

Công thức tính giá trị nhỏ nhất – giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác

1. Lí thuyết

a) Sử dụng tính bị chặn của hàm số lượng giác

$$-1 \leq \sin[u(x)] \leq 1; 0 \leq \sin^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\sin[u(x)]| \leq 1$$

$$-1 \leq \cos[u(x)] \leq 1; 0 \leq \cos^2[u(x)] \leq 1; 0 \leq |\cos[u(x)]| \leq 1$$

b) Dạng $y = a \sin x + b \cos x + c$

Bước 1: Đưa hàm số về dạng chỉ chứa $\sin[u(x)]$ hoặc $\cos[u(x)]$:

$$y = a \sin x + b \cos x + c = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) + c$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha) + c \text{ với } \alpha \text{ thỏa mãn}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bước 2: Đánh giá $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) + c \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Công thức

a) Dạng $y = a \sin[u(x)] + b$ hoặc $y = a \cos[u(x)] + b$

Ta có: $-|a| + b \leq y \leq |a| + b$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $-|a| + b$ và giá trị lớn nhất là $|a| + b$.

b) Dạng $y = a \sin^2[u(x)] + b$; $y = a |\sin[u(x)]| + b$;

Dạng $y = a \cos^2[u(x)] + b$; $y = a |\cos[u(x)]| + b$ (với a khác 0)

+ Trường hợp 1: $a > 0$. Ta có: $b \leq y \leq a + b$.

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là b và giá trị lớn nhất là $a + b$.

+ Trường hợp 2: $a < 0$. Ta có: $a + b \leq y \leq b$.

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $a + b$ và giá trị lớn nhất là b .

c) Dạng $y = a \sin x + b \cos x + c$

$$\text{Ta có: } -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{a^2 + b^2} + c$ và giá trị lớn nhất là $\sqrt{a^2 + b^2} + c$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau:

a) $y = 3\sin(2x+1) - 7$

b) $y = -2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Lời giải

a) $y = 3\sin(2x+1) - 7$

Cách 1: Áp dụng công thức ta có: $-3 - 7 \leq y \leq 3 - 7 \Leftrightarrow -10 \leq y \leq -4$

Cách 2: Giải chi tiết

Ta có $-1 \leq \sin(2x+1) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 3\sin(2x+1) \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq \sin(2x+1) - 7 \leq -4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq y \leq -4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là -4 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -10.

b) $y = -2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Cách 1: Áp dụng công thức ta có: $-2 + 1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$

Cách 2: Giải chi tiết

Ta có $0 \leq \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 1 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 5\sin 2x - 12\cos x + 2$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng công thức ta có:

$$-\sqrt{5^2+12^2}+2 \leq y \leq \sqrt{5^2+12^2}+2 \Leftrightarrow -11 \leq y \leq 15.$$

Cách 2: Giải chi tiết

$$\text{Ta có: } y = 5\sin 2x - 12\cos x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = 13 \left(\frac{5}{13} \sin 2x - \frac{12}{13} \cos 2x \right) + 2$$

$$\Leftrightarrow y = 13(\sin 2x \cos \alpha - \cos 2x \sin \alpha) + 2$$

$$\Leftrightarrow y = 13\sin(2x - \alpha) + 2 \text{ với } \frac{5}{13} = \cos \alpha; \frac{12}{13} = \sin \alpha.$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin(2x - \alpha) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -13 \leq 13\sin(2x - \alpha) \leq 13 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 13\sin(2x - \alpha) + 2 \leq 15 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq y \leq 15$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 15 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -11.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt

là:

- A.** 4 và 7 **B.** -2 và 7 **C.** 5 và 9 **D.** -2 và 2

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$ là:

- A.** 3 và 10 **B.** 1 và 11 **C.** 6 và 10 **D.** -1 và 13

Câu 3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2|\sin x|$ lần lượt là

- A.** 1 và 0 **B.** 3 và 2 **C.** 3 và -2 **D.** 3 và 1

Đáp án: 1 – C, 2 – B, 3 – D