Các công thức về cấp số cộng

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa: (u_n) là cấp số cộng khi $u_{n+1} = u_n + d, n \in \mathbb{N}^*$ (d gọi là công sai)

Nhận xét:

- Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d > 0$.
- Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d < 0$.
- Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

c) Tính chất:

Ba số hạng $u_{k-1}, u_k, u_{k+1} (k \geq 2)$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

d) Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

2. Công thức

- Công thức tính tính công sai: $d = u_{n+1} - u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
- Công thức tìm số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.
- Tính chất của 3 số hạng $u_{k-1}, u_k, u_{k+1} (k \geq 2)$ liên tiếp của cấp số cộng:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

- Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

a) Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Xác định công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng.

c) Tính số hạng thứ 100 của cấp số cộng.

d) Tính tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có:

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy công sai d = 3 và số hạng đầu tiên $u_1 = 1$.

b) Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n – 1)d = 1 + (n – 1).3 = 3n – 2$.

c) Số hạng thứ 100 là: $u_{100} = 3.100 – 2 = 298$.

d) Tổng 15 số hạng đầu tiên:

$$S_{15} = \frac{n\left[2u_1 + \left(n-1\right)d\right]}{2} = \frac{15.\left(2.1 + 14.3\right)}{2} = 330.$$

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $u_n = 2n – 3$.

a) Xác định công sai của cấp số cộng

b) Số 393 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng.

c) Tính $S = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2021}$

Lời giải

a) Ta có: $u_{n+1} = 2(n + 1) – 3 = 2n – 1$

Công sai của cấp số cộng: $d = u_{n+1} – u_n = (2n – 1) – (2n – 3) = 2$

b) Gọi số hạng thứ k của cấp số cộng là 393, ta có $u_k = 393$.

Khi đó: 2k – 3 = 393. Suy ra k = 198.

Vậy số 393 là số hạng thứ 198 của cấp số cộng.

c) Ta có: $u_1 = 2 . 1 – 3 = – 1$

Dãy số là (v_n): u_1; u_3; u_5; … u_{2021} là cấp số cộng với số hạng đầu tiên là $u_1 = – 1$ và công sai $d' = u_3 – u_1 = 2d = 4$

Dãy (v_n) có: (2021 – 1) : 2 + 1 = 1011 số hạng

Vậy tổng $S = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2021} = \dfrac{1011.\left(2.\left(-1\right) + 1010.4\right)}{2} = 2041209$.