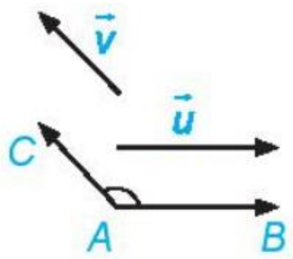
Bài 11. Tích vô hướng của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tùy ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



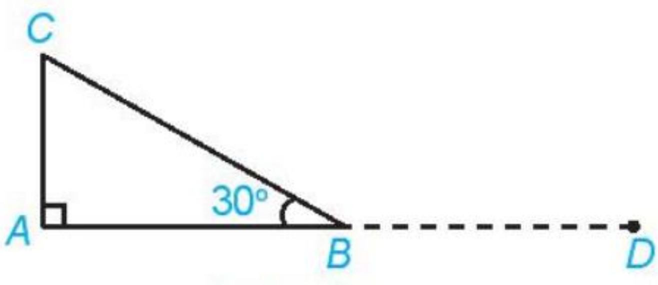
Chú ý :

+ Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180°.

+ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau. Kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

Ví dụ : Cho tam giác ABC vuông tại A và $B = 30^\circ$. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Hướng dẫn giải



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 90°$.

Tam giác ABC vuông tại A nên ta có

$ACB + ABC = 90° \Rightarrow ACB = 90° - ABC = 90° - 30° = 60°$.

Suy ra: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = ACB = 60°$.

Vẽ $\overrightarrow{BD}$ sao cho $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = CBD$.

Mặt khác $ABC + CBD = 180°$ (hai góc kề bù)

Suy ra $CBD = 180° - ABC = 180° - 30° = 150°$.

Do đó, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = CBD = 150°$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90°$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 60°$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 150°$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}$. $\vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Chú ý:

+) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

+) $\vec{u}.\vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$.

Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos 0° = \left|\vec{u}\right|^2$.

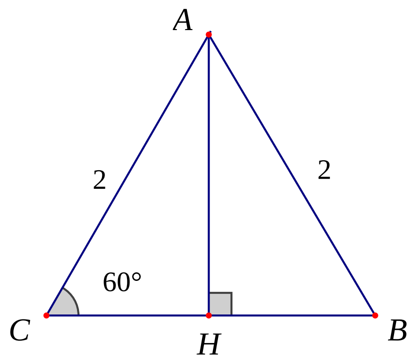
(Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.)

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải



a) Vì tam giác ABC đều nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60°$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2.2.\cos 60° = 2.2.\frac{1}{2} = 2$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$.

b) Vì AH là đường cao của tam giác ABC nên AH ⊥ BC.

Do đó $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90°$.

Ta có :

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|\cos 90° = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|.0 = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$.

3. Biểu thức tọa độ và tính chất của tích vô hướng

• Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức :

$$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'.$$

Nhận xét :

+ Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi x.x′ + y.y′ = 0.

+ Bình phương vô hướng của $\vec{u} = (x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.

+ Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ cho hai vectơ $\vec{u} = (0; -5)$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$.

a) Tính tích vô hướng của hai vectơ trên.

b) Tìm góc giữa của hai vectơ trên.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = 0.\sqrt{3} + (-5).1 = -5$.;

Vậy $\vec{u}.\vec{v} = -5$.

b) Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$; $|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Suy ra : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{-5}{5.2} = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{-1}{2}$.

Suy ra $(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.

Vậy $(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.

• Tính chất của tích vô hướng :

Với ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có :

+) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (tính chất giao hoán);

+) $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng) ;

+) $(k\vec{u})\,.\,\vec{v} = k(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$.

Chú ý: Từ tính trên, ta có thể chứng minh được :

$\vec{u}\,.\,(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} - \vec{u}\,.\,\vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép trừ) ;

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với điểm M tùy ý ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB};$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC};$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$. (3)

Cộng các kết quả từ (1), (2), (3), ta được: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

B. Bài tập tự luyện

B1. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $\vec{a}\ \ 1;-1$ và $\vec{b}\ \ -1;1$.

B. $\vec{n}\ \ 1;1$ và $\vec{k}\ \ 2;0$.

C. $\vec{u}\ \ 2;3$ và $\vec{v}\ \ 4;6$.

D. $z\ \ a;b$ và $\vec{t}\ \ -b;a$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=1.\ -1\ +\ -1\ .1=-1+\ -1\ =-2\neq 0.$ Suy ra hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ không vuông góc với nhau. Do đó A sai.

Ta có: $\vec{n}.\vec{k}=1.2+1.0=2+0=2\neq 0.$ Suy ra hai vecto $\vec{n},\vec{k}$ không vuông góc. Do đó B sai.

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=2.4+3.6=8+18=26\neq 0.$ Suy ra hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ không vuông góc. Do đó C sai.

Ta có: $\vec{z}.\vec{t}=a.\ -b\ +b.a=-ab+ab=0.$ Suy ra hai vecto $\vec{z},\vec{t}$ vuông góc với nhau. Do đó D đúng.

Câu 2. Góc giữa vectơ $\vec{a}\ \ -1;-1$ và vecto $\vec{b}\ \ -1;0$ có số đo bằng:

A. 90°.

B. 0°.

C. 135°.

D. 45°.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là D

Ta có:

$$\vec{a}.\vec{b}=\ -1\ .\ -1\ +\ -1\ .0=1,\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\ -1\ ^{2}+\ -1\ ^{2}}=\sqrt{2},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\ -1\ ^{2}+0^{2}}=1.$$

$$\Rightarrow \cos \ \vec{a}.\vec{b} \ = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ \vec{a}.\vec{b} \ = 45°.$$

Vậy góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 45°.

Câu 3. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a và A(0; 0), B(a; 0), C(a; a), D(0; a). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD} \ = 45^0.$

B. $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC} \ = 45^0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = a^2.$

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = a^2\sqrt{2}.$

D. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = -a^2.$

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là B

Vì ABCD là hình vuông cạnh a nên AB = BC = a, BD = AC = $a\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(a;0\right)$, $\overrightarrow{BD}\left(-a;a\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(a;a\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(0;a\right)$, $\overrightarrow{BA}\left(-a;0\right)$.

Khi đó:

+) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = a.\left(-a\right) + 0.a = -a^2$

$$\Rightarrow \cos \ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD} \ = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-a^2}{a.a\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD} \ = 135^0.$$ Do đó A sai.

+) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ = a.0 + a.a = a^2

$$\Rightarrow \cos \ \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC} \ = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{a^2}{a.a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC} \ = 45^0.$$ Do đó B đúng

+) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = a.\left(-a\right) + a.a = 0$. Do đó C sai.

+) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ = -a.(-a) + 0.a = a^2. Do đó D sai.

B2. Bài tập tự luận

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1;-2)$; $\vec{b} = (-1;-3)$.

a) Tính tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 1.(–1) + (–2).(–3) = 5.

Vậy $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 5.

b) Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.

Khi đó cos($\vec{a}$, $\vec{b}$)= $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra ($\vec{a}$, $\vec{b}$) = 45°.

Vậy góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 45°.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A(2; 4) và B(1 ; 1). Tìm tọa độ của điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm C cần tìm có tọa độ (x ; y). Để tam giác ABC vuông cân tại B ta phải có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;3)$ và $\overrightarrow{BC}=(x-1;y-1)$.

Khi đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=1.(x-1)+3(y-1)=x+3y-4$.

Và $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\\ |\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3y-4=0\\ \sqrt{10}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3y-4=0\\ 10=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3y\\ (3-3y)^2+(y-1)^2=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3y\\ 10y^2-20y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3y\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm C và C' thỏa mãn điều kiện của bài toán: C(4 ; 0) và C'(–2 ; 2).