Dạng 2: Bất phương trình bậc nhất và cách giải bài tập

1. Lý thuyết

a. Bất phương trình một ẩn:

- Bất phương trình ẩn x là một mệnh đề chứa biến có dạng f(x) < g(x) $\left(f(x) \le g(x)\right)$ trong đó f(x) và g(x) là các biểu thức của x.

- Điều kiện xác định của bất phương trình là điều kiện của ẩn số x để các biểu thức f(x) và g(x) có nghĩa.

- Giá trị x_0 thỏa mãn điều kiện xác định sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ là một mệnh đề đúng thì x_0 là một nghiệm của bất phương trình $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$.

- Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

b. Một số phép biến đổi bất phương trình:

- Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng). Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

- Một số phép biến đổi tương đương:

Gọi D là điều kiện xác định của bất phương trình P(x) < Q(x); f(x) là biểu thức xác định với $\forall x \in D$ thì:

+) P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)

Nhận xét: P(x) < Q(x) + f(x) $\Leftrightarrow$ P(x) − f(x) < Q(x)

+) P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ P(x).f(x) < Q(x).f(x) nếu f(x) > 0, $\forall x$

P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ P(x).f(x) > Q(x).f(x) nếu f(x) < 0, $\forall x$

+) P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$ nếu $P(x) \ge 0, Q(x) \ge 0, \forall x$.

2. Các dạng toán

Dạng 2.1: Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất

a. Phương pháp giải:

- Bất phương trình bậc nhất là bất phương trình có dạng: $ax+b>0,\ ax+b<0,$ $ax+b\ge 0,\ ax+b\le 0$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$.

- Giải và biện luận bất phương trình dạng: $ax+b>0\ (1)$.

+) Nếu $a>0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)\cdot$

+) Nếu $a<0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)\cdot$

+) Nếu $a=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 0.x>-b$. Khi đó, ta xét:

Với $-b\ge 0\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$

Với $-b<0\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$

Lưu ý: Ta giải tương tự với $ax+b<0,\ ax+b\le 0,\ ax+b\ge 0.$

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình sau: mx + 6 < 2x + 3m (1).

Hướng dẫn:

Ta có: $(1)\Leftrightarrow(m-2)x<3m-6.$

+) Với m – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2: bất phương trình trở thành $0.x<0$, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

+) Với $m-2>0\Leftrightarrow m>2$: $(1)\Leftrightarrow x<\frac{3m-6}{m-2}=3$, suy ra bất phương trình có nghiệm x < 3.

+) Với $m-2<0\Leftrightarrow m<2$: $(1)\Leftrightarrow x>\frac{3m-6}{m-2}=3$, suy ra bất phương trình có nghiệm x > 3.

Vậy:
Với m = 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$.
Với m > 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;3)$.
Với m < 2 tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;+\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m\left(2x-1\right)\geq 2x+1$ có tập nghiệm là S = $\left[1;+\infty\right)$.

Hướng dẫn:

Bất phương trình tương đương với $\left(2m-2\right)x\geq m+1$.

+) Với $2m-2=0\Leftrightarrow m=1$: bất phương trình trở thành $0.x\geq 2$, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Do đó m = 1 không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) Với $2m-2>0\Leftrightarrow m>1$, bất phương trình tương đương với
$x\geq\dfrac{m+1}{2m-2}\Rightarrow S=\left[\dfrac{m+1}{2m-2};+\infty\right)$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2m-2}=1\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn m > 1).

+) Với $2m-2<0\Leftrightarrow m<1$, bất phương trình tương đương với
$x\leq\dfrac{m+1}{2m-2}\Rightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{m+1}{2m-2}\right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

Dạng 2.2: Dấu của nhị thức bậc nhất

a. Phương pháp giải:

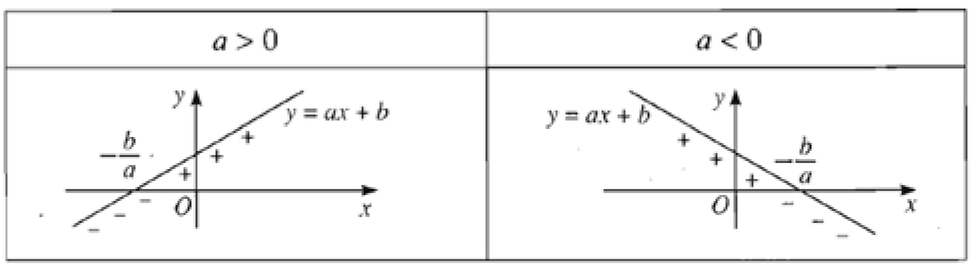
- Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng f(x) = ax + b trong đó a, b là hai số đã cho, $a\neq 0$.

- Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất: Nhị thức f(x) = ax + b ($a \neq 0$) cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ và trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

Ta có bảng xét dấu của nhị thức f(x) = ax + b ($a \neq 0$) như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x) = ax + b		Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a	

Minh họa bằng đồ thị



- Áp dụng vào giải phương trình:

Giải bất phương trình f(x) > 0 thực chất là xét xem biểu thức f(x) nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết f(x) nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức f(x).

Ta vận dụng định lý dấu của nhị thức bậc nhất để xét dấu f(x).

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Xét dấu nhị thức: f(x) = 16 - 8x.

Hướng dẫn:

Ta thấy nhị thức f(x) có nghiệm x = 2, hệ số a = -8 < 0 nên ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	+	0	–

Vậy f(x) > 0 khi $x \in (-\infty, 2)$; f(x) < 0 khi $x \in (2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Xét dấu nhị thức f(x) = mx - 1 với m là một tham số đã cho.

Hướng dẫn:

+) Nếu m = 0 thì f(x) = -1 < 0 với mọi x.

+) Nếu m ≠ 0 thì f(x) là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{1}{m}$. Ta có bảng xét dấu nhị thức f(x) trong hai trường hợp m > 0 và m < 0 như sau:

Với m > 0:

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
f(x)	–	0	+

Vậy f(x) < 0 khi $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right)$; f(x) > 0 khi $x \in \left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$.

Với m < 0:

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
f(x)	+	0	–

Vậy f(x) > 0 khi $x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right)$; f(x) < 0 khi $x \in \left(\frac{1}{m}; +\infty\right)$.

Dạng 2.3: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

a. Phương pháp giải:

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng: $ax + by + c < 0, ax + by + c > 0, ax + by + c \le 0, ax + by + c \ge 0$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

- Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$, ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng d: $ax + by + c = 0$

Bước 2: Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc d.

Bước 3: Tính $ax_0 + by_0 + c$ và so sánh $ax_0 + by_0 + c$ với 0.

Bước 4: Kết luận:

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c \le 0$.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình sau:

x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 – x).

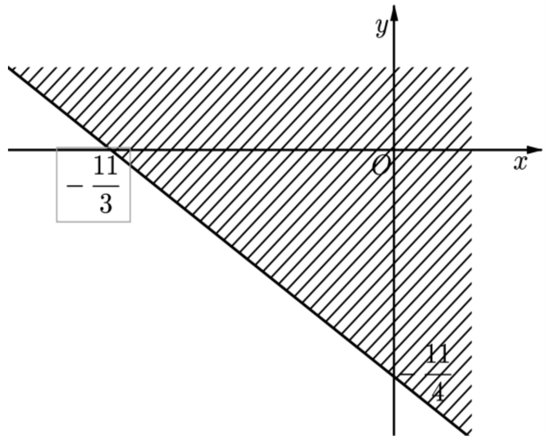
Hướng dẫn:

Đầu tiên, thu gọn bất phương trình đề bài đã cho về thành 3x + 4y + 11 < 0.

Ta vẽ đường thẳng d: 3x + 4y + 11 = 0.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình 3x + 4y + 11 < 0.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ d) không chứa điểm (0; 0).



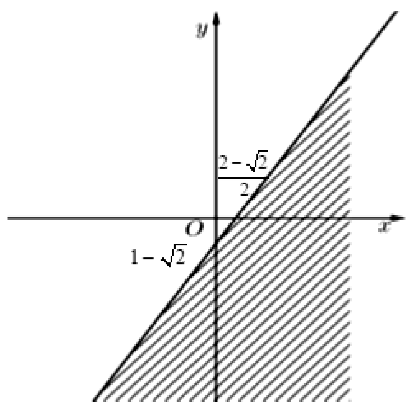
Ví dụ 2: Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình:
$2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\le 0$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta vẽ đường thẳng $d: 2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2=0$.

Ta thấy (0; 0) là nghiệm của bất phương trình đã cho (vì $\sqrt{2}-2<0$).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm (0; 0).



Dạng 2.4: Xét dấu một biểu thức

a. Phương pháp giải:

- Trước tiên ta biến đổi biểu thức P(x) về dạng gồm tích hoặc thương các nhị thức bậc nhất. Sau đó, để xét dấu biểu thức P(x), ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm các nghiệm P(x) hoặc những điểm làm cho P(x) không xác định (tức nghiệm của mẫu thức, nếu có).

Bước 2: Lập bảng xét dấu của P(x).

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu để kết luận.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Xét dấu biểu thức $f\left(x\right)=\frac{-4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}$.

Hướng dẫn:

Ta có: $f\left(x\right)=-\frac{4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{3x+1}=\frac{5x+11}{\left(x-2\right)\left(3x+1\right)}$.

Ta có: $5x+11=0\Leftrightarrow x=-\frac{11}{5}$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
5x + 11		–	0	+	|	+	|	+	
x - 2		–	|	–	|	–	0	+	
3x + 1		–	|	–	0	+	|	+	
f(x)		–	0	+	||	–	||	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng:

$f\left(x\right)>0$ khi $x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

$f(x)<0$ khi $x\in\left(-\infty;-\frac{11}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

f(x) = 0 khi x = $\frac{-11}{5}$.

Ví dụ 2: Xét dấu biểu thức f(x) = (2x + 8)(1 – x).

Hướng dẫn:

Ta có: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
2x + 8		–	0	+	|	+	
1- x		+	|	+	0	–	
f(x)		–	0	+	0	–	

Từ bảng xét dấu ta thấy:

$f(x) > 0$ khi $x \in (-4;1)$.

$f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$

f(x) = 0 khi x = - 4 hoặc x = 1.

Dạng 2.5: Giải bất phương trình bậc nhất quy về việc xét dấu một tích hoặc một thương

a. Phương pháp giải:

- Giải bất phương trình P(x) > 0 (P(x) < 0; $P(x) \le 0; P(x) \ge 0$) thực chất là xét xem biểu thức P(x) nhận giá trị dương (giá trị âm) với những giá trị nào của x, tức là ta đi xét dấu biểu thức P(x).

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(x-1)(x-3) \le 0$.

Hướng dẫn:

Ta có: $(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x - 1		–	0	+	|	+	
x - 3		–	|	–	0	+	
(x - 1)(x - 3)		+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: S = [1; 3].

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{x-2}{x+1} \ge \frac{x+1}{x-2}$.

Hướng dẫn:

Biến đổi tương đương bất phương trình đã cho:

$$\frac{x-2}{x+1} \ge \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x+3}{(x+1)(x-2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{(x+1)(x-2)} \ge 0$$

Ta có: $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; x+1=0 \Leftrightarrow x=-1; x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
1 - 2x		+	|	+	0	–	|	–	
x + 1		–	0	+	|	+	|	+	
x - 2		–	|	–	|	–	0	+	
$\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}$		+	||	–	0	+	||	–	

Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Dạng 2.6: Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

a. Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức sau:

+) $|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)<0\\ \begin{cases}g(x)\ge 0\\ f^2(x)\ge g^2(x)\end{cases}\end{array}\right.$

+) $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ -g(x)\le f(x)\le g(x)\end{cases}$

hoặc $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f^2(x)\le g^2(x)\end{cases}$

+) $|f(x)|\ge|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\ge g^2(x)$

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|2-x|+3x-1\le 6$.

Hướng dẫn:

Ta có: $|2-x|+3x-1\le 6$

$\Leftrightarrow|2-x|\le 7-3x\Leftrightarrow\begin{cases}7-3x\ge 0\\ (2-x)^2\le(7-3x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{7}{3}\\ (2-x)^2-(7-3x)^2\le 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{7}{3} \\ (2x-5)(9-4x) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{5}{2} \\ x \le \dfrac{9}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \le \dfrac{9}{4}.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: S = $\left(-\infty; \dfrac{9}{4}\right]$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $|x+1| - |x-2| \ge 3$.

Hướng dẫn:

Xét bất phương trình $|x+1| - |x-2| \ge 3$ (*)

Ta có bảng xét dấu các giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x + 1		–	0	+	|	+	
x - 2		–	|	–	0	+	

+) Trường hợp 1: Với $x < -1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x-1+x-2 \ge 3 \Leftrightarrow -3 \ge 3$ (vô lý), suy ra $S_1 = \varnothing$.

+) Trường hợp 2: Với $-1 \le x < 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1+x-2 \ge 3 \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Kết hợp với điều kiện $-1 \le x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \varnothing$.

+) Trường hợp 3: Với $x \ge 2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1-x+2 \ge 3 \Leftrightarrow 3 \ge 3$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $x \ge 2$, ta được tập nghiệm $S_3 = [2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [2; +\infty)$.

3. Bài tập tự luyện

3.1 Tự luận

Câu 1: Giải và biện luận bất phương trình: $m(m^2x+2) < x + m^2 + 1$.

Hướng dẫn:

Bất phương trình tương đương với

$$(m^3-1)x < m^2 - 2m + 1 \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}$$

+) Với m = 1: bất phương trình trở thành 0x < 0, suy ra bất phương trình vô nghiệm.

+) Với m > 1: bất phương trình tương đương với $x < \frac{m-1}{m^2+m+1}$

+) Với m < 1 bất phương trình tương đương với $x > \frac{m-1}{m^2+m+1}$

Vậy:

m = 1, bất phương trình vô nghiệm.

m > 1, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{m-1}{m^2+m+1}$.

m < 1, bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{m-1}{m^2+m+1}$.

Câu 2: Tìm m để bất phương trình $\left(m^2-3m\right)x + m < 2 - 2x$ vô nghiệm.

Hướng dẫn:

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-3m+2\right)x < 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với m = 1 bất phương trình trở thành $0x < 1$: vô nghiệm.

Với m = 2 bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Vậy với m = 1 hoặc m = 2, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x - m < 3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Ta có: $2x - m < 3(x-1) \Leftrightarrow x > 3 - m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3-m;+\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4;+\infty)$ thì $3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 4: Xét dấu biểu thức $f(x) = \dfrac{2-x}{2x+1}$.

Hướng dẫn:

Ta có: $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
2 - x		+	|	+	0	−	
2x + 1		−	0	+	|	+	
f(x)		−	||	+	0	−	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy:

$f(x) > 0$ khi $x \in \left(-\dfrac{1}{2};2\right)$; $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right) \cup (2;+\infty)$.

Câu 5: Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1) > 0$.

Hướng dẫn:

Đặt $f(x) = x(x-2)(x+1)$.

Ta có: $x = 0$; $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x + 1		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x - 2		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-1;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\left|3x+1\right|>2$.

Hướng dẫn:

Ta có $\left|3x+1\right|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1>2\\3x+1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{3}\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị nguyên x trong [-2017; 2017] thỏa mãn bất phương trình $\left|2x+1\right|<3x$.

Hướng dẫn:

$$\left|2x+1\right|<3x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-3x<2x-1<3x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>\dfrac{1}{5}\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{5}.$$

Mà $x\in\left[-2017;2017\right]\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{5};2017\right]$

Vậy có 2017 giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài.

Câu 8: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$.

Hướng dẫn:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Bất phương trình $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| - 2|x+2| < 0 \ (*)$.

Ta có bảng xét dấu các giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x - 1		−	|	−	0	+	
x + 2		−	0	+	|	+	

+) Trường hợp 1: Với $x < -2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -x + 1 + 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x < -5$.

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -5)$.

+) Trường hợp 2: Với $-2 < x < 1$, khi đó
$(*) \Leftrightarrow -x + 1 - 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$.

Kết hợp với điều kiện $-2 < x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = (-1; 1)$.

+) Trường hợp 3: Với $x > 1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x - 1 - 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta được tập nghiệm $S_3 = (1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là
$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

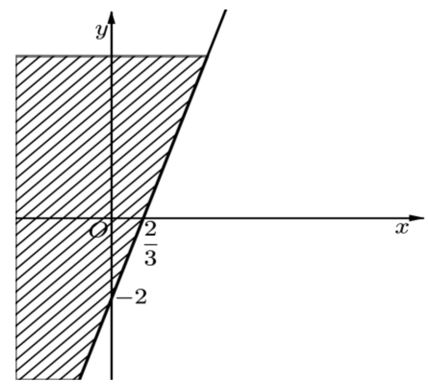
Câu 9: Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $-3x + y + 2 \leq 0$.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta vẽ đường thẳng $d: -3x + y + 2 = 0$.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ d không chứa điểm (0; 0)



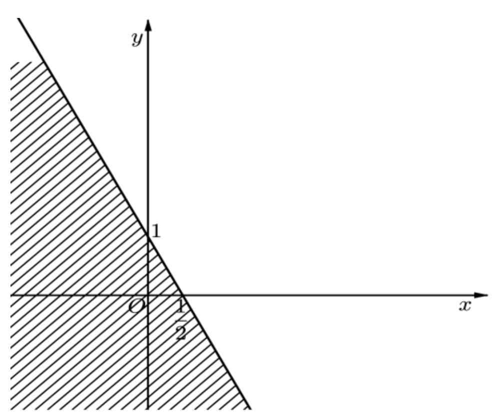
Câu 10: Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình 2x + y > 1.

Hướng dẫn:

Trước hết, ta vẽ đường thẳng d: 2x + y = 1.

Ta thấy (0; 0) không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ d) không chứa điểm (0; 0).



3.2 Trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình nào sau đây không tương đương với bất phương trình $x + 5 \geq 0$?

A. $-x^2(x+5) \leq 0$.

B. $\sqrt{x+5}\left(x+5\right)\ge 0$**.**

C. $\left(x-1\right)^2\left(x+5\right)\ge 0$**.**

D. $\sqrt{x+5}\left(x-5\right)\ge 0$**.**

Hướng dẫn:

Chọn D.

Ta có $x+5\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Ta xét các bất phương trình:

Đáp án A: $-x^2\left(x+5\right)\le 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án B: $\sqrt{x+5}\left(x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án C: $\left(x-1\right)^2\left(x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Đáp án D: $\sqrt{x+5}\left(x-5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 5$.

Câu 2: Cho $f\left(x\right)=2x-4$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(2;+\infty\right)$**.**

B. $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)$

C. $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-2;+\infty\right)$**.**

D. $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Hướng dẫn:

Chọn A.

Ta có:

$f\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x-4>0\Leftrightarrow x>2$.

$f\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x-4<0\Leftrightarrow x<2$.

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Câu 3: Bất phương trình $m^2(x-1)\ge 9x+3m$ có nghiệm đúng với mọi x khi:

A. $m=1.$

B. $m=-3.$

C. $m=\varnothing.$

D. $m=-1.$

Hướng dẫn:

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $(m^2-9)x\ge m^2+3m.$

Dễ thấy nếu $m^2-9\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x>18$: vô nghiệm

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\ge 0$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}.$

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3.$

Câu 4: Miền nghiệm của bất phương trình $4(x-1)+5(y-3)>2x-9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(0;0)$.

B. $(1;1)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(2;5)$.

Hướng dẫn:

Chọn D.

Ta có: $4(x-1)+5(y-3)>2x-9\Leftrightarrow 4x-4+5y-15>2x-9\Leftrightarrow 2x+5y-10>0$.

Dễ thấy, tại điểm $(2;5)$ ta có: $2.2+5.5-10>0$ (đúng).

Câu 5: Cho nhị thức bậc nhất $f\left(x\right)=ax+b\ \left(a\ne 0\right)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

B. Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$.

C. Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$.

D. Nhị thức $f\left(x\right)$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$.

Hướng dẫn:

Chọn B. Theo định lý về dấu của nhị thức bậc nhất.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Bất phương trình ax + b < 0 có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi a = 0 và b < 0.

B. Bất phương trình bậc nhất một ẩn luôn có nghiệm.

C. Bất phương trình ax + b < 0 vô nghiệm khi a = 0 và $b\ge 0$.

D. Bất phương trình ax + b < 0 vô nghiệm khi a = 0.

Hướng dẫn:

Chọn D.

Xét ax + b < 0, khi a = 0 thì bất phương trình có dạng $0x+b<0$

+) Nếu $b<0$ thì tập nghiệm là $\mathbb{R}$

+) Nếu $b\ge 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Câu 7: Cho f(x), g(x) là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là:

A. $[1;2]$.

B. $[1;2)\cup(3;+\infty)$.

C. $[1;2)\cup[3;+\infty)$.

D. $[1;2]\cup[3;+\infty)$.

Hướng dẫn:

Chọn C.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;2)\cup[3;+\infty)$.

Câu 8: Cho bất phương trình $\left|\dfrac{2}{x-13}\right| > \dfrac{8}{9}$. Số nghiệm nguyên nhỏ hơn 13 của bất phương trình là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn:

Chọn C.

Ta có: $\left|\frac{2}{x-13}\right|>\frac{8}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{x-13}<-\frac{8}{9}\\ \frac{2}{x-13}>\frac{8}{9}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{8x-86}{9(x-13)}<0\\ \frac{122-8x}{9(x-13)}>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{43}{4}<x<13\\ 13<x<\frac{61}{4}\end{array}\right.$

Nghiệm nguyên nhỏ hơn 13 của bất phương trình là 11; 12.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên nhỏ hơn 13.

Câu 9: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x)\le 0$ là:

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn:

Chọn C.

Ta có: $2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

$3-x=0\Leftrightarrow x=3$.

Bảng xét dấu vế trái:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x + 1		−	0	+	|	+	|	+	
2 - x		+	|	+	0	−	|	−	
					|				

3 - x	+	|	+		+	0	−
Vế trái	−	0	+	0	−	0	+

Suy ra $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$.

Vậy số nghiệm nguyên dương của bất phương trình trên là 2.

Câu 10: Hàm số có kết quả xét dấu như dưới đây là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

A. $f(x) = x - 3$.

B. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$.

C. $f(x) = x(3 - x)$.

D. $f(x) = x(x - 3)$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) = 0$ khi $x = 0$; $x = 3$ nên đáp án chỉ có thể là $f(x) = x(3 - x)$ hoặc $f(x) = x(x - 3)$.

Mặt khác $f(x) > 0$ khi $x \in (0; 3)$ nên đáp án là $f(x) = x(3 - x)$.