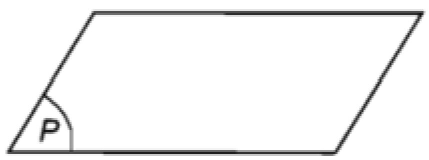
Chuyên đề Ôn tập chương 2 - Toán 11

A. Lý thuyết

1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1.1 Mặt phẳng

- Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.



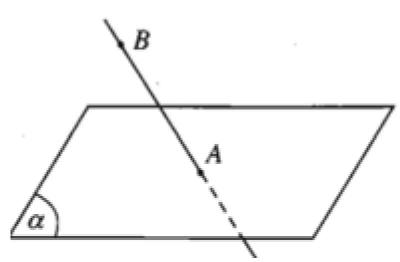
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Ví dụ: mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β)…

1.2 Điểm thuộc mặt phẳng.

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

- Khi điểm A *thuộc mặt phẳng* (α) ta nói A *nằm trên* (α) hay (α) *chứa* A, hay (α) *đi qua* A và kí hiệu là A∈(α).

- Khi điểm A *không thuộc mặt phẳng* (α) ta nói điểm A *nằm ngoài* (α) hay (α) *không chứa* A và kí hiệu là A∉(α).

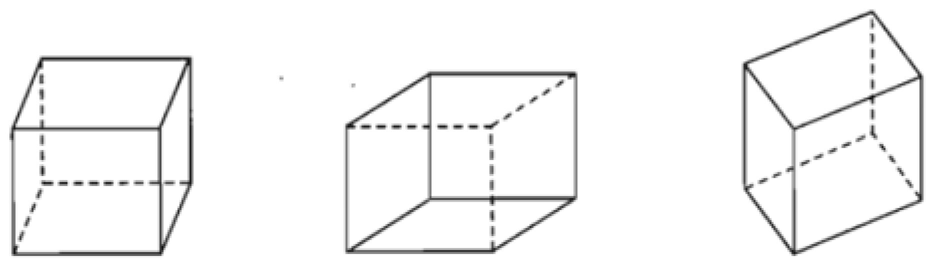


Hình trên cho ta hình biểu diễn của điểm A thuộc mặt phẳng , còn điểm B không thuộc (α).

1.3 Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để nghiên cứu hình học không gian người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

- Dưới đây là một vài hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật.



Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

- Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

2. Các tính chất thừa nhận về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

- **Tính chất 1.** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

- **Tính chất 2.** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là mặt phẳng (ABC) hoặc mp(ABC) hoặc (ABC).

- **Tính chất 3**. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

- Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

- Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

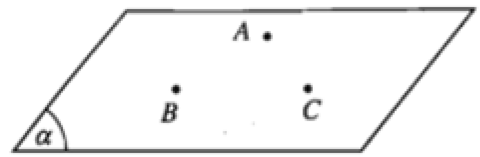
Từ đó suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là giao tuyến của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

- **Tính chất 6.** Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

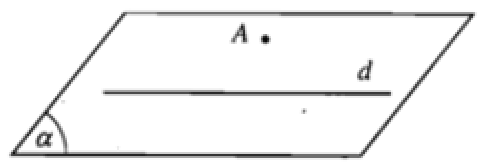
3. Cách xác định mặt phẳng

3.1) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



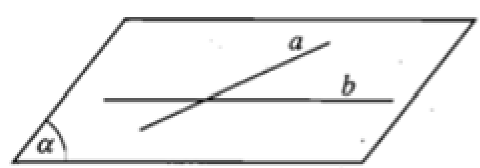
3.2) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp(A, d) hay (A, d) hoặc mp(d, A) hay (d, A).



3.3) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp(a, b) hay (a, b) hoặc mp(b, a) hay (b, a).



4. Hình chóp và hình tứ diện

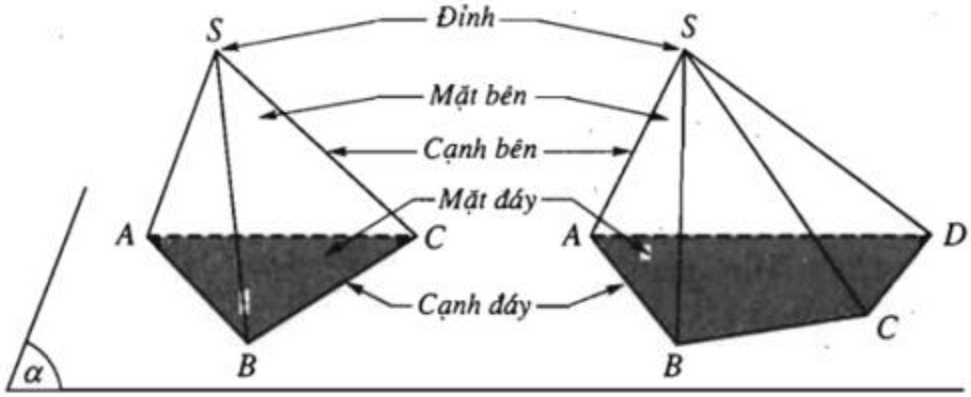
4.1. Hình chóp

Trong mp(α) cho đa giác lồi $A_1A_2…A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh A_1, A_2,..,A_n ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1.

Hình gồm đa giác $A_1A_2…A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2…A_n$.

Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 gọi là các *mặt bên*, các đoạn SA_1, SA_2, …, SA_n là các *cạnh bên*; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,.. lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác…



4.2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD.

Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh* của tứ diện.

Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh* của tứ diện.

Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện.

Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

Hình tứ diện có 4 mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.

- Chú ý. Khi nói đến tam giác ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của tam giác đó. Tương tự có thể hiểu như vậy đối với đa giác.

4.3. Một số ví dụ

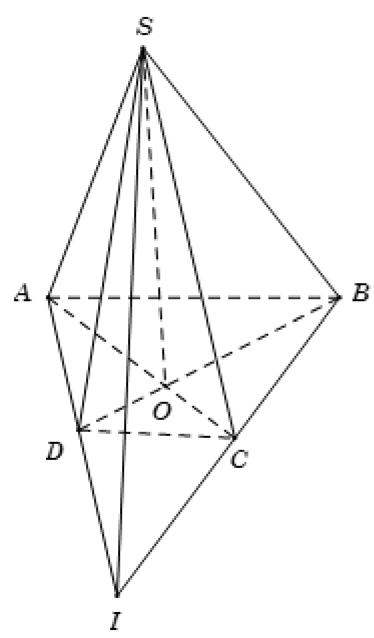
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB // CD).

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD).

b) (SAD) và (SBC).

Lời giải:



a) Trong mp(ABCD), gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Lại có:

$O \in AC \subset SAC \Rightarrow O \in SAC O \in BD \subset SBD \Rightarrow O \in SBD$

Suy ra, O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

b) Trong mp(ABCD), gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

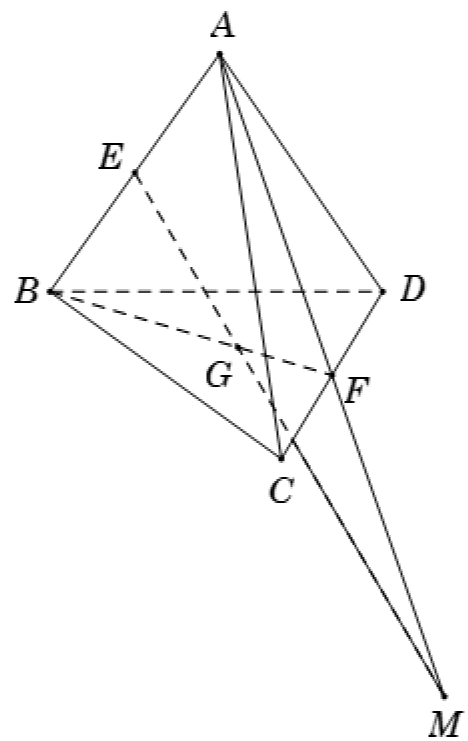
Lại có: $I \in AD \subset SAD \Rightarrow I \in SAD I \in BC \subset SBC \Rightarrow I \in SBC$

Suy ra, I là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD)?

Lời giải:



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của CD nên

Ta có E là trung điểm của AB nên .

Chọn mp phụ chứa EG là (ABF)

+ Tìm giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) ta có:

A là điểm chung thứ nhất.

F∈ABFF∈CD⊂ACD⇒F∈ACD

Suy ra F là điểm chung thứ hai .

Do đó, giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) là AF.

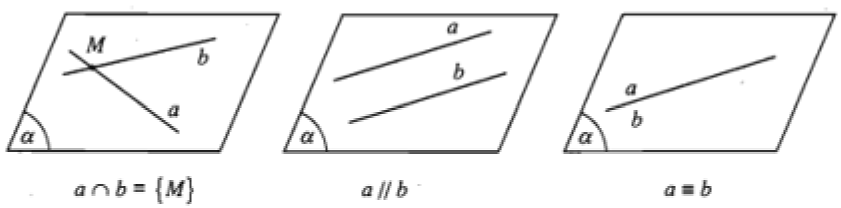
Trong mp(ABF), kéo dài AF cắt EG tại M. Khi đó, M là giao điểm của EG và mp(ACD).

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b.

Khi đó, ta nói a và b đồng phẳng. Theo kết quả của hình học phẳng có 3 khả năng xảy ra:



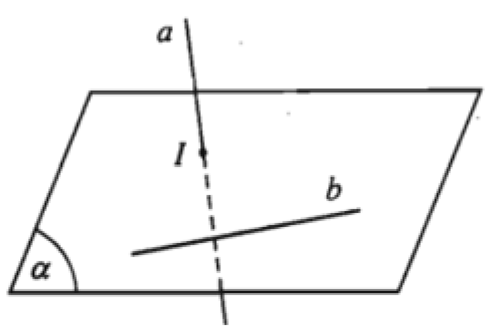
i) a và b có điểm chung duy nhất M. Ta nói a và b *cắt nhau* tại M và kí hiệu $a \cap b = M$. Ta có thể viết $a \cap b = M$.

ii) a và b không có điểm chung. Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là a // b.

iii) a trùng b, kí hiệu là $a \equiv b$.

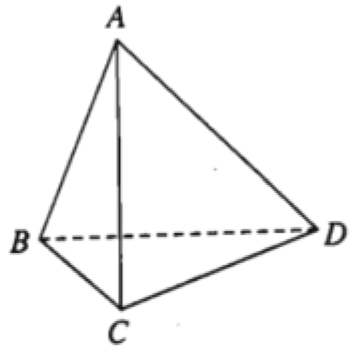
- Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa a và b.

Khi đó ta nói a và b *chéo nhau* hay a *chéo với* b.



- Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng chéo nhau.

Lời giải:



Đường thẳng AB và CD chéo nhau.

Đường thẳng AC và BD chéo nhau.

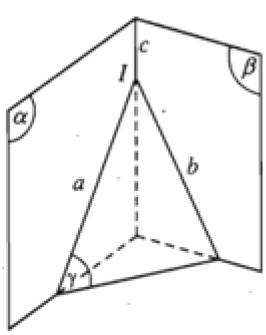
Đường thẳng AD và BC chéo nhau.

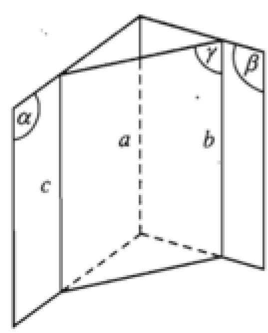
6. Tính chất về đường thẳng song song và đường thẳng chéo nhau trong không gian

- Định lí. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

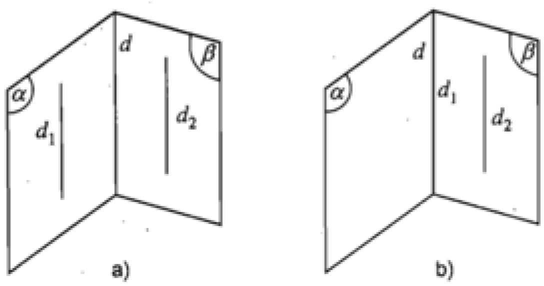
- Định lí (về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.





- Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

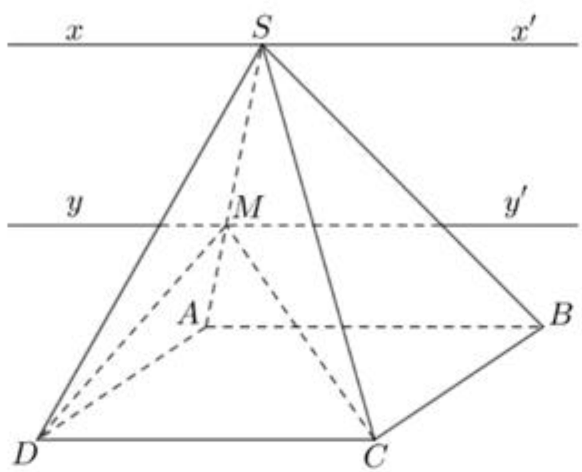


Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC).

b) (MCD) và (SAB), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

Lời giải:



a) Ta có:

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$,

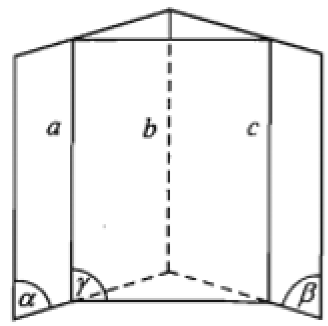
với Sx // AB // CD.

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (MCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ AB // CD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = My$,

với My // AB // CD.

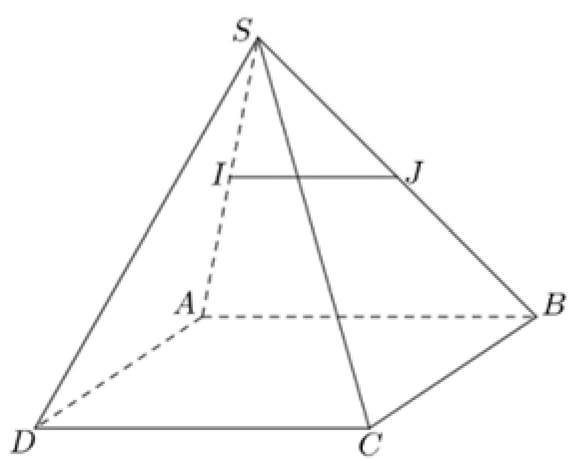
- **Định lí.** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



Ta có: a // c; b // c nên a // b hay a // b // c (ba đường thẳng song song).

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng IJ // AB, từ đó suy ra IJ // CD.

Lời giải:



Xét tam giác SAB có I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB.

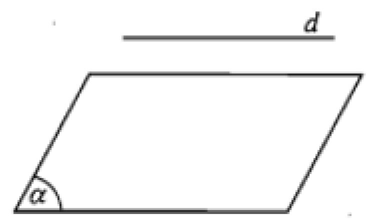
Từ đó suy ra IJ // AB.

Lại có AB // CD (vì ABCD là hình bình hành) nên từ đó ta có IJ // CD (vì cùng song song với đường thẳng AB).

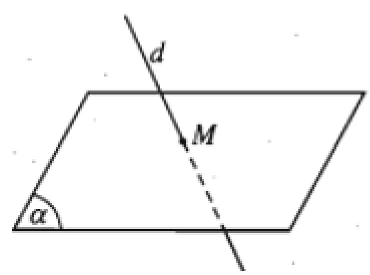
7. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tùy theo số điểm chung của d và (α), ta có ba trường hợp sau:

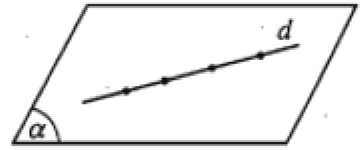
- d và (α) *không có điểm chung*. Khi đó ta nói d *song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là d // (α) hay (α) // d.



- d và (α) chỉ *có một điểm chung duy nhất* M. Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = M$.

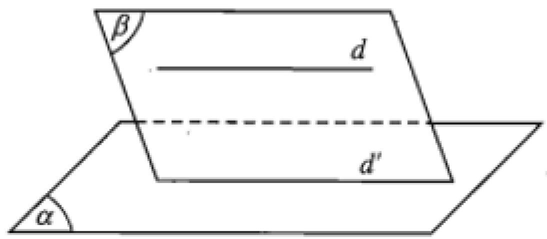


- d và (α) có từ *hai điểm chung trở lên*. Khi đó, d *nằm trong* (α) hay (α) *chứa* d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$.



8. Tính chất về đường thẳng và mặt phẳng song song

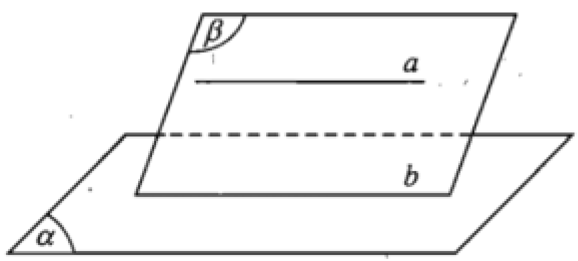
- Định lí. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} d \,//\, d' \\ d' \subset (\alpha), d \not\subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$$

- Định lí. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



- Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

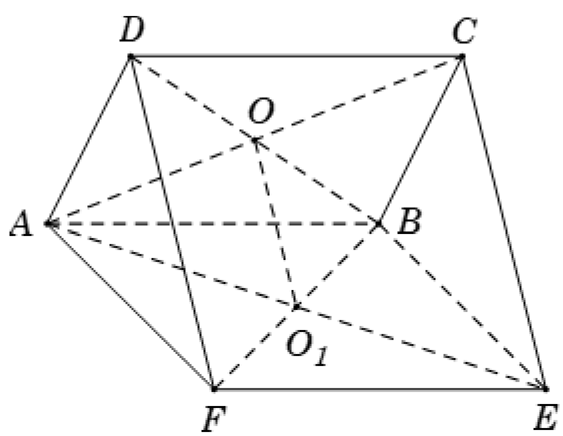
- Định lí. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của ABCD và ABEF, gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh:

a) OO_1 // mp (BEC).

b) OO_1 // mp (AFD)

Lời giải.



a) Xét tam giác ACE có O; O_1 lần lượt là trung điểm của AC; AE (tính chất hình hình hành).

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác ACE và OO_1 // EC.

Mà EC thuộc mp (BEC) nên OO_1 // mp (BEC) (đpcm).

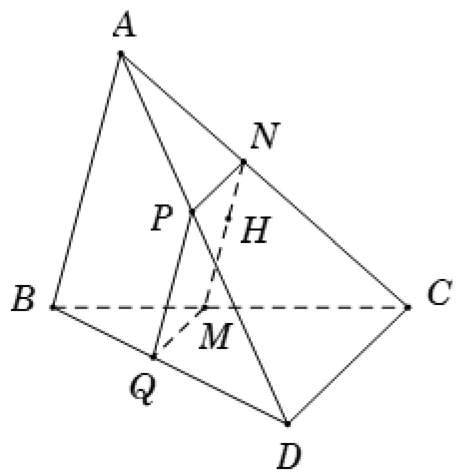
b) Tương tự; OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên OO_1 // FD.

Mà FD nằm trong mp(AFD)

Suy ra: OO_1 // mp (AFD) (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC và (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là hình gì?

Lời giải:



+ Qua H kẻ đường thẳng song song AB và đường thẳng này cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

+ Từ N kẻ NP song song với CD P ∈AD

 Từ P kẻ PQ song song với AB Q∈BD.

+ Ta có: MN // PQ // AB

Suy ra 4 điểm M; N; P và Q đồng phẳng .

Suy ra thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (α) là tứ giác MNPQ.

+ Ta chứng minh MNPQ là hình bình hành.

Trước tiên, ta chứng minh PN // QM.

Ta có:

PN // CDPN ⊂ mp(MNPQ), CD ⊂mp(BCD)QM = mp(MNPQ)∩mp(BCD)

Suy ra: QM // PN // CD

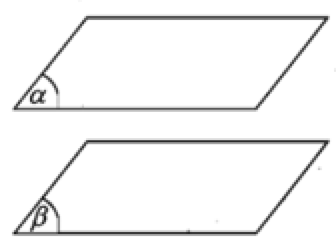
Lại có: PQ // MN

Do đó, tứ giác MNPQ là hình bình hành.

9. Định nghĩa hai mặt phẳng song song

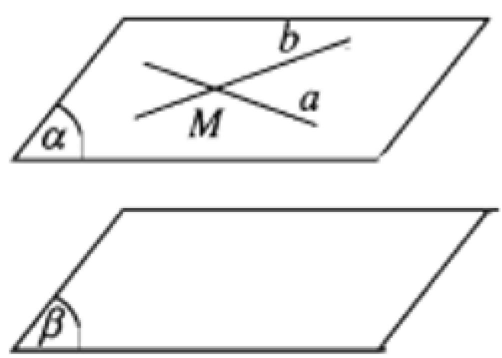
Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu (α) // (β) hoặc (β) // (α).



10. Tính chất của hai mặt phẳng song song

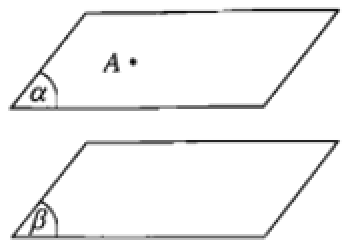
- Định lí 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



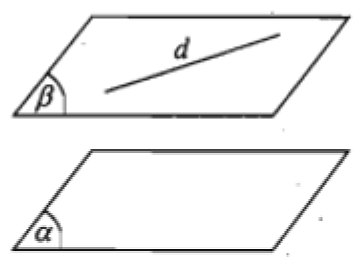
Ta có:

a, b ⊂α,a∩b=Ma // βb // β⇒α//β

- Định lí 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

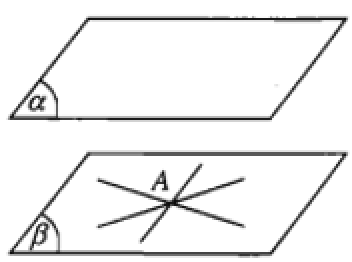


- Hệ quả 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).



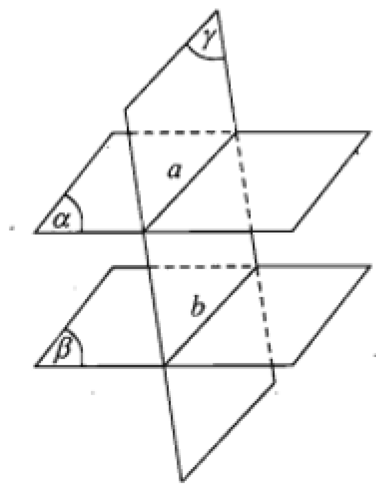
- Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

- Hệ quả 3. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).



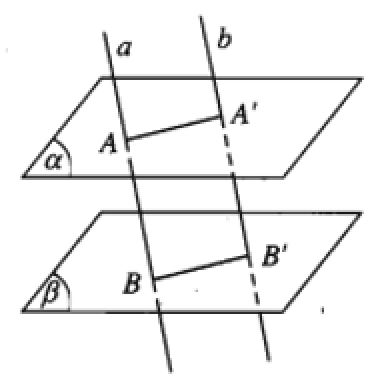
- Định lí 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

$\alpha//\beta a=\alpha\cap\gamma b=\beta\cap\gamma\Rightarrow a // b$



- Hệ quả. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau

$\alpha//\beta a\cap\alpha=A, b\cap\alpha=A'a\cap\beta=B, b\cap\beta=B'AA'=\alpha\cap\gamma BB'=\beta\cap\gamma\Rightarrow AA'=BB'$

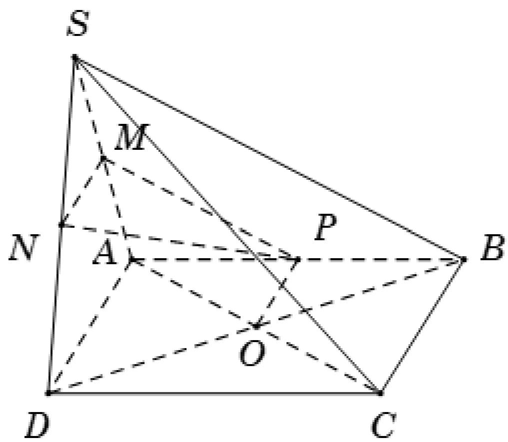


Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Chứng minh:

a) M, N, O, P đồng phẳng.

b) mp(MON) // mp(SBC).

Lời giải:



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD nên MN // AD (1).

Và OP là đường trung bình của tam giác ABC nên OP // BC // AD (2).

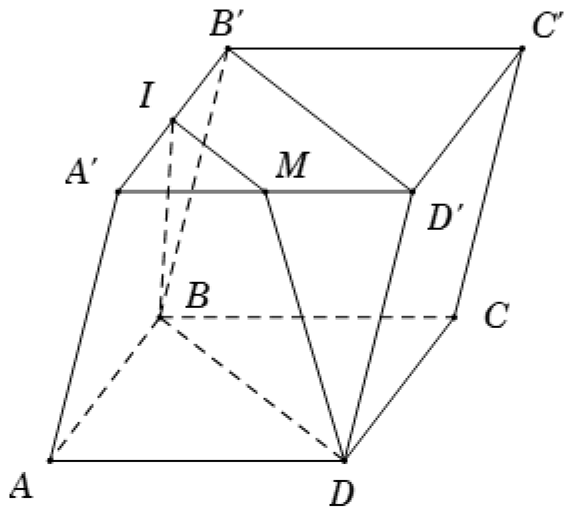
Từ (1) và (2) suy ra MN // OP // AD nên 4 điểm M, N, O, P đồng phẳng.

b) Vì MP // SBOP // BCMP, OP $\subset$ (MNOP)SB, BC $\subset$(SBC)

Suy ra, (MNOP) // (SBC) hay (MON) // (SBC).

Ví dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi I là trung điểm của A’B’. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

Lời giải:



- Ta tìm giao tuyến của 2 mp(IBD) và (A’B’C’D’)

$BD \parallel B'D'$ $BD \subset (IBD);\ B'D' \subset (A'B'C'D')$ I chung

Suy ra, giao tuyến của (IBD) với (A’B’C’D’) là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

- Trong mặt phẳng (A’B’C’D’), gọi M là giao điểm của d và A’D’.

Suy ra, IM // BD // B’D’.

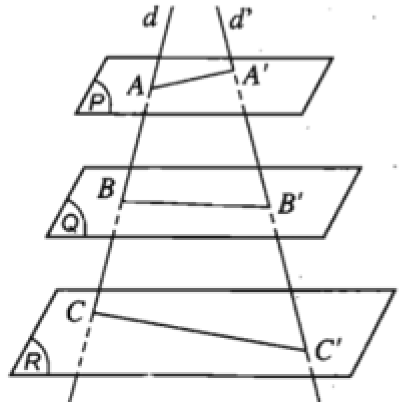
Khi đó thiết diện là tứ giác IMDB và tứ giác này là hình thang.

11. Định lí Ta – let (Thalès) trong không gian

- Định lí 4 (định lí Ta- let). Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

- Nếu d, d’ là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), lần lượt tại các điểm A, B, C và A’, B’, C’ thì:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$



12. Hình lăng trụ, hình hộp

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2,.., A_n ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại .

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$;

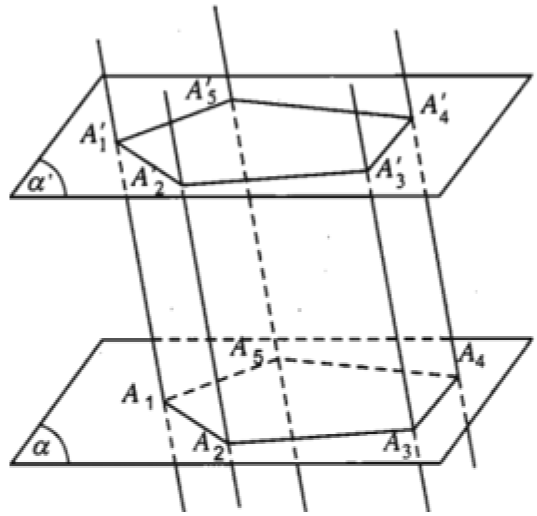
$A_2A_2'A_3'A_3$,…, $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n$..

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.

- Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, A_2A_2',…., A_nA_n' gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.

- Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$, …, $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.

- Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



- Nhận xét:

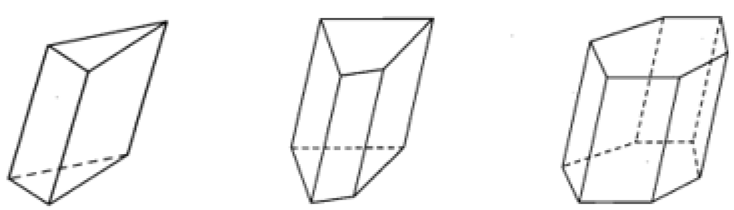
+ Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

+ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

+ Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

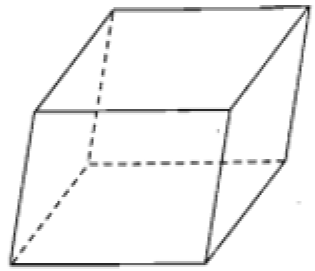
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy, chẳng hạn:

+ Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.



Hình lăng trụ tam giác | Hình lăng trụ tứ giác | Hình lăng trụ lục giác

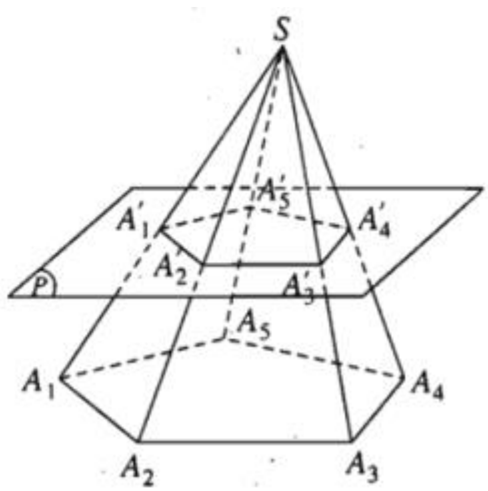
+ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.



13. Hình chóp cụt

Định nghĩa:

Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, …,SA_n lần lượt tại A_1’; A_2’,.., A_n’. Hình tạo bởi thiết diện A_1’A_2’..A_n’ và đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là *hình chóp cụt*.



Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện A_1’A_2’..A_n’ gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.

Các tứ giác A_1A_1’A_2’A_2, A_2A_2’A_3’A_3,…, A_nA_n’A_1’A_1 gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.

Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, A_2A_2’,…., A_nA_n’ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

- Tính chất của hình chóp cụt

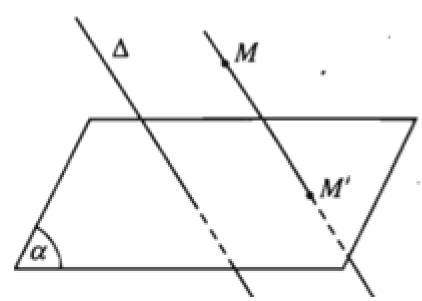
(1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

(2) Các mặt bên là những hình thang.

(3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

14. Phép chiếu song song

- Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M’ xác định. Điểm M’ được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên (α) theo phương Δ.



Mặt phẳng (α) gọi là *mặt phẳng chiếu*. Phương Δ gọi là *phương chiếu*.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M’ của nó trên (α) được gọi là *phép chiếu song song* lên (α) *theo phương* Δ.

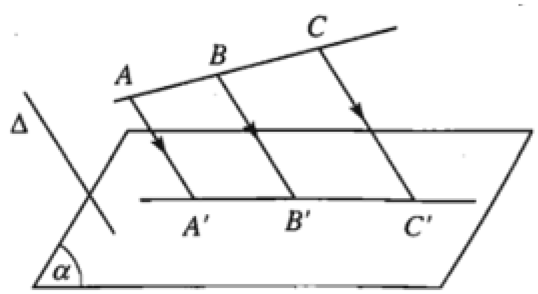
Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H’ các hình chiếu M’ của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H qua phép chiếu song song nói trên.

- Chú ý. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

15. Các tính chất của phép chiếu song song

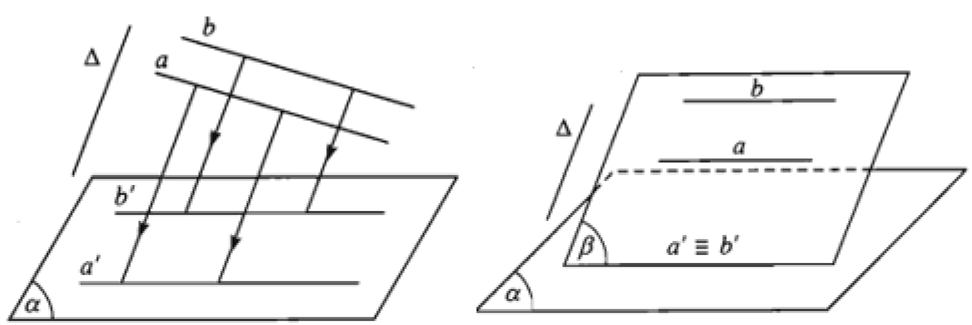
- Định lí 1.

a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

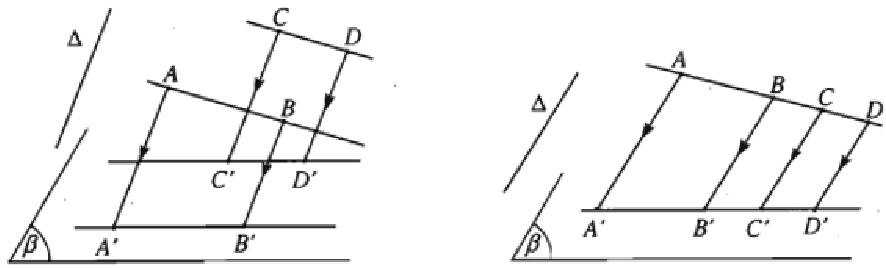


b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



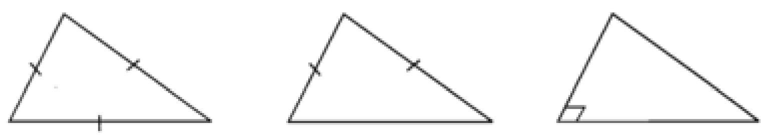
$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

16. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.

Hình biểu diễn của hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

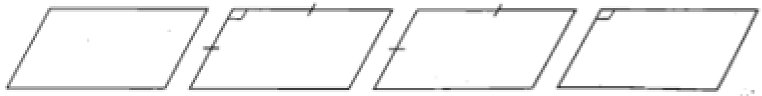
- Hình biểu diễn của các hình thường gặp.

+ Tam giác: Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình chiếu của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, …).



a) b) c)

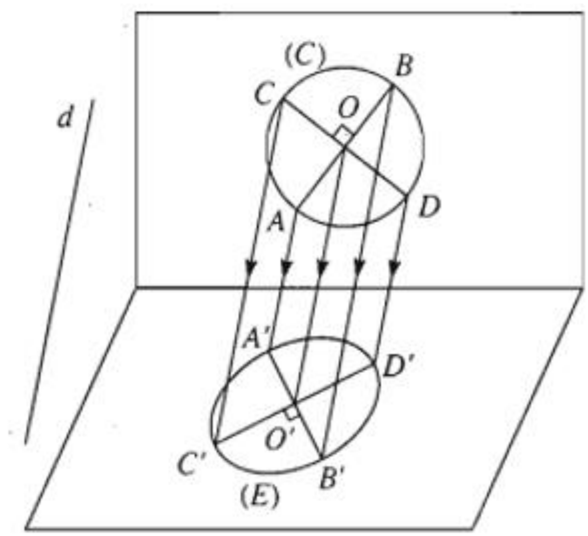
+ Hình bình hành: Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuoongm hình thoi, hình chữ nhật, …).



a) b) c) d)

+ Hình thang: Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

+ Hình tròn: Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.



B. Bài tập tự luyện

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Hình tứ diện có 4 cạnh

B. Hình tứ diện có 4 mặt

C. Hình tứ diện có 6 đỉnh

D. Hình tứ diện có 6 mặt

Lời giải:

Đáp án: B

Bài 2: Số cạnh của hình chóp tam giác là:

A. 5

B. 4

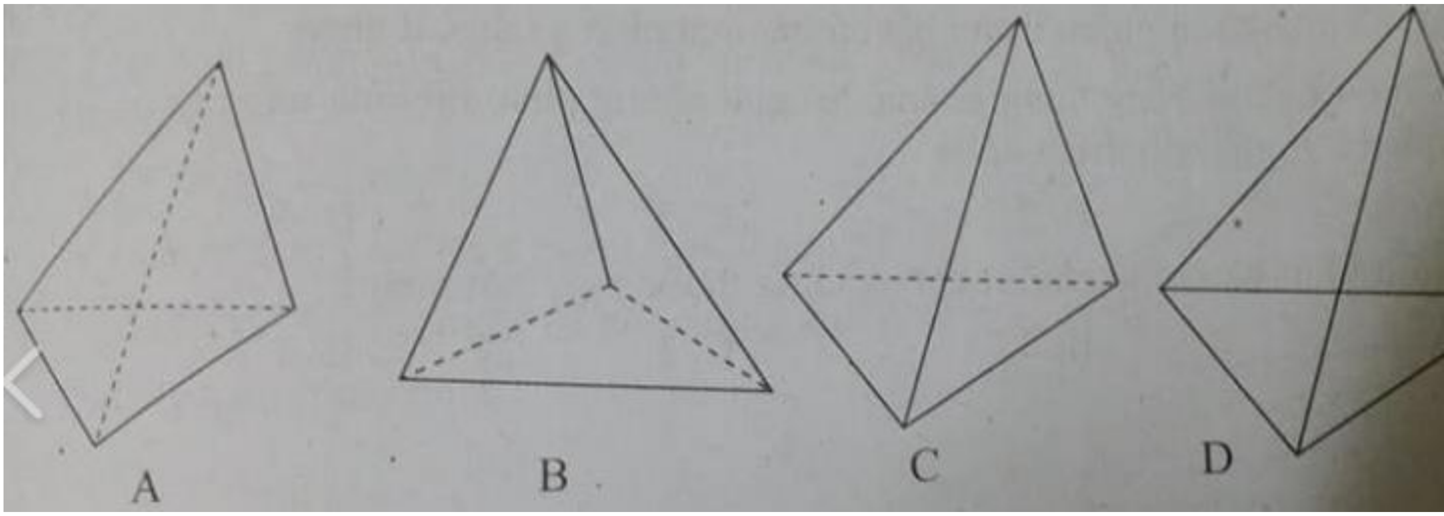
C. 6

D. 3

Lời giải:

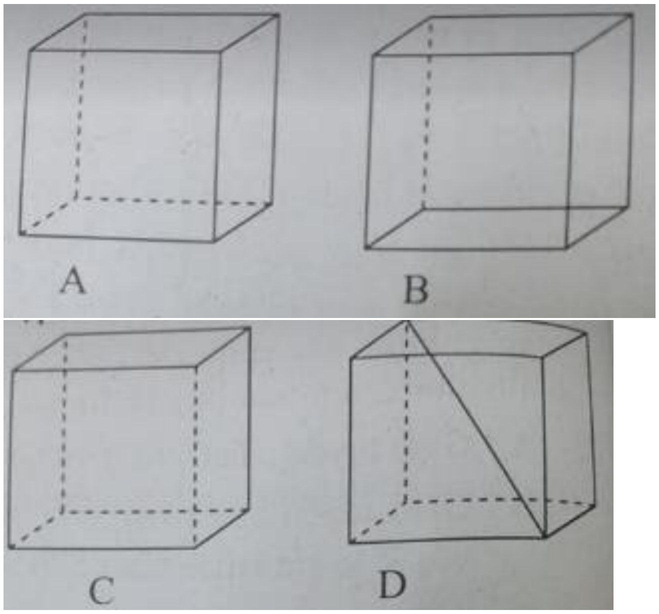
Đáp án: C

Bài 3: Hình biểu diễn nào sau đây vẽ đúng hình chóp ?



Đáp án: C

Bài 4: Hình biểu diễn nào sau đây vẽ đúng hình hộp.



Lời giải:

Đáp án: A

Bài 5: Cho 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng. Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào là sai?

A. Trong 4 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng

B. Trong 4 điểm đã cho luôn luôn tồn tại 3 điểm thuộc cùng 1 mặt phẳng

C. Số mặt phẳng đi qua 3 trong 4 điểm đã cho là 4

D. Số đoạn thẳng nối hai điểm trong 4 điểm đã cho là 6.

Lời giải:

Đáp án: B

Phương án A đúng vì nếu có ba điểm thẳng hàng thì bốn điểm đã cho luôn thuộc mặt phẳng chứa điểm và đường thẳng đó. Dễ thấy phương án C, D đúng.

Bài 6: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua

A. Hai đường thẳng

B. Một điểm và một đường thẳng

C. Ba điểm

D. Hai đường thẳng cắt nhau

Lời giải:

Đáp án: D

Bài 7: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua

A. Ba điểm

B. Một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

C. Hai điểm

D. Bốn điển

Lời giải:

Đáp án: B

Bài 8: Hai đường thẳng chéo nhau nếu.

A. Chúng không có điểm chung

B. Chúng không cắt nhau và không song song với nhau

C. Chúng không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào

D. Chúng không nằm trong bất cứ hai mặt phẳng nào cắt nhau.

Lời giải:

Đáp án: C

Bài 9: Cho 4 điểm không đông phẳng. số mặt phẳng phân biệt mà mỗi mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đó là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải:

Đáp án: D

Bài 10: Trong phát biểu sau đây, phát biểu nào đúng?

A. Hình chóp có tất cả các mặt là hình tam giác

B. Tất cả các mặt bên của hình chóp là hình tam giác

C. Tồn tại một mặt bên của hình chóp không phải là hình tam giác

D. Số cạnh bên của hình chóp bằng số mặt của nó

Lời giải:

Đáp án: B

Phương án A sau vì mặt đáy có thể không là tam giác.

Phương án B đúng vì theo định nghĩa

Phương án C sai vì theo định nghĩa mặt bên của hình chóp luôn là tam giác

Phương án D sai vì số cạnh bên bằng số mặt bên trong khi các mặt hình chóp gồm các mặt bên và mặt đáy.

Có thể giải thích D sai vì xét với hình chóp tam giác số cạnh bên bằng 3 nhưng số mặt bằng 4.

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Một đường thẳng c song song với a. khẳng định nào sau đây là đúng?

A. b và c chéo nhau

B. b và c cắt nhau

C. b và c chéo nhau hoặc cắt nhau

D. b và c song song với nhau

Lời giải:

Phương án A sai vì b, c có thể cắt nhau.

Phương án B sai vì b và c có thể chéo nhau.

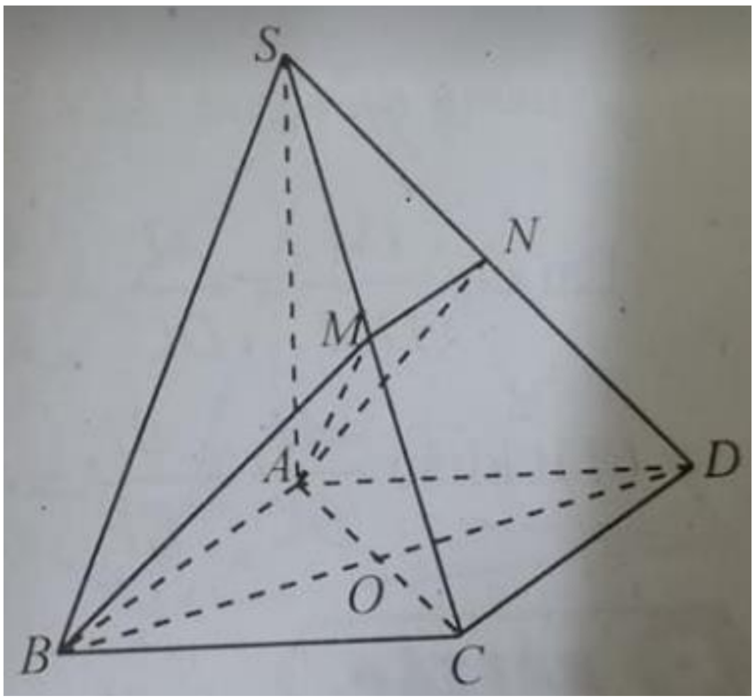
Phương án D sai vì nếu b và c song song thì a và b song song hoặc trùng nhau.

Đáp án :C.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Tìm giao tuyến của (MAB) với (SCD).

Lời giải:

Do (MAB) chứa AB//CD, nên giao tuyến của (MAB) với (SCD) là đường thẳng đi qua M và song song với AB. Đường thẳng này cắt SD tại điểm N.

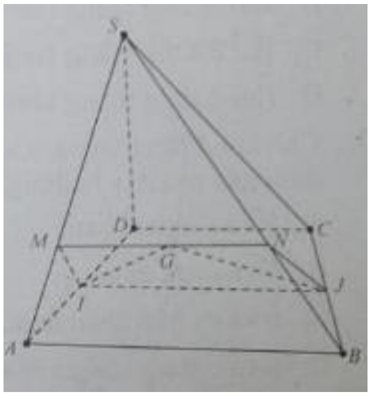


Vậy giao tuyến của (MAB) với (SCD) là đường thẳng MN, với N là giao điểm của SD và đường thẳng đi qua M, song song với AB.

Bài 3: Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB, CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt nởi (IJG)

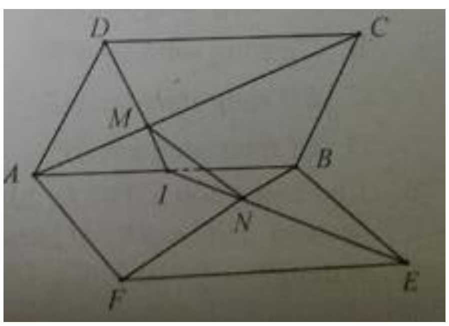
Lời giải:

Do IJ là đường thẳng trung bình của hình thang ABCD nên IJ // AB. Hai mặt phẳng (GIJ) và (SAB) lần lượt chứa hai đường thẳng song song nên giao tuyến của chúng là đường thẳng đi qua G và song song với AB. Đường thẳng này cắt SA tại điểm M và cắt SB tại N. vậy thiết diện là hình thang MIJN, với M, N là giao điểm của đường thẳng đi qua G và song song với AB với hai đường thẳng SA, SB. Đáp án B.



Bài 4: Hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên cạnh AC lấy điểm M và trên cạnh BF lấy điểm N sao cho AM/AC = BN/BF = k. Tìm k để MN // DE.

Lời giải:



MN // DE nên DM, NE cắt nhau tại điểm I và

$$\frac{IM}{DM} = \frac{IN}{NE}$$

Lại có

$$\frac{IM}{DM} = \frac{AI}{DC} = \frac{AM}{MC} = \frac{k}{1-k}; \frac{IN}{NE} = \frac{BI}{EF} = \frac{BN}{NF} = \frac{k}{1-k}$$

Mặt khác:

$$\frac{AI}{DC}+\frac{BI}{EF}=\frac{AI}{EF}+\frac{BI}{EF}=1 => 2.\frac{k}{1-k}=1 => k=\frac{1}{3}.$$

Bài 5: Giả sử (P) , (Q), (R) là ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c trong đó a = (P) ∩ (R), b = (Q) ∩ (R), c = (P) ∩ (Q). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. a và b cắt nhau hoặc song song với nhau.

B. ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một cắt nhau.

C. nếu a và b song song với nhau thì a và c không thể cắt nhau, b và c không thể cắt nhau.

D. ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải:

Bài 6: Cho hình chóp S. ABCD có đáy là một tứ giác lồi. gọi M và N lần lượt là trong tâm của tam giác SAB và SAD. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN // PQ với P là giao điểm của SM và AB; Q là giao điểm của SN và AD.

B. MN, BD chéo nhau.

C. MN và BD cắt nhau.

D. MN là đường trung bình của tam giác IBD với I là trung điểm của SA.

Lời giải:

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho MN//BS, NP//CD, MQ // CD. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

1) PQ // SA

(2) PQ // MN

(3) tứ giác MNPQ là hình thang

(4) tứ giác MNPQ là hình bình hành

Lời giải:

Bài 8: Hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một phẳng phẳng. trên AC lấy điểm M và trên BF lấy điểm N sao cho:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k.$$

Một mặt phẳng (α) đi qua MN và song song với AB, cắt cạnh AD tại M và cạnh AF tại N. khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M'N', DF cắt nhau

B. M'N, DF chéo nhau

C. M'N // DF

D. M'N //MN

Lời giải:

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD. trên các cạnh AC, SC lấy lần lượt các điểm I, K sao cho:

$\frac{SC}{SK} = \frac{AC}{AI}$;

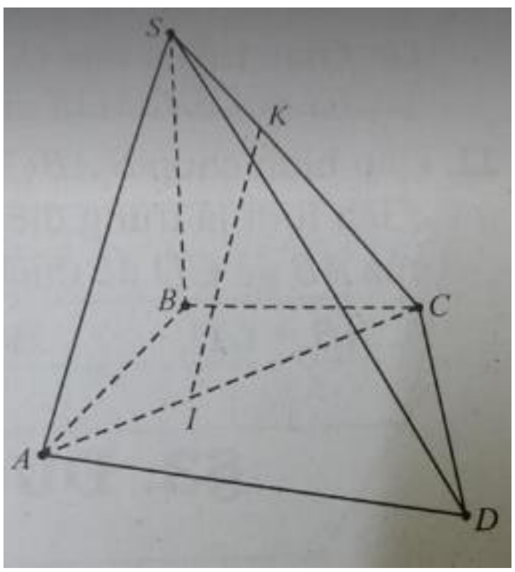
mặt phẳng (α) đi qua IK cắt các đường thẳng AB, AD, SD, SB tại các điểm theo thứ tự là M, N, P, Q. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MQ và NP cắt nhau

B. tứ giác MNPQ là hình bình hành

C. tứ giác MNPQ không có cặp cạnh nào song song

D. MQ // NP



Lời giải:

vì:

$\frac{SC}{SK} = \frac{AC}{AI}$

nên IK // SA. Do đó MQ // NP//SA.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. giao tuyến của (SAB) và (SCD) là điểm S.

B. giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

C. giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và cắt AB.

D. giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và chéo nhau với AB.

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Cho hình chóp S.ABCD đấy ABCD là hình bình hành tâm O. gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNO) và (ABCD) là đường nào trong các đường thẳng sau đây?

Bài 2 Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b và c lần lượt lấy ba điểm A’, B’ và C’ tùy ý.

a) Hãy xác định giao điểm D’ của đường thẳng d với mặt phẳng (A’B’C’).

b) Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành.

Bài 3 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi M và M’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B’C’.

a) Chứng minh rằng AM song song với A’M’.

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (A’B’C’) với đường thẳng A’M.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB’C’) và (BA’C’).

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mp(AMA’). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB’C’.

Bài 4 Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

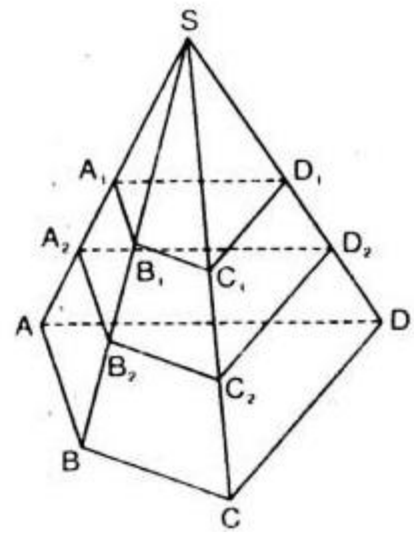
d) Gọi O và I lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và AA'C'C. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp đã cho.

Bài 5 Cho hình chóp S. ABCD. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABCD) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1 . Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh:

a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD.

b) $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$.

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD.



Bài 6 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCF)

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF)

Bài 7 Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt tứ diện

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

Bài 8 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?

Bài 9 Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (∝), mặt phẳng (β) chứa d và cắt (∝) theo giao tuyến d’. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- d’ // d hoặc d’ ≡ d

- d’ // d

- d’ ≡ d

- d’ và d chéo nhau

Bài 10 Cho tứ diện ABCD. Lấy M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi (∝) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Thiết diện tạo bởi (∝) và tứ diện ABCD là hình gì?