

## A. Lý thuyết

### 1. Khái niệm vector

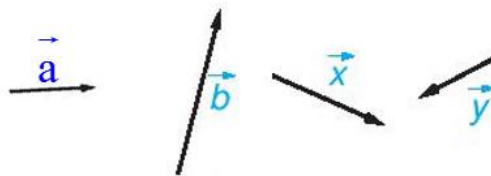
- Vector là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài vector là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

#### Chú ý:

- + Vector có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là vector AB.
- + Để vẽ một vector, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối.

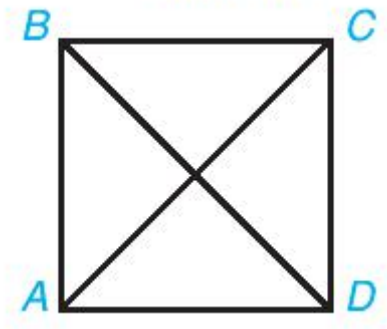


- + Vector còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , ...



- + Độ dài của vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$  tương ứng được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$ .

**Ví dụ:** Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$ .



### Hướng dẫn giải

Vì ABCD là hình vuông nên  $A = B = C = D = 90^\circ$ .

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABD vuông tại A, có các cạnh góc vuông  $AB = AD = 1$ .

Ta có:  $BD^2 = AB^2 + AD^2$ .

Suy ra:  $BD^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow BD = \sqrt{2}$ .

Do đó  $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$

Mặt khác Vì ABCD là hình vuông nên hai đường chéo BD và AC bằng nhau.

Vì vậy  $AC = BD = \sqrt{2}$ .

Do đó :  $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$ ;

Vậy  $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2}$  ;  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$ .

### 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau.

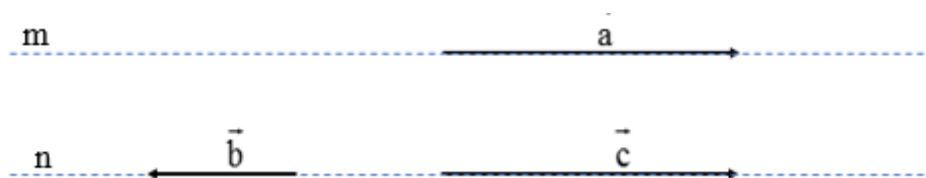
+ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

+ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

+ Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

+ Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau, kí hiệu là  $\vec{a} = \vec{b}$ , nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

**Ví dụ:**



Trong hình trên đường thẳng m đi qua điểm đầu và điểm cuối của vector  $\vec{a}$ , nên đường thẳng m gọi là giá của vector  $\vec{a}$ .

Tương tự, đường thẳng n là giá của hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

Đường thẳng m và n song song với nhau nên ba vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  là các vector cùng phương.

$\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương nhưng ngược hướng;  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng phương và cùng hướng.

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng, ngoài ra chúng có độ dài bằng nhau nên  $\vec{a} = \vec{c}$ .

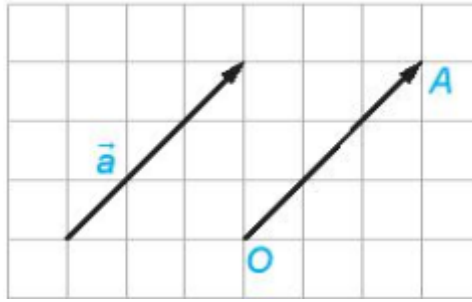
**Chú ý:**

+ Ta cũng xét các vector điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn  $\overrightarrow{AA}$ ,  $\overrightarrow{BB}$ ), gọi là các vector–không.

+ Ta quy ước vector–không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vector.

+ Các vector–không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là  $\vec{0}$ .

+ Với mỗi điểm O và vector  $\vec{a}$  cho trước, có duy nhất điểm A sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

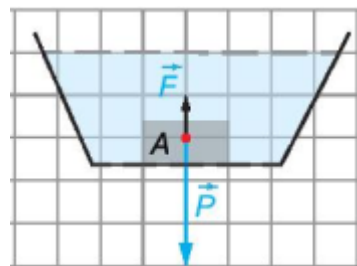


**Nhận xét:** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.



**Chú ý:** Ta có thể dùng vector để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vector chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vector thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

**Ví dụ:** Một vật A thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Khi đó  $\vec{F}$  biểu diễn lực đẩy Ác-si-mét và  $\vec{P}$  biểu diễn trọng lực tác dụng lên vật A.

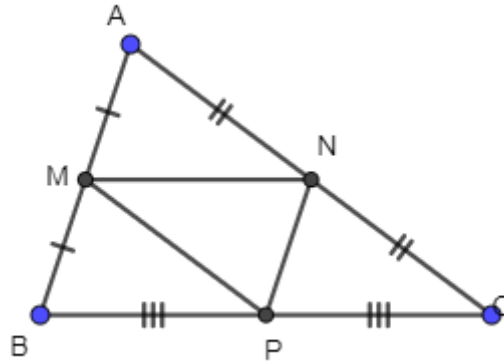


$\vec{F}$  và  $\vec{P}$  tác dụng lên vật A theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do vật chìm hoàn toàn dưới đáy cốc nên trọng lực  $\vec{P}$  có độ lớn lớn hơn lực đẩy Ác-si-mét  $\vec{F}$ , cụ thể  $|\vec{P}| = 3|\vec{F}|$ .

## B. Bài tập tự luyện

## B1. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AC và P là trung điểm của BC.



Phát biểu nào dưới đây là sai.

- A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PC}$ ;
- B.  $\overrightarrow{AA}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{PP}$ ;
- C.  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$ ;
- D.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PB}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là D**

+) Xét tam giác ABC, có:

M là trung điểm AB

N là trung điểm của AC

$\Rightarrow$  MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel BC$  và  $MN = \frac{1}{2}BC$

Mà  $BP = PC = \frac{1}{2}BC$  (P là trung điểm của BC)

$$\Rightarrow MN = CP = PB \quad (1)$$

Vì  $MN \parallel BC$  nên  $MN \parallel CP$ . Khi đó  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PC}$  cùng phương. Suy ra  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PC}$  cùng hướng (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CP}$ . Do đó đáp án A đúng.

Tương tự  $MN \parallel BC$  hay  $MN \parallel PB$ . Khi đó  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PB}$  cùng phương nhưng ngược hướng (3)

Từ (1) và (3) suy ra  $\overrightarrow{MN}$  không bằng  $\overrightarrow{PB}$ . Do đó đáp án D sai.

+) Ta có  $\overrightarrow{AA}$  và  $\overrightarrow{PP}$  là các vector – không.

Mà mọi vector – không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau

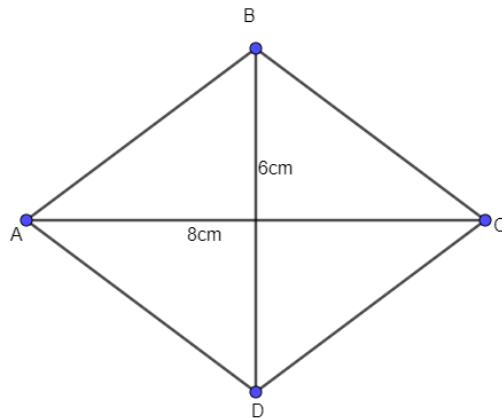
Suy ra  $\overrightarrow{AA}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{PP}$ . Do đó đáp án B đúng.

+) Hai vec tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{MB}$  cùng hướng

Vì M là trung điểm của AB nên  $AM = MB$

Suy ra  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ . Do đó đáp án C đúng.

**Câu 2.** Cho hình thoi ABCD có độ dài hai đường chéo AC, BD lần lượt là 8 cm và 6 cm. Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB}$ .



A. 10 cm;

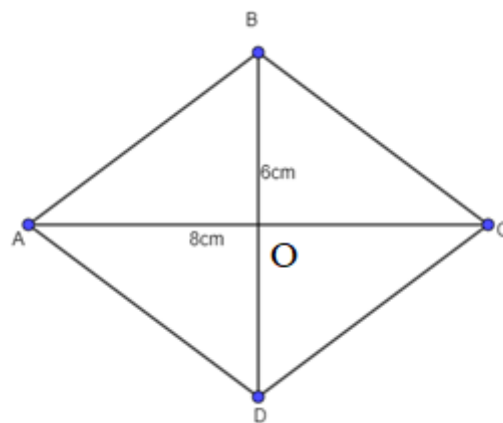
B. 3 cm;

C. 4 cm;

D. 5cm.

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là D**



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó O là trung điểm của AC, cũng là trung điểm của BD.

$$\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}.$$

$$\Rightarrow BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{cm}.$$

Xét tam giác AOB vuông tại O, có:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \text{ (định lí Py – ta – go)}$$

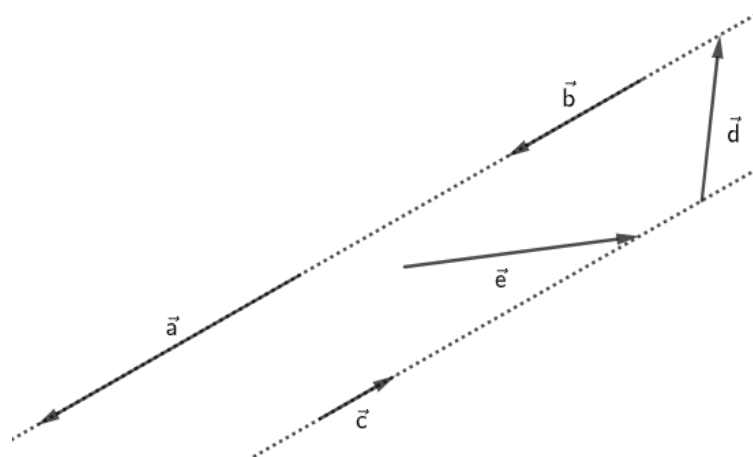
$$\Leftrightarrow AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Leftrightarrow AB = 5 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = AB = 5\text{cm.}$$

Vậy độ dài  $\overrightarrow{AB}$  là 5cm.

**Câu 3.** Cho hình vẽ sau:



Cặp vector nào cùng hướng?

A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;

B.  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ ;

C.  $\vec{c}$  và  $\vec{b}$ ;

D.  $\vec{c}$  và  $\vec{e}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là A**



Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng nằm trên một đường thẳng hay chúng có giá trùng nhau nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector cùng phương. Do đó hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  nằm trên hai đường thẳng song song hay chúng có giá song song nhau nên  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  là hai vector cùng phương. Do đó hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

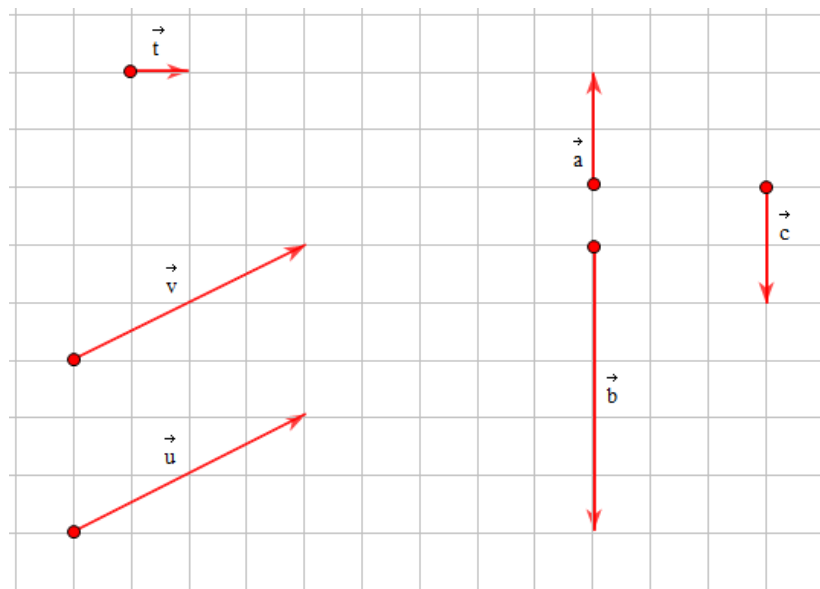
Hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  nằm trên hai đường thẳng song song hay chúng có giá song song nhau nên  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  là hai vector cùng phương. Do đó hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

Hai vector  $\vec{e}$  và  $\vec{c}$  không cùng phương.

Vậy các cặp vector cùng hướng là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

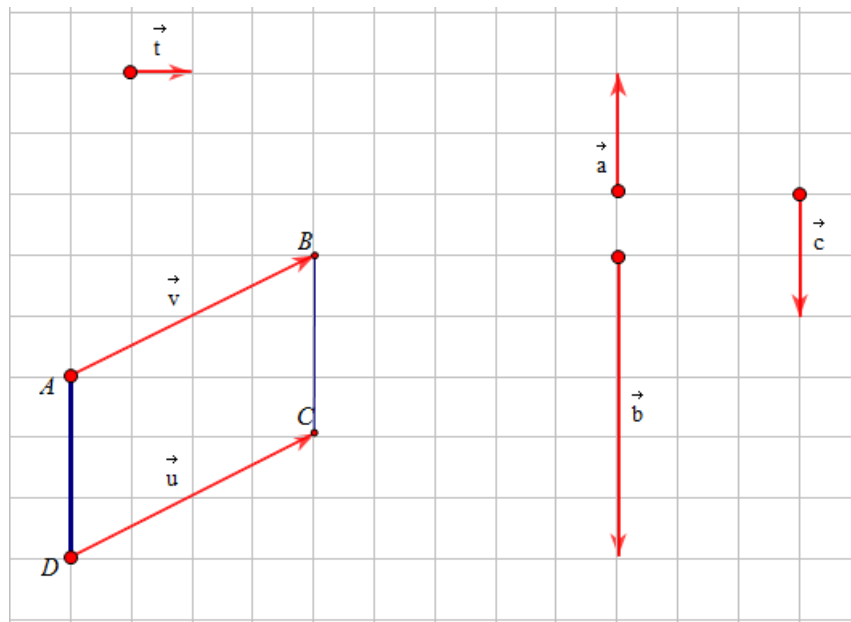
## B2. Bài tập tự luận

**Câu 4.** Cho hình vẽ:



- Chỉ ra các vector cùng phương.
- Chỉ ra các vector cùng hướng, ngược hướng.
- Chỉ ra các vector bằng nhau.

## Hướng dẫn giải



a) Ta nối các điểm đầu và điểm cuối của hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  để được tứ giác ABCD.

Xét tứ giác ABCD có:

$AD \parallel BC$  (vì AD và BC nằm trên hai dòng kẻ phân biệt)

$AD = BC$  (cùng bằng 3 đơn vị)

Suy ra ABCD là hình bình hành.

Suy ra  $AB \parallel DC$ .

Khi đó, ta có giá của hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  song song với nhau nên hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

Ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  có giá nằm trên các dòng kẻ dọc nên giá của các vector này trùng nhau hoặc song song, vì vậy ba vector này cùng phương.

Vector  $\vec{t}$  không cùng phương với vector nào.

Vậy, hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai vector cùng phương ; ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  đôi một cùng phương.

b) Hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng hướng.

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

Hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng.

Vậy các cặp vector cùng hướng là :  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  ;  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  . Các cặp vector ngược hướng là :  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ;  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  .

c) Vì ABCD là hình bình hành nên  $AB = DC$ .

Hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng hướng. Mặt khác  $|\vec{u}| = DC$  ;  $|\vec{v}| = AB$  , suy ra  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$  .

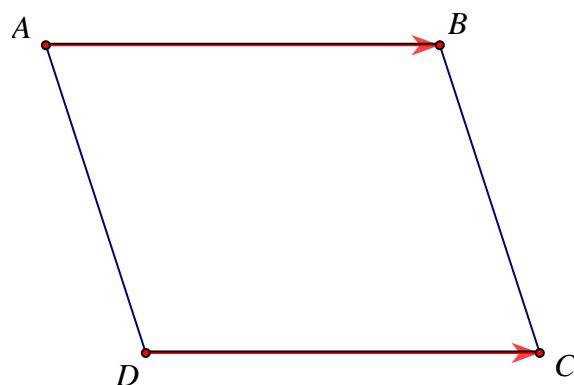
Vậy,  $\vec{u} = \vec{v}$  .

Hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng, tuy nhiên không cùng độ dài :  $|\vec{b}| = 5$  ,  $|\vec{c}| = 2$  .

Vì vậy  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  không bằng nhau.

**Câu 5.** Chứng minh rằng tứ giác ABCD là một hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  .

**Hướng dẫn giải**



– Giả sử ABCD là hình bình hành. Khi đó  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$ .

Vì  $AB \parallel DC$  nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng phương. Từ hình vẽ dễ thấy  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng.

Vì  $AB = DC$  nên  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ .

Vậy  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

– Giả sử  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ .

Từ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng suy ra chúng cùng phương, hay  $AB \parallel DC$ .

Từ  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$  suy ra  $AB = DC$ .

Vậy  $ABCD$  là hình bình hành.

Vậy tứ giác  $ABCD$  là một hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .