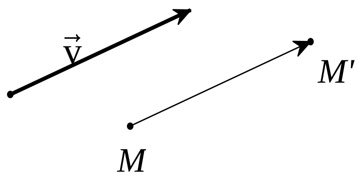
Công thức về phép tịnh tiến

1. Lí thuyết

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



Như vậy, $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ – không được gọi là phép đồng nhất. (**Biến mỗi điểm thành chính nó)**

* Tính chất

- Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Biến một vecto thành 1 vectơ bằng nó.
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó.
- Biến một góc thành một góc bằng nó.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

2. Công thức

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (a;b)$. Với mỗi điểm M(x;y) ta có M’(x’;y’) là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

(**Tọa độ ảnh = tọa độ điểm + tọa độ vectơ tịnh tiến**)

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (1;-5)$, điểm A(2; 2), đường thẳng d: 3x + 4y – 4 = 0, đường tròn: (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$. Xác định:

a) Điểm A’ là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

b) Đường thẳng d’ là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

c) Đường tròn (C’) là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Lời giải

a) Ta có A' là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$. Tọa độ A': $\begin{cases} x_{A'} = x_A + 1 = 3 \\ y_{A'} = y_A - 5 = -3 \end{cases}$. Vậy A'(3; -3).

b) Lấy điểm M(0; 1) thuộc d

Gọi M' là ảnh của M qua $T_{\vec{v}}$, khi đó $M' \in d'$.

Ta có: $\begin{cases} x_{M'} = x_M + 1 = 1 \\ y_{M'} = y_M - 5 = -4 \end{cases}$. Vậy M'(1;–4) .

Vì d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$ nên d' song song hoặc trùng với d. Suy ra VTPT $\overrightarrow{n_{d'}} = \overrightarrow{n_d} = (3;4)$.

Vậy phương trình d': 3(x – 1) + 4(y + 4) = 0. Hay d': 3x + 4y + 13 = 0.

c) Cách 1: (Tịnh tiến tâm I và giữ nguyên bán kính)

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

Có tâm I (1; -2) và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-1)} = \sqrt{6}$

Gọi I' là ảnh của I qua $T_{\vec{v}}$. Ta có: $\begin{cases} x_{I'} = x_I + 1 = 1 + 1 = 2 \\ y_{I'} = y_I - 5 = -2 - 5 = -7 \end{cases}$. Vậy I'(1; -7)

Đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$, nên (C') có tâm I' và bán kính $R' = \sqrt{6}$.

Vậy phương trình (C'): $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 6$ hay $x^2 + y^2 - 4x + 7y + 47 = 0$.

Cách 2: (Tịnh tiến mọi điểm trên đường tròn)

Với mọi điểm B(x;y) bất kì $\in$ (C). Gọi B'(x';y') là ảnh của B qua phép tịnh tiến.

Khi đó $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 5 \end{cases}$

Vì $B(x;y) \in (C)$ nên thay vào phương trình (C):

$(x' - 1)^2 + (y' + 5)^2 - 2(x' - 1) + 4(y' + 5) - 1 = 0$

Suy ra $x'^2 + y'^2 - 4x' + 14y' + 47 = 0$

B'(x';y') ảnh của B qua phép $T_{\vec{v}}$ nên B' di động trên đường tròn (C'): $x'^2 + y'^2 - 4x' + 14y' + 47 = 0$

Vậy ảnh của (C) là đường tròn (C'): $x'^2 + y'^2 - 4x' + 14y' + 47 = 0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol (P): $y = x^2$ và (Q): $y = x^2 + 2x + 2$. Tìm phép tịnh tiến T biến (Q) thành (P).

Lời giải

Gọi vectơ tịnh tiến là $\vec{v} = (a;b)$. Gọi ảnh của (Q) qua phép $T_{\vec{v}}$ là parabol (R)

Lấy điểm $M(x\,;y) \in (Q)$. Gọi $M'(x';y') = T_{\vec{v}}(M)$, khi đó $M' \in (R)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$

Vì $M \in (Q)$, thay vào phương trình (Q): y’ – b = (x’ – a)^2 + 2(x’– a) + 2

$\Leftrightarrow y' = (x')^2 + 2(1-a)x' + a^2 - 2a + b + 2$.

Vậy phương trình (R): y = x^2 + 2(1 – a)x + a^2 – 2a + b + 2

Để (R) trùng với (P) thì $\begin{cases} 2(1-a) = 0 \\ a^2 - 2a + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1^2 - 2.1 + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy có duy nhất một phép tịnh tiến biến parabol (Q) thành parabol (P), theo vectơ $\vec{v}(-1;1)$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M(0; 1). Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(1;2)$ là điểm nào?

A. M'(2; 3) **B.** M'(1; 3) **C.** M'(1; 1) **D.** M'(-1; -1)

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: x – 2y + 2 = 0. Ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2;3)$ có phương trình là:

A. x + 2y + 2 = 0 **B.** x – 2y + 6 = 0

C. 2x – y + 2 = 0 **D.** 2x + y +2 = 0

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): x^2 + y^2 – 2x + 4y – 4 = 0. Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(1;1)$ là đường tròn có phương trình:

A. (x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 **B**. (x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 9

C. (x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 **D**. (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9

Đáp án 1B, 2B, 3C