

## Bài 3. Cấp số cộng

### A. Lý thuyết

#### I. Định nghĩa.

- **Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi  $d$ .

Số  $d$  được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

- Nếu  $(u_n)$  là cấp số cộng với công sai  $d$ , ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

- Đặc biệt, khi  $d = 0$  thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

- **Ví dụ 1.** Dãy số hữu hạn: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 là một cấp số cộng với số hạng đầu  $u_1 = 1$ ; công sai  $d = 3$ .

#### II. Số hạng tổng quát

- **Định lý:** Nếu cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 1.$$

- **Ví dụ 2.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_1 = 1$ ;  $d = 5$ .

a) Tìm  $u_{10}$ .

b) Số 106 là số hạng thứ bao nhiêu?

**Lời giải:**

a) Số hạng thứ 10 là  $u_{10} = u_1 + (10 - 1)d = 1 + 9 \cdot 5 = 46$ .

b) Ta có:  $u_n = u_1 + (n - 1)d$ . Vì  $u_n = 106$  nên:

$$106 = 1 + (n - 1) \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 105 = (n - 1) \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 21 = n - 1 \text{ nên } n = 22.$$

Vậy 106 là số hạng thứ 22.

### III. Tính chất các số hạng của cấp số cộng.

#### - Định lí 2:

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số cuối) đều là trung bình cộng của hai số đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}; k \geq 2.$$

### IV. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

- **Định lí:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ .

Khi đó:  $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ .

- **Chú ý:** vì  $u_n = u_1 + (n - 1)d$  nên ta có:  $S_n = nu_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d$ .

**Ví dụ 3.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_n = 2n + 5$ .

a) Tìm  $u_1$  và  $d$ .

b) Tính tổng 40 số hạng đầu tiên.

c) Biết  $S_n = 187$ , tìm  $n$ .

#### Lời giải:

a) Ta có:  $u_1 = 2.1 + 5 = 7$ ;  $u_2 = 2.2 + 5 = 9$ .

Suy ra,  $d = u_2 - u_1 = 2$ .

b) Tổng 40 số hạng đầu tiên là:

$$S_{40} = 40.7 + \frac{40(40 - 1)}{2}.2 = 1840$$

c) Ta có:  $S_n = nu_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d$  nên:

$$187 = 7n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 187 = 7n + n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 6n - 187 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -17 \end{cases}$$

Vì  $n$  là nguyên dương nên  $n = 11$ .

## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 12$ ;  $u_6 = -18$ . Tìm  $u_8$ .

**Lời giải:**

Theo đề bài ta có;

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_6 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ u_1 + 5d = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ d = -6 \end{cases}$$

Suy ra:  $u_8 = u_1 + 7d = 12 + 7 \cdot (-6) = -30$ .

**Bài 2.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng sau biết:

$$a) \begin{cases} u_3 + u_6 = 21 \\ u_4 + u_9 = 30 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ u_2 \cdot u_4 = 21 \end{cases}.$$

**Lời giải:**

$$a) \begin{cases} u_3 + u_6 = 21 \\ u_4 + u_9 = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 5d = 21 \\ u_1 + 3d + u_1 + 8d = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 7d = 21 \\ 2u_1 + 11d = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{21}{8} \\ d = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu  $u_1 = \frac{21}{8}$  và công sai  $d = \frac{9}{4}$ .

$$b) \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ u_2 \cdot u_4 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ (u_1 + d) \cdot (u_1 + 3d) = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 & (1) \\ (u_1 + d) \cdot (u_1 + 3d) = 21 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra:  $u_1 = 7 - 3d$  thay vào (2) ta được:

$$(7 - 3d + d) \cdot (7 - 3d + 3d) = 21$$

$$\Leftrightarrow (7 - 2d) \cdot 7 = 21$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2d = 3 \text{ nên } d = 2$$

$$\text{Suy ra: } u_1 = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Vậy  $u_1 = 1$  và công sai  $d = 2$ .

**Bài 3.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_n = 3n + 1$ .

a) Tìm  $u_1$  và  $d$ .

b) Tính tổng 20 số hạng đầu tiên.

c) Biết  $S_n = 209$ , tìm  $n$ .

**Lời giải:**

$$a) \text{ Ta có: } u_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4; u_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7.$$

$$\text{Suy ra, } d = u_2 - u_1 = 3.$$

b) Tổng 20 số hạng đầu tiên là:

$$S_{20} = 20 \cdot 4 + \frac{20(20-1)}{2} \cdot 3 = 650$$

c) Ta có:  $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$  nên:

$$209 = 4n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 418 = 8n + 3n^2 - 3n$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 418 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -\frac{38}{3} \end{cases}$$

Vì  $n$  là nguyên dương nên  $n = 11$ .