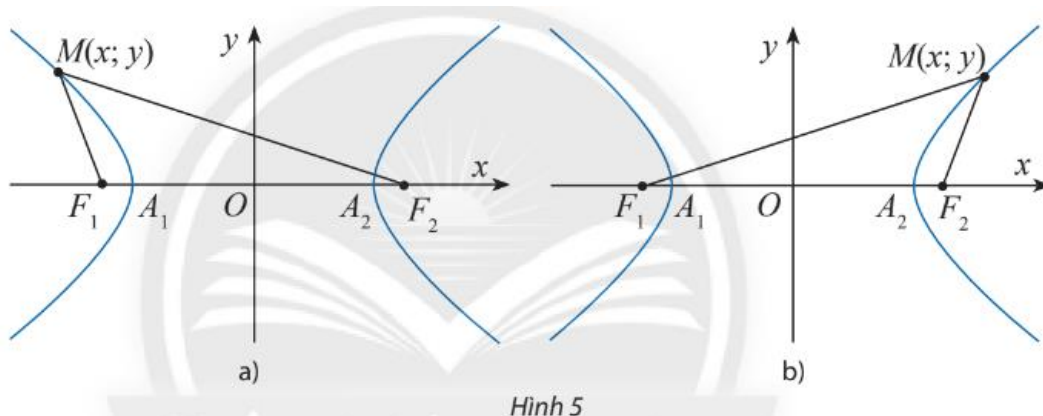
a) Chứng minh rằng $F_1M^2 - F_2M^2 = 4cx$.

b) Giả sử điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh đi qua $A_1(-a; 0)$ (Hình 5a). Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_2 - MF_1 = 2a$ đã biết để chứng minh

$$MF_2 + MF_1 = -2\frac{cx}{a}. \text{ Từ đó, chứng minh các công thức: } MF_1 = -a - \frac{c}{a}x; \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

b) Giả sử điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh đi qua $A_2(a; 0)$ (Hình 5 b). Sử dụng kết quả đã chứng minh được ở câu a) kết hợp với tính chất $MF_1 - MF_2 = 2a$ đã biết để chứng minh

$$MF_2 + MF_1 = 2\frac{cx}{a}. \text{ Từ đó, chứng minh các công thức: } MF_1 = a + \frac{c}{a}x; \quad MF_2 = -a + \frac{c}{a}x.$$



Lời giải:

$$a) F_1M^2 = [x - (-c)]^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2;$$

$$F_2M^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

$$F_1M^2 - F_2M^2 = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = 4cx.$$

$$b) \text{ Ta có: } MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(-2a) = 4cx$$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{-2a} = -\frac{2c}{a}x. \text{ Khi đó:}$$

$$(MF_1 + MF_2) + (MF_1 - MF_2) = -\frac{2c}{a}x + (-2a) \Rightarrow 2MF_1 = -\frac{2c}{a}x - 2a$$

$$\Rightarrow MF_1 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right) = -a - \frac{c}{a}x.$$

$$(MF_1 + MF_2) - (MF_1 - MF_2) = -\frac{2c}{a}x - (-2a) \Rightarrow 2MF_2 = -\frac{2c}{a}x + 2a$$

$$\Rightarrow MF_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

c) Ta có: $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)2a = 4cx$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2c}{a}x. \text{ Khi đó:}$$

$$(MF_1 + MF_2) + (MF_1 - MF_2) = \frac{2c}{a}x + 2a \Rightarrow 2MF_1 = \frac{2c}{a}x + 2a$$

$$\Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x.$$

$$(MF_1 + MF_2) - (MF_1 - MF_2) = \frac{2c}{a}x - 2a \Rightarrow 2MF_2 = \frac{2c}{a}x - 2a$$

$$\Rightarrow MF_2 = -a + \frac{c}{a}x.$$

Thực hành 2 trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Lời giải:

Có $a^2 = 64$, $b^2 = 36$, suy ra $a = 8$, $b = 6$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y)$ là:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \left|8 + \frac{10}{8}x\right| = \left|8 + \frac{5}{4}x\right|; MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \left|8 - \frac{10}{8}x\right| = \left|8 - \frac{5}{4}x\right|.$$

Vận dụng 2 trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Tính độ dài hai bán kính qua tiêu của đỉnh $A_2(a; 0)$ trên hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Lời giải:

Độ dài hai bán kính qua tiêu của đỉnh $A_2(a; 0)$ là:

$$A_2F_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| a + \frac{c}{a}a \right| = |a + c| = a + c \quad (\text{vì } a + c > 0);$$

$$A_2F_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| a - \frac{c}{a}a \right| = |a - c| = c - a \quad (\text{vì } a - c < 0).$$

Khám phá trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng tỏ rằng $\frac{c}{a} > 1$.

Lời giải:

$$\text{Có } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > \sqrt{1} = 1.$$

Thực hành 3 trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Tìm tâm sai của các hypebol sau:

$$\text{a) } (H_1): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1;$$

$$\text{b) } (H_2): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1;$$

$$\text{c) } (H_3): \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Lời giải:

$$\text{a) Có } a^2 = 4, b^2 = 1, \text{ suy ra } a = 2, b = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{tâm sai của hypebol là } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{b) Có } a^2 = 9, b^2 = 25, \text{ suy ra } a = 3, b = 5, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \text{tâm sai của hypebol là } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

c) Có $a^2 = 3$, $b^2 = 3$, suy ra $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$

\Rightarrow tâm sai của hypebol là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Vận dụng 3 trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Cho hypebol (H) có tâm sai bằng $\sqrt{2}$. Chứng minh trục thực và trục ảo của (H) có độ dài bằng nhau.

Lời giải:

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$).

Hypebol (H) có tâm sai bằng $\sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow 2a = 2b.$$

Vậy trục thực và trục ảo của (H) có độ dài bằng nhau.

Vận dụng 4 trang 53 Chuyên đề Toán 10:

Một vật thể có quỹ đạo là một nhánh của hypebol (H), nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm (Hình 6). Cho biết tâm sai của (H) bằng 1,2 và khoảng cách gần nhất giữa vật thể và tâm Mặt Trời là $2 \cdot 10^8$ km.

a) Lập phương trình chính tắc của (H).

b) Lập công thức tính bán kính qua tiêu của vị trí $M(x; y)$ của vật thể trong mặt phẳng toạ độ.



Hình 6

Lời giải:

a) Chọn hệ trục tọa độ sao cho tiêu điểm F_2 của (H) trùng với tâm Mặt Trời, trục Ox đi qua đỉnh và tiêu điểm này của (H), đơn vị trên các trục là km.

Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Gọi tọa độ của vật thể là $M(x; y)$.

Áp dụng công thức bán kính qua tiêu, ta có: khoảng cách giữa vật thể và tâm Mặt Trời

là $MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex| = ex - a \geq ea - a$ (vì vật thể nằm ở nhánh bên phải trục Ox nên $x \geq a$).

Như vậy khoảng cách gần nhất giữa vật thể và tâm Mặt Trời là $ea - a$

$$\Rightarrow ea - a = 2 \cdot 10^8 \Rightarrow 1,2a - a = 2 \cdot 10^8 \Rightarrow a = 10^9 \Rightarrow c = ea = 1,2 \cdot 10^9$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (1,2 \cdot 10^9)^2 - (10^9)^2 = 0,44 \cdot 10^{18}.$$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{10^{18}} - \frac{y^2}{0,44 \cdot 10^{18}} = 1$.

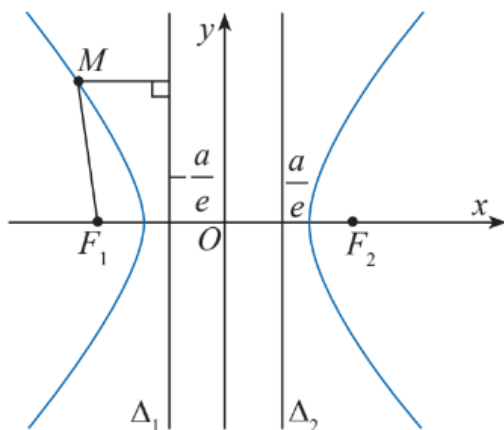
b) Bán kính qua tiêu của vị trí $M(x; y)$ của vật thể trong mặt phẳng tọa độ là:

$$MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex| = |10^9 - 1,2x| \text{ (km)}.$$

Khám phá 4 trang 54 Chuyên đề Toán 10:

Cho điểm $M(x; y)$ trên hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$;

$\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ (Hình 7).



Hình 7

Gọi $d(M; \Delta_1)$, $d(M; \Delta_2)$ lần lượt là khoảng cách từ M đến các đường thẳng Δ_1 , Δ_2 .

Ta có:
$$\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{|a + ex|}{\left|x + \frac{a}{e}\right|} = \frac{|a + ex|}{\frac{|a + ex|}{e}} = e.$$

Dựa theo cách tính trên, tính $\frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)}$.

Lời giải:

Ta viết lại phương trình đường thẳng Δ_2 ở dạng: $x + 0y - \frac{a}{e} = 0$. Với mỗi điểm $M(x; y)$

thuộc hypebol, ta có:
$$d(M, \Delta_2) = \frac{\left|x + 0y - \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

suy ra
$$\frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = \frac{|a - ex|}{\left|x - \frac{a}{e}\right|} = \frac{|a - ex|}{\frac{|xe - a|}{e}} = e.$$

Thực hành 4 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Tìm tọa độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng của các hypebol sau:

a) $(H_1): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

b) $(H_2): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

c) $(H_3): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Lời giải:

a) Có $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

\Rightarrow Hai tiêu điểm của hypebol là $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ và $F_2(\sqrt{5}; 0)$.

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 là

$$\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{4}{\sqrt{5}} = 0.$$

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là

$$\Delta_1: x - \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0.$$

b) Có $a^2 = 36$, $b^2 = 64$, suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

\Rightarrow Hai tiêu điểm của hypebol là $F_1(-10; 0)$ và $F_2(10; 0)$.

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 là

$$\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{36}{10} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{18}{5} = 0.$$

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là

$$\Delta_1: x - \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{36}{10} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{18}{5} = 0.$$

c) Có $a^2 = 9$, $b^2 = 9$, suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

\Rightarrow Hai tiêu điểm của hypebol là $F_1(-3\sqrt{2};0)$ và $F_2(3\sqrt{2};0)$.

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 là

$$\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{9}{3\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{\sqrt{2}} = 0.$$

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là

$$\Delta_1: x - \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{9}{3\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0.$$

Vận dụng 5 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 26 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{288}{13}$.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

+) Hypebol có tiêu cự bằng 26, suy ra $2c = 26$, suy ra $c = 13$.

+) Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{288}{13}$, suy ra $2\frac{a}{e} = \frac{288}{13}$

$$\Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{144}{13} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{144}{13} \Rightarrow \frac{a^2}{13} = \frac{144}{13} \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 144 = 25.$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Bài 1 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

a) Tìm tâm sai và độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M\left(13; \frac{25}{12}\right)$ trên (H).

b) Tìm tọa độ hai tiêu điểm và viết phương trình hai đường chuẩn tương ứng.

c) Tìm điểm $N(x; y) \in (H)$ sao cho $NF_1 = 2NF_2$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) .

Lời giải:

a) Có $a^2 = 144, b^2 = 25 \Rightarrow a = 12, b = 5, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$.

Tâm sau của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$.

Độ dài hai bán kính qua tiêu của điểm $M\left(13; \frac{25}{12}\right)$ là:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \left|12 + \frac{13}{12} \cdot 13\right| = \frac{313}{12}; MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \left|12 - \frac{13}{12} \cdot 13\right| = \frac{25}{12}.$$

b) Hai tiêu điểm của hypebol là $F_1(-13; 0)$ và $F_2(13; 0)$.

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 là

$$\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{144}{13} = 0.$$

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là

$$\Delta_1 : x - \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{144}{13} = 0.$$

$$c) NF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|; NF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

$$NF_1 = 2NF_2 \Leftrightarrow \left|a + \frac{c}{a}x\right| = 2\left|a - \frac{c}{a}x\right| \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{c}{a}x = 2\left(a - \frac{c}{a}x\right) \\ a + \frac{c}{a}x = 2\left(\frac{c}{a}x - a\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\frac{c}{a}x \\ 3a = \frac{c}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2}{3c} = \frac{144}{3 \cdot 13} = \frac{48}{13} \\ x = \frac{3a^2}{c} = \frac{3 \cdot 144}{13} = \frac{432}{13} \end{cases}.$$

+) $x = \frac{48}{13}$ loại vì $0 < x < a$.

$$+) x = \frac{432}{13} \text{ thì } \frac{\left(\frac{432}{13}\right)^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{32400}{169} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{180}{13} \\ y = -\frac{180}{13} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm N thỏa mãn đề bài là $N_1\left(\frac{432}{13}; \frac{180}{13}\right)$ và $N_2\left(\frac{432}{13}; -\frac{180}{13}\right)$.

Bài 2 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Lập phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 20 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{36}{5}$.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

+) Hypebol có tiêu cự bằng 20, suy ra $2c = 20$, suy ra $c = 10$.

+) Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{36}{5}$, suy ra $2\frac{a}{e} = \frac{36}{5}$

$$\Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{10} = \frac{18}{5} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 36 = 64.$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Bài 3 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Cho đường tròn (C) tâm F_1 , bán kính r và một điểm F_2 thỏa mãn $F_1F_2 = 4r$.

a) Chứng tỏ rằng tâm của các đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) nằm trên một đường hypebol (H).

b) Viết phương trình chính tắc và tìm tâm sai của (H).

Lời giải:

a) Gọi $(C'; r')$ là đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C);

$I(x; y)$ là tâm của đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C).

Vì F_2 nằm ngoài (C) nên (C') tiếp xúc ngoài với (C) hoặc (C') tiếp xúc trong với (C) và (C) nằm trong (C').

+) Nếu (C') tiếp xúc ngoài với (C) thì $r' + r = IF_1 \Rightarrow IF_2 + r = IF_1 \Rightarrow IF_1 - IF_2 = r$

+) Nếu (C') tiếp xúc trong với (C) và (C) nằm trong (C') thì $r' - r = IF_1 \Rightarrow IF_2 - r = IF_1 \Rightarrow IF_2 - IF_1 = r$.

Vậy ta luôn có $|IF_2 - IF_1| = r$ trong cả hai trường hợp

$\Rightarrow I$ nằm trên hypebol có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và độ dài trục thực là r .

b) Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm của F_1F_2 và F_1, F_2 đều nằm trên trục Ox .

Giả sử phương trình chính tắc của hypebol này là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Khi đó ta có $2a = r$, suy ra $a = \frac{r}{2}$.

$F_1F_2 = 4r$, suy ra $c = 2r$, suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = (2r)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{15r^2}{4}$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol này là $\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{15r^2}{4}} = 1$.

Bài 4 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Trong hoạt động mở đầu bài học, cho biết khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là 600 km, vận tốc sóng vô tuyến là 300000 km/s và thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ hai trạm trên bờ biển luôn cách nhau 0,0012 s (hai trạm vô tuyến phát các tín hiệu cùng một thời điểm). Viết phương trình chính tắc của quỹ đạo hypebol (H) của con tàu.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ O trùng với tiêu điểm của F_1F_2 , đơn vị trên các trục là km.

Giả sử phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Gọi t_1 là thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ trạm F_1 ; t_2 là thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ trạm F_2 , v là vận tốc sóng vô tuyến.

Theo đề bài ta có: $|t_1 - t_2| = 0,0012$

$$\Rightarrow |vt_1 - vt_2| = 0,0012v = 0,0012 \cdot 300000 = 360 \text{ (km)}$$

$$\Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 360 \text{ với mọi vị trí của M}$$

$$\Rightarrow 2a = 360 \Rightarrow a = 180.$$

Có khoảng cách giữa hai trạm vô tuyến là 600 km $\Rightarrow 2c = 600 \Rightarrow c = 300$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 300^2 - 180^2 = 57600.$$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{32400} - \frac{y^2}{57600} = 1$.