Bài tập Một số phương trình lượng giác cơ bản - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Điều kiện để phương trình 3sinx + mcosx = 5 vô nghiệm là:

A. $\left[\begin{matrix} m \le -4 \\ m \ge 4 \end{matrix}\right.$

B. m > 4

C. m < - 4

D. -4 < m < 4

Lời giải:

Phương trình 3sinx + mcosx= 5 vô nghiệm khi:

$3^2 + m^2 < 52 \leftrightarrow m^2 < 16 \leftrightarrow -4 < m < 4$

Chọn đáp án D

Bài 2: Phương trình $3\sin^2 x + m\sin 2x - 4\cos^2 x = 0$ có nghiệm khi:

A. m = 4

B. m ≥ 4

C. m ≤ 4

D. m ∈R

Lời giải:

Ta có:

$$3\sin^2 x + m.\sin 2x - 4\cos^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3.\frac{1-\cos 2x}{2} + m.\sin 2x - 4.\frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow m.\sin 2x - \frac{7}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2m\sin 2x - 7\cos 2x = 1 \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm.

Do đó: $4m^2 + 49 \geq 1 \Leftrightarrow 4m^2 + 48 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Chọn đáp án D

Bài 3: Nghiệm dương bé nhất của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6}$

B. $x = \frac{\pi}{2}$

C. $x = \frac{5\pi}{2}$

D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Lời giải:

Đặt t = sin x, $(-1 \le t \le 1)$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2} > 1\ (l) \end{array}\right.$$

Với t = 1 thì sin x= 1 $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Nghiệm dương bé nhất của phương trình:

$x = \dfrac{\pi}{2}$

Chọn đáp án B

Bài 4: Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0$ có nghiệm khi:

A. $x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải:

Đặt t = cos2x ($-1 \le t \le 1$).

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2} < -1 \ (l) \end{array}\right.$$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

Chọn đáp án C

Bài 5: Số nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$ thuộc $[0; 2\pi]$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải:

Đặt t = sinx ($-1 \le t \le 1$).

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} > 1 \ (l) \end{array}\right.$$

Với t=1 thì sinx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Do $x \in [0; 2\pi]$ nên k=0

Chọn đáp án A

Bài 6: Số nghiệm của phương trình cos2x + $\sin^2$x + 2cosx + 1= 0 thuộc [0; 4π] là:

A. 1

B. 2

C. 4

D. 6

Lời giải:

Ta có:

$$\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

Các nghiệm của phương trình thuộc đoạn [0; 4π] là: π; 3π

Chọn đáp án B

Bài 7: Nghiệm của phương trình 2$\sin^2$x + 5sinx + 3 = 0 là:

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải:

Đặt t = sinx $(-1 \le t \le 1)$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$2t^2 + 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{-3}{2} < -1 \ (l) \end{array} \right.$$

Với t= - 1 thì sinx = -1 $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Chọn đáp án A

Bài 8: Nghiệm của phương trình $\sin^2 x$ – sinxcosx = 1 là:

A. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{-\pi}{4} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

B. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

C. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

D. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Lời giải:

Ta có: $\sin^2 x - \sin x . \cos x = 1$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(\cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right.$$

* Nếu cos x= 0 thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

* Nếu cos x + sinx =0 :

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Chọn đáp án A

Bài 9: Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ thuộc $(0; \frac{\pi}{2})$ là:

A. $x = \frac{\pi}{3}$

B. $x = \frac{\pi}{4}$

C. $x = \frac{\pi}{6}$

D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Lời giải:

Ta có :

$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$

Đặt t = sin x. Phương trình trên trở thành:

$-2t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Do $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ nên $x = \frac{\pi}{6}$

Chọn đáp án C

Bài 10: Tập nghiệm của phương trình: $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ là:

A. $\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Lời giải:

- Nếu cosx = 0 phương trình trở thành $3\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$(vô lí) vì khi cosx = 0 thì $\sin^2 x = 1$ nên sinx = ±1.

- Nếu cosx ≠ 0, chia cả hai vế của phương trình cho cos2x, ta được:

$3\tan^2x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$

Đặt t = tanx, ta được phương trình: $3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right.$

Với $t = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $t = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A

II. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Tập nghiệm của phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2$ là?

Lời giải:

Ta có $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -1$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2: Tổng các nghiệm của phương trình:

$\sin^2(2x - \frac{\pi}{4}) - 3\cos(3\frac{\pi}{4} - 2x) + 2 = 0$ (1) trong khoảng $(0;2\pi)$ là?

Lời giải:

Ta có:

$\cos\left(3\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra

(1) $\Leftrightarrow$ $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; $(-1 \le t \le 1)$

phương trình (*) trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 > 1 (l) \end{array}\right.$$

Suy ra: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Suy ra các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;2\pi)$ là $\frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}$

Nên tổng của chúng là $\frac{3\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} = \frac{7\pi}{4}$.

Bài 3: Phương trình $(2 - a)\sin x + (1 + 2a)\cos x = 3a - 1$ có nghiệm khi?

Lời giải:

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$(2 - a)^2 + (1 + 2a)^2 \ge (3a - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 + 1 + 4a + 4a^2 \ge 9a^2 - 6a + 1$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 6a - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le a \le 2.$

Chú ý. Với bài toán: Tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của a để phương trình:

(2 – a)sinx + (1+ 2a)cosx = 3a – 1

Có nghiệm, ta cũng thực hiện lời giải tương tự như trên.

Bài 4: Nghiệm của phương trình sinx + cosx = 1 là?

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}.\sin x + \sin\frac{\pi}{4}.\cos x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Bài 5: Phương trình $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

Lời giải:

$$\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$$

$$\leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\sin 3x + \sin\frac{\pi}{6}.\cos 3x = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) sin3x – cos5x = 0 b) tan3x . tanx = 1.

Lời giải:

a) sin3x – cos5x = 0 ⇔ cos5x = sin3x ⇔ cos5x = cos(π2 – 3x) ⇔

$$\left[\begin{array}{l} 5x = (\frac{\prod}{2} - 3x) + k2\prod \\ 5x = -(\frac{\prod}{2} - 3x) + k2\prod \end{array}\right] <=> \left[\begin{array}{l} x = \frac{\prod}{16} + k\frac{\prod}{4} \\ x = -\frac{\prod}{4} + k\prod \end{array}\right], (k\epsilon Z).$$

b) tan3x . tanx = 1 ⇔ $\frac{sin3x.sinx}{cos3xcosx} = 1$ Điều kiện: cos3x . cosx # 0.

Với điều kiện này phương trình tương đương với cos3x . cosx = sin3x . sinx ⇔ cos3x . cosx – sin3x . sinx = 0 ⇔ cos4x = 0.

Do đó

$$\tan 3x \,.\, \tan x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} cos3xcosx \neq 0 \\ cos4x = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{1}{2}(cos2x + cos4x) \neq 0 \\ 2cos^2 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos2x + 2cos^2 2x - 1 \neq 0 \\ cos2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} <=> \begin{cases} cos2x \notin \{-1; \frac{1}{2}\} \\ cos2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\prod}{2} + k\prod <=> x = \frac{\prod}{8} + k\frac{\prod}{4}, (k\varepsilon Z).$$

Bài 7: $\sin^2 x$ - sinx = 0

Đặt nhân tử chung, đưa phương trình về dạng tích và giải các phương trình lượng giác cơ bản:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} &\sin^2 x - \sin x = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\sin x(\sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$

Bài 8 Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

Lời giải:

a) Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$ ta được phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; \dfrac{1}{2}\}$.

Nghiệm của phương trình đã cho là các nghiệm của hai phương trình sau:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ và $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Đáp số: $x = k2\pi$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in Z$.

b) Ta có $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ (công thức nhân đôi), do đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned}
&2\sin 2x+\sqrt{2}\sin 4x=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x+2\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(1+\sqrt{2}\cos 2x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 1+\sqrt{2}\cos 2x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ 2x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\pm\dfrac{3\pi}{8}+k\pi \quad (k\in Z)$.

Bài 9 Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2=0$; b) $8\cos^2x+2\sin x-7=0$;

c) $2\tan^2x+3\tan x+1=0$; d) $\tan x-2\cot x+1=0$.

Lời giải:

$$\begin{aligned}
&a)\ \sin^2\tfrac{x}{2}-2\cos\tfrac{x}{2}+2=0\\
&\Leftrightarrow 1-\cos^2\tfrac{x}{2}-2\cos\tfrac{x}{2}+2=0\\
&\Leftrightarrow \cos^2\tfrac{x}{2}+2\cos\tfrac{x}{2}-3=0
\end{aligned}$$

Đặt $t = cos\frac{x}{2}, t \in [-1;1]$ thì phương trình trở thành

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (tm) \\ t = -3 & (ktm) \end{array}\right.$$

$$Khi\ t = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k4\pi \quad (k \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k4\pi \quad (k \in Z)$.

$$b)\ 8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(1 - \sin^2 x\right) + 2\sin x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$

Đặt t = sinx, t ∈ [-1; 1] thì phương trình trở thành

$$8t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad (tm)$$

$$+)\ t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

$$+)\ t = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

:) ĐK: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

Đặt t = tanx thì phương trình trở thành

$$2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \tan x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})(tm)$$

d) ĐK: $\left\{\begin{array}{l} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq k\pi \\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}\ (k\in Z)$

$$\begin{array}{l} \tan x-2\cot x+1=0 \\ \Leftrightarrow \tan x-\frac{2}{\tan x}+1=0 \\ \Leftrightarrow \tan^2 x+\tan x-2=0 \end{array}$$

Đặt t = tanx thì phương trình trở thành

$$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=1 \\ \tan x=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\arctan(-2)+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in Z)\ (tm)$$

Bài 10 Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

b) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$

c) $3\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$

Lời giải:

Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$, khi đó ta có 2.1 + 0 - 0 = 0 (vô nghiệm)

$\Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0$$

Đặt t = tan x, khi đó phương trình trở thành:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$Với\ t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$$

$$Với\ t = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan x = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ hoặc \ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \ \ (k \in Z).$

$b) \ 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$

Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$, khi đó ta có 3.1 - 0 + 0 = 2 (vô nghiệm)

$\Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin x}{\cos x} + 5 = \frac{2}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 4\tan x + 5 = 2\left(\tan^2 x + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$$

Đặt t = tan x, khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

$Với \, t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$

$Với \, t = 3 \Rightarrow \tan x = 3 \Leftrightarrow x = \arctan 3 + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$

Vậy nghiệm của phương trình là

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ hoặc \ x = \arctan 3 + k\pi \ \ (k \in Z).$

$$c) \ \sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$$

Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$, khi đó ta có 2 + 0 - 0 = 1 (vô nghiệm)

$$\Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\sin x}{\cos x} - 4 = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + 4\tan x - 4 = \tan^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$$

Đặt t = tan x, khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right.$$

$$V\acute{o}i\, t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$$

$$V\acute{o}i\, t = -5 \Rightarrow \tan x = -5 \Leftrightarrow x = \arctan(-5) + k\pi \ \ (k \in Z) \ \ (tm)$$

Vậy nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in Z) \ ho\check{a}c\ x = \arctan(-5) + k\pi \ \ (k \in Z).$$

$$d)\ 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 4\sin^2 x = -4$$

Khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$, khi đó ta có

$0 + 0 - 4 = -4 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$ là nghiệm của phương trình.

$$Khi\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2 - 6\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} - 4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-4}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 6\sqrt{3}\tan x - 4\tan^2 x = -4\tan^2 x - 4$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{3}\tan x = 6$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in Z)\ hoặc\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in Z).$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Giải các phương trình sau:

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$

c) $2\sin 2x + 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0$

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$

Bài 2 Giải các phương trình sau:

a. $\tan(2x + 1)\tan(3x - 1) = 1$

b. $\tan x + \tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

Bài 3 Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

Bài 4 Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2(\frac{x}{2}) - 2\cos(\frac{x}{2}) + 2 = 0$; b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$; d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$.

Bài 5 Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

b) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$

c) $3\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$

Bài 6 Giải các phương trình sau:

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$

c) $2\sin 2x + 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0$

d) 5cos2x + 12sin2x - 13 = 0

Bài 7

a. tan(2x + 1) tan(3x – 1) = 1

b. tanx + tan(x + $\frac{\pi}{4}$) = 1

Bài 8 Giải phương trình: sin2x – sin x = 0

Bài 9 Giải các phương trình sau:

$a) tan(2x+1).tan(3x-1)=1$

$b) tanx+tan(x+\frac{\pi}{4})=1$

Bài 10 Giải các phương trình sau:

$a) cosx-\sqrt{3}sinx=\sqrt{2};$

$b) 3sin3x-4cos3x=5;$

$c) 2sin2x+2cos2x-\sqrt{2}=0;$

$d) 5cos2x+12sin2x-13=0.$

Bài 11 Giải các phương trình sau:

$a) 2sin^2x+sinxcosx-3cos^2x=0$

$b) 3sin^2x-4sinxcosx+5cos^2x=2$

$c) sin^2x-sin2x+2cos^2x=\frac{1}{2}$

$d) 2cos^2x-3\sqrt{3}sin2x-4sin^2x=-4.$