Bài 2. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp

A. Lý thuyết

1. Các khái niệm cơ bản về tập hợp

1.1. Tập hợp

• Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau:

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp;

Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

✓ $a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S.

✓ $a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S.

Chú ý: Số phần tử của tập hợp S được kí hiệu là n(S).

Ví dụ:

- Cho tập hợp A là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 2, lớn hơn 5 và nhỏ hơn 15.

+ Ta mô tả tập hợp A bằng hai cách như sau:

Cách 1: Liệt kê các phần tử của tập hợp: A = {6; 8; 10; 12; 14};

Cách 2: Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2, 5 < n < 15\}$.

+ Tập hợp A có 5 phần tử, ta viết: n(A) = 5.

+ 10 thuộc tập hợp A, ta viết $10 \in A$.

+ 15 không thuộc tập hợp A, ta viết $15 \notin A$.

• Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là *tập rỗng*, kí hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ:

+ Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng;

+ Tập hợp những người sống trên Mặt Trời là tập rỗng.

1.2. Tập hợp con

• Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là một *tập hợp con (tập con)* của S và viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S).

- Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T).

- Kí hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S.

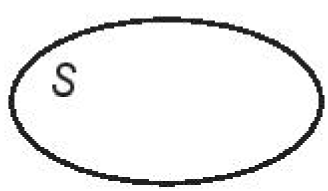
Nhận xét:

- Từ định nghĩa trên, T là tập con của S nếu mệnh đề sau đúng:

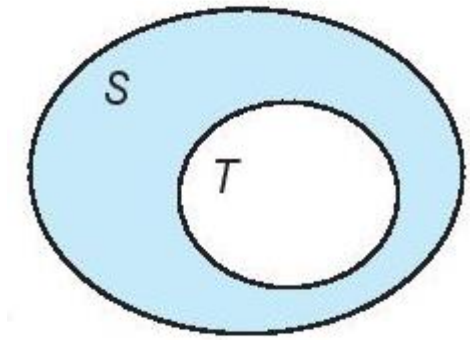
$$\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S.$$

- Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

• Người ta thường minh họa một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là *biểu đồ Ven*.



Minh họa T là một tập con của S như sau:



Ví dụ: Cho các tập hợp: T = {2; 3; 5}, S = {2; 3; 5; 7; 9}, M = {2; 3; 4; 5}.

- Tập hợp T là tập con của tập hợp S (do mọi phần tử của T đều thuộc S).

- Tập hợp M không là tập hợp con của tập hợp S (do có phần tử 4 thuộc M nhưng không thuộc S).

1.3. Hai tập hợp bằng nhau

- Hai tập hợp S và T được gọi là *hai tập hợp bằng nhau* nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S và ngược lại. Kí hiệu là S = T.

- Nếu $S \subset T$ và $T \subset S$ thì S = T.

Ví dụ: Cho 2 tập hợp: $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội chung của 2 và 3; $n < 20\}$ và $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 6; $n < 20\}$.

Ta có: 2 = 2, 3 = 3

⇒ BCNN(2; 3) = 2.3 = 6

⇒ BC(2; 3) = B(6) ={0; 6; 12; 18}

⇒ S = {0; 6; 12; 18}

Ta có các bội của 6 và nhỏ hơn 20 là: 0; 6; 12; 18.

T = {0; 6; 12; 18}.

Vậy S = T.

2. Các tập hợp số

2.1. Mối quan hệ giữa các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ = {0; 1; 2; 3; 4; ....}.

- Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và số nguyên âm:

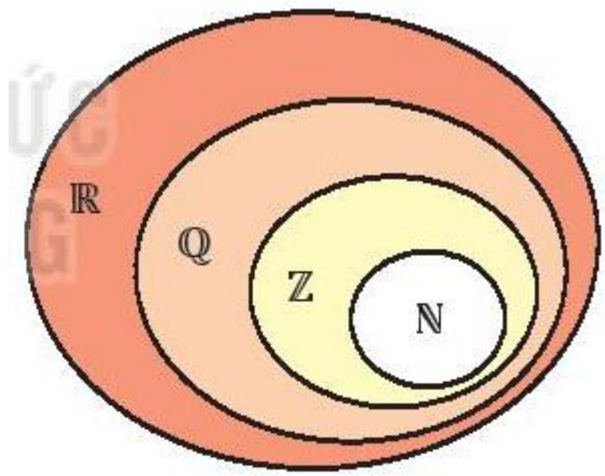
$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

- Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ gồm các số được viết dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$, với a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq 0$.

Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

- Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ. Số vô tỉ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

- Mối quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Ví dụ: Cho tập hợp B = {– 1; 2; 4; 10}.

- Tập hợp B chứa số – 1 không phải là số tự nhiên nên B không là tập con của ℕ.

- Tập hợp B gồm các số nguyên: – 1; 2; 4; 10 nên B là tập con của ℤ.

- Các số nguyên cũng là các số hữu tỉ và cũng là các số thực, nên B cũng là tập con của ℚ và ℝ.

2.2. Các tập con thường dùng của ℝ

- Một số tập con thường dùng của tập số thực ℝ:

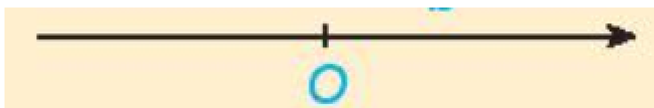
+ Khoảng:

$(a;b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$

$(a;+\infty)=\{a\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$(-\infty; +\infty)$



+ Đoạn

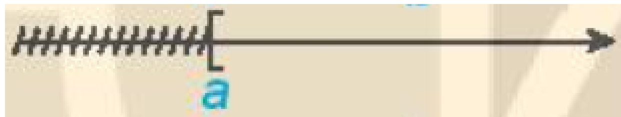
$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

+ Nửa khoảng

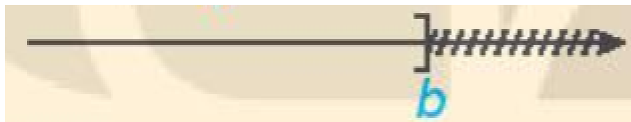
$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

$[a;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}$



$(-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$



✓ Kí hiệu + ∞: Đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng).

✓ Kí hiệu – ∞: Đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

✓ a, b gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

Ví dụ:

+ Ta có: $5 < x \leq 10$ thì ta viết $x \in (5; 10]$.

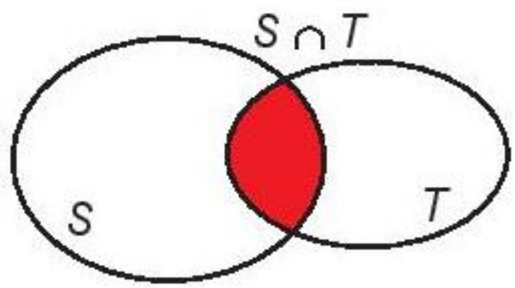
+ Ta có: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} = (-\infty; 3)$.

3. Các phép toán trên tập hợp

3.1. Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là *giao của hai tập hợp* S và T, kí hiệu là S ∩ T.

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$



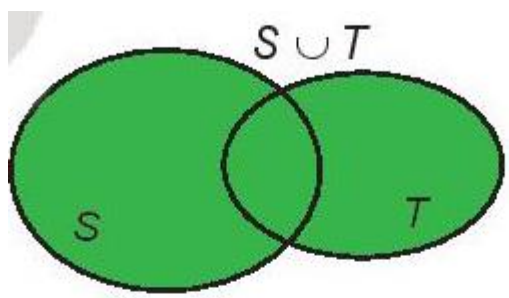
Ví dụ: Cho 2 tập hợp: A = {5; 7; 8} và B = {1; 2; 4; 5; 8}.

Giao của 2 tập hợp trên là tập hợp C = A ∩ B = {5; 8}.

3.2. Hợp của hai tập hợp

- Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là *hợp của hai tập hợp* S và T, kí hiệu là S ∪ T.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$



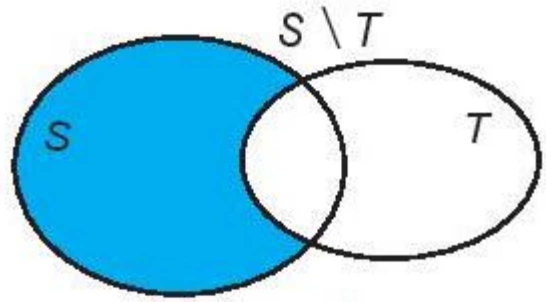
Ví dụ: Cho 2 tập hợp: S = {1; 2; 3; 5} và T = {2; 4; 6; 7}.

Tập hợp là hợp của hai tập hợp trên là K = S ∪ T = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}.

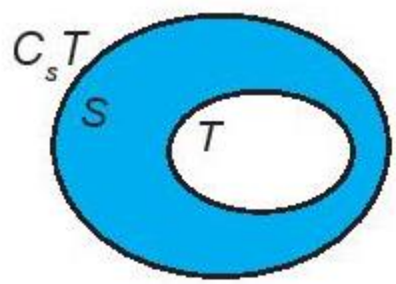
3.3. Hiệu của hai tập hợp

- *Hiệu của hai tập hợp* S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T, kí hiệu là S \ T.

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}.$$



- Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là *phần bù* của T trong S, kí hiệu $C_S T$.



Chú ý: $C_s S = \varnothing$.

Ví dụ: Cho các tập hợp: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$; $T = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; $X = \{x \mid x$ là các số nguyên dương nhỏ hơn $9\}$. Tìm các tập hợp sau: $S \setminus T$; $T \setminus S$; $X \setminus S$.

Ta có: $S \setminus T = \{1; 2; 3\}$;

$T \setminus S = \{6; 9\}$.

Ta lại có: $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Vì mọi phần tử của tập S đều thuộc tập X nên $S \subset X$.

Phần bù của S trong X là $X \setminus S = C_X S = \{6\}$.

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập tự luận

Bài 1. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) [– 3; 1) ∪ (0; 4];

b) (− 2; 15) ∪ (3; + ∞);

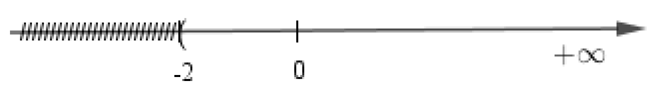
c) (− 12; 3] ∩ [− 1; 4];

d) ℝ \ (2; + ∞).

Hướng dẫn giải

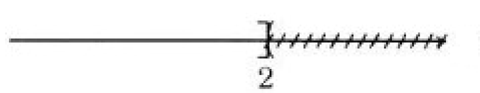
a) [– 3; 1) ∪ (0; 4] = [– 3; 4]

b) (− 2; 15) ∪ (3; + ∞) = (− 2; +∞)



c) (− 12; 3] ∩ [− 1; 4] = [− 1; 3]

d) ℝ \ (2; + ∞) = (− ∞; 2]



Bài 2. Hãy viết tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử.

a) A là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 4 và nhỏ hơn 20.

b) B là tập hợp các tỉnh thuộc vùng Bắc Trung Bộ.

Hướng dẫn giải

a) Các số tự nhiên chia hết cho 3 và nhỏ hơn 20 là: 0, 4, 8, 12, 16.

Ta viết tập hợp A bằng cách liệt kê các phần tử như sau:

A = {0; 4; 8; 12; 16}.

Tập hợp A có 7 phần tử, ta viết n(A) = 5.

Ngoài ra ta cũng có thể viết tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng là:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 4; x < 20\}$.

b) Các tỉnh thuộc vùng Bắc Trung Bộ là: Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị.

Do đó: B = {Thanh Hóa; Nghệ An; Hà Tĩnh; Quảng Bình; Quảng Trị}.

Tập hợp B có 5 phần tử, ta viết n(B) = 5.

Bài 3. Cho các tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 3, x < 10\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 2, x < 10\}$.

a) Viết tập hợp A và B bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

b) Xác định các tập hợp A ∩ B, A ∪ B, A \ B, B \ A.

Hướng dẫn giải

a) Vì $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 3, x < 10\}$ nên A là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 3 và nhỏ hơn 10.

Do đó: A = {0; 3; 6; 9}.

Vì $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 2, x < 10\}$ nên B là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 2 và nhỏ hơn 10.

Do đó: B = {0; 2; 4; 6; 8}.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\} = \{0; 6\}$;

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\} = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9\}$;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\} = \{3; 9\}$;

$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ và } x \notin A\} = \{2; 4; 8\}$.

B2. Bài tập trắc nghiệm

Bài 4. Cho A = {0; 1; 2; 3; 4}; B = {2; 3; 4; 5; 6}. Tìm tập $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A. {5; 6};

B. {1; 2};

C. {2; 3; 4};

D. {0; 1; 5; 6}.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có tập hợp A\B là tập các phần tử thuộc tập A nhưng không thuộc tập B nên $(A \setminus B) = \{0;1\}$.

Tập hợp B\A là tập các phần tử thuộc tập B nhưng không thuộc tập A nên $(B \setminus A) = \{5;6\}$.

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0;1;5;6\}$.

Bài 5. Một lớp học có 16 học sinh học giỏi môn Toán; 12 học sinh học giỏi môn Văn; 8 học sinh vừa học giỏi môn Toán và Văn; 19 học sinh không học giỏi cả hai môn Toán và Văn. Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh?

A. 31;

B. 54;

C. 39;

D. 47.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Gọi A là tập hợp gồm các học sinh trong lớp; B là tập số học sinh giỏi Toán; C là tập số học sinh giỏi Văn; D là tập số học sinh không giỏi cả 2 môn Toán và Văn.

Khi đó n(B) = 16, n(C) = 12, n(B∩C) = 8, n(D) = 19.

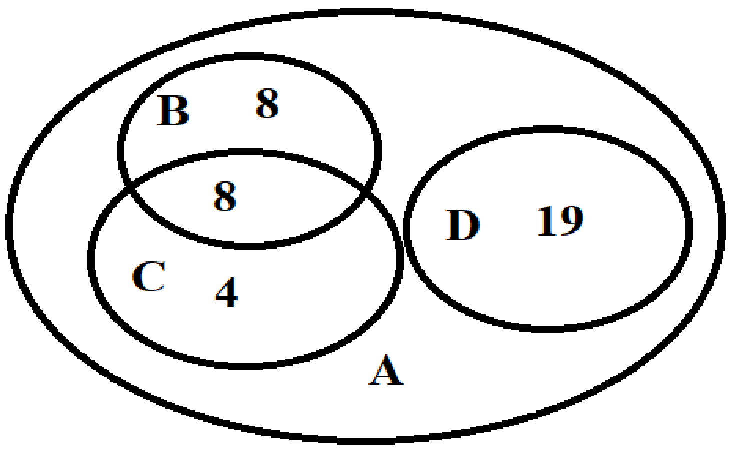
Số học sinh trong lớp giỏi ít nhất một trong hai môn Toán hoặc Văn là:

n(B∪C) = n(B) + n(C) - n(B∩C) = 16 + 12 – 8 = 20.

Ta có $A = (B \cup C) \cup D$

Số học sinh trong lớp là: n(A) = n(B∪C) + n(D) = 20 + 19 = 39 (học sinh).

Được thể hiện trong biểu đồ Ven như sau:



Bài 6. Cho hai tập A = [–1 ; 3); B = [a; a + 3]. Với giá trị nào của a thì $A \cap B = \varnothing$.

A. $\left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a < -4 \end{array}\right.$;

B. $\left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a < -4 \end{array}\right.$;

C. $\left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a \le -4 \end{array}\right.$;

D. $\left[\begin{array}{l} a > 3 \\ a \le -4 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a + 3 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a < -4 \end{array}\right..$$