

Công thức giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta thường xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối, tìm cách để khử dấu giá trị tuyệt đối như:

+ Dùng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối.

+ Bình phương hai vế phương trình đã cho.

+ Đặt ẩn phụ.

II. Các công thức.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $|3x - 4| = |6 - 2x|$;

b) $|2 + x| = |x - 1|$.

Lời giải:

a)

$$|3x - 4| = |6 - 2x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 6 - 2x \\ 3x - 4 = -6 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 2\}$.

b)

$$|2 + x| = |x - 1|$$

$$\Leftrightarrow (2 + x)^2 = (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4x + x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$.

Bài 2: Giải phương trình $|3x - 6| = 2x + 3$.

Lời giải:

$$\text{TH1: } 3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$|3x - 6| = 2x + 3$$

$$\Rightarrow 3x - 6 = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 6$$

$$\Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{TH2: } 3x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$|3x - 6| = 2x + 3$$

$$\Rightarrow -3x + 6 = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 9; \frac{3}{5} \right\}$.

Bài 3: Giải phương trình $|4x + 1| = x - 5$.

Lời giải:

$$|4x + 1| = x - 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ (4x + 1)^2 = (x - 5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 16x^2 + 8x + 1 = x^2 - 10x + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 15x^2 + 18x - 24 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $15x^2 + 18x - 24 = 0$ có: $\Delta' = 9^2 - 15 \cdot (-24) = 441 > 0$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{441}}{15} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{441}}{15} = -2$$

Từ đó ta có: $|4x + 1| = x - 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{5} \\ x = -2 \end{array} \right] \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

IV. Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải phương trình $|5x - 3| = |2 - 5x|$.

Bài 2: Giải phương trình $|x^2 - 6x| = 2x + 5$.