Bài tập Mặt phẳng vuông góc - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho tứ diện ABCD có: AB = AC = AD, góc $\widehat{BAC}$ bằng góc $\widehat{BAD}$ bằng 60^0. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là:

A. $\widehat{ACB}$ B. $\widehat{ANB}$

C. $\widehat{ADB}$ D. $\widehat{MNB}$

b) Mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng

A. (CDM)

B. (ACD)

C. (ABN)

D. (ABC)

c) Đường vuông góc chung của AB và CD là:

A. BN

B. AN

C. BC

D. MN

Lời giải:

Đáp án: a- B, b - C, c - D

a. Các tam giác ABC và ABD là tam giác đều ⇒ tam giác ACD cân

⇒ BN ⊥ CD và AN ⊥ CD ⇒ góc $\widehat{ANB}$ là góc của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD)

b. Ta có CD ⊥ (ABN) (do BN ⊥ CD và AN ⊥ CD) ⇒ (BCD) ⊥ (ABN)

c. CD ⊥ MN; AB ⊥ (CDM) (do AB ⊥ CM và AB ⊥ DM)

MN là đường vuông góc chung của AB và CD

Bài 2: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc.

a) Khẳng định nào sau đây đúng?

A. AB ⊥ (ACD).

B. BC ⊥ (ACD).

C. CD ⊥ (ABC).

D. AD ⊥ (BCD).

b) Điểm cách đều bốn điểm A, B, C, D là:

A. trung điểm J của AB

B. trung điểm I của BC

C. trung điểm K của AD

D. trung điểm M của CD

Lời giải:

Đáp án: a - C, b - C

a. Phương án A sai vì chỉ có AB ⊥ CD; phương án B sai vì chỉ có : BC ⊥ CD

Phương án C đúng vì

$$\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BC \end{cases} => CD \perp (ABC)$$

Phương án D sai vì AD không vuông góc với đường thẳng nào thuộc mặt phẳng (BCD)

b. CD ⊥ (ABC) vì CD ⊥ AB và CD ⊥ BC

AB ⊥ (BCD) vì AB ⊥ BC và AB ⊥ CD

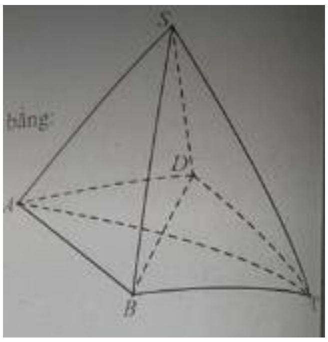
Phương án A sai vì tam giác ABC không vuông góc tại C nên trung điểm của AB không cách đều ba điểm A, B, C

Phương án B sai vì tam giác ABC không vuông góc tại A nên trung điểm của BC không cách đều ba điểm A, B, C

Phương án C đúng vì tam giác ACD vuông góc tại C nên trung điểm K của AD cách đều ba điểm A, C, D; tam giác ABD vuông góc tại B nên trung điểm K của AD cách đều ba điểm A, B và D

Phương án D sai vì tam giác CBD không vuông góc tại B nên trung điểm của CD không cách đều ba điểm B, C, D

Bài 3: Cho chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a.



a) Đường thẳng SA vuông góc với

A. SC

B. SB

C. SD

D. CD

b) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng:

A. a

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

Đáp án: a - A, b - D

a. Tứ giác ABCD là hình vuông nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

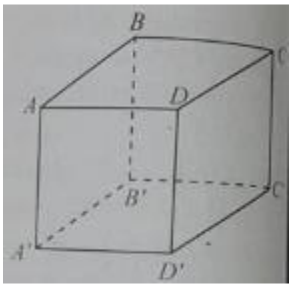
Tam giác SAC có SA = a, SC = a và AC = $a\sqrt{2}$ ⇒ SAC là tam giác vuông tại S, hay SA ⊥ SC

b. Gọi O là giao của AC và BD ⇒ DO ⊥ (SAC) (do DO ⊥ AC và DO ⊥ SO)

⇒ khoảng cách từ D đến (SAC) bằng DO

Ta có: $DO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 4: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’:



a) Mặt phẳng (ACC’A’) không vuông góc với mp nào?

b) Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (A’BD) là?

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

*Vì $BD \subset (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (ACC'A')$

*Vì $BD \subset (BDC') \Rightarrow (BDC') \perp (ACC'A')$

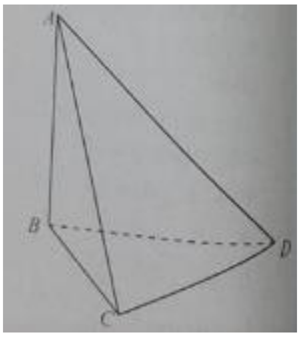
*Vì $BD \subset (A'BD) \Rightarrow (A'BD) \perp (ACC'A')$

Vậy mp(CDD’C’) không vuông góc với mặt phẳng (ACC’A’).

b) Ta có: BD = A’B = A’D nên tam giác A’BD là tam giác đều.

Lại có: AB = AD = AA’ nên hình chiếu vuông góc của điểm A lên mp(A’BD) là tâm của tam giác BDA’.

Bài 5: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc.



a) Đường thẳng AB vuông góc với mp nào?

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng nào của tứ diện?

A. Không vuông góc với mặt nào?

B. (ACD)   C. (ABC)   D. (BCD)

c) Đường vuông góc chung của AB và CD là:

A. AC

B. BC

C. AD

D. BD

Lời giải:

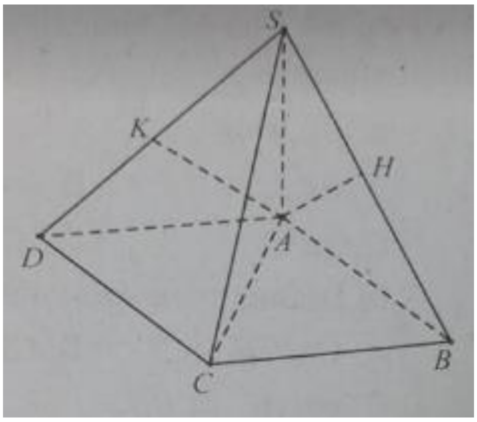
Đáp án: a - A, b - D, c - B

a. $AB \perp CD$ và $AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (BCD)$

b. vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow (ABD) \perp (BCD)$

c. $BC \perp AB$ và $BC \perp CD \Rightarrow BC$ là đường vuông góc chung của AB và CD

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật. SA vuông góc với (ABCD), AH và AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB và SAD.



a) Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc vì.

A. Góc của (SAB) và (SBC) là góc ABC và bằng 90^0.

B. Góc của (SAB) và (SBC) là góc BAD và bằng 90^0.

C. AB ⊥ BC; AB ⊂ (SAB) và BC ⊂ (SBC)

D. BC ⊥ (SAB) do BC ⊥ AB và BC ⊥ SA

b) Hai mặt phẳng (SAC) và (AHK) vuông góc vì:

A. AH ⊥(SBC) (do AH ⊥ SB và AH ⊥ BC); và AK ⊥ (SCD) (do AK⊥SD và AK⊥CD)

B. AH ⊥(SBC) (do AH ⊥ SB và AH ⊥ BC); và AK ⊥ (SCD) (do AK⊥SD và AK⊥CD) nên SC⊥(AHK)

C. AH ⊥(SBC) (do AH ⊥ SB và AH ⊥ BC) nên SC⊥(AHK)

D. AK ⊥(SBC) (do AK ⊥ SD và AK ⊥ CD) nên SC ⊥ (AHK)

Lời giải:

Đáp án: a - D, b - B

a) Phương án A sai vì AB và CB không vuông góc với giao tuyến SB của (SAB) và (SBC), nên góc $\widehat{ABC}$ không phải là góc của hai mặt phẳng này;

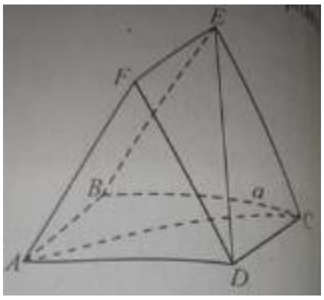
Phương án B sai vì góc $\widehat{BAD}$ không phải là góc của hai mặt phẳng (SAB) với mặt phẳng (SBC);

Phương án C sai vì $AB \perp BC$ thì chưa đủ để kết luận AB vuông góc với mặt phẳng (SBC);

Phương án D đúng vì : $BC \perp (SAB)$ do $BC \perp AB$ và $BC \perp SA \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) Phương án A sai vì hai điều kiện $AH \perp (SBC)$ (do $AH \perp SB$ và $AH \perp BC$) và $AK \perp (SCD)$ (do AK vuông góc với SD và $AK \perp CD$) chưa liên quan đến (SAC); phương án B đúng vì $AH \perp (SBC)$ và $AK \perp (SCD)$ nên $SC \perp (AHK)$, từ đó suy ra hai mặt phẳng (AHK) và (SAC) vuông góc; phương án C và D đều sai vì chưa đủ điều kiện kết luận $SC \perp (AHK)$

Bài 7: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc.



a) DE bằng:

A. $a\sqrt{3}$

B. $a\sqrt{2}$

C. $3a^2$

D. $a(1 + \sqrt{3})$

b) Đường thẳng DE vuông góc

A. Chỉ với AC

B. Chỉ với BF

C. Chỉ với AC và BF

D. Hoặc với AC hoặc với BF

Lời giải:

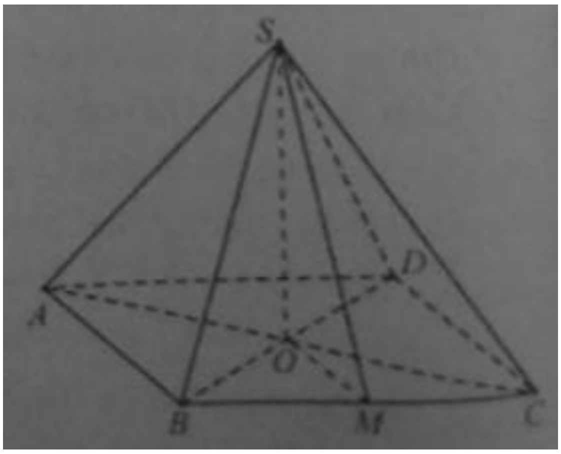
Đáp án: a - A, b - C

EB ⊥(ABCD) vì nó vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng vuông góc đã cho ⇒ CD ⊥ (EBC) ⇒ tam giác ECD vuông tại C.

⇒ DE = $a\sqrt{3}$. Vậy phương án A đúng

Phương án C đúng vì : hình chiếu của DE lên (ABEF) là AE, mà AE ⊥ BF, suy ra DE ⊥ BF; hình chiếu của DE lên (ABCD) là BD, mà AC ⊥ BD, nên suy ra AC ⊥ DE.

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng ∝



Tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:

A. $\tan \propto$ B. $\cot \propto$

C. $\sqrt{2}\tan \propto$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2\tan\propto}$

Lời giải:

Đáp án: C

Chân đường cao hình chóp đều S.ABCD trùng với tâm O của đáy ABCD. AO là hình chiếu của SA lên (ABCD)

=> $\widehat{SAO} = \propto$

Gọi M là trung điểm của BC ⇒ OM là hình chiếu của SM lên (ABCD) và MO ⊥ BC.

$$\widehat{SMO} = \left((SBC);(ABCD)\right)$$

$$AC = a\sqrt{2}; AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SO = OA.\tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{}}{2}$$

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha : \frac{a}{2} = \sqrt{2}\tan\alpha$$

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng:

A. (SAD)

B. (SBD)

C. (SDC)

D. (SBC)

b) Giả sử góc BAD bằng 60^0. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABCD) bằng:

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. a D. $a\sqrt{3}$

c) Góc giữa mặt bên hình chóp S.ABCD và mặt phẳng đáy có tang bằng:

A. 1 B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. Đáp án khác

Lời giải:

Đáp án: a - B, b - A, c - D

a. Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Từ S vẽ SO ⊥ (ABCD)

⇒ OA = OB = OC (là hình chiếu của các đường xiên bằng nhau)

⇒ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tiếp tam giác ABC

Ta có: BI là đường trung tuyến của tam giác ABC nên O nằm trên đường thẳng BI hay 0 ∈ BD

Vậy SO ⊂ (SBD) và SO ⊥(ABCD) ⇒ (SBD) ⊥(ABCD)

b) Tam giác ABD có AB = AD và góc $\widehat{BAD} = 60^0$ nên tam giác ABD đều suy ra: BD = a

Ta có; $$BO = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}a$$

Tam giác SOB vuông tại O nên

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

c. Từ O vẽ OM ⊥ BC ⇒ góc $\widehat{OMS}$ là góc của mặt bên và mặt phẳng đáy

Ta có: ABCD là hình thoi nên $\widehat{CBD} = \widehat{ABD} = 60^0;$

$$OM = OB.\sin\widehat{OBM} = \frac{a}{3}.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\tan\widehat{OMS} = \frac{SO}{OM} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1 Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song ;

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b và b vuông góc với thẳng a, thì a song song với (α).

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

Lời giải:

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai (vì a có thể nằm trong mp(α), xem hình vẽ)

d) Sai, chẳng hạn hai mặt phẳng (α) và (β) cùng đi qua đường thẳng a và a ⊥ mp(P) nên (α) và (β) cùng vuông góc với mp(P) nhưng (α) và (β) cắt nhau.

e) Sai, chẳng hạn a và b cùng ở trong mp(P) và mp(P) ⊥ d. Lúc đó a và b cùng vuông góc với d nhưng a và b có thể không song song nhau.

Bài 2 Trong các điều khẳng định sau đây, điều nào đúng?

a) Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác cho trước.

d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Lời giải:

Câu a) đúng. Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại (xem mục c). Tính chất của khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (Bài 5 – chương III).

Câu b) sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu c) sai. Vì trong trường hợp đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì ta có vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước vì bất kì mặt phẳng nào chứa đường thẳng cũng đều vuông góc với mặt phẳng cho trước. Để có khẳng định đúng ta phải nói: Qua một đường thẳng không vuông góc với một mặt phẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đã cho.

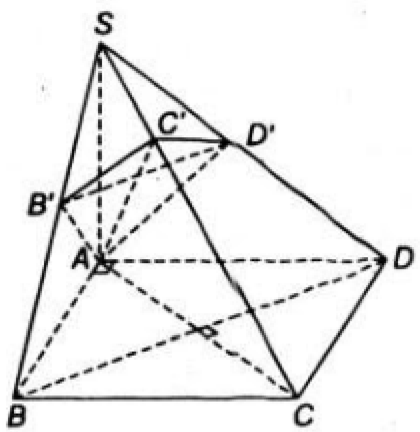
Câu d) sai. Vì đường vuông góc chung của hai đường thẳng phải cắt cả hai đường ấy.

Bài 3 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, AC, SD tại B', C', D'. Chứng minh $B'D'$ song song với BD và AB' vuông góc với SB.

Lời giải:



a) Các mặt bên là Δ vuông :

• $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD$

• $\begin{cases} CB \perp AB \\ AB \text{ là hình chiếu của } SB \text{ trên } (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow CB \perp SB$

• Tương tự $CD \perp SD$

Vậy các mặt bên SAB, SAD, SBC, SDC là tam giác vuông

b) Chứng minh:B'D'// BD, $AB' \perp SB$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Lại có: $BD \perp AC$ (do đáy là hình vuông)

=> $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ (1)

Theo giả thiết: $SC \perp (AB'C'D')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BD// (AB'C'D')

* Ta có: $\begin{cases} BD // (AB'C'D') \\ BD \subset (SBD) \\ (SBD) \cap (AB'C'D') = B'D' \end{cases}$

$\Rightarrow B'D' // BD$

• $\left.\begin{matrix} AB' \perp BC \left(\text{vì } BC \perp (SAB)\right) \\ AB' \perp SC \left(\text{vì } SC \perp (AB'C'D')\right) \end{matrix}\right\}$

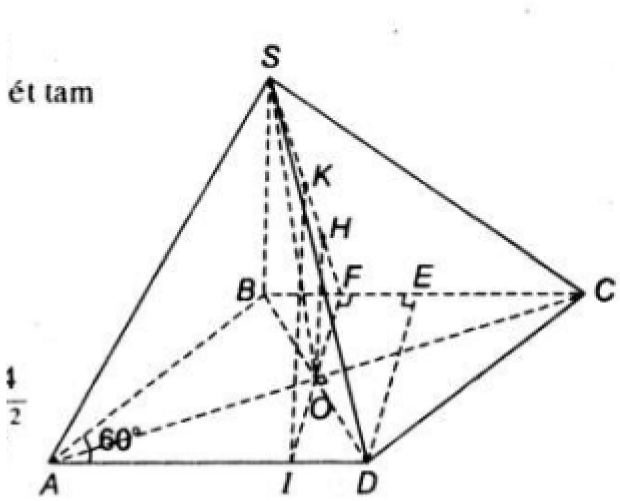
$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$

Bài 4 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có góc BAD = 60^o. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC và F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải:



a) Từ giả thiết ta suy ra tam giác BOE

là tam giác đều, cạnh $\frac{a}{2}$, do đó OF là đường cao và ta được OF ⊥ BC

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ OF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SF \perp BC \quad \text{(định lí 3 đường vuông góc)}$$

$$\left.\begin{array}{l} SF \perp BC \\ OF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SOF)$$

$BC \subset (SBC)$

b) Vì (SOF) ⊥ (SBC) và hai mặt phẳng này giao nhau theo giao tuyến
điểm O ta kẻ OH ⊥ (SBC) và OH chính là khoảng cách từ O đến mp(

$$\text{Ta có: } SO = \frac{3a}{4};\ OF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SF = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

$$OH.\ SF = SO.\ OF \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

Gọi K là hình chiếu của A trên mp(SBC), ta có AK // OH.

Trong ΔAKC thì OH là đường trung bình, do đó:

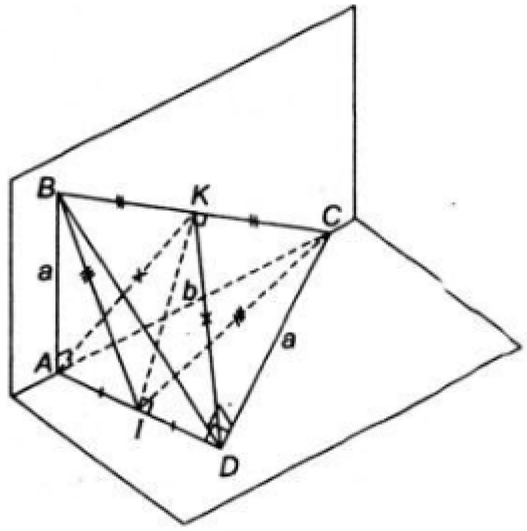
$$AK = 2OH \Rightarrow AK = \frac{3a}{4}$$

Bài 5 Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có AB =a, AC =b. Tam giác ACD vuông tại D có CD = a.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.

b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Lời giải:



Gọi (α), (β) lần lượt là mặt phẳng chứa

tam giác ABC và ADC.

● (α) ⊥ (β) theo giao tuyến AC

● AB ⊂ (α) và AB ⊥ AC (Tam giác

ABC vuông ở A)

⇒ AB ⊥ (β)

a) ● Chứng minh tam giác BAD vuông

Ta có AB ⊥ (β) ⊃ AD ⇒ AB ⊥ AD

Vậy tam giác ABD vuông tại A

● Chứng minh tam giác BDC vuông

Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AB \text{ (vì } AB \perp (\beta) \supset DC) \\ DC \perp AD \text{ (vì tam giác ADC vuông ở D)} \end{cases}$$

⇒ DC ⊥ (ABD)

⇒ DC ⊥ BD

Vậy tam giác BDC vuông ở D.

b) Xét tam giác BAD và CDA có:

AD chung

AB = CD

$\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^0$

=> Δ BAD =Δ CDA(c.g.c)

=> BI = CI (2 đường trung tuyến tương ứng)

=> Tam giác IBC cân tại I có IK là đường trung tuyến

Nên IK đồng thời là đường cao

=> $IK \perp BC$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có tam giác AKD là tam giác cân tại K có KI là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao.

⇒ IK ⊥ AD (2)

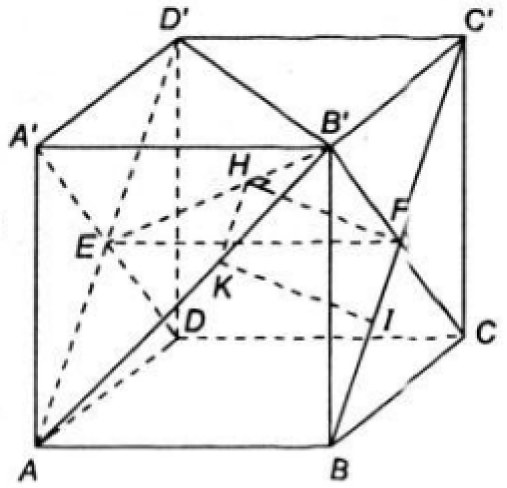
Từ (1) và (2) suy ra; IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Bài 6 Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD)

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Lời giải:



a) Chứng minh BC’ ⊥ (A’B’CD)

● BB’C’C là hình vuông

⇒ BC’ ⊥ B’C (1)

● DC ⊥ (BB’C’C)

⇒ BC’ ⊥ DC (2)

(1) và (2) ⇒ BC’ ⊥ (A’B’CD)

(đpcm)

b) Do AD’ // BC’ nên mp(AB’D’) là mặt phẳng chứa AB’ và song song với BC’.

Ta tìm hình chiếu của BC’ trên mp (AB’D’).

Gọi E và F lần lượt là tâm của các mặt bên ADD’A’ và BCB’C’.

Ta có: BC’// AD’ mà $BC' \perp (A'B'CD)$

$\Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$ và $HF \subset (A'B'CD)$.

$\Rightarrow AD' \perp HF$ (3)

Lại có: $EB' \perp HF$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$HF \perp (AB'D')$.

Vậy H là hình chiếu F trên mp (AB'D'). Qua H ta dựng đường thẳng song song với BC' thì đường thẳng này chính là hình chiếu của BC' trên mp(AB'D').

Đường thẳng qua H song song với BC' cắt AB' tại K. Qua K kẻ đường thẳng song song với HF, đường này cắt BC' tại I. Khi đó, KI chính là đường vuông góc chung của AB' và BC'.

Thật vậy, $HF \perp (AB'D') \Rightarrow HF \perp AB'$ và KI // HF

suy ra: $KI \perp AB'$

$$\begin{cases} BC' \perp (A'B'CD) \\ HF \subset (A'B'CD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HF \perp BC' \\ KI // HF \end{cases} \Rightarrow KI \perp BC'$$

Tam giác EFB' vuông tại F có đường cao FH nên:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{FB^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow KI = HF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Bài 7 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, có góc $\widehat{BAD}$ = 60^o và

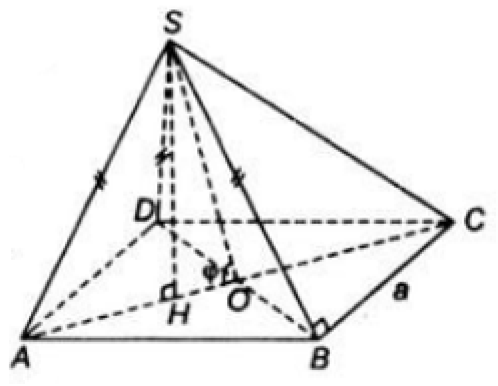
a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC.

b) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

c) Chứng minh SB vuông góc với BC.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Tính tanφ.

Lời giải:



a) Tam giác ABD có AB = AD (do ABCD là hình thoi)

=> Tam giác ABD cân tại A. Lại có góc $\widehat{A} = 60^o$

=> Tam giác ABD đều.

Lại có; SA = SB = SD nên hình chóp S.ABD là hình chóp đều.

* Gọi H là tâm của tam giác ABD

=>SH ⊥ (ABD)

*Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SHA có:

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Vậy d(S; (ABCD)) = $\frac{a\sqrt{15}}{6}$

Ta có:

CH = CO + OH= AO + $\frac{1}{3}AO$

$= \frac{4}{3}AO = \frac{4}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

* Xét tam giác SHC có: $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

b) Ta có: $\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$

c) Ta có: H là tâm của tam giác ABD nên $BH \perp AD$

lại có: $SH \perp AD(viSH \perp (ABD)$

=> $AD \perp (SHB)$

Mà BC// AD nên $BC \perp (SHB)$

=> $BC \perp SB$

d) Tính tan ϕ

$$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD; AO \perp BD \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBD);(ABCD)) = \widehat{SOA} = \varphi$$

Tam giác SHO vuông tại H nên:

$$\tan\varphi = \frac{SH}{OH} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{5}; (OH = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2})$$

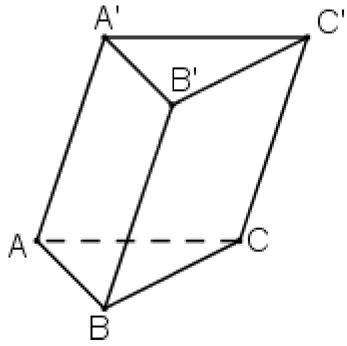
Ngoài ra các em học sinh và thầy cô có thể tham khảo thêm nhiều tài liệu hữu ích môn toán khác được cập nhật liên tục tại chuyên trang của chúng tôi.

Nhắc lại định nghĩa vectơ không gian.

Bài 7 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Hãy kể tên những vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình lăng trụ.

Lời giải:

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có định hướng, tức là một đoạn thẳng đã được chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.



$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}.$$

Bài 8 Trong không gian cho ba vectơ a , b và c đều khác vectơ $\vec{0}$. Khi nào ba véc tơ đó đồng phẳng?

Lời giải:

Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- Giá của 3 vector đều cùng song song với mặt phẳng (P).

- 1 trong 3 vec tơ biểu diễn được qua hai vec tơ còn lại,

tức là tồn tại cặp số (m; n) duy nhất thỏa mãn $\vec{a} = m.\vec{b} + n.\vec{c}$

Bài 9 Trong không gian hai đường thẳng không cắt nhau có thể vuông góc với nhau không? Giả sử hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là vector $\vec{u}$ và vector $\vec{v}$. Khi nào ta có kết luận a và b vuông góc với nhau?

Lời giải:

+ Trong không gian, hai đường thẳng chéo nhau vẫn có thể vuông góc với nhau.

Đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\vec{u}$

Đường thẳng b có vectơ chỉ phương $\vec{v}$

$a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Bài 10 Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) có cần chứng minh a vuông góc với mọi đường thẳng của (α) hay không?

Lời giải:

Không cần chứng minh a vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng.

Ta có thể chọn một trong số những cách sau để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Cách 1 : Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng

- Cách 2 : Sử dụng định lí : "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia".

- Cách 3 : Sử dụng định lí : " Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng cũng sẽ vuông góc với mặt phẳng đó"

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Cho ba mặt phẳng (α),(β),(γ) những mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Nếu (α) ⊥ (β) và (α) // () thì (β) ⊥ (γ)

b) Nếu (α) ⊥ (β) và (α) ⊥ (γ) thì (β) // (γ)

Bài 2 Cho hai mặt phẳng và vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó hai điểm và sao cho . Gọi là một điểm trên và là một điểm trên sao cho và cùng vuông góc với giao tuyến và , . Tính độ dài đoạn .

Bài 3 Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC);

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD);

c) HK//BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

Bài 4 Cho hai mặt phẳng , cắt nhau và một điểm không thuộc và không thuộc . Chứng minh rằng qua điểm có một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với và . Nếu song song với thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào?

Bài 5 Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (AB′C′D) vuông góc với mặt phẳng (BCD′A′);

b) Đường thẳng AC′ vuông góc với mặt phẳng (A′BD).

Bài 6 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có SA=SB=SC=a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD);

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

Bài 7 Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB=a,BC=b,CC′=c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC′B′) vuông góc với mặt phẳng (ABB′A′).

b) Tính độ dài đường chéo AC′ theo a,b,c.

Bài 8 Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh alpha.

Bài 9 Nhắc lại nội dung định lí ba đường thẳng vuông góc

Bài 10 Nhắc lại định nghĩa:

a) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

b) Góc giữa hai mặt phẳng.

Bài 11 Muốn chứng minh mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) ta có thể ?