

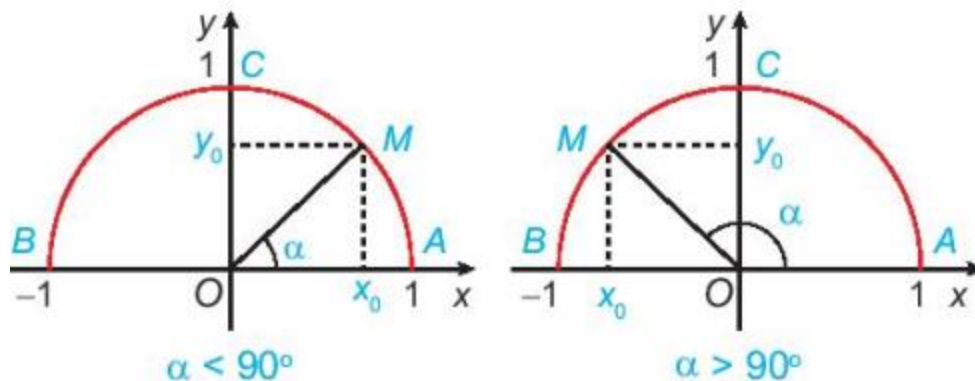
Bài 5. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị để $\angle xOM = \alpha$.



- Định nghĩa tỉ số lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Khi đó:

+ sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M, được kí hiệu là $\sin \alpha$;

+ cosin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M, được kí hiệu là $\cos \alpha$;

+ Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay $x_0 \neq 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan \alpha$;

+ Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay $y_0 \neq 0$), cotang của α là $\frac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot \alpha$.

- Từ định nghĩa trên ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ);$$

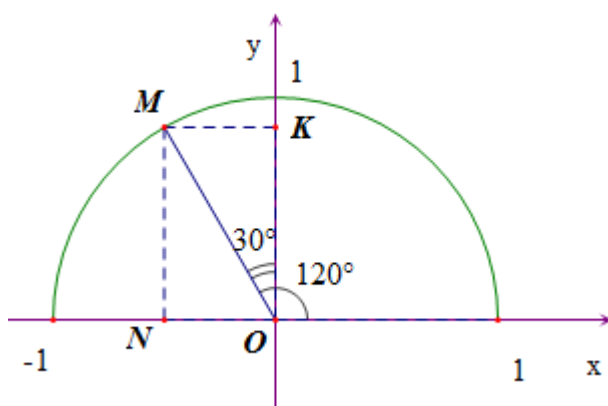
$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\})$$

- Bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

α GTLG	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Chú ý: Kí hiệu || chỉ giá trị lượng giác tương ứng không xác định.

Ví dụ: Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° .



Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = 120^\circ$. Gọi N, K tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Do $\angle xOM = 120^\circ$ và $\angle xOK = 90^\circ$ nên $\angle KOM = 30^\circ$ và $\angle MON = 60^\circ$.

Từ bảng GTLG của một số góc đặc biệt:

$$\text{Ta có: } \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ và } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Các tam giác MOK và MON là các tam giác vuông với cạnh huyền bằng 1

$$\text{Suy ra } ON = \cos \angle MON \cdot OM = \cos 60^\circ \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ và } OK = \cos \angle MOK \cdot OM = \cos 30^\circ \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác, do điểm M nằm bên trái trục tung nên $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Theo định nghĩa giá trị lượng giác ta có:

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \tan 120^\circ = -\sqrt{3}; \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Ta có thể dùng máy tính bỏ túi để tính giá trị gần đúng của các giá trị lượng giác của một góc.

Ví dụ:

Tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 48^\circ 50' 40''$	          	$\sin 48^\circ 50' 40'' \approx 0,7529256291$
$\cos 112^\circ 12' 45''$	           	$\cos 112^\circ 12' 45'' \approx -0,3780427715$
$\tan 15^\circ$	   	$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$




- Ta cũng có thể tìm được góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó.

Ví dụ:

Tìm x, biết	Bấm phím	Kết quả
$\sin x = 0,3456$	  (\sin^{-1})         	$x \approx 20^\circ 13' 7''$

Chú ý:

+ Khi tìm x biết $\sin x$, máy tính chỉ đưa ra giá trị $x \leq 90^\circ$.

+ Muốn tìm x khi biết $\cos x$, $\tan x$, ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím  tương ứng bởi phím , .

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Đối với hai góc bù nhau, α và $180^\circ - \alpha$, ta có:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \quad (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot (180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Chú ý:

- Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; có cosin, tang, cotang đối nhau.

Ví dụ: Tính các giá trị lượng giác của góc 135° .

Hướng dẫn giải

Ta có $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, vì vậy góc 135° và góc 45° là hai góc bù nhau:

Suy ra:

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\text{Vậy } \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \tan 135^\circ = -1; \cot 135^\circ = -1.$$

- Hai góc phụ nhau có sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Ví dụ:

Ta có $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ nên góc 30° và góc 60° là hai góc phụ nhau.

Khi đó:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho góc α , biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = (3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha$$

$$\text{Vì } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ và } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Thay vào A ta có: } A = 3 \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{2};$$

$$\text{Vậy } A = \frac{7}{2}.$$

Bài 2. Cho $A = \frac{3\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ và $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Chứng minh $A = 7 - 4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{3\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \cos\alpha} \\
&= \frac{(3\sqrt{2} - 1)\cos\alpha}{(\sqrt{2} + 1)\cos\alpha} \\
&= \frac{3\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 7 - 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vậy $A = 7 - 4\sqrt{2}$.

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3\sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$

b) $\cot 135^\circ - \tan 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$

Hướng dẫn giải

a) $3\sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$

$$= 3 \cdot \sin(180^\circ - 30^\circ) + \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot 45^\circ$$

$$= 3 \cdot \sin 30^\circ - \tan 45^\circ + \cot 45^\circ$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + (-1) + 1 = \frac{3}{2}.$$

b) $\cot 135^\circ - \tan 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$

$$= \cot(180^\circ - 45^\circ) - \tan 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$$

$$= -\cot 45^\circ - \tan 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$$

$$= (-1) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{4 + 3\sqrt{3}}{4}.$$

B2. Bài tập trắc nghiệm

Bài 4. Biết $\tan \alpha = 2$, giá trị của biểu thức $M = \frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 7\sin \alpha}$ bằng:

A. $-\frac{4}{9}$;

B. $\frac{4}{19}$;

C. $-\frac{4}{19}$;

D. $\frac{4}{9}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Cách 1: Vì $\cos \alpha \neq 0$ nên chia cả tử và mẫu của M cho $\cos \alpha$ ta có:

$$M = \frac{3\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2}{5 + 7\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3.\tan \alpha - 2}{5 + 7.\tan \alpha} = \frac{3.2 - 2}{5 + 7.2} = \frac{4}{19}.$$

Cách 2: Ta có: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 (\cos \alpha \neq 0) \Leftrightarrow \sin \alpha = 2\cos \alpha$, thay $\sin \alpha =$

$2\cos \alpha$ vào M ta được $M = \frac{3.2\cos \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 7.2\cos \alpha} = \frac{4\cos \alpha}{19\cos \alpha} = \frac{4}{19}.$

Bài 5. Cho $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và góc α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó.

A. $\cot \alpha = \frac{4}{3}$;

B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;

C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Vậy đáp án đúng là B.

Bài 6. Nếu $3\cos x + 2\sin x = 2$ và $\sin x < 0$ thì giá trị đúng của $\sin x$ là:

A. $-\frac{5}{13}$;

B. $-\frac{7}{13}$;

C. $-\frac{9}{13}$;

D. $-\frac{12}{13}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: A

Ta có: $3\cos x + 2\sin x = 2$

$$\Leftrightarrow (3\cos x + 2\sin x)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9\cos^2 x + 12\cos x.\sin x + 4\sin^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 x + 12\cos x.\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(5\cos x + 12\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5\cos x + 12\sin x = 0 \end{cases}$$

Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 1$ loại vì $\sin x < 0$.

Với $5\cos x + 12\sin x = 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5\cos x + 12\sin x = 0 \\ 3\cos x + 2\sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{13} \\ \cos x = \frac{12}{13} \end{cases}.$$

Vậy $\sin x = -\frac{5}{13}$.