Bài 4. Phép đối xứng tâm.

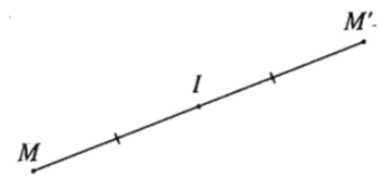
A. Lý thuyết.

I. Định nghĩa.

- Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác điểm I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng tâm* I.

Điểm I được gọi là *tâm đối xứng*.

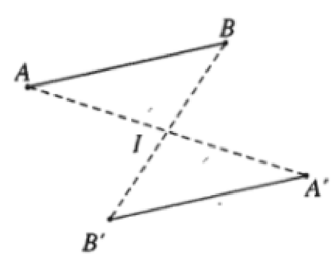
Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Đ_I$.



- Nếu hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua $Đ_I$ thì ta còn nói $\mathscr{H}$ đối xứng với $\mathscr{H}'$ qua tâm I, hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua I.

Từ định nghĩa trên ta suy ra, M' = $Đ_I$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

- **Ví dụ 1.** Cho hình vẽ sau. Các điểm A và B là ảnh của điểm A' và B' qua phép đối xứng tâm I và ngược lại.



II. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Trong hệ tọa độ Oxy, cho M(x ; y), M'= $Đ_O$(M) = (x'; y'). Khi đó:

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, đây là *biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ.*

- **Ví dụ 2**. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(7 ; – 4). Tìm ảnh của điểm A qua phép đối xứng tâm O.

Lời giải:

Gọi A’(x’; y’) là ảnh của điểm A qua phép đối xứng tâm O.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ ta có:

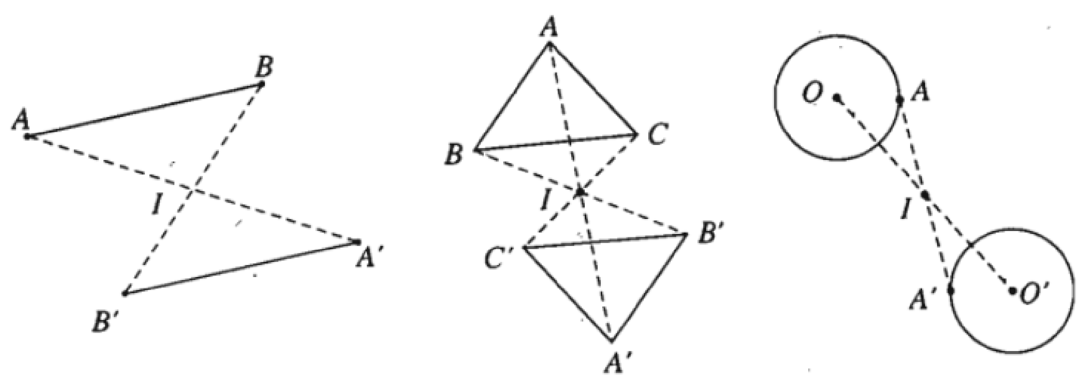
$$\begin{cases} x' = -7 \\ y' = -(-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(-7\,;\,4).$$

III. Tính chất.

- **Tính chất 1.** Nếu $Đ_I(M)$ = M’ và $Đ_I(N)$ = N’ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra M’N’ = MN.

Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

- **Tính chất 2.** Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



- **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: x + y – 2 = 0. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I(1; 2).

Lời giải:

Giả sử phép đối xứng tâm I(1 ; 2) biến điểm $M(x\,;\,y) \in d$ thành điểm M’(x’ ; y’).

Khi đó I là trung điểm của MM’. Áp dụng công thức tọa độ trung điểm ta có:

$$\begin{cases} x' = 2.1 - x = 2 - x \\ y' = 2.2 - y = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}. \quad (1)$$

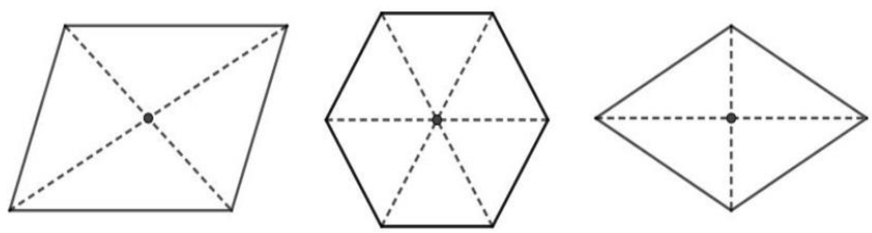
Vì điểm M thuộc d nên: x + y – 2 = 0   (2).
Thay (1) vào (2) ta được:
(2 – x’) + (4 – y’) – 2 = 0 hay – x’ – y’ + 4 = 0.
Do đó, phương trình đường thẳng d’ là – x – y + 4 = 0 hay x + y – 4 =0.

IV. Tâm đối xứng của một hình.

Định nghĩa. Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó.

- Khi đó, ta nói $\mathscr{H}$ là hình có tâm đối xứng.

- **Ví dụ 4.** Các hình sau đây đều có tâm đối xứng:



B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm ảnh của điểm M(2 ; 1) qua phép đối xứng tâm I(1 ; – 3).
Lời giải:
Gọi $Đ_I$(M) = M’(x’ ; y’)
Khi đó, I là trung điểm của MM’. Áp dụng biểu thức tọa độ trung điểm ta có:

$$\begin{cases} x' = 2.1 - 2 = 0 \\ y' = 2.(-3) - 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow M'(0; -7)$$

Vậy ảnh của M qua phép đối xứng tâm I là M’(0 ; – 7).

Bài 2. Cho điểm I(2 ; 0)và đường thẳng d: 2x – 5y + 1 = 0. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.
Lời giải:
Lấy điểm M(x ; y) thuộc d. Suy ra: 2x – 5y + 1 = 0 (1)
Gọi $Đ_I$(M) = M’(x’ ; y’).
Khi đó, I là trung điểm của MM’. Áp dụng biểu thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ của M’ là:

$$\begin{cases} x' = 2.2 - x \\ y' = 2.0 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được:

2.(4 – x’) – 5.(– y’) + 1 = 0 hay – 2x’ + 5y’ + 9 = 0

Vậy ảnh của d là đường thẳng d’: – 2x + 5y + 9 = 0.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của đường tròn (C): $(x – 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ qua phép đối xứng tâm O(0; 0).

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(3 ; – 1) bán kính R = 4.

Đường tròn (C’) là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm O(0 ; 0) nên đường tròn (C’) có bán kính R’ = R = 4 và tâm I’(– 3; 1) (tâm I’ đối xứng với tâm I qua O).

Vậy phương trình đường tròn (C’) là $(x + 3)^2 + (y – 1)^2 = 16$.