

Bài tập Hàm số lượng giác - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Hàm số :

$$y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{3 + \sin x}}$$

có tập xác định là:

- A. \mathbb{R}
- B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- C. $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- D. \emptyset

Lời giải:

Với mọi x thì:

$$\sin x \geq -1 \Rightarrow \sin x + 3 \geq 2 > 0$$

Do đó, hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn đáp án C

Bài 2. Hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là:

- A. Hàm chẵn.
- B. Hàm không có tính chẵn, lẻ.

C. Hàm không có tính tuần hoàn.

D. Hàm lẻ.

Lời giải:

Do $y = \sin x$ là hàm lẻ, $y = \cos 2x$ là hàm chẵn

Nên hàm số $y = \sin x \cos 2x$ là hàm lẻ

Chọn đáp án D

Bài 3. Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\sin^3 x}$ thỏa mãn tính chất nào sau đây?

A. Hàm chẵn.

B. Hàm không có tính chẵn, lẻ.

C. Xác định trên \mathbb{R} .

D. Hàm lẻ.

Lời giải:

Do $y = \sin x$

nên $y = \sin^3 x$ là hàm lẻ và $y = \tan 3x$ là hàm lẻ

nên $y = \frac{\tan 3x}{\sin^3 x}$ là hàm số chẵn

Chú ý: có thể kiểm tra trực tiếp hai điều kiện

$$\begin{cases} \forall x \in D \rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Để thấy hàm số $y = f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin^3 x}$ là hàm chẵn

Chọn đáp án A

Bài 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm lẻ?

A. $y = \sin 2x$

B. $y = \sin 2x \cdot \cos x$.

C. $y = \frac{\tan x}{\cos x}$

D. $y = \frac{\cot x}{\sin x}$

Lời giải:

Do $y = \tan x$ là hàm lẻ

$y = \cos x$ là hàm chẵn

Nên hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x}$ là hàm lẻ

Chọn đáp án C

Bài 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

A. $y = \frac{\tan 2x}{\tan^2 x + 1}$

B. $y = \sin x \cdot \cos 2x$

C. $y = \cos x \cdot \sin^2 x$

D. $y = \cos x \sin 3x$.

Lời giải:

Do $y = \sin^2 x$ và $y = \cos x$ là hàm chẵn nên hàm số $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ là hàm chẵn.

Chọn đáp án C

Bài 6. Hàm số $y = \frac{\cos x}{(2\sin x - \sqrt{3})}$ có tập xác định là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- B. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- C. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- D. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \frac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}}$ xác định khi:

$$2\sin x - \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Chọn đáp án D

Bài 7. Hàm số $y = \tan \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ có tập xác định là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- B. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- C. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- D. \mathbb{R} .

Lời giải:

Ta có:

$$y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

Nên hàm số xác định khi:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} &\neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi\end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 8. Tập xác định của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ xác định

Khi và chỉ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Chọn đáp án D

Bài 9. Hàm số :

$$y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\sin x}}$$

có tập xác định là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải:

Do $\begin{cases} 1 - \sin x \geq 0 \\ 1 - \cos x \geq 0 \end{cases}$

Nên hàm số $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\sin x}}$ xác định

Khi $1 - \sin x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn đáp án C

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$ và $k \in \mathbb{Z}$.

Khoảng nào dưới đây không nằm trong tập xác định của hàm số?

A. $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$.

B. $(\pi + k2\pi; 3\frac{\pi}{2} + k2\pi)$.

C. $(3\frac{\pi}{4} + k2\pi; 3\frac{\pi}{2} + k2\pi)$.

D. $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; 3\frac{\pi}{4} + k2\pi)$.

Lời giải:

Hàm số $y = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$ xác định

$$\text{Khi } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Do khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ có chứa $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$

Nên khoảng này không nằm trong tập xác định của hàm số

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x$ là:

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 4.\sin^2 x.\cos^2 x \\ &= 3 - (2.\sin x.\cos x)^2 = 3 - \sin^2 2x \end{aligned}$$

Với mọi x ta có:

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq 3 - \sin^2 2x \geq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 2

Bài 2: Hàm số $y = 1 - \cos 2x$ có chu kì là:

Lời giải:

Tập xác định của hàm số đã cho là \mathbb{R} mà $\cos^2 x$ có chu kì là π nên $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ cũng có chu kì là π

Bài 3: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

Lời giải:

Hàm số $\sin x$ có chu kì là 2π , hàm số $\tan x$ có chu kì là π

Vậy hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \tan x$ có chu kì khác nhau.

Bài 4: Chu kì của hàm số $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ là:

Lời giải:

Chu kì của hàm số:

$$y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ là } T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Chu kì của hàm số:

$$y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ là } T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Do đó, hàm số đã cho có chu kì $T = \pi$

Bài 5: Chu kì của hàm số $y = \sin^2 x - 2\cos^3 x$ là:

Lời giải:

Chu kì của hàm số $y = \sin^2 x$ là π , chu kì của hàm số $y = \cos^3 x$ là $\frac{2\pi}{3}$ nên chu kì của hàm số đã cho là 2π

Bài 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào không là hàm chẵn và cũng không là hàm lẻ?

Lời giải:

Xét phương án B:

$$y = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin x - \cos x$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}; \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$$

$$-f(x) = -\sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(-x); f(-x) \neq -f(x)$$

Do đó, hàm số đã cho không là hàm chẵn và cũng không phải là hàm lẻ

Bài 7: Hàm số $y = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$ có giá trị lớn nhất là:

Lời giải:

Ta có:

$$y = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos 2x$$

$$= 1 + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= 1 + \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vì với mọi } x \text{ thì } \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

Suy ra hàm số có giá trị lớn nhất là $1 + \sqrt{2}$

Bài 8: Hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ có giá trị nhỏ nhất là:

Lời giải:

Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski

Ta có:

$$(\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2 \leq [(\sqrt{3})^2 + (-1)^2] \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq \sqrt{3} \sin x - \cos x \leq 2$$

Cách 2:

Ta có:

$$y = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x \right)$$

$$= 2 \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow -2 \leq 2 \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là -2.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}$. Mệnh đề nào trong số các mệnh đề sau đây là sai?

Lời giải:

Hàm số $y = f_1 = \cos x - 1$ có chu kỳ $T_1 = 2\pi$

Hàm số $y = f_2 = \cos x + 2$ có chu kỳ $T_2 = 2\pi$

Do đó, hàm số $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}$ có chu kỳ $T = 2\pi$

Vậy D sai.

Bài 10: Hàm số nào sau đây có giá trị lớn nhất bằng 2?

Lời giải:

Các hàm số $y = \tan x - \cot x$ và $y = 2 \tan x$ không có giá trị lớn nhất, hàm số $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ có giá trị lớn nhất là 1

Cũng có thể nhận ngay ra đáp án C vì :

$$y = \sqrt{2} (\cos x - \sin x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $[-\pi; \frac{3\pi}{2}]$ để hàm số $y = \tan x$

- a) Nhận giá trị bằng 0
- b) Nhận giá trị bằng 1
- c) Nhận giá trị dương
- d) Nhận giá trị âm.

Bài 2 Tìm tập xác định của các hàm số:

$$a) y = \frac{1 + \cos x}{\sin x} ;$$

$$b) y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} ;$$

$$c) y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) ;$$

$$d) y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Bài 3 Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$.

Hướng dẫn giải bài 3:

Ta có $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \sin x \leq 0 \end{cases}$

Mà $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ nên lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên các khoảng này còn giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên các đoạn còn lại ta được đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$

Bài 4 Chứng minh rằng $\sin^2(x + k\pi) = \sin^2 x$ với mọi số nguyên k . Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin^2 x$

Bài 5 Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$

Bài 6 Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

Bài 7 Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $[-\pi; \frac{3\pi}{2}]$ để hàm số $y = \tan x$

a) Nhận giá trị bằng 0.

b) Nhận giá trị bằng 1.

c) Nhận giá trị dương.

d) Nhận giá trị âm.

Bài 8 Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

c) $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$.

d) $y = \cot(x + \frac{\pi}{6})$.

Bài 9 Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$

Bài 10 Chứng minh rằng $\sin^2(x + k\pi) = \sin^2 x$ với mọi số nguyên k . Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin^2 x$.