Bài 3. Nhị thức Niu- tơn

A. Lý thuyết.

I. Công thức nhị thức Niu- tơn

Ta có:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1.a^1b^1 + C_2^2 b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0.a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3$$

- Công thức nhị thức Niu – tơn.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1.a^{n-1}b + ... + C_n^k.a^{n-k}b^k + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

- Hệ quả:

Với a = b = 1 ta có: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

Với a = 1; b = – 1 ta có:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^k.C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n.$$

- Chú ý:

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1):

a) Số các hạng tử là n + 1.

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0; số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n (quy ước $a^0 = b^0 = 1$).

c) Các hệ số của mỗi cặp hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

- Ví dụ 1. Khai triển biểu thức: $(a – b)^5$.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Niu – tơn ta có:

$$(a-b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1.a^4(-b) + C_5^2.a^3(-b)^2 + C_5^3a^2(-b)^3 + C_5^4a(-b)^4 + C_5^5(-b)^5$$
$$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

- **Ví dụ 2**. Khai triển biểu thức: $(3x - 2)^4$.

Lời giải:

Áp dụng công thức nhị thức Niu – tơn ta có:

$$(3x-2)^4 = C_4^0(3x)^4 + C_4^1.(3x)^3(-2) + C_4^2.(3x)^2(-2)^2 + C_4^3(3x)(-2)^3 + C_4^4(-2)^4$$
$$= 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$$

II. Tam giác Pa- xcan

Trong công thức nhị thức Niu – tơn ở mục I, cho n = 0; 1; … và xếp các hệ số thành dòng, ta nhận được tam giác sau đây, gọi là **tam giác Pa- xcan.**

$n=0$								1							
$n=1$							1		1						
$n=2$						1		2		1					
$n=3$					1		3		3		1				
$n=4$				1		4		6		4		1			
$n=5$			1		5		10		10		5		1		
$n=6$		1		6		15		20		15		6		1	
$n=7$	1		7		21		35		35		21		7		1

- **Nhận xét:**

Từ công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó.

Ví dụ 3. $C_6^2 = C_5^1 + C_5^2 = 5 + 10 = 15$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu- tơn.

a) $(2x – 1)^6$.

b) $(2x + 2y)^5$.

Lời giải:

Theo khai triển nhị thức Niu- tơn ta có:

a)

$$(2x-1)^6 = C_6^0(2x)^6 + C_6^1.(2x)^5.(-1) + C_6^2.(2x)^4(-1)^2$$
$$+ C_6^3.(2x)^3(-1)^3 + C_6^4(2x)^2(-1)^4 + C_6^5(2x)(-1)^5 + C_6^6(-1)^6$$
$$= 64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 60x^2 - 12x + 1$$

b)

$$(2x+2y)^5 = C_5^0(2x)^5 + C_5^1.(2x)^4(2y) + C_5^2.(2x)^3(2y)^2$$
$$+ C_5^3(2x)^2(2y)^3 + C_5^4 2x(2y)^4 + C_5^5(2y)^5$$
$$= 32x^5 + 160x^4y + 320x^3y^2 + 320x^2y^3 + 160xy^4 + 32y^5$$

Bài 2. Tìm hệ số chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$.

Lời giải:

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k.x^{10-k}.\left(\frac{-1}{x}\right)^k$$
$$= C_{10}^k.(-1)^k.x^{10-2k}$$

Để số hạng này chứa x^4 thì điều kiện là:

10 – 2k = 4 nên k = 3.

Vậy hệ số chứa x^4 trong khai triển đã cho là: $C_{10}^3.(-1)^3 = -120$.

Bài 3. Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $(2x + 3y)^{12}$.

Lời giải:

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{12}^{k}.(2x)^{12-k}.(3y)^{k} = C_{12}^{k}.2^{12-k}.3^{k}.(x)^{12-k}.y^{k}$$

Suy ra, số hạng thứ 8 trong khai triển ứng với k + 1 = 8 nên k = 7.

Vậy số hạng thứ 8 trong khai triển là:

$$T_{8} = C_{12}^{7}.2^{5}.3^{7}.x^{5}.y^{7} = 55427328x^{5}.y^{7}$$

Bài 4. Biết hệ số của x^3 trong khai triển của $(2 – 4x)^n$ là –10 240. Tìm n.

Lời giải:

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{n}^{k}.2^{n-k}.(-4x)^{k} = C_{n}^{k}.2^{n-k}.(-4)^{k}x^{k}$$

Để số hạng này chứa x^3 thì k = 3.

Khi đó, hệ số đứng trước x^3 là $C_{n}^{3}.2^{n-3}.(-4)^{3}$.

Theo giả thiết ta có: $C_{n}^{3}.2^{n-3}.(-4)^{3}$ = – 10240.

Suy ra; n = 6.

Vậy n = 6.