

Bài 3. Tổ hợp

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Ví dụ: Bạn Mai có 4 chiếc váy màu hồng, màu đỏ, màu trắng, màu tím. Mai muốn chọn 3 trong 4 chiếc váy để mang đi du lịch. Hãy viết các tổ hợp 3 của 4 chiếc áo váy đó.

Hướng dẫn giải

Các tổ hợp chập 3 của 4 chiếc váy là :

Hồng – đỏ – trắng ; Hồng – đỏ – tím ; Đỏ – trắng – tím ; Hồng – trắng – tím.

Vậy ta có 4 tổ hợp chập 3 của 4 chiếc váy là : Hồng – đỏ – trắng ; Hồng – đỏ – tím ; Đỏ – trắng – tím ; Hồng – trắng – tím.

2. Số các tổ hợp

Nhận xét : Một tổ hợp chập k của n phần tử nhiều gấp k! lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu là C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $(1 \leq k \leq n)$. Ta có : $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$

Quy ước $0! = 1$; $C_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (với $0 \leq k \leq n$).

Ví dụ: Một tổ có 8 người, bạn tổ trưởng muốn cử ra 4 bạn đi tập văn nghệ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn 4 bạn trong 8 bạn đi trực nhật là một tổ hợp chập 4 của 8.

Ta có $C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!4!} = 70$.

Vậy có 70 cách chọn 4 trong 8 bạn đi tập văn nghệ.

3. Tính chất của các số C_n^k

Ta có hai đẳng thức sau : $C_n^k = C_n^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$) và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ ($1 \leq k < n$).

Ví dụ: Ta có : $C_{10}^6 = C_{10}^{10-6} = 210$; $C_{10-1}^{6-1} + C_{10-1}^6 = C_{10}^6 = 210$.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Một túi có 7 quả bóng xanh, 3 quả bóng vàng và 14 quả bóng đỏ. Lấy ngẫu nhiên ba quả bóng trong túi. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy 3 quả bóng từ trong túi sao cho 3 quả bóng cùng màu.

Hướng dẫn giải

Để lấy 3 quả bóng cùng màu thì ta thực hiện một trong ba hành động sau:

- Lấy 3 quả bóng màu xanh trong 7 quả bóng xanh, ta có $C_7^3 = 35$ cách lấy.
- Lấy 3 quả bóng màu vàng trong 3 quả bóng vàng, ta có $C_3^3 = 1$ cách lấy.
- Lấy 3 quả bóng màu đỏ trong 14 quả bóng đỏ, ta có $C_{14}^3 = 364$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng, ta có $35 + 1 + 364 = 400$ cách để lấy được 3 quả bóng cùng màu.

Vậy có 400 cách để lấy được 3 quả bóng cùng màu.

Bài 2. Tính $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} - C_{31}^{20}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} = C_{31}^{20}$ nên $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} - C_{31}^{20} = C_{31}^{20} - C_{31}^{20} = 0$.

Bài 3. Bác Dũng có 8 người bạn. Bác Dũng muốn mời 4 trong 8 người bạn đó đi câu cá vào cuối tuần. Nhưng trong 8 người bạn đó, có 2 người bạn không thích câu cá nên không đi. Vậy số cách chọn nhóm 4 người để đi câu cùng bác Dũng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Bác Dũng có 8 người bạn nhưng có hai người không đi nên số người có thể đi câu cùng bác Dũng là $8 - 2 = 6$ người.

Khi đó, bác Dũng chọn 4 người trong 6 người để đi câu cùng thì số cách chọn là tổ hợp chập 4 của 6 người bạn.

Ta có $C_6^4 = 15$.

\Rightarrow Bác Dũng có 15 cách để lựa chọn 4 người bạn trong 6 người bạn đi câu cá cùng.

Vậy bác Dũng có 15 cách để lựa chọn 4 người bạn đi câu cá cùng.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Từ 6 điểm phân biệt thuộc đường thẳng Δ và một điểm không thuộc đường thẳng Δ ta có thể tạo được tất cả bao nhiêu tam giác?

A. 210;

B. 30;

C. 15;

D. 35;

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Ta lấy 2 điểm trong 6 điểm trên đường thẳng Δ kết hợp với 1 điểm không thuộc Δ tạo ra một tam giác, có $C_6^2 = 15$ cách lấy ra 2 điểm thuộc Δ

Vậy số tam giác được lập theo yêu cầu bài toán là: 15 tam giác.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$.

A. 0;

B. 1;

C. 2;

D. 3.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Điều kiện $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!2!} = 15 - 5n$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n - \frac{3(n-1)n}{2} = 15 - 5n$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 5 \text{ hoặc } n = 6.$$

Vậy có 2 giá trị của n thoả mãn.

Câu 3. Trong hộp có 5 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh kích thước giống nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu từ hộp. Hỏi có bao nhiêu khả năng lấy được số quả cầu đỏ nhiều hơn số quả cầu xanh.

A. 245;

B. 3 480;

C. 246;

D. 3 360.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Vì lấy quả cầu đỏ nhiều hơn quả cầu xanh nên ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Lấy được 3 quả cầu đỏ, 2 quả cầu xanh: số cách lấy là $C_5^3 \cdot C_7^2 = 210$

Trường hợp 2. Lấy được 4 quả cầu đỏ, 1 quả cầu xanh: số cách lấy là $C_5^4 \cdot C_7^1 = 35$

Trường hợp 3. Lấy được 5 quả cầu đỏ, 0 quả cầu xanh: số cách lấy là $C_5^5 \cdot C_7^0 = 1$

Áp dụng quy tắc cộng ta có số cách lấy là: $210 + 35 + 1 = 246$.