Công thức Tích vô hướng của hai vectơ chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

- *Chú ý:*

+) Khi ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước: $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

+) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0})$, ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

+) Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của $\vec{a}$, ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

- Biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó, ta có: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

- Điều kiện để hai vectơ vuông góc: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$, khi đó:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$.

II. Các công thức.

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$, ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

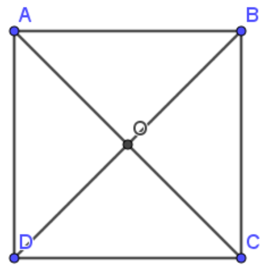
$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính bình phương vô hướng của vectơ $\overrightarrow{OA}$, tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ và tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.



Lời giải:

Xét tam giác ABC vuông cân tại B (do ABCD là hình vuông) :

$$BAC = BCA = 45^o$$

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Ta có hình vuông ABCD tâm O $\Rightarrow$ O là trung điểm của đường chéo AC, BD.

$$\Rightarrow OA = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Do ABCD là hình vuông nên AB $\perp$ AD tại A $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Ta có: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = BAC = 45^o$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

$$= AC.AB.\cos 45^o = a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Bài 2: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4;5)$ và $\vec{b} = (3;7)$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

Lời giải:

Ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = 4.3 + 5.7 = 47$.

Bài 3: Cho hai vectơ $\vec{u} = (5;4)$ và $\vec{v} = (3m;5)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lời giải:

Ta có:

Để $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 5.3m + 4.5 = 0$

$\Leftrightarrow 15m + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 15m = -20$

$\Leftrightarrow m = \frac{-20}{15} = \frac{-4}{3}$

Vậy khi $m = \frac{-4}{3}$ thì $\vec{u} \perp \vec{v}$.