

Bài 10. Vector trong mặt phẳng tọa độ

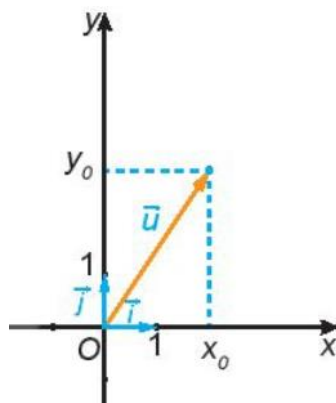
A. Lý thuyết

1. Tọa độ của vector

– Trục tọa độ (còn gọi là trục, hay trục số) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vector \vec{i} có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là gốc tọa độ, vector \vec{i} gọi là vector đơn vị của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{i}$



– Trên mặt phẳng với một đơn vị đo độ dài cho trước, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Kí hiệu vector đơn vị của trục Ox là \vec{i} , vector đơn vị của trục Oy là \vec{j} . Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Oxy. Điểm O gọi là gốc tọa độ, trục Ox gọi là trục hoành, trục Oy gọi là trục tung. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay mặt phẳng Oxy.



– Mỗi vector \vec{u} trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$.

Ta nói vector \vec{u} có tọa độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của \vec{u} .

– Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Ví dụ : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $\vec{u} = (2; -4)$. Hãy biểu diễn vector \vec{u} qua vector \vec{i} và \vec{j} .

Hướng dẫn giải

Vì $\vec{u} = (2; -4)$ nên $\vec{u} = 2\vec{i} + (-4)\vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

Vậy $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vector

Cho hai vector $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó :

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y');$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y');$$

$$k\vec{u} = (kx; ky) \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ : Cho $\vec{u} = (2; 3)$, $\vec{v} = (-1; 2)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$.

b) Tìm tọa độ của vector $4\vec{u}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1); 3 + 2) = (1; 5)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1); 3 - 2) = (3; 1).$$

Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (1; 5)$; $\vec{u} - \vec{v} = (3; 1)$.

b) $4\vec{u} = (4 \cdot 2; 4 \cdot 3) = (8; 12)$

Vậy $4\vec{u} = (8; 12)$.

Nhận xét:

– Vector $\vec{v}(x'; y')$ cùng phương với vector $\vec{u}(x; y) \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x' = kx$, $y' = ky$ (hay là $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ nếu $xy \neq 0$).

– Nếu điểm M có tọa độ $(x; y)$ thì vector \overrightarrow{OM} có tọa độ $(x; y)$ và độ dài $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

– Với vector $\vec{u} = (x; y)$, ta lấy điểm $M(x; y)$ thì $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Do đó $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

– Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 2)$, $C(7; 4)$.

a) Tìm tọa độ của các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} .

b) So sánh các khoảng cách từ B tới A và C .

c) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng không?

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 2 - (-2)) = (2; 4)$;

$$\overrightarrow{BC} = (7 - 3; 4 - 2) = (4; 2).$$

b) Các khoảng cách từ B đến A và C lần lượt là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } AB = BC = 2\sqrt{5}.$$

Vậy khoảng cách từ B đến A bằng khoảng cách từ B đến C.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$ và $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$).

Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên cùng một đường thẳng.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Chú ý:

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

- Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$.

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho B(1; 2) và C(3; -1). Độ dài \overrightarrow{BC} là:

A. 5;

B. 3;

C. $\sqrt{13}$;

D. $\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là C

Ta có $\overrightarrow{BC} = (3 - 1; -1 - 2) = (2; -3)$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(2;1), B(3;3). Tìm điểm M(x;y) để OABM là một hình bình hành.

A. M(1; 2);

B. M(-1; 2);

C. M(1; -2);

D. M(-1; -2)

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là A

Ta có hai vectơ $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ không cùng phương (vì $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$). Do đó các điểm O, A, B không cùng nằm trên một đường thẳng.

Suy ra các điểm O, A, B không thẳng hàng

Để OABM là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MB}$

Ta có: $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ nên

$$\begin{cases} 2 = 3 - x \\ 1 = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy điểm cần tìm là M(1;2).

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm M(1;3), N(4;2). Nhận xét nào sau đây đúng nhất về tam giác OMN.

- A. Tam giác OMN là tam giác đều;
- B. Tam giác OMN vuông cân tại M;
- C. Tam giác OMN vuông cân tại N;
- D. Tam giác OMN vuông cân tại O.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là B

Ta có $M(1;3) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow OM = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Ta lại có $N(4;2) \Rightarrow \overrightarrow{ON} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow ON = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow MN = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Xét tam giác OMN, có: $OM = MN = \sqrt{10}$ nên tam giác OMN cân tại M.

Ta có: $ON^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20, OM^2 + MN^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20$

$\Rightarrow ON^2 = OM^2 + MN^2$

Theo định lí Py – ta – go đảo suy ra tam giác OMN vuông tại O.

Do đó tam giác OMN vuông cân tại M.

B2. Bài tập tự luận

Câu 4. Cho $\vec{u} = (3; -2)$ và $\vec{v} = (7; 4)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (3 + 7; (-2) + 4) = (10; 2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (3 - 7; (-2) - 4) = (-4; -6)$

$$3\vec{u} = (3.3; 3.(-2)) = (9; -6)$$

$$4\vec{v} = (4.7; 4.4) = (28; 16)$$

$$\text{Suy ra : } 3\vec{u} - 4\vec{v} = (9 - 28; (-6) - 16) = (-19; -22).$$

$$\text{Vậy : } \vec{u} + \vec{v} = (10; 2); \vec{u} - \vec{v} = (4; -6); 3\vec{u} - 4\vec{v} = (-19; -22).$$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(1; -2) và B(2; 1).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB.

b) Tam giác OAB là tam giác gì? Vì sao?

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{OA} = (1; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OB} = (2; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } OB = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } OA = \sqrt{5}; OB = \sqrt{5}.$$

$$\text{b) Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; 3) \text{ nên } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Xét tam giác OAB có $OA = OB$ nên tam giác OAB là tam giác cân tại O.

Vậy tam giác OAB cân tại O.

Câu 6. Cho hình bình hành ABCD có A(-1; 3), B(2; 4), C(0; 1). Tìm tọa độ đỉnh D.

Hướng dẫn giải

$$\text{Giả sử } D(x; y), \text{ khi đó } \overrightarrow{AD} = (x + 1; y - 3); \overrightarrow{BC} = (0 - 2; 1 - 4) = (-2; -3).$$

Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Do đó :

$$\begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D(-3 ; 0).