

Bài tập cuối chương 4

A - Trắc nghiệm

Bài 4.27 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây có cùng phương?

A. $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$.

B. $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$ và $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$.

C. $\vec{i} = (0; 1)$ và $\vec{j} = (1; 0)$.

D. $\vec{c} = (1; 3)$ và $\vec{d} = (2; -6)$.

Lời giải

+) Xét hai vector $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$:

Ta có: $\frac{2}{\frac{1}{2}} \neq \frac{3}{6}$ suy ra hai vector \vec{u} và \vec{v} không cùng phương.

Do đó A sai.

+) Xét hai vector $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$ và $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$:

Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ suy ra hai vector \vec{a} và \vec{b} cùng phương.

Do đó B đúng.

+) Xét hai vector $\vec{i} = (0; 1)$ và $\vec{j} = (1; 0)$:

Đây là hai vector đơn vị nên chúng vuông góc với nhau suy ra hai vector \vec{i} và \vec{j} không cùng phương.

Do đó C sai.

+) Xét hai vector $\vec{c} = (1; 3)$ và $\vec{d} = (2; -6)$:

Ta có: $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{-6}$ suy ra hai vector \vec{c} và \vec{d} không cùng phương.

Do đó D sai.

Vậy ta chọn phương án B.

Bài 4.28 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = (4; 6)$.

B. $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (-1; 1)$.

C. $\vec{z} = (a; b)$ và $\vec{t} = (-b; a)$.

D. $\vec{n} = (1; 1)$ và $\vec{k} = (2; 0)$.

Lời giải

+) Xét hai vector $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = (4; 6)$:

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 8 + 18 = 26 \neq 0$.

Suy ra hai vector \vec{u}, \vec{v} không vuông góc. Do đó A sai.

+) Xét hai vector $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (-1; 1)$:

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 + (-1) = -2 \neq 0$.

Suy ra hai vector \vec{a}, \vec{b} không vuông góc với nhau. Do đó B sai.

+) Xét hai vector $\vec{z} = (a; b)$ và $\vec{t} = (-b; a)$:

Ta có: $\vec{z} \cdot \vec{t} = a \cdot (-b) + b \cdot a = -ab + ab = 0$.

Suy ra hai vector \vec{z}, \vec{t} vuông góc với nhau. Do đó C đúng.

+) Xét hai vector $\vec{n} = (1; 1)$ và $\vec{k} = (2; 0)$:

Ta có: $\vec{n} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2 + 0 = 2 \neq 0$.

Suy ra hai vector \vec{n}, \vec{k} không vuông góc. Do đó D sai.

Vậy ta chọn phương án C.

Bài 4.29 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ, vector nào sau đây có độ dài bằng 1?

A. $\vec{a} = (1; 1)$.

B. $\vec{b} = (1; -1)$.

C. $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

D. $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Lời giải

+) Xét vector $\vec{a} = (1; 1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Do đó A sai.

+) Xét vector $\vec{b} = (1; -1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Do đó B sai.

+) Xét vector $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} \neq 1$. Do đó C sai.

+) Xét vector $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Do đó D đúng.

Vậy ta chọn phương án D.

Bài 4.30 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Góc giữa vector $\vec{a} = (1; -1)$ và vector $\vec{b} = (-2; 0)$ có số đo bằng:

A. 90° .

B. 0° .

C. 135° .

D. 45° .

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (-2; 0)$

Suy ra:

$$+) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = -2;$$

$$+) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$+) |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2.$$

$$\text{Do đó: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Vậy ta chọn phương án C.

Bài 4.31 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}).$

B. $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}).$

D. $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}.$

Lời giải

+) Xét phương án A:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]\vec{c};$$

$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a}[|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{c})].$$

Suy ra $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}).$ Do đó A sai.

+) Xét phương án B:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Suy ra $(\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$ chỉ đúng khi $\cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Do đó B sai.

+) Xét phương án C:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \neq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Do đó C sai.

+) Xét phương án D:

Theo tính chất của tích vô hướng ta có:

$$\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (tính chất phân phối đối với phép trừ).}$$

Vậy ta chọn phương án D.

Bài 4.32 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Khẳng định nào sau đây là đúng?

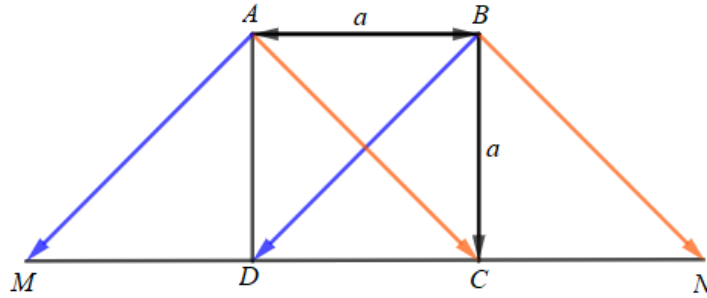
A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$.

B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Lời giải



ABCD là hình vuông cạnh a nên $AB = BC = CD = DA = a$;

$$\text{Và } BD = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Lấy điểm M và N sao cho ABDM, ABNC là các hình bình hành.

+) Vì ABDM là hình bình hành nên $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \text{BAM} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

Do đó A sai.

+) Vì ABNC là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BN}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}) = \text{CBN} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = AC \cdot BC \cdot \cos \text{CBF} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

Do đó B đúng.

$$\text{+) Ta có } AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Do đó C sai.

$$\text{+) Ta có: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = BA \cdot BD \cdot \cos \text{ABD} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

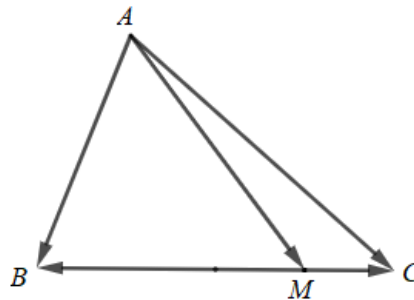
Do đó D sai.

B – Tự luận

Bài 4.33 trang 71 SGK Toán 10 tập 1: Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

- a) Tìm mối liên hệ giữa hai vector \overrightarrow{MB} và \overrightarrow{MC} .
- b) Biểu thị vector \overrightarrow{AM} theo hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

Lời giải



- a) Vì điểm M nằm trên cạnh BC nên hai vector \overrightarrow{MB} và \overrightarrow{MC} là hai vector ngược hướng.

Lại có $MB = 3MC$ nên $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

Vậy $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

- b) Theo câu a: $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \quad (\text{quy tắc ba điểm})$$

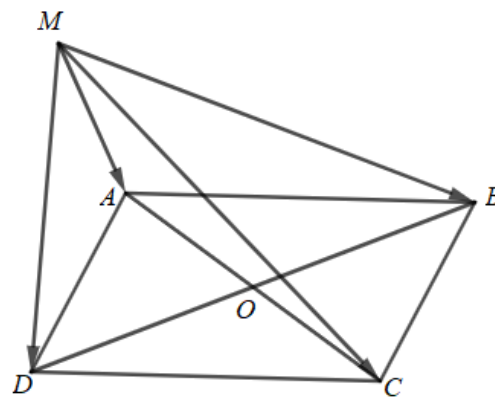
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bài 4.34 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Suy ra O là trung điểm của AC và BD.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

Ta có:

$$+) \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{MO} \quad (\text{Vì}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0})$$

$$+) \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{MO} \quad (\text{Vì}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0})$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Bài 4.35 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2; 1)$, $B(-2; 5)$ và $C(-5; 2)$.

a) Tìm tọa độ của các vector \overrightarrow{BA} và \overrightarrow{BC} .

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác BCAD là một hình bình hành.

Lời giải

a) Với $A(2; 1)$, $B(-2; 5)$ và $C(-5; 2)$ ta có: $\overrightarrow{BA} = (4; -4)$ và $\overrightarrow{BC} = (-3; -3)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow BA \perp BC$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại B.}$$

$$\text{Do } \overrightarrow{BA} = (4; -4) \Rightarrow BA = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3; -3) \Rightarrow BC = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Với } A(2; 1) \text{ và } C(-5; 2) \text{ ta có: } \overrightarrow{AC} = (-7; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Diện tích tam giác vuông ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Chu vi tam giác ABC là:

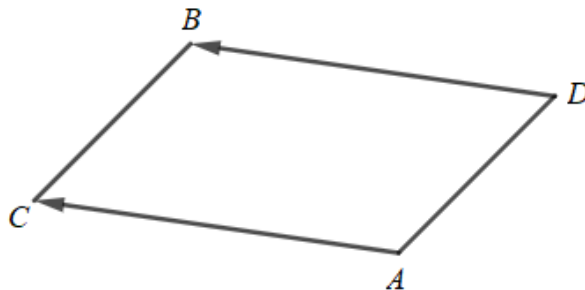
$$AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ (đơn vị độ dài)}$$

c) Với A(2; 1), B(-2; 5) và C(-5; 2) ta có tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$\begin{cases} x_G = \frac{2 + (-2) + (-5)}{3} = \frac{-5}{3} \\ y_G = \frac{1 + 5 + 2}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{-5}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là: $G\left(\frac{-5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

d)



Để tứ giác BCAD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

Giả sử D(x; y) là điểm cần tìm.

Với A(2; 1), B(-2; 5) và C(-5; 2) ta có: $\overrightarrow{AC} = (-7; 1)$ và $\overrightarrow{DB} = (-2 - x; 5 - y)$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x = -7 \\ 5 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(5; 4).$$

Vậy với D(5;4) thì tứ giác BCAD là một hình bình hành.

Bài 4.36 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; -2)$ và $D(6; 5)$.

- a) Tìm tọa độ của các vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} .
- b) Hãy giải thích tại sao các vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} cùng phương.
- c) Giả sử E là điểm có tọa độ $(a; 1)$. Tìm a để vector \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{BE} cùng phương.
- d) Với a tìm được, hãy biểu thị vector \overrightarrow{AE} theo các vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

Lời giải

a) Với $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; -2)$ và $D(6; 5)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{CD} = (7; 7)$.

b) Xét hai vector $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{CD} = (7; 7)$:

Ta có: $\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ nên hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} cùng phương.

Vậy hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} cùng phương.

c) Với $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; -2)$ và $E(a; 1)$ ta có: $\overrightarrow{AC} = (-2; -4)$ và $\overrightarrow{BE} = (a - 3; -3)$

Hai vector \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{BE} cùng phương khi và chỉ khi $\frac{a - 3}{-2} = \frac{-3}{-4}$

$$\Leftrightarrow (-4) \cdot (a - 3) = (-3) \cdot (-2)$$

$$\Leftrightarrow -4a + 12 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4a = 6$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Vậy $a = \frac{3}{2}$ thì hai vector \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{BE} cùng phương.

d) Với $a = \frac{3}{2} \Rightarrow E\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

Với $A(1; 2)$ và $E\left(\frac{3}{2}; 1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; -4)$

Tồn tại hai số thực m và n thỏa mãn: $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = m \cdot 2 + n \cdot (-2) \\ -1 = m \cdot 2 + n \cdot (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2n = \frac{1}{2} \\ 2m - 4n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bài 4.37 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Cho vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

(hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector \vec{a} .

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0 (\vec{a} \neq \vec{0})$ nên $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ là vector cùng hướng với vector \vec{a} .

Độ dài của vector $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ là: $\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$

Vậy vector $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector \vec{a} .

Bài 4.38 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ với $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$

. Xét một hệ trục Oxy với các vector đơn vị $\vec{i} = \vec{a}, \vec{j} = \vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vector \vec{u} có tọa độ là $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$.

b) $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{b}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{i} = \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = (1; 0)$

Và $\vec{j} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = (0; 1)$

Gọi tọa độ của vector $\vec{u} = (x; y)$

Khi đó, ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = 1.x + 0.y = x;$$

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = 0.x + 1.y = y;$$

Suy ra $\vec{u} = (x; y) = (\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$

Vậy tọa độ của vectơ \vec{u} là $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$.

b) Ta có: $(\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = x \cdot \vec{a}$ mà $\vec{a} = (1; 0)$ nên $(\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = (x; 0)$

$(\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = y \cdot \vec{b}$ mà $\vec{b} = (0; 1)$ nên $(\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = (0; y)$

Suy ra $(\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = (x; y)$

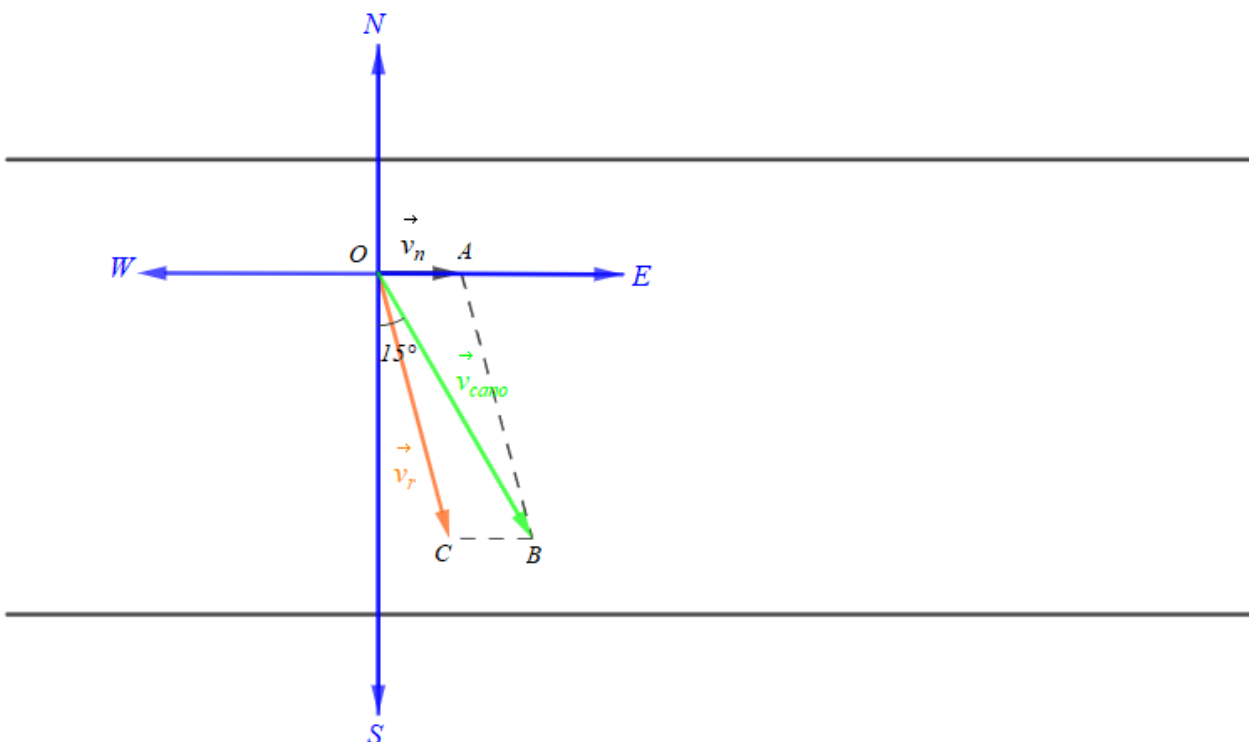
Lại có $\vec{u} = (x; y)$

Do đó $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Vậy $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Bài 4.39 trang 72 SGK Toán 10 tập 1: Trên sông, một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng $S15^\circ E$ (xem chú thích ở Bài 3.8, trang 42) với vận tốc có độ lớn bằng 20km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.

Lời giải



Ta mô tả bài toán bằng hình vẽ trên, trong đó:

\overrightarrow{OE} là hướng đông, \overrightarrow{OS} là hướng nam, \overrightarrow{OW} là hướng tây, \overrightarrow{ON} là hướng bắc;

\overrightarrow{OA} biểu diễn vector vận tốc của dòng nước \vec{v}_n và $OA = |\vec{v}_n| = 3$;

\overrightarrow{OB} là hướng S15°E biểu diễn vector vận tốc chuyển động của ca nô \vec{v}_{cano} tạo với \overrightarrow{OS} một góc 15° và $OB = |\vec{v}_{cano}| = 20$;

Lấy điểm C sao cho OABC là hình bình hành. Khi đó \overrightarrow{OC} biểu diễn vector vận tốc riêng \vec{v}_r của ca nô.

Vì \overrightarrow{OB} tạo với \overrightarrow{OS} một góc 15° nên \overrightarrow{OB} tạo với \overrightarrow{OA} một góc là $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ tức là $AOB = 75^\circ$

Xét tam giác OAB có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos AOB$

$$\Rightarrow AB^2 = 3^2 + 20^2 - 2.3.20.\cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow AB \approx 19,44$$

Vì OABC là hình bình hành nên $OC = AB \approx 19,44$ (tính chất hình bình hành)

$$\text{Suy ra } \left| \vec{v}_r \right| = \left| \overrightarrow{OC} \right| = OC \approx 19,44 \text{ (km/h)}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô khoảng 19,44 km/h.