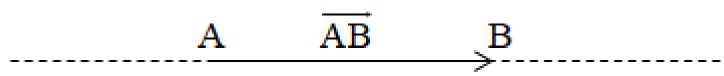
Ôn tập chương V

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

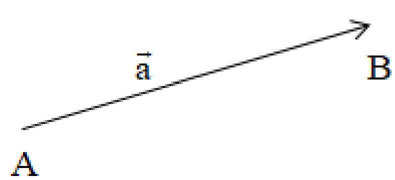


+ Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vectơ $\overrightarrow{AB}$.

+ Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

+ Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là độ dài của $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Như vậy ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

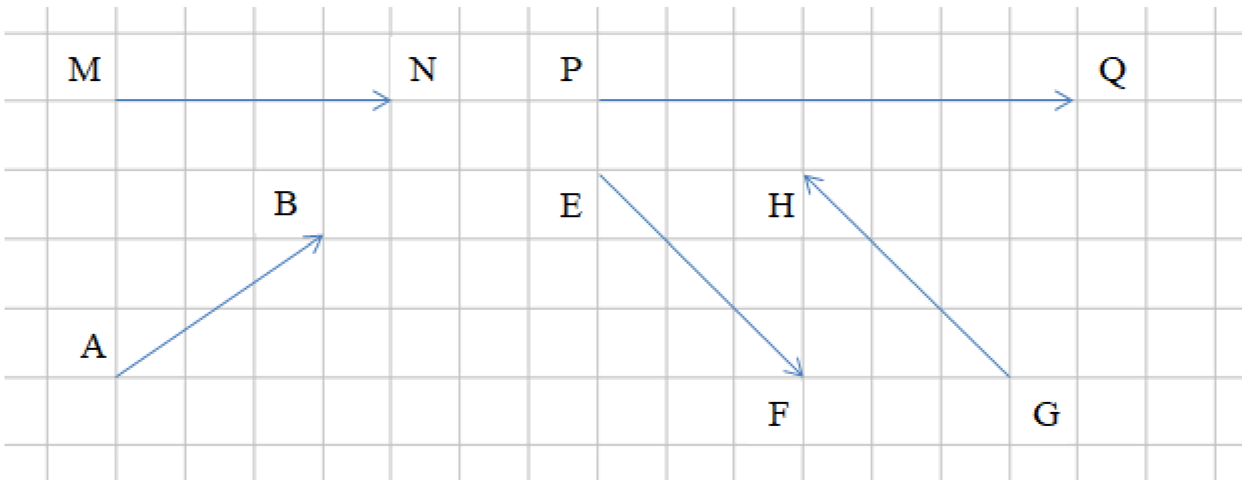
Chú ý: Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ: Tìm các vectơ cùng phương trong hình bên dưới.



Hướng dẫn giải

Trong hình trên, ta có:

+) $\overrightarrow{MN}$ có giá là đường thẳng MN, $\overrightarrow{PQ}$ có giá là đường thẳng PQ, mà hai đường thẳng MN và PQ trùng nhau.

Do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ là hai vectơ cùng phương vì chúng có giá trùng nhau.

+) Ta có: $\overrightarrow{EF}$ có giá là đường thẳng EF, $\overrightarrow{GH}$ có giá là đường thẳng GH, mà hai đường thẳng EF và GH song song với nhau.

Do đó $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{GH}$ là hai vectơ cùng phương vì chúng có giá song song.

Chú ý:

+ Trong hình trên, hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ là hai vectơ cùng hướng.

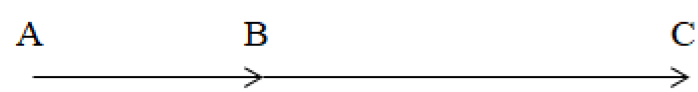
+ Hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{GH}$ cùng phương nhưng ngược hướng với nhau ($\overrightarrow{EF}$ có hướng từ trên xuống dưới và $\overrightarrow{GH}$ có hướng từ dưới lên trên). Ta nói hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{GH}$ là hai vectơ ngược hướng.

Nhận xét:

+ Hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

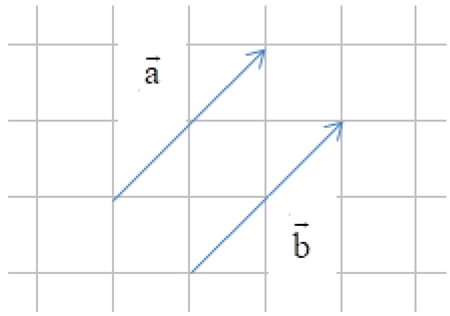
+ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Giải thích: Ta thấy nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau nên chúng cùng phương. Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì ta suy ta hai đường thẳng AB và AC phải song song hoặc trùng nhau. Mà hai đường thẳng này có điểm A là điểm chung, do đó đường thẳng AB và AC trùng nhau. Khi đó ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng. Vì vậy, ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

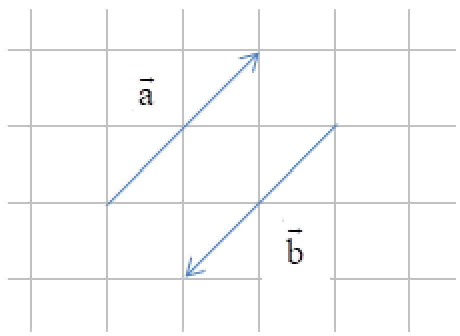


3. Vectơ bằng nhau – Vectơ đối nhau

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

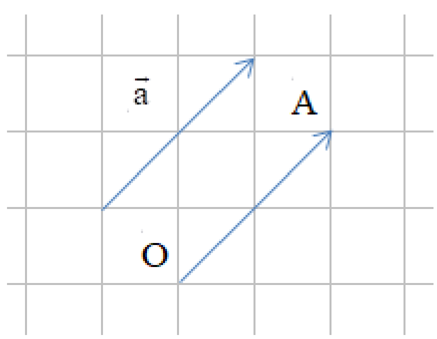


Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó vectơ $\vec{b}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$.



Chú ý:

+ Cho vectơ $\vec{a}$ và điểm O, ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Khi đó độ dài của $\vec{a}$ là độ dài đoạn thẳng OA, kí hiệu là $|\vec{a}|$.



+ Cho đoạn thẳng MN, ta luôn có $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

4. Vectơ-không

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vectơ-không, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý:

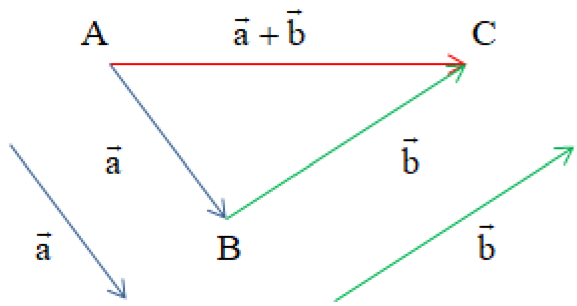
+ Quy ước: vectơ-không có độ dài bằng 0.

+ Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

+ Mọi vectơ-không đều bằng nhau: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = ...$, với mọi điểm A, B, C,...

+ Vectơ đối của vectơ-không là chính nó.

5. Tổng của hai vectơ



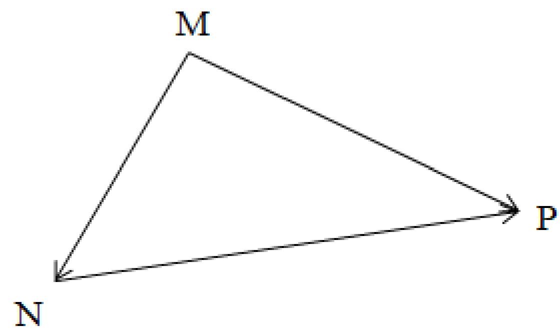
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tùy ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép toán tìm tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

Quy tắc ba điểm

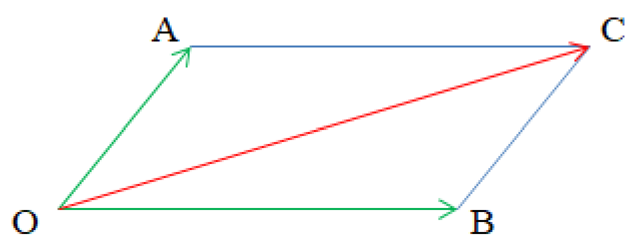
Với ba điểm M, N, P, ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.



Chú ý: Khi cộng vectơ theo quy tắc ba điểm, điểm cuối của vectơ thứ nhất phải là điểm đầu của vectơ thứ hai.

Quy tắc hình bình hành

Nếu OACB là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.



6. Tính chất của phép cộng các vectơ

Phép cộng vectơ có các tính chất sau:

+ Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

+ Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

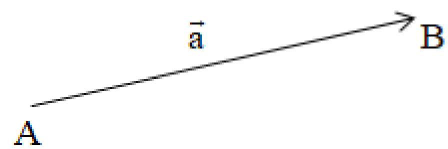
+ Với mọi $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ với $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

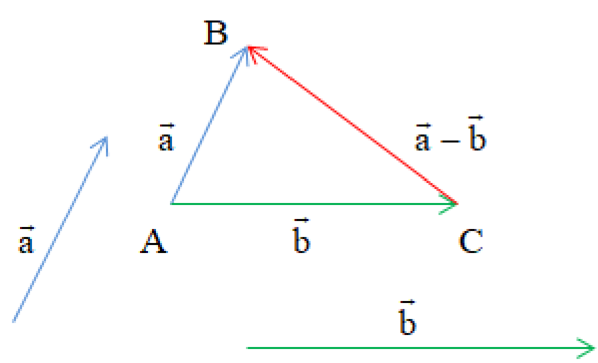
Chú ý: Cho vectơ tùy ý $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Tổng hai vectơ đối nhau luôn bằng vectơ-không: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.



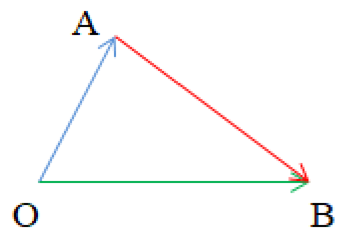
7. Hiệu của hai vectơ



Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép toán tìm hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Chú ý: Cho ba điểm O, A, B, ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.



8. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

9. Tích của một số với một vectơ và các tính chất

Cho số $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0 và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Ta quy ước $0\vec{a}=\vec{0}$ và $k\vec{0}=\vec{0}$.

Người ta còn gọi tích của một số với một vectơ là tích của một vectơ với một số.

Tính chất:

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

+) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$;

+) $\left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;

+) $h\left(k\vec{a}\right)=\left(hk\right)\vec{a}$;

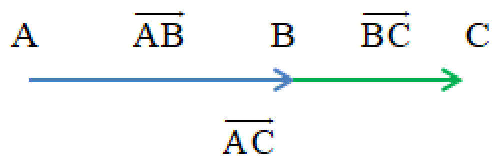
+) $1.\vec{a} = \vec{a}$;

+) $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

10. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

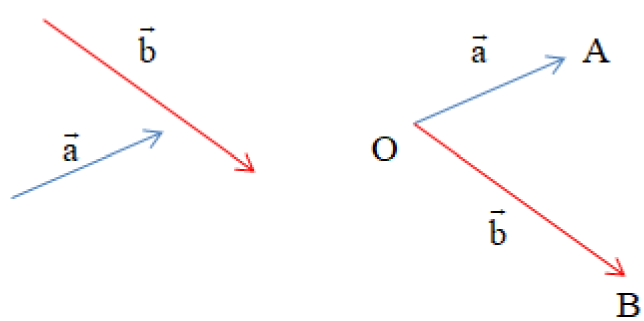
Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k ≠ 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.



Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực (m; n) sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

11. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Góc AOB với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

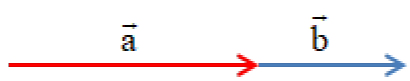
Chú ý:

+ Từ định nghĩa, ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

+ Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.

+ Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

+ Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).



$(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$

$(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$

12. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

a) Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

b) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0° = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Chú ý: Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F}.\vec{d}$.

13. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$; $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

B. Bài tập tự luyện

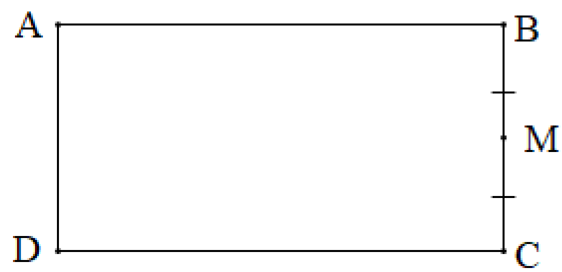
Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là trung điểm đoạn BC.

a) Gọi tên các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

b) Gọi tên các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{BM}$.

c) Chỉ ra các cặp vectơ bằng nhau và đối nhau có các điểm đầu hoặc điểm cuối là A, B, C, D, M.

Hướng dẫn giải



a) Vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ nên $\vec{0}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Các vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BC}$ và khác $\vec{0}$ là các vectơ có giá song song hoặc trùng với $\overrightarrow{BC}$ và có hướng từ trên xuống dưới giống như $\overrightarrow{BC}$.

Các vectơ thỏa mãn 2 điều kiện trên là: $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AD}$.

Vậy có 4 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\vec{0}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AD}$.

b) Vì vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ nên vectơ đối của vectơ-không ngược hướng với $\overrightarrow{BM}$.

Vectơ đối của vectơ-không là chính nó nên $\vec{0}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{BM}$.

Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{BM}$ là các vectơ có giá song song hoặc trùng với $\overrightarrow{BM}$ và có hướng ngược lại với $\overrightarrow{BM}$, nghĩa là các vectơ cần tìm có hướng dưới lên trên.

Các vectơ thỏa mãn 2 điều kiện trên là: $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$.

Vậy có 5 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\vec{0}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$.

c) - Vì ABCD là hình chữ nhật nên AB // CD và AB = CD (tính chất hình chữ nhật)

Mà hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng và hai vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

+ Tương tự ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

+ M là trung điểm của BC nên BM = MC = $\frac{BC}{2}$

Mà hai vectơ $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}$ cùng hướng và hai vectơ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CM}$ cúng hướng.

Do đó $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM}$.

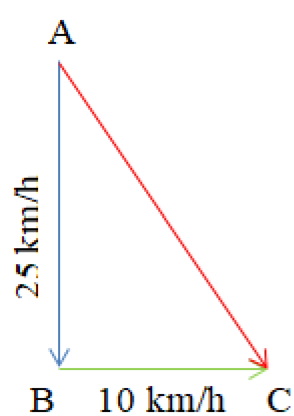
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng độ dài nhưng ngược hướng nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.

Tương tự ta có các cặp vectơ đối nhau là: $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.

Bài 2. Một con thuyền trôi theo hướng nam vận tốc 25 km/h, dòng nước chảy theo hướng đông với vận tốc 10 km/h. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng trăm).

Hướng dẫn giải



Gọi A là vị trí con thuyền xuất phát.

Vận tốc của con thuyền được biểu diễn bởi $\overrightarrow{AB}$.

Vận tốc của dòng nước được biểu diễn bởi $\overrightarrow{BC}$.

Khi đó ta có vectơ tổng của hai vectơ nói trên là $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó độ lớn của vectơ cần tìm là: $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$.

Vì con thuyền trôi theo hướng nam và dòng nước chảy theo hướng đông.

Nên ta có AB ⊥ BC.

Ta có độ lớn vận tốc con thuyền là 25 km/h.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = AB = 25.

Ta có độ lớn vận tốc dòng nước là 10 km/h.

Suy ra $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ = BC = 10.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Định lý Py – ta – go)

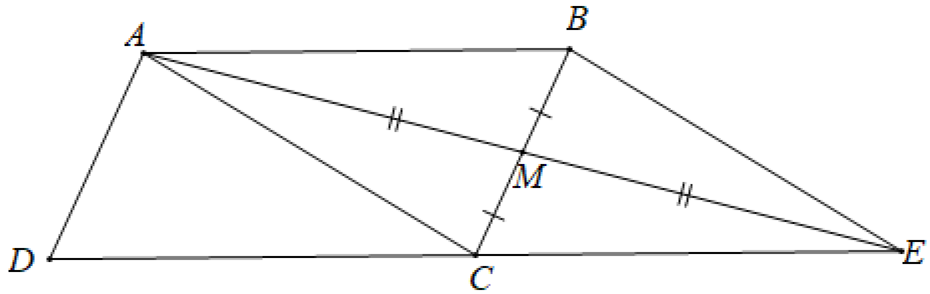
$\Leftrightarrow AC^2 = 25^2 + 10^2 = 725$.

$\Rightarrow AC = 5\sqrt{29} \approx 26{,}93$.

Vậy độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói đến trong bài xấp xỉ bằng 26,93 (km/h).

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải



Gọi E là điểm đối xứng với A qua M.

Khi đó M là trung điểm của BC và AE.

Suy ra tứ giác ABEC là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ (quy tắc hình bình hành)

Mà $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của AE)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

Xét hình bình hành ABCD có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)

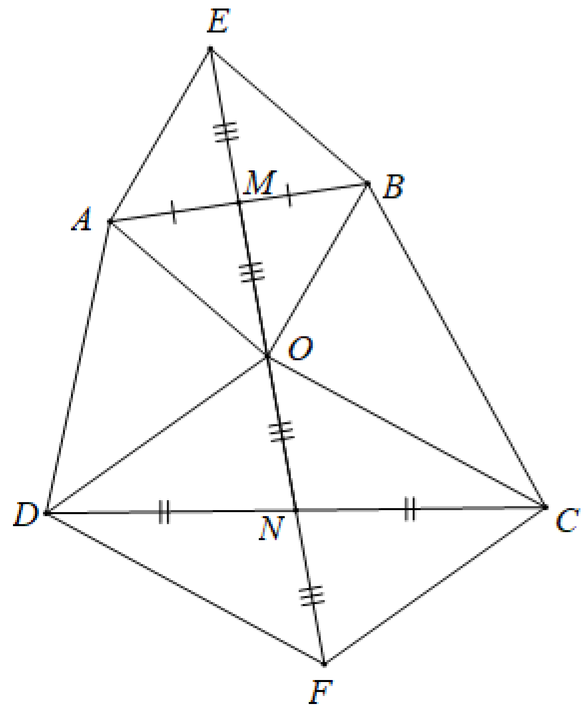
$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2} = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{AD}}{2} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Vậy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải



Gọi E và F lần lượt là điểm đối xứng với O qua M và N.

Suy ra M là trung điểm của AB và EO; N là trung điểm của DC và OF.

Khi đó các tứ giác OAEB và OCFD là các hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành trong hình bình hành OAEB)

Và $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$(quy tắc hình bình hành trong hình bình hành OCFD).

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$

Vì O là trung điểm của MN nên OM = ON, mà OM = ME, ON = MF.

Do đó OE = OF hay O là trung điểm của EF

Suy ra $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}.$

Hướng dẫn giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MG}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

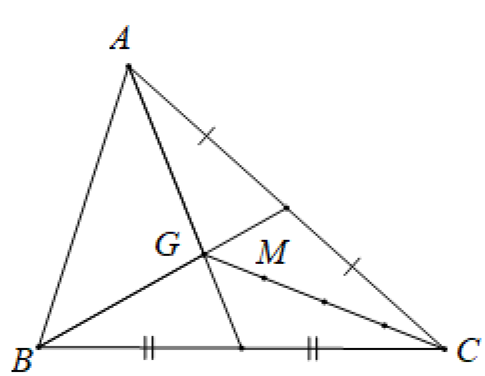
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$

Do đó vecto $\overrightarrow{GM}$ cùng hướng với vecto $\overrightarrow{GC}$ và $GM=\frac{1}{4}GC.$



Vậy điểm M nằm giữa G và C sao cho $GM = \frac{1}{4}GC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}\right)$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC}$

$= \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)$

$= 4\overrightarrow{OM} + \vec{0}$ (vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$)

$= 4\overrightarrow{OM}$

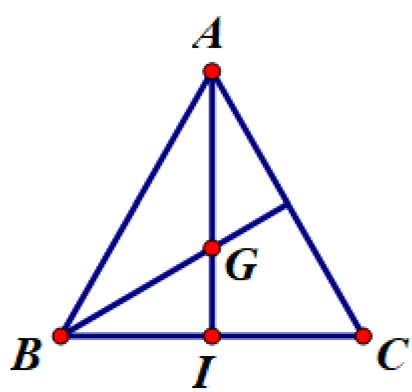
Vậy với mọi điểm O, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a và trọng tâm G. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải



a) Tam giác ABC đều nên ta có AB = AC = BC = a và $BAC = 60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB.AC.\cos BAC = a.a.\cos 60° = \frac{a^2}{2}$.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Nên AG là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Do đó AG cũng là đường phân giác và cũng là đường cao của tam giác ABC.

Ta suy ra $GAB = \frac{BAC}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.

Gọi I là giao điểm của AG và BC.

Ta suy ra I là trung điểm BC.

Do đó BI = $\frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác ABI vuông tại I: $AI^2 = AB^2 – BI^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều có G là trọng tâm.

Ta suy ra AG = $\frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AG}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}\right) = AG.AB.\cos GAB = \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\cos 30° = \frac{a^2}{2}$.

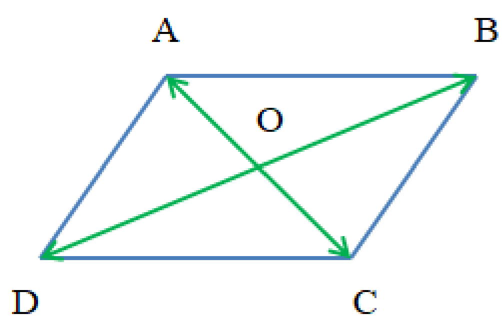
Bài 7. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì O là tâm của hình bình hành ABCD nên O là trung điểm của AC và BD (tính chất hình bình hành).

Do đó ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (1) và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (2).

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

b) Vì ABCD là hình bình hành nên BA // DC và BA = DC.

Mà $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}$ ngược hướng.

Do đó $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{DC}$.

Ta suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

c) Ta có O là trung điểm BD nên DO = OB.

Mà $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OB}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

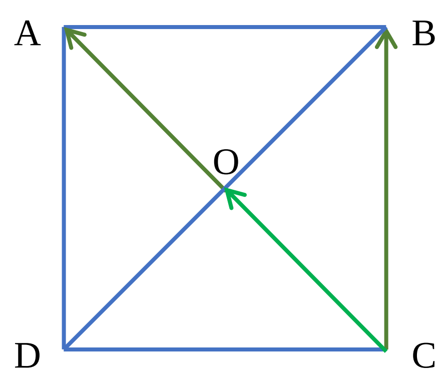
Ta có $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài các vectơ:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$.

b) Vì ABCD là hình vuông nên ta có BD = AC = $a\sqrt{2}$ và AD = CB.

Mà $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}$ ngược hướng.

Do đó $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$.

Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=OD$.

Vì O là tâm của hình vuông ABCD nên O là trung điểm BD.

Do đó OD = $\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ (3)

Lấy (1) + (2) + (3) vế theo vế, ta được: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 10. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

Theo đề ta có: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 + \frac{2}{5}\vec{a}.\vec{b} - 3\vec{a}.\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}|\vec{a}|^2 - \frac{13}{5}\vec{a}.\vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}.1^2 - \frac{13}{5}|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - 3.1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{5} - \frac{13}{5}.1.1.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180°.$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 180°.