# BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

## A. LÝ THUYẾT

### I. Đạo hàm tại một điểm

#### 1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và $x_0$ thuộc (a; b). Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số y= f(x) tại điểm $x_0$ và được kí hiệu là f'($x_0$). Vậy $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$

* Chú ý:

Đại lượng $\Delta x$ = x- $x_0$ được gọi là số gia của đối số tại $x_0$.

Đại lượng $\Delta y$= f(x) – f($x_0$)= f($x_0 + \Delta x$) – f($x_0$) được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy: $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

#### 2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm $x_0$ bằng định nghĩa, ta có quy tắc sau đây:

+ Bước 1: Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x_0$ tính:

$\Delta y$= f($x_0 + \Delta x$) – f( $x_0$) .

+ Bước 2: Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$..

+ Bước 3: Tìm $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y=\sqrt{2x-3}$, có $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x=2$. Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ bằng bao nhiêu.

**Lời giải**

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x_0$ = 2. Ta có:

$$\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = \sqrt{2.(2+\Delta x)-3} - \sqrt{2.2-3} = \sqrt{2\Delta x+1} - 1$$

Khi đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2\Delta x+1}-1}{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2\Delta x+1}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2\Delta x+1}-1\right).\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)}{\Delta x.\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x.\left(\sqrt{2\Delta x+1}+1\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2\Delta x+1}+1} = 1.$$

Vậy f’(2) = 1.

**3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số**

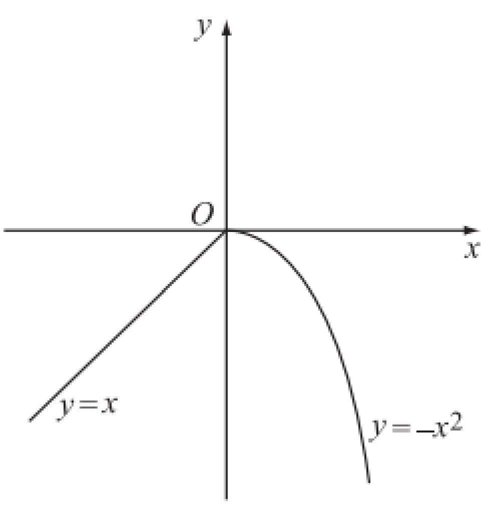
Định lý 1. Nếu hàm số y= f( x) có đạo hàm tại x0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý:

+ Nếu hàm số y= f(x) gián đoạn tại x0 thì hàm số không có đạo hàm tại điểm đó.

+ Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

**Ví dụ 2.** Chẳng hạn hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục tại x = 0 nhưng không có đạo hàm tại đó. Ta nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liền, nhưng bị gãy tại điểm O(0;0) như hình vẽ sau:




*Hình 62*

**4. Ý nghĩa của đạo hàm**

a) Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

+) Định lí: Đạo hàm của hàm số y= f(x) tại điểm $x = x_0$ là hệ số góc của tiếp tuyến $M_0T$ của đồ thị hàm số y= f( x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

+) Định lí: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là:

$y – y_0= f'(x_0) ( x- x_0)$ trong đó $y_0= f(x_0)$.

**Ví dụ 3.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 – 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ x = 3.

**Lời giải**

Bằng định nghĩa ta tính được: y'(3) = 9.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là 9.

Ta có: y(3) = 2.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm có hoành độ x = 3 là:

y = 9(x – 3) + 2 = 9x – 27 + 2 = 9x – 25.

b) Ý nghĩa vật lý của đạo hàm:

+) Vận tốc tức thời:

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: s= s(t); với s= s(t) là một hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời tại thời điểm t0 là đạo hàm của hàm số s= s(t) tại $t_0$: $v(t_0) = s'(t_0)$.

+) Cường độ tức thời:

Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: Q= Q(t) ( là hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t0 là đạo hàm của hàm số Q= Q(t) tại $t_0$: $I(t_0) = Q'(t_0)$ .

**Ví dụ 4.** Một xe máy chuyển động theo phương trình : $s(t)= t^2 + 6t+ 10$ trong đó t đơn vị là giây; s là quãng đường đi được đơn vị m. Tính vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t= 3.

**Lời giải**

Phương trình vận tốc của xe là v( t)=s' ( t)=2t+6 ( m/s)

$\Rightarrow$ Vận tốc tức thời của xe tại thời điểm t= 3 là:

V(3)= 2.3+ 6 = 12 (m/s)

Chọn A.

## II. Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số y = f(x) được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a; b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó ta gọi hàm số f': $(a;b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số y = f(x) trên khoảng (a;b), kí hiệu là y' hay f'(x).

**Ví dụ 5.** Hàm số y = $x^2$ – 2x có đạo hàm y' = 2x – 2 trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Hàm số $y=\frac{2}{x}$ có đạo hàm $y'=-\frac{2}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

## B. BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho hàm số: $y=f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}$ (C)

a) Hãy tính đạo hàm bằng định nghĩa của hàm số đã cho tại x = 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số (C) tại điểm A(1;-2).

**Lời giải**

a) Tập xác định của hàm số đã cho là: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x_0$ = 1. Ta có:

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\frac{(1+\Delta x)^2+1+\Delta x}{1+\Delta x-2}-\frac{1^2+1}{1-2}$$

$$=\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x+1+1+\Delta x}{\Delta x-1}+2$$

$$=\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x+2}{\Delta x-1}+2$$

$$= \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 2}{\Delta x - 1} + \frac{2\Delta x - 2}{\Delta x - 1}$$

$$= \frac{(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x - 1}$$

Khi đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x - 1}}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta x(\Delta x + 5)}{\Delta x - 1}}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x + 5}{\Delta x - 1}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + 5}{\Delta x - 1} = -5.$$

Vậy f’(1) = - 5.

b) Bằng định nghĩa ta tính được: y’(1) = -5.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là -5.

Ta có: y(1) = - 2.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm A(1;-2) là:

y = -5(x – 1) - 2 = -5x + 5 - 2 = -5x + 3.

**Bài 2.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ khi } x \geq 0 \\ (x+1)^2 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại x = 0 nhưng liên tục tại điểm đó.

**Lời giải**

Ta có f(0) = 1.

Trước hết, ta tính giới hạn bên phải của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Ta có:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2. \text{ (với } x \neq 0)$$

Giới hạn bên trái của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, ta có:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2.$$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Điều này chứng tỏ hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 0.

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)^2=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)^2=1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)^2=1$

Do đó hàm số liên tục tại x = 1.

Vậy hàm số liên tục tại x = 1 nhưng không có đạo hàm tại x = 1.

**Bài 3.** Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số Q(t) = $2t^2$ + t, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm t = 4s.

**Lời giải**

Cường độ dòng điện tại t = 4 là: I(4) = Q’(4).

Đạo hàm của hàm Q(t) tại t = 4 bằng 17.

Vậy cường độ dòng điện tại t = 4 là 17 A.

**Bài 4.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số:

a) $y=\sqrt{2x+1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$;

b) y = $x^3$ + 2x tại điểm có hoành độ bằng  2.

**Lời giải**

a) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x_0+1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x_0+1}\right)}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x_0+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 4 \Rightarrow y(4) = \sqrt{2.4+1} = 3$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số đã cho là:

$$y = \frac{1}{3}(x-4) + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + 3 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x - (2^3 + 2.2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x - 12}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+6)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x^2+2x+6) = 14$$

Ta có y(2) = 12.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho là:

y = 14(x – 2) + 12 = 14x – 28 + 12 = 14x – 16.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho là y = 14x – 16.