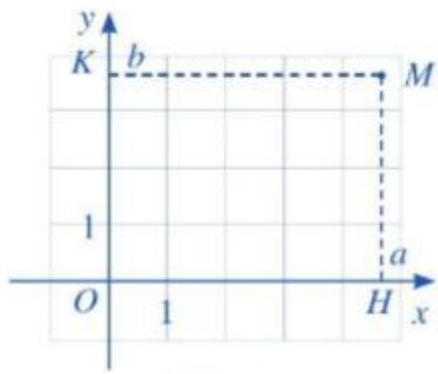
Bài 1. Tọa độ của vectơ

A. Lý thuyết

I. Tọa độ của một điểm

Để xác định tọa độ của một điểm M tùy ý trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta làm như sau (Hình 3):



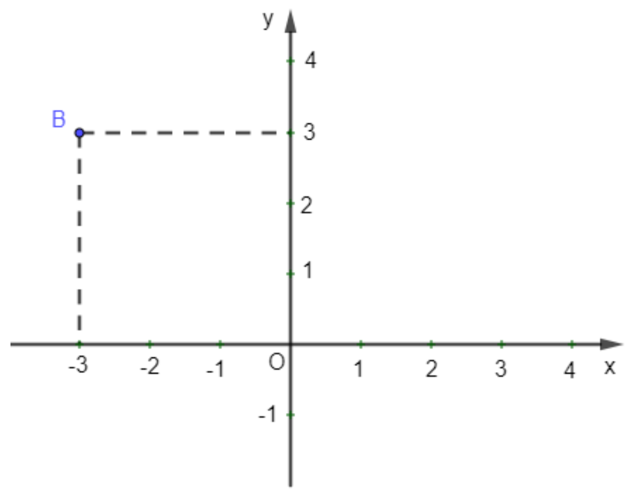
Hình 3

+ Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.

+ Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.

Cặp số (a; b) là tọa độ của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta kí hiệu là M(a ; b).

Ví dụ: Xác định tọa độ của điểm B trong hình vẽ sau:



Hướng dẫn giải

+ Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm ứng với số –3. Số –3 là hoành độ của điểm B.

+ Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm ứng với số 3. Số 3 là tung độ của điểm M.

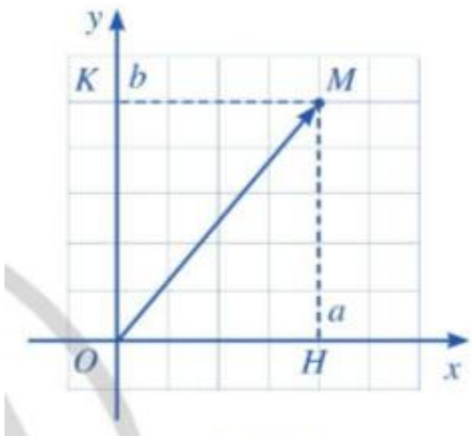
Khi đó, cặp số (–3; 3) là tọa độ của điểm B.

Vậy điểm B có tọa độ là B(–3; 3).

II. Tọa độ của một vectơ

Tọa độ của điểm M được gọi là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Nếu $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ (a; b) thì ta viết $\overrightarrow{OM}$ = (a; b) hay $\overrightarrow{OM}$ (a; b), trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ (Hình 4).



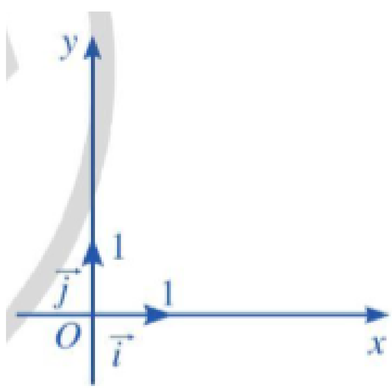
Hình 4

Chú ý: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có:

+ $\overrightarrow{OM} = (a; b) \Leftrightarrow M(a ; b)$.

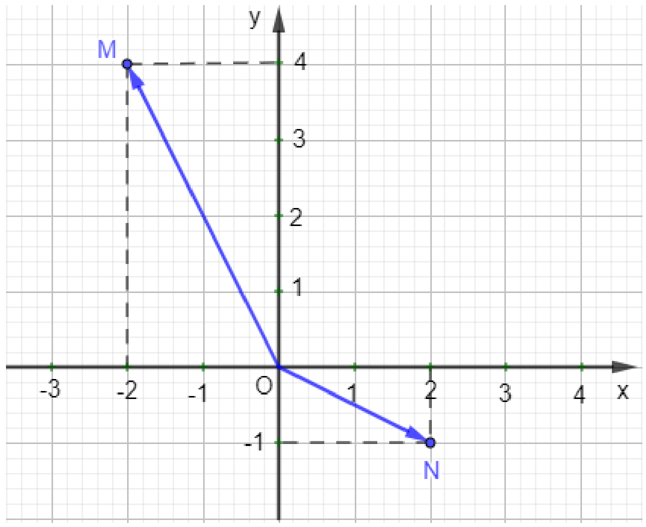
+ Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là O và có tọa độ (1; 0) gọi là vectơ đơn vị trên trục Ox.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là O và có tọa độ (0; 1) gọi là vectơ đơn vị trên trục Oy (Hình 4).



Hình 5

Ví dụ: Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ trong hình sau:



Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm M có tọa độ là (–2 ; 4)

Suy ra $\overrightarrow{OM}$ = (–2 ; 4).

Điểm N có tọa độ là (2 ; –1)

Suy ra $\overrightarrow{ON}$ = (2 ; –1).

Vậy $\overrightarrow{OM}$ = (–2 ; 4) và $\overrightarrow{ON}$ = (2 ; –1).

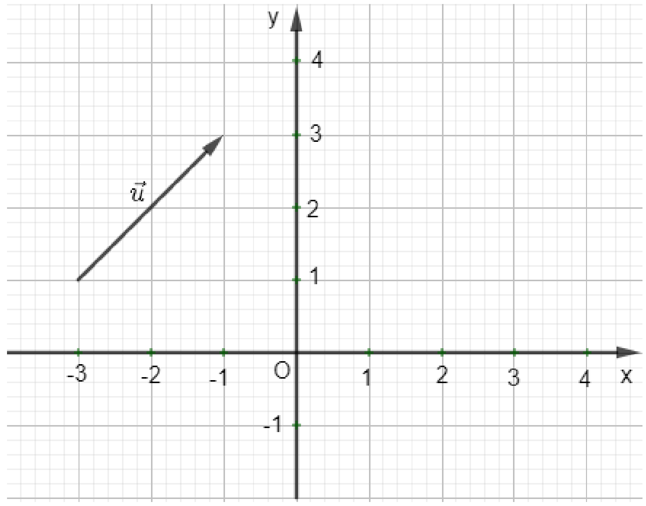
Nhận xét:

– Với mỗi vectơ $\vec{u}$, ta xác định được duy nhất một điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

– Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là tọa độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

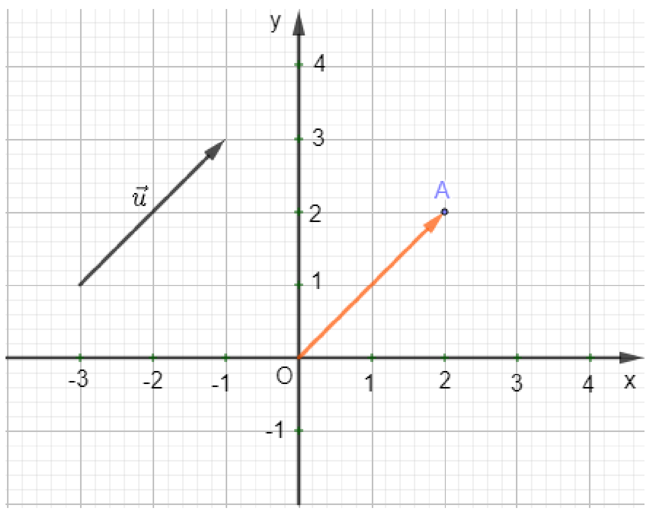
– Nếu $\vec{u}$ có tọa độ (a; b) thì ta viết $\vec{u}$ = (a; b) hay $\vec{u}$(a; b), trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

Ví dụ: Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trong hình vẽ sau:



Hướng dẫn giải

Ta xác định vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ như hình sau:



Ta thấy điểm A(2 ; 2) nên $\overrightarrow{OA} = (2 ; 2)$.

Suy ra $\vec{u} = (2 ; 2)$.

Vậy $\vec{u} = (2 ; 2)$.

Định lí: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu $\vec{u} = (a ; b)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ thì $\vec{u} = (a ; b)$.

Chú ý: Với $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$, ta có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M(2; 3) và vectơ $\vec{u} = (1; -3)$.

a) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OM}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Hướng dẫn giải

a) Vì vectơ $\vec{u} = (1; -3)$ nên $\vec{u} = 1\vec{i} + (-3)\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j}$

Vậy $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

b) Vì điểm M có tọa độ là (2 ; 3) nên $\overrightarrow{OM} = (2 ; 3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Vậy $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

III. Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Ví dụ: Cho hai điểm A(2; –4) và B(1; 5). Hãy tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 - 2; 5 - (-4)) = (-1 ; 9)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 9)$.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$;

b) $\vec{b} = -2\vec{j}$;

c) $\vec{c} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} = 3\vec{i} + 1\vec{j}$

Suy ra $\vec{a} = (3 ; 1)$.

Vậy $\vec{a} = (3 ; 1)$.

b) Ta có $\vec{b} = -2\vec{j} = 0\vec{i} + (-2)\vec{j}$

Suy ra $\vec{b} = (0 ; -2)$.

Vậy $\vec{b} = (0 ; -2)$.

c) Ta có $\vec{c} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} = \vec{i} + (-\sqrt{3})\vec{j}$.

Suy ra $\vec{c} = (1; -\sqrt{3})$.

Vậy $\vec{c} = (1; -\sqrt{3})$.

Bài 2. Cho 3 điểm A(0; 2), B(–1; 3), C(2; 5). Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm D có tọa độ là $(x_D ; y_D)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 - 0 ; 3 - 2) = (-1 ; 1)$

$\overrightarrow{DC} = (2 - x_D ; 5 - y_D)$.

Để ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2 - x_D \\ 1 = 5 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 4 \end{cases}$$

Suy ra điểm D có tọa độ là (3 ; 4).

Vậy để ABCD là hình bình hành thì D(3 ; 4).

Bài 3. Tìm số thực m và n sao cho hai vectơ $\vec{a} = (m; -4)$ và $\vec{b} = (-1; 3m + n)$ bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ -4 = 3m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ -4 = 3.(-1) + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$

Vậy để $\vec{a} = \vec{b}$ thì m = –1 và n = –1.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong hệ tọa độ Oxy cho A(5; 2), B(10; 8). Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB}$ = (15; 10);

B. $\overrightarrow{AB}$ = (2; 4);

C. $\overrightarrow{AB}$ = (5; 6);

D. $\overrightarrow{AB}$ = (50; 16).

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (10 – 5 ; 8 – 2) = (5; 6).

Câu 2. Trong hệ tọa độ Oxy cho bốn điểm A(1; 1), B(2; – 1), C(4 ; 3), D (3 ; 5). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tứ giác ABCD là hình bình hành ;

B. A, B, C, D trùng nhau ;

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

D. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là : A

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;-2) \\ \overrightarrow{DC} = (1;-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, do đó ABCD là hình bình hành.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{u} = (2a-1;-3)$ và $\vec{v} = (3;\ 4b+1)$. Tìm các số thực a và b sao cho cặp vectơ đã cho bằng nhau:

A. a = 2, b = – 1;

B. a = – 1, b = 2;

C. a = – 1, b = – 2;

D. a = 2, b = 1.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Để $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=3 \\ -3=4b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=4 \\ 4b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$.

Vậy a = 2 và b = – 1.