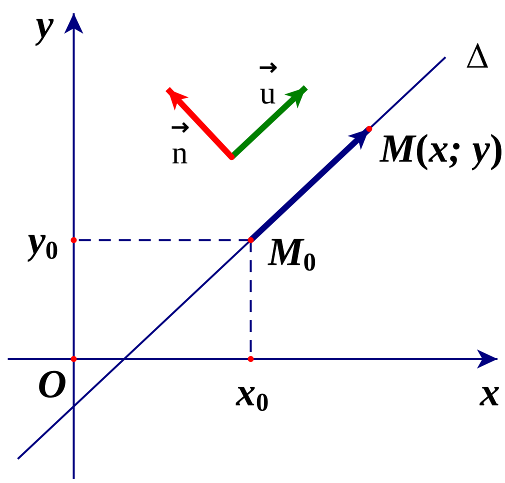
Bài 2. Đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường thẳng

1.1. Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng



Vectơ $\vec{u}$ được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

Chú ý:

• Nếu đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ thì Δ sẽ nhận $\vec{u} = (b; -a)$ hoặc $\vec{u} = (-b; a)$ là một vectơ chỉ phương.

• Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

• Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của Δ.

Ví dụ:

a) Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$. Tìm một vectơ pháp tuyến của d.

b) Cho đường thẳng d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;7)$. Tìm ba vectơ chỉ phương của d'.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

Suy ra d cũng có vectơ chỉ phương $3\vec{u} = (2;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$.

Vậy d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$.

b)

• d' có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;7)$.

Suy ra d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-7;3)$; $-\vec{u} = (7;-3)$.

• d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-7;3)$.

Suy ra d' cũng có vectơ chỉ phương $2\vec{u} = (-14;6)$.

Vậy ba vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u} = (-7;3)$; $-\vec{u} = (7;-3)$; $2\vec{u} = (-14;6)$.

1.2. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, ta gọi:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (\text{với } u_1^2 + u_2^2 > 0, t \in \mathbb{R})$$

là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Chú ý: Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ và ngược lại.

Ví dụ:

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M(1; 3) và nhận $\vec{u} = (2;9)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Trong các điểm A(2; 5), B(3; 12), C(–4; 6) thì điểm nào thuộc đường thẳng d?

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;9)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 9t \end{cases}$.

b)

• Thay tọa độ điểm A vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ 5 = 3 + 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{2}{9} \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Khi đó A(2; 5) ∉ d.

• Thay tọa độ điểm B vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 12 = 3 + 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Khi đó B(3; 12) ∈ d.

• Thay tọa độ điểm C vào phương trình tham số của đường thẳng d, ta được:

$$\begin{cases} -4 = 1 + 2t \\ 6 = 3 + 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-5}{2} \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Khi đó C(–4; 6) ∉ d.

Vậy chỉ có điểm B thuộc đường thẳng d.

1.3. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng: ax + by + c = 0, với a và b không đồng thời bằng 0.

Chú ý:

• Mỗi phương trình ax + by + c = 0 (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$.

• Khi cho phương trình đường thẳng ax + by + c = 0, ta hiểu a và b không đồng thời bằng 0.

Ví dụ: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm H(2; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; -1)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm K(5; –8) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -4)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M(6; 3), N(9; 1).

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm H(2; 1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; -1)$ nên ta có phương trình tổng quát của Δ là: –2(x – 2) – 1(y – 1) = 0

⇔ –2x – y + 5 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là –2x – y + 5 = 0.

b) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -4)$ nên Δ nhận $\vec{n} = (4; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Đường thẳng Δ đi qua điểm K(5; –8) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 3)$ nên ta có phương trình tổng quát của Δ là: 4(x – 5) + 3(y + 8) = 0

⇔ 4x + 3y + 4 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là 4x + 3y + 4 = 0.

c) Với M(6; 3), N(9; 1) ta có: $\overrightarrow{MN} = (3; -2)$.

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (3; -2)$ nên Δ nhận $\vec{n} = (2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(6; 3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 3)$ nên phương trình tổng quát của Δ là: 2(x – 6) + 3(y – 3) = 0

⇔ 2x + 3y – 21 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của Δ là 2x + 3y – 21 = 0.

Nhận xét:

• Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ có dạng:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \text{ (với } x_B \neq x_A,\ y_B \neq y_A\text{)}.$$

• Nếu đường thẳng Δ cắt trục Ox và Oy tại A(a; 0) và B(0; b) (a, b khác 0) thì phương trình Δ có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1).$$

Phương trình (1) còn được gọi là *phương trình đoạn chắn.*

Ví dụ:

+) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm P(2; 5), Q(1; 8).

Suy ra phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-5}{8-5} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{3}$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{3}$.

+) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm X(–4; 0) và Y(0; 5).

Vậy phương trình đoạn chắn của Δ: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$.

1.4. Liên hệ giữa đồ thị hàm số bậc nhất và đường thẳng

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = kx + y_0$ ($k \neq 0$) là một đường thẳng d đi qua điểm $M(0; y_0)$ và có hệ số góc k. Ta có thể viết: $y = kx + y_0 \Leftrightarrow kx - y + y_0 = 0$.

Như vậy, đồ thị hàm bậc nhất $y = kx + y_0$ là một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(k;-1)$ và có phương trình tổng quát là $kx - y + y_0 = 0$. Đường thẳng này không vuông góc với Ox và Oy.

Ngược lại, cho đường thẳng d có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ với a và b đều khác 0, khi đó ta có thể viết: $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Leftrightarrow y = kx + y_0$.

Như vậy d là đồ thị của hàm bậc nhất $y = kx + y_0$ với hệ số góc $k=-\frac{a}{b}$ và tung độ gốc $y_0=-\frac{c}{b}$.

Ví dụ:

+) Cho đường thẳng d có phương trình: $y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$.

Ta suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n}=(2;-1)$.

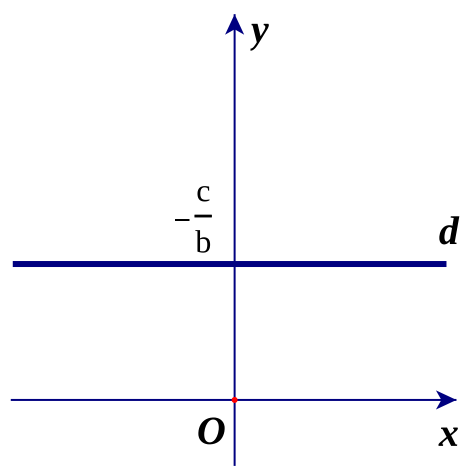
+) Cho đường thẳng d’ có phương trình: x + 5y – 2 = 0 $\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.

Khi đó ta có d là đồ thị của hàm bậc nhất y = kx + y_0, với hệ số góc $k = -\frac{1}{5}$ và tung độ gốc $y_0 = \frac{2}{5}$.

Chú ý:

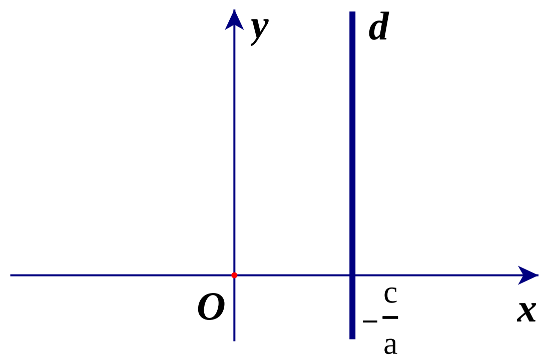
• Nếu a = 0 và b ≠ 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành $y = -\frac{c}{b}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm $\left(0;-\frac{c}{b}\right)$.



• Nếu b = 0 và a ≠ 0 thì phương trình tổng quát ax + by + c = 0 trở thành $x = -\frac{c}{a}$.

Khi đó d là đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a};0\right)$.



Trong cả hai trường hợp trên, đường thẳng d không phải là đồ thị của hàm số bậc nhất.

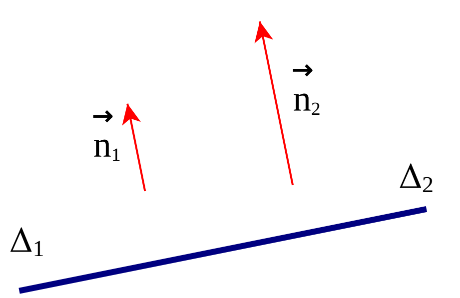
2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ($a_1^2 + b_1^2 > 0$) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$ và đường thẳng Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ($a_2^2 + b_2^2 > 0$) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.

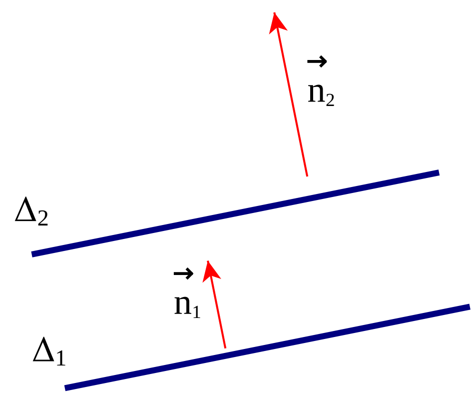
Ta có thể dùng phương pháp tọa độ để xét vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2 như sau:

– Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tùy ý trên Δ_1.

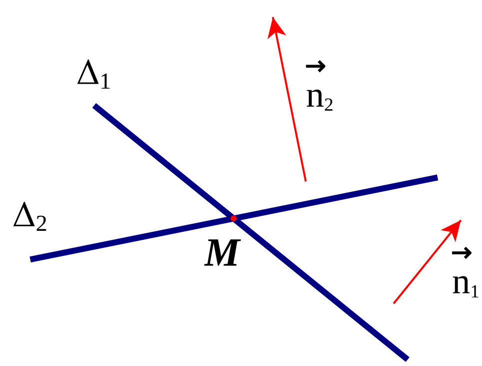
+ Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.



+ Nếu P $\notin \Delta_2$ thì Δ_1 // Δ_2.

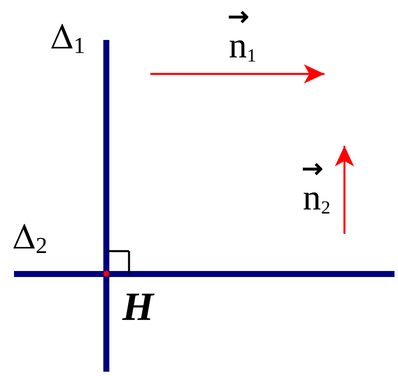


– Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm $M(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.



Chú ý:

a) Nếu $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.



b) Để xét hai vectơ $\vec{n}_1(a_1;b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2;b_2)$ cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$:

+ Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ thì hai vectơ cùng phương.

+ Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hai vectơ không cùng phương.

Trong trường hợp tất cả các hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 đều khác 0, ta có thể xét hai trường hợp:

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ cùng phương.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ không cùng phương.

Ví dụ: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) Δ_1: $4x - 10y + 1 = 0$ và Δ_2: $x + y + 2 = 0$.

b) Δ_1: $12x - 6y + 6 = 0$ và Δ_2: $2x - y + 5 = 0$.

c) Δ_1: $8x + 10y - 12 = 0$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

d) Δ_1: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 4t' \\ y = 2 + 5t' \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Δ_1: $4x - 10y + 1 = 0$ và Δ_2: $x + y + 2 = 0$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4; -10)$ và $\vec{n}_2 = (1; 1)$.

Ta có $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm M.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 10y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

b) Δ_1: $12x - 6y + 6 = 0$ và Δ_2: $2x - y + 5 = 0$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (12; -6)$ và $\vec{n}_2 = (2; -1)$.

Ta có $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn M(0; 1) ∈ Δ_1.

Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng Δ_2, ta được: 2.0 – 1 + 5 = 4 ≠ 0.

Suy ra M(0; 1) ∉ Δ_2.

Vậy Δ_1 // Δ_2.

c) Δ_1: 8x + 10y – 12 = 0 và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (8;10)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (5;-4)$.

Suy ra Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (4;5)$.

Ta có $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$.

Suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn M(–6; 6) ∈ Δ_2.

Thế tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng Δ_1, ta được: 8.(–6) + 10.6 – 12 = 0.

Suy ra M(–6; 6) ∈ Δ_1.

Vậy $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

d) Δ_1: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -6 + 4t' \\ y = 2 + 5t' \end{cases}$

• Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = \left(-5; 4\right)$.

Suy ra Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \left(4; 5\right)$.

• Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = \left(4; 5\right)$.

Suy ra Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \left(5; -4\right)$.

Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = \left(4; 5\right)$ và $\vec{n}_2 = \left(5; -4\right)$.

Ta có $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 4.5 + 5.(-4) = 0$.

Suy ra $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Do đó $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Δ_1 đi qua điểm A(–1; 2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \left(4; 5\right)$.

Suy ra phương trình tổng quát của Δ_1: $4(x + 1) + 5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 6 = 0$.

Tương tự, ta tìm được phương trình tổng quát của Δ_2: $5x - 4y + 38 = 0$.

Gọi M(x; y) là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

Suy ra tọa độ điểm M thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 6 = 0 \\ 5x - 4y + 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{166}{41} \\ y = \dfrac{182}{41} \end{cases}$$

Khi đó ta có tọa độ là $M\left(-\dfrac{166}{41}; \dfrac{182}{41}\right)$.

Vậy Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau tại điểm $M\left(-\frac{166}{41};\frac{182}{41}\right)$.

3. Góc giữa hai đường thẳng

3.1. Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

• Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2.

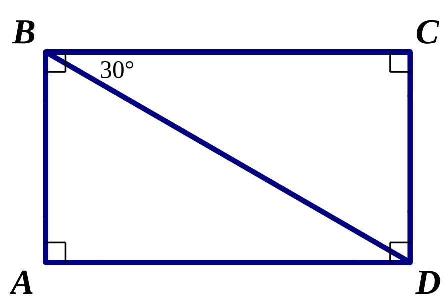
• Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Ta quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Như vậy góc α giữa hai đường thẳng luôn thỏa mãn: $0° \le \alpha \le 90°$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Ví dụ: Cho hình chữ nhật ABCD có $CBD = 30°$.



Tính các góc: (BD, BC), (AB, AD), (AD, BC), (AB, BD).

Hướng dẫn giải

Ta có:

+) $CBD = 30°$. Suy ra (BD, BC) = 30°.

+) Vì AB ⊥ AD nên (AB, AD) = 90°.

+) Vì AD // BC nên (AD, BC) = 0°.

+) Ta có $ABD + DBC = 90°$ (Vì AB ⊥ BC).

$\Leftrightarrow ABD = 90° - DBC = 90° - 30° = 60°$.

Vì $ABD = 60°$ nên (AB, BD) = 60°.

Vậy (BD, BC) = 30°, (AB, AD) = 90°, (AD, BC) = 0°, (AB, BD) = 60°.

3.2. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (a_1; b_1), \vec{n}_2 = (a_2; b_2)$.

Ta có công thức: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Nhận xét: Nếu Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$.

Chú ý: Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hai vectơ pháp tuyến vuông góc. Do đó:

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì ta có:

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow k_1k_2 = -1.$$

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích các hệ số góc bằng –1 thì vuông góc với nhau.

Ví dụ: Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $x - 2y + 5 = 0$ và d_2: $3x - y = 0$.

b) d_1: $4x + 3y - 21 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = -1 + 8t \end{cases}$

c) d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) d_1: $x - 2y + 5 = 0$ và d_2: $3x - y = 0$

d_1, d_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1;-2), \vec{n}_2 = (3;-1)$.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|1.3 + (-2).(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}.\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $(d_1, d_2) = 45°$.

Vậy $(d_1, d_2) = 45°$.

b) d_1: $4x + 3y - 21 = 0$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = -1 + 8t \end{cases}$

d_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (4;3)$.

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-6;8)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (8;6)$.

Ta có $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$.

Suy ra $\vec{n}_2 \,//\, \vec{n}_1$.

Vậy $(d_1, d_2) = 0°$.

c) d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$

d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (-1;2), \vec{u}_2 = (-4;-2)$.

Ta có $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = (-1).(-4) + 2.(-2) = 0$.

Suy ra $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Vậy $(d_1, d_2) = 90°$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$) và điểm $M_0(x_0; y_0)$. ***Khoảng cách*** từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi công thức: $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ví dụ: Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau:

a) $A(3; 4)$ và Δ: $4x + 3y + 1 = 0$.

b) B(1; 2) và d: 3x – 4y + 1 = 0.

Hướng dẫn giải

a) Với A(3; 4) và Δ: 4x + 3y + 1 = 0 ta có:

$$d\left(A,\Delta\right)=\frac{\left|4.3+3.4+1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng 5.

b) Với B(1; 2) và d: 3x – 4y + 1 = 0 ta có:

$$d\left(B,d\right)=\frac{\left|3.1-4.2+1\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{4}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d bằng $\frac{4}{5}$.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho ΔABC có A(–2; 3), B(2; 5), C(5; 1).

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB và AC.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng BC.

c) Tính khoảng cách từ điểm B lần lượt đến cạnh AC và tính diện tích tam giác ABC.

d) Viết phương trình đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a)

• Với A(–2; 3), B(2; 5) ta có $\overrightarrow{AB}=\left(4;2\right)$.

Do đó đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AB}=\left(2;-4\right)$.

Đường thẳng AB đi qua A(–2; 3) và nhận $\vec{n}_{AB}=\left(2;-4\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là:

2(x + 2) – 4(y – 3) = 0 ⇔ x – 2y + 8 = 0.

• Với A(–2; 3), C(5; 1) ta có $\overrightarrow{AC}=\left(7;-2\right)$.

Do đó đường thẳng AC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{AC}=\left(2;7\right)$.

Đường thẳng AC đi qua A(–2; 3) và nhận $\vec{n}_{AC}=\left(2;7\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là:

2(x + 2) + 7(y – 3) = 0 ⇔ 2x + 7y – 17 = 0.

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng AB, AC lần lượt là x – 2y + 8 = 0, 2x + 7y – 17 = 0.

b) Với B(2; 5), C(5; 1) ta có $\overrightarrow{BC}=\left(3;-4\right)$.

Đường thẳng BC đi qua B(2; 5) và nhận $\overrightarrow{BC}=\left(3;-4\right)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=5-4t \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng BC là $\begin{cases} x=2+3t \\ y=5-4t \end{cases}$

c) Với B(2; 5) và đường thẳng AC: 2x + 7y – 17 = 0 ta có:

$$d\left(B,AC\right)=\frac{\left|2.2+7.5-17\right|}{\sqrt{2^2+7^2}}=\frac{22\sqrt{53}}{53}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến cạnh AC bằng $\frac{22\sqrt{53}}{53}$.

Ta có $\overrightarrow{AC}=\left(7;-2\right)$ nên $AC=\sqrt{7^2+\left(-2\right)^2}=\sqrt{53}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}.d\left(B,AC\right).AC=\frac{1}{2}.\frac{22\sqrt{53}}{53}.\sqrt{53}=11\ \text{(đvdt)}.$$

Vậy diện tích ΔABC bằng 11 đvdt.

d) Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó tọa độ của điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0 \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+5}{2}=4 \end{cases}$$

Suy ra I(0; 4).

Ta có $\overrightarrow{CI}=(0-5;4-1)=(-5;3)$.

Đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC chính là đường thẳng đi qua hai điểm C và I, tức là đường thẳng CI.

Do đó đường thẳng CI đi qua C(5; 1) có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CI}(-5;3)$.

Phương trình tham số của đương thẳng CI là : $\begin{cases} x=5-5t \\ y=1+3t \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của đường trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC là: $\begin{cases} x=5-5t \\ y=1+3t \end{cases}$.

Bài 2. Cho hai đường thẳng Δ_1: $(m – 3)x + 2y + m^2 – 1 = 0$ và Δ_2: $–x + my + (m – 1)^2 = 0$.

a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp m = 0, m = 1.

b) Tìm m để hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Hướng dẫn giải

a)

• Nếu m = 0 thì:

Phương trình Δ_1: $–3x + 2y – 1 = 0$ và phương trình Δ_2: $–x + 1 = 0$.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (-3;2), \vec{n}_2 = (-1;0)$.

Ta có $a_1b_2 – a_2b_1 = (–3).0 + 3.(–1) = –3 \neq 0$.

Suy ra $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại điểm M.

Vì M là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 nên tọa độ điểm M thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra M(1; 2).

• Nếu m = 1 thì:

Phương trình Δ_1: $–2x + 2y = 0$ và phương trình Δ_2: $–x + y = 0$.

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (-2;2), \vec{n}_2 = (-1;1)$.

Ta có $\frac{-2}{-1} = \frac{2}{1}$.

Suy ra $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Khi đó ta có Δ_1, Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn điểm $O(0; 0) \in \Delta_1$.

Thay tọa độ điểm O vào phương trình Δ_2 ta được: –0 + 0 = 0 (đúng).

Suy ra O(0; 0) ∈ Δ_2.

Do đó $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Vậy khi m = 0 thì Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm M(1; 2) và khi m = 1 thì Δ_1 trùng Δ_2.

b) Δ_1: $(m – 3)x + 2y + m^2 – 1 = 0$ và Δ_2: $–x + my + (m – 1)^2 = 0$.

Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (m-3;2), \vec{n}_2 = (-1;m)$.

Chọn $B\left(0;\frac{1-m^2}{2}\right) \in \Delta_1$.

Δ_1 // Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương và B ∉ Δ_2.

Ta có $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

⇔ $a_1b_2 – a_2b_1 = 0$.

⇔ (m – 3).m – 2.(–1) = 0.

⇔ $m^2 – 3m + 2 = 0$.

⇔ m = 1 hay m = 2.

Ở câu a), ta đã chứng minh được Δ_1 trùng Δ_2 khi m = 1.

Do đó ta loại m = 1.

Với m = 2, ta có tọa độ $B\left(0;-\frac{3}{2}\right)$ và phương trình Δ_2: –x + 2y + 1 = 0.

Thay tọa độ B vào phương trình Δ_2, ta được: $-0+2.\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-2\neq 0$.

Suy ra với m = 2, B ∉ Δ_2.

Vậy m = 2 thì Δ_1 // Δ_2.

Bài 3. Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và Δ_2: mx + y + 1 = 0 một góc bằng 30°.

Hướng dẫn giải

Δ_1: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và Δ_2: mx + y + 1 = 0

Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = \left(\sqrt{3}; -1\right), \vec{n}_2 = (m;1)$.

Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|m\sqrt{3} + (-1).1\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}.\sqrt{m^2 + 1^2}}$.

Hay $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|m\sqrt{3} - 1\right|}{2\sqrt{m^2 + 1}}$

Theo đề, ta có góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 30°.

Ta suy ra $\dfrac{\left|m\sqrt{3} - 1\right|}{2\sqrt{m^2 + 1}} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(m^2 + 1\right)} = \left|m\sqrt{3} - 1\right|$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 3 = 3m^2 - 2\sqrt{3}m + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}m = -2$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Cho đường thẳng d: 3x – 2y + 1 = 0 và điểm M(1; 2). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc 45°.

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua M(1; 2) có dạng: a(x – 1) + b(y – 2) = 0.

⇔ ax + by – a – 2b = 0.

Đường thẳng d: 3x – 2y + 1 = 0 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}' = (3; -2)$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ và d là:

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|3a + (-2).b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Theo đề, ta có Δ tạo với d một góc 45°.

Suy ra $\cos 45° = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{26(a^2 + b^2)} = 2|3a - 2b|$$

⇔ $26a^2 + 26b^2 = 4(9a^2 – 12ab + 4b^2)$

⇔ $–10a^2 + 48ab + 10b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5b \\ a = -\frac{1}{5}b \end{array}\right.$$

• Với a = 5b, ta chọn a = 5.

Ta suy ra b = 1.

Khi đó ta nhận được phương trình đường thẳng Δ: 5x + y – 7 = 0.

• Với $a=-\frac{1}{5}b$, ta chọn a = 1.

Ta suy ra b = –5.

Khi đó ta nhận được phương trình đường thẳng Δ: x – 5y + 9 = 0.

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa yêu cầu bài toán có phương trình lần lượt là 5x + y – 7 = 0 và x – 5y + 9 = 0.