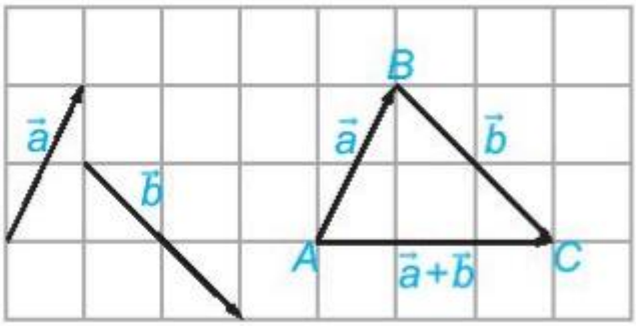
Bài 8. Tổng và hiệu của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Tổng của hai vectơ

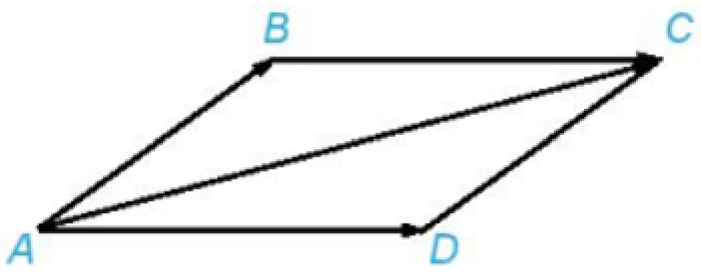
– Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

– Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



– Quy tắc ba điểm : Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

– Quy tắc hình bình hành : Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



– Với ba vectơ; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý :

+ Tính chất giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

+ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

+ Tính chất của vectơ–không : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

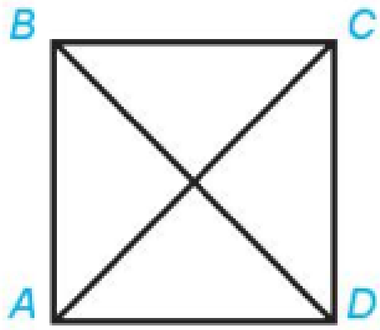
Chú ý: Do các vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và gọi là tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng dấu ngoặc.

Ví dụ: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vectơ

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải



Vì ABCD là hình vuông nên ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Khi đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Suy ra : $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Mặt khác ABCD là hình vuông có các cạnh bằng 1 nên độ dài đường chéo AC = $\sqrt{2}$.

Và $|\overrightarrow{AC}|$ = AC, suy ra $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.

Do đó $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}|= \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2}$.

2. Hiệu của hai vectơ

– Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

– Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

– Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

– Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

– Nếu $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ thì $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$.

– Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N, ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\left(-\overrightarrow{OM}\right)+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

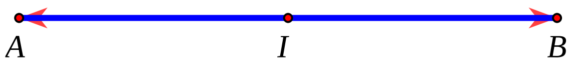
Mặt khác, vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Vậy $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

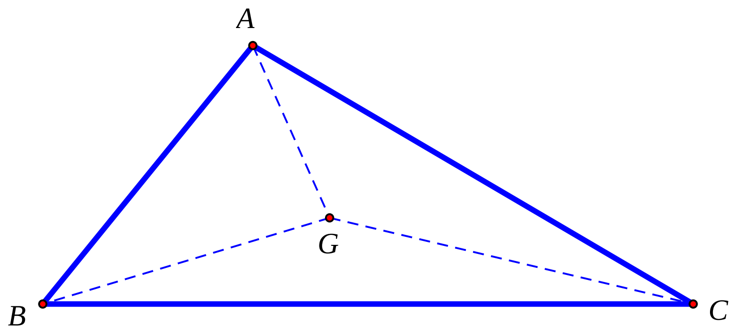
Nhận xét: Trong vật lý, trọng tâm của một vật là điểm đặt của trọng lực tác dụng lên vật đó. Đối với một vật mỏng hình đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thì trọng tâm của nó là điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Ví dụ:

– Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$



– Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



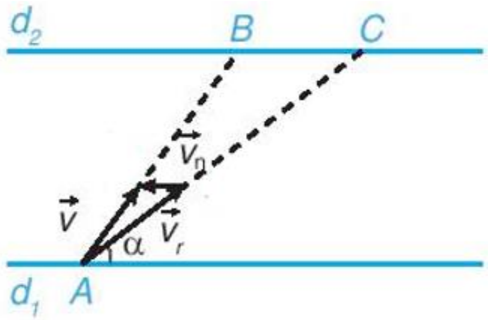
Chú ý:

– Phép cộng tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

+ Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$.

+ Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bở vectơ $\overrightarrow{v_r}$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{v_n}$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_n}$.

Ví dụ: Con tàu di chuyển từ bờ sông bên này sang bờ sông bên kia với vận tốc riêng không đổi. Vectơ vận tốc thực tế của tàu được biểu thị như sau:



Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Giả sử tàu xuất phát từ A và bánh lái luôn giữ để tàu tạo với bờ góc α.

Gọi $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_n}$ lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước.

Khi đó tàu chuyển động với vận tốc thực tế là : $\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_n}$.

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Vectơ đối của vectơ - không là:

A. Mọi vectơ khác vectơ - không;

B. Không có vectơ nào ;

C. Chính nó;

D. Mọi vectơ kể cả vectơ – không.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là C

Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Câu 2. Cho hình bình hành ABCD có một điểm O bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$;

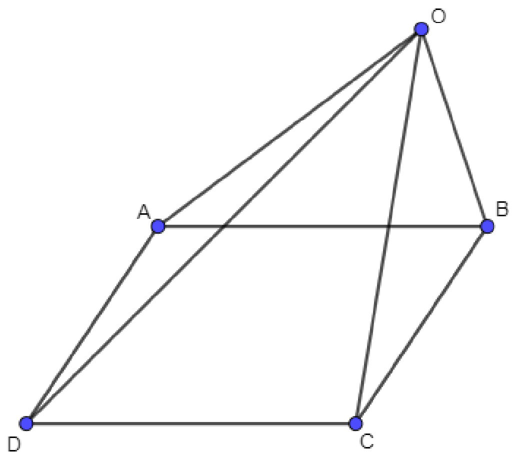
B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$;

C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;

D. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là B



+) Áp dụng quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$;

Vì ABCD là hình bình hành nên AB = CD và AB // CD khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Do đó B đúng, A sai.

+) Áp dụng quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$:

Vì ABCD là hình bình hành nên AD = CB và AD // CB khi đó $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} \neq \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Do đó C sai.

+) Áp dụng quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD}$:

Vì hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương nên không bằng nhau. Suy ra $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \neq \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$. Do đó D sai.

Câu 3. Cho hình thoi ABCD có độ dài cạnh bằng 2 dm và $BAD = 100°$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

A. 9,39 dm;

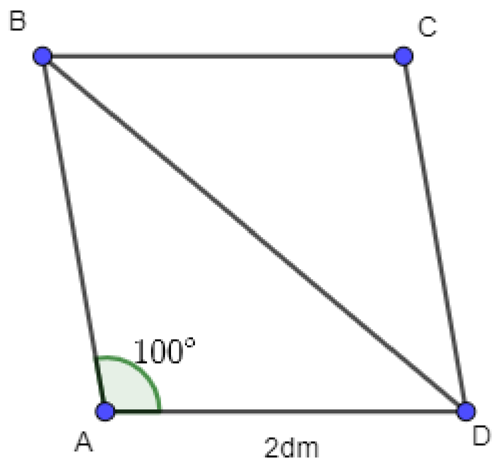
B. 3,06 dm;

C. 7,31 dm;

D. 2,70 dm.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là B



Vì ABCD là hình thoi nên ABCD là hình bình hành khi đó: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ (quy tắc hình bình hành)

Xét tam giác ABD có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 – 2.AB.AD.\cos BAD$

$\Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 2^2 – 2.2.2.\cos 100°$

$\Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2.2.2.\cos 100°$

$\Leftrightarrow BD^2 \approx 9{,}39$

$\Leftrightarrow BD \approx 3{,}06$ dm

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = 3{,}06$ dm.

Vậy độ dài vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ là 3,06 dm.

B2. Bài tập tự luận

Câu 4. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

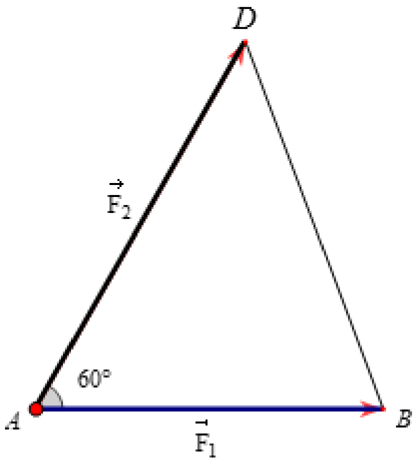
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$.

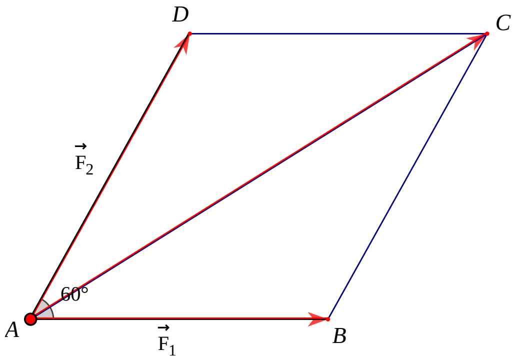
Vậy $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

Câu 5. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động lên một vật, biết $|\overrightarrow{F_1}| = 4$ N, $|\overrightarrow{F_2}| = 5$ N. Góc tạo bởi hai lực là 60°. Tính độ lớn của hợp lực $\overrightarrow{F_1}$ + $\overrightarrow{F_2}$.

Hướng dẫn giải



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{F_1}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{F_2}$. Ta vẽ hình bình hành ABCD.



Khi đó $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (theo quy tắc hình bình hành).

Suy ra: $|\vec{F_1} + \vec{F_2}| = |\overrightarrow{AC}|$

Do ABCD là hình bình hành nên AD // BC.

Suy ra $DAB + CBA = 180°$ (hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng song song).

$\Rightarrow CBA = 180° - DAB = 180° - 60° = 120°$.

Mặt khác $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\vec{F_2}| = 5$; $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{F_1}| = 4$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 – 2.AB.BC.\cos B$

$\Rightarrow AC^2 = 4^2 + 5^2 – 2.4.5.\cos 120° = 61$.

$\Rightarrow AC = \sqrt{61} \approx 7,8$.

Vậy, $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| \approx 7,8$ (N).