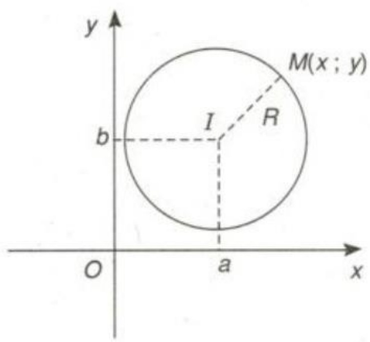
## Phương trình đường tròn và cách giải bài tập

### A. Lí thuyết tổng hợp.

### 1. Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước:

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R. Ta có phương trình đường tròn: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$



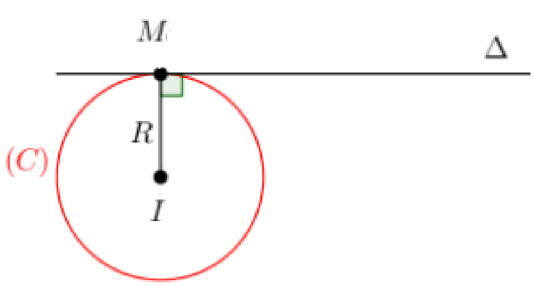

- Nhận xét:

+ Phương trình đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ trong đó $c=a^2+b^2-R^2$

+ Ngược lại, phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó đường tròn có tâm I(a; b) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

### 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) tâm I (a; b) và bán kính R. Gọi đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến với (C) tại M. Phương trình của đường tiếp tuyến $\Delta$ là: $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$



**B. Các dạng bài.**

**Dạng 1:** Tìm tâm và bán kính của đường tròn.

**Phương pháp giải:**

Cách 1: Dựa trực tiếp vào phương trình đề bài cho:

Từ phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ta có: tâm I (a; b), bán kính R

Từ phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ ta có: tâm I (a; b), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Cách 2: Biến đổi phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ về phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ để tìm tâm I (a; b) , bán kính R.

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Cho đường tròn có phương trình $x^2+y^2-6x+10y-2=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn.

**Lời giải:**

Gọi tâm của đường tròn là I (a; b) và bán kính R ta có:

$$\begin{cases}-2ax=-6x\\-2by=10y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-5\end{cases}\Rightarrow I(3;-5).$$

$$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{3^2+(-5)^2-(-2)}=6$$

Vậy đường tròn có tâm I (3; -5) và bán kính R = 6.

**Bài 2:** Cho đường tròn có phương trình $4x^2+4y^2-4x+8y-59=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn.

**Lời giải:**

Gọi tâm của đường tròn là I (a; b) và bán kính R ta có:

$$4x^2+4y^2-4x+8y-59=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + 2y - \frac{59}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y - \frac{59}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$

Vậy đường tròn có tâm I $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ và bán kính R = 4.

**Dạng 2:** Cách viết các dạng phương trình đường tròn.

**Phương pháp giải:**

Cách 1:

- Tìm tọa độ tâm I (a; b) của đường tròn (C)
- Tìm bán kính R của đường tròn (C)
- Viết phương trình đường tròn dưới dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Cách 2:

- Giả sử phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
- Từ đề bài, thiết lập hệ phương trình 3 ẩn a, b, c
- Giải hệ tìm a, b, c rồi thay vào phương trình đường tròn.

Chú ý: Khi đường tròn (C) tâm I đi qua hai điểm A, B thì $IA^2 = IB^2 = R^2$

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Lập phương trình đường tròn (C) tâm I (1; -3) và đi qua điểm O (0; 0).

**Lời giải:**

Đường tròn (C) đi qua điểm O (0; 0) nên ta có: $IO = R = \sqrt{(0-1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$

Đường tròn (C) có tâm I (1; -3) và bán kính R = $\sqrt{10}$, ta có phương trình đường tròn: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$.

**Bài 2:** Lập phương trình đường tròn (C) biết đường tròn đi qua ba điểm A (-1; 3), B (3; 5) và C (4; -2).

**Lời giải:**

Giả sử phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Đường tròn đi qua điểm A (1; 1) nên ta có phương trình:

$(-1)^2 + 3^2 - 2a.(-1) - 2b.3 + c = 0$

$\Leftrightarrow 2a - 6b + c = -10$ (1)

Đường tròn đi qua điểm B (3; 5) nên ta có phương trình:

$3^2 + 5^2 - 2a.3 - 2b.5 + c = 0$

$\Leftrightarrow -6a - 10b + c = -34$ (2)

Đường tròn đi qua điểm C (4; -2) nên ta có phương trình:

$4^2 + (-2)^2 - 2a.4 - 2b.(-2) + c = 0$

$\Leftrightarrow -8a + 4b + c = -20$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a - 6b + c = -10 \\ -6a - 10b + c = -34 \\ -8a + 4b + c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{-20}{3} \end{cases}$$

Ta có phương trình đường tròn:

$x^2 + y^2 - 2.\dfrac{7}{3}x - 2.\dfrac{4}{3}y - \dfrac{20}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}y - \frac{20}{3} = 0$

**Dạng 3:** Vị trí tương đối của hai đường tròn, đường tròn và đường thẳng.

**Phương pháp giải:**

***- Vị trí tương đối của hai đường tròn:***

Cho hai đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1$, bán kính $R_1$ và đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2$, bán kính $R_2$.

+ Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2$ thì hai đường tròn không có điểm chung .

+ Nếu thì $I_1I_2 = R_1 + R_2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài

+ Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ thì hai đường tròn tiếp xúc trong.

+ Nếu $R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$ thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm (với $R_1 > R_2$) .

***- Vị trí tương đối của đường tròn và đường thẳng:***

Cho đường tròn (C) tâm I $(x_0; y_0)$ có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ và đường thẳng $\Delta$ có phương trình ax + by + c = 0

+ Tính khoảng cách d (I, $\Delta$) từ tâm I đến đường thẳng $\Delta$ theo công thức:

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

+ Tính bán kính R của đường tròn (C).

+ So sánh d (I, $\Delta$) với R :

Nếu d (I, $\Delta$) = R thì đường thẳng $\Delta$ tiếp xúc với đường tròn (C).

Nếu d (I, $\Delta$) > R thì đường thẳng $\Delta$ không giao với đường tròn (C).

Nếu d (I, $\Delta$) < R thì đường thẳng $\Delta$ giao với đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 32$. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d’: 3x + 5y – 1 = 0 và đường tròn (C).

**Lời giải:**

Xét phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 32$ có:

Tâm I (0; 0)

Bán kính R = $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Xét phương trình đường thẳng: d’: 3x + 5y – 1 = 0

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d’ là :

d (I, d’) $= \dfrac{|3.0 + 5.0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \dfrac{\sqrt{34}}{34} < R = 4\sqrt{2}$

Vậy đường thẳng d’ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt.

**Bài 2:** Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và đường tròn (C’) có phương trình $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 18$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (C) và (C’).

**Lời giải:**

Xét phương trình đường tròn (C) là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$, ta có:

Tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1 = \sqrt{25} = 5$

Xét phương trình đường tròn (C’) là $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 18$, ta có:

Tâm $I_2(6;5)$, bán kính $R_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Ta có:

$I_1I_2 = \sqrt{(6-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{41}$

$R_1 + R_2 = 5 + 3\sqrt{2}$

$R_1 - R_2 = 5 - 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$

Vậy hai đường tròn (C) và (C’) cắt nhau tại hai điểm.

**Dạng 4:** Tiếp tuyến với đường tròn.

**Phương pháp giải:**

- Tiếp tuyến tại một điểm M $(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn. Ta có:

+ Nếu phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ thì phương trình tiếp tuyến là: $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.

+ Nếu phương trình đường tròn có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì phương trình tiếp tuyến là: $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = R^2$

- Tiếp tuyến vẽ từ một điểm N $(x_0; y_0)$ cho trước nằm ngoài đường tròn.

+ Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm N:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow mx - y - mx_0 + y_0 = 0$ (1)

+ Cho khoảng cách từ tâm I của đường tròn (C) tới đường thẳng d bằng R, ta tính được m thay m vào phương trình (1) ta được phương trình tiếp tuyến. Ta luôn tìm được hai đường tiếp tuyến.

- Tiếp tuyến d song song với một đường thẳng có hệ số góc k.

+ Phương trình của đường thẳng d có dạng: y = kx + m (m chưa biết)

$\Leftrightarrow$ kx – y + m = 0 (2)

+ Cho khoảng cách từ tâm I đến d bằng R, ta tìm được m. Thay vào (2) ta có phương trình tiếp tuyến.

**Ví dụ minh họa:**

**Bài 1:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M (3; 4) biết đường tròn có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.

**Lời giải:**

Xét phương trình đường tròn (C) có: Tâm I (1; 2) và bán kính $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M (3; 4) là:

$(3 – 1)(x – 3) + (4 – 2)(y – 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $3x – 9 – x + 3 + 4y – 16 – 2y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x + 2y – 14 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x + y – 7 = 0$

**Bài 2:** Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 18 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua A (1; 1).

**Lời giải:**

Xét phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 18 = 0$

Ta có tâm I (2; -4) và bán kính R = $\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 18} = \sqrt{2}$

Xét điểm A (1; 1) có:

$1^2 + 1^2 - 4.1 + 8.1 + 18 \neq 0$ $\Rightarrow$ Điểm A không nằm trên đường tròn (C)

Gọi phương trình đường thẳng đi qua điểm A (1; 1) với hệ số góc k là

$\Delta$: $y = k(x – 1) + 1$ $\Leftrightarrow$ $kx – y – k + 1 = 0$

Để đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì khoảng cách từ tâm I tới đường thẳng $\Delta$ phải bằng bán kính R.

Ta có: d (I, $\Delta$) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|2k + 4 - k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |k + 5| = \sqrt{2(k^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 10k + 25 = 2k^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 10k - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 5 - 4\sqrt{3} \\ k = 5 + 4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Với $k = 5 - 4\sqrt{3}$ ta có phương trình tiếp tuyến của (C) là:

$$y=(5-4\sqrt{3})x-5+4\sqrt{3}+1 \Leftrightarrow y=(5-4\sqrt{3})x-4+4\sqrt{3}$$

Với $k=5+4\sqrt{3}$ ta có phương trình tiếp tuyến của (C) là:

$$y=(5+4\sqrt{3})x-5-4\sqrt{3}+1 \Leftrightarrow y=(5+4\sqrt{3})x-4-4\sqrt{3}$$

**C. Bài tập tự luyện.**

**Bài 1:** Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình: $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

Đáp án: Tâm I (1; 1) và R = 2

**Bài 2:** Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình: $(x-2)^2+(y-3)^2=18$

Đáp án: Tâm I (2; 3) và R = $3\sqrt{2}$

**Bài 3:** Cho phương trình: $x^2+y^2-4mx-2my+2m+3=0$. Tìm m để phương trình là phương trình đường tròn.

Đáp án: m > 1 hoặc $m<\frac{-3}{5}$

**Bài 4:** Viết phương trình đường tròn tâm I (1; 2) đi qua điểm B (5; 0).

Đáp án: $(x-1)^2+(y-2)^2=20$

**Bài 5:** Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A (1; 4), B (8; 3) và C (5; 0)

Đáp án: $x^2+y^2-9x-7y+20=0$

**Bài 6:** Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-1=0$ . Xác định vị trí tương đối của đường tròn với đường thẳng d: x + y – 1 = 0.

Đáp án: d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

**Bài 7:** Cho hai đường tròn: (C) có phương trình là $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và (C’) có phương trình $x^2+y^2+2x-2y-14=0$. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

Đáp án: (C) cắt (C’) tại hai điểm phân biệt.

**Bài 8:** Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A (2; 1) và tiếp xúc với hai trục Ox, Oy.

Đáp án: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

**Bài 9:** Cho phương trình đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=13$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) tại điểm B (3; 4).

Đáp án: d: 2x + 3y – 18 = 0

**Bài 10:** Cho phương trình đường tròn (C): $(x-7)^2+(y-1)^2=10$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) đi qua điểm A (9; 5).

Đáp án: d: x – 3y + 6 = 0 và d’: 3x + y – 32 = 0