

Chuyên đề Vi phân - Toán 11

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$.

+) Kí hiệu: Δx là số gia của x , sao cho $x+\Delta x \in (a;b)$.

+) Ta gọi $f'(x).\Delta x$ (hay $y'.\Delta x$) là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx .

Kí hiệu là $df(x)$ hay dy .

Công thức: $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$

2. Chú ý:

+ Nếu $y=x$, ta có: $dx=dy=(x)'.\Delta x=1.\Delta x=\Delta x$

+ Do đó với mọi hàm số $y=f(x)$, ta có: $dy=df(x)=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

B. Bài tập

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Tìm vi phân của các hàm số $y = x^3 + 2x^2$

A. $dy = (3x^2 - 4x)dx$

B. $dy = (3x^2 + x)dx$

C. $dy = (3x^2 + 2x)dx$

D. $dy = (3x^2 + 4x)dx$

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 4x$

Vi phân của hàm số đã cho là:

$$dy = (3x^2 + 4x)dx$$

Chọn đáp án D

Bài 2: Tìm vi phân của các hàm số $y = \sqrt{3x+2}$

A. $dy = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$

B. $dy = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} dx$

C. $dy = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} dx$

D. $dy = \frac{3}{\sqrt{3x+2}} dx$

Lời giải:

Ta có :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot (3x+2)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

Vi phân của hàm số đã cho là:

$$dy = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$$

Chọn đáp án A

Bài 3: Tìm vi phân của các hàm số $y = \sin 2x + \sin 3x$

A. $dy = (\cos 2x + 3\sin 2x \cos x) dx$

B. $dy = (2\cos 2x + 3\sin 2x \cos x) dx$

C. $dy = (2\cos 2x + \sin 2x \cos x) dx$

D. $dy = (\cos 2x + \sin 2x \cos x) dx$

Lời giải:

Đạo hàm của hàm số đã cho là :

$$\begin{aligned}y' &= \cos 2x.(2x)' + 3 \sin^2 x.(\sin x)' \\ &= 2 \cos 2x + 3 \sin^2 x. \cos x\end{aligned}$$

Do đó, vi phân của hàm số là:

$$dy = (2 \cos 2x + 3 \sin^2 x. \cos x) dx$$

Chọn đáp án A

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} dx.$

B. $dy = \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} dx.$

C. $dy = -\frac{2x + 1}{(x - 1)^2} dx.$

D. $dy = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} dx.$

Lời giải:

Ta có :

$$\begin{aligned}dy &= \left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right)' dx = \frac{(2x + 1)(x - 1) - (x^2 + x + 1)}{(x - 1)^2} dx \\ &= \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} dx.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D

Bài 5: Vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là:

A. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

B. $dy = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

C. $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

D. $dy = -\frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)' dx \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2\sqrt{x} - \sin 2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

- A. $dy = \frac{1}{7}dx$ B. $dy = 7dx$
C. $dy = -\frac{1}{7}dx$ D. $dy = -7dx$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x+3)' \cdot (1-2x) - (x+3) \cdot (1-2x)'}{(1-2x)^2} \\&= \frac{1 \cdot (1-2x) - (x+3) \cdot (-2)}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2} \\&\Rightarrow y'(-3) = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } dy = \frac{1}{7}dx$$

Chọn đáp án A

Bài 7: Hàm số $y = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$. Tính vi phân của hàm số tại $x = 0,01$ và $\Delta x = 0,01$?

- A. 9.
B. -9.
C. 90.

D. -90.

Lời giải:

Ta có:

$$y = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

Vi phân của hàm số tại $x=0,01$ và $\Delta x = 0,01$ là:

$$dy = y'(0,01) \cdot \Delta x = -9000 \cdot 0,01 = -90$$

Chọn đáp án D

Bài 8: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$. Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$.

A. -0,02

B. 0,01

C. 0,4

D. -0,06

Lời giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x$.

Do đó vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$ là:

$$df(1) = f'(1) \cdot \Delta x = (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1) \cdot 0,02 = -0,02.$$

Chọn đáp án A

Bài 9: Tính gần đúng giá trị $\sin 46^\circ$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{180}$ B. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{240}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{360}$ D. Đáp án khác

Lời giải:

Ta có:

$$\sin 46^\circ = \sin(45^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{4}$ và $\Delta x = \frac{\pi}{180}$,

Ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{360}$$

Chọn đáp án C

Bài 10: Tính gần đúng giá trị $\frac{1}{0,9995}$

A. 1,0004

B. 1,0035

C. 1,00037

D. 1,0005

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{0,9995} = \frac{1}{1-0,0005}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Chọn $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,0005$,

Ta có: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

$\Rightarrow \frac{1}{1-0,0005} \approx 1 - 1 \cdot (-0,0005) \approx 1,0005$.

Chọn đáp án D

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = (x - 1)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số $f(x)$?

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)' = 2(x - 1)$$

Nên vi phân của hàm số đã cho là:

$$dy = f'(x) dx = 2(x - 1) dx$$

Bài 2: Tìm vi phân của các hàm số $y = \tan 2x$

Lời giải:

Ta có :

$$f'(x) = (1 + \tan^2 2x) \cdot (2x)' = 2 \cdot (1 + \tan^2 2x)$$

Do đó, vi phân của hàm số đã cho là:

$$dy = 2(1 + \tan^2 2x)dx$$

Bài 3: Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

Lời giải:

Ta có :

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx \\ &= \frac{-4 \cos 2x \cdot \sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx = \frac{-2 \cos 2x \cdot \sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \\ &= \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx. \end{aligned}$$

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Vi phân của hàm số là:

Vi phân của hàm số đã cho là :

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' dx = \frac{(x+2)' \cdot (x-1) - (x+2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1(x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2} dx \end{aligned}$$

Bài 5: Hàm số $y = x \sin x + \cos x$ có vi phân là:

Ta có:

$$\begin{aligned} dy &= (x \sin x + \cos x)' dx \\ &= (\sin x + x \cos x - \sin x) dx = (x \cos x) dx \end{aligned}$$

Bài 6: Vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$, ứng với $\Delta x = 0,1$ là:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(2) = 11$$

Vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = 2$,
ứng với $\Delta x = 0,1$ là:

$$df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = 11 \cdot 0,1 = 1,1$$

Bài 7: Tính gần đúng giá trị $\sqrt{16,25}$ (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sqrt{16,25} = \sqrt{16 + 0,25}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Chọn $x_0 = 16$ và $\Delta x = 0,25$

$$\text{Ta có: } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 + 0,25} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,25 = 4 + 0,03125 = 4,03125$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 + 0,25} \approx 4,0313$$

Bài 8: Tính gần đúng giá trị $\cos 30^\circ 15'$

Lời giải:

Ta có:

$$\cos 30^{\circ}15' = \cos(30^{\circ} + 15') = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{720}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

$$\text{Chọn } x_0 = \frac{\pi}{6} \text{ và } \Delta x = \frac{\pi}{720}$$

Ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{720}\right) \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{720} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{1440}$$

Bài 9: Tìm vi phân của các hàm số sau:

a. $y = \frac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a, b là các hằng số)

b. $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

Lời giải:

a. $y' = \frac{1}{a+b} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}$

$$\text{Vậy } dy = d\left(\frac{\sqrt{x}}{a+b}\right) = y' dx = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} dx$$

b. $y' = (x^2 + 4x + 1)'(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})'$
 $= (2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$\text{Vậy } dy = d(x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}) = y' dx$$
$$= \left[(2x + 4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \right] dx.$$

Bài 10 Tìm dy, biết:

a. $y = \tan^2 x$
b. $y = \frac{\cos x}{1-x^2}$

Lời giải:

a. Ta có : $y' = 2\tan x(\tan x)' = 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}$
 $dy = d(\tan^2 x) = y' dx = 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx$

b. Ta có:

$$y' = \frac{(\cos)'(1-x^2) - (1-x^2)'. \cos x}{(1-x^2)^2} = \frac{(x^2-1)\sin x + 2x.\cos x}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow dy = y' dx = \frac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2} dx .$$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = xa + b$ (a, b là hằng số)

b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - x)$

Bài 2 Tìm dy, biết:

a) $y = \tan^2 x$

b) $y = \cos x \cdot 1 - x^2$.

Bài 3 Tìm vi phân của các hàm số $y = x^3 + 2x^2$

Bài 4 Tìm vi phân của các hàm số $y = \sqrt{3x+2}$

Bài 5 Tìm vi phân của các hàm số $y = \sin 2x + \sin^3 x$

Bài 6 Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Vi phân của hàm số là?

Bài 7 Vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là?

Bài 8 Cho hàm số $y = \frac{x + 3}{1 - 2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là?

Bài 9 Hàm số $y = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$. Tính vi phân của hàm số tại $x = 0,01$ và $\Delta x = 0,01$?

Bài 10 Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$. Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$.