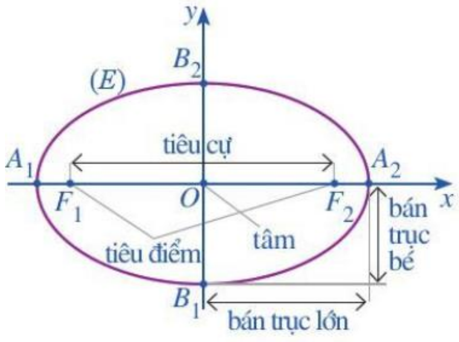
BÀI 1. ELIP

Trang 39, 40

Hoạt động 1 trang 39 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó a > b > 0 (Hình 2).



Hình 2

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E).

b) (E) cắt trục Ox tại các điểm A_1, A_2 và cắt trục Oy tại các điểm B_1, B_2. Tìm độ dài các đoạn thẳng OA_2 và OB_2.

Lời giải:

a) Toạ độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E) là $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$.

b)

+) Vì A_2 thuộc trục Ox nên toạ độ của A_2 có dạng $\left(x_{A_2};0\right)$.

Mà A_2 thuộc (E) nên $\frac{x_{A_2}^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1 \Rightarrow x_{A_2}^2=a^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{A_2}=a \\ x_{A_2}=-a \end{array}\right.$.

Ta thấy A_2 nằm bên phải điểm O trên trục Ox nên $x_{A_2}>0 \Rightarrow x_{A_2}=a \Rightarrow A_2(a; 0)$.

Khi đó $OA_2=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{a^2}=a$ (vì a > 0).

Vậy $OA_2 = a$.

+) Vì B_2 thuộc trục Oy nên toạ độ của B_2 có dạng $\left(0;\, y_{B_2}\right)$.

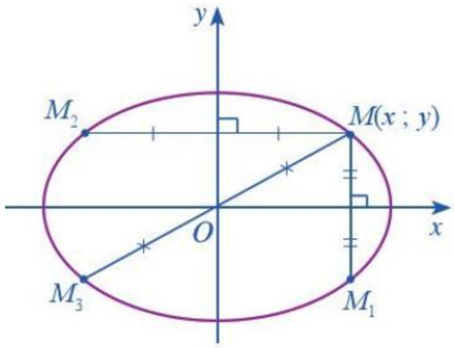
Mà B_2 thuộc (E) nên $\frac{0^2}{a^2}+\frac{y_{B_2}^2}{b^2}=1 \Rightarrow y_{B_2}^2=b^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_{B_2}=b \\ y_{B_2}=-b \end{array}\right.$.

Ta thấy B_2 nằm bên trên điểm O trên trục Oy nên $y_{B_2}>0 \Rightarrow y_{B_2}=b \Rightarrow$ $B_2(0; b)$. Khi đó OB_2 = $\sqrt{(0-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{b^2}=b$ (vì b > 0).

Vậy OB_2 = b.

Hoạt động 2 trang 40 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó a > b > 0. Cho điểm M(x; y) nằm trên (E) (Hình 3).



Hình 3

a) Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox. Tìm toạ độ của điểm M_1. Điểm M_1 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?

b) Gọi M_2 là điểm đối xứng của M qua trục Oy. Tìm toạ độ của điểm M_2. Điểm M_2 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?

c) Gọi M_3 là điểm đối xứng của M qua gốc O. Tìm toạ độ của điểm M_3. Điểm M_3 có nằm trên (E) hay không? Tại sao?

Lời giải:

Theo đề bài, M(x; y) nằm trên (E) nên ta có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

a) M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox, suy ra M_1 có toạ độ là (x; –y).

Ta có $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Do đó M_1 cũng thuộc (E).

b) M_2 là điểm đối xứng của M qua trục Oy, suy ra M_2 có toạ độ là (–x; y).

Ta có $\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Do đó M_2 cũng thuộc (E).

c) M_3 là điểm đối xứng của M qua gốc O, suy ra M_3 có toạ độ là (–x; –y).

Ta có $\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Do đó M_3 cũng thuộc (E).

Trang 41

Hoạt động 3 trang 41 Chuyên đề Toán 10:

a) Nêu nhận xét về vị trí bốn đỉnh của elip (E) với bốn cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

b) Cho điểm M(x; y) thuộc elip (E). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của x và của y.

Lời giải:

a) Bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

b) Nếu điểm M(x; y) thuộc (E) thì $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

+) Vì $\frac{y^2}{b^2}\ge 0$ nên $\frac{x^2}{a^2}\le 1\Rightarrow x^2\le a^2\Rightarrow -a\le x\le a.$

Do đó:

Giá trị nhỏ nhất của x là –a khi x = –a, y = 0.

Giá trị lớn nhất của x là a khi x = a, y = 0.

+) Vì $\frac{x^2}{a^2}\ge 0$ nên $\frac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow y^2\le b^2\Rightarrow -b\le y\le b.$

Do đó:

Giá trị nhỏ nhất của y là –b khi x = 0, y = –b.

Giá trị lớn nhất của y là b khi x = 0, y = b.

Luyện tập 1 trang 41 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của elip, biết $A_1(-4; 0)$ và $B_2(0; 2)$ là hai đỉnh của nó.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$.

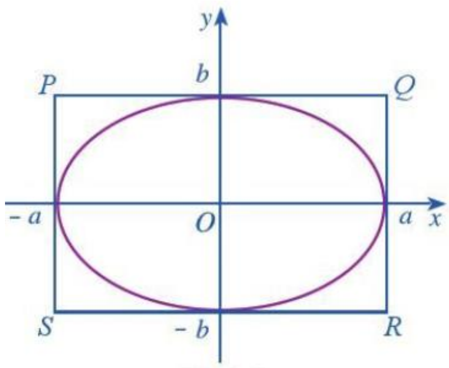
Elip đã cho có hai đỉnh là $A_1(-4; 0)$ và $B_2(0; 2)$ nên a = 4, b = 2 hoặc a = 2, b = 4.

Mà a > b nên a = 4, b = 2.

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ hay $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Hoạt động 4 trang 41 Chuyên đề Toán 10:

Quan sát elip (E) có phương trinh chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó a > b > 0 và hình chữ nhật cơ sở PQRS của (E) (Hình 5).



Hình 5

a) Tính tỉ số giữa hai cạnh $\frac{QR}{PQ}$ của hình chữ nhật PQRS.

b) Tỉ số $\frac{QR}{PQ}$ phản ánh đặc điểm gì của (E) về hình dạng?

Lời giải:

a) Ta thấy Q(a; b), R(a; –b) nên QR = $\sqrt{(a-a)^2+(-b-b)^2}=\sqrt{(-2b)^2}=2b$.

Ta thấy P(–a; b), Q(a; b) nên PQ = $\sqrt{(a-(-a))^2+(b-b)^2}=\sqrt{(2a)^2}=2a$.

Vậy $\frac{QR}{PQ}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$.

b) Tỉ số $\frac{b}{a}$ phản ánh cụ thể hình dạng của (E) như sau:

– Nếu tỉ số $\frac{b}{a}$ càng bé thì hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó (E) càng "gầy".

– Nếu tỉ số $\frac{b}{a}$ càng lớn thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó (E) càng "béo".

Trang 42, 43

Luyện tập 2 trang 42 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

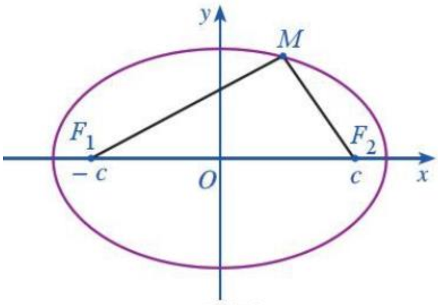
Theo đề bài elip có tiêu cự bằng 12 $\Rightarrow$ 2c = 12 $\Rightarrow$ c = 6.

Elip có tâm sai bằng $\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{6}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow a = 10 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$ hay $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

Hoạt động 5 trang 43 Chuyên đề Toán 10:

Giả sử đường elip (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ với $0 < c < a$. Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (Hình 8).



Hình 8

Khi đó, $F_1(– c; 0)$, $F_2(c; 0)$ là các tiêu điểm của elip (E). Giả sử điểm M(x; y) thuộc elip (E). Chứng minh rằng:

a) $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$;

b) $MF_2^2 = x^2 – 2cx + c^2 + y^2$;

c) $MF_1^2 – MF_2^2 = 4cx$.

Lời giải:

a) $MF_1^2 = [x – (– c)]^2 + (y – 0)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$.

b) $MF_2^2 = (x – c)^2 + (y – 0)^2 = x^2 – 2cx + c^2 + y^2$.

c) $MF_1^2 – MF_2^2 = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) – (x^2 – 2cx + c^2 + y^2) = 4cx$.

Trang 44, 45

Hoạt động 6 trang 44 Chuyên đề Toán 10:

Sử dụng đẳng thức c) ở trên và đẳng thức $MF_1 + MF_2 = 2a$, chứng minh:

a) $MF_1 – MF_2 = \frac{2c}{a}x$;

b) $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$;

c) $MF_2 = a – \frac{c}{a}x$.

Lời giải:

a) $MF_1^2 – MF_2^2 = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1 – MF_2) = 4cx \Rightarrow 2a(MF_1 – MF_2) = 4cx$

$\Rightarrow MF_1 – MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2c}{a}x$.

b) Từ $MF_1 + MF_2 = 2a$ và $MF_1 - MF_2 = \frac{2c}{a}x$ ta suy ra:

$(MF_1 + MF_2) + (MF_1 – MF_2) = 2a + \frac{2c}{a}x \Rightarrow 2MF_1 = 2a + \frac{2c}{a}x \Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x$.

c) Từ $MF_1 + MF_2 = 2a$ và $MF_1 - MF_2 = \frac{2c}{a}x$ ta suy ra:

$(MF_1 + MF_2) – (MF_1 – MF_2) = 2a – \frac{2c}{a}x \Rightarrow 2MF_2 = 2a – \frac{2c}{a}x \Rightarrow MF_2 = a – \frac{c}{a}x$.

Luyện tập 3 trang 45 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ với tiêu điểm $F_2(\sqrt{5};0)$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho độ dài F_2M nhỏ nhất.

Lời giải:

Có $a^2 = 9$, suy ra $a = 3$.

Gọi toạ độ của M là (x; y).

Theo công thức độ dài bán kính qua tiêu ta có $F_2M = 3 – \frac{\sqrt{5}}{3}x$.

Mặt khác, vì M thuộc (E) nên $x \le 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}x \le \frac{\sqrt{5}}{3}3 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}x \le \sqrt{5} \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{3}x \ge -\sqrt{5}$

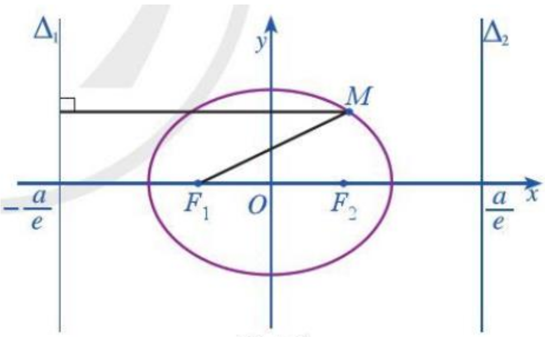
$\Rightarrow F_2M = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x \geq 3 - \sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi x = 3.

Vậy độ dài F_2M nhỏ nhất khi M có hoành độ bằng 3, tức là M trùng với đỉnh (3; 0) của elip.

Hoạt động 7 trang 45 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0). Xét đường thẳng Δ_1: $x = -\frac{a}{e}$.



Hình 9

Với mỗi điểm M(x; y) ∈ (E) (Hình 9), tính:

a) Khoảng cách d(M, Δ_1) từ điểm M(x; y) đến đường thẳng Δ_1.

b) Tỉ số $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}$.

Lời giải:

a) Viết lại phương trình đường thẳng Δ_1 ở dạng: $x + 0y + \frac{a}{e} = 0$. Với mỗi điểm M(x; y) thuộc (E), ta có: $d(M, \Delta_1) = \frac{\left|x + 0y + \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|a + ex|}{e}$.

b) Do $MF_1 = a + ex > 0$ nên $MF_1 = |a + ex|$, suy ra $d(M, \Delta_1) = \frac{MF_1}{e}$. Vậy $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = e$.

Trang 46, 47

Luyện tập 4 trang 46 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của elip, biết tiêu điểm $F_2(5; 0)$ và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $x = \frac{36}{5}$.

Lời giải:

Elip có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$ nên c = 5.

Theo đề bài ta có, đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(5; 0)$ là $x = \frac{36}{5}$.

Suy ra $\frac{a}{e} = \frac{36}{5} \Rightarrow \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{36}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{36}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{5} = \frac{36}{5} \Rightarrow a^2 = 36.$

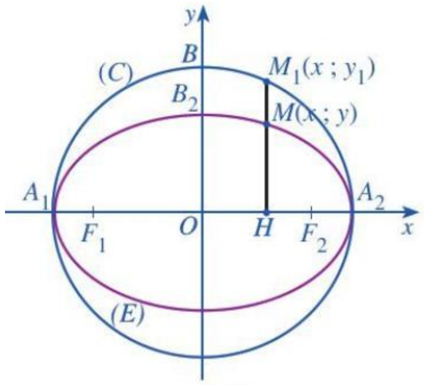
Suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 5^2 = 36 - 25 = 11$.

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$

Hoạt động 8 trang 46 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0). Xét đường tròn (C) tâm O bán kính a có phương trình là $x^2 + y^2 = a^2$.

Xét điểm M(x; y) ∈ (E) và điểm $M_1(x; y_1)$ ∈ (C) sao cho y và y_1 luôn cùng dấu (khi M khác với hai đỉnh A_1, A_2 của (E)) (Hình 10).



Hình 10

a) Từ phương trình chính tắc của elip (E), hãy tính y^2 theo x^2.

Từ phương trình của đường tròn (C), hãy tính y_1^2 theo x^2.

b) Tính tỉ số $\frac{HM}{HM_1} = \frac{y}{y_1}$ theo a và b.

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \Rightarrow y^2=\frac{\left(a^2-x^2\right)b^2}{a^2}$;

$x^2+y_1^2=a^2 \Rightarrow y_1^2=a^2-x^2.$

b) Từ a) ta suy ra $\frac{y^2}{y_1^2}=\frac{\frac{\left(a^2-x^2\right)b^2}{a^2}}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y}{y_1}=\frac{b}{a}$. Vậy $\frac{HM}{HM_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{b}{a}$.

Hoạt động 9 trang 47 Chuyên đề Toán 10:

Vẽ $\text{elip}(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải:

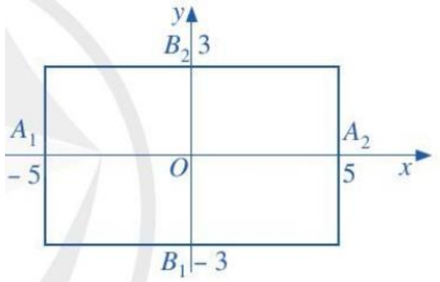
Để vẽ elip (E), ta có thể làm như sau:

Ta thấy a = 5, b = 3. (E) có các đỉnh là A_1(– 5; 0), A_2(5; 0), B_1(0; – 3), B_2(0; 3).

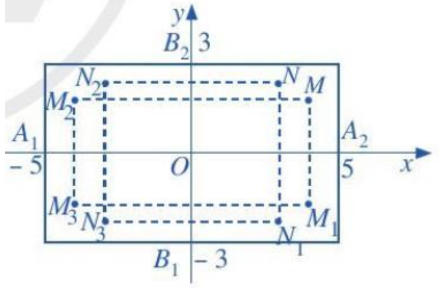
Bước 1. Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng x = – 5, x = 5, y = – 3, y = 3.

Bước 2. Tìm một số điểm cụ thể thuộc elip, chẳng hạn ta thấy điểm $M\left(4;\frac{9}{5}\right)$ và điểm $N\left(3;\frac{12}{5}\right)$ thuộc (E). Do đó các điểm $M_1\left(4;-\frac{9}{5}\right), M_2\left(-4;\frac{9}{5}\right), M_3\left(-4;-\frac{9}{5}\right)$, $N_1\left(3;-\frac{12}{5}\right), N_2\left(-3;\frac{12}{5}\right), N_3\left(-3;-\frac{12}{5}\right)$, thuộc (E).

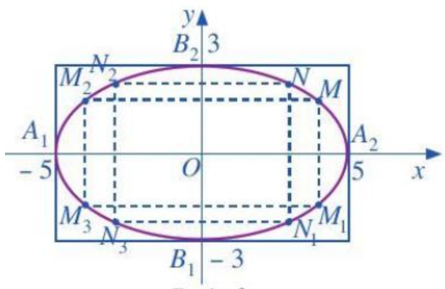
Bước 3. Vẽ đường elip (E) đi qua các điểm cụ thể trên, nằm ở phía trong hình chữ nhật cơ sở và tiếp xúc với các cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại bốn đỉnh của (E) là A_1(–5; 0), A_2(5; 0), B_1(0; –3), B_2(0; 3).



Bước 1



Bước 2



Bước 3

Trang 48

Bài 1 trang 48 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) Độ dài trục lớn bằng 6 và tiêu điểm là $F_1(–2; 0)$;

b) Tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$;

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) bằng 20.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

Theo đề bài ta có:

– Độ dài trục lớn bằng 6, suy ra 2a = 6, suy ra a = 3, suy ra $a^2 = 9$.

– Elip có một tiêu điểm là $F_1(– 2; 0)$, suy ra c = 2, suy ra $b^2 = a^2 – c^2 = 3^2 – 2^2 = 5$.

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$

b) Gọi phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

Theo đề bài ta có:

– Elip có tiêu cự bằng 12, suy ra 2c = 12, suy ra c = 6, suy ra $c^2 = 36$.

– Elip có tâm sai bằng $\frac{3}{5}$, suy ra $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{6}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=10$

$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

c) Gọi phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

Theo đề bài ta có:

– Elip có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$, suy ra $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{5}{9}\Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$

$\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=\frac{2}{3}a\,(1).$

– Chu vi hình chữ nhật cơ sở của elip bằng 20 $\Rightarrow 2(2a+2b)=20\Rightarrow a+b=5\,(2).$

Thế (1) vào (2) ta được $\frac{2}{3}a+a=5\Rightarrow\frac{5}{3}a=5\Rightarrow a=3\Rightarrow b=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}.3=2.$

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ hay $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

Bài 2 trang 48 Chuyên đề Toán 10:

Tìm tâm sai của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) Độ dài bán trục lớn gấp hai lần độ dài bán trục bé;

b) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.

Lời giải:

a) Gọi độ dài bán trục lớn và bán trục bé lần lượt là a và b, ta có a = 2b.

Suy ra c = $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy tâm sai của elip là $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Giả sử elip có một đỉnh trên trục lớn là A(a; 0) (a > 0) và một đỉnh trên trục bé là B(0; b) (b > 0).

Khi đó theo đề bài ta có AB = 2c = $2\sqrt{a^2-b^2}$.

$\Rightarrow \sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=2\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow a^2+b^2=4\left(a^2-b^2\right)$

$\Rightarrow 3a^2=5b^2\Rightarrow b^2=\frac{3}{5}a^2\Rightarrow c^2=a^2-\frac{3}{5}a^2=\frac{2}{5}a^2$

$\Rightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy elip có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài 3 trang 48 Chuyên đề Toán 10:

Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm. Biết elip này có bán trục lớn a ≈ 149598261 km và tâm sai e ≈ 0,017. Tìm khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

Chọn hệ trục toạ độ sao cho Mặt Trời trùng với tiêu điểm F_1 của elip. Khi đó, áp dụng công thức bán kính qua tiêu ta có, khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời là:

$MF_1 = a + ex$ với x là hoành độ của điểm biểu diễn Trái Đất và $-a \le x \le a$.

Do đó $a + e . (-a) \le MF_1 \le a + e . a$

hay $147055090 \le MF_1 \le 152141431$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời lần lượt là 147055090 km và 152141431 km.

Bài 4 trang 48 Chuyên đề Toán 10:

Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm toạ độ điểm $M \in (E)$ sao cho độ dài F_2M lớn nhất, biết F_2 là một tiêu điểm có hoành độ dương của (E).

Lời giải:

Elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 25$ và $b^2 = 9 \Rightarrow a = 5$ và $b = 3$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi toạ độ của M là (x; y). Áp dụng công thức bán kính qua tiêu ta có:

$MF_2 = a - ex = a - \frac{c}{a}x = 5 - \frac{4}{5}x$.

Mà $x \geq -a$ hay $x \geq -5 \Rightarrow \frac{4}{5}x \geq \frac{4}{5} \cdot (-5) \Rightarrow -\frac{4}{5}x \leq -5$

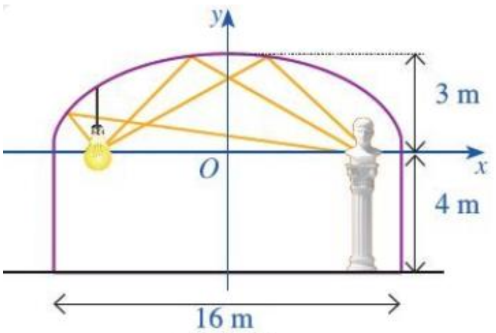
$\Rightarrow MF_2 \leq 5 - \frac{4}{5} \cdot (-5) \Rightarrow MF_2 \leq 9$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = -5$.

Vậy độ dài F_2M lớn nhất khi M có toạ độ (–5; 0).

Bài 5 trang 48 Chuyên đề Toán 10:

Hình 11 minh hoạ mặt cắt đứng của một căn phòng trong bảo tàng với mái vòm trần nhà của căn phòng đó có dạng một nửa đường elip. Chiều rộng của căn phòng là 16 m, chiều cao của tượng là 4 m, chiều cao của mái vòm là 3 m.



Hình 11

a) Viết phương trình chính tắc của elip biểu diễn mái vòm trần nhà trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét).

b) Một nguồn sáng được đặt tại tiêu điểm thứ nhất của elip. Cần đặt bức tượng ở vị tri có toạ độ nào để bức tượng sáng rõ nhất? Giả thiết rằng vòm trần phản xạ ánh sáng.

Biết rằng, một tia sáng xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip thi sẽ đi qua tiêu điểm còn lại.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0).

Nhìn hình vẽ ta thấy:

– Độ dài trục lớn của elip bằng 16 $\Rightarrow$ 2a = 16 $\Rightarrow$ a = 8 (m).

– Độ dài bán trục bé của elip bằng 3 $\Rightarrow$ b = 3 (m).

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ hay $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$.

b) Vì một tia sáng xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip thi sẽ đi qua tiêu điểm còn lại nên để bức tượng sáng rõ nhất ta sẽ đặt bức tượng ở tiêu điểm còn lại. Toạ độ của vị trí này là (c; 0).

Có c = $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}$.

Vì tượng cao 4 m nên ta cần đặt bức tượng ở vị trí có toạ độ là $\left(\sqrt{55};-4\right)$.