Các phương trình đưa về phương trình bậc nhất và cách giải bài tập

A. Lí thuyết tổng hợp.

- Định nghĩa: Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng ax + b = 0 với $a \neq 0$.

- Cách giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn:

<table>
<tr><td colspan="3">ax + b = 0 (1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hệ số</td><td>Kết luận</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a \neq 0$</td><td>(1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a = 0</td><td>$b \neq 0$</td><td>(1) vô nghiệm</td></tr>
<tr><td>b = 0</td><td>(1) nghiệm đúng với mọi x (vô số nghiệm)</td></tr>
</table>

- Các phương trình có thể đưa về dạng phương trình bậc nhất:

+ Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối

+ Phương trình chứa ẩn ở mẫu

B. Các dạng bài.

Dạng 1: Giải và biện luận phương trình: ax + b = 0.

Phương pháp giải:

Áp dụng định nghĩa và sử dụng cách giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn ax + b = 0 trong phần lí thuyết.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số: (m – 1)x + 2 – m = 0

Lời giải:

Xét phương trình: (m – 1)x + 2 – m = 0 (m là tham số) ta có:

+ Phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{m-2}{m-1}$.

$\Leftrightarrow$ m – 1 ≠ 0

$\Leftrightarrow m \neq 1$

+ Phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

+ Phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 nghiệm đúng với mọi x

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases} \Leftrightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy với $m \neq 1$ thì phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-2}{m-1}$, với m = 1 thì phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 vô nghiệm, và phương trình (m – 1)x + 2 – m = 0 không thể có vô số nghiệm.

Bài 2: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số: m(mx – 1) = 9x + 3.

Lời giải:

Ta có: m(mx – 1) = 9x + 3

$\Leftrightarrow m^2x-m=9x+3$

$\Leftrightarrow m^2x-9x-m-3=0$

$\Leftrightarrow (m^2-9)x-m-3=0$

Xét phương trình: $(m^2-9)x-m-3=0$ (m là tham số) ta có:

+ Phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{m+3}{m^2-9}$

$\Leftrightarrow m^2-9\neq 0$

$\Leftrightarrow m^2\neq 9$

$\Leftrightarrow m\neq \pm 3$

+ Phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9=0 \\ -m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=9 \\ -m\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 3 \\ m\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

+ Phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ có nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9=0 \\ -m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=9 \\ -m=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 3 \\ m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$$

Vậy với $m\neq \pm 3$ thì phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m+3}{m^2-9}$, với m = 3 thì phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ vô nghiệm , và với m = –3 phương trình $(m^2-9)x-m-3=0$ có vô số nghiệm.

Dạng 2: Xác định tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp giải:

Cho phương trình f(x) = 0 (1) trong đó có chứa tham số m. Giả sử tập điều kiện của phương trình là D.

Biến đổi phương trình về dạng ax = – b.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-b}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \dfrac{-b}{a}\in D \end{cases}$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ \dfrac{-b}{a}\in D \end{cases} \end{array}\right.$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b \ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne 0 \\ \dfrac{-b}{a} \notin D \end{cases} \end{array}\right.$

Phương trình (1) có nghiệm đúng với mọi $x \in D$ $\Leftrightarrow a = b = 0$.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Tìm m để phương trình 5m + 6x = 7x – 3m có nghiệm duy nhất trong khoảng (0; 10).

Lời giải:

Ta có: 5m + 6x = 7x – 3m

$\Leftrightarrow$ 6x – 7x = – 3m – 5m

$\Leftrightarrow$ – x = – 8m

$\Leftrightarrow$ x = 8m

Để phương trình 5m + 6x = 7x – 3m có nghiệm duy nhất trong khoảng (0; 10) thì

$\begin{cases} 1 \ne 0 \\ 8m \in (0;10) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 8m < 10 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{5}{4}$

Vậy với $0 < m < \dfrac{5}{4}$ thì phương trình 5m + 6x = 7x – 3m có nghiệm duy nhất trong khoảng (0; 10).

Bài 2: Tìm m để phương trình $\dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+1} = 2$ vô nghiệm.

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} x+1 \ne 0 \\ x-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ x \ne 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập xác định của phương trình: D = $\mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$

Với điều kiện xác định trên ta có: $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=2$

$\Leftrightarrow \frac{(x-m)(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$\Rightarrow (x-m)(x+1)+(x-2)(x-1)=2(x-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2+x-mx-m+x^2-x-2x+2=2x^2-2$

$\Leftrightarrow -mx-m-2x+2=-2$

$\Leftrightarrow (-m-2)x=-2-2+m$

$\Leftrightarrow (-m-2)x=-4+m$

Để phương trình $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=2$ vô nghiệm thì

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-2=0\\-4+m\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}-m-2\neq 0\\ \frac{-4+m}{-m-2}\notin \mathbb{R}\setminus\{1;-1\}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=-2\\m\neq 4\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq -2\\ \left[\begin{array}{l}\frac{-4+m}{-m-2}=1\\ \frac{-4+m}{-m-2}=-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ \begin{cases}m\neq -2\\m=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\m=1\end{array}\right.$$

Vậy khi m = – 2 hoặc m = 1 thì phương trình $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=2$ vô nghiệm.

Dạng 3: Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp giải:

Để giải phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối, xét dấu các biểu thức trong giá trị tuyệt đối, đặt ẩn phụ hoặc bình phương hai vế.

+ Với phương trình có dạng |f (x)| = |g (x)| ta có thể giải bằng các phép biến đổi tương đương như sau:

|f (x)| = |g (x)| $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$

Hoặc |f (x)| = |g (x)| $\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

+ Với phương trình có dạng |f (x)| = g (x) ta có thể giải bằng các phép biến đổi tương đương như sau:

|f (x)| = g (x) $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f^2(x)=g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Hoặc |f (x)| = g (x) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải phương trình |x – 3| = |3x – 6|.

Lời giải:

Ta có: |x – 3| = |3x – 6| $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=3x-6 \\ x-3=-3x+6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x=-3 \\ 4x=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{9}{4} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right\}$.

Bài 2: Giải phương trình: |x – 3| = 7x – 12

Lời giải:

Ta chia làm hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} x-3\ge 0 \\ x-3<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x<3 \end{array}\right.$

TH1: $x \ge 3$

Khi đó |x – 3| = 7x – 12

$\Leftrightarrow$ x – 3 = 7x – 12

$\Leftrightarrow$ – 6x = – 9

$\Leftrightarrow x = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện x $\geq$ 3)

TH2: x < 3

Khi đó |x – 3| = 7x – 12

$\Leftrightarrow$ – (x – 3) = 7x – 12

$\Leftrightarrow$ – x + 3 = 7x – 12

$\Leftrightarrow$ – 8x = – 15

$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$ (thỏa mãn điều kiện x < 3)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{15}{8}\right\}$.

Dạng 4: Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Phương pháp giải:

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu đầu tiên ta cần tìm điều kiện xác định của phương trình, sau đó quy đồng mẫu số hoặc đặt ẩn phụ để đưa về phương trình có dạng phương trình bậc nhất một ẩn và giải.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải phương trình: $\frac{1}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = 4$

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

Với điều kiện xác định trên ta có:

$\frac{1}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=4$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}+\frac{4x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{4(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow$ x + 3 + 4x(x – 3) = 4(x – 3)(x + 3)

$\Leftrightarrow x+3+4x^2-12x=4(x^2-9)$

$\Leftrightarrow x+3+4x^2-12x=4x^2-36$

$\Leftrightarrow$ x + 3 – 12x = – 36

$\Leftrightarrow$ – 11x = – 39

$\Leftrightarrow x=\frac{-39}{-11}=\frac{39}{11}$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{39}{11}\right\}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x+4}$.

Lời giải:

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x+4\neq 0 \\ x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -4 \\ x\neq -3 \end{cases}$.

Với điều kiện xác định trên ta có:

$\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x+4}$

$\Leftrightarrow \frac{2(x+4)}{(x+3)(x+4)}=\frac{x+3}{(x+3)(x+4)}$

$\Rightarrow$ 2(x + 4) = x + 3

$\Leftrightarrow$ 2x + 8 = x + 3

$\Leftrightarrow$ x = – 5 (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = {–5}.

C. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải và biện luận phương trình: $m^2x + 6 = 4x + 3m$ (m là tham số).

Đáp án:

Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{m+2}$

Với m = 2 , phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Với m = –2 , phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Giải và biện luận phương trình: $m^2x + 1 = (m-1)x + m$ (m là tham số).

Đáp án:

Với mọi tham số m, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m-1}{m^2 - m + 1}$.

Bài 3: Giải và biện luận phương trình: a(x – 1) + a(2x + 1) = x + 2 (a là tham số).

Đáp án:

Với $a \neq \dfrac{1}{3}$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2}{3a-1}$.

Với $a = \dfrac{1}{3}$, phương trình vô nghiệm.

Bài 4: Xác định tham số m để phương trình $(m-1)^2 x = m + 1$ vô nghiệm.

Đáp án: m = 1

Bài 5: Xác định tham số m để phương trình $m^2(x-1) = 2(mx - 2)$ luôn có nghiệm duy nhất.

Đáp án: $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Bài 6: Xác định tham số m để phương trình $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

Đáp án: $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Bài 7: Giải phương trình: $|2x| = x - 6$.

Đáp án: Phương trình vô nghiệm hay $S = \varnothing$

Bài 8: Giải phương trình: $|-5x| - 16 = 3x$.

Đáp án: $S = \{-2; 8\}$

Bài 9: Giải phương trình: $|x - 4| = |5 - 3x|$.

Đáp án: $S=\left\{\frac{9}{4};\frac{1}{2}\right\}$

Bài 10: Giải phương trình $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}$.

Đáp án: Tập nghiệm $S = \{0; -4\}$

Bài 11: Giải phương trình $\frac{x}{x-1}=\frac{x+4}{x+1}$.

Đáp án: Tập nghiệm $S = \{2\}$

Bài 12: Giải phương trình $\frac{3}{x-2}=\frac{2x-1}{x-2}-x$.

Đáp án: Phương trình vô nghiệm hay $S = \varnothing$