Bất đẳng thức Cô-si và hệ quả chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Định lí: Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad \forall a,b \ge 0$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi a = b.

- Các hệ quả:

+ Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \ge 2, \ \forall a > 0$$

+ Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích (xy) lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

+ Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

+ Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng (x + y) nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

+ Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

II. Các công thức.

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad \forall a,b \ge 0$

$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b \quad \forall a,b \ge 0$

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ (a_i là số dương với i = 1, 2,…,n)

$a + \frac{1}{a} \ge 2, \ \forall a > 0$

$\forall x, y > 0$, nếu $(x+y)$ không đổi thì $(x.y)_{max} \Leftrightarrow x = y$.

$\forall x, y > 0$, nếu $(x.y)$ không đổi thì $(x+y)_{min} \Leftrightarrow x = y$.

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Cho a, b là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng:
$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4$.

Lời giải:

Khi a, b là số dương $\Rightarrow \frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{a}{b^2} > 0$, $\frac{b}{a^2} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq 2.\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{b}{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq \frac{4}{\sqrt{ab}} \ (1)$$

Mặt khác ta có: $2 = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$

$\Rightarrow ab \leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4$ (điều cần phải chứng minh)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = 1.

Bài 2: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng:
$\left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d) \geq 16$.

Lời giải:

Vì a, b, c, d là số dương nên ta có: $\frac{a}{b^3} > 0$, $\frac{b}{c^3} > 0$, $\frac{c}{d^3} > 0$, $\frac{d}{a^3} > 0$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho bốn số dương ta có:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\ge 4.\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}.\frac{b}{c^3}.\frac{c}{d^3}.\frac{d}{a^3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\ge \frac{4}{\sqrt{abcd}}$$

Lại có, do a, b, c, d dương nên:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

$$c+d\ge 2\sqrt{cd}$$

$$\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\ge \frac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\ge 16$$ (điều cần phải chứng minh).

Bài 3: Cho hai số dương c, d. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức trong các trường hợp sau:

a) c + d = 6 luôn không đổi, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = (c + d).cd ;

b) c.d = 5 luôn không đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{c+d}{c^2d^2}$.

Lời giải:

a)

Ta có: A = (c + d).cd = 6cd vì (c + d) = 6 luôn không đổi.

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$A_{max}\Leftrightarrow (cd)_{max}\Leftrightarrow c=d$$

Khi đó: $\begin{cases} c=d \\ c+d=6 \end{cases}\Leftrightarrow c=d=3$

$$\Rightarrow A_{max}=6.3.3=54$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 54 khi c = d = 3.

b)

Ta có: $B = \frac{c+d}{c^2d^2} = \frac{c+d}{5^2} = \frac{c+d}{25}$ vì c.d = 5 luôn không đổi.

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Cô-si ta có:

$B_{min} \Leftrightarrow (c+d)_{min} \Leftrightarrow c = d$

Khi đó: $\begin{cases} c = d \\ cd = 5 \end{cases} \Leftrightarrow c = d = \sqrt{5}$

$\Rightarrow B_{min} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{25} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ khi c = d = $\sqrt{5}$.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng: $a^2b + b^2c + c^2a \le 3$.

Bài 2: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}$.