BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Tìm giới hạn dãy số

Giải

Xét $|u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

Với $n > 10 \Rightarrow n^2 > 10^2 = 100$

$\Rightarrow |u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - a) = 0$

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2. Cho dãy số $v_n = \frac{-n-1}{3+2n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{-1}{2}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n-1}{3+2n} + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{2(3+2n)} = 0$

Do đó: $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{-1}{2}$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$\lim (u_n + v_n) = a + b$

$\lim (u_n – v_n) = a – b$

$\lim (u_n.v_n) = a.b$

$\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)

Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì:

$\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ và $a \geq 0$.

Ví dụ 3. Tính $\lim\left(n^2 - \dfrac{2}{n+1}\right)$

Giải

$$\lim\left(n^2 - \frac{2}{n+1}\right) = \lim\frac{n^3+n^2-2}{n+1} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \lim\left(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right):\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\left(\lim 1+\lim\frac{1}{n}-\lim\frac{2}{n^3}\right):\left(\lim\frac{1}{n^2}+\lim\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=+\infty$$

Ví dụ 4. Tìm $\lim\frac{\sqrt{2+9n^2}}{1+4n}$

Giải

$$\lim\frac{\sqrt{2+9n^2}}{1+4n}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n^2}+9\right)}}{n\left(\frac{1}{n}+4\right)}=\lim\frac{n\sqrt{\left(\frac{2}{n^2}+9\right)}}{n\left(\frac{1}{n}+4\right)}=\lim\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{n^2}+9\right)}}{\frac{1}{n}+4}=\frac{3}{4}.$$

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S=u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\frac{u_1}{1-q}\ \ |q|<1\ .$$

Ví dụ 5. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};...;\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};...$

Giải

Ta có dãy số $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};...;\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};...$ là một số cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q=-\frac{1}{2}$.

Khi đó ta có: $S_n=\lim\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)+...+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+...\right]=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

Ví dụ 6. Tính $\lim\left(2^n + \frac{1}{n}\right)$.

Giải

$$\lim\left(2^n + \frac{1}{n}\right) = \lim 2^n + \lim \frac{1}{n}$$

Vì $\lim 2^n = +\infty$ và $\lim \frac{1}{n} = 0$

$$\Rightarrow \lim\left(2^n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n+8}{n-9}$;

b) $\lim \frac{4-n^3-12n^2}{1+2n^3}$;

c) $\lim \frac{3^n-4^n+1}{2.4^n+2^n}$.

Lời giải

a) $\lim \frac{2n+8}{n-9} = \lim \frac{2+\frac{8}{n}}{1-\frac{9}{n}} = 2.$

b) $\lim \frac{4-n^3-12n^2}{1+2n^3} = \lim \frac{\frac{4}{n^3}-1-\frac{12}{n}}{\frac{1}{n^3}+2} = -\frac{1}{2}.$

c) $\lim \frac{3^n-4^n+1}{2.4^n+2^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$

Bài 2. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là $\frac{2}{3}$ và tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Lời giải

Số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn là: $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Suy ra số hạng đầu tiên của dãy là: $u_1 = 1$

Khi đó tổng cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn là: $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ và tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là 3.

Bài 3. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $\left|u_n - 1\right| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

Lời giải

Đặt $v_n = u_n - 1$

Chọn số dương bé tùy ý d, tồn tại $n_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{d}} + 1$ với mọi $n \geq n_0$ sao cho:

$$v_n < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n_0^3} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{d}} + 1\right)^3} < \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{d}}\right)^3} = d$$

Theo định nghĩa ta có: $\lim v_n = 0$.

Do đó $\lim (u_n - 1) = 0$

$\Rightarrow \lim u_n = 1.$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$;

b) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$.

Lời giải

$$\text{a) } \lim \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} = \lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} \quad \sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \lim n^3 . \lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \infty$

(Vì $\lim n^3 = \infty, \lim\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=1$).