Công thức giải phương trình lượng giác cơ bản

1. Lí thuyết

* Công thức nghiệm cơ bản

a) Phương trình sin x = m

Trường hợp 1: |m| > 1. Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $|m| \le 1$. Phương trình có nghiệm.

- Nếu m biểu diễn được dưới dạng sin của những góc đặc biệt thì:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu m không biểu diễn được dưới dạng sin của những góc đặc biệt thì:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

- Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi(k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình cos x = m

Trường hợp 1: |m| > 1. Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $|m| \le 1$. Phương trình có nghiệm.

- Nếu m biểu diễn được dưới dạng cos của những góc đặc biệt thì:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu m không biểu diễn được dưới dạng cos của những góc đặc biệt thì:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

- Các trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi(k \in \mathbb{Z})$$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

c) Phương trình: tan x = m. Điều kiện: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

- Nếu m biểu diễn được dưới dạng tan của những góc đặc biệt thì:

$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

- Nếu m không biểu diễn được dưới dạng tan của những góc đặc biệt thì:

$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

d) Phương trình: cot x = m. Điều kiện: $x \ne k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

- Nếu m biểu diễn được dưới dạng cot của những góc đặc biệt thì:

$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

- Nếu m không biểu diễn được dưới dạng cot của những góc đặc biệt thì:

$\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, m + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

* Mở rộng công thức nghiệm, với u(x) và v(x) là hai biểu thức của x.

$\sin u\left(x \right) = \sin v\left(x \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x) = v(x) + k2\pi \\ u(x) = \pi - v(x) + k2\pi \end{array} \right.\left(k \in \mathbb{Z} \right)$

$\cos u\left(x \right) = \cos v\left(x \right) \Leftrightarrow u\left(x \right) = \pm v\left(x \right) + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

$\tan u\left(x \right) = \tan v\left(x \right) \Leftrightarrow u\left(x \right) = v\left(x \right) + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

$\cot u\left(x \right) = \cot v\left(x \right) \Leftrightarrow u\left(x \right) = v\left(x \right) + k\pi \left(k \in \mathbb{Z} \right)$

2. Công thức

Khi đã cho số m, ta có thể tìm các giá trị arcsin m, arccos m, arctan m, arccot m bằng máy tính bỏ túi với các phím $\sin^{-1}$; $\cos^{-1}$; $\tan^{-1}$.

Bước 1. Chỉnh chế độ rad hoặc độ

- Muốn tìm số đo radian:

ta ấn qw4 (đối với Casio fx - 570VN)

ta ấn qw22 (đối với Casio fx - 580VN X)

- Muốn tìm số đo độ:

ta ấn qw3 (đối với Casio fx - 570VN)

ta ấn qw21 (đối với Casio fx - 580VN X)

Bước 2. Tìm số đo góc

Tìm góc α khi biết sin của góc đó bằng m, ta ấn lần lượt `qj` m =.

Tương tự đối với cos và tan.

Chú ý: Muốn tìm góc α khi biết cot của góc đó bằng m, ta ấn lần lượt `ql1a` m `$)=`.

Sau đó áp dụng công thức lượng giác để giải phương trình.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\cot 2x = \sqrt{3}$

Lời giải

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ (Bấm máy SHIFT + SIN + $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ (Bấm máy SHIFT + COS + $\frac{1}{2}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi; x=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$.

c) $\cot 2x=\sqrt{3}$

Điều kiện xác định: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $\cot 2x=\cot\frac{\pi}{6}$ (Bấm máy SHIFT + Tan + $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (Thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau:

a) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan x$

Lời giải

a) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 3x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}$.

b) Điều kiện xác định:

$$\begin{cases}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Ta có: $\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan x$

$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=x+k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (Thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Phương trình lượng giác $2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$ có nghiệm là

A. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

B. $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$

C. $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k4\pi;k\in\mathbb{Z}$

D. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k4\pi;k\in\mathbb{Z}$

Câu 2. Phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[\pi;2\pi\right]$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 3. Cho phương trình $\cot 3x=\cot(x+\sqrt{3})$. Nghiệm của phương trình là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

Đáp án: 1 – C, 2 – A, 3 – B