

## Bài 1: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

### A. Lý thuyết

#### 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c; \quad ax + by > c$$

$$ax + by \leq c; \quad ax + by \geq c$$

trong đó:  $x, y$  là các ẩn,

$a, b, c$  là các số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0.

#### Ví dụ:

+)  $\frac{5}{3}x + \sqrt{2}y < 5$  có dạng bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x$  và  $y$  với  $a = \frac{5}{3}$ ,  $b = \sqrt{2}$

và  $c = 5$ .

+  $3x - \frac{5}{y} \geq 2$  không phải bất phương trình bậc nhất hai ẩn, vì không có dạng bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by < c$  (\*).

Mỗi cặp số  $(x_0 ; y_0)$  sao cho  $ax_0 + by_0 < c$  gọi là một **nghiệm** của bất phương trình (\*).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp tất cả các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (\*) được gọi là **miền nghiệm** của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng  $ax + by > c$ ;  $ax + by \leq c$  và  $ax + by \geq c$  được định nghĩa tương tự.

**Ví dụ:** Xét bất phương trình  $2x + y \leq 3$ :

+  $(1 ; 1)$  là một nghiệm của bất phương trình vì  $2 \cdot 1 + 1 = 3 \leq 3$  là mệnh đề đúng.

+  $(-2 ; 10)$  không là nghiệm của bất phương trình vì  $2 \cdot (-2) + 10 = 6 \leq 3$  là mệnh đề sai.

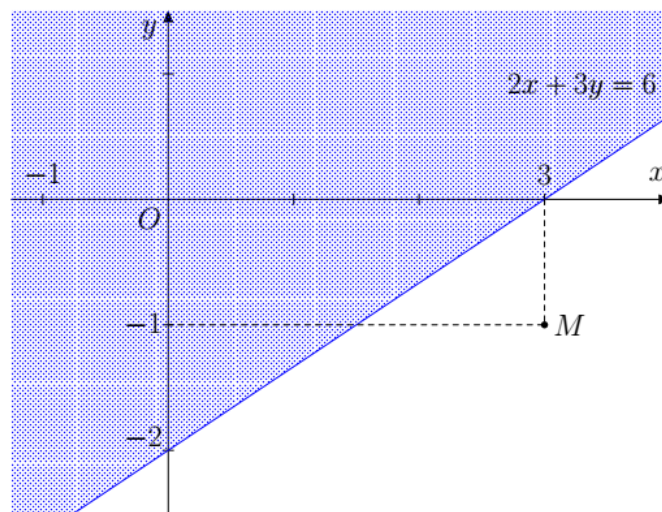
+  $(2 ; -5)$  là nghiệm của bất phương trình vì  $2 \cdot 2 - 5 = -1 \leq 3$  là mệnh đề đúng.

## 2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

• Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

**Chú ý:** Đối với bất phương trình dạng  $ax + by \leq c$  hoặc  $ax + by \geq c$  thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng  $d$ .

**Ví dụ:** Đường thẳng  $d: 2x - 3y = 6$  chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng như hình dưới. Hỏi nửa mặt không bị gạch (không kể đường thẳng  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình nào?



**Hướng dẫn giải:**

Lấy một giá trị nằm trong nửa mặt phẳng không bị gạch, ví dụ điểm  $M(3; -1)$ . Thay toạ độ điểm  $M$  vào vế trái phương trình đường thẳng  $d$ , ta thấy:

$$2x_M - 3y_M = 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) = 9 > 6$$

Như vậy,  $M$  là một nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 6$ , miền không bị gạch (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 6$ .

Vậy miền không bị gạch (không kể đường thẳng  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 6$ .

• ***Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn:***

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng.

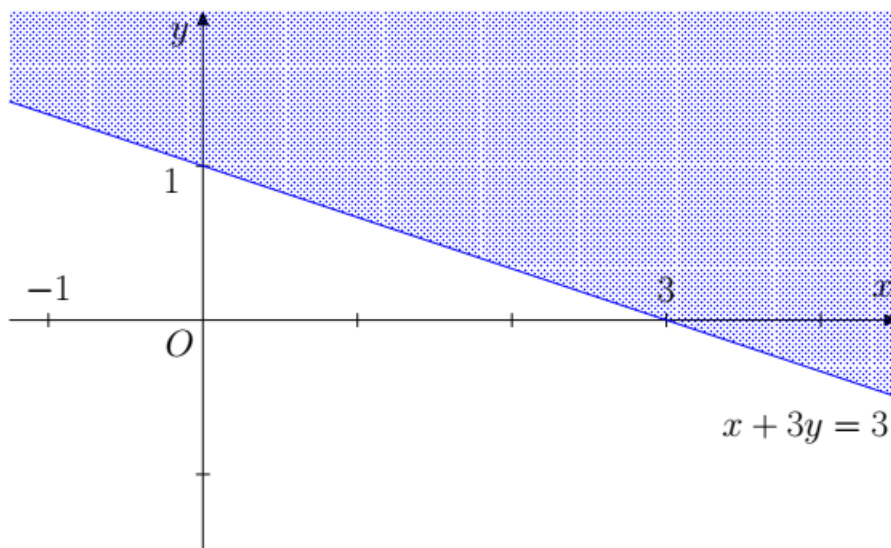
Bước 2. Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (thường lấy gốc toạ độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ). Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

Bước 3. Kết luận:

+) Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng chứa điểm  $M$  (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

+) Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng chứa điểm  $M$  (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

**Ví dụ:** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $x + 3y < 3$  và  $x + 3y \leq 3$ .



+ Vẽ đường thẳng d:  $x + 3y = 3$

+ Lấy điểm  $O(0; 0)$ . Ta có:  $0 + 3 \cdot 0 = 0 < 3$ .

+ Vậy:

Miền nghiệm của bất phương trình  $x + 3y < 3$  là nửa mặt phẳng chứa điểm  $O$  không kể đường thẳng d.

Miền nghiệm của bất phương trình  $x + 3y \leq 3$  là nửa mặt phẳng chứa điểm  $O$  gồm cả đường thẳng d.

## B. Bài tập tự luyện

### B.1 Bài tập tự luận

**Bài 1.** Điểm nào trong các điểm  $A(5; -1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(1; 1)$  nằm trên miền nghiệm của bất phương trình  $2x - y < 10$ ?

**Hướng dẫn giải:**

Lần lượt thay toạ độ các điểm  $A(5; -1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(1; 1)$  vào bất phương trình, ta có:

+)  $2 \cdot 5 - (-1) = 11 < 10$  là mệnh đề sai.

Do đó điểm A không nằm trên miền nghiệm của bất phương trình  $2x - y < 10$ .

+)  $2 \cdot 2 - 2 = 2 < 10$  là mệnh đề đúng.

Do đó điểm B nằm trên miền nghiệm của bất phương trình  $2x - y < 10$ .

+)  $2 \cdot 1 - 1 = 1 < 10$  là mệnh đề đúng.

Do đó điểm C nằm trên miền nghiệm của bất phương trình  $2x - y < 10$ .

**Bài 2.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60 \text{ m}^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5 \text{ m}^2$ , một chiếc bàn là  $1,2 \text{ m}^2$ . Gọi  $x$  là số ghế và  $y$  là số bàn được kê ( $x \geq 0, y \geq 0$ )

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn ghế.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Hướng dẫn giải:**

a) Diện tích kê  $x$  chiếc ghế và  $y$  chiếc bàn là  $0,5x + 1,2y \text{ (m}^2\text{)}$ .

Diện tích này không thể lớn hơn  $60 \text{ m}^2$  nên ta được bất phương trình cần tìm:

$$0,5x + 1,2y \leq 60 \text{ hay } 5x + 12y \leq 600.$$

Vậy bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn ghế là:  $5x + 12y \leq 600$ .

b) Ví dụ về ba nghiệm của bất phương trình trên là các cặp giá trị  $(10; 10)$ ,  $(30; 15)$ ,  $(24; 40)$ . Thật vậy:

Thay  $x = 10, y = 10$ , ta có:  $5 \cdot 10 + 12 \cdot 10 = 170 \leq 600$  là mệnh đề đúng. Do đó  $(10; 10)$  là nghiệm của bất phương trình.

Thay  $x = 30, y = 15$ , ta có:  $5 \cdot 30 + 12 \cdot 15 = 330 \leq 600$  là mệnh đề đúng. Do đó  $(30; 15)$  là nghiệm của bất phương trình.

Thay  $x = 24, y = 40$ , ta có:  $5 \cdot 24 + 12 \cdot 40 = 600 \leq 600$  là mệnh đề đúng. Do đó  $(24; 40)$  là nghiệm của bất phương trình.

Vậy  $(10; 10), (30; 15), (24; 40)$  là ba nghiệm của bất phương trình  $5x + 12y \leq 600$ .

**Bài 3.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} < -1$ ;

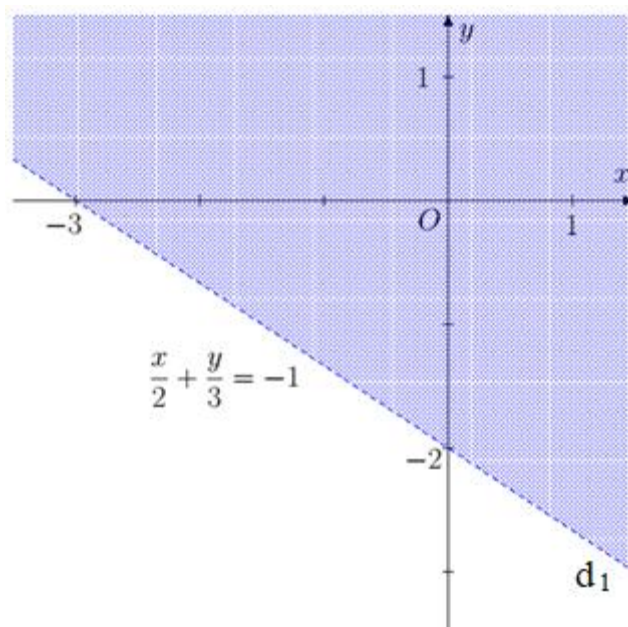
b)  $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2x-y+1}{3}$

**Hướng dẫn giải:**

a) Vẽ đường thẳng  $d_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1$ .

Thay giá trị  $(0; 0)$  vào bất phương trình, ta có  $\frac{0}{2} + \frac{0}{3} = 0 < -1$  là mệnh đề sai.

Miền nghiệm là miền không chứa điểm  $(0; 0)$ , không kể đường thẳng  $d$ .



$$b) \frac{x+y}{2} \geq \frac{2x-y+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) \geq 2(2x-y+1)$$

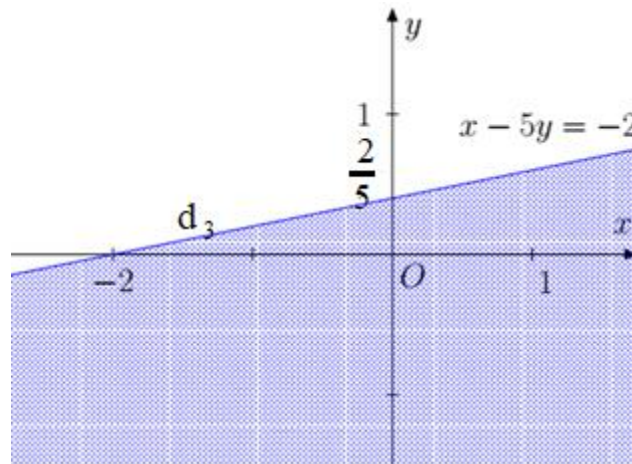
$$\Leftrightarrow 3x+3y \geq 4x-2y+2$$

$$\Leftrightarrow x-5y \leq -2$$

Vẽ đường thẳng  $d_3$ :  $x-5y=-2$ .

Lấy điểm  $(0; 0)$ . Ta có  $0-0=0 \leq -2$  là mệnh đề sai.

Miền nghiệm là miền không chứa điểm  $(0; 0)$ , kể cả đường thẳng  $d_3$ .



## B.2 Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-2(x-y) + y > 3$ ?

A.  $(4; -4)$ ;

B.  $(2; 1)$ ;

C.  $(-1; -2)$ ;

D.  $(4; 4)$ .

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: D**

Ta có:  $-2(x-y) + y > 3 \Leftrightarrow -2x + 3y > 3$

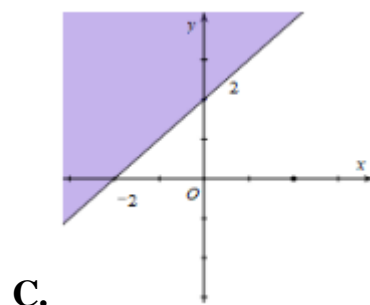
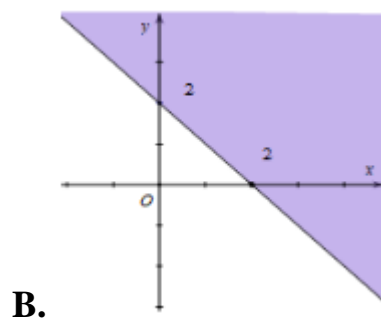
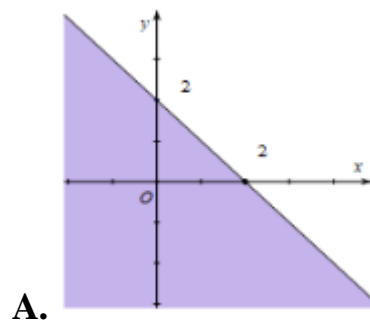
Xét đáp án A:  $-2.4 + 3.(-4) = -20 < 3$ , không thỏa mãn bất phương trình  $-2x + 3y > 3$ , vậy cặp số  $(4; -4)$  không là nghiệm của bất phương trình.

Đáp án B:  $-2.2 + 3.1 = -1 < 3$ , không thỏa mãn bất phương trình  $-2x + 3y > 3$ , vậy cặp số  $(2; 1)$  không là nghiệm của bất phương trình.

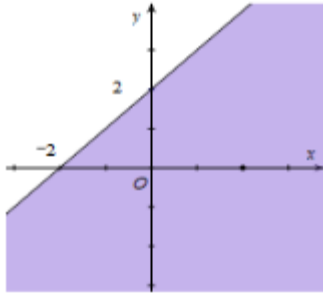
Đáp án C:  $-2.(-1) + 3.(-2) = -4 < 3$ , không thỏa mãn bất phương trình  $-2x + 3y > 3$ , vậy cặp số  $(-1; -2)$  không là nghiệm của bất phương trình.

Đáp án D:  $-2.4 + 3.4 = 4 > 3$ , thỏa mãn bất phương trình  $-2x + 3y > 3$ , vậy cặp số  $(4; 4)$  là nghiệm của bất phương trình.

**Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \leq 2$  là phần tô đậm của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau (kể cả bờ)?







**D.**

**Hướng dẫn giải**

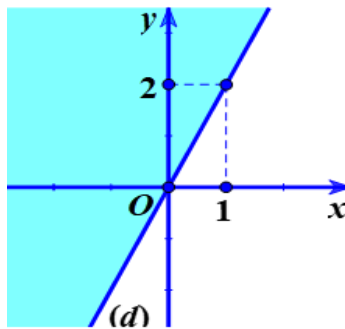
**Đáp án đúng là: A**

Xét đường thẳng  $x + y = 2$  đi qua 2 điểm  $A(2; 0)$  và  $B(0; 2)$ . Lấy điểm  $O(0; 0)$  ta có:  
 $0 + 0 = 0 < 2$ .

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \leq 2$  là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng  $x + y = 2$  (đi qua 2 điểm  $A, B$ ) chứa điểm  $(0; 0)$ , kể cả đường thẳng đó.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \leq 2$  là phần tô đậm ở đáp án A.

**Câu 3.** Phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây (kể cả đường thẳng  $d$ ) biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình.



**A.**  $-2x + y \geq 0$ ;

**B.**  $2x + y \geq 0$ ;

**C.**  $-2x - y \geq 1$ ;

**D.**  $x + 2y \geq 0$ .

**Hướng dẫn giải**

**Đáp án đúng là: A**

Giả sử đường thẳng  $(d)$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng có dạng:

$y = ax + b$ . Dễ dàng nhận thấy đường thẳng (d) đi qua hai điểm có tọa độ là  $(0; 0)$  và  $(1; 2)$ . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 2 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x.$$

Vậy đường thẳng có phương trình  $-2x + y = 0$ .

Xét điểm  $A(0; 2)$  thay vào phương trình đường thẳng ta được:  $-2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$ .

Vì điểm  $A(0; 2)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình. Vậy phân tô đậm biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $-2x + y \geq 0$  (kể cả đường thẳng d).