Công thức tính xác suất

1. Tổng hợp lý thuyết

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Cho T là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn.

Giả sử A là một biến cố được mô tả bằng $\Omega_A \subset \Omega$. Xác suất của biến cố A, kí hiệu bởi P(A), được cho bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó: $|\Omega_A|$ là số phần tử của biến cố A

$|\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu Ω.

* Tính chất

$0 \le P(A) \le 1$

$P(\Omega) = 1$

$P(\varnothing) = 0$

b) Các quy tắc tính xác suất

* Quy tắc cộng

- Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B được gọi là hai biến cố xung khắc.

- Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Nếu các biến cố A_1 ; A_2; A_3 ; ... A_n đôi một xung khắc với nhau thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$$

- Công thức tính xác suất của biến cố đối: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- Mở rộng : Với hai biến cố bất kì cùng liên quan đến phép thử thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* Quy tắc nhân

- Hai biến cố gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra biến cố kia.

- Nếu A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

- Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)...P(A_k)$$

2. Các công thức

* Công thức xác suất cổ điển: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

Trong đó: $|\Omega_A|$ là số phần tử của biến cố A

$|\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu Ω.

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

* Công thức tính xác suất của biến cố đối: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

* Nếu A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

* Công thức mở rộng:

- Với hai biến cố bất kì cùng liên quan đến phép thử thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Nếu k biến cố A_1 ; A_2; ... A_k đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + ... + P(A_k)$$

- Nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k)$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một hộp có 8 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Lấy ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất lấy được:

a) 2 viên bi màu xanh và 2 viên bi màu vàng

b) Có ít nhất 1 viên bi vàng

c) Có đủ 2 màu.

Lời giải

Không gian mẫu: Ω: “Lấy 4 viên bi ra từ hộp”

Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = C_{15}^4$.

a) Gọi A là biến cố: “Lấy được 2 viên bi màu xanh và 2 viên bi màu vàng”

Số cách chọn được 2 viên bi màu xanh và 2 viên bi màu vàng là: $|A| = C_8^2.C_7^2$

Xác suất để lấy được 2 viên bi màu xanh và 2 viên bi màu vàng là:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{C_8^2.C_7^2}{C_{15}^4}=\frac{28}{65}.$$

b) Gọi B là biến cố: "Có ít nhất 1 viên bi màu vàng"

Khi đó $\overline{B}$ là biến cố: "Không lấy được bi màu vàng"

Số cách chọn không có màu vàng là: $|\overline{B}|=C_8^4$

Xác suất để lấy được ít nhất 1 viên bi màu vàng là: $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_8^4}{C_{15}^5}=\frac{37}{39}$.

c) Gọi C là biến cố: "Có đủ 2 màu"

Khi đó $\overline{C}$ là biến cố: "Không có đủ 2 màu"

Trường hợp 1: Chọn được 4 viên bi cùng màu xanh: C_8^4 cách

Trương hợp 2: Chọn được 4 viên bi cùng màu vàng: C_7^4 cách

Số cách chọn không đủ hai màu là: $C_8^4+C_7^4$

Xác suất để chọn được 4 viên bi đủ hai màu là: $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_8^4+C_7^4}{C_{15}^4}=\frac{12}{13}$.

Ví dụ 2: Hai người xạ thủ độc lập với nhau, bắn súng vào hai bia khác nhau. Xác suất trúng của người thứ nhất là 0,4 và của người thứ hai là 0,7. Tính xác suất để:

a) Cả 2 người cùng bắn trúng

b) Có đúng một người bắn trúng

c) Không ai bắn trúng

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng"; P(A) = 0,4

B là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng"; P(B) = 0,7

A, B là hai biến cố độc lập

Khi đó:

$\overline{A}$ là biến cố: "Người thứ nhất bắn không trúng"; $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,4=0,6$

$\overline{B}$ là biến cố: "Người thứ hai bắn không trúng"; $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,7=0,3$.

a) Ta có: $A\cap B$ là biến cố: "Cả hai người cùng bắn trúng"

Xác suất để cả hai người bắn trúng là: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4.0,7 = 0,28$.

b) Gọi C là biến cố: "Có đúng một người bắn trúng"

Ta có: $C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$

Xác suất để có đúng một người bắn trúng là:

$P(C) = P(A)P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right)P(B) = 0,4.0,3 + 0,6.0,7 = 0,54$.

c) Ta có $\overline{A} \cap \overline{B}$ là biến cố: "Cả hai người bắn không trúng"

Xác suất để không ai bắn trúng là: $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = 0,6.0,3 = 0,18$.