Dạng 3: Công thức lượng giác

1. Lý thuyết

a. Công thức cộng:

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

b. Công thức nhân đôi, hạ bậc:

*** Công thức nhân đôi:**

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

*** Công thức hạ bậc:**

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

*** Công thức nhân ba:**

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

c. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

d. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$ $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$	$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$ $\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$ $\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$ $\cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$

2. Các dạng bài

Dạng 3.1: Tính giá trị lượng giác của góc đặc biệt

a. Phương pháp giải:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giá của một góc.

- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt.

- Sử dụng các công thức lượng giác.

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính:

a. $\cos\frac{37\pi}{12}$;

b. $\tan\frac{\pi}{24}+\tan\frac{7\pi}{24}$.

Hướng dẫn:

a. $\cos\frac{37\pi}{12}=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{12}\right)$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\left(\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b. $\tan\frac{\pi}{24}+\tan\frac{7\pi}{24}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{7\pi}{24}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}}=2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$

Ví dụ 2: Tính:

a. $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ biết $\sin x=\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2}<x<\pi$;

b. $\cos(\alpha-\beta)$ biết $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ và $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn:

a. Ta có:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\cos x = -\frac{4}{5}$

Do đó $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$.

Ta có: $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$.

b. Ta có:

$\sin\alpha = \frac{5}{13}, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$.

$\cos\beta = \frac{3}{5}, \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\frac{12}{13}.\frac{3}{5} + \frac{5}{13}.\frac{4}{5} = -\frac{16}{65}.$$

Dạng 3.2: Chứng minh đẳng thức lượng giác

a. Phương pháp giải:

Sử dụng công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức hạ bậc, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng) và các giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt để thực hiện phép biến đổi.

Ta lựa chọn một trong các cách biến đổi sau:

* Cách 1: Dùng hệ thức lượng giác biến đổi một vế thành vế còn lại (vế trái thành vế phải hoặc vế phải thành vế trái)

* Cách 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

* Cách 3: Biến đổi một đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$

b. $\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$

Hướng dẫn:

a. (Áp dụng công thức hạ bậc) Ta có:

$VT = \sin^4 x + \cos^4 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = VP$

Suy ra đpcm.

b. (Áp dụng công thức góc nhân ba) Ta có:

$VT = \frac{1}{4}\cos 3x\left(3\sin x - \sin 3x\right) + \frac{1}{4}\sin 3x\left(3\cos x + \cos 3x\right)$

$= \frac{3}{4}\left(\sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x\right) = \frac{3}{4}\sin 4x = VP$

Suy ra đpcm.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin^3\frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B}.\tan B = 2.$$

Hướng dẫn:

Do tam giác ABC có $A+B+C=180^0$, suy ra $A+C=180^0-B$

Do đó, ta có:

$$VT=\frac{\sin^3\frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{180^0-B}{2}\right)}+\frac{\cos^3\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{180^0-B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(180^0-B\right)}{\sin B}.\tan B$$

$$=\frac{\sin^3\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos^3\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}-\frac{-\cos B}{\sin B}.\tan B$$

$$=\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+1=2=VP$$

Suy ra đpcm.

Dạng 3.3: Thu gọn biểu thức lượng giác

a. Phương pháp giải:

Sử dụng công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức hạ bậc, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng) và các giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt để đưa biểu thức ban đầu trở nên đơn giản, ngắn gọn hơn.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

a. $A=\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x.\cos x-\cos x-8\cos x.\cos^3 3x$.

b. $B=\frac{\sin 3x+\cos 2x-\sin x}{\cos x+\sin 2x-\cos 3x}\left(\sin 2x\neq 0;2\sin x+1\neq 0\right)$

Hướng dẫn:

a. Ta có:

$$A=\cos 10x+(1+\cos 8x)-\cos x-2(4\cos^3 3x-3\cos 3x)\cos x$$

$$=(\cos 10x+\cos 8x)+1-\cos x-2\cos 9x.\cos x$$

$= 2\cos 9x.\cos x + 1 - \cos x - 2\cos 9x.\cos x = 1 - \cos x$

b. Ta có:

$$B = \frac{\sin 3x + \cos 2x - \sin x}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x}$$

$$= \frac{2\cos 2x \sin x + \cos 2x}{-2\sin 2x \sin(-x) + \sin 2x}$$

$$= \frac{2\cos 2x \sin x + \cos 2x}{2\sin 2x \sin x + \sin 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x(1 + 2\sin x)}{\sin 2x(1 + 2\sin x)} = \cot 2x.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $C = \sin^2 x + 2\sin\left(a - x\right).\sin x.\cos a + \sin^2\left(a - x\right)$.

Hướng dẫn:

$C = \sin^2 x + 2\sin\left(a - x\right).\sin x.\cos a + \sin^2\left(a - x\right)$

$= \sin^2 x + \sin\left(a - x\right)\left(2\sin x \cos a + \sin\left(a - x\right)\right)$

$= \sin^2 x + \sin\left(a - x\right)\left(2\sin x \cos a + \sin a \cos x - \cos a \sin x\right)$

$= \sin^2 x + \sin\left(a - x\right)\left(\sin x \cos a + \sin a \cos x\right)$

$= \sin^2 x + \sin\left(a - x\right)\sin\left(a + x\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 2a\right)$

$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 a)\right)$

$= \sin^2 x + \sin^2 a - \sin^2 x = \sin^2 a$.

Dạng 3.4: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến

a. Phương pháp giải:

Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến tức là sau khi rút gọn biểu thức ta được kết quả không chứa biến. Do đó, để giải dạng toán này, ta sử dụng công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng) và các giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt để đưa biểu thức ban đầu trở nên đơn giản, ngắn gọn hơn. Nếu biểu thức sau khi thu gọn không chứa biến, ta suy ra điều phải chứng minh.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$= \cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$

$$= \frac{3}{2}.$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào x.

Ví dụ 2: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$C = 2\left(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^8 x + \cos^8 x\right)$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$C = 2\left(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^8 x + \cos^8 x\right)$$

$$= 2\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - \sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \left[\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x\right]$$

$$= 2\left[1 - \sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 + 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= 2\left[1 - \sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \left[1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 + 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= 2\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x\cos^4 x\right) - \left(1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^4 x\cos^4 x\right)$$

$$+2\sin^4 x\cos^4 x$$

$= 2 – 4\sin^2x \cos^2x + 2\sin^4x \cos^4x – 1 + 4\sin^2x \cos^2x – 4\sin^4x \cos^4x + 2\sin^4x \cos^4x$

= 1.

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào x.

Dạng 3.5: Tính giá trị biểu thức

a. Phương pháp giải:

Sử dụng hệ thức cơ bản, các công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức hạ bậc, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng) và các giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt.

b. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính giá trị biểu thức: $A = \cos 10°.\cos 30°.\cos 50°.\cos 70°$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$A = \cos 10°.\cos 30°.\cos 50°.\cos 70°$$

$$= \cos 10°.\cos 30°.\frac{1}{2}\left(\cos 120^o + \cos 20^o\right)$$

$$= \cos 10^o.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^o\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\cos 10^o}{2} + \cos 10^o\cos 20^o\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\cos 10°}{2}+\frac{\cos 30°+\cos 10°}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\cos 30°}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{16}.$$

Ví dụ 2: Cho $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha.\cos 3\alpha$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$P=\cos\alpha.\cos 3\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2.\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}-1\right]=\frac{5}{18}.$$

3. Bài tập tự luyện

a. Tự luận

Câu 1: Cho $x+y+z=\pi$, chứng minh rằng: tanx + tany + tanz = tanx . tany . tanz.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết, ta có:

$$x+y+z=\pi\Leftrightarrow x+y=\pi-z$$

$$\Rightarrow \tan\left(x+y\right)=\tan\left(\pi-z\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=-\tan z$

$\Leftrightarrow \tan x+\tan y=-\tan z+\tan x.\tan y.\tan z$

$\Leftrightarrow \tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z$

Suy ra đpcm.

Câu 2: Cho $\sin x+\sin y=2\sin\left(x\ +\ y\right)$, với $x+y\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $\tan\dfrac{x}{2}.\tan\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết, ta có:

$\sin x+\sin y=2\sin\left(x+y\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2}=4\sin\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{x-y}{2}=2\cos\dfrac{x+y}{2}$ (do $x+y\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{y}{2}+\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{y}{2}=2\left(\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{y}{2}-\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{y}{2}=\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{y}{2}\Leftrightarrow \tan\dfrac{x}{2}.\tan\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3}$

Suy ra đpcm.

Câu 3: Cho $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn:

Ta có: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$).

Ta có: $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$.

Câu 4: Tính giá trị biểu thức $M = \cos(-53^\circ).\sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ.\sin 113^\circ$.

Hướng dẫn:

$M = \cos(-53^\circ).\sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ.\sin 113^\circ$

$= \cos(-53^\circ).\sin(23^\circ - 360^\circ) + \sin(-53^\circ + 360^\circ).\sin(90^\circ + 23^\circ)$

$= \cos(-53^\circ).\sin 23^\circ + \sin(-53^\circ).\cos 23^\circ$

$= \sin(23^\circ - 53^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

Câu 5: Cho số thực α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Tính $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$.

Hướng dẫn:

Ta có: $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$

$= (2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$

$= 2\sin 2\alpha(\cos 2\alpha + 1)\cos\alpha$

$= 4\sin\alpha\cos\alpha(1 - 2\sin^2\alpha + 1)\cos\alpha$

$= 4\sin\alpha\cos^2\alpha(2 - 2\sin^2\alpha)$

$= 4\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)(2 - 2\sin^2\alpha)$

$= 8(1 - \sin^2\alpha)^2 \sin\alpha$

$= 8\left(1 - \frac{1}{16}\right)^2 . \frac{1}{4} = \frac{225}{128}$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}$.

Hướng dẫn:

$P = \dfrac{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a}{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}$

$= \dfrac{2\cos 3a\cos 2a + 2\cos 3a}{2\sin 3a\cos 2a + 2\sin 3a}$

$= \dfrac{2\cos 3a\left(\cos 2a + 1\right)}{2\sin 3a\left(\cos 2a + 1\right)}$

$= \dfrac{\cos 3a}{\sin 3a} = \cot 3a$.

Câu 7: Chứng minh biểu thức $A = \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x.

Hướng dẫn:

Ta có: $A = \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}$

$= \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\tan^2 x}\cdot\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2$

$= \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{\left(1 + \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x}$

$= \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2 - \left(1 + \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x}$

$= \dfrac{-4\tan^2 x}{4\tan^2 x} = -1$.

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào biến.

Câu 8: Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1}{2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1}$.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$A=\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}$$

$$=\frac{\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha}{\sqrt{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha}$$

$$=\frac{\sin\left(4\alpha+30^\circ\right)}{\sin\left(4\alpha-30^\circ\right)}.$$

Câu 9: Biến đổi biểu thức $\sin\alpha-1$ thành tích các biểu thức.

Hướng dẫn:

Ta có:

$$\sin\alpha-1=\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Câu 10: Biết $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ và $\alpha\neq k\pi$. Chứng minh biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\beta\right)-\frac{4\cos\left(\alpha+\beta\right)}{\sqrt{3}}}{\sin\alpha}$$ không phụ thuộc vào α.

Hướng dẫn:

Ta có $\begin{cases} 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\beta = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{3}{5}$

$$A = \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta) - \dfrac{4\cos(\alpha+\beta)}{\sqrt{3}}}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{3(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - 4(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\sqrt{3}\sin\alpha}$$

$$= \frac{3\left(\dfrac{3}{5}\sin\alpha + \dfrac{4}{5}\cos\alpha\right) - 4\left(\dfrac{3}{5}\cos\alpha - \dfrac{4}{5}\sin\alpha\right)}{\sqrt{3}\sin\alpha}$$

$$= \frac{5\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào biến α.

b. Trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả nào sau đây sai?

A. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$**.**

B. $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$**.**

C. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$**.**

D. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 2: Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A. $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$**.**

B. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

C. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

D. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Câu 3: Nếu $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ thì sin2x bằng

A. $\dfrac{3}{4}$.

B. $\dfrac{3}{8}$.

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\dfrac{-3}{4}$.

Câu 4: Cho hai góc nhọn a và b. Biết $\cos a = \dfrac{1}{3}$, $\cos b = \dfrac{1}{4}$. Giá trị $\cos(a+b).\cos(a-b)$ bằng:

A. $-\dfrac{113}{144}$.

B. $-\dfrac{115}{144}$.

C. $-\dfrac{117}{144}$.

D. $-\dfrac{119}{144}$.

Câu 5: Cho $\cos x = 0$. Tính $A = \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{1}{4}$.

Đáp án:

Câu 1	**Câu 2**	**Câu 3**	**Câu 4**	**Câu 5**
C	B	D	D	A