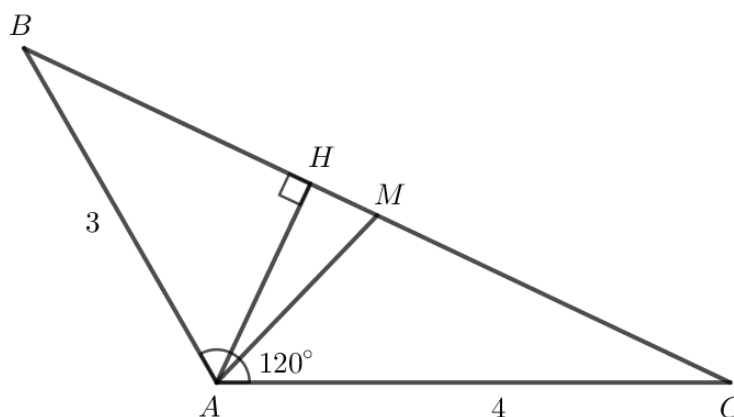


Bài tập cuối chương IV

Bài 1 trang 99 Toán lớp 10 Tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 120^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

- a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;
- b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;
- c) Diện tích của tam giác;
- d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;
- e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ với M là trung điểm của BC.

Lời giải:



a) Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = 37$$

$$\Rightarrow BC \approx 6$$

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{4 \cdot \sin 120^\circ}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow B \approx 35^\circ$$

b) Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\Rightarrow 2R = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R \approx 3.$$

c) Nửa chu vi của tam giác ABC là: $\frac{3+4+6}{2} = 6,5.$

Diện tích của tam giác ABC là:

$$\sqrt{6,5 \cdot (6,5 - 3) \cdot (6,5 - 4) \cdot (6,5 - 6)} \approx 5.$$

d) Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{2} AH \cdot BC = 5$$

$$\Rightarrow AH \cdot 6 = 10$$

$$\Rightarrow AH = \frac{5}{3} \approx 2.$$

$$\text{d) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -6.$$

Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2$$

$$= \frac{7}{2}$$

Bài 2 trang 99 Toán lớp 10 Tập 1: Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2,$$

$$B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ.$$

Lời giải:

$$a) A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$$

$$A = [\sin(90^\circ - 70^\circ) + \sin 70^\circ]^2 + [\cos(90^\circ - 70^\circ) + \cos(180^\circ - 70^\circ)]$$

$$A = (\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)^2$$

$$A = \cos^2 70^\circ + 2.\cos 70^\circ.\sin 70^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ - 2.\cos 70^\circ.\sin 70^\circ + \cos^2 70^\circ$$

$$A = 2(\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ)$$

$$A = 2.1$$

$$A = 2$$

Vậy $A = 2$.

$$b) B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ$$

$$= \tan(90^\circ - 70^\circ) + \cot(90^\circ - 70^\circ) + \tan(180^\circ - 70^\circ) + \cot(180^\circ - 70^\circ)$$

$$= \cot 70^\circ + \tan 70^\circ + (-\tan 70^\circ) + (-\cot 70^\circ)$$

$$= (\cot 70^\circ - \cot 70^\circ) + (\tan 70^\circ - \tan 70^\circ)$$

$$= 0$$

Vậy $B = 0$.

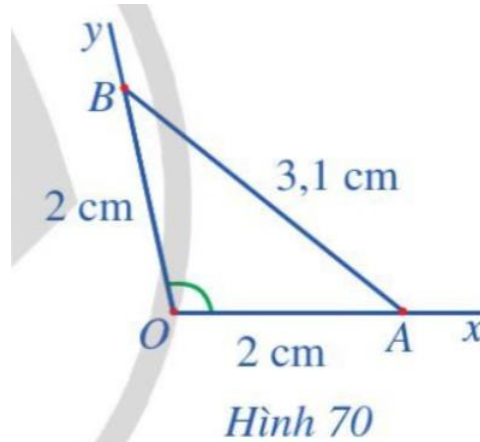
Bài 3 trang 99 Toán lớp 10 Tập 1: Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.

Bạn Hoài vẽ góc xOy và đồ bạn Đông làm thế nào để có thể biết được số đo góc của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau (Hình 70):

- Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và Oy sao cho $OA = OB = 2 \text{ cm}$;
- Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3,1 \text{ cm}$.

Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos xOy$, từ đó suy ra độ lớn góc xOy .

Em hãy cho biết số đo góc xOy mà bạn Đông tính được bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải:

Áp dụng định lí côsin vào tam giác OAB có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos O$$

$$\Rightarrow \cos O = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB}$$

$$\Rightarrow \cos O = \frac{2^2 + 2^2 - 3,1^2}{2.2.2}$$

$$\Rightarrow \cos O = -\frac{161}{800}$$

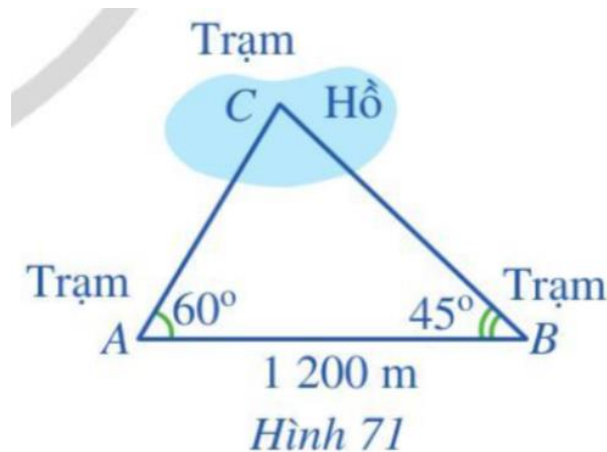
$$\Rightarrow O \approx 102^\circ.$$

Vậy bạn Đông tính được xOy bằng 102° .

Bài 4 trang 99 Toán lớp 10 Tập 1: Có hai trạm quan sát A và B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và từ B đến C, người ta làm như sau (Hình 71):

- Đo góc BAC được 60° , đo góc ABC được 45° ;
- Đo khoảng cách AB được 1 200 m.

Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải:

Ba vị trí A, B, C tạo thành ba đỉnh của tam giác ABC.

Trong tam giác ABC có $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

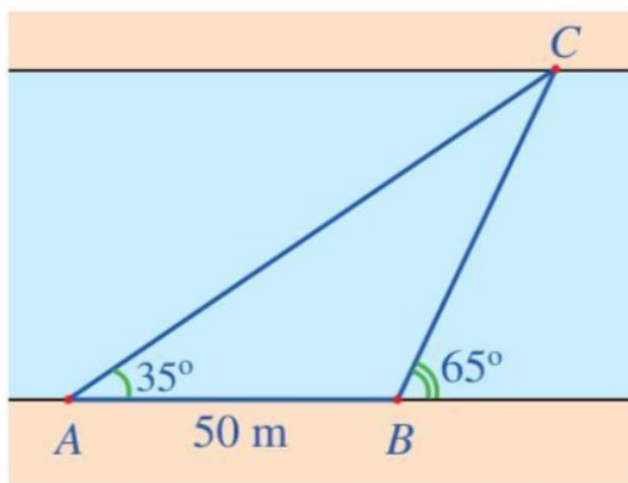
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$$

$$\text{Do đó } BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{1200 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 1\,076 \text{ m};$$

$$CA = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{1200 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 878 \text{ m.}$$

Vậy khoảng cách từ trạm C đến trạm A và trạm B lần lượt khoảng 878 m và 1 076 m.

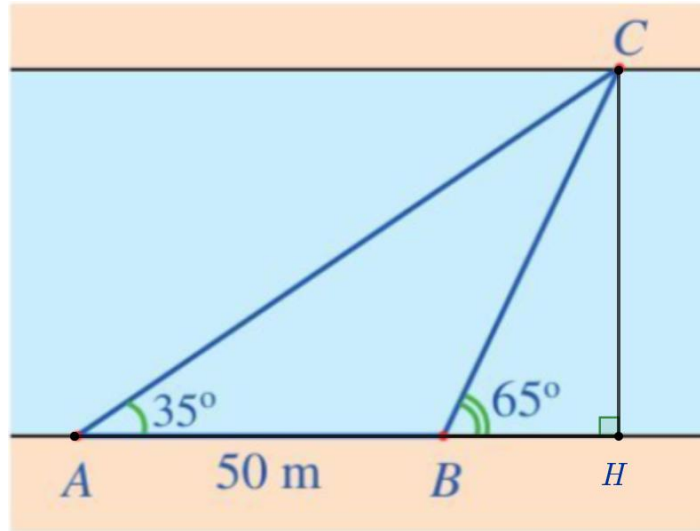
Bài 5 trang 99 Toán lớp 10 Tập 1: Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).



Hình 72

Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50 \text{ m}$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn (Hình 72). Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải:



Gọi H là chân đường cao kẻ từ C đến AB.

Khi đó độ rộng của khúc sông là CH.

Ta có CBH là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC nên $CBH = BAC + BCA$.

Do đó $BCA = CBH - BAC = 65^\circ - 35^\circ = 30^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{50 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 57,4 \text{ m.}$$

Tam giác CBH vuông tại H nên:

$$\sin CBH = \frac{CH}{CB}$$

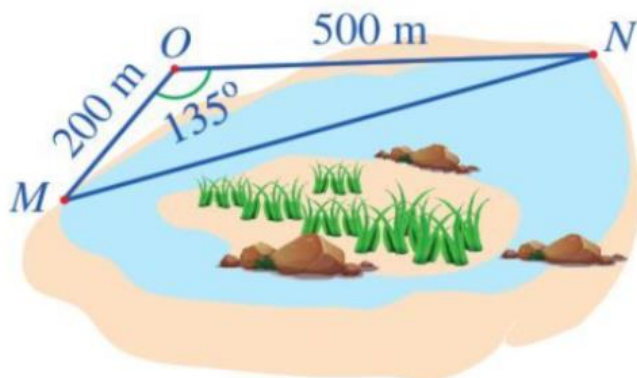
$$\Rightarrow CH = CB \cdot \sin CBH = 57,4 \cdot \sin 65^\circ$$

$$\Rightarrow CH \approx 52 \text{ m}$$

Vậy độ rộng của khúc sông khoảng 52 m.

Bài 6 trang 100 Toán lớp 10 Tập 1: Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được (Hình 73). Sau khi đo, ta có $OM = 200 \text{ m}$, $ON = 500 \text{ m}$, $\angle MON = 135^\circ$.

Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 73

Lời giải:

Ba vị trí O, M, N tạo thành ba đỉnh của tam giác OMN.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác OMN có:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos \angle O$$

$$\Rightarrow MN^2 = 200^2 + 500^2 - 2 \cdot 200 \cdot 500 \cdot \cos 135^\circ$$

$$\Rightarrow MN^2 \approx 431\,421 \text{ m}$$

$$\Rightarrow MN \approx 657 \text{ m.}$$

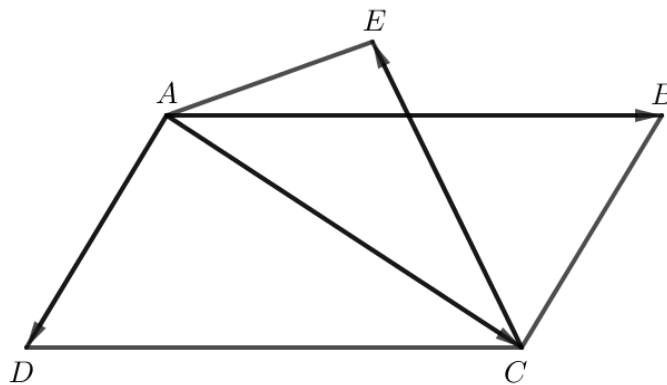
Vậy khoảng cách giữa hai điểm M và N khoảng 657 m.

Bài 7 trang 100 Toán lớp 10 Tập 1: Chứng minh:

- a) Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì;
- b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$ với M, N là hai điểm bất kì;
- c) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

Lời giải:

a)

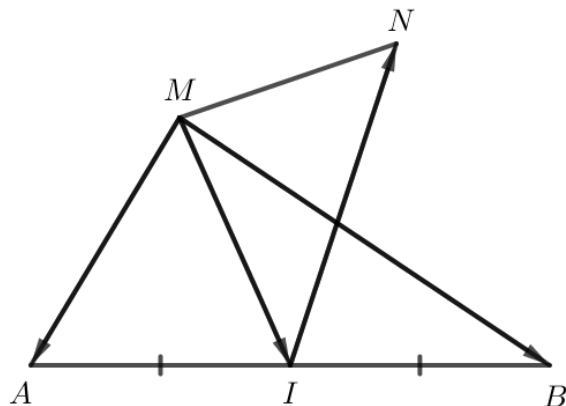


Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.

b)

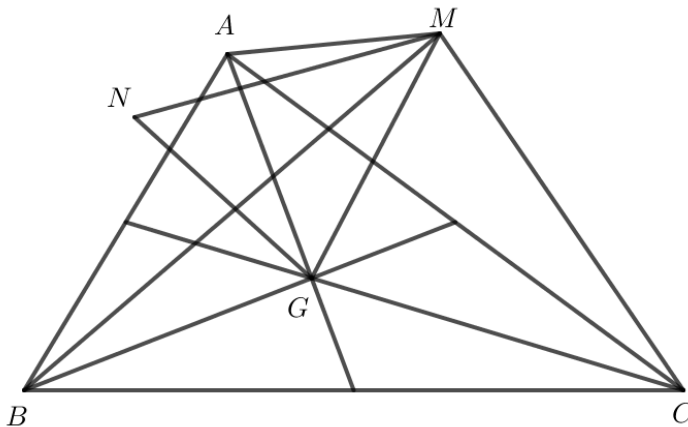


Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IN} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}) = 2\overrightarrow{MN}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$.

c)

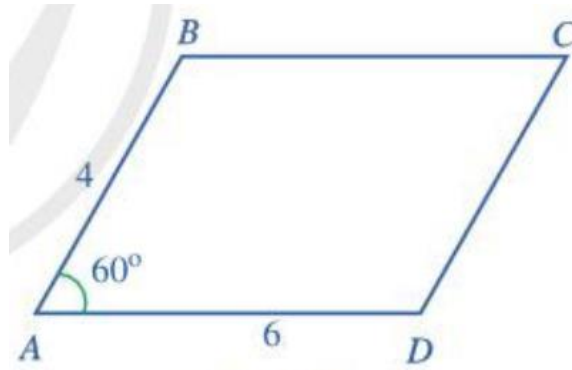


Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MN}) = 3\overrightarrow{NG}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$.

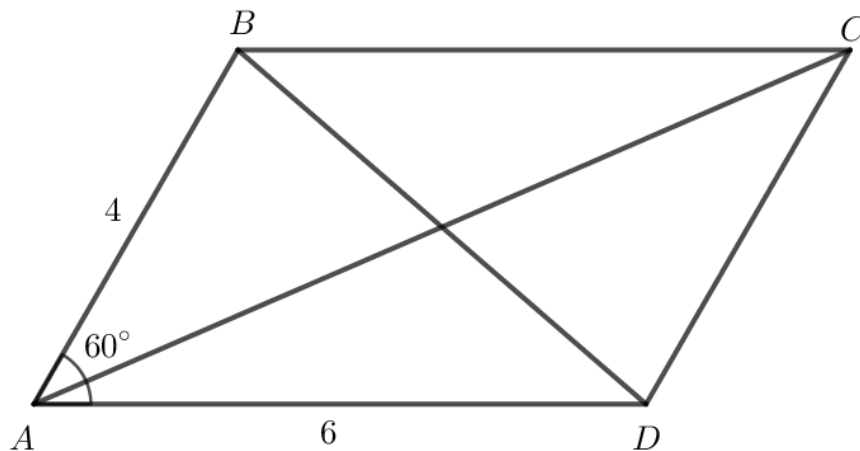
Bài 8 trang 100 Toán lớp 10 Tập 1: Cho hình bình hành ABCD có $AB = 4$, $AD = 6$, $\angle BAD = 60^\circ$ (Hình 74).



Hình 73

- Biểu thị các vector \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AC} theo \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} .
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính độ dài các đường chéo BD, AC.

Lời giải:



- Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

$$= 4 \cdot 6 \cdot \cos \text{BAD} = 24 \cdot \cos 60^\circ = 12.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4^2 + 12 = 28.$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= 6^2 - 4^2 = 20.$$

c) Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABD có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \text{BAD}$$

$$\Rightarrow BD^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BD^2 = 28$$

$$\Rightarrow BD = 2\sqrt{7}$$

Do ABCD là hình bình hành nên $\text{BAD} + \text{ADC} = 180^\circ$.

Do đó $\text{ADC} = 180^\circ - \text{BAD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ADC có:

$$CD^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \text{ADC}$$

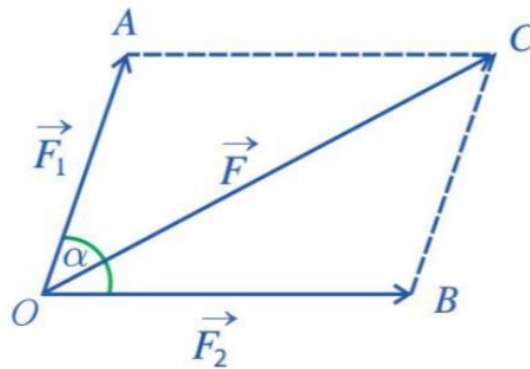
$$\Rightarrow CD^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow CD^2 = 76$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{19}$$

Vậy $BD = 2\sqrt{7}$; $CD = 2\sqrt{19}$.

Bài 9 trang 100 Toán lớp 10 Tập 1: Hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (Hình 75). Lập công thức tính cường độ của hợp lực \vec{F} làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 làm cho vật di chuyển).



Hình 75

Lời giải:

Do AOBC là hình bình hành nên $\angle AOB + \angle OBC = 180^\circ$.

Do đó $\angle OBC = 180^\circ - \alpha$.

Ta có $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác OBC có:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2 \cdot OB \cdot BC \cdot \cos \angle OBC$$

$$\Rightarrow \vec{F}^2 = \vec{F}_2^2 + \vec{F}_1^2 - 2 \cdot \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{F}^2 = \vec{F}_2^2 + \vec{F}_1^2 - 2 \cdot |\vec{F}_2| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \cos \alpha \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \left| \vec{F} \right| = \sqrt{\vec{F}_2^2 + \vec{F}_1^2 - 2 \cdot \left| \vec{F}_2 \right| \cdot \left| \vec{F}_1 \right| \cdot \cos \alpha \cdot \cos (180^\circ - \alpha)}.$$