Bài 1. Hàm số lượng giác

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa

1. Hàm số sin và hàm số côsin

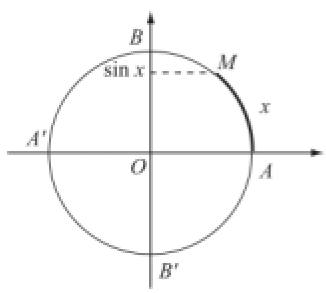
a) Hàm số sin

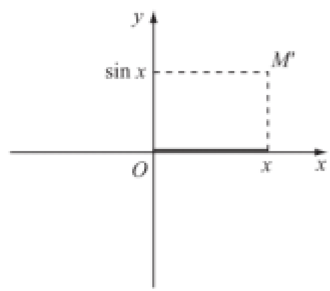
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực sinx

$$\begin{aligned} \sin: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \sin x \end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là y = sinx.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.





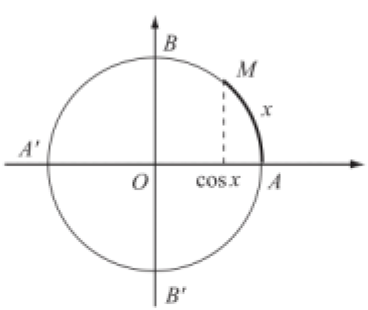
b) Hàm số côsin

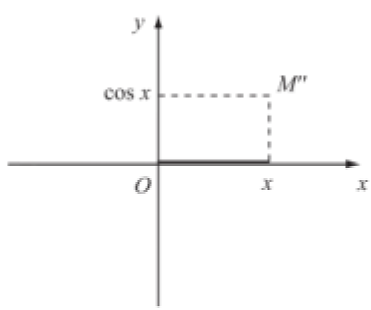
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực cosx:

$$\begin{aligned} \cos: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là y = cosx.

Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.





2. Hàm số tang và hàm số côtang

a) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức: $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \ne 0)$

Kí hiệu là y = tanx.

Vì $\cos x \ne 0$ khi và chỉ khi $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số y = tanx là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số côtang

Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức: $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $(\sin x \ne 0)$

Kí hiệu là y = cot x.

Vì $\sin x \ne 0$ khi và chỉ khi $x \ne k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số y = cotx là $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$.

- Nhận xét:

Hàm số y = sinx là hàm số lẻ, hàm số y = cosx là hàm số chẵn. Từ đó, suy ra các hàm số y = tanx và y = cotx là những hàm số lẻ.

II. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

- Số T = 2π là số dương nhỏ nhất thỏa mãn đẳng thức: $\sin(x + T) = \sin x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Hàm số y = sinx thỏa mãn đẳng thức trên được gọi là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

- Tương tự; hàm số y = cosx là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

- Các hàm số y = tanx và y = cotx cũng là những hàm số tuần hoàn, với chu kì π.

III. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác.

1. Hàm số y = sinx.

Từ định nghĩa ta thấy hàm số y = sinx :

+ Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \sin x \le 1$.

+ Là hàm số lẻ.

+ Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Sau đây, ta sẽ khảo sát sự biến thiên của hàm số y = sinx.

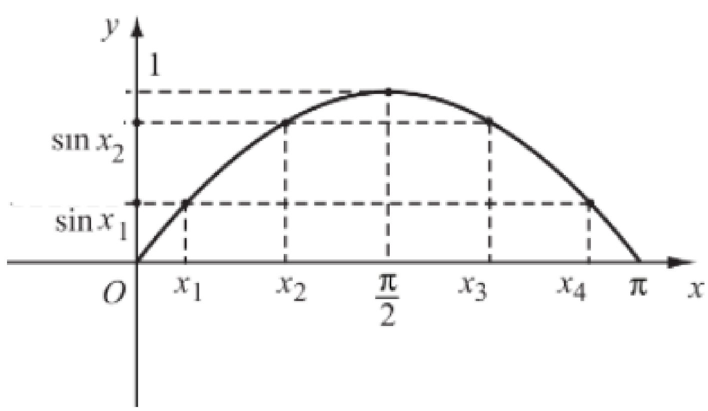
a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số y = sinx trên đoạn [0; π].

Hàm số y = sinx đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

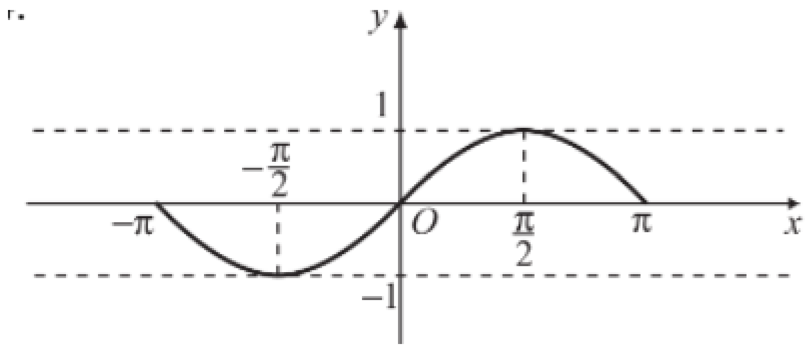
Đồ thị của hàm số y = sinx trên đoạn [0; π] đi qua các điểm (0; 0); (x_1; sinx_1); (x_2; sinx_2); (x_3; sinx_3); (x_4; sinx_4); (π; 0).



- Chú ý:

Vì y = sinx là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn [0; π] qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số trên đoạn [– π; 0].

Đồ thị hàm số y = sinx trên đoạn [– π; π] được biểu diễn như hình vẽ dưới đây:



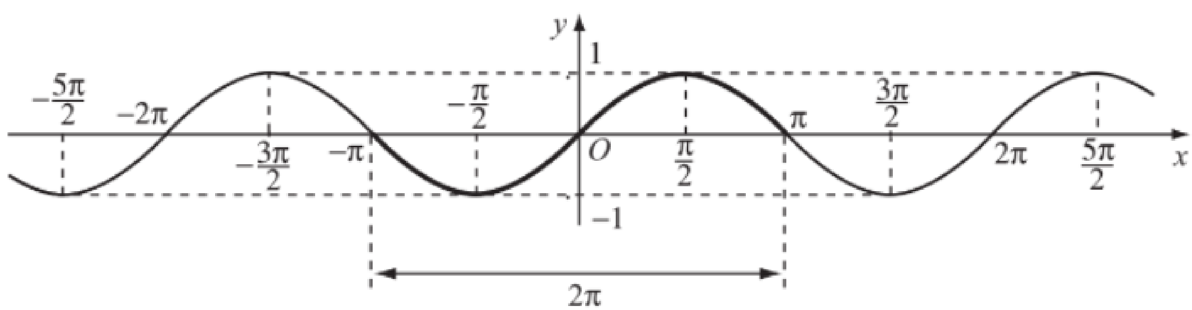
b) Đồ thị hàm số y = sinx trên $\mathbb{R}$.

Hàm số y = sinx là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π nên với mọi x ta có:

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, muốn có đồ thị hàm số y = sinx trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên đoạn [– π; π] theo các vecto $\vec{v} = (2\pi; 0)$ và $-\vec{v} = (-2\pi; 0)$, nghĩa là tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài 2π.

Dưới đây là đồ thị hàm số y = sinx trên $\mathbb{R}$:



c) Tập giá trị của hàm số y = sinx

Tập giá trị của hàm số này là [– 1; 1].

2. Hàm số y = cosx.

Từ định nghĩa ta thấy hàm số y = cosx:

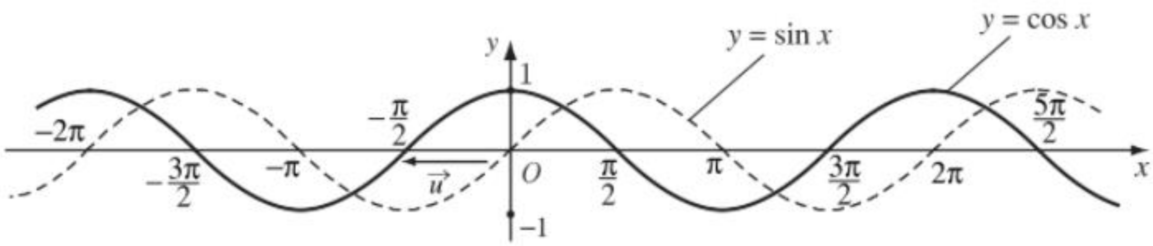
+ Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \cos x \le 1$.

+ Là hàm số chẵn.

+ Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có: $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

Từ đó, bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số y = sinx theo vecto $\vec{u}=\left(\frac{-\pi}{2};0\right)$ (sang trái một đoạn có độ dài bằng $\frac{\pi}{2}$, song song với trục hoành), ta được đồ thị hàm số y = cos x.



+ Hàm số y = cos x đồng biến trên đoạn [– π; 0] và nghịch biến trên đoạn [0; π].

+ Bảng biến thiên:

x	$-\pi$		0		π
$y=\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

+ Tập giá trị của hàm số y = cosx là [– 1; 1].

+ Đồ thị của các hàm số y = cosx; y = sinx được gọi chung là các đường hình sin.

3. Hàm số y = tanx.

Từ định nghĩa hàm số y = tan x:

+ Có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

+ Là hàm số lẻ.

+ Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số y = tanx trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

+ Hàm số y = tanx đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

+ Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

+ Bảng giá trị:

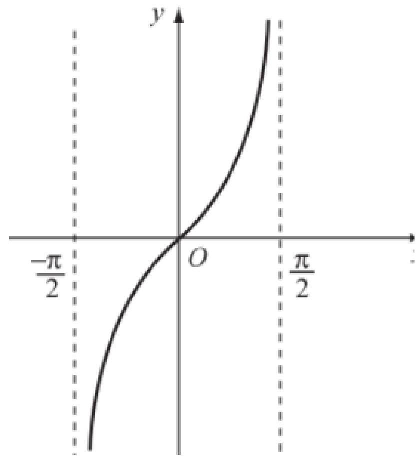
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	…..
y = tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	….

Đồ thị hàm số y = tanx trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ đi qua các điểm tìm được.

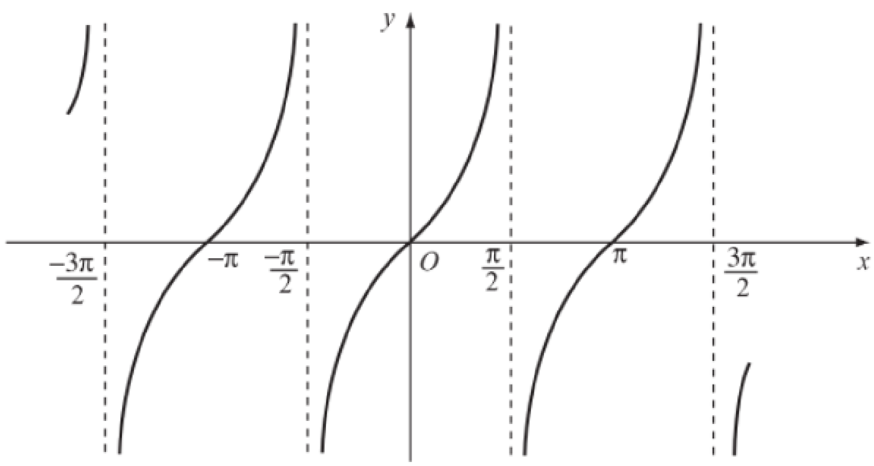
b) Đồ thị hàm số y = tanx trên D.

Vì y = tanx là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ O. Lấy đối xứng qua tâm O đồ thị hàm số y = tanx trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta được đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left(\frac{-\pi}{2}; 0\right]$.

Từ đó, ta được đồ thị hàm số y = tanx trên khoảng $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



- Vì hàm số y = tanx tuần hoàn với chu kì π nên tịnh tiến đồ thị hàm số trên khoảng $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ song song với trục hoành từng đoạn có độ dài π, ta được đồ thị hàm số y = tanx trên D.



+ Tập giá trị của hàm số y = tanx là $(-\infty;+\infty)$.

4. Hàm số y = cot x

Hàm số y = cotx:

+ Có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.

+ Là hàm số lẻ.

+ Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

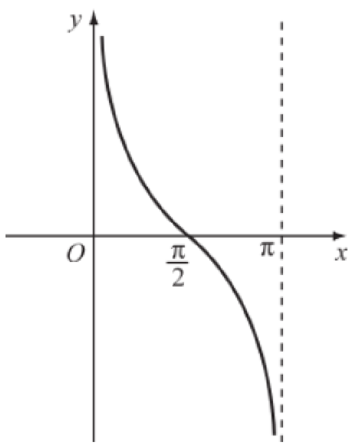
a) Sự biến thiên của hàm số y = cotx trên khoảng (0; π).

Hàm số y = cotx nghịch biến trên khoàn (0; π).

Bảng biến thiên:

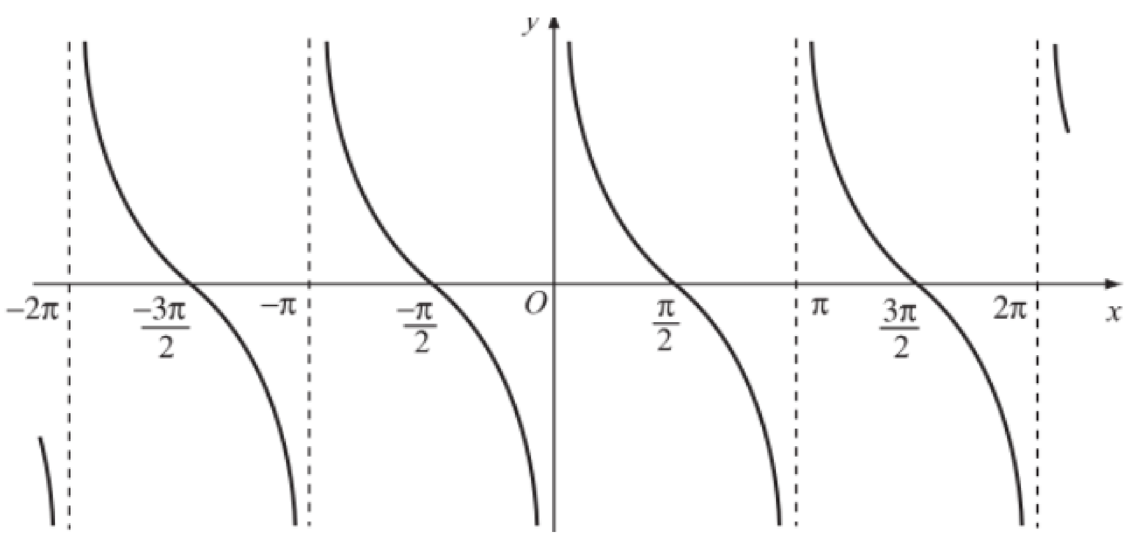
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \cot x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Hình biểu diễn của hàm số y = cotx trên khoảng (0; π).



b) Đồ thị hàm số y = cotx trên D.

Đồ thị hàm số y = cotx trên D được biểu diễn như hình sau:



Tập giá trị của hàm số y = cotx là $(-\infty;+\infty)$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2+\sin 2x}{\cos x}$;

b) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

c) $y=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

Lời giải:

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Do đó, tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Điều kiện: $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Do đó, tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Điều kiện: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}-x\neq k\pi;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}-k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

Do đó, tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}-k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2. Chứng minh rằng: hàm số y = sin2x + 2sinx là hàm số lẻ.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: f(x) = sin2x + 2sinx

Và f(– x) = sin(– 2x) + 2sin(– x) = – sin2x – 2sinx = – (sin2x + 2sinx)

Suy ra: f(– x) = – f(x).

Do đó, hàm số y = sin2x + 2sinx là hàm số lẻ. (đpcm).

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất; nhỏ nhất của các hàm số.

a) y = 2sinx – 3;

b) $y = \sin^2 x - 4\sin x + 3$.

Lời giải:

Với mọi x ta có: $-1 \le \sin x \le 1$

Suy ra: $-2 \le 2\sin x \le 2$.

Do đó; $-2 - 3 \le 2\sin x - 3 \le 2 - 3$

hay $-5 \le 2\sin x - 3 \le -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là – 1 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là – 5.

b) Ta có: $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = (\sin x - 2)^2 - 1$.

Vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên $-3 \le \sin x - 2 \le -1$

$\Rightarrow 1 \le (\sin x - 2)^2 \le 9$

$\Rightarrow 1 - 1 \le (\sin x - 2)^2 - 1 \le 9 - 1$

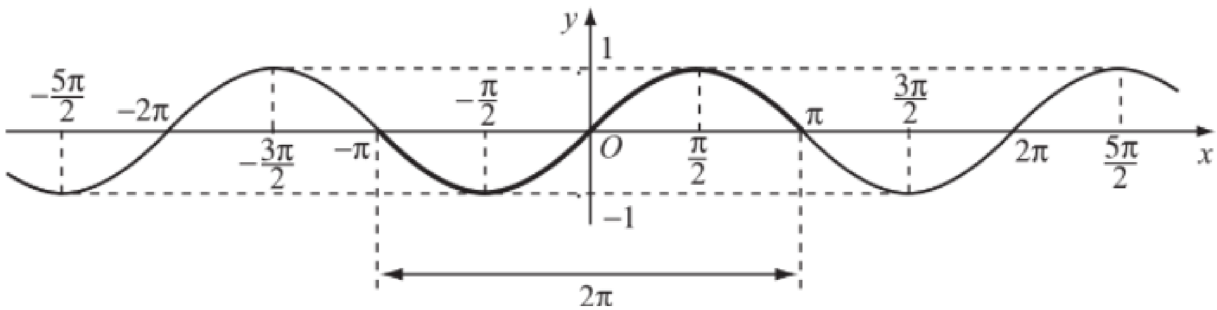
hay $0 \le \sin^2 x - 4\sin x + 3 \le 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 8 và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 0.

Bài 4. Dựa vào đồ thị hàm số y = sinx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

Lời giải:

Đồ thị hàm số y = sinx :



+ Ta xét trên khoảng $(-\pi; \pi)$:

Để hàm số nhận giá trị dương tức là sinx > 0.

Dựa vào đồ thị suy ra: $x \in (0; \pi)$.

+ Xét trên tập xác định:

Vì tính tuần hoàn với chu kì là 2π, suy ra hàm số y = sinx nhận giá trị dương khi $x \in (k2\pi; \pi + k2\pi); k \in \mathbb{Z}$.