

Công thức về phép đồng dạng

1. Lý thuyết

* Định nghĩa: Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kỳ và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta có: $M'N' = kMN$.

* Tính chất:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài gấp k lần độ dài đoạn thẳng ban đầu.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho với tỉ số đồng dạng k .
- Biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $k.R$.

2. Công thức

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$)

- Biến hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ thành 2 điểm tương ứng $M'(x'_M; y'_M), N'(x'_N; y'_N)$ ta luôn có $M'N' = kMN$.
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $k.R$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x - 2\sqrt{2} = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 45° .

Lời giải

* Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của d_1 có dạng: $x + c = 0$

Lấy $M(2\sqrt{2}; 0) \in d$ thì ảnh của M qua phép $V_{\left(O; \frac{1}{2}\right)}$ là $N(x_N; y_N)$ thuộc d_1

$$\text{Tọa độ } N \text{ là: } \begin{cases} x_N = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ y_N = \frac{1}{2} \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \sqrt{2} \\ y_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(\sqrt{2}; 0)$$

Vậy phương trình của $d_1 : x - \sqrt{2} = 0$.

* Lấy hai điểm $A(\sqrt{2}; 0)$ và $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ thuộc d_1

Gọi ảnh của A và B qua phép quay $Q_{(O; 45^\circ)}$ là A' và B' . Khi đó đường thẳng d' đi qua 2 điểm A' và B' .

$$\text{Tọa độ điểm } A': \begin{cases} x_{A'} = \sqrt{2} \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ \\ y_{A'} = \sqrt{2} \sin 45^\circ + 0 \cdot \cos 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 1 \\ y_{A'} = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 1)$$

$$\text{Tọa độ điểm } B': \begin{cases} x_{B'} = \sqrt{2} \cos 45^\circ - (-\sqrt{2}) \cdot \sin 45^\circ \\ y_{B'} = \sqrt{2} \sin 45^\circ + (-\sqrt{2}) \cdot \cos 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2 \\ y_{B'} = 0 \end{cases} \Rightarrow B'(2; 0)$$

Phương trình đường thẳng d' qua $A'(1; 1)$, có VTCP là $\overrightarrow{A'B'} = (1; -1)$. Suy ra VTPT là $\overrightarrow{n_{d'}} = (1; 1)$.

Vậy phương trình d' : $(x - 1) + (y - 1) = 0$ hay $x + y - 2 = 0$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện phép vị tự tâm $I(1; 3)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm $A(-1; 1)$, góc quay 45° biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đường tròn (C) có bán kính $R = 2$.

Phép vị tự tâm $I(1; 3)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến (C) thành (C_1) có bán kính $R_1 = \frac{1}{2}R = 1$.

Phép quay tâm $A(-1; 1)$ góc quay 45° biến (C_1) thành (C') có bán kính $R' = R_1 = 1$.

Vậy đường tròn (C) qua phép đồng dạng như trên thành đường tròn (C') có bán kính $R' = 1$.

4. Bài tập tự luyện

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phép đồng dạng F hợp thành bởi phép vị tự tâm $O(0; 0)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép đối xứng trục Ox biến điểm $M(4; 2)$ thành điểm có tọa độ:

A. $M'(2; -1)$

B. $M'(8; 1)$

C. $M'(4; 2)$

D. $M'(8; 4)$

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O, góc quay 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào có phương trình sau?

A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

B. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

C. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

D. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x - y = 0$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x - y = 0$

B. $2x + y = 0$

C. $4x - y = 0$

D. $2x + y - 2 = 0$

Đáp án 1A, 2D, 3B