Bài tập Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì :

A. a vuông góc với mặt phẳng (P)

B. a không vuông góc với mặt phẳng (P)

C. a không thể vuông góc với mặt phẳng (P)

D. a có thể vuông góc với mặt phẳng (P)

Lời giải:

Đáp án: D

Phương án A sai vì có thể có trường hợp $a \perp b \subset (P)$; $a \perp c \subset (P)$; $b // c$

Phương án B sai vì có thể xảy ra trường hợp $a \perp b \subset (P)$; $a \perp c \subset (P)$; $b \cap c \neq \emptyset$, khi đó $a \perp (P)$.

Bài 2: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$

B. nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$

C. nếu $a \subset (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$

D. nếu $a \subset (P)$, $a \subseteq (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$

Lời giải:

Đáp án:

Bài 3: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. một đường thẳng và một mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải:

Đáp án: B

Phương án A sai vì có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó vuông góc với nhau

Phương án C sai vì có thể xảy ra trường hợp đường thẳng thuộc mặt phẳng

Phương án D sai vì các đường thẳng đó có thể không đồng phẳng

Bài 4: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. hai đường thẳng cùng vuông góc môt mặt phẳng thì song song hoặc trùng nhau.

B. hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải:

Đáp án: C

Bài 5: Các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì:

A. thuộc một mặt phẳng

B. vuông góc với nhau

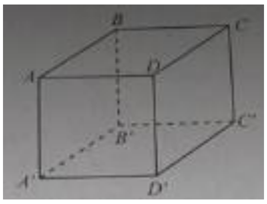
C. song song với một mặt phẳng

D. song song với nhau

Lời giải:

Đáp án: C

Bài 6: Cho hình lập phương ABCD. A’B’C’D’.



a) AA’ vuông góc với mặt phẳng.

A. (CDD’C’)

B. (BCD)

C. (BCC’B’)

D. (A’BD)

b) AC vuông góc với mặt phẳng.

A. (CDD’C’)

B. (A’B’C’D’)

C. (BDD’B’)

D. (A’BD)

c) Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (A’BD) là:

A. trung điểm của BD

B. trung điểm của A’B

C. trung điểm của A’D

D. tâm O của tam giác BDA’

Lời giải:

Đáp án: a - B, b - C, c - D

b. Phương án A sai vì AC không vuông góc với CD ⊂ (CDD’C’)

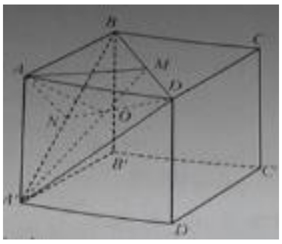
Phương án B sai vì AC // (A’B’C’D’)

Phương án C đúng vì AC ⊥ BD , AC⊥ BB’ và BD, BB’ ⊂ (BDD’B’)

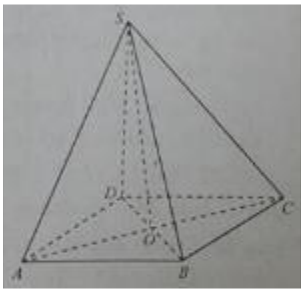
c. Phương án D đúng vì BD ⊥ (AMA') bởi BD ⊥ AM và BD ⊥ A’M ⇒ BD ⊥ AO

BA’ ⊥ (AND) do BA’ ⊥ DN và A’B ⊥ AN ⇒ A’B ⊥ AO

AO ⊥ (A’BD) ⇒ O là hình chiếu của A trên (A’BD).



Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thoi tâm O và SA = SC, SB = SD



a) Lời giải nào sau đây là đúng?

Chứng minh rằng SO ⊥ (ABCD)

A. $\begin{cases} AC \perp BD (\text{vì } ABCD \text{ là hình thoi}) \\ \text{vì } DO \text{ là hình chiếu của } SO \text{ trên } (ABCD) \text{nên} => SO \perp (ABCD) \\ SO \perp AC (\text{theo định lí ba đường vuông góc}) \end{cases}$

B. $\begin{cases} SA = SC, SB = SD \text{ và } ABCD \text{ là hình thoi} \\ => S.ABCD \text{ là hình chóp đều} \end{cases} => SO \perp (ABCD)$

C. $\begin{cases} SO \perp BD (\text{vì tam giác } SBD \text{ cân tại } S) \\ SO \perp AC (\text{vì tam giác } SAC \text{ cân tại } S) \end{cases} => SO \perp (ABCD)$

D. Cả ba phương án trên đều sai.

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng

A. (SAC)

B. (SBD)

C. (ABCD)

D. (SDC)

Lời giải:

Đáp án: a - C, b - B

a) Phương án A sai vì DO không phải là hình chiếu của SO trên (ABCD). Phương án B sai vì SA và SC, SB và SD bằng nhau từng đôi một nên hình chóp S.ABCD không phải là hình chóp đều. Phương án C đúng.

b) Loại phương án A và C vì AC thuộc (SAC) và (ABCD). Phương án B đúng vì: $AC \perp BD$ (hai đường chéo hình thoi) và $AC \perp SO$(vì tam giác SAC cân tại S), nên $AC \perp (SBD)$.

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O và SA = SC, SB= SD.

a) Đường thẳng DB không vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. AC

B. SA

C. SB

D. SC

b) Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng

A. SA

B. SB

C. SC

D. SO

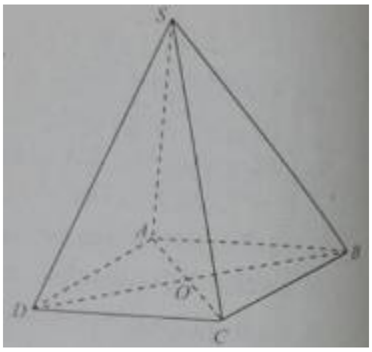
Lời giải:

Đáp án: a - C, b - D

a) Dễ thấy BD ⊥ AC (tính chất hình thoi), BD ⊥ SC và BD ⊥ SA và DB ⊥ (SAC). Vì vậy phương án đúng là C.

b) Phương án đúng là D: BC ⊥ SO vì SO ⊥ (ABCD) (xem ví dụ 1)

Bài 9: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông và SA ⊥ (ABCD)



a) Tam giác SBC là:

A. Tam giác thường

B. Tam giác cân

C. Tam giác đều

D. Tam giác vuông

b) Tam giác SOD là:

A. Tam giác thường

B. Tam giác cân

C. Tam giác đều

D. Tam giác vuông

Lời giải:

Đáp án: a - D, b - D

a) Tam giác SBC là tam giác vuông tại B vì : AB là hình chiếu của SB trên (ABCD), mà BC ⊥ AB (do ABCD là hình vuông) ⇒ BC ⊥ SB (theo định lí ba đường vuông góc) ⇒ tam giác SBC là tam giác vuông

b) Tam giác SDO là tam giác vuông tại O vì AO là hình chiếu của SO trên (ABCD) , mà DO ⊥ AO (do ABCD là hình vuông) ⇒ DO ⊥ SO (theo định lí ba đường vuông góc) ⇒ tam giác SOD là tam giác vuông.

Bài 10: Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh bằng a, AB vuông góc với (BCD) và AB = 2a.

a) Gọi M là trung điểm của AD và K là trung điểm của BD

Góc giữa CM với mặt phẳng (BCD) là:

A. $\widehat{BCM}$ B. $\widehat{DCM}$

C. $\widehat{KCM}$ D. $\widehat{ACM}$

b) Tang của góc giữa CM với mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $2\sqrt{3}$ D. không xác định

c) Tang của góc giữa AC với mặt phẳng (ABD) bằng:

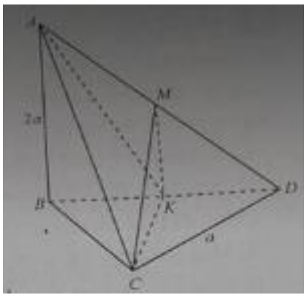
A. $\sqrt{5}$ B. 1

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$ D. không xác định

d) Tang của góc giữa AK với mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{65}}$　　D. $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{3}}$



Lời giải:

Đáp án: a - C, b - A, c - C, d - C

a) Loại phương án A và B vì BC và CD không phải là hình chiếu của CM trên (BCD)

Phương án C đúng vì :

$$\begin{cases} MK//AB \\ AB \perp (BCD) \end{cases} => MK \perp (BCD)$$

⇒ CK là hình chiếu của CM trên mặt phẳng (BCD)

$$=> \left(\widehat{CM, (BCD)}\right) = \widehat{KCM}$$

Góc giữa CM và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{KCM}$

$$DK = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$$

$$CK^2 = CD^2 - DK^2 \Rightarrow CK = \sqrt{CD^2 - DK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

Phương án đúng là A vì :

$$\tan\widehat{KCM} = \frac{MK}{CK} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Góc giữa AC với mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{KAC}$ vì CK ⊥ (ABD) nên AK là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (ABD).

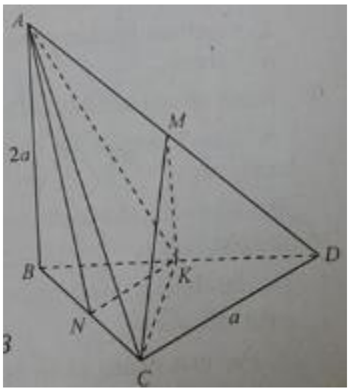
Phương án C đúng vì :

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 \Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 + BK^2}$$

$$AK = \sqrt{(2a)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\tan\widehat{KAC} = \frac{CK}{AK} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{51}}{17}$$

d) Để xác định giữa AK với mặt phẳng (ABC) từ K dựng KN ⊥ BC.



⇒ KN ⊥ (ABC) vì KN vuông góc với BC và AB

Gọi P là trung điểm của BC, tam giác BCD đều nên DP vuông góc BC.

Lại có: KN ⊥ BC nên DP // KN

Vì K là trung điểm của BD nên N là trung điểm của BP

Ta có: $BP = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}; BN = \frac{1}{2}BP = \frac{a}{4}$

$$DP = \frac{a\sqrt{3}}{2}; NK = \frac{DP}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \frac{a\sqrt{65}}{4};$$

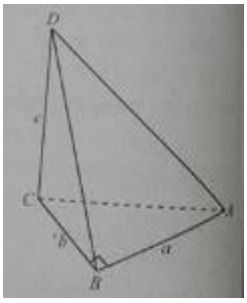
⇨ $(\widehat{AK, ABC}) = \widehat{NAK}$

⇨ $\tan \widehat{NAK} = \frac{NK}{AN} = \frac{a\sqrt{3}}{4} : \frac{a\sqrt{65}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{65}}$

Vậy phương án đúng là C.

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho hình tứ diện ABCD, có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và AB = a, BC = b, CD = c.



a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

AB ⊥ (ACD)

BC ⊥ (ACD)

CD ⊥ (ABC)

AD ⊥ (BCD)

b) Độ dài AD bằng?

c) Điểm cách đều 4 điểm A, B, C, D là?

Lời giải:

Phương án A sai vì chỉ có AB ⊥ CD

Phương án B sai vì chỉ có BC ⊥ CD

Phương án C đúng vì:

$$\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC)$$

Phương án D sai vì AD không vuông góc với đường thẳng nào thuộc mặt phẳng (BCD)

b. Ta có $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

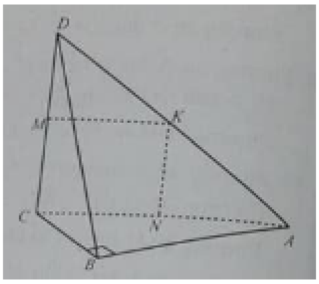
$$\text{Vì } \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \\ BC; CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$$

$$\Rightarrow AB \perp BD$$

Tam giác ABD vuông tại B nên

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

c. xem hình bên.



CD ⊥ (ABC) vì CD ⊥ BC và AB ⊥ CD. AB ⊥ (BCD) vì AB ⊥ BC và AB ⊥ CD

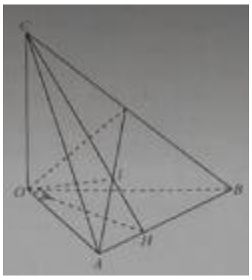
Phương án A sai vì tam giác ABC không vuông góc tại C nên trung điểm của AB không cách đều ba điểm A, B, C

Phương án B sai vì tam giác ABC không vuông góc tại A nên trung điểm của AB không cách đều ba điểm A, B, C

Phương án C đúng vì: tam giác ACD vuông góc tại C nên trung điểm K của AD cách đều ba điểm A, C, D; tam giác ABD vuông góc tại B nên trung điểm K của AD cách đều ba điểm A, B, D

Phương án D sai vì tam giác CBD không vuông góc tại B nên trung điểm của Cd không cách đuề ba điểm B, C, D

Bài 2: Cho hình tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi I là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC).



a) Tam giác ABC là?

b) Điểm I là?

Lời giải:

a. Giả sử tam giác ABC vuông tại A. khi đó B có hai đường thẳng BO và BA cùng vuông góc với mặt phẳng (OCA). Điều này vô lí, do đó tam giác ABC không thể là tam giác vuông. Từ O hạ OH ⊥ AB ⇒ CH ⊥ AB (theo định lí ba đường vuông góc). Vì điểm H nằm giữa hai điểm A và B nên tam giác ABC không thể có góc tù. Suy ra ABC có ba góc nhọn

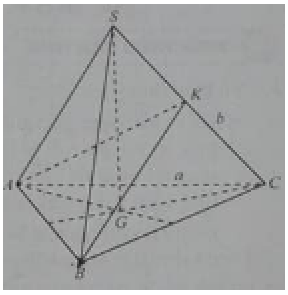
b. giả sử AI và CI cắt CB tại K và H

$$\begin{cases} AB \perp OI (\text{vì } OI \perp (ABC) \supset AB) \\ AB \perp OC (\text{vì } OC \perp (OAB) \supset AB) \end{cases}$$

⇒ AB ⊥ (OCH) ⇒ AB ⊥ CH

Chứng mình tương tự ta cũng có CB ⊥ AK ⇒I là trực tâm của tam giác ABC

Bài 3: Cho hình chop S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a và SA= SB = SC = b. gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC, cắt SC tại K.



a) Độ dài của SG là?

b) Điều kiện để điểm K nằm giữa hai điểm S và C là?

c) Nếu $a = b\sqrt{2}$ thì thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P) là?

Lời giải:

a. Giả sử H là chân đường vuông góc hạ tự S xuống mặt phẳng (ABC). Khi đó, do SA = SB = SC ⇒ HA = HB = HC ⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ⇒ H ≡ G. Vì tam giác ABC đều cạnh a nên:

GC $\frac{a\sqrt{3}}{3} => SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$

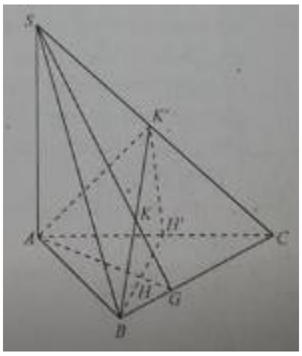
b. điểm K sẽ nằm giữa hai điểm S và C khi

$\widehat{ASC} < 90^0 \ hay \ a < b\sqrt{2}$

c. Nếu $a = b\sqrt{2}$ thì Sa, SB, SC đôi một vuông góc ⇒ SC ⊥ (SAB)

Do đó (P) ≡ (SAB), hay thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác SAB

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.



a) Mặt phẳng (BKH) vuông góc với đường thẳng nào?

b) Đường thẳng HK vuông góc với mặt phẳng nào?

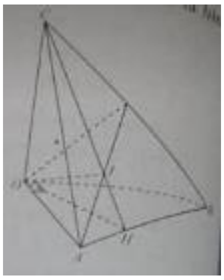
Lời giải:

a. Vì K là trực tâm của ΔSBC nên BK ⊥ SC (1)

Vì H là trực tâm của ΔABC nên BH ⊥ AC. Mặt khác BH ⊥ SA ⊥ (ABC) nên BH ⊥ (SAC) ⇒ BH ⊥ SC   (2)

b. Từ (1) va (2) suy ra SC ⊥ (BHK). Vì BC ⊥ (ASG) ⇒ BC ⊥ HK và SC ⊥ (BHK) ⇒ SC ⊥ HK. Suy ra HK ⊥ (SBC)

Bài 5: Cho hình tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Nếu I là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) thì I là?



Lời giải:

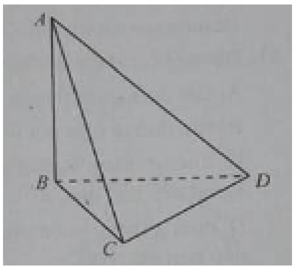
Giả sử AI và CI cắt CB và AB tại K và H

$$\begin{cases} AB \perp OI (\text{vì } OI \perp (ABC) \supset AB) \\ AB \perp OC (\text{vì } OC \perp (OAB) \supset AB) \end{cases}$$

⇒ AB ⊥ (OCH) ⇒ AB ⊥ CH

Chứng minh tương tự ta cũng có CB ⊥ AK ⇒ I là trực tâm của tam giác ABC

Bài 6: Cho hình tứ diện ABCD có ba cạnh AB. BC, CD đôi một vuông góc.



a) Đường thẳng AB vuông góc với?

b) Đường vuông góc chung của AB và CD là?

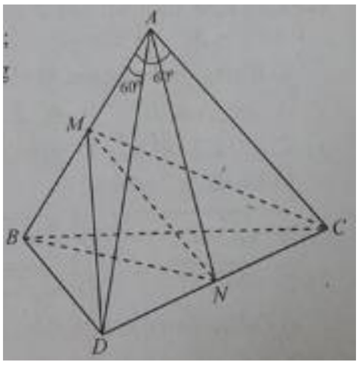
Lời giải:

a. AB ⊥ (BCD) vì AB ⊥ BC và AB ⊥ CD

b. Phương án A sai vì AB và Cd không vuông góc với nhau

Phương án B đúng vì BC⊥ AB (do AB ⊥ (BCD); BC ⊥ CD (giả thiết)

Bài 7: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD; góc BAC bằng góc BAD bằng 60^0. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD.



Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng?

Lời giải:

Phương án A sai vì nếu CD ⊥ (ABD) thì CD ⊥ AD. Nhưng tam giác ACD cân tại A nên CD không thể vuông góc với AD

Phương án B sai vì tương tự như trên thì CD không thể vuông góc với AC

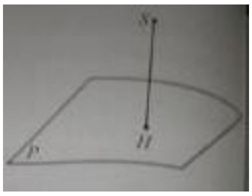
Phương án C đúng vì CD ⊥ AN (AN là đường trung tuyến của tam giác cân CAD tại A) và CD ⊥ MN ⇒ CD ⊥ (ABN)

Phương án D sai vì CD không vuông góc với MD do chứng minh trên.

Bài 8: Cho một điểm S có hình chiếu H trên mặt phẳng (P).

a) Với điểm M bất kì trong (P) ta có?

b) Với hai điểm M và N trong (P) sao cho SM ≤SN, ta có:



Lời giải:

a. Phương án A sai vì khi M trùng với H thì SM = SH

Phương án B đúng vì khi M trùng với H thì SM = SH; khi M ≠ H thì SM > SH

Phương án C, D sai vì không bao giờ xảy ra trường hợp SM < SH

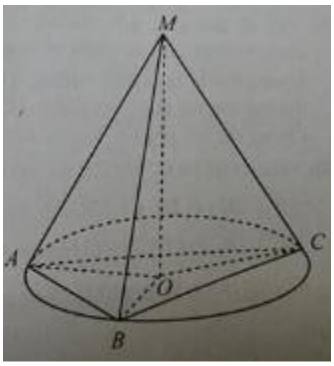
Bài 10: Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là?

Lời giải:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, MO là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O.

Ta có: OA, OB, OC lần lượt là hình chiếu của các đường xiên MA, MB, MC. Vì OA = OB = OC

⇒ MA = MB = MC. Vậy đường thẳng MO là tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC.



III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (α), người ta phải làm như thế nào?

Bài 2 Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a, b. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu a // (α), b ⊥(α) thì a ⊥b.

b) Nếu a // (α), b ⊥a thì b ⊥(α).

c) Nếu a // (α), b // (α) thì b // a.

d) Nếu a ⊥(α), b ⊥a thì b ⊥(α).

Bài 3 Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI)

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Bài 4 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O và có SA = SB = SC = SD. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài 5 Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB và OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) H là trực tâm của tam giác ABC

Bài 6 Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (\alpha)$

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

Bài 7 Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a) $BD \perp SC$

b) $IK \perp mp(SAC)$

Bài 8 Cho tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Trong mp(SAB), kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$.

Bài 9 Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$, $AM \perp (SBC)$

b) $SB \perp AN$

Bài 10 Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó.

Bài 11 Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau;

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

Bài 12 Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI)

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).