Bài 5. Xác suất của biến cố

A. Lý thuyết

I. Một số khái niệm về xác suất

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Có những phép thử mà ta không thể đoán được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp các kết quả có thể của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử).

Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử đó.

Ví dụ: Viết không gian mẫu của phép thử tung một đồng xu ba lần.

Hướng dẫn giải

Khi tung một đồng xu thì có hai kết quả có thể là đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N).

Khi đó, tung ba đồng xu thì có các kết quả có thể là: SSS; SSN; SNN; SNS; NSS; NSN; NNS; NNN.

Suy ra không gian mẫu của phép thử là Ω = {SSS; SSN; SNN; SNS; NSS; NSN; NNS; NNN}.

Vậy không gian mẫu của phép thử tung đồng xu ba lần là: Ω = {SSS; SSN; SNN; SNS; NSS; NSN; NNS; NNN}.

2. Biến cố

a) Định nghĩa

Nhận xét:

- Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử T tương ứng với một (và chỉ một) tập con A của không gian mẫu Ω.

- Ngược lại, mỗi tập con A của không gian mẫu Ω có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử T.

Định nghĩa:

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu.

Chú ý: Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

Ví dụ: Với phép thử tung đồng xu ba lần liên tiếp. Biến cố A: "Có ít nhất hai lần xuất hiện mặt sấp" là tập con nào của không gian mẫu.

Hướng dẫn giải

Phép thử tung đồng xu ba lần có không gian mẫu là: Ω = {SSS; SSN; SNN; SNS; NSS; NSN; NNS; NNN}.

Khi đó, biến cố A tương ứng với tập con {SSS; SSN; SNS; NSS}.

Vậy A = {SSS; SSN; SNS; NSS}.

b) Biến cố không. Biến cố chắc chắn

Xét phép thử T với không gian mẫu Ω. Mỗi biến cố là một tập con của tập Ω. Vì thế, tập hợp $\emptyset$ cũng là một biến cố, gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là *biến cố không*). Còn tập hợp Ω gọi là *biến cố chắc chắn.*

Ví dụ: Khi gieo một con xúc xắc hai lần liên tiếp. Biến cố A: "Tổng số chấm của hai lần gieo bằng 1" là biến cố không. Biến cố B: "Tổng số chấm hai lần gieo nhỏ hơn 13" là biến cố chắc chắn.

c) Biến cố đối

Tập con $\Omega \backslash A$ xác định một biến cố, gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

Chú ý: Nếu biến cố A được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học Q thì biến cố đối $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề Q (tức là mệnh đề $\overline{Q}$).

Ví dụ: Xét phép thử "Tung một đồng xu". Hãy xác định biến cố đối của biến cố A: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

Hướng dẫn giải

Khi tung một đồng xu thì sẽ xuất hiện mặt sấp (S) hoặc mặt ngửa (N).

Khi đó biến cố đối của biến cố A: “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa” là $\overline{A}$: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp”.

Vậy biến cố đối của biến cố A là $\overline{A}$: “Đồng xu xuất hiện mặt sấp”.

3. Xác suất của biến cố

Xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A), bằng tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó n(A), n(Ω) lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω. Như vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Ví dụ: Với phép thử tung đồng xu ba lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A: “Có ít nhất hai lần xuất hiện mặt sấp”.

Hướng dẫn giải

Phép thử tung đồng xu ba lần có không gian mẫu là: Ω = {SSS; SSN; SNN; SNS; NSS; NSN; NNS; NNN}.

$\Rightarrow n(\Omega) = 8$.

Khi đó, các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: SSS; SSN; SNS; NSS.

⇒ A = {SSS; SSN; SNS; NSS}.

$\Rightarrow n(A) = 4$.

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Vậy xác suất của biến cố A: “Có ít nhất hai lần xuất hiện mặt sấp” là $\frac{1}{2}$.

II. Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

+) $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$;

+) $0 \le P(A) \le 1$ với mỗi biến cố A;

+) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$ với mỗi biến cố A.

Ví dụ: Trong túi có 3 quả bóng màu xanh và 2 quả bóng màu vàng, các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy đồng thời ngẫu nhiên 2 quả bóng.

Tính xác suất cuả các biến cố:

A: "Hai quả bóng lấy ra không phải màu xanh và màu vàng".

B: "Hai quả bóng lấy ra là màu xanh hoặc màu vàng".

C: "Hai quả bóng lấy ra khác màu".

Hướng dẫn giải

Do trong túi chỉ có hai loại bóng màu xanh và màu vàng nên khi lấy ngẫu nhiên hai quả bóng trong túi thì hai quả bóng lấy ra phải là bóng màu xanh hoặc màu vàng.

Do đó biến cố A: "Hai quả bóng lấy ra không phải màu xanh và màu vàng" là biến cố không thể, tức là A = ∅.

Suy ra P(A) = P(∅) = 0.

Biến cố B: "Hai quả bóng lấy ra là màu xanh hoặc màu vàng" luôn luôn xảy ra.

⇒ B = Ω

⇒ P(B) = P(Ω) = 1.

Ta có 3 quả bóng màu xanh, 2 quả bóng màu vàng, nên trong túi có 3 + 2 = 5 quả bóng.

Khi lấy ngẫu nhiên ra 2 trong 5 quả bóng, ta có $C_5^2 = 10$ (cách).

Suy ra không gian mẫu Ω có 10 phần tử.

⇒ n(Ω) = 10.

Xét biến cố C: "Hai quả bóng lấy ra khác màu".

Ta có biến cố đối của C là $\overline{C}$: "Hai quả bóng lấy ra cùng màu".

Suy ra hai quả bóng lấy ra cùng là màu xanh hoặc cùng là màu vàng.

+ Hai quả bóng lấy ra cùng là màu xanh, tức là lấy được 2 trong 3 quả bóng màu xanh, có $C_3^2 = 3$ (cách).

+ Hai quả bóng lấy ra cùng là màu vàng, tức là lấy được 2 trong 2 quả bóng màu vàng, có $C_2^2 = 1$ (cách).

Suy ra số cách lấy được hai quả bóng cùng màu là: 3 + 1 = 4 (cách)

$\Rightarrow n\left(\overline{C}\right) = 4$.

$\Rightarrow P\left(\overline{C}\right) = \dfrac{n\left(\overline{C}\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Mặt khác $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P\left(C\right)$

$\Rightarrow P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Vậy xác xuất của biến cố C là $\dfrac{3}{5}$.

III. Nguyên lí xác suất bé

- Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.
- Một xác suất như thế nào được xem là bé phải tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể.

Ví dụ:

- Mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng thực tế, tai nạn của một chuyến bay gần như sẽ không xảy ra.
- Xác suất để dù không mở là 0,01(dùng cho nhảy dù) thì không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Một tổ trong lớp 10A có 5 bạn nữ và 4 bạn nam. Giáo viên chọn ngẫu nhiên hai bạn trong tổ đó tham gia đội làm báo tường của lớp. Tính xác suất để hai bạn được chọn có một bạn nam và một bạn nữ.

Hướng dẫn giải

Vì tổ có 5 bạn nữ và 4 bạn nam nên tổ đó có 5 + 4 = 9 (học sinh).

Chọn 2 trong 9 bạn học sinh của tổ đó, ta có C_9^2 = 36 (cách chọn).

Gọi A là biến cố "hai bạn được chọn có một bạn nam và một bạn nữ".

+ Để chọn được 1 bạn nữ trong 5 bạn nữ, ta có C_5^1 = 5 (cách chọn).

+ Để chọn được 1 bạn nam trong 4 bạn nam, ta có C_4^1 = 4 (cách chọn).

Áp dụng quy tắc nhân ta có 5.4 = 20 cách chọn 1 bạn nữ và 1 bạn nam.

Suy ra n(A) = 20.

Khi đó $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Vậy xác suất để hai bạn được chọn có một bạn nam và một bạn nữ là $\frac{5}{9}$.

Bài 2. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ một túi đựng 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, các viên vi có kích thước và khối lượng giống nhau. Gọi A là biến cố: "Trong bốn viên bi đó có cả bi đỏ và cả bi xanh". Tính P(A) và $P(\overline{A})$.

Hướng dẫn giải

Có 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh thì có tất cả 5 + 6 = 11 viên bi.

Chọn 4 viên bi từ 11 viên bi, thì số cách là: C_{11}^4 = 330 (cách).

⇒ n(Ω) = 330.

Xét biến cố A:"Trong bốn viên bi đó có cả bi đỏ và cả bi xanh".

Khi đó, biến cố $\overline{A}$: "trong bốn viên bi chỉ có bi đỏ hoặc chỉ có bi xanh".

- Nếu 4 viên bi đều là bi đỏ, thì ta chọn 4 trong 5 viên bi đỏ, ta có C_5^4 = 5(cách).

- Nếu 4 viên bi đều là bi xanh, thì ta chọn 4 trong 6 viên bi xanh, ta có C_6^4 = 15 (cách).

Khi đó, ta có 5 + 15 = 20 cách chọn bốn viên bi chỉ có bi đỏ hoặc chỉ có bi xanh.

$\Rightarrow n(\overline{A}) = 20.$

$\Rightarrow P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{20}{330} = \dfrac{2}{33}.$

Mặt khác $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2}{33} = \dfrac{31}{33}.$

Vậy $P(A) = \dfrac{31}{33}$ và $P(\overline{A}) = \dfrac{2}{33}.$

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Từ các chữ số 1; 2; 4; 6; 8; 9 lấy ngẫu nhiên một số. Xác suất để lấy được một số nguyên tố là:

A. $\dfrac{1}{2}$;

B. $\dfrac{1}{3}$;

C. $\dfrac{1}{4}$;

D. $\dfrac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có : Mỗi lần chọn 1 số bất kì từ 6 số đã cho, ta được một tổ hợp chập 1 của 6 nên $n(\Omega) = C_6^1 = 6$

Gọi B là biến cố :"Số lấy ra là số nguyên tố"

Ta có: $B = \{2\} \Rightarrow n(B) = 1$

Vậy P(B) = $\frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$.

Câu 2. Một nhóm gồm 8 nam và 7 nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn. Xác suất để 5 bạn được cả nam lẫn nữ mà nam nhiều hơn nữ là:

A. $\frac{60}{143}$;

B. $\frac{238}{429}$;

C. $\frac{210}{429}$;

D. $\frac{82}{143}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có : Mỗi lần chọn 5 bạn ngẫu nhiên từ 15 bạn cho ta một tổ hợp chập 5 của 15 nên n(Ω) = C_{15}^{5} = 3 003.

Gọi D là biến cố: "5 bạn được cả nam lẫn nữ mà nam nhiều hơn nữ".

- Trường hợp 1: Chọn 4 nam, 1 nữ: có $C_8^4 . C_7^1$ = 490

- Trường hợp 2: Chọn 3 nam, 2 nữ: có $C_8^3 . C_7^2$ = 1 176

Áp dụng quy tắc cộng ta có : n(D) = 490 + 1 176 = 1 666

Vậy P(D) = $\frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1666}{3003} = \frac{238}{429}$.

Câu 3. Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ 3 có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa. Tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng hoa ly.

A. $\frac{3851}{4845}$;

B. $\frac{1}{71}$;

C. $\frac{36}{71}$;

D. $\frac{994}{4845}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có : Mỗi lần chọn 7 bông hoa ngẫu nhiên từ 21 bông hoa cho ta một tổ hợp chập 7 của 21 nên n(Ω) = C_{21}^{7} = 116 280.

Gọi F là biến cố:”7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng hoa ly”

- Trường hợp 1: Chọn 1 hoa hồng, 1 hoa ly và 5 hoa huệ nên có $C_8^1.C_7^1.C_6^5$ = 336 cách

- Trường hợp 2: Chọn 2 hoa hồng, 2 hoa ly và 3 hoa huệ nên có $C_8^2.C_7^2.C_6^3$ = 11 760 cách.

- Trường hợp 3: Chọn 3 hoa hồng, 3 hoa ly và 1 hoa huệ nên có $C_8^3.C_7^3.C_6^1$ = 11 760 cách.

⇒ n(F) = 336 + 11 760 + 11 760 = 23 856.

Vậy $P(F) = \dfrac{n(F)}{n(\Omega)} = \dfrac{23856}{116280} = \dfrac{994}{4845}$.