

Các dạng toán về cấp số cộng

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa:

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

- Số không đổi d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

- Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi

$$u_{n+1} = u_n + d, n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét:

- Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d > 0$.

- Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d < 0$.

- Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

c) Tính chất:

Ba số hạng u_{k-1}, u_k, u_{k+1} ($k \geq 2$) là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

d) Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

2. Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định cấp số cộng và các yếu tố của cấp số cộng

Phương pháp giải:

- Dãy số (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$ không phụ thuộc vào n và d là công sai của cấp số cộng đó.

- Để xác định một cấp số cộng, ta cần xác định số hạng đầu và công sai. Ta thiết lập một hệ phương trình hai ẩn u_1 và d . Tìm u_1 và d .

- Tìm số hạng thứ n dựa vào công thức tổng quát: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ hoặc công thức truy hồi $u_n = u_{n-1} + d$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng. Nếu là cấp số cộng hãy xác định số hạng đầu tiên và công sai:

a) $-2; 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19$.

b) 2; 4; 6; 10; 12; 14; 16; 18; 20.

c) Dãy số (a_n) , với $a_n = 4n - 3$.

Lời giải

a) Ta thấy $1 - (-2) = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 19 - 16 = 3$

Nên dãy số $-2; 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19$ là cấp số cộng.

Số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $u_1 = -2$, công sai là $d = 3$.

b) Ta thấy: $4 - 2 = 2$ nhưng $10 - 6 = 4$

Nên dãy số $2; 4; 6; 10; 12; 14; 16; 18; 20$ không là cấp số cộng.

c) Ta có: $a_n = 4n - 3$ thì $a_{n+1} = 4(n+1) - 3$.

Xét $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 3 - (4n - 3) = 4$ (không đổi)

Vậy dãy số (a_n) với $a_n = 4n - 3$ là cấp số cộng.

Số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $a_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 1$, công sai là $d = 4$.

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

a) Xác định công sai và hạng đầu tiên của cấp số cộng trên.

b) Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng trên.

c) Tìm số hạng thứ 15 của cấp số cộng trên.

d) Số 6061 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng.

Lời giải

Gọi cấp số cộng có số hạng đầu tiên là u_1 và công sai d

Số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 1$ và $d = 3$.

b) Số hạng tổng quát là: $u_n = 1 + (n-1) \cdot 3$ hay $u_n = 3n - 2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Số hạng thứ 15 của cấp số cộng: $u_{15} = 3 \cdot 15 - 2 = 43$.

d) Giả sử số hạng thứ k của cấp số cộng là $u_k = 6061$, ta có: $u_k = 3k - 2 = 6061$, suy ra $k = 2021$.

Vậy số 6061 là số hạng thứ 2021 của cấp số cộng.

Dạng 2. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số cộng. Chứng minh cấp số cộng

Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Ba số hạng u_{k-1} ; u_k ; u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1:

a) Tìm x biết: $x^2 + 1$, $x - 2$, $1 - 3x$ lập thành cấp số cộng.

b) Cho cấp số cộng -2 , x , 6 , y . Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

a) Ta có: $x^2 + 1$, $x - 2$, $1 - 3x$ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 1 - 3x = 2(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = 2$, $x = 3$ là những giá trị cần tìm.

$$\text{b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có } \begin{cases} x = \frac{-2+6}{2} = 2 \\ 6 = \frac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

a) Nếu ba số a , b , c lập thành một cấp số cộng thì ba số x , y , z cũng lập thành một cấp số cộng, với: $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$.

b) Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng thì $9ab = 2a^3 + 27c$.

Lời giải

a) a , b , c là cấp số cộng nên $a + c = 2b$

Cần chứng minh x , y , z cũng lập thành một cấp số cộng tức là $x + z = 2y$.

$$\text{Ta có } 2y = 2b^2 - 2ca$$

$$\text{Và } x + z = a^2 + c^2 - b(a + c)$$

$$= (a + c)^2 - 2ac - 2b^2$$

$$= 4b^2 - 2ac - 2b^2$$

$$= 2b^2 - 2ac = 2y$$

$$\text{Khi đó ta được: } y = \frac{x + z}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng khi đó: $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác: } x^3 - ax^2 + bx - c &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x_1 + x_2 + x_3 = a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta được } 3x_2 = a \Leftrightarrow x_2 = \frac{a}{3}$$

Vì phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \frac{a}{3}$, tức là:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{a}{3}\right) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2a^3}{27} + \frac{ba}{3} - c = 0$$

$$\Leftrightarrow 9ab = 2a^3 + 27c.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Dạng 3. Tính tổng của một cấp số cộng.

Phương pháp giải:

Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n)

a) (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = 7n - 3$. Tính S_{100} .

b) (u_n) có $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23} .

c) (u_n) có $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

Lời giải

a) Từ công thức số hạng tổng quát

Ta có:

$$\text{Số hạng đầu: } u_1 = 7 \cdot 1 - 3 = 4;$$

$$\text{Số hạng thứ hai là: } u_2 = 7 \cdot 2 - 3 = 11;$$

$$\text{Công sai: } d = 11 - 4 = 7$$

Khi đó ta có:

$$S_{100} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{100[2.4 + (100-1).7]}{2} = 35050$$

b) Ta có: $u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$

Vậy $S_{23} = \frac{23(2u_1 + 22d)}{2} = \frac{23.40}{2} = 460.$

c) Ta có: $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$

$$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 15d = 224$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 9d = 56$$

Vậy $S_{19} = \frac{19(2u_1 + 18d)}{2} = 19(u_1 + 9d) = 19.56 = 1064.$

Ví dụ 2: Tính các tổng sau:

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$

b) $S = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) + (3n+1) + (3n+4)$

c) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

Lời giải

a) Ta có dãy số $1; 3; 5; \dots; (2n-1); (2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_k = u_1 + (k-1)d$.

Ta kiểm tra $2n+1$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy: $2n+1 = u_1 + (k-1)d$

$$\Leftrightarrow 2n+1 = 1 + (k-1).2 \Rightarrow k = n+1. \text{ Do đó dãy số có } n+1 \text{ số hạng.}$$

Vậy $S_{n+1} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2} = \frac{(n+1)(2u_1 + nd)}{2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2}.$

b) Ta có dãy số $1; 4; 7; \dots (3n-2); (3n+1); (3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d = 3$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_k = u_1 + (k-1)d$.

Ta kiểm tra $3n+4$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy: $3n+4 = u_1 + (k-1)d$

$$\Leftrightarrow 3n+4 = 1 + (k-1).3 \Rightarrow k = n+2. \text{ Do đó dãy số có } n+2 \text{ số hạng.}$$

Vậy $S_{n+2} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2} = \frac{(n+2)[2 + (n+1).3]}{2} = \frac{(n+2)(3n+5)}{2}.$

c) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

$$= (100-99)(100+99) + (98-97)(98+97) + \dots + (2-1)(2+1)$$

$$= 199 + 195 + \dots + 3$$

$$= 3 + 7 + \dots + 195 + 199$$

Ta có dãy số 3; 7; ...195; 199 là cấp số cộng với công sai $d = 4$, số hạng đầu tiên $u_1 = 3$ và số hạng thứ n là $u_n = 199$.

Do đó có $199 = 3 + (n - 1).4 \Rightarrow n = 50$.

$$\text{Vậy } S = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2} = \frac{50(2.3 + 49.4)}{2} = 5050.$$

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. Dãy số (a_n) , với $a_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- B. Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- C. Dãy số (c_n) , với $c_n = (2n - 3)^2 - 4n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- D. Dãy số (d_n) , với $d_1 = 1$, $d_{n+1} = \frac{2018}{d_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

- A. 1; - 3; - 7; - 11; - 15
- B. 1; - 3; - 6; - 9; - 12
- C. 1; - 2; - 4; - 6; - 8
- D. 1; - 3; - 5; - 7; - 9

Câu 3. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào không phải là một cấp số cộng?

- A. $u_n = 5 - 2n$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = \frac{n}{2} - 3$. D.

$$u_n = \frac{2 - 3n}{5}.$$

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -5$, $d = 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $u_{15} = 34$. B. $u_{15} = 45$. C. $u_{13} = 31$. D. $u_{10} = 35$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -5$; $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ bao nhiêu?

- A. Số thứ 15. B. Số thứ 20. C. Số thứ 35. D. Số thứ 36.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên là

- A. $u_1 = 16$. B. $u_1 = 6$. C. $u_1 = 7$. D. $u_1 = 14$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 100 của cấp số.

A. $u_{100} = -243$ B. $u_{100} = -295$ C. $u_{100} = -231$ D. $u_{100} = -294$

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

A. $u_{17} = 242$ B. $u_{17} = 235$ C. $u_{17} = 11$ D. $u_{17} = 4$

Câu 9. Xác định x để 3 số $1 - x$; x^2 ; $1 + x$ lập thành một cấp số cộng.

A. $x = 1$ hoặc $x = -1$

B. $x = 2$ hoặc $x = -2$

C. Không có giá trị nào của x .

D. $x = 0$

Câu 10. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc$. B. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

C. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$. D. $a^2 - c^2 = ab - bc$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và $d = -4$. Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên.

A. -19500

B. -19300

C. -19750

D. -19550

Câu 12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 321$ và $u_{n+1} = u_n - 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng S của 125 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. $S = 16875$.

B. $S = 63375$.

C. $S = 63562,5$.

D. $S =$

$16687,5$.

Câu 13. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n = 3n + 4$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

B. $S_n = \frac{7(3^n - 1)}{2}$.

C. $S_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$.

D.

$S_n = \frac{3n^2 + 11n}{2}$.

Câu 14. Cho cấp số cộng 3; 8; 13;... Tính tổng $S = 3 + 8 + 13 + \dots + 2018$.

A. $S = 408422$.

B. $S = 408242$.

C. $S = 407231,5$.

D. $S =$

$409252,5$.

Câu 15. Phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $m = 16$

B. $m = 11$

C. $m = 13$

D. $m = 12$

Đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	A	B	C	C	A	B	C	A	B	B	A	D	B	B