

Bài 4. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Mở đầu trang 26 SGK Toán 10 tập 1: Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hòa: điều hòa hai chiều và điều hòa một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng.

	Điều hoà hai chiều	Điều hoà một chiều
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	3,5 triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Nếu là chủ cửa hàng thì em cần đầu tư kinh doanh mỗi loại bao nhiêu máy để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Học xong bài này ta sẽ giải quyết bài toán như sau:

Gọi x, y (máy) lần lượt là số máy điều hòa hai chiều và số máy điều hòa một chiều mà chủ cửa hàng đầu tư $x, y \in \mathbb{N}$

Vì tổng số điều hòa hai chiều và một chiều không vượt quá 100 máy nên ta có bất phương trình: $x + y \leq 100$

Đầu tư một máy điều hòa hai chiều là 20 triệu đồng và đầu tư một máy điều hòa một chiều là 10 triệu đồng nên số tiền đầu tư là: $20x + 10y$ (triệu đồng)

Vì số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng nên ta có bất phương trình:

$$20x + 10y \leq 1\,200$$

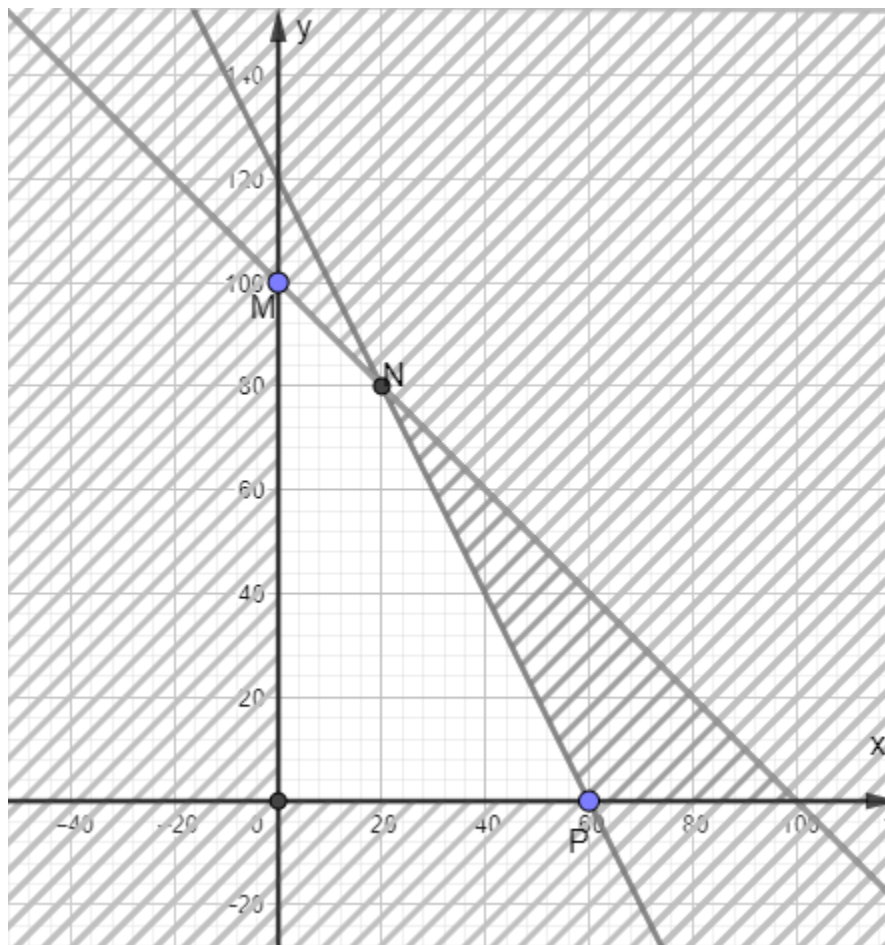
Lợi nhuận dự kiến chủ cửa hàng thu được là: $F(x;y) = 3,5x + 2y$ (triệu đồng)

Bài toán trở thành tìm giá trị x, y thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 20x + 10y \leq 1200 \end{cases}$$

(1) để $F(x;y) = 3,5x + 2y$ là lớn nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) trên mặt phẳng tọa độ bằng cách biểu diễn từng miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ bất phương trình (1), rồi lấy giao của các miền nghiệm ta được miền nghiệm của hệ BPT (1) là tứ giác OMNP với tọa độ các điểm $O(0; 0)$, $M(0; 100)$, $N(20; 80)$, $P(60; 0)$.



Tại $O(0;0)$ giá trị biểu thức $F(x;y) = 3,5x + 2y$ là: $3,5.0 + 2.0 = 0$;

Tại $M(0;100)$ giá trị biểu thức $3,5x + 2y$ là: $3,5.0 + 2.100 = 200$;

Tại $N(20;80)$ giá trị biểu thức $3,5x + 2y$ là: $3,5.20 + 2.80 = 230$;

Tại $P(60;0)$ giá trị biểu thức $3,5x + 2y$ là: $3,5.60 + 2.0 = 210$;

Suy ra tại $x = 20, y = 80$ thì giá trị biểu thức $3,5x + 2y$ là lớn nhất.

Vậy nếu là chủ cửa hàng thì em cần đầu tư kinh doanh 20 cái điều hòa hai chiều, 80 cái điều hòa một chiều để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Hoạt động 1 trang 26 SGK Toán 10 tập 1: Trong tình huống mở đầu, gọi x và y lần lượt là số máy điều hòa hai chiều và một chiều mà cửa hàng cần nhập. Tính số tiền vốn cửa hàng phải bỏ ra để nhập hai loại máy điều hòa theo x và y .

a) Do nhu cầu của thị trường không quá 100 máy nên x và y cần thỏa mãn điều kiện gì?

b) Vì số vốn mà chủ cửa hàng có thể đầu tư không vượt quá 1,2 tỉ đồng nên x và y phải thỏa mãn điều kiện gì?

c) Tính số tiền lãi mà chủ cửa hàng dự kiến thu được theo x và y .

Lời giải

Gọi số máy điều hòa hai chiều cần nhập là x ; số máy điều hòa một chiều cần nhập là y ($x; y \in \mathbb{N}$). Khi đó, số tiền để mua x điều hòa hai chiều là $20x$ và số tiền để mua y điều hòa một chiều là $10y$.

Số tiền vốn cửa hàng phải bỏ ra là $20x + 10y$ (triệu đồng)

a) Do nhu cầu không quá 100 máy nên $x + y \leq 100$.

b) Vì số vốn mà cửa hàng có thể đầu tư không vượt quá 1,2 tỉ đồng nên x và y phải thỏa mãn bất phương trình $20x + 10y \leq 1\,200$ (triệu đồng).

c) Vì mỗi điều hòa hai chiều dự kiến lãi 3,5 triệu đồng/ máy và mỗi điều hòa một chiều dự kiến lãi 2 triệu đồng/máy nên số tiền lãi mà chủ cửa hàng dự kiến thu được theo x và y là: $3,5x + 2y$ (triệu đồng).

Luyện tập 1 trang 27 SGK Toán 10 tập 1: Trong tình huống mở đầu, gọi x và y lần lượt là số máy điều hòa hai chiều, một chiều mà cửa hàng cần nhập. Từ HĐ1, viết hệ bất phương trình hai ẩn x, y và chỉ ra một nghiệm của hệ này.

Lời giải

Từ hoạt động 1 ta có hệ bất phương trình hai ẩn x, y như sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 20x + 10y \leq 1200 \end{cases}$$

Ta có:

$$x = 30; y = 40 \text{ ta có: } 30 \in \mathbb{N}; 40 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có: } 30 + 40 = 70 \leq 100$$

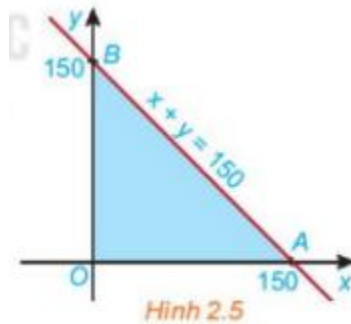
$$20.30 + 10.40 = 1\,000 < 1\,200$$

Vậy một nghiệm của hệ bất phương trình là $(30; 40)$.

Hoạt động 2 trang 27 SGK Toán 10 tập 1: Cho đường thẳng $d: x + y = 150$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Đường thẳng này cắt hai trục tọa độ Ox và Oy tại hai điểm A và B .

a) Xác định các miền nghiệm D_1, D_2, D_3 của các bất phương trình tương ứng $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x + y \leq 150$.

b) Miền tam giác OAB (H.2.5) có phải là giao của các miền nghiệm D_1, D_2, D_3 hay không?



c) Lấy một điểm trong tam giác OAB (chẳng hạn điểm $(1;2)$) hoặc một điểm trên cạnh nào đó của tam giác OAB (chẳng hạn điểm $(1;149)$) và kiểm tra xem tọa độ của các điểm đó có phải là nghiệm của hệ bất phương trình sau hay không:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$$

Lời giải

a)

+) Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$, tính cả Oy.

+) Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0;1)$, tính cả Ox.

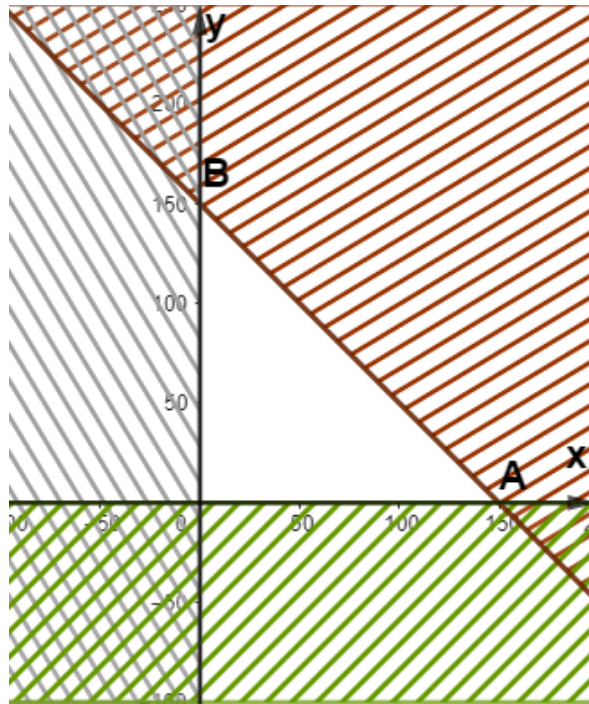
+) Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$.

- Vẽ đường thẳng d: $x + y - 150 = 0$.

- Vì $0 + 0 = 0 < 150$ nên tọa độ điểm $O(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 150$

Do đó miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 150$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ, kể cả đường thẳng d .

b) Giao điểm của ba miền nghiệm D_1, D_2, D_3 là miền tam giác OAB với $O(0;0)$, $A(150;0)$ và $B(0;150)$



Do đó miền tam giác OAB (H.2.5) có là giao của các miền nghiệm D_1, D_2, D_3 .

c) Điểm $(1; 2)$ nằm trong tam giác OAB thỏa mãn $x = 1 > 0$, $y = 2 > 0$ và $1 + 2 = 3 < 150$ nên cặp số $(x; y) = (1; 2)$ thỏa mãn cả ba bất phương trình của hệ bất phương trình đã cho. Do đó nó là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Điểm $(1; 149)$ nằm trong tam giác OAB thỏa mãn $x = 1 > 0$, $y = 149 > 0$ và $1 + 149 = 150$

≤ 150 nên cặp số $(x; y) = (1; 149)$ thỏa mãn cả ba bất phương trình của hệ bất phương trình đã cho. Do đó nó là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Luyện tập 2 trang 28 SGK Toán 10 tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất

phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y < 120 \end{cases} .$$

Lời giải

+) Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$, kể cả đường thẳng Oy.

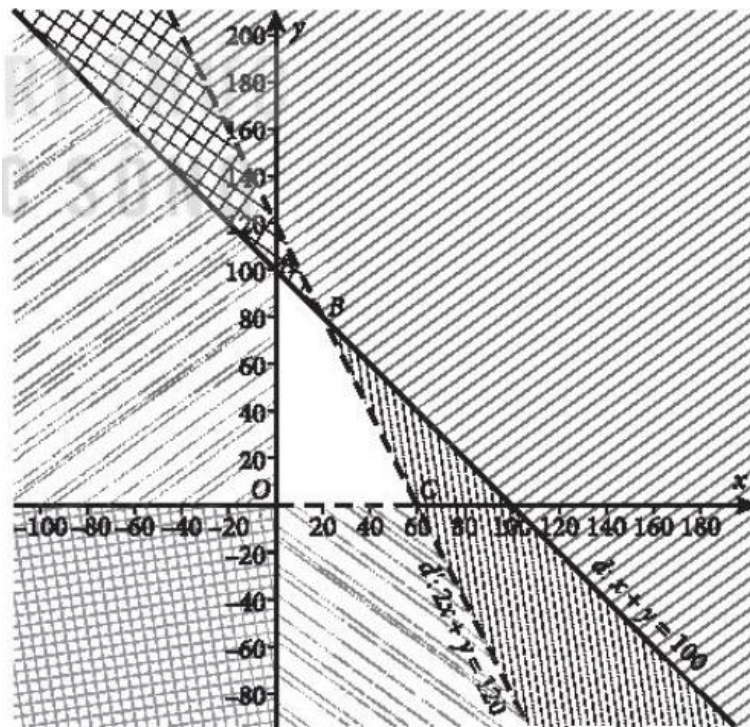
+) Xác định miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y > 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0; 1)$, không kể đường thẳng Ox.

+) Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 100$.

Ta vẽ đường thẳng $x + y = 100$ (d_1). Lấy điểm $O(0; 0)$ thay tọa độ điểm này vào $x + y$ ta được: $0 + 0 < 100$. Vậy miền nghiệm D_3 là nửa mặt phẳng bờ d_1 chứa điểm O kể cả bờ là đường thẳng d_1 .

+) Xác định miền nghiệm D_4 của bất phương trình $2x + y < 120$

Ta vẽ đường thẳng $2x + y = 120$ (d'). Lấy điểm $O(0; 0)$ thay tọa độ điểm này vào $2x + y$ ta được: $2.0 + 0 < 120$. Vậy miền nghiệm D_4 của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d' chứa điểm O không kể bờ là đường thẳng d' .



Hoạt động 3 trang 28 SGK Toán 10 tập 1: Xét biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ với $(x; y)$ thuộc miền tam giác OAB ở H.2.5. Tọa độ ba đỉnh là $O(0;0)$, $A(150; 0)$ và $B(0; 150)$ (H.2.5).

- Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại mỗi đỉnh O, A và B.
- Nêu nhận xét về dấu của hoành độ x và tung độ y của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.
- Nêu nhận xét về tổng $x + y$ của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.

Lời giải

a) $O(0; 0)$; $B(0; 150)$; $A(150; 0)$.

Ta có: $F(x; y) = 2x + 3y$.

Khi đó ta tính được:

$$F(0; 0) = 2.0 + 3.0 = 0.$$

$$F(150; 0) = 2.150 + 3.0 = 300$$

$$F(0; 150) = 2.0 + 3.150 = 450$$

b) Trong miền tam giác OAB, lấy một điểm $M(x; y)$ bất kì thì ta luôn có $x \geq 0; y \geq 0$ nên $F(x; y)$ nhỏ nhất khi $x = 0$ và $y = 0$.

$$F(x; y)_{\min} = 2.0 + 3.0 = 0.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB là 0.

c) Vì điểm $M(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB, nên tọa độ điểm M là nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 150$.

Hơn nữa, $x \geq 0, y \geq 0$ nên $x + y \geq 0$.

$$\text{Do đó ta có, } 0 \leq x + y \leq 150 \Leftrightarrow 0 \leq 2x + 2y \leq 300$$

$$\Leftrightarrow 0 + y \leq 2x + 2y + y \leq 300 + y$$

$$\Leftrightarrow y \leq 2x + 3y \leq 300 + y \quad (1)$$

$$\text{Mà } 0 \leq y \leq 150 \text{ nên } 300 + y \leq 300 + 150 = 450.$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } 0 \leq 2x + 3y \leq 450 \text{ hay } F(x; y) \leq 450.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x + y = 150$ và $y = 150$ hay $x = 0$ và $y = 150$.

Vậy $F(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất là 450 tại điểm B(0; 150).

Vận dụng trang 30 SGK Toán 10 tập 1: Một cửa hàng có kế hoạch nhập về hai loại máy tính A và B, giá mỗi chiếc lần lượt là 10 triệu đồng và 20 triệu đồng với số vốn ban đầu không vượt quá 4 tỉ đồng. Loại máy A mang lại lợi nhuận 2,5 triệu đồng cho mỗi máy bán được và loại máy B mang lại lợi nhuận là 4 triệu đồng mỗi máy. Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 250 máy. Giả

sử trong một tháng cửa hàng cần nhập số máy tính loại A là x và số máy tính loại B là y .

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (triệu đồng) là lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy tính loại A và y máy tính loại B. Hãy biểu diễn F theo x và y .

c) Tìm số lượng máy tính mỗi loại cửa hàng cần nhập về trong tháng đó để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Lời giải

a) Số máy tính loại A cửa hàng cần nhập trong một tháng là x (máy), số máy tính loại B cửa hàng cần nhập trong một tháng là y (máy) $x, y \geq 0$.

Do tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 250 máy: $x + y \leq 250$

Vì mỗi chiếc máy tính loại A có giá 10 triệu và mỗi máy tính loại B có giá 20 triệu nên tổng số vốn cửa hàng cần nhập hai loại A và B: $10x + 20y$ (triệu đồng)

Vì số vốn ban đầu không vượt quá 4 tỉ đồng nên ta có: $10x + 20y \leq 4\,000$ hay $x + 2y \leq 400$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 250 \\ x + 2y \leq 400 \end{cases}$$

Ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình trên:

+) Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$.

+) Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0;1)$.

+) Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 250$.

- Vẽ đường thẳng $d: x + y = 250$.

- Vì $0 + 0 = 0 < 250$ nên tọa độ điểm $O(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + y \leq 250$

Do đó miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x + y \leq 250$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ.

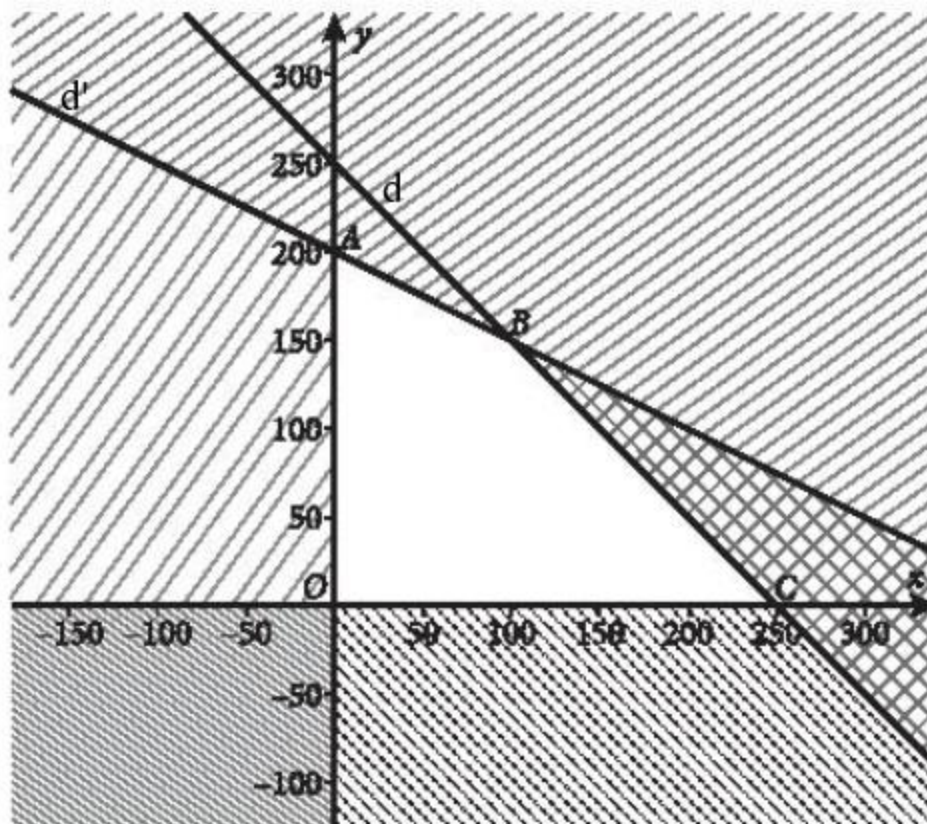
+) Xác định miền nghiệm D_4 của bất phương trình $x + 2y \leq 400$.

- Vẽ đường thẳng $d': x + 2y = 400$.

- Vì $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 400$ nên tọa độ điểm $O(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x + 2y < 400$

Do đó miền nghiệm D_4 của bất phương trình $x + 2y < 400$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc tọa độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là tứ giác $OABC$ với tọa độ các đỉnh là $O(0;0)$, $A(0; 200)$, $B(100; 150)$, $C(250; 0)$



b) Lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy tính loại A và y máy tính loại B là: $F(x; y) = 2,5x + 4y$ (triệu đồng).

Vậy $F(x; y) = 2,5x + 4y$.

c) Bài toán chuyển về tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm

$$\text{của hệ bất phương trình } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 250 \\ x + 2y \leq 400 \end{cases}.$$

Người ta đã chứng minh được, giá trị $F(x; y)$ lớn nhất tại $(x; y)$ là tọa độ của một trong bốn đỉnh O; A; B; C.

Tại O(0; 0), ta có: $F(0; 0) = 2,5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$;

Tại A(0; 200), ta có: $F(0; 200) = 2,5 \cdot 0 + 4 \cdot 200 = 800$;

Tại B(100; 150), ta có: $F(100; 150) = 2,5 \cdot 100 + 4 \cdot 150 = 850$;

Tại B(250; 0), ta có: $F(250; 0) = 2,5 \cdot 250 + 4 \cdot 0 = 625$.

Do đó $F(x; y)$ lớn nhất bằng 850 tại $x = 100$ và $y = 150$.

Vậy cửa hàng cần nhập 100 máy loại A, 150 máy loại B để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất là 850 triệu đồng.

Bài 2.4 SGK trang 30 Toán 10 tập 1: Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases}$.

Lời giải

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Vì hệ $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ gồm 2 bất phương trình $x < 0$ và $y \geq 0$, đây đều là các bất phương trình

bậc nhất hai ẩn (do $x < 0 \Leftrightarrow 1x + 0y < 0$ và $y \geq 0 \Leftrightarrow 0x + 1y \geq 0$).

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x + y^2 < 0$ không

phải bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có bất phương

trình $x + y + z < 0$ không phải bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y < 9 \\ 16x + 3y < 1 \end{cases}$ là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 2.5 SGK trang 30 Toán 10 tập 1: Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

a) $\begin{cases} y - x < -1 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases} ;$

b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases} ;$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 5 \\ x - y < 0 \end{cases}.$

Lời giải

a) $\begin{cases} y - x < -1 \\ x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

+) Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $y - x < -1$.

- Vẽ đường thẳng $d: y - x = -1$.

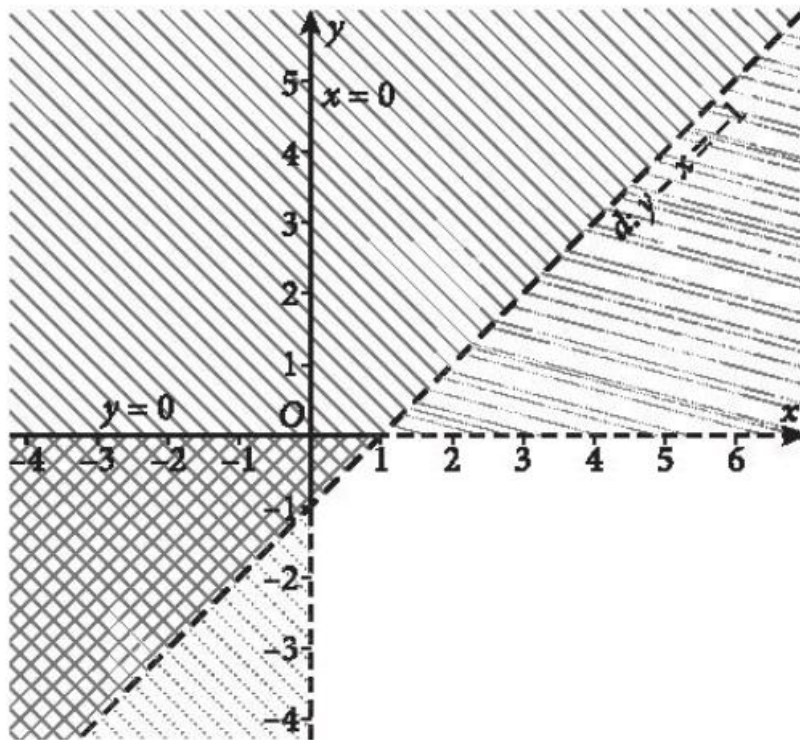
- Vì $0 - 0 = 0 > -1$ nên tọa độ điểm $(0; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $y - x < -1$

Do đó miền nghiệm D_1 của bất phương trình $y - x < -1$ là nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm $O(0; 0)$ và không kẻ đường thẳng d .

+) Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x > 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$ và không kẻ đường thẳng Oy .

+) Miền nghiệm D_3 của bất phương trình $y < 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm $(0; -1)$ và không kẻ đường thẳng Ox .

Vậy miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



$$\text{b) } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$$

Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm (1; 0) và kể cả đường thẳng Oy.

Miền nghiệm D_2 của bất phương trình $y \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Ox chứa điểm (0; 1) và kể cả đường thẳng Ox.

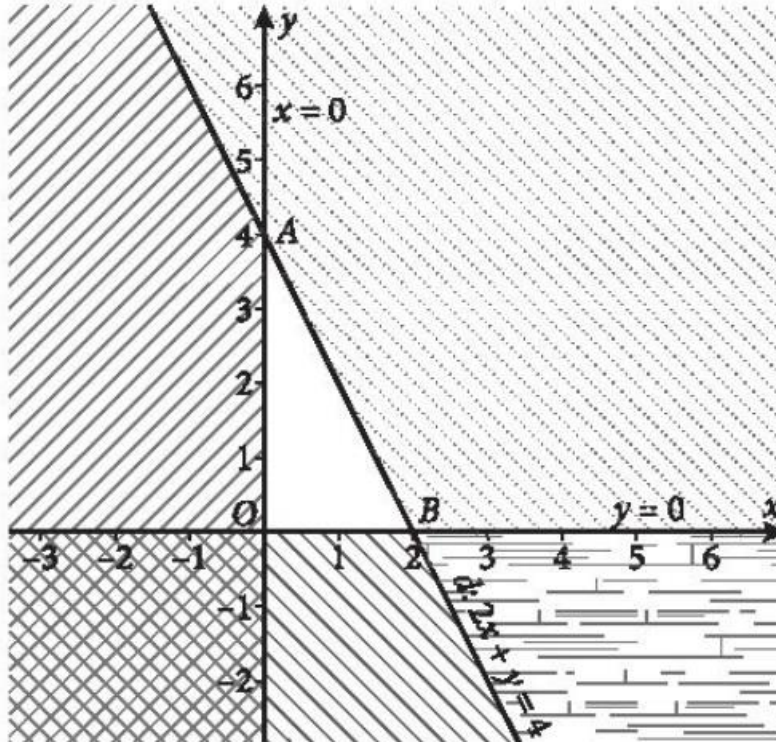
+) Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $2x + y \leq 4$.

- Vẽ đường thẳng d: $2x + y = 4$

- Vì $2 \cdot 0 + 0 = 0 < 4$ nên tọa độ điểm (0; 0) thỏa mãn bất phương trình $2x + y \leq 4$

Do đó miền nghiệm D_3 của bất phương trình $2x + y \leq 4$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm O(0; 0) và kể cả đường thẳng d.

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tam giác OAB (miền không bị gạch).



c)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 5 \\ x - y < 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm D_1 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm (1; 0) và kể cả đường thẳng Oy.

+) Xác định miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y > 5$.

- Vẽ đường thẳng d: $x + y = 5$

- Vì $0 + 0 = 0 < 5$ nên tọa độ điểm (0; 0) không thỏa mãn bất phương trình $x + y > 5$

Do đó miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y > 5$ là nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm O(0; 0) và không kể đường thẳng d.

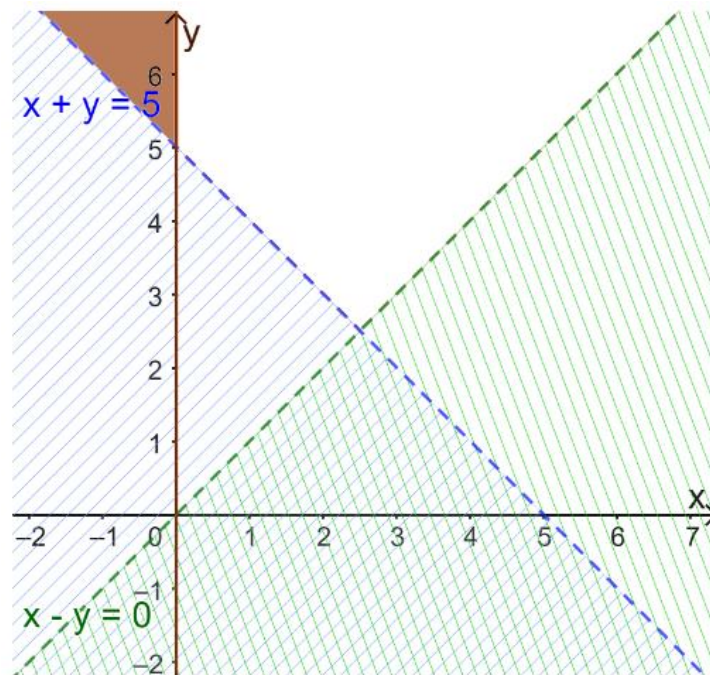
+) Xác định miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x - y < 0$.

- Vẽ đường thẳng d': $x - y = 0$

- Vì $1 - 0 = 1 > 0$ nên tọa độ điểm $(1; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $x - y < 0$

Do đó miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x - y < 0$ là nửa mặt phẳng bờ d' không chứa điểm $(1; 0)$ và không kể đường thẳng d' .

Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch.



Bài 2.6 SGK trang 30 Toán 10 tập 1: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn; giá tiền 1kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilogram thịt bò và y kilogram thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số kilôgam thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

Lời giải

Số kilôgam thịt bò gia đình mua là x (kg); số kilôgam thịt lợn gia đình mua là y (kg). Vì số kilôgam thịt bò mua nhiều nhất là 1,6 kg và số kilôgam thịt lợn mua nhiều nhất là 1,1 kg nên ta có:

$$0 \leq x \leq 1,6; 0 \leq y \leq 1,1 \quad (1)$$

Vì mỗi kilôgam thịt bò có chứa 800 đơn vị protein và mỗi kilôgam thịt lợn có chứa 600 đơn vị protein nên khối lượng protein có trong x kg thịt bò và y kg thịt lợn là: $800x + 600y$ (đơn vị).

Mà mỗi ngày gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein nên ta có bất phương trình:

$$800x + 600y \geq 900 \quad (2)$$

Vì mỗi kilôgam thịt bò có chứa 200 đơn vị lipid và mỗi kilôgam thịt lợn có chứa 400 đơn vị lipid nên khối lượng lipid có trong x kg thịt bò và y kg thịt lợn là: $200x + 400y$ (đơn vị).

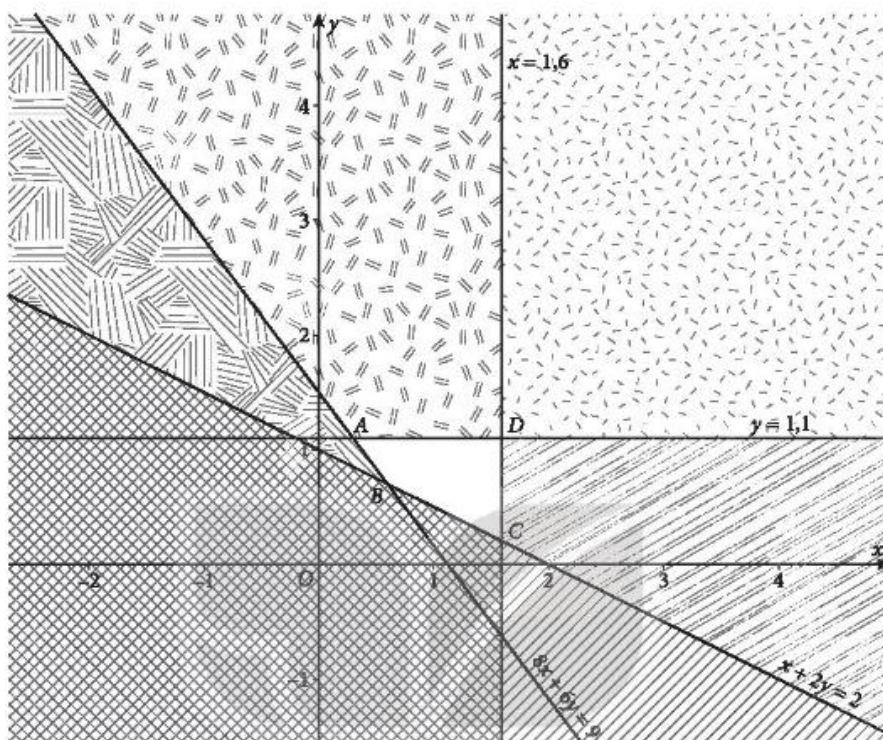
Mà mỗi ngày gia đình cần ít nhất 400 đơn vị lipid nên ta có bất phương trình :

$$200x + 400y \geq 400 \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Ta đi xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác ABCD có trong hình vẽ trên với tọa độ các đỉnh là A(0,3; 1,1), B(0,6; 0,7), C(1,6; 0,2), D(1,6; 1,1).

b) Số tiền mua một kilogram thịt bò là 250 nghìn đồng và số tiền mua một kilogram thịt lợn là 160 nghìn đồng nên số tiền để mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là: $F(x; y) = 250x + 160y$ (nghìn đồng).

c) Người ta đã chứng minh được để số tiền mua ít nhất thì $(x; y)$ là tọa độ của một trong bốn đỉnh tứ giác ABCD.

Ta có: $F(x; y) = 250x + 160y$. Khi đó:

$$F(0,3; 1,1) = 250 \cdot 0,3 + 160 \cdot 1,1 = 251;$$

$$F(0,6; 0,7) = 250 \cdot 0,6 + 160 \cdot 0,7 = 262;$$

$$F(1,6; 0,2) = 250 \cdot 1,6 + 160 \cdot 0,2 = 432;$$

$$F(1,6; 1,1) = 250 \cdot 1,6 + 160 \cdot 1,1 = 576;$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất cần tìm là $F(0,3; 1,1) = 251$.

Vậy để chi phí là ít nhất thì gia đình cần mua 0,3 kilôgam thịt bò và 1,1 kilôgam thịt lợn.