Bài tập Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A. 24

B. 120

C. 60

D. 16

Lời giải:

Xếp bạn Chi ngồi giữa có 1 cách.

Số cách xếp 4 bạn sinh An, Bình, Dũng, Lệ vào 4 chỗ còn lại là một hoán vị của 4 phần tử nên có có $4! = 24$ cách.

Vậy có $1.24 = 24$ cách xếp.

Chọn đáp án A

Bài 2: Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600

B. 725760

C.103680

D.518400

Lời giải:

Số các hoán vị về màu bi khi xếp thành dãy là 3!

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành dãy là 3!

Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành dãy là 4!

Số cách xếp 5 viên bi xanh khác nhau thành dãy là 5!

⇒ Số cách xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là 3!. 3!. 4!. 5! = 103680 cách.

Chọn đáp án C

Bài 3: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 4 người ngồi vào 6 chỗ trên một bàn dài?

A.15

B. 720

C. 30

D. 360

Lời giải:

Số cách xếp khác nhau cho 4 người ngồi vào 6 chỗ trên một bàn dài là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.

Suy ra có $A_6^4 = 360$ cách.

Chọn đáp án D

Bài 4: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ bí thư, phó bí thư, ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210

B. 200

C. 180

D. 150

Lời giải:

Số cách chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ bí thư, phó bí thư, ủy viên thường vụ từ 7 người là số các chỉnh hợp chập ba của bảy phần tử.

Vậy có $A_7^3 = 210$.

Chọn đáp án A

Bài 5: Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A.9880

B. 59280

C. 2300

D. 455

Lời giải:

Nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ - công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).

Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $C_{40}^{3}=\frac{40!}{37!.3!}=9880.$

Chọn đáp án A

Bài 6: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 10

B. 30

C. 6

D. 60

Lời giải:

Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông.

Vậy số cách cắm bông chính là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa).

Như vậy, ta có $C_{5}^{3}=\frac{5!}{2!.3!}=10$ cách.

Chọn đáp án A

Bài 7: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 15

B. 20

C. 60

D. Một số khác.

Lời giải:

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng tạo thành một tam giác.

Lấy 3 điểm bất kỳ trong 6 điểm phân biệt thì số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 6 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_6^3 = 20$ tam giác.

Chọn đáp án B

Bài 8: Một tổ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp học sinh trong tổ thành một hàng dọc?

A. 4!.5!

B. 4!+5!

C. 9!

D. $A_9^4.A_9^5$

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp học sinh trong tổ thành hàng dọc sao cho học sinh nam và nữ đúng xen kẽ nhau?

A. 4!.5!

B. 4!+5!

C. 9!

D. $A_9^4 . A_9^5$

Lời giải:

- Mỗi cách xếp có 4 + 5 = 9 học sinh thành hàng dọc là một hoán vị của 9 học sinh đó. Vậy có tất cả 9! cách xếp. Chọn đáp án là C

Nhận xét: học sinh có thể nhầm lẫn xếp nam và nữ riêng nên cho kết quả 4!.5! (phương án A); hoặc vừa xếp nam và nữ riêng và sử dụng quy tắc cộng để cho kết quả 4!+5! (phương án B); hoặc chọn 4 học sinh nam trong 9 học sinh và 5 học sinh nữ trong 9 học sinh để cho kết quả $A_9^4 . A_9^5$ (phương án D)

b) Do số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam là 1 bạn nên để nam, nữ đứng xen kẽ thì nữ đứng trước.

- Nếu đánh số theo hàng dọc từ 1 đến 9 thì cần xếp 5 học nữ vào 5 vị trí lẻ nên có 5!cách xếp; và xếp 4 học sinh nam vào 4 vị trí chẵn nên có 4!cách xếp. Theo quy tắc nhân ta có, ta có 4!.5! Cách xếp 9 học sinh thành hàng dọc xen kẽ nam nữ.

Bài 9:

a) Từ tập A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau?

A. 4!

B. A_9^4

C. $9A_9^3$

D. C_9^4

b) Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau?

A. 4!

B. $9.A_9^3$

C. $9.C_9^3$

D. Một đáp án khác

Lời giải:

a) Mỗi số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo ra từ các chữ số của tập A là một chỉnh hợp chập 4 của 9 phần tử.

Vậy có A_9^4 số cần tìm. Chọn đáp án B

Nhận xét: học sinh có thể nhầm coi mỗi số có bốn chữ số là một hoán vị của 4 phần tử nên chọn kết quả là 4! (phương án A); hoặc là một tổ hợp tập 4 của 9 phần tử nên chọn kết quả C_9^4 (phương án D); hoặc suy luận có 9 cách chọn chữ số hàng nghìn và có C_9^3 cách chọn 3 chữ số còn lại nên có kết quả $9C_9^3$ (phương án C)

b) Gọi số có bốn chữ số khác nhau là

$\overline{abcd}$

Do a ∈ {1,2,3,4,5,6,7,8,9} nên có 9 cách chọn a.

Ứng với mỗi cách chọn a, còn 10 - 1 = 9 chữ số để viết

$\overline{bcd}$

(b, c, d có thể bằng 0), mỗi cách viết

$\overline{bcd}$

là một chỉnh hợp chập 3 của 9 chữ số, nên có A_9^3 số

$\overline{bcd}$

Theo quy tắc nhân, có $9A_9^3$ số cần tìm. Chọn đáp án là B.

Bài 10: Trong mặt phẳng có 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng

a) Số tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp các điểm đã cho là:

A. A_{18}^3

B. C_{18}^3

C. 6

D. $\frac{18!}{3}$

b) Số vecto có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập điểm đã cho là:

A. A_{18}^2

B. C_{18}^2

C. 6

D. $\frac{18!}{2}$

Lời giải:

- Chọn 3 điểm trong 18 điểm đã cho làm 3 đỉnh của một tam giác. Mỗi tam giác là một tổ hợp chập 3 của 18. Vì vậy số tam giác là C_{18}^{3} (chọn phương án B)

Nhận xét: học sinh có thể nhầm cho rằng mỗi tam giác là một chỉnh hợp chập 3 của 18, nên số tam giác là A_{18}^{3} (phương án A); hoặc suy luận một tam giác có 3 đỉnh nên 18 điểm cho ta $\frac{18}{3} = 6$ tam giác (phương án C); hoặc suy luận 18 điểm có 18! cách và mỗi tam giác có 3 đỉnh nên số tam giác là $\frac{18!}{3}$ cách (phương án D)

- Do

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}\ (A \neq B)$$

Nên mỗi vecto là một chỉnh hợp chập hai của 18.

Vì vậy, số vecto là A_{18}^{2}

Chọn đáp án A

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Có 5 bì thư khác nhau và có 8 con tem khác nhau. Chọn từ đó ra 3 bì thư và 3 con tem sau đó dán 3 con tem lên 3 bì thư đã chọn. Biết rằng một bì thư chỉ dán 1 con tem. Hỏi có bao nhiêu cách dán?

Lời giải:

Có 5 bì thư khác nhau, chọn 3 bì thư có C_{5}^{3} cách chọn

Có 8 tem khác nhau, chọn 3 con tem thì có C_8^3 cách chọn

Dán 3 con tem lên 3 bì thư thì có 3!cách dán khác nhau. Theo quy tắc nhân ta có $3!C_5^3.C_8^3$ cách dán 3 con tem lên 3 bì thư

Nhận xét: học sinh có thể nhầm lẫn: số cách chọn 3 bì thư là A_5^3, số cách chọn 3 con tem là A_8^3 hoặc không tính cách dán 3 con tem lên 3 bì thư dẫn đến có thể chọn các phương án A, B và C.

Bài 2: Giải phương trình $Ax^3 + C_x^{x-3} = 14x$ (x là ẩn số)

Lời giải:

Điều kiện x ∈ N và x ≥ 3, ta có:

$$A_x^3 + C_x^{x-3} = 14x$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = 14x$$

Vì x > 0 nên chia cả vế cho x ta được:

$$(x-1).(x-2) + \frac{(x-1).(x-2)}{6} = 14$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1).(x-2) + (x-1).(x-2) = 84$$

$$\Leftrightarrow 7(x-1).(x-2) = 84 \Leftrightarrow (x-1).(x-2) = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2\,(l) \end{array}\right.$$

Bài 3: Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

Lời giải:

Các viên bi lấy ra có đủ cả 2 màu nên ta có các trường hợp:

Số bi trắng	Số bi xanh	Số cách chọn
1	3	$C_6^1 \times C_5^3$
2	3	$C_6^2 \times C_5^2$
3	1	$C_6^3 \times C_5^1$

Vậy có tất cả cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.
$C_6^1 \times C_5^3 + C_6^2 \times C_5^2 + C_6^3 \times C_5^1 = 310$

Cách 2. Dùng phần bù. Số cách chọn 4 viên bi tùy ý từ 11 viên bi là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 4 viên bi màu trắng là: C_6^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi là màu xanh là: C_5^4 cách.

Vậy có C_{11}^5 - (C_6^4 + C_5^4) = 310 cách chọn 4 viên bi trong đó có cả 2 màu.

Bài 4: Từ 20 người cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư kí và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu ?

Lời giải:

Số cách chọn 1 người trong 20 người làm trưởng đoàn là:
C_{20}^1 cách.
Số cách chọn 1 người trong 19 người còn lại làm phó đoàn là:
C_{19}^1 cách.
Số cách chọn 1 người trong 18 người còn lại làm thư kí là:
C_{18}^1 cách.
Số cách chọn 3 người trong 17 người còn lại làm ủy viên là:
C_{17}^3 cách.
Vậy số cách chọn đoàn đại biểu là:
$C_{20}^1 \times C_{19}^1 \times C_{18}^1 \times C_{17}^3 = 4651200$.

Bài 5: Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

Lời giải:

Nhóm thứ 1: chọn 7 nam từ 21 bạn nam, chọn 5 nữ từ 15 bạn nữ nên số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^{7}\times C_{15}^{5}$ cách.

Nhóm thứ 2: chọn 7 nam từ 14 bạn nam còn lại, chọn 5 nữ từ 10 bạn nữ còn lại nên số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^{7}\times C_{10}^{5}$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_{7}^{7}\times C_{5}^{5}$ cách.

Vậy có $\left(C_{21}^{7}\times C_{15}^{5}\right)\times\left(C_{14}^{7}\times C_{10}^{5}\right)\times\left(C_{7}^{7}\times C_{5}^{5}\right)=C_{21}^{7}C_{15}^{5}C_{14}^{7}C_{10}^{5}$ cách chia nhóm.

Bài 6: Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

Lời giải:

Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 12 học sinh là: C_{12}^{6} cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 10 (hay 6 học sinh từ khối 11 và 12) là: C_{7}^{6} cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 11 (hay 6 học sinh từ khối 10 và 12) là: C_{8}^{6} cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 12 (hay 6 học sinh từ khối 10 và 11) là: C_9^6 cách.

Vậy có C_{12}^6 - (C_7^6 + C_8^6 + C_9^6) = 805 cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng.

Lời giải:

Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.

Số cách lấy 4 viên bi bất kì trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.

Số cách lấy 4 viên bi xanh (khi đó bi đỏ không được lấy ra) là: C_4^4 cách.

Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: C_9^4 - C_4^4 = 125 cách.

TH2: Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên.

Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $C_5^2 \times C_4^1$ cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $C_5^3 \times C_4^0$ cách.

Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là:

C_3^1 * ($C_5^2 \times C_4^1$ + $C_5^3 \times C_4^0$) = 150 cách.

Vậy có 125 + 150 = 275 cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 8: Tìm giá trị n ∈ N thỏa mãn $C_{n+1}^{1}+3C_{n+2}^{2}=C_{n+1}^{3}$.

Lời giải:

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có:

$$C_{n+1}^{1}+3C_{n+2}^{2}=C_{n+1}^{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)!}{1!.n!}+3.\frac{(n+2)!}{2!.n!}=\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow n+1+3.\frac{(n+1).(n+2)}{2}=\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1+3.\frac{(n+2)}{2}=\frac{(n-1).n}{6}$$

(vì n + 1 > 0 nên chia cả 2 vế cho n +1).

$$\Leftrightarrow 6+9n+18=n^2-n\Leftrightarrow n^2-10n-24=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-2(L)\\ n=12(tm)\end{array}\right.$$

Bài 9: Cho 10 điểm phân biệt A1, A2, ..., A10 trong đó có 4 điểm A1, A2, A3, A4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

Lời giải:

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $C_{10}^{3}=120$.

Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A1, A2, A3, A4 là $C_4^3=4$.

Khi lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A1, A2, A3, A4 thì sẽ không tạo thành tam giác.

Như vậy, số tam giác tạo thành : 120 - 4 = 116 tam giác.

Bài 10: Cho hai đường thẳng song song d1 và d2. Trên d1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

Lời giải:

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:

TH1. Chọn 1 điểm thuộc d1 và 2 điểm thuộc d2: có $C_{17}^{1}.C_{20}^{2}$ tam giác.

TH2. Chọn 2 điểm thuộc d1 và 1 điểm thuộc d2: có $C_{17}^{2}.C_{20}^{1}$ tam giác.

Như vậy, ta có $C_{17}^{1}.C_{20}^{2} + C_{17}^{2}.C_{20}^{1} = 5950$ tam giác cần tìm.

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là?

Bài 2 Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là?

Bài 3 Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in N$ và $n \geq 3$ Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

Bài 4 Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo ra từ các số khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

Bài 5 Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000?

Bài 6 Có bao nhiêu cách để sắp xếp chỗ ngồi cho mười người khách vào mười ghế kê thành một dãy?

Bài 7 Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

Bài 8 Có bao cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

Bài 9 Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

a) Các bông hoa khác nhau?

b) Các bông hoa như nhau?

Bài 10 Trong mặt phẳng, cho sáu điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?