

## Đạo hàm của hàm số lượng giác

### 1. Lý thuyết

a) Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) Công thức đạo hàm của hàm số lượng giác

Đạo hàm của hàm số lượng giác cơ bản	Đạo hàm của hàm số hợp ( $u = u(x)$ )
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \tan^2 u)$
$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$	$\left(u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot (1 + \cot^2 u)$
$(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$	$(u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

### 2. Các dạng bài tập

#### Dạng 1. Tính đạo hàm của các hàm chứa hàm số lượng giác

*Phương pháp giải:*

- Áp dụng các công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác.
- Áp dụng quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp

*Ví dụ minh họa:*

**Ví dụ 1:** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = 5\sin x - 3\cos x$

b)  $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

c)  $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$

d)  $y = \tan 3x - \cot 3x$

e)  $y = \tan 2x - \frac{1}{3}\cot 4x + \sqrt{\sin x}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = 5\cos x + 3\sin x$

b) Ta có:  $y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$ .

c) Ta có:  $y' = \frac{(1 + 2\tan x)'}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2\tan x}}$ .

d) Ta có các cách thực hiện sau:

*Cách 1:* Ta có ngay:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{3}{\sin^2 3x} = \frac{3}{\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x} = \frac{3}{\frac{1}{4} \sin^2 6x} = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

*Cách 2:* Ta biến đổi:

$$y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x}{\cos 3x \cdot \sin 3x} = -\frac{2\cos 6x}{\sin 6x} = -2\cot 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

$$e) y' = (\tan 2x)' - \frac{1}{3}(\cot 4x)' + (\sqrt{\sin x})' = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{4}{3\sin^2 4x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

**Ví dụ 2:** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = \sin^2 3x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$b) y = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

$$c) y = \tan(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)$$

$$d) y = (\sin x + \cos x) \left( 3\cos x - \frac{1}{3}\sin x \right)$$

**Lời giải**

$$a) y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' - \frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = 2\sin 3x \cdot 3\cos 3x - \frac{2\cos x \cdot (\cos x)'}{\cos^4 x}$$

$$= 6\sin 3x \cos 3x + \frac{2\cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x} = 3\sin 6x + \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= \frac{(1 + \sin x)'(1 + \cos x) - (1 + \cos x)'(1 + \sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \left( \tan(x^2 + 2\sqrt{x} + 1) \right)' = \frac{(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)'}{\cos^2(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{2x + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\cos^2(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} = \frac{2x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} \cos^2(x^2 + 2\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y' &= (\sin x + \cos x)' \left( 3\cos x - \frac{1}{3}\sin x \right) + (\sin x + \cos x) \left( 3\cos x - \frac{1}{3}\sin x \right)' \\ &= (\cos x - \sin x) \left( 3\cos x - \frac{1}{3}\sin x \right) + (\sin x + \cos x) \left( -3\sin x - \frac{1}{3}\cos x \right) \\ &= 3\cos^2 x - \frac{10}{3}\sin x \cos x + \frac{1}{3}\sin^2 x - 3\sin^2 x - \frac{10}{3}\sin x \cos x - \frac{1}{3}\cos^2 x \\ &= \frac{8}{3}\cos^2 x - \frac{8}{3}\sin^2 x - \frac{20}{3}\sin x \cos x \\ &= \frac{8}{3}\cos 2x - \frac{10}{3}\sin 2x \end{aligned}$$

## **Dạng 2. Chứng minh đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình liên quan đến đạo hàm**

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng:

- a) Hàm số  $y = \tan x$  thỏa mãn hệ thức  $y' - y^2 - 1 = 0$ .
- b) Hàm số  $y = \cot 2x$  thỏa mãn hệ thức  $y' + 2y^2 + 2 = 0$ .

**Lời giải**

a) Trước tiên, ta có:  $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

Khi đó, ta có:

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \quad (\text{đpcm})$$

b) Trước tiên, ta có:  $y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}$ .

Khi đó, ta có:

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin^2 2x} = 0 \quad (\text{đpcm})$$

**Ví dụ 2:** Giải phương trình  $y' = 0$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $y = \sin 2x - 2\cos x$ .

b)  $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$ .

### Lời giải

a) Trước tiên, ta có:  $y' = 2\cos 2x + 2\sin x$ .

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Trước tiên, ta có:

$$y' = 6\cos 2x - 8\sin 2x + 10.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$6\cos 2x - 8\sin 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x = 1$$

Đặt  $\frac{4}{5} = \cos a$  và  $\frac{3}{5} = \sin a$ , do đó ta được:

$$\sin 2x \cos a - \cos 2x \sin a = 1 \Leftrightarrow \sin(2x - a) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### 3. Bài tập tự luyện

**Câu 1.** Hàm số  $y = \cot x$  có đạo hàm là:

- A.  $y' = -\tan x$       B.  $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$       C.  $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$       D.  $y' = 1 + \cot^2 x$

**Câu 2.** Hàm số  $y = -\frac{3}{2}\sin 7x$  có đạo hàm là:

- A.  $-\frac{21}{2}\cos x$       B.  $-\frac{21}{2}\cos 7x$       C.  $\frac{21}{2}\cos 7x$       D.  $\frac{21}{2}\cos x$

**Câu 3.** Hàm số  $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$  có đạo hàm là:

- A.  $3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$       B.  $-3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$       C.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$       D.  $-3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$ .

**Câu 4.** Đạo hàm của hàm số  $y = 3\sin 2x + \cos 3x$  là:

- A.  $y' = 3\cos 2x - \sin 3x$   
B.  $y' = 3\cos 2x + \sin 3x$   
C.  $y' = 6\cos 2x - 3\sin 3x$   
D.  $y' = -6\cos 2x + 3\sin 3x$

**Câu 5.** Hàm số  $y = x \tan 2x$  có đạo hàm là:

- A.  $\tan 2x + \frac{2x}{\cos^2 x}$   
B.  $\frac{2x}{\cos^2 2x}$   
C.  $\tan 2x + \frac{2x}{\cos^2 2x}$   
D.  $\tan 2x + \frac{x}{\cos^2 2x}$ .

**Câu 6.** Đạo hàm của hàm số  $y = 2\sin 3x \cdot \cos 5x$  có biểu thức nào sau đây?

- A.  $30\cos 3x \cdot \sin 5x$

**B.**  $-8\cos 8x + 2\cos 2x$

**C.**  $8\cos 8x - 2\cos 2x$

**D.**  $-30\cos 3x + 30\sin 5x$

**Câu 7.** Hàm số  $y = \frac{\sin x}{x}$  có đạo hàm là:

**A.**  $y' = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$

**B.**

$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

**C.**  $y' = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2}$

**D.**

$y' = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$

**Câu 8.** Hàm số  $y = \frac{1}{2} \cot x^2$  có đạo hàm là:

**A.**  $\frac{-x}{2 \sin x^2} \cdot$

**B.**  $\frac{x}{\sin^2 x^2} \cdot$

**C.**  $\frac{-x}{\sin x^2} \cdot$

**D.**  $\frac{-x}{\sin^2 x^2} \cdot$

**Câu 9.** Hàm số  $y = \tan x - \cot x$  có đạo hàm là:

**A.**  $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$

**B.**  $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$

**C.**  $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$

**D.**  $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$

**Câu 10.** Đạo hàm của hàm số  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$  có biểu thức dạng

$\frac{a}{(\sin x - \cos x)^2} \cdot$

Vậy giá trị a là:

**A.**  $a = 1$

**B.**  $a = -2$

**C.**  $a = 3$

**D.**  $a = 2$

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$ . Đạo hàm  $y'$  của hàm số là

**A.**  $\frac{2x + 2}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2}$

**B.**  $-\frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2}$

C.  $\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$

D.  $\frac{(x+1)}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$

**Câu 12.** Đạo hàm của hàm số  $y = \sin^2 2x \cdot \cos x + \frac{2}{\sqrt{x}}$  là

A.  $y' = 2 \sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - 2\sqrt{x}$ .

B.  $y' = 2 \sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - 2\sqrt{x}$ .

C.  $y' = 2 \sin 4x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin^2 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ .

D.  $y' = 2 \sin 4x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin^2 2x - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ .

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sin^3 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$ . Giá trị đúng của  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  bằng

A.  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

B.  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

C.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \cos^2 x + \sin x$ . Phương trình  $y' = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \sin 2x + x$ . Số nào sau đây là nghiệm của phương trình  $y' = 0$  trong khoảng  $(-\pi; \pi)$

A.  $-\frac{\pi}{6}$  và  $\frac{\pi}{6}$

B.  $-\frac{\pi}{3}$  và  $\frac{\pi}{3}$

C.  $-\frac{\pi}{6}$  và  $\frac{7\pi}{12}$

D.  $\frac{\pi}{3}$  và  $\frac{\pi}{6}$

### BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	B	C	C	B	B	D	C	B	C	D	A	C	B