

Dấu của nhị thức bậc nhất chi tiết nhất

I. Lí thuyết tổng hợp.

- Nhị thức bậc nhất: Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.
- Dấu của nhị thức bậc nhất: Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) cùng dấu với hệ số a khi $x \in \left(\frac{-b}{a}; +\infty\right)$ và trái dấu với hệ số a khi $x \in \left(-\infty; \frac{-b}{a}\right)$.
- Xét dấu các tích, thương nhị thức bậc nhất: Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.
- Áp dụng vào giải bất phương trình: Giải bất phương trình $f(x) > 0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức $f(x)$.

II. Các công thức:

- Cho nhị thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)

$$\forall x \in \left(\frac{-b}{a}; +\infty\right): \begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\infty; \frac{-b}{a}\right): \begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

- Cho $f(x), g(x)$ là các nhị thức bậc nhất khác 0:

$$f(x).g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x).g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

III. Ví dụ minh họa.

Bài 1: Xét dấu các nhị thức bậc nhất sau:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = -x + 6$

Lời giải:

a)

Xét nhị thức $f(x)$ có hệ số $a = 2 > 0$ và $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$.

Ta có:

Với $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, $f(x) > 0$

Với $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, $f(x) < 0$.

b)

Xét nhị thức bậc nhất $g(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ và $f(x) = 0$ có nghiệm

$$x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Ta có:

Với $x \in (6; +\infty)$, $f(x) < 0$

Với $x \in (-\infty; 6)$, $f(x) > 0$.

Bài 2: Tìm x để $A = (x - 2)(x + 3)$ mang dấu dương.

Lời giải:

Để $A = (x - 2)(x + 3)$ mang dấu dương, ta có:

$$A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; +\infty) \\ x \in (-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -3) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \\ x \in (-\infty; -3) \end{cases}$$

Vậy với $x \in (2; +\infty)$ hoặc $x \in (-\infty; -3)$ thì A mang dấu dương.

Bài 3: Tìm x để $B = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 4}$ mang dấu âm.

Lời giải:

Điều kiện xác định của B là: $x \neq 4$

Xét dấu $C = (x + 2)(x - 1)$ có:

$$C > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; +\infty) \\ x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases}$$

$$C < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (-2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ x \in (1; +\infty) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1)$$

Để $B = \frac{(x+2)(x-1)}{x-4}$ mang dấu âm, ta có:

$$B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+2)(x-1) > 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x-1) < 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases} \\ x \in (-\infty; 4) \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} x \in (-2; 1) \\ x \in (4; +\infty) \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; 4) \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

(thỏa mãn ĐKXD)

Vậy với $x \in (1; 4)$ hoặc $x \in (-\infty; -2)$ thì B mang dấu âm.

IV. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Xét dấu nhị thức bậc nhất: $f(x) = 4x - 5$.

Bài 2: Tìm điều kiện của x để $B = \frac{(x+9)(x-5)}{x+2}$ mang dấu dương.