Các bài toán về phép tịnh tiến

I. Lý thuyết ngắn gọn

1.Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, ký hiệu $T_{\vec{v}}$

$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

2.Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M (x; y) và $\vec{v} = (a;b)$. Khi đó: $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

3.Các tính chất của phép tịnh tiến:

-Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ

-Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính

II. Các dạng toán phép tịnh tiến

Dạng 1: Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Ví dụ 1:Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (3;4)$. Hãy tìm ảnh của điểm A (1; -1) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Lời giải

Gọi A′ (x′; y′) là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Ta có $A'(x';y') = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 + 3 \\ y' = -1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(4;3)$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (2;-4)$ và đường thẳng d có phương trình 2x - 3y + 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Lời giải

Lấy điểm M (x; y) tùy ý thuộc d, ta có: 2x – 3y + 5 = 0 (1)

Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)\Rightarrow\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+4\end{cases}$

Thay vào (1) ta được phương trình:

$2(x'-2)-3(y'+4)+5=0\Rightarrow 2x'-3y'-11=0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng d’: 2x - 3y – 11 = 0

Dạng 2: Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh

Phương pháp giải: Xác định phép tịnh tiến tức là tìm tọa độ của $\vec{v}$. Để tìm tọa độ của $\vec{v}$, ta có thể giả sử v = (a; b), sử dụng các dữ kiện trong giả thiết của bài toán để thiết lập hệ phương trình hai ẩn a,b và giải hệ tìm a,b

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 3x + y – 9 = 0. Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ có giá song song với Oy biến d thành d′ đi qua điểm A (2; 4)

Lời giải

Vì $\vec{v}$ có giá song song với Oy nên $\vec{v}=(0;k)$ $(k\neq 0)$

Lấy $M(x;y)\in d\Rightarrow 3x+y-9=0$ (1)

Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=y+k\end{cases}$

Thay vào (1) ta được: 3x’ + y’ – k – 9 = 0

Do đó $T_{\vec{v}}(d)=d':3x+y-k-9=0$

Mà A (2; 4) thuộc d, suy ra k=1

Vậy $\vec{v}=(0;1)$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d: 2x –3y + 3 = 0 và d′: 2x – 3y – 5 = 0. Tìm tọa độ $\vec{v}$ có phương vuông góc với d để $T_{\vec{v}}(d)=d'$

Lời giải

Gọi $\vec{v}=(a;b)$

Lấy điểm M (x; y) tùy ý thuộc d, ta có: d: 2x – 3y + 3 = 0   (1)

Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M)$

Ta có: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$

Thay vào (1) được: 2x’ - 3y’ - 2a + 3b + 3 = 0

Suy ra: $-2a + 3b + 3 = -5 \Leftrightarrow 2a - 3b = 8$ Chuyển vế sai

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (2;-3)$ suy ra vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (3;2)$

Suy ra: $\vec{v}.\vec{u} = 3a + 2b = 0$

Có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a - 3b = 8 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16}{13} \\ b = \dfrac{-24}{13} \end{cases}$

Vậy $\vec{v} = \left(\dfrac{16}{13}; \dfrac{-24}{13} \right)$

Dạng 3: Dùng phép tịnh tiến để giải các bài toán dựng hình

Phương pháp giải:

- Để dựng một điểm M ta tìm cách xem nó là ảnh của một điểm đã biết qua một phép tịnh tiến, hoặc xem M là giao điểm của hai đường trong đó một đường cố định còn một đường là ảnh của một đường đã biết qua phép tịnh tiến

- Sử dụng kết quả: Nếu $T_{\vec{v}}(N) = M$ và $N \in H$ thì $N \in (H')$, trong đó $(H') = T_{\vec{v}}(H)$ và kết hợp với M thuộc hình (K) để suy ra $M \in (H') \cap (K)$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d1 cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó sao cho đường thẳng AB không song song hoặc trùng với d (hay d1). Hãy tìm điểm M trên d và điểm M’ trên d1 để tứ giác ABMM’ là hình bình hành

Lời giải:

Điểm M’ là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$. Khi đó điểm M’ vừa thuộc d1 vừa thuộc d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$

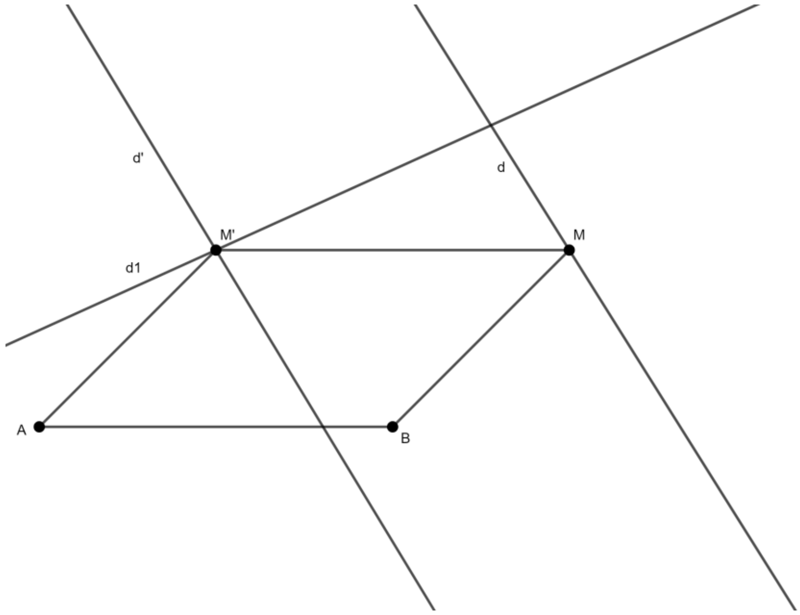
Từ đó có thể suy ra cách dựng:

-Dựng d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$

-M’ là giao điểm của d’ và d1

-Dựng điểm M là ảnh của điểm M’ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$

Suy ra tứ giác ABMM’ chính là hình bình hành thoả mãn yêu cầu của đầu bài



Ví dụ 6: Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng d song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho AM = CN

Lời giải

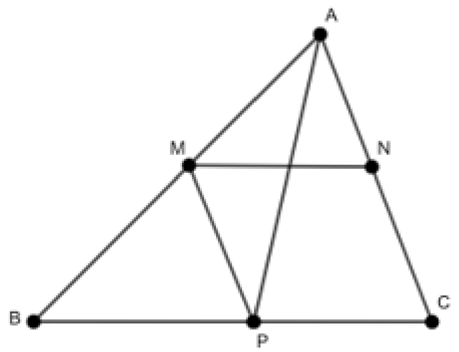
Cách dựng:

-Dựng phân giác trong AP của góc A

-Dựng đường thẳng đi qua P song song với AC cắt AB tại M

-Dựng ảnh $N = T_{\overline{PM}}(C)$

Đường thẳng MN chính là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán



Dạng 4: Sử dụng phép tịnh tiến để giải bài toán tìm tập hợp điểm

Phương pháp giải: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và điểm M di động trên hình (H) thì điểm M’ thuộc hình (H’), trong đó (H’) là ảnh của hình (H) qua $T_{\vec{v}}$

Ví dụ 7: Cho hai điểm phân biệt B và C cố định trên đường tròn (O) tâm O, điểm A di động trên đường tròn (O). Chứng minh rằng khi A di động trên đường tròn (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn

Lời giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Tia BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D

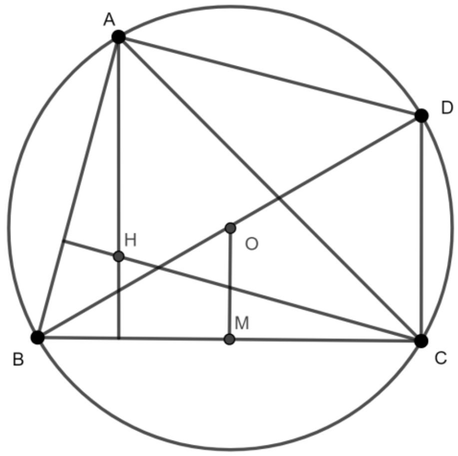
$BCD = 90^\circ$ nên DC // AH

Tương tự AD // CH

Suy ra: ADCH là hình bình hành

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$

OM không đổi nên H là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$. Do đó khi điểm A di động trên đường tròn (O) thì H di động trên đường tròn (O‘) là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$



Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định, $BAC = \alpha$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ không đổi. Tìm tập hợp các điểm B, C

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Khi đó theo định lí sin ta có $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ không đổi

Vậy $\dfrac{BC}{2\sin\alpha} = OA = R$ không đổi nên O di động trên đường tròn tâm A bán kính $\dfrac{BC}{2\sin\alpha} = AO$

Ta có OB = OC = R không đổi và $BOC = 2\alpha$ không đổi suy ra

$OBC = OCB = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2}$ không đổi

Mặt khác $\overrightarrow{BC}$ có phương không đổi nên $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cũng có phương không đổi

Đặt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v_2}$ không đổi thì $T_{\overrightarrow{v_1}}(O) = B, T_{\overrightarrow{v_2}}(O) = C$

Vậy tập hợp điểm B là đường tròn $\left(A_1;\dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ ảnh của $\left(A;\dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\overrightarrow{v_1}}$ và tập hợp điểm C là đường tròn $\left(A_2;\dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ảnh của $\left(A;\dfrac{BC}{2\sin\alpha}\right)$ qua $T_{\overrightarrow{v_2}}$

III. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt B, C cố định trên đường tròn (O) tâm O.
Điểm A di động trên (O). Chứng minh khi A di động trên (O) thì trực tâm của tam giác ABC di động trên một đường tròn

Bài 2: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình 3x – y – 9 = 0. Tìm phép tịnh tiến theo vectơ có phương song song với trục Ox biến d thành đường thẳng d’ đi qua gốc toạ độ và viết phương trình đường thẳng d’

Bài 3: Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O, bán kính r nằm về một phía của đường thẳng AB. Lấy điểm M trên (C), rồi dựng hình bình hành ABMM’. Tìm tập hợp các điểm M’ khi M di động trên (C)

Bài 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm A (-1; -1), B (3; 1), C (2; 3). Xác định toạ độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành

Bài 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;3)$

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$

Bài 7: Cho đường (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM, AN cắt tiếp tuyến tại B tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ

Bài 8: Tam giác ABC cố định trực tâm H. Vẽ hình thoi BCDE. Từ D và E vẽ các đường vuông góc với AB và AC, các đường thẳng này cắt nhau tại M. Tìm tập hợp điểm M

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol $(P): y=x^2$ và $(Q): y=x^2+2x+2$ .Tìm phép tịnh tiến T biến (Q) thành (P)

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 1$. Viết phương trình (P’) sao cho qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (1;1)$ thì (P) là ảnh của (P’)