Các bài toán về vi phân đạo hàm cấp cao và ý nghĩa của đạo hàm

1. Lý thuyết

a) Vi phân

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a ; b) và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a;b)$.

- Tích $f'(x).\Delta x$ (hay $y.\Delta x$) được gọi là vi phân của hàm số y = f(x) tại x, ứng với số gia Δx, kí hiệu là df(x) hay dy.

Vậy ta có: $dy = y'.\Delta x$ hoặc $df(x) = f'(x).\Delta x$.

b) Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm f'(x). Hàm số f'(x) còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số f(x). Nếu hàm số f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số f(x), kí hiệu là y'' hay f''(x). Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số f(x), kí hiệu là y''' hay f'''(x). Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp (n – 1) là đạo hàm cấp (n) của hàm số f(x), kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ $(n \in N, n > 1)$.

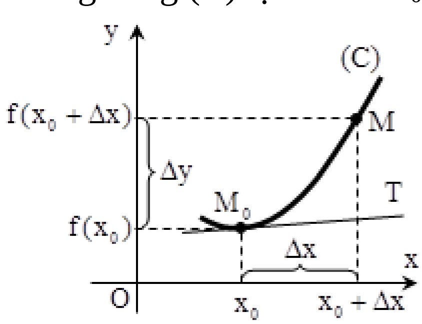
c) Ý nghĩa của đạo hàm

- Ý nghĩa hình học

+ Tiếp tuyến của đường cong phẳng:

Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C), M là điểm di động trên (C). Khi đó M_0 M là một cát tuyến của (C).

Định nghĩa: Nếu cát tuyến M_0 M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0 . Điểm M_0 được gọi là tiếp điểm.



+ Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và có đạo hàm tại $x_0 \in (a;\ b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.

Định lí 1: Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm M_0 (x_0; f(x_0))

Phương trình tiếp tuyến:

Định lí 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm M_0 (x_0; f(x_0)) là: y = f'(x_0).(x – x_0) + f(x_0)

- Ý nghĩa vật lí

Vận tốc tức thời: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: s = f(t), với f(t) là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số s = f(t) tại t_0 .

v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)

Cường độ tức thời: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình: Q = f(t), với f(t) là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số Q = f(t) tại t_0 .

I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)

d) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: s = f(t) với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời a của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số
s = f(t) tại t là a(t) = f''(t) .

2. Các dạng bài tập

Dạng 1: Tìm vi phân của hàm số

Phương pháp giải:

Áp dụng định nghĩa để tìm vi phân của hàm số y = f(x) là: dy = f'(x)dx

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm vi phân của hàm số

a) $y = x^2 + 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}.$

b) $y = \sqrt{x^3 + x}.$

c) $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x+1}$.

Lời giải

a) $y=x^2+3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$.

Ta có: $dy=\left(x^2+3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)'dx=\left(2x+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$.

b) $y=\sqrt{x^3+x}$.

Ta có : $dy=\left(\sqrt{x^3+x}\right)'dx=\dfrac{\left(x^3+x\right)'}{2\sqrt{x^3+x}}dx=\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}dx$.

c) $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x+1}$.

Ta có $dy=\left(\dfrac{x^2-2x+5}{x+1}\right)'dx=\dfrac{(2x-2)(x+1)-\left(x^2-2x+5\right)}{(x+1)^2}dx=\dfrac{x^2+2x-7}{\sqrt{x^2+3}}dx$

.

Ví dụ 2: Tìm vi phân của hàm số

a) y = cos 3x.sin 2x.

b) $y=f(x)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$

Lời giải

a) y = cos 3x.sin 2x.

y’ = (cos 3x)’sin 2x + cos 3x(sin 2x)’

= – 3sin 3x.sin 2x + 2cos 3x.cos 2x

Suy ra dy = (– 3sin3x.sin2x + 2 cos3x.cos2x)dx

b) $y=f(x)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)$

Suy ra $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)dx$

Dạng 2: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số

Phương pháp giải:

Tính đạo hàm cấp 2 là đạo hàm của đạo hàm cấp 1

Tính đạo hàm cấp 3 là đạo hàm của đạo hàm cấp 2

Tương tự: Tính đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp n – 1.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra:

a) $y = x\sin 2x$, (y''')

b) $y = \cos^2 x$, (y''')

c) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

Lời giải

a) $y = x\sin 2x$, (y''')

Ta có $y' = x'\sin 2x + x.(\sin 2x)' = \sin 2x + 2x\cos 2x$

$y'' = (\sin 2x)' + (2x)'\cos 2x + 2x(\cos 2x)' = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$

$y''' = 4(\cos 2x)' - (4x)\sin 2x - 4x(\sin 2x)'$

$= -8\sin 2x - 4\sin 2x - 8\cos 2x$

$= -12\sin 2x - 8\cos 2x$

b) $y = \cos^2 x$, (y''')

Ta có: $y = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$

$y' = -\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x$

$y''' = 4\sin 2x$

c) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

$$y = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{-7\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$$

$$y''' = \frac{14\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6} = \frac{42}{(x+2)^4}$$

$$y^{(4)} = \frac{-42\left[(x+2)^4\right]'}{(x+2)^8} = \frac{-168}{(x+2)^5}$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a) $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1$

b) $y = \frac{1}{x+3}$

Lời giải

a) $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 4x^3 + 12x^2 - 6x$

$y'' = 12x^2 + 24x - 6$

$y''' = 24x + 24$

$y^{(4)} = 24$

Suy ra $y^{(5)} = 0, \dots y^{(n)} = 0$.

b) $y = \frac{1}{x+3}$

Ta có: $y' = \frac{-1}{(x+3)^2} = (-1)\frac{1!}{(x+3)^2}$;

$$y'' = (-1)^2.\frac{1.2}{(x+3)^3} = (-1)^2.\frac{2!}{(x+3)^3}$$

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in N^*$.

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

* n = 1: (1) hiển nhiên đúng.

* Giả sử (1) đúng với $n = k \ge 1$, nghĩa là ta có: $y^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} \quad (2)$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = \left[y^{(k)}\right]' = \left[(-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$$= (-1)^{k+1}.\frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}} = (-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{(x+3)^{n+1}}, \forall n \in N^*$.

Dạng 3: Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2

Phương pháp giải:

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: s = f(t) với f(t) là hàm số có đạo hàm.

Để tính gia tốc tức thời a của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số
s = f(t) tại t:

- Đạo hàm f(t) đến cấp 2

- Gia tốc a(t) = f''(t)

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình: s = $t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi t = 3.

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại t = 3s là s''(3)

Ta có: s'(t) = $3t^2 - 6t + 5$

s''(t) = 6t – 6

Vậy s''(3) = 6.3 – 6 = 12 m/s^2.

Ví dụ 2. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 – 2t^2 + 4t + 1$ trong đó t là giây, s là mét. Tính gia tốc của chuyển động khi t = 2 là:

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại t = 2s là s"(2)

Ta có: $s'(t) = 3t^2 – 6t + 4$

$s''(t) = 6t – 6$

Vậy $s''(2) = 6.2 – 6 = 6$ m/s^2.

Dạng 4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm của đạo hàm

Phương pháp giải:

Lưu ý hai kết quả sau để áp dụng:

- Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình s = s(t) là $v(t_0) = s'(t_0)$.

- Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng Q = Q(t) là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số f(t) tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 5.

Lời giải

a) Ta có: f'(t) = 2t + 4.

Vậy $f'(t_0) = 2t_0 + 4$.

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 5 là v = f'(5) = 2.5 + 4 = 14 (m/s).

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số Q = 6t + 5 (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm t = 10.

Lời giải

Vì Q'(t) = 6 nên cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm t = 10 là I = Q'(10) = 6.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hàm số y = f(x) = $(x – 1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f(x)?

A. dy = 2(x – 1) dx **B.** dy = $(x – 1)^2$dx

C. dy = 2(x – 1) **D.** dy = 2(x – 1) dx.

Câu 2. Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **B.** $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

C. $df(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **D.** $df(x)=\dfrac{-\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\dfrac{dx}{\left(x-1\right)^2}$. **B.** $dy=\dfrac{3dx}{\left(x-1\right)^2}$. **C.** $dy=\dfrac{-3dx}{\left(x-1\right)^2}$. **D.** $dy=-\dfrac{dx}{\left(x-1\right)^2}$.

Câu 4. Cho hàm số f(x) = x^3 + 2x, giá trị của f’’(1) bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$. Tính f’’(– 1).

A. $-\dfrac{8}{27}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $-\dfrac{4}{27}$.

Câu 6. Cho hàm số f(x) = cos2x. Tính $P=f''\left(\pi\right)$.

A. P = 4. **B.** P = 0. **C.** P = – 4. **D.** P = – 1.

Câu 7. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$. Phương trình y’’ = 0 có nghiệm là:

A. x = -4. **B.** x = – 2. **C.** x = 0. **D.** x = 2.

Câu 8. Cho hàm số y = sin 2x. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $y^2 – (y')^2 = 4$. **B.** 4y + y’’ = 0.

C. 4y – y’’ = 0. **D.** y = y’.tan 2x.

Câu 9. Cho hàm số y = $\sin^2$x. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2y' + y'' = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. 2y + y’. tan x = 0.

C. 4y- y’’ = 2.

D. 4 y’ + y’’’ = 0.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính f’’’(1).

A. 3. **B.** -3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Câu 11. Đạo hàm cấp 21 của hàm số f(x) = cos (x + a) là

A. $f^{(21)}(x) = -\cos\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $f^{(21)}(x) = -\sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $f^{(21)}(x) = \cos\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $f^{(21)}(x) = \sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 12. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: s = f(t) = t^2 + t + 6 (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 2 là

A. 5 (m/s). **B**. 6 (m/s). **C**. 7 (m/s). **D**. 4 (m/s).

Câu 13. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Sau bao lâu thì chuyển động dừng lại?

A. 1 (s). **B**. 3 (s). **C**. 2 (s). **D**. 4 (s).

Câu 14. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 3t^2 + 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm t = 1.

A. 5 (A). **B**. 12 (A). **C**. 7 (A). **D**. 4 (A).

Câu 15. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây)là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24 (m/s). **B.** 108 (m/s). **C.** 64 (m/s). **D.** 18 (m/s).

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	C	A	A	C	B	B	D	A	C	A	C	B	A