

Bài 5. Tích của một số với một vector

A. Câu hỏi

Câu hỏi khởi động trang 88 Toán lớp 10 Tập 1: Hai đoàn tàu chạy song song (Hình 58). Gọi \vec{v}_1, \vec{v}_2 lần lượt là các vector mô tả vận tốc của hai đoàn tàu.



(Nguồn: <https://pixabay.com>)

Hình 58

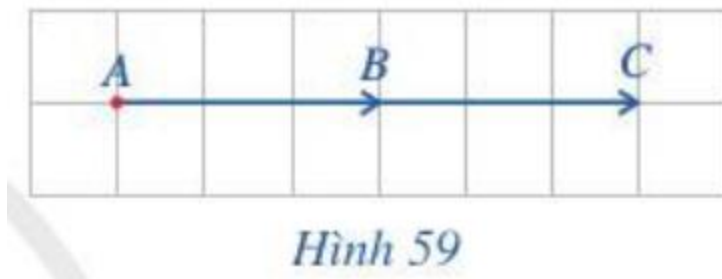
Mối liên hệ giữa hai vector vận tốc \vec{v}_1, \vec{v}_2 là như thế nào?

Sau bài học này chúng ta sẽ giải quyết được câu hỏi trên như sau:

Lời giải:

Ta thấy hai vector \vec{v}_1, \vec{v}_2 là hai vector cùng phương nên $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ với $k \neq 0$.

Hoạt động 1 trang 88 Toán lớp 10 Tập 1: Gọi B là trung điểm của AC.



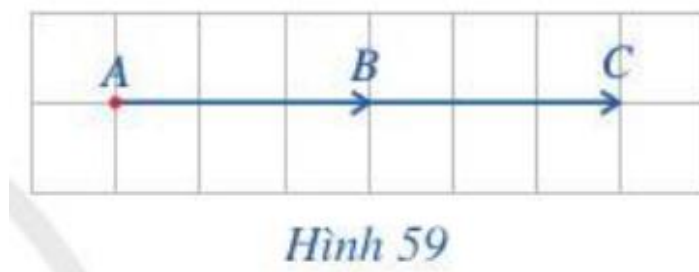
Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Lời giải:

Do B là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Hoạt động 2 trang 88 Toán lớp 10 Tập 1: Gọi B là trung điểm của AC.



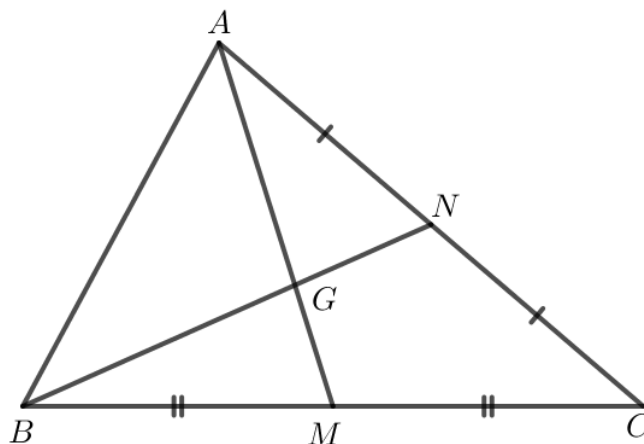
Quan sát vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} , nêu mối liên hệ về hướng và độ dài của vectơ $2\overrightarrow{AB}$ với \overrightarrow{AC} .

Lời giải:

Vectơ $2\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với \overrightarrow{AB} và $|2\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Luyện tập 1 trang 89 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC. Hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G. Tìm các số a, b biết: $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{GN} = b\overrightarrow{GB}$.

Lời giải:



Tam giác ABC có hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

$$\text{Do đó } AG = \frac{2}{3}AM; GN = \frac{1}{2}GB.$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AG} \text{ và } \overrightarrow{AM} \text{ là hai vectơ cùng hướng nên } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.$$

$$\text{Do } \overrightarrow{GN} \text{ và } \overrightarrow{GB} \text{ là hai vectơ cùng hướng nên } \overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{2}.$$

Luyện tập 2 trang 89 Toán lớp 10 Tập 1: Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh

$$3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}.$$

Lời giải:

$$3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC})$$

$$= 3\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{BC}$$

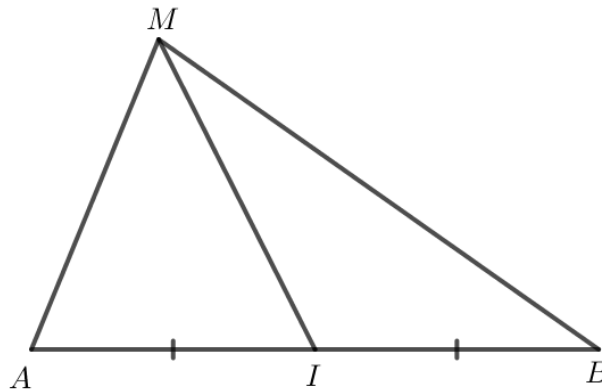
$$= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC} - 6\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vậy } 3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}.$$

Hoạt động 3 trang 90 Toán lớp 10 Tập 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.

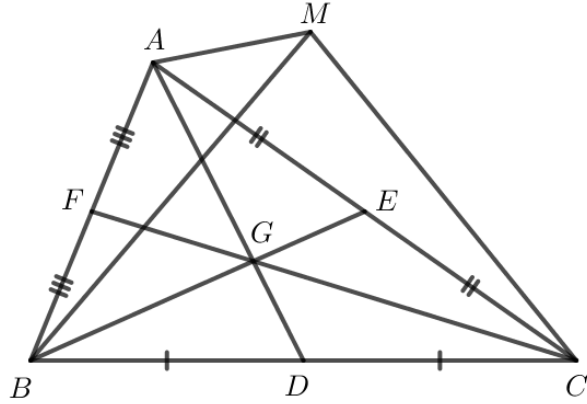
Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Do đó $2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Hoạt động 4 trang 90 Toán lớp 10 Tập 1: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải:



Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB.

Do D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$.

Do E là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$.

Do F là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CF}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{CF}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{CF}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$\Rightarrow -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) = \vec{0}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC}) = \vec{0}.$$

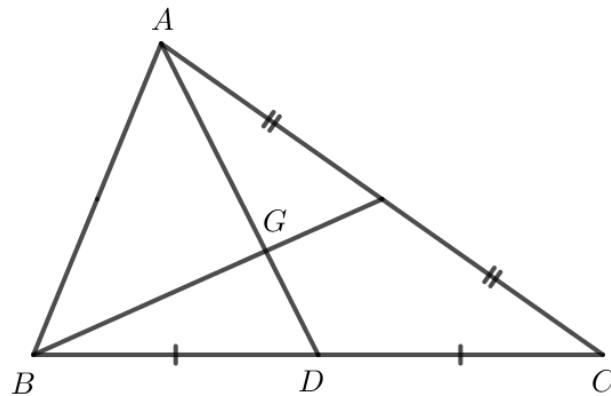
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Luyện tập 3 trang 90 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm.

Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải:



Gọi D là trung điểm của BC.

Do D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ hay $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

Hoạt động 5 trang 91 Toán lớp 10 Tập 1: Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là số thực khác 0. Nêu nhận xét về phương của hai vector \vec{a} và \vec{b} .

Lời giải:

Ta có $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là số thực khác 0. Khi đó hai vector \vec{a} và \vec{b} cùng phương.

Hoạt động 6 trang 91 Toán lớp 10 Tập 1: Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} có cùng phương hay không?

b) Ngược lại, nếu hai vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} cùng phương thì ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

Lời giải:

a) Giá của vector \overrightarrow{AB} là đường thẳng AB, giá của vector \overrightarrow{AC} là đường thẳng AC.

Do A, B, C thẳng hàng nên đường thẳng AB trùng với đường thẳng AC.

Do đó hai vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} cùng phương.

b) Giá của vector \overrightarrow{AB} là đường thẳng AB, giá của vector \overrightarrow{AC} là đường thẳng AC.

Hai vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} cùng phương nên giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

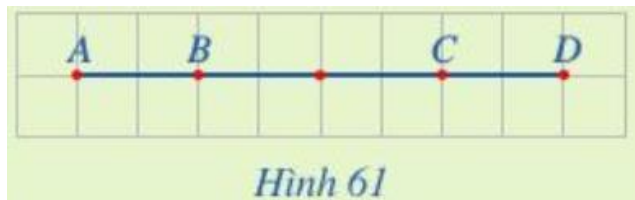
Mà AB và AC có điểm chung là A nên AB trùng AC.

Do đó A, B, C thẳng hàng.

Luyện tập 4 trang 91 Toán lớp 10 Tập 1: Ở Hình 61, tìm k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$,

b) $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$.



Hình 61

Lời giải:

a) Hai vector \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{AD} là hai vector cùng hướng và $AC = \frac{3}{4}AD$ nên $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Vậy $k = \frac{3}{4}$.

b) Hai vector \overrightarrow{BD} và \overrightarrow{DC} là hai vector ngược hướng và $BD = 3DC$ nên $\overrightarrow{BD} = -3\overrightarrow{DC}$.

Vậy $k = -3$.

B. Bài tập

Bài 1 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình thang MNPQ, $MN \parallel PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

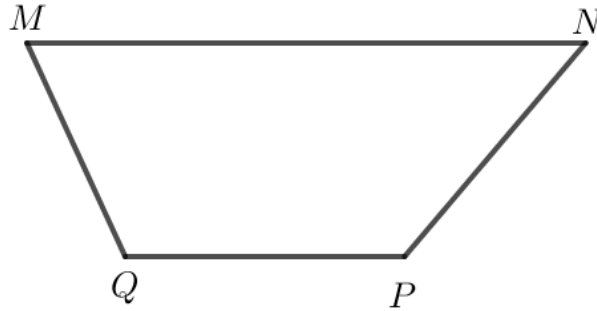
A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$;

B. $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$;

C. $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$;

D. $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$.

Lời giải:



Ta thấy hai vectơ \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{PQ} là hai vectơ ngược hướng và $MN = 2PQ$ nên $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$.

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Bài 2 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.

a) Xác định điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

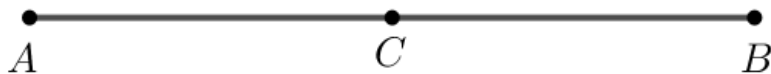
b) Xác định điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải:

a) Ta thấy $\frac{1}{2} > 0$ nên hai vectơ \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{AB} cùng hướng.

Khi đó $|\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ hay $AC = \frac{1}{2}AB$ và A, B, C thẳng hàng.

Do đó C là trung điểm của AB.



b) Ta thấy $-\frac{1}{2} < 0$ nên hai vectơ \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{AB} ngược hướng.

Khi đó $|\overrightarrow{AD}| = \left| -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right|$ hay $AD = \frac{1}{2}AB$ và A, B, D thẳng hàng.

Do đó D nằm khác phía với B so với điểm A sao cho $AD = \frac{1}{2}AB$.

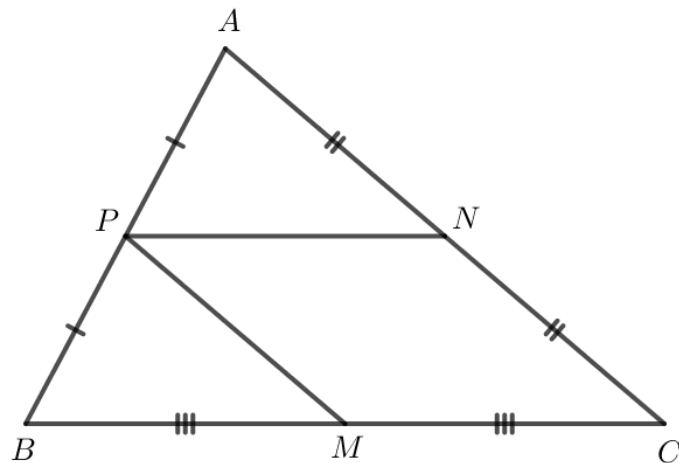


Bài 3 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$;

b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải:



a) Tam giác ABC có P là trung điểm của AB; N là trung điểm của AC nên PN là đường trung bình của tam giác ABC.

Do đó $PN \parallel BC$ và $PN = \frac{1}{2}BC$.

Ta thấy hai vector \overrightarrow{PN} và \overrightarrow{BC} cùng hướng và $PN = \frac{1}{2}BC$ nên $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN}$.

Vậy $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$.

b) Tam giác ABC có P là trung điểm của AB; M là trung điểm của BC nên PM là đường trung bình của tam giác ABC.

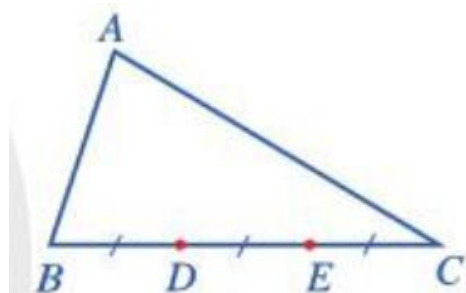
Do đó $MP \parallel CA$ và $MP = \frac{1}{2}CA$.

Ta thấy hai vector \overrightarrow{MP} và \overrightarrow{CA} cùng hướng và $MP = \frac{1}{2}CA$ nên $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ hay $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{MP}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$.

Vậy $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

Bài 4 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thỏa mãn $BD = DE = EC$ (Hình 62). Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo \vec{a}, \vec{b} .



Hình 62

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$;

Do $BD = DE = EC$ và $BD + DE + EC = BC$ nên $BD = DE = EC = \frac{1}{3}BC$.

Hai vector \overrightarrow{BD} và \overrightarrow{BC} cùng hướng và $BD = \frac{1}{3}BC$ nên

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}.$$

Hai vector \overrightarrow{BE} và \overrightarrow{BD} cùng hướng và $BE = 2BD$ nên

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2\vec{b} - 2\vec{a}}{3}.$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \text{ nên } \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} \text{ nên } \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{2\vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}.$$

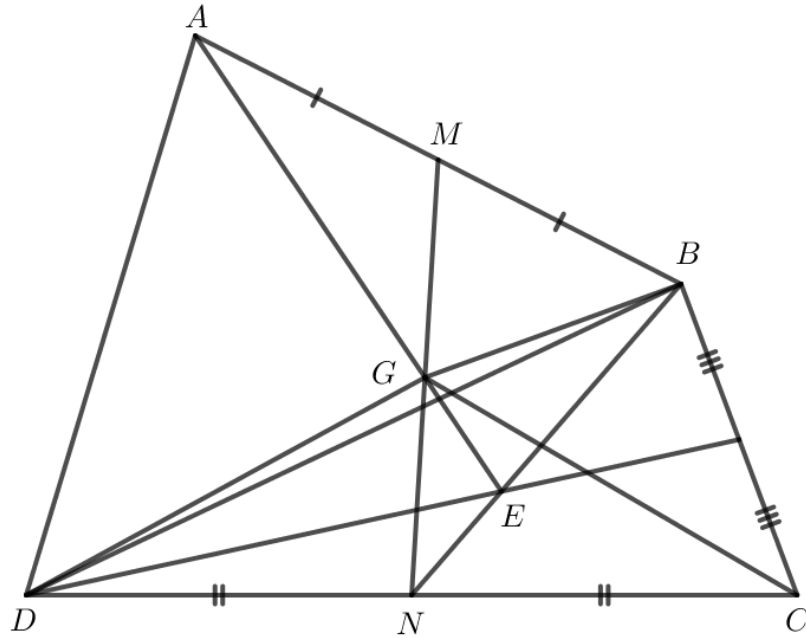
Bài 5 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tứ giác ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, E là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$;

b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$;

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

Lời giải:



a) Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$ (1).

Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$ (2).

Do G là trung điểm của MN nên $GM = GN$.

Ta thấy hai vector \overrightarrow{GM} và \overrightarrow{GN} ngược hướng và $GM = GN$ nên $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GN}$.

Do đó $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = -\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GD}$.

$= 4\overrightarrow{EG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

$= 4\overrightarrow{EG}$

Vậy $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$.

b) Do E là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$.

c) Do $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$ nên hai vector \overrightarrow{EA} và \overrightarrow{EG} cùng hướng.

Mà $4 > 0$ nên G nằm giữa A và E.

Do đó $|\overrightarrow{EA}| = 4|\overrightarrow{EG}|$ hay $EA = 4EG$.

$$\Rightarrow EG = \frac{1}{4}EA$$

$$\Rightarrow AG = \frac{3}{4}EA.$$

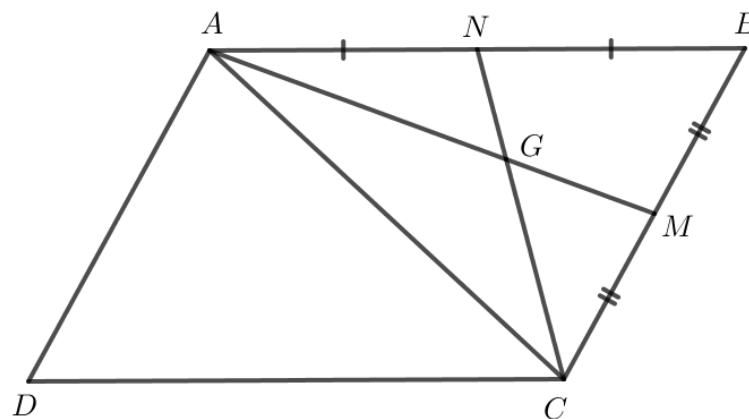
Ta thấy hai vector \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AE} cùng hướng và $AG = \frac{3}{4}EA$ nên $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

Bài 6 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình bình hành ABCD. Đặt

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biểu thị các vector

\overrightarrow{AG} , \overrightarrow{CG} theo hai vector \vec{a} , \vec{b} .

Lời giải:



Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AB.

Do ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Do M là trung điểm của BC nên $BM = \frac{1}{2}BC$.

Hai vector \overrightarrow{BM} và \overrightarrow{BC} cùng hướng và $BM = \frac{1}{2}BC$ nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{b}}{2}$.

Do N là trung điểm của AB nên $NB = \frac{1}{2}AB$.

Hai vector \overrightarrow{BN} và \overrightarrow{AB} ngược hướng và $NB = \frac{1}{2}AB$ nên $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{-\vec{a}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = -\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CN}$.

Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ và $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\left(-\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right) = -\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$.

Bài 7 trang 92 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, H thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vector \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{DH} , \overrightarrow{HE} theo hai vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} .

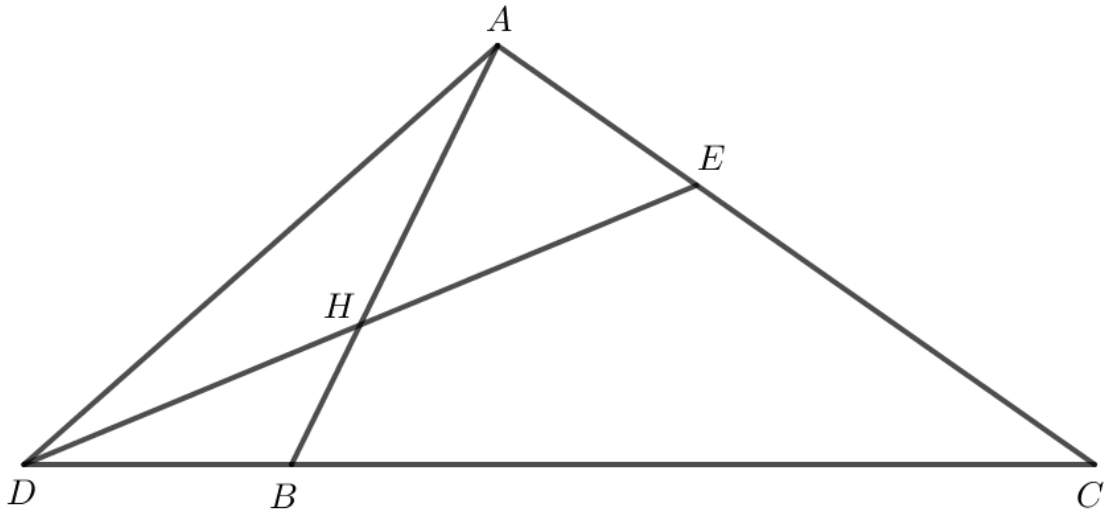
b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

Lời giải:

Vì $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ nên \overrightarrow{DB} và \overrightarrow{BC} cùng hướng và $DB = \frac{1}{3}BC$.

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nên \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AC} cùng hướng và $AE = \frac{1}{3}AC$.

$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nên \overrightarrow{AH} , \overrightarrow{AB} cùng hướng và $AH = \frac{2}{3}AB$.



a) Do $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} - \frac{\overrightarrow{AC}}{3}$

.

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AB}}{3} - \frac{\overrightarrow{AC}}{3} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ phần a ta thấy $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HE} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do đó D, H, E thẳng hàng và H là trung điểm của DE.