Xác định biến cố và tính xác xuất của biến cố

1. Lý thuyết

a) Phép thử ngẫu nhiên

+ Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:
- Kết quả của nó không đoán trước được;

- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

+ Phép thử thường được kí hiệu: T.

+ Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử

Kí hiệu: Ω. Số phần tử trong không gian mẫu kí hiệu là $|\Omega|$ hoặc $n(\Omega)$.

b) Biến cố

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là kết quả thuận lợi cho A.
- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A hoặc A.

c) Tính chất của biến cố

Giải sử Ω là không gian mẫu, A và B là các biến cố.

+ $\Omega \setminus A = \overline{A}$ được gọi là biến cố đối của biến cố A.

+ $A \cup B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A hoặc B xảy ra.

+ $A \cap B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A và B cùng xảy ra. $A \cap B$ còn được viết là AB.

+ Nếu $A \cap B = \varnothing$, ta nói A và B xung khắc.

d) Xác suất của biến cố

* Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Cho T là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn.

Giả sử A là một biến cố được mô tả bằng $\Omega_A \subset \Omega$. Xác suất của biến cố A, kí hiệu bởi P(A), được cho bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó: $|\Omega_A|$ là số phần tử của biến cố A

$|\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu Ω.

* Tính chất

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

$P(\varnothing) = 0$

2. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định không gian mẫu và biến cố

Phương pháp giải:

- Cách 1: Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và biến cố rồi đếm.

- Cách 2: Sử dụng quy tắc đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để đếm só phần tử của không gian mẫu và biến cố.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất 3 lần và quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S) và mặt ngửa (N).

a) Mô tả không gian mẫu. Tính số phần tử của không gian mẫu

b) Xác định và tính số phần tử của các biến cố

A: "Lần gieo đầu xuất hiện mặt sấp"

B: "Ba lần xuất hiện các mặt như nhau"

C: "Đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa"

D: "Ít nhất 1 lần xuất hiện mặt sấp".

Lời giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{SSS;\ SSN;\ SNS;\ SNN;\ NNN;\ NNS;\ NSN;\ NSS\}$

Do đó: Số phần tử của không gian mẫu: $|\Omega| = 8$.

(Cách khác: Số phần tử được tính bằng: 2.2.2 = 8)

b) A = {SSS; SSN; SNS; SNN}; |A| = 4

B = {SSS; NNN}; |A| = 2

C = {SNN; NNS; NSN}; |C| = 3

D = {SSS; SSN; SNS; SNN; NNS; NSN; NSS}; |D| = 7

Ví dụ 2. Một hộp đựng 8 viên bi vàng, 7 viên bi xanh và 10 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Tính số phần tử của:

a) Không gian mẫu

b) Các biến cố:

A: "4 viên bi lấy ra có đúng 2 màu vàng"

B: "4 viên bi lấy ra có ít nhất 1 màu xanh"

C: "4 viên bi lấy ra có đúng một màu"

D: "4 viên bi lấy ra có đủ 3 màu".

Lời giải

a) Số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó: $C_{25}^{4} = 12650$

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 12650$.

b) * Số cách chọn 4 viên bi trong đó có đúng 2 màu vàng: $C_8^2.C_{17}^2 = 3808$.

Do đó: |A| = 3808.

* Số cách chọn 4 viên bi trong đó không có màu xanh: C_{18}^4

Số cách chọn 4 viên bi trong đó có ít nhất 1 màu xanh là: $C_{25}^4 - C_{18}^4 = 9590$.

Do đó: |B| = 9590.

* Số cách chọn 4 viên bi trong đó có đúng một màu là: $C_8^4 + C_7^4 + C_{10}^4 = 315$.

Do đó: |C| = 315.

* Số cách chọn 4 viên bi sao cho có đủ 4 màu

Trường hợp 1: 2 viên bi vàng, 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ: $C_8^2.C_7^1.C_{10}^1 = 1960$

Trường hợp 2: 1 viên bi vàng, 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ: $C_8^1.C_7^2.C_{10}^1 = 1680$

Trường hợp 3: 1 viên bi vàng, 1 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ: $C_8^1.C_7^1.C_{10}^2 = 2520$

Do đó: |D| = 1960 + 1680 + 2520 = 6160.

Dạng 2: Tính xác suất theo định nghĩa cổ điển

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính xác suất theo định nghĩa cổ điển: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Gieo một con súc sắc 3 lần. Tính xác xuất để

a) Ba lần đều xuất hiện mặt 1 chấm

b) Ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm

c) Tổng số chấm trong 3 lần gieo bằng 6

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega| = 6.6.6 = 6^3 = 216$.

a) Gọi A là biến cố: "Ba lần gieo đều xuất hiện 1 chấm"

Số phần tử của A là: |A| =1

Xác suất để ba lần gieo đều xuất hiện mặt 1 chấm là: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{216}$

b) Gọi B là biến cố: "Ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm"

Số cách không xuất hiện mặt 6 chấm là: 5.5.5 = 125

Do đó |B| = 216 – 125 = 91.

Xác suất để có ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm: $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{91}{216}$

c) Gọi C là biến cố: "Tổng số chấm trong 3 lần gieo bằng 6"

Để có tổng số chấm là 6 ta có các bộ 3 số như nhau: (1; 1; 4), (1; 2; 3), (2; 2; 2)

Trường hợp 1: Xuất hiện 2 lần mặt 1 chấm và 1 lần mặt 4 có 3 cách

Trường hợp 2: Xuất hiện 1 lần mặt 1 chấm, 1 lần mặt 2 chấm, 1 lần mặt 3 chấm có 3! = 6 cách

Trường hợp 3: Xuất hiện 3 lần mặt 2 chấm có 1 cách.

Do đó: |C| = 3 + 6 + 1 = 10

Xác suất để có tổng số chấm trong 3 lần gieo bằng 6 là: $P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$

Ví dụ 2. Xếp 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ vào một bàn dài có 12 ghế. Tính xác suất để:

a) Các học sinh nam ngồi cạnh nhau

b) Không có hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega|=12!$

a) Gọi A là biến cố: "Các học sinh nam ngồi cạnh nhau"

Số cách xếp các học sinh nam ngồi cạnh nhau là: |A| = 8! . 5!

Xác suất để các học sinh nam ngồi cạnh nhau là: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{8!.5!}{12!}=\frac{1}{99}$

b) Gọi B là biến cố: "Không có hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau"

Xếp 7 học sinh nữ vào bàn dài ta có: 7! cách xếp

Khi đó tạo ra 8 chỗ trống (6 chỗ trống giữa 2 bạn nữ và 2 chỗ trống 2 bên). Xếp 5 bạn nam vào các chỗ trống đó (Mỗi chỗ trống chỉ được 1 bạn): có A_8^5 cách xếp

Do đó số cách xếp để không có hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau là: $|B|=7!.A_8^5$

Xác xuất để không có hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau là:

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{7!.A_8^5}{12!}=\frac{7}{99}.$$

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau là?

A. $\frac{12}{216}$ **B.** $\frac{1}{216}$ **C.** $\frac{6}{216}$ **D.** $\frac{3}{216}$

Câu 2. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng?

A. $\frac{313}{408}$ **B.** $\frac{95}{408}$ **C.** $\frac{5}{102}$ **D.** $\frac{25}{136}$

Câu 3. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4; … ; 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{5}{18}$ **C.** $\frac{8}{9}$ **D.** $\frac{13}{18}$

Câu 4. Một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp đó. Tính xác suất thẻ lấy được ghi số lẻ và chia hết cho 3.

A. 0,3 **B.** 0,5 **C.** 0,2 **D.** 0,15

Câu 5. Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A. $\frac{560}{4199}$ **B.** $\frac{4}{15}$ **C.** $\frac{11}{15}$ **D.** $\frac{3639}{4199}$

Câu 6. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{7}{15}$ **C.** $\frac{8}{15}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Câu 7. Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Tính xác suất để trong bốn người được chọn có ít nhất ba nữ.

A. $\frac{70}{143}$ **B.** $\frac{73}{143}$ **C.** $\frac{56}{143}$ **D.** $\frac{87}{143}$

Câu 8. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$ **B.** $\frac{6}{11}$ **C.** $\frac{5}{11}$ **D.** $\frac{8}{11}$

Câu 9. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

A. $\frac{41}{55}$ **B.** $\frac{14}{55}$ **C.** $\frac{28}{55}$ **D.** $\frac{42}{55}$

Câu 10. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

A. $\frac{91}{323}$ B. $\frac{637}{969}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{91}{285}$

Câu 11. Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất của biến cố: "Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc sắc bằng 1".

A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 12. Thầy giáo có 10 câu hỏi trắc nghiệm, trong đó có 6 câu đại số và 4 câu hình học. Thầy gọi bạn Nam lên trả bài bằng cách chọn lấy ngẫu nhiên 3 câu hỏi trong 10 câu hỏi trên để trả lời. Hỏi xác suất bạn Nam chọn ít nhất có một câu hình học là bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{30}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{29}{30}$

Câu 13. Cho hai đường thẳng song song d_1; d_2. Trên d_1 có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ. Trên d_2 có 4 điểm phân biết được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, khi đó xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là:

A. $\frac{5}{32}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{5}{7}$

Câu 14. Danh sách lớp của bạn Nam đánh số từ 1 đến 45. Nam có số thứ tự là 21. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp để trực nhật. Tính xác suất để chọn được bạn có số thứ tự lớn hơn số thứ tự của Nam.

A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{45}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{24}{45}$

Câu 15. Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu.

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{3}{7}$

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	D	D	A	A	A	C	D	B	C	A	B	D	D