

## CHUYÊN ĐỀ III. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

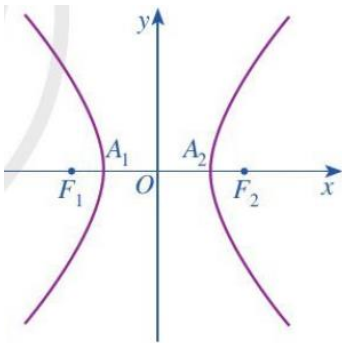
### BÀI 1. HYPEBOL.

#### Trang 49

#### Hoạt động 1 trang 49 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xét hypebol (H) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > 0, b > 0 \text{ (Hình 13).}$$



Hình 13

- Tìm toạ độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của hypebol (H).
- Hypebol (H) cắt trục Ox tại các điểm  $A_1, A_2$ . Tìm độ dài các đoạn thẳng  $OA_1$  và  $OA_2$ .

#### Lời giải:

- Toạ độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của hypebol (H) là:  $F_1(-c; 0)$  và  $F_2(c; 0)$  với  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

b)

+) Vì  $A_1$  thuộc trục Ox nên toạ độ của  $A_1$  có dạng  $(x_{A_1}; 0)$ .

$$\text{Mà } A_1 \text{ thuộc (H) nên } \frac{x_{A_1}^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_{A_1}^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x_{A_1} = a \\ x_{A_1} = -a \end{cases}.$$

Ta thấy  $A_1$  nằm bên trái điểm O trên trục Ox nên  $x_{A_1} < 0 \Rightarrow x_{A_1} = -a \Rightarrow A_1(-a; 0)$ .

$$\text{Khi đó } OA_1 = \sqrt{(-a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-a)^2} = a \text{ (vì } a > 0).$$

Vậy  $OA_1 = a$ .

+) Vì  $A_2$  thuộc trục Ox nên toạ độ của  $A_2$  có dạng  $(x_{A_2}; 0)$ .

$$\text{Mà } A_2 \text{ thuộc (H) nên } \frac{x_{A_2}^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_{A_2}^2 = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x_{A_2} = a \\ x_{A_2} = -a \end{cases}.$$

Ta thấy  $A_2$  nằm bên phải điểm O trên trục Ox nên  $x_{A_2} > 0 \Rightarrow x_{A_2} = a \Rightarrow A_2(a; 0)$ .

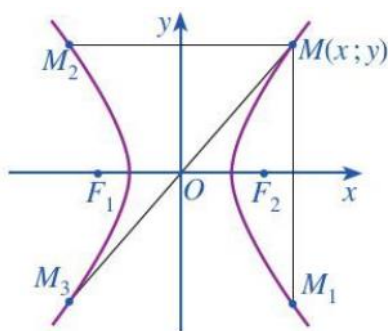
Khi đó  $OA_2 = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a$  (vì  $a > 0$ ).

Vậy  $OA_2 = a$ .

### Hoạt động 2 trang 49 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hypebol (H) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > 0, b > 0 \text{ (Hình 14).}$$



Hình 14

Cho điểm  $M(x; y)$  nằm trên hypebol (H). Gọi  $M_1, M_2, M_3$  lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc O. Các điểm  $M_1, M_2, M_3$  có nằm trên hypebol (H) hay không? Tại sao?

### Lời giải:

Theo đề bài,  $M(x; y)$  nằm trên (H) nên ta có:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

+)  $M_1$  là điểm đối xứng của M qua trục Ox, suy ra  $M_1$  có tọa độ là  $(x; -y)$ .

Ta có  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Do đó  $M_1$  cũng thuộc (H).

+)  $M_2$  là điểm đối xứng của M qua trục Oy, suy ra  $M_2$  có tọa độ là  $(-x; y)$ .

Ta có  $\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Do đó  $M_2$  cũng thuộc (H).

+)  $M_3$  là điểm đối xứng của  $M$  qua gốc  $O$ , suy ra  $M_3$  có tọa độ là  $(-x; -y)$ .

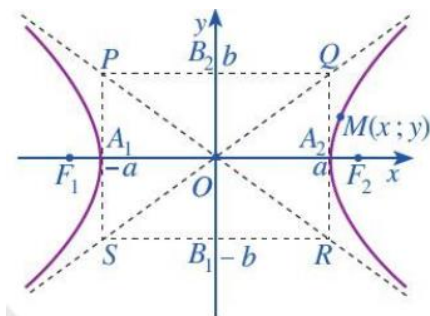
Ta có  $\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Do đó  $M_3$  cũng thuộc  $(H)$ .

### Trang 50, 51

#### Hoạt động 3 trang 50 Chuyên đề Toán 10:

a) Quan sát điểm  $M(x; y)$  nằm trên hypebol  $(H)$  (Hình 15) và chứng tỏ rằng  $x \leq -a$  hoặc  $x \geq a$ .

b) Viết phương trình hai đường thẳng  $PR$  và  $QS$ .



Hình 15

#### Lời giải:

a) Nếu điểm  $M(x; y)$  thuộc  $(H)$  thì  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Vì  $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$  nên  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow x \leq -a$  hoặc  $x \geq a$ .

b)

+) Có  $P(-a; b), R(a; -b) \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (a - (-a); -b - b) = (2a; -2b)$ .

Do đó ta chọn  $(b; a)$  là một vectơ pháp tuyến của  $PR$ .

Khi đó phương trình đường thẳng  $PR$  là:  $b(x + a) + a(y - b) = 0$  hay  $bx + ay = 0$  hay

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

+) Có  $Q(a; b), S(-a; -b) \Rightarrow \overrightarrow{QS} = (-a - a; -b - b) = (-2a; -2b)$ .

Do đó ta chọn  $(-b; a)$  là một vectơ pháp tuyến của  $QS$ .

Khi đó phương trình đường thẳng QS là:  $-b(x - a) + a(y - b) = 0$  hay  $-bx + ay = 0$  hay  $y = \frac{b}{a}x$ .

**Luyện tập 1 trang 51 Chuyên đề Toán 10:**

Viết phương trình chính tắc của hypebol có một đỉnh là  $A_2(5; 0)$  và một đường tiệm cận là  $y = -3x$ .

**Lời giải:**

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

+) Hypebol có một đỉnh là  $A_2(5; 0) \Rightarrow a = 5$ .

+) Hypebol có một đường tiệm cận là  $y = -3x \Rightarrow \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow b = 3a = 15$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{15^2} = 1$  hay  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{225} = 1$ .

**Hoạt động 4 trang 51 Chuyên đề Toán 10:**

Nêu định nghĩa tâm sai của elip có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > b > 0$ .

**Lời giải:**

Tâm sai  $e$  của elip có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > b > 0$  là tỉ số giữa

tiêu cự và độ dài trục lớn của elip, tức là  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

**Trang 52**

**Luyện tập 2 trang 52 Chuyên đề Toán 10:**

Viết phương trình chính tắc của hypebol, biết độ dài trục ảo bằng 6 và tâm sai bằng  $\frac{5}{4}$ .

**Lời giải:**

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

+) Hypebol có độ dài trục ảo bằng 6  $\Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$ .

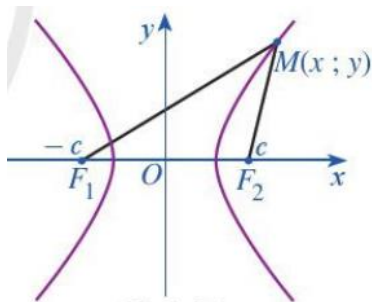
+) Hypebol có tâm sai bằng  $\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 3^2}}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow 16(a^2 + 3^2) = 25a^2 \Rightarrow a^2 = 16$ .

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 3^2}}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow 16(a^2 + 3^2) = 25a^2 \Rightarrow a^2 = 16$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Hoạt động 5 trang 52 Chuyên đề Toán 10:**

Trong mặt phẳng, xét đường hypebol (H) là tập hợp các điểm M sao cho  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , ở đó  $F_1F_2 = 2c$  với  $c > a > 0$ . Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng  $F_1F_2$ . Trục Oy là đường trung trực của  $F_1F_2$  và  $F_2$  nằm trên tia Ox (Hình 16). Khi đó  $F_1(c; 0), F_2(c; 0)$  là các tiêu điểm của (H).



Hình 16

Với mỗi điểm  $M(x; y)$  thuộc đường hypebol (H), chứng minh:

a)  $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$ ;

b)  $MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ ;

c)  $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ .

**Lời giải:**

a)  $MF_1^2 = [x - (-c)]^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$ .

b)  $MF_2^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ .

$$c) MF_1^2 - MF_2^2 = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = 4cx.$$

**Hoạt động 6 trang 52 Chuyên đề Toán 10:**

Với mỗi điểm M thuộc hypebol (H), từ hai đẳng thức  $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$  và  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , chứng minh:

$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|.$$

**Lời giải:**

+) Nếu điểm M thuộc nhánh bên phải trục Oy thì  $MF_1 > MF_2$ . Khi đó:

$$MF_1 - MF_2 = |MF_1 - MF_2| = 2a.$$

$$\text{Ta có: } MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)2a = 4cx$$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2c}{a}x. \text{ Khi đó:}$$

$$(MF_1 + MF_2) + (MF_1 - MF_2) = \frac{2c}{a}x + 2a \Rightarrow 2MF_1 = \frac{2c}{a}x + 2a$$

$$\Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|.$$

$$(MF_1 + MF_2) - (MF_1 - MF_2) = \frac{2c}{a}x - 2a \Rightarrow 2MF_2 = \frac{2c}{a}x - 2a$$

$$\Rightarrow MF_2 = \frac{c}{a}x - a = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|.$$

+) Nếu điểm M thuộc nhánh bên phải trái Oy thì  $MF_1 < MF_2$ . Khi đó:

$$MF_1 - MF_2 = -|MF_1 - MF_2| = -2a.$$

$$\text{Ta có: } MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx \Rightarrow (MF_1 + MF_2)(-2a) = 4cx$$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{-2a} = -\frac{2c}{a}x. \text{ Khi đó:}$$

$$(MF_1 + MF_2) + (MF_1 - MF_2) = -\frac{2c}{a}x + (-2a) \Rightarrow 2MF_1 = -\frac{2c}{a}x - 2a$$

$$\Rightarrow MF_1 = -\left( \frac{c}{a}x + a \right) = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|.$$

$$(MF_1 + MF_2) - (MF_1 - MF_2) = -\frac{2c}{a}x - (-2a) \Rightarrow 2MF_2 = -\frac{2c}{a}x + 2a$$

$$\Rightarrow MF_2 = a - \frac{c}{a}x = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|.$$

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có

$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|.$$

**Trang 53, 54**

**Luyện tập 3 trang 53 Chuyên đề Toán 10:**

Cho hypebol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ . Giả sử M là điểm thuộc hypebol

có hoành độ là 15. Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm M.

**Lời giải:**

$$\text{Có } a^2 = 144, b^2 = 25 \Rightarrow a = 12, b = 5, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Độ dài các bán kính qua tiêu của M là:

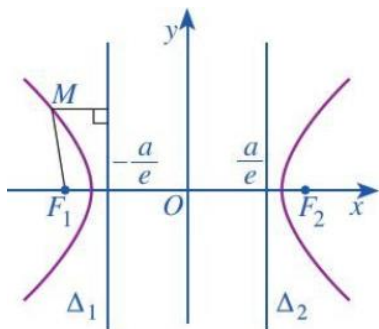
$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 12 + \frac{13}{12} \cdot 15 \right| = \frac{113}{4}.$$

$$MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 12 - \frac{13}{12} \cdot 15 \right| = \frac{17}{4}.$$

**Hoạt động 7 trang 53 Chuyên đề Toán 10:**

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0, b > 0$ . Xét đường

thẳng  $\Delta_1: x = -\frac{a}{e}$ .



Hình 17

Với mỗi điểm  $M(x_0; y_0) \in (H)$  (Hình 17), tính:

a) Khoảng cách  $d(M, \Delta_1)$  từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta_1$ .

b) Tỷ số  $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}$ .

**Lời giải:**

a) Ta viết lại phương trình đường thẳng  $\Delta_1$  ở dạng  $\Delta_1: x + 0 \cdot y + \frac{a}{e} = 0$ .

Với mỗi điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc hypebol, ta có:

$$d(M, \Delta_1) = \frac{\left| x_0 + 0 \cdot y_0 + \frac{a}{e} \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|a + ex_0|}{e} = \frac{MF_1}{e}.$$

b) Từ a) ta suy ra  $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = e$ .

**Luyện tập 4 trang 54 Chuyên đề Toán 10:**

Tìm các tiêu điểm và đường chuẩn của hypebol có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

**Lời giải:**

Ta có:  $a^2 = 11, b^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{11}, b = 5, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{11 + 25} = 6$ .

Do đó hai tiêu điểm là  $F_1(-6; 0)$  và  $F_2(6; 0)$ .

$$\text{Ta có: } e = \frac{c}{a} = \frac{6}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{11}{6}.$$

Vậy phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F_1(-6; 0)$  là  $\Delta_1: x = -\frac{11}{6}$ . Phương

trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F_2(6; 0)$  là  $\Delta_2: x = \frac{11}{6}$ .

**Trang 55**

**Hoạt động 8 trang 55 Chuyên đề Toán 10:**

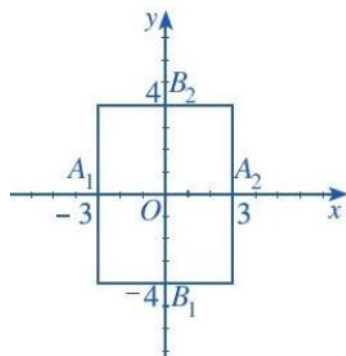


Vẽ hypebol (H):  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

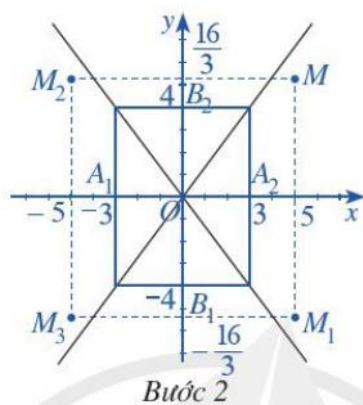
### Lời giải:

Để vẽ hypebol (H), ta có thể làm như sau:

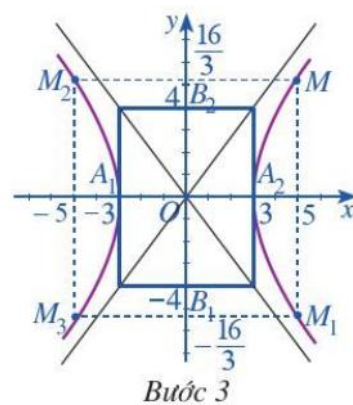
Ta thấy  $a = 3$ ,  $b = 4$ . (H) có các đỉnh là  $A_1(-3; 0)$ ,  $A_2(3; 0)$ .



Bước 1



Bước 2



Bước 3

Bước 1. Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng  $x = -3$ ,  $x = 3$ ,  $y = -4$ ,  $y = 4$ .

Bước 2. Vẽ hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.

Tim một số điểm cụ thể thuộc hypebol, chẳng hạn ta thấy điểm  $M\left(5; \frac{16}{3}\right)$  thuộc (H).

Do đó các điểm  $M_1\left(5; -\frac{16}{3}\right)$ ,  $M_2\left(-5; \frac{16}{3}\right)$ ,  $M_3\left(-5; -\frac{16}{3}\right)$  thuộc (H).

Bước 3. Vẽ đường hypebol bên ngoài hình chữ nhật cơ sở; nhánh bên trái tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm  $A_1(-3; 0)$  và đi qua  $M_2$ ,  $M_3$ ; nhánh bên phải tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm  $A_2(3; 0)$  và đi qua  $M$ ,  $M_1$ . Vẽ các điểm thuộc hypebol càng xa gốc tọa độ thì càng sát với đường tiệm cận. Hypebol nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng và hai trục tọa độ là hai trục đối xứng.

### Luyện tập 5 trang 55 Chuyên đề Toán 10:

Cho hypebol (H) có một đỉnh là  $A_1(-4; 0)$  và tiêu cự là 10. Viết phương trình chính tắc và vẽ hypebol (H).

### Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ).

+) Hypebol có một đỉnh là  $A_1(-4; 0) \Rightarrow a = 4$ .

+) Hypebol có tiêu cự là  $10 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

## Trang 56

### Bài 1 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Viết phương trình chính tắc của hypebol, biết:

a) Tiêu điểm là  $F_1(-3; 0)$  và đỉnh là  $A_2(2; 0)$ .

b) Đỉnh là  $A_2(4; 0)$  và tiêu cự bằng 10.

c) Tiêu điểm  $F_2(4; 0)$  và phương trình một đường tiệm cận là  $y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x$ .

#### Lời giải:

a)

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

+) Hypebol có một tiêu điểm là  $F_1(-3; 0) \Rightarrow c = 3$ .

+) Hypebol có một đỉnh là  $A_2(2; 0) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là hay  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ .

b)

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

+) Hypebol có một đỉnh là  $A_2(4; 0) \Rightarrow a = 4$ .

+) Hypebol có tiêu cự là  $10 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ .

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

c)

Gọi phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

+) Hypebol có một tiêu điểm là  $F_2(4; 0) \Rightarrow c = 4$ .

+) Hypebol có một đường tiệm cận là  $y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{\sqrt{7}} \Rightarrow \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{7} = \frac{a^2 + b^2}{9 + 7} = \frac{c^2}{16} = \frac{4^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9, b^2 = 7.$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ .

## **Bài 2 trang 56 Chuyên đề Toán 10:**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ .

- a) Xác định tọa độ các đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục thực của hypebol.
- b) Xác định phương trình các đường tiệm cận của hypebol và vẽ hypebol trên.

**Lời giải:**

a) Ta có:  $a = 2, b = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ .

Tọa độ các đỉnh của hypebol là:  $A_1(-2; 0), A_2(2; 0)$ .

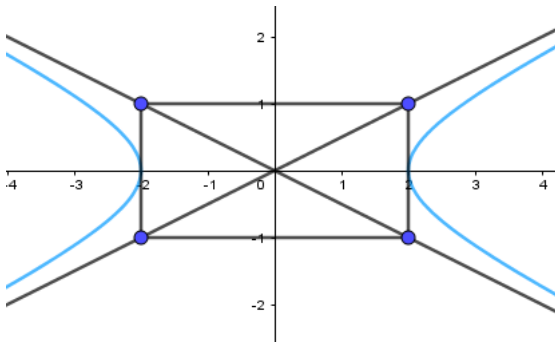
Các tiêu điểm của hypebol là:  $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$ .

Tiêu cự của hypebol là:  $2c = 2\sqrt{5}$ .

Độ dài trục thực của hypebol là:  $2a = 4$ .

b) Phương trình các đường tiệm cận của hypebol là:  $y = -\frac{b}{a}x = -\frac{1}{2}x$  và  $y = \frac{b}{a}x = \frac{1}{2}x$ .

Vẽ hypebol:



### Bài 3 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol có phương trình chính tắc là  $x^2 - y^2 = 1$ . Chứng minh rằng hai đường tiệm cận của hypebol vuông góc với nhau.

**Lời giải:**

Ta có:  $a = 1$ ,  $b = 1$ . Suy ra:

Phương trình hai đường tiệm cận của hypebol là:  $d_1: y = -\frac{b}{a}x = -x$  và

$$d_2: y = \frac{b}{a}x = x.$$

$d_1: y = -x$  hay  $x + y = 0$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n}_1(1;1)$ .

$d_2: y = x$  hay  $x - y = 0$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n}_2(1;-1)$ .

Có  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ . Suy ra hai vector này vuông góc với nhau, do đó hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  cũng vuông góc với nhau.

### Bài 4 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol (H):  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có các tiêu điểm là các tiêu điểm của (H) và các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H) đều nằm trên (E).

**Lời giải:**

Hypebol (H) có  $a = 8$ ,  $b = 6 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$  và một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là  $M(8; 6)$ .

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

Theo đề bài ta có:

+) (E) có các tiêu điểm là các tiêu điểm của (H)  $\Rightarrow c = 10 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 100(1)$ .

+) Các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H) đều nằm trên (E)  $\Rightarrow M(8;6) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{8^2}{a^2} + \frac{6^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1(2).$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$\frac{64}{b^2 + 100} + \frac{36}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{64b^2 + 36(b^2 + 100)}{(b^2 + 100)b^2} = 1$$

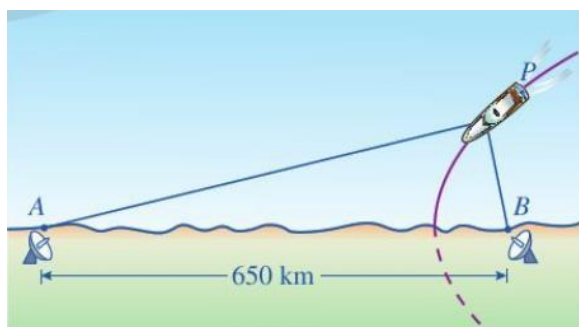
$$\Rightarrow 64b^2 + 36(b^2 + 100) = (b^2 + 100)b^2$$

$$\Rightarrow 100b^2 + 3600 = b^4 + 100b^2 \Rightarrow b^4 = 3600 \Rightarrow b^2 = 60 \Rightarrow a^2 = 160.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip cần tìm là  $\frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{60} = 1$ .

### Bài 5 trang 56 Chuyên đề Toán 10:

Dọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thủy hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lần lượt tại địa điểm A và địa điểm B, khoảng cách  $AB = 650$  km (Hình 18). Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo là hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm.



Hình 18

Khi đang ở vị trí P, máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu từ A và B thành hiệu khoảng cách  $|PA - PB|$ . Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là 0,0012 s. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là  $3 \cdot 10^8$  m/s.

a) Lập phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.

b) Chứng tỏ rằng tại mọi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là 0,0012 s.

**Lời giải:**

a) Vì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là 0,0012 s nên tại thời điểm đó  $PB - PA = (3 \cdot 10^8) \cdot 0,0012 = 360000 \text{ (m)} = 360 \text{ (km)}$ .

Vì con tàu chuyển động với quỹ đạo là hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm nên  $|PA - PB| = 360 \text{ (km)}$  với mọi vị trí của P.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm của AB và trục Ox trùng với AB, đơn vị trên hai trục là km thì hypebol này có dạng  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (} a > 0, b > 0 \text{)}$ .

Vì  $|PA - PB| = 360$  nên  $2a = 360$ , suy ra  $a = 180$ .

Theo đề bài,  $AB = 650$ , suy ra  $2c = 650$ , suy ra  $c = 325$ .

$$b^2 = c^2 - a^2 = 325^2 - 180^2 = 73225.$$

Vậy phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu là

$$\frac{x^2}{32400} - \frac{y^2}{73225} = 1.$$

b) Vì con tàu chỉ chuyển động ở nhánh bên phải trục Oy của hypebol nên ta  $PB < PA$  với mọi vị trí của P. Do đó tàu luôn nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A.

Gọi  $t_1$  là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ A,  $t_2$  là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ B thì  $t_1 = \frac{PA}{v}$ ,  $t_2 = \frac{PB}{v}$  với  $v$  là vận tốc di chuyển của tín hiệu.

Khi đó, ta có:

$$t_1 - t_2 = \frac{PA - PB}{v} = \frac{360000}{3 \cdot 10^8} = 0,0012 \text{ (s)}.$$

Vậy thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là 0,0012 s.