Bài tập cuối chương V

A. Lý thuyết

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có m + n cách hoàn thành.

Ví dụ: Một nhóm học sinh ưu tú của lớp 10A có 13 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Giáo viên muốn chọn ra 1 bạn để đi dự đại hội dành cho học sinh của khối. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách để chọn học sinh đó.

Hướng dẫn giải

Để chọn 1 học sinh ta thực hiện một trong hai hành động sau:

Chọn một học sinh trong 13 học sinh nam: Có 13 cách chọn.

Chọn một học sinh trong 7 học sinh nữ: Có 7 cách chọn.

Vậy có 13 + 7 = 20 cách chọn 1 học sinh.

Vậy giáo viên có 20 cách để lựa chọn một học sinh để đi dự đại hội.

Nhận xét: Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện, hành động thứ ba có p cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có m + n + p cách hoàn thành.

Ví dụ: Nhà trường tổ chức cho học sinh tìm hiểu về các đề tài. Ban tổ chức đưa ra ba nội dung gồm: 5 đề tài về khoa học tự nhiên, 6 đề tài xã hội và 10 đề tài về môi trường và cuộc sống. Hỏi mỗi học sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn. Biết mỗi học sinh chỉ được chọn một đề tài.

Hướng dẫn giải

Mỗi học sinh chọn một đề tài, tức là mỗi học sinh thực hiện một trong ba hành động sau:

Chọn một đề tài trong 5 đề tài về khoa học tự nhiên: Có 5 cách chọn.

Chọn một đề tài trong 6 đề tài về xã hội: Có 6 cách chọn.

Chọn một đề tài trong 10 đề tài về môi trường và cuộc sống: Có 10 cách chọn.

Vậy có 5 + 6 + 10 = 21 cách chọn 1 đề tài.

Vậy mỗi học sinh có 21 khả năng lựa chọn một đề tài để tìm hiểu.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc có m.n cách hoàn thành.

Ví dụ: Để đi từ nhà An đến nhà Minh có hai con đường để đi. Từ nhà Minh đến nhà Lâm có ba con đường để đi. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn con đường đi từ nhà An đến nhà Lâm và đi qua nhà Minh.

Hướng dẫn giải

Việc lựa chọn con đường đi từ nhà An đến nhà Lâm và đi qua nhà Minh là thực hiện hai hành động liên tiếp.

– Chọn con đường đi từ nhà An đến nhà Minh có 2 cách chọn;

– Chọn con đường đi từ nhà Minh đến nhà Lâm có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có 2.3 = 6 cách chọn con đường đi từ nhà An đến nhà Lâm và đi qua nhà Minh.

Vậy có 6 cách chọn con đường đi từ nhà An đến nhà Lâm và đi qua nhà Minh.

Nhận xét: Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có p cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc có m.n.p cách hoàn thành.

Ví dụ: Một người ăn trưa tại một của hàng. Trong thực đơn có 5 món thịt, 3 món rau và 4 món tráng miệng. Hỏi người này có bao nhiêu cách để lựa chọn một bữa ăn gồm 1 món thịt, 1 món rau và 1 món tráng miệng.

Hướng dẫn giải

Để lựa chọn một bữa ăn có 1 món thịt, 1 món rau và 1 món tráng miệng thì phải thực hiện qua ba hành động liên tiếp là:

– Lựa chọn một món thịt: có 5 cách chọn.

– Lựa chọn một món rau: có 3 cách chọn.

– Lựa chọn một món tráng miệng: có 4 cách chọn.

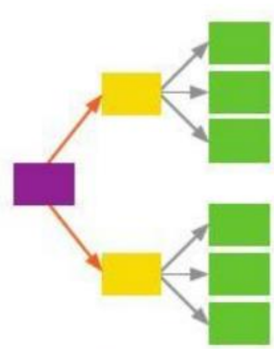
Theo quy tắc nhân, ta có 5.3.4 = 60 cách chọn 1 món thịt, 1 món rau và 1 món tráng miệng.

Vậy người này có 60 cách để lựa chọn một bữa ăn gồm 1 món thịt, 1 món rau và 1 món tráng miệng.

3. Sơ đồ hình cây

Nhận xét:

– Sơ đồ hình cây (Hình 6) là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với cách nhánh tỏa ra các nút bổ sung.



Hình 6

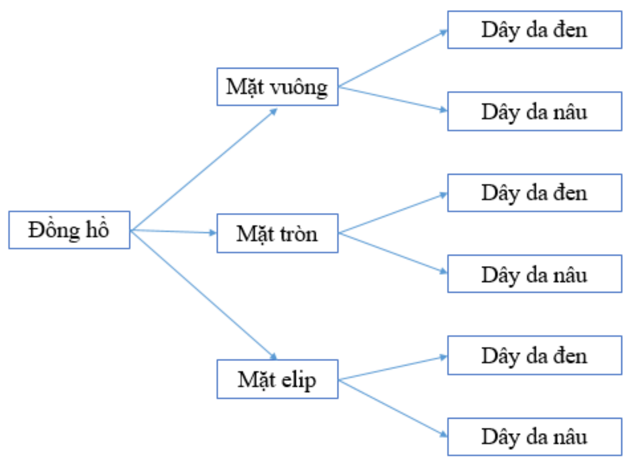
– Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.

Ví dụ: Bạn Diệp muốn mua một chiếc đồng hồ đeo tay. Biết đồng hồ có 3 loại mặt để lựa chọn: mặt vuông, mặt tròn, mặt elip; có 2 loại dây đồng hồ là: dây da màu đen, dây da màu nâu. Hỏi Diệp có bao nhiêu cách để lựa chọn một chiếc đồng hồ.

Hướng dẫn giải

Để lựa chọn một chiếc đồng hồ phải trải qua hai hành động: Lựa chọn mặt đồng đồ, sau đó ứng với mỗi cách lựa chọn mặt đồng hồ ta lại lựa chọn dây đồng hồ.

Khi đó, ta có sơ đồ hình cây mô tả các cách chọn một chiếc đồng hồ như sau:



Quan sát sơ đồ hình cây ta thấy có 6 cách lựa chọn một chiếc đồng hồ.

Vậy có 6 cách để bạn Diệp lựa chọn 1 chiếc đồng hồ.

4. Vận dụng trong bài toán đếm

Việc kiểm đến có ý nghĩa quan trọng trong toán học và thực tiễn, đặc biệt trong thống kê và xác suất. Kết quả đếm cho phép chúng ta xác định số khả năng mà một sự kiện có thể xảy ra để làm cơ sở cho việc đưa ra quyết định. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và sơ đồ hình cây là những nguyên tắc cơ bản trong các bài toán đếm.

a. Vận dụng trong giải toán

Ví dụ: Cho 3 chữ số 3; 4; 5. Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ ba chữ số trên.

Hướng dẫn giải

Gọi số có ba chữ số đôi một khác nhau có dạng abc.

Để được một số có ba chữ số ta phải thực hiện 3 hành động liên tiếp.

– Chọn chữ số a: ta chọn một trong 3 chữ số {3; 4; 5}, có 3 cách chọn.
– Chọn chữ số b: chữ số b phải khác chữ số a, nên chữ số b có 2 cách chọn.
– Chọn chữ số c: chữ số c phải khác chữ số a và b nên chữ số c có 1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có 3.2.1 = 6 cách chọn.

Vậy ta lập được 6 số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau từ ba chữ số {3; 4; 5}.

b. Vận dụng trong thực tiễn

Ví dụ: Bạn Mai muốn đặt mật khẩu cho điện thoại của mình bằng các chữ số. Biết mật khẩu là dãy số gồm 6 chữ số. Hỏi bạn Mai có bao nhiêu cách để đặt mật khẩu.

Hướng dẫn giải

Gọi mật khẩu cần đặt có dạng abcfeg.

Việc chọn mật khẩu là chọn liên tiếp 6 chữ số a, b, c, d, e, g mỗi chữ số là một trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}.

Chọn a: là chọn 1 trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Chọn b: là chọn 1 trong các chữ số {0;1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Chọn c: là chọn 1 trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Chọn d: là chọn 1 trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Chọn e: là chọn 1 trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Chọn g: là chọn 1 trong các chữ số {0; 1; 2; …; 9}. Có 10 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có 10 .10. 10. 10. 10. 10 = 1 000 000 cách đặt mật khẩu.

Vậy Mai có 1 000 000 cách để đặt mật khẩu.

5. Hoán vị

a. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$).

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Ví dụ: Từ 3 chữ số 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau ?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách sắp xếp ba chữ số đã cho để lập thành một số có ba chữ số khác nhau là một hoán vị của ba chữ số đó.

Ta có các số sau : 357 ; 375 ; 537 ; 573 ; 735 ; 753.

Vậy có 6 số có ba chữ số khác nhau lập từ ba chữ số 3, 5, 7.

b. Số các hoán vị

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có $P_n = n . (n – 1) … 2.1$

Quy ước : Tích 1.2…n được viết là n! (đọc là n giai thừa), tức là n! = 1 . 2 … n.

Như vậy $P_n = n!$.

Ví dụ: Có ba bạn học sinh Nam, Long, Vinh. Giáo viên muốn xếp ba bạn này vào 3 vị trí chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp.

Hướng dẫn giải

Xếp ba bạn Nam, Long, Vinh vào 3 vị trí chỗ ngồi là một hoán vị của 3 bạn.

Ta có $P_3 = 3! = 1.2.3 = 6$.

Vậy có 6 cách xếp 3 bạn Nam, Long, Vinh vào ba vị trí chỗ ngồi.

6. Chỉnh hợp

a. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Ví dụ: Một nhóm có 10 học sinh trong đó có 3 bạn học sinh ưu tú là: Long, Hoa, Trung. Giáo viên muốn chọn ra 2 trong 3 bạn để bầu làm nhóm trưởng và nhóm phó. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn.

Hướng dẫn giải

Có các cách để chọn 2 bạn một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó trong ba bạn là : Long – Hoa ; Hoa – Long ; Long – Trung ; Trung – Long ; Hoa – Trung ; Trung – Hoa.

Vậy có 6 cách để chọn một học sinh nam và một học sinh nữ trong 3 bạn để làm phóm trưởng và nhóm phó.

b. Số cách chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.

Ta có: $A_n^k = n.(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Ví dụ: Có 6 chữ số {1; 2; 3 ; 4 ; 5; 6}. Hỏi từ 6 chữ số trên ta lập được bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau.

Hướng dẫn giải

Từ 6 chữ số, ta lấy ba chữ số sau đó sắp xếp để được một số có ba chữ số khác nhau. Khi đó, số các số tạo thành là một chỉnh hợp chập 3 của 6 chữ số.

Ta có $A_6^3 = 6.5.4 = 120$.

⇒ Có 120 số được tạo thành.

Vậy từ 6 chữ số trên ta lập được 120 số có 3 chữ số đôi một khác nhau.

7. Định nghĩa tổ hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Ví dụ : Bạn Mai có 4 chiếc váy màu hồng, màu đỏ, màu trắng, màu tím. Mai muốn chọn 3 trong 4 chiếc váy để mang đi du lịch. Hãy viết các tổ hợp 3 của 4 chiếc áo váy đó.

Hướng dẫn giải

Các tổ hợp chập 3 của 4 chiếc váy là :

Hồng – đỏ – trắng ; Hồng – đỏ – tím ; Đỏ – trắng – tím ; Hồng – trắng – tím.

Vậy ta có 4 tổ hợp chập 3 của 4 chiếc váy là : Hồng – đỏ – trắng ; Hồng – đỏ – tím ; Đỏ – trắng – tím ; Hồng – trắng – tím.

8. Số các tổ hợp

Nhận xét : Một tổ hợp chập k của n phần tử nhiều gấp k! lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu là C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $(1 \le k \le n)$. Ta có : $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$

Quy ước 0! = 1 ; $C_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ (với $0 \le k \le n$).

Ví dụ : Một tổ có 8 người, bạn tổ trưởng muốn cử ra 4 bạn đi tập văn nghệ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn 4 bạn trong 8 bạn đi trực nhật là một tổ hợp chập 4 của 8.

Ta có $C_8^4 = \dfrac{8!}{(8-4)!4!} = 70$.

Vậy có 70 cách chọn 4 trong 8 bạn đi tập văn nghệ.

9. Tính chất của các số C_n^k

Ta có hai đẳng thức sau : $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$ và $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ $(1 \le k < n)$.

Ví dụ: Ta có : $C_{10}^6 = C_{10}^{10-6} = 210$; $C_{10-1}^{6-1} + C_{10-1}^6 = C_{10}^6 = 210$.

10. Nhị thức Newton

Công thức nhị thức Newton $(a + b)^n$ ứng với n = 4 ; n = 5 :

• $(a + b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

• $(a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^3b^2 + C_5^3 a^2b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Ví dụ:

a) Khai triển $(2 + x)^4$;

b) Khai triển $(x – 3)^5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

$(2 + x)^4 = C_4^0 2^4 + C_4^1 2^3.x + C_4^2 2^2x^2 + C_4^3 2.x^3 + C_4^4 x^4$

$= 2^4 + 4.2^3x + 6.2^2.x^2 + 4.2.x^3 + x^4$

$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

Vậy $(2 + x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

b) Ta có :

$(x – 3)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4.(–3) + C_5^2 x^3.(–3)^2 + C_5^3 x^2.(–3)^3 + C_5^4 x.(–3)^4 + C_5^5 (–3)^5$

$= x^5 + 5x^4.(–3) + 10x^3.(–3)^2 + 10x^2.(–3)^3 + 5x.(–3)^4 + (–3)^5$

$= x^5 – 15x^4 + 90x^3 – 270x^2 + 405x – 243$.

Vậy $(x – 3)^5 = x^5 – 15x^4 + 90x^3 – 270x^2 + 405x – 243$.

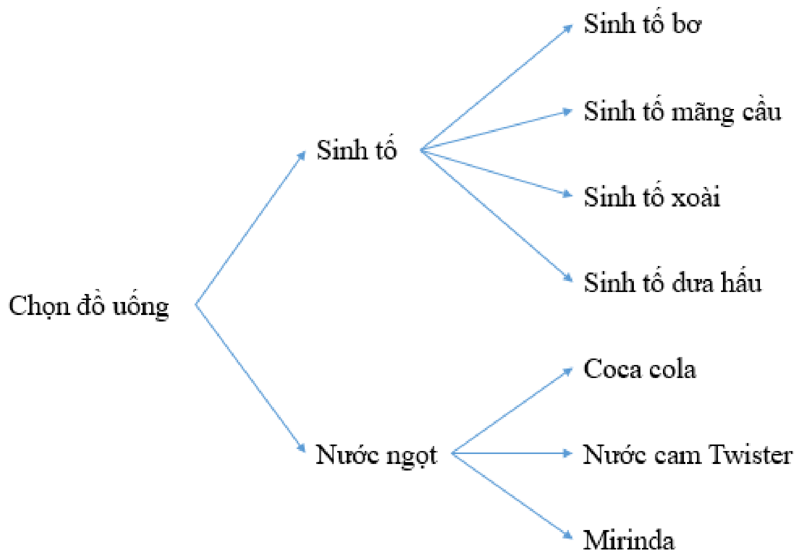
B. Bài tập tự luyện

B.1 Bài tập tự luận

Bài 1. Một cửa hàng có 4 loại sinh tố là: Sinh tố bơ, sinh tố mãng cầu, sinh tố dưa hấu, sinh tố xoài, và 3 loại nước ngọt là: coca cola, nước cam Twister; Mirinda. Hãy vẽ sơ đồ hình cây mô tả các cách chọn mua một loại sinh tố hoặc một loại nước ngọt ở cửa hàng này ?

Hướng dẫn giải

Để chọn mua một loại sinh tố hoặc một loại nước ngọt ở cửa hàng này ta thực hiện một trong hai hành động : Chọn mua một loại sinh tố hoặc chọn mua một loại nước ngọt. Ta có sơ đồ hình cây mô tả các cách lựa chọn như sau :



Từ sơ đồ hình cây ta thấy có 7 cách lựa chọn đồ uống.

Vậy có 7 cách chọn mua một loại sinh tố hoặc một loại nước ngọt ở cửa hàng này.

Bài 2. Một nhóm có 7 học sinh, giáo viên muốn chọn ra ba bạn, trong đó một bạn làm nhóm trưởng và một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn lần lượt 3 bạn trong 7 bạn, một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư kí là một chỉnh hợp chập 3 của 7 học sinh.

Ta có : $A_7^3 = 7.6.5 = 210$.

Vậy có 210 cách chọn ra 3 trong 7 bạn, một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó và một bạn làm thư ký.

Bài 3. Trong lớp có 30 học sinh trong đó 14 học sinh là nam. Giáo viên cần chọn 2 học sinh trong đó có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ để tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn.

Hướng dẫn giải

Lớp có 30 học sinh trong đó 14 học sinh là nam nên có 30 – 14 = 16 học sinh nữ.

Để lựa chọn 2 học sinh trong đó có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ ta thực hiện liên tiếp hai hành động sau:

– Chọn 1 học sinh nam, ta có 14 cách chọn.

– Chọn 1 học sinh nữ, ta có 16 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có 14.16 = 224 cách chọn hai học sinh 1 nam và 1 nữ.

Vậy giáo viên có 224 cách chọn hai học sinh 1 nam và 1 nữ để tham gia đội cờ đỏ.

Bài 4. Gia đình của Tú Mai muốn đi du lịch tại Ninh Bình. Hướng dẫn viên đưa ra một số địa điểm để du lịch như sau: Chùa Bái Đính; Hang Múa, quần thể danh thắng Tràng An, Vườn Quốc gia Cúc Phương, Tam Cốc – Bích Động; Cố đô Hoa Lư; Động Am Tiêm; Vườn Chim Thung Nham; Đầm Vân Long; Nhà thờ Phát Diệm. Biết rằng gia đình của Tú Mai chỉ đi được 4 trong số các địa điểm du lịch trên. Hỏi gia đình của Tú Mai có bao nhiêu cách để lựa chọn.

Hướng dẫn giải

Hướng dẫn viên đưa ra tất cả 10 địa điểm để gia đình của Tú Mai lựa chọn du lịch.

Gia đình của Tú Mai lựa chọn 4 trong 10 địa điểm du lịch.

Mỗi cách chọn đó là một tổ hợp chập 4 của 10 địa điểm du lịch.

Ta có: $C_{10}^{4}=\frac{10!}{(10-4)!4!}=210$.

Vậy gia đình Tú Mai có 210 cách để lựa chọn 4 trong 10 địa điểm để du lịch.

Bài 5. Có 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh. Giáo viên muốn xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau.

Hướng dẫn giải

Xếp 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh vào 4 tổ khác nhau là một hoán vị của 4 bạn đó.

Ta có P_4 = 4! = 24.

⇒ Có 24 cách sắp xếp 4 bạn vào 4 tổ khác nhau.

Vậy có 24 cách xếp 4 bạn Hùng, Long, Dũng, Minh vào 4 tổ khác nhau.

Bài 6. Bác Dũng có 8 người bạn. Bác Dũng muốn mời 4 trong 8 người bạn đó đi câu cá vào cuối tuần. Nhưng trong 8 người bạn đó, có 2 người bạn không thích câu cá nên không đi. Vậy số cách chọn nhóm 4 người để đi câu cùng bác Dũng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Bác Dũng có 8 người bạn nhưng có hai người không đi nên số người có thể đi câu cùng bác Dũng là 8 – 2 = 6 người.

Khi đó, bác Dũng chọn 4 người trong 6 người để đi câu cùng thì số cách chọn là tổ hợp chập 4 của 6 người bạn.

Ta có $C_6^4 = 15$.

⇒ Bác Dũng có 15 cách để lựa chọn 4 người bạn trong 6 người bạn đi câu cá cùng.

Vậy bác Dũng có 15 cách để lựa chọn 4 người bạn đi câu cá cùng.

Bài 7. Bạn Minh muốn đặt mật khẩu cho máy tính của mình. Biết 4 kí tự đầu bạn Minh lấy đúng tên của mình, 3 kí tự sau là chữ số. Bạn Minh có bao nhiêu cách đặt mật khẩu.

Hướng dẫn giải

– Vì 4 kí tự đầu Minh lấy đúng tên của mình nên có 1 cách chọn 4 kí tự đầu.

– Vì 3 kí tự sau là chữ số nên ta có số cách chọn lấy 3 trong 10 chữ số sau đó sắp xếp chúng là một chỉnh hợp chập 3 của 10 chữ số $A_{10}^3 = 720$.

Theo quy tắc nhân ta có: 1.720 = 720 cách để Minh chọn đặt mật khẩu.

Vậy bạn Minh có 720 cách đặt mật khẩu cho máy tính của mình.

Bài 8. Một túi có 7 quả bóng xanh, 3 quả bóng vàng và 14 quả bóng đỏ. Lấy ngẫu nhiên ba quả bóng trong túi. Hỏi có bao nhiêu cách để lấy 3 quả bóng từ trong túi sao cho 3 quả bóng cùng màu.

Hướng dẫn giải

Để lấy 3 quả bóng cùng màu thì ta thực hiện một trong ba hành động sau:

– Lấy 3 quả bóng màu xanh trong 7 quả bóng xanh, ta có $C_7^3 = 35$ cách lấy.

– Lấy 3 quả bóng màu vàng trong 3 quả bóng vàng, ta có C_3^3 = 1 cách lấy.

– Lấy 3 quả bóng màu đỏ trong 14 quả bóng đỏ, ta có C_{14}^3 = 364 cách lấy.

Theo quy tắc cộng, ta có 35 + 1 + 364 = 400 cách để lấy được 3 quả bóng cùng màu.

Vậy có 400 cách để lấy được 3 quả bóng cùng màu.

Bài 9. Tính $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} - C_{31}^{20}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} = C_{31}^{20}$ nên $C_{30}^{19} + C_{30}^{20} - C_{31}^{20}$ = $C_{31}^{20} - C_{31}^{20}$ = 0.

Bài 10. Khai triển các đa thức sau:

a) $(2x – 3)^4$;

b) $(x + 5)^5 + (x – 5)^5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(2x – 3)^4$

$= (2x)^4 + 4(2x)^3.(–3) + 6(2x)^2.(–3)^2 + 4.2x.(–3)^3 + (–3)^4$.

$= 16x^4 – 96x^3 + 216x^2 – 216x + 81$.

Vậy: $(2x – 3)^4 = 16x^4 – 96x^3 + 216x^2 – 216x + 81$.

b) Ta có:

$(x + 5)^5 + (x – 5)^5$

$= [x^5 + 5x^4.5 + 10.x^3.5^2 + 10.x^2.5^3 + 5.x.5^4 + 5^5] + [x^5 + 5x^4.(–5) + 10.x^3.(–5)^2 + 10.x^2.(–5)^3 + 5.x.(–5)^4 + (–5)^5]$

$= [x^5 + 25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x + 3125] + [x^5 – 25x^4 + 250x^3 – 1250x^2 + 3125x – 3125]$

$= x^5 + 25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x + 3125 + x^5 – 25x^4 + 250x^3 – 1250x^2 + 3125x – 3125$

$= 2x^5 + 500x^3 + 6250x$.

Vậy $(x + 5)^5 + (x – 5)^5 = 2x^5 + 500x^3 + 6250x$.

Bài 11. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức $(3x – 2)^4$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng hệ thức Newton ta có :

$(3x – 2)^4 = C_4^0(3x)^4 + C_4^1(3x)^3.(–2) + C_4^2(3x)^2.(–2)^2 + C_4^3(3x).(–2)^3 + C_4^4(–2)^4$

$= (3x)^4 + 4(3x)^3(–2) + 6(3x)^2(–2)^2 + 4(3x)(–2)^3 + (–2)^4$

$= 3^4x^4 + 4.3^3x^3.(–2) + 6.3^2.x^2.(–2)^2 + 4.3x.(–2)^3 + (–2)^4$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^3 là $4.3^3.(–2) = – 216$.

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển $(3x – 2)^4$ là $– 216$.

B.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số, mà tất cả các chữ số đều chẵn:

A. 80;

B. 60;

C. 243;

D. 100.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abc}$ $(a \neq 0)$ Khi đó:

a có 4 cách chọn (vì a là số chẵn và $a \neq 0$ nên a chỉ được chọn một trong 4 số 2; 4; 6; 8)

b có 5 cách chọn (vì b là số chẵn nên b chỉ được chọn một trong 5 số 0; 2; 4; 6; 8)

c có 5 cách chọn (vì c là số chẵn nên c chỉ được chọn một trong 5 số 0; 2; 4; 6; 8)

Vậy ta có: 4 . 5 . 5 = 100 số.

Câu 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 thí sinh vào một phòng thi có 20 bàn mỗi bàn một thí sinh.

A. 20;

B. 1;

C. 20^{20};

D. 20!.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Mỗi cách xếp 20 thí sinh vào 20 vị trí của một phòng thi là một hoán vị của 20 phần tử, vậy số cách xếp là 20! cách.

Câu 3. Số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $(2x + 3)^5$ là:

A. $32x^4$;

B. $240x^4$;

C. 720;

D. 240.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Ta có $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Do đó: $(2x + 3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4.3 + 10(2x)^3.3^2 + 10(2x)^2.3^3 + 5.(2x).3^4 + 3^5$

$$= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1\,080x^2 + 810x + 243$$

Vậy trong khai triển số hạng chứa x^4 là $240x^4$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn $P_xA_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

A. 1;

B. 2;

C. 3;

D. 4.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: B

Điều kiện: $x \ge 2; x \in \mathbb{N}$

Phương trình $P_xA_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x) \Leftrightarrow A_x^2\left(P_x - 6\right) - 12(P_x - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow (P_x - 6)(A_x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P_x = 6 \\ A_x^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x! = 6 \\ x(x-1) = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right. .$$

Kết hợp với điều kiện x = 3; x = 4 thoả mãn. Vậy có 2 giá trị của x.

Câu 5. Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường A và 5 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi để bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện thì khác trường nhau.

A. 450 610;

B. 432 500;

C. 460 500;

D. 460 800.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta đánh số liên tiếp 12 chỗ ngồi bằng các số từ 1 đến 6 thuộc một dãy và từ 7 đến 12 thuộc một dãy như sau:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6

Để xếp vị trí ta có các cách chọn như sau:

Vị trí	1	10	2	9	3	8	4	7	5	6
Số cách xếp	10	5	8	4	6	3	4	2	2	1

Vậy có: 460 800 cách xếp.

Câu 6. Một đội cổ động viên gồm có 3 người mặc áo vàng, 4 người mặc áo đỏ, 5 người mặc áo xanh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các cổ động viên thành một hàng dọc sao cho các cổ động viên cùng màu áo đứng cạnh nhau?

A. 345 600;

B. 518 400;

C. 725 760;

D. 103 680.

Hướn dẫn giải.

Đáp án đúng là: D

Số cách xếp 3 cổ động viên mặc áo vàng là: 3! cách

Số cách xếp 4 cổ động viên mặc áo đỏ là: 4! cách

Số cách xếp 5 cổ động viên mặc áo xanh là: 5! cách

Hoán đổi vị trí của 3 nhóm cổ động viên có 3! cách

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề bài bằng 3!.3!.4!.5! = 103 680 cách.

Câu 7. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Tìm giá trị của n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. 15;

B. 27;

C. 8;

D. 18.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có 135 đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135$

$\Leftrightarrow$ n(n – 1) – 2n = 270

$\Leftrightarrow$ n^2 – 3n – 270 = 0

$\Leftrightarrow$ n = 18 hoặc n = – 15

Kết hợp với điều kiện n = 18 thoả mãn.

Câu 8. Cho k, n là các số nguyên dương, k ≤ n. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$;

B. P_n = n(n – 1)(n – 2)...2.1;

C. P_n = n!;

D. $A_n^k = \dfrac{n!}{k!}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Ta có $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$. Do đó A đúng và D sai.

Ta lại có: P_n = n! = n(n – 1)(n – 2)...2.1.

Câu 9. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho có đúng hai học sinh lớp 12A được chọn?

A. 66;

B. 24;

C. 60;

D. 72.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: C

Chọn ra 4 học sinh trong đó có hai học sinh lớp 12A ta có các trường hợp

Trường hợp 1, 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B và 1 học sinh lớp 12C

Trường hợp này có $C_4^2.C_3^1.C_2^1$ = 36 cách

Trường hợp 2, 2 học sinh lớp 12A, 2 học sinh lớp 12B và 0 học sinh lớp 12C

Trường hợp này có $C_4^2.C_3^2.C_2^0$ = 18 cách

Trường hợp 3, 2 học sinh lớp 12A, 0 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C

Trường hợp này có $C_4^2.C_3^0.C_2^2$ = 6 cách

Áp dụng quy tắc cộng ta có 36 + 18 + 6 = 60 cách chọn.

Câu 10. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên chơi nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

A. 168;

B. 156;

C. 132;

D. 182.

Hướng dẫn giải

Đáp án đúng là: D

Gọi số vận động viên nam là n.

Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2.C_n^2 = n\left(n-1\right)$.

Số ván các vận động viên nam chơi với các vận động viên nữ là 2 . 2 . n = 4n.

Vậy ta có n(n – 1) – 4n = 84

⇔ $n^2 - 5n - 84 = 0$

⇔ n = 12 hoặc n = – 7.

Kết hợp với điều kiện n = 12 thoả mãn

Vậy số ván các vận động viên đã chơi là $2C_{14}^{2}=182$.