Tất tần tật về Hệ thức Vi-et | Công thức Hệ thức Vi-et

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Định lí Vi- ét:

+ Phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2, khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

+ Cho hai số u và v có tổng u + v = S và có tích u.v = P thì u và v là các nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$

II. Các công thức.

- Định lí Vi-ét:

+) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $\Delta \geq 0$ $(\Delta' \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

+) $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ x = v \end{cases}$

- Dấu của nghiệm phương trình bậc hai:

+) Hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases}$

+) Hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases}$

+) Hai nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases}$

+) Hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

III. Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 6$.

Lời giải:

Xét phương trình: $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$

$\Delta' = m^2 - 1.(2m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0 \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow m \neq 1$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2m}{1} = -2m \\ x_1.x_2 = \dfrac{2m-1}{1} = 2m - 1 \end{cases}$

Ta có: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 6$

$\Leftrightarrow x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 - 2x_1x_2 = 6$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 2.(2m-1) = 6$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 2 = 6$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0$

Xét phương trình $m^2 - m - 1 = 0$ có $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $m^2 - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$m_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2.1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (t/m)

$m_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2.1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (t/m)

Vậy với $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 + 4x + 2 = 0$. Tìm giá trị biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ mà không cần phải tìm nghiệm của phương trình với x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Lời giải:

Xét phương trình $x^2 + 4x + 2 = 0$

$\Delta' = 2^2 - 1.2 = 2 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4}{1} = -4 \\ x_1.x_2 = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2} = \frac{-4}{2} = -2$

Vậy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2.$

Bài 3: Tìm m thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $x^2 + 4x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

b) $x^2 + mx - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) $x^2 + mx - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

d) $2x^2+3mx-2=0$ có hai nghiệm phân biệt âm.

Lời giải:

a)

Xét phương trình $x^2+4x-2m=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu thì $1.(-2m)<0 \Leftrightarrow m>0$

Vậy m > 0 thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

b)

Xét phương trình $x^2+mx-m-1=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta=m^2-4.1.(-m-1)=m^2+4m+4=(m+2)^2>0$

$\Leftrightarrow m\neq -2$ (1)

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $x_1.x_2=\dfrac{-m-1}{1}=-m-1$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu:

$\Rightarrow -m-1>0 \Leftrightarrow m<-1$ (2)

Kết hợp hai điều kiện (1), (2) ta có m < -1 và $m\neq -2$ thì phương trình $x^2+mx-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c)

Xét phương trình $x^2+mx-m-1=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta=m^2-4.1.(-m-1)=m^2+4m+4=(m+2)^2>0$

$\Leftrightarrow m\neq -2$ (1)

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-m}{1}=-m \\ x_1.x_2=\dfrac{-m-1}{1}=-m-1 \end{cases}$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương:

$$\Rightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \ (2)$$

Kết hợp hai điều kiện (1), (2) ta có m < -1 và $m \neq -2$ thì phương trình $x^2 + mx - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

d)

Xét phương trình $2x^2 + 3mx - 2 = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta = (3m)^2 - 4.2.(-2) = 9m^2 + 16 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-3m}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm:

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3m}{2} < 0 \\ -1 > 0 \end{cases} \text{ (vô lý vì } -1 < 0)$$

Vậy phương trình không thể có hai nghiệm phân biệt âm.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho phương trình $4x^2 - 4mx - 2m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 3m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 = 2x_2$.