Chuyên đề 2: Phương pháp quy nạp toán học.

Nhị thức newton

Bài 1: Phương pháp quy nạp toán học

Trang 26, 27, 28

HĐ1 trang 26 Chuyên đề Toán 10:

Hãy quan sát các đẳng thức sau:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

......

Có nhận xét gì về các số ở vế trái và ở vế phải của các đẳng thức trên? Từ đó hãy dự đoán công thức tính tổng của n số lẻ đầu tiên $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)$.

Lời giải:

Ta thấy vế trái của các đẳng thức lần lượt là tổng của 1, 2, 3, 4, 5, ... số lẻ đầu tiên. Còn vế phải lần lượt là bình phương của 1, 2, 3, 4, 5,...

Vậy ta có thể dự đoán $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$.

HĐ2 trang 26 Chuyên đề Toán 10:

Xét đa thức $p(n) = n^2 – n + 41$.

a) Hãy tính p(1), p(2), p(3), p(4), p(5) và chứng tỏ rằng các kết quả nhận được đều là số nguyên tố.

b) Hãy đưa ra một dự đoán cho p(n) trong trường hợp tổng quát.

Lời giải:

a) p(1) = 41, p(2) = 43, p(3) = 47, p(4) = 53, p(5) = 61. Do đó p(1), p(2), p(3), p(4), p(5) đều là các số nguyên tố.

b) Từ việc p(1), p(2), p(3), p(4), p(5) đều là các số nguyên tố ta có thể đưa ra dự đoán p(n) là số nguyên tố với mọi n > 1. Tuy nhiên, khẳng định này là một khẳng định sai. Mặc dù khẳng định này đúng với n = 1, 2,..., 40, nhưng nó lại sai khi n= 41. Thật vậy, với n= 41 ta có p(41) = 41^2 là hợp số (vì nó chia hết cho 41).

Luyện tập 1 trang 27 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1, ta có

$$1+2+3+...+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}.$$

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có 1 = 1^2.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có:

$$1+2+3+...+k=\frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh:

$$1+2+3+...+k+\left(k+1\right)=\frac{\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)+1\right]}{2}.$$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$1+2+3+...+k+\left(k+1\right)$$

$$=\frac{k\left(k+1\right)}{2}+\frac{2\left(k+1\right)}{2}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}=\frac{\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)+1\right]}{2}.$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n ≥ 1.

Luyện tập 2 trang 28 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 2, ta có đẳng thức:

$a^n – b^n = (a – b)(a^{n – 1} + a^{n – 2}b + ... + ab^{n – 2} + b^{n – 1})$.

Lời giải:

Bước 1. Khi n = 1, ta có: $a^1 – b^1 = a – b$.

Vậy khẳng định đúng với n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có:

$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh:

$a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b)[a^{(k+1)-1} + a^{(k+1)-2}b + ... + ab^{(k+1)-2} + b^{(k+1)-1}]$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$a^{k+1} - b^{k+1}$

$= a . a^k - b . b^k$

$= a . a^k - a . b^k + a . b^k - b . b^k$

$= a . (a^k - b^k) + b^k . (a - b)$

$= a . (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}) + b^k . (a - b)$

$= (a - b) . a . (a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}) + (a - b) . b^k$

$= (a - b)(a . a^{k-1} + a . a^{k-2}b + ... + a . ab^{k-2} + a . b^{k-1}) + (a - b) . b^k$

$= (a - b)[a^{1+(k-1)} + a^{1+(k-2)}b + ... + a^2b^{k-2} + a . b^{k-1}) + (a - b) . b^k$

$= (a - b)[a^{(k+1)-1} + a^{(k+1)-2}b + ... + a^2b^{(k+1)-3} + ab^{(k+1)-2}] + (a - b) . b^{(k+1)-1}$

$= (a - b)[a^{(k+1)-1} + a^{(k+1)-2}b + ... + ab^{(k+1)-2} + b^{(k+1)-1}]$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Trang 30

Vận dụng trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Lãi suất gửi tiết kiệm trong ngân hàng thường được tính theo thể thức lãi kép theo định kì. Theo thể thức này, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Giả sử một người gửi số tiền A với lãi suất r không đổi trong mỗi kì.

a) Tính tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_1, T_2, T_3 mà người đó nhận được sau kì thứ 1, sau kì thứ 2 và sau kì thứ 3.

b) Dự đoán công thức tính tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_n mà người đó thu được sau n kì. Hãy chứng minh công thức nhận được đó bằng quy nạp.

Lời giải:

a)

– Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_1 mà người đó nhận được sau kì thứ 1 là:

$T_1 = A + Ar = A(1 + r)$.

– Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_2 mà người đó nhận được sau kì thứ 2 là:

$T_2 = A(1 + r) + A(1 + r)r = A(1 + r)(1 + r) = A(1 + r)^2$.

– Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_3 mà người đó nhận được sau kì thứ 3 là:

$T_3 = A(1 + r)^2 + A(1 + r)^2r = A(1 + r)^3$.

b) Từ câu a) ta có thể dự đoán $T_n = A(1 + r)^n$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $T_1 = A(1 + r) = A(1 + r)^1$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $T_k = A(1 + r)^k$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $T_{k+1} = A(1 + r)^{k+1}$.

Thật vậy,

Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_{k+1} mà người đó nhận được sau kì thứ (k + 1) là:

$T_{k+1} = A(1 + r)^k + A(1 + r)^k.r = A(1 + r)^k(1 + r) = A(1 + r)^{k+1}$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Vậy $T_n = A(1 + r)^n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.1 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải:

a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có 2.1 = 1(1 + 1).

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có:

$2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k + 1)$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh:

$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (k + 1)[(k + 1) + 1]$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1)$

$= k(k + 1) + 2(k+1) = (k + 1)(k + 2) = (k + 1)[(k + 1) + 1]$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

b) Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}$.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$= (k + 1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$= \frac{6(k+1)^2}{6} + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$= \frac{k+1}{6}\left[6(k+1) + k(2k+1)\right]$

$= \frac{k+1}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right]$

$= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$

$= \frac{k+1}{6}\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.2 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Mỗi khẳng định sau là đủng hay sai? Nếu em nghĩ là nó đủng, hãy chứng minh nó. Nếu em nghĩ là nó sai, hãy đưa ra một phản ví dụ.

a) $p(n) = n^2 – n + 11$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n;

b) $n^2 > n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Lời giải:

a) Khẳng định này là sai vì với n = 11 ta có $p(11) = 11^2$ không phải số nguyên tố.

b) Khẳng định này là đúng. Ta chứng minh bằng quy nạp:

Bước 1. Với n = 2 ta có $2^2 = 4 > 2$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 2.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k ($k \geq 2$), tức là ta có: $k^2 > k$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $(k + 1)^2 > k + 1$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k + 2k + 1 > k + 1$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Bài 2.3 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng $n^3 – n + 3$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $1^3 – 1 + 3 = 3 \vdots 3$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $k^3 – k + 3 \vdots 3$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $(k + 1)^3 – (k + 1) + 3 \vdots 3$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$(k + 1)^3 – (k + 1) + 3$

$= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) – (k + 1) + 3$

$= (k^3 – k + 3) + (3k^2 + 3k)$

Vì $(k^3 – k + 3)$ và $(3k^2 + 3k)$ đều chia hết cho 3 nên $(k^3 – k + 3) + (3k^2 + 3k) \vdots 3$ hay $(k + 1)^3 – (k + 1) + 3 \vdots 3$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.4 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng $n^2 – n + 41$ là số lẻ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $1^2 – 1 + 41 = 41$ là số lẻ.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $k^2 – k + 41$ là số lẻ.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $(k + 1)^2 – (k + 1) + 41$ là số lẻ.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$(k + 1)^2 – (k + 1) + 41$

$= (k^2 + 2k + 1) – (k + 1) + 41$

$= k^2 + k + 41 = (k^2 – k + 41) + 2k$

Vì $k^2 – k + 41$ là số lẻ và 2k là số chẵn nên $(k^2 – k + 41) + 2k$ là số lẻ hay $(k + 1)^2 – (k + 1) + 41$ là số lẻ.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.5 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng nếu $x > –1$ thì $(1 + x)^n \geq 1+ nx$ với mọi số tự nhiên n.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1.x$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $(1 + x)^k \geq 1+ kx$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $(1 + x)^{k+1} \geq 1+ (k + 1)x$.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$(1 + x)^{k+1}$

$= (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1+ kx) = 1 + x + kx + kx^2 > 1 + x + kx = 1+ (k + 1)x$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.6 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Lời giải:

a) $S_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$.

b) Từ câu a) ta dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $S_k = \frac{k}{k+1}$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.7 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác n cạnh ($n \geq 4$) là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n với $n \geq 4$.

Bước 1. Với n = 4 ta có đa giác là tứ giác.

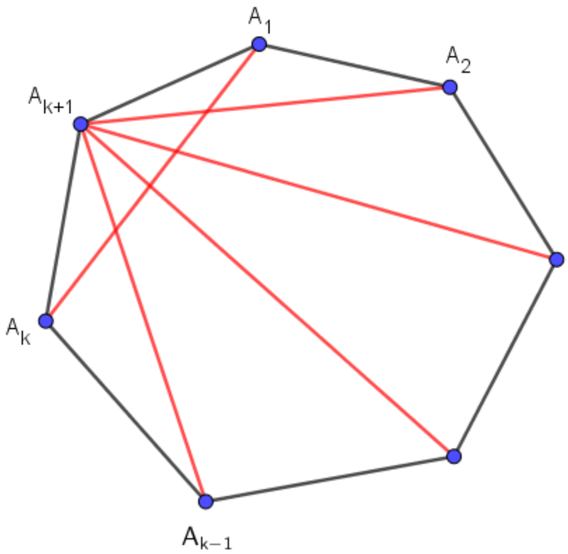
Số đường chéo của tứ giác là 2 = $\frac{4(4-3)}{2}$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 4.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k ($k \geq 4$), tức là ta có: Số đường chéo của một đa giác k cạnh ($k \geq 4$) là $\frac{k(k-3)}{2}$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: Số đường chéo của một đa giác (k + 1) cạnh ($k \geq 4$) là $\frac{(k+1)\left[(k+1)-3\right]}{2}$.

Thật vậy, xét đa giác (k + 1) cạnh $A_1A_2...A_kA_{k+1}$, nối hai đỉnh A_1 và A_k ta được đa giác k cạnh $A_1A_2...A_k$. Theo giả thiết quy nạp đa giác k cạnh này có $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo.



Các đường chéo còn lại của đa giác (k + 1) cạnh ngoài $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo này là các đoạn nối A_{k+1} với các đỉnh từ A_2 đến A_{k-1} và đoạn A_1A_k (màu đỏ). Tổng cộng có (k – 1) đường.

Vậy tổng số đường chéo của đa giác (k + 1) cạnh là:

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2}$$

$$= \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}.$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

Bài 2.8 trang 30 Chuyên đề Toán 10:

Ta sẽ “lập luận” bằng quy nạp toán học đề chỉ ra rằng: “Mọi con mèo đều có cùng màu”. Ta gọi P(n) với n nguyên dương là mệnh đề sau: “Mọi con mèo trong một đàn gồm n con đều có cùng màu”.

Bước 1. Với n = 1 thì mệnh đề P(1) là “Mọi con mèo trong một đàn gồm 1 con đều có cùng màu”. Hiển nhiên mệnh đề này là đúng!

Bước 2. Giả sử P(k) đúng với một số nguyên dương k nào đó. Xét một đàn mèo gồm k + 1 con. Gọi chúng là $M_1, M_2, ..., M_{k+1}$. Bỏ con mèo M_{k+1} ra khỏi đàn, ta nhận được một đàn mèo gồm k con là $M_1, M_2, ..., M_k$. Theo giả thiết quy nạp, các con mèo có cùng màu. Bây giờ, thay vì bỏ con mèo M_{k+1} ta bỏ con mèo để có đàn mèo gồm k con là M_2, M_3, ..., M_{k+1}. Vẫn theo giả thiết quy nạp thì các con mèo M_2, M_3, ..., M_{k+1} có cùng màu. Cuối cùng, đưa con mèo M_1 trở lại đàn để có đàn mèo ban đầu. Theo các lập luận trên: các con mèo M_1, M_2, ..., M_k có cùng màu và các con mèo M_2, M_3, ..., M_{k+1} có cùng màu. Từ đó suy ra tất cả các con mèo M_1, M_2, ... , M_{k+1} đều có cùng màu.

Vậy, theo nguyên lí quy nạp thì P(n) đúng với mọi số nguyên dương n. Nói riêng, nếu gọi N là số mèo hiện tại trên Trái Đất thi việc P(N) đúng cho thấy tất cả các con mèo (trên Trái Đất) đều có cùng màu!

Tất nhiên là ta có thể tìm được các con mèo khác màu nhau! Theo em thì "lập luận" trên đây sai ở chỗ nào?

Lời giải:

Lập luận này sai ở Bước 2 khi k = 2.

Với k = 2, tức là đàn mèo có 2 con M_1, M_2. Khi đó việc tách đàn mèo này thành hai đàn mèo nhỏ, mỗi đàn 1 con mèo sẽ dẫn đến việc hai tập hợp $\{M_1, M_2, ..., M_k\}$ (lúc này chỉ là $\{M_1\}$) và $\{M_2, M_3, ..., M_{k+1}\}$ (lúc này chỉ là $\{M_2\}$) không có phần tử giao nhau. Do đó không thể suy ra tất cả các con mèo M_1, M_2, ... , M_{k+1} đều có cùng màu.