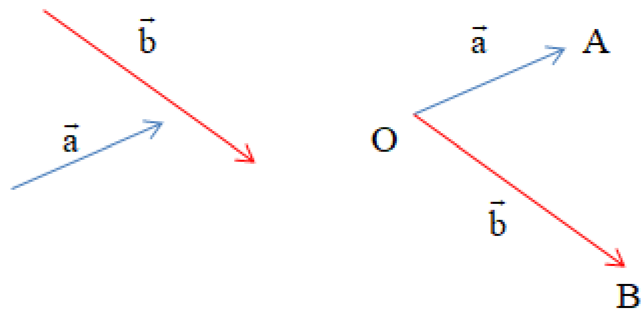
Bài 4. Tích vô hướng của hai vectơ

A. Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Góc AOB với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Chú ý:

+ Từ định nghĩa, ta có $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$.

+ Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.

+ Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

+ Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ$

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ$

Ví dụ: Cho hình thoi ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính số đo các góc:

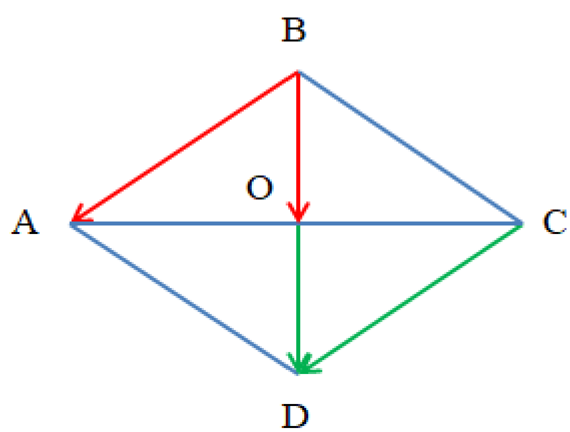
a) $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CD}\right)$.

b) $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right)$.

c) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}\right)$.

d) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Hướng dẫn giải



a) Vì O là giao điểm của hai đường chéo nên O là trung điểm BD (tính chất hình thoi).

Suy ra OD = BO.

Mà $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ (1).

Vì ABCD là hình thoi nên ta có CD // BA và CD = BA.

Mà $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ (2).

Từ (1) (2), ta suy ra $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}\right) = OBA$.

Vì ABCD là hình thoi nên AB = AD.

Do đó tam giác ABD cân tại A.

Mà $BAD = 60°$.

Suy ra tam giác ABD đều.

Do đó $DBA = 60°$ hay $OBA = 60°$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CD}\right) = OBA = 60°$.

b) Vì O là giao điểm của hai đường chéo nên O là trung điểm AC (tính chất hình thoi).

Do đó AO = OC.

Mà $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng.

Do đó $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Ta suy ra $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = BOC$.

Vì ABCD là hình thoi nên hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

Do đó $BOC = 90°$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right) = BOC = 90°$.

c) Vì $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC}\right) = 0°$.

d) Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}\right) = 180°$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Chú ý:

a) Trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

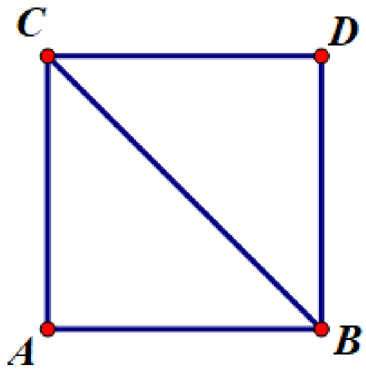
b) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0° = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có AB = AC = a. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải



- Tam giác ABC vuông cân tại A nên AB ⊥ AC.

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

- Vẽ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó ta có $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = CBD$.

Vì $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ nên ta có ABDC là hình bình hành.

Mà $BAC = 90°$ và AB = AC (tam giác ABC vuông cân tại A).

Do đó ABDC là hình vuông.

Ta suy ra đường chéo BC là phân giác của ABD.

Do đó $CBD = \dfrac{ABD}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

Khi đó ta có $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = CBD = 45°$.

Tam giác ABC vuông cân tại A: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = AC.BC.\cos 45° = a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

- Tam giác ABC cân tại A. Ta suy ra $ACB = ABC$.

Tam giác ABC vuông tại A: $ACB + ABC = 90°$.

$\Leftrightarrow 2ABC = 90°$.

Do đó $ABC = 45°$.

Suy ra $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = ABC = 45°$.

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = BA.BC.\cos 45° = a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Chú ý: Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F}.\vec{d}$.

Ví dụ: Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 150 N kéo một thùng gỗ trượt trên sàn nhà bằng một sợi dây có phương hợp góc 45° so với phương ngang. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thùng gỗ trượt được 40 m.

Hướng dẫn giải

Gọi A, $\vec{d}$ lần lượt là công sinh bởi lực $\vec{F}$ và độ dịch chuyển của thùng gỗ.

Theo đề, ta có lực $\vec{F}$ hợp với phương ngang (hướng dịch chuyển) một góc 45°.

Suy ra $\left(\vec{F}, \vec{d}\right) = 45°$.

Ta có A = $\vec{F}.\vec{d} = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{F}, \vec{d}\right) = 150.40.\cos 45° = 3000\sqrt{2}$ (J).

Vậy công sinh bởi lực $\vec{F}$ là $3000\sqrt{2}$ (J).

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$; $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

Ví dụ: Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng:

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có a = BC, b = AC, c = AB. Tính cạnh BC theo hai cạnh còn lại và góc A bằng cách sử dụng tính chất của vectơ và tích vô hướng của hai vectơ.

Hướng dẫn giải

Ta có $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$$= AC^2 + AB^2 - 2.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$$

$= AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB.\cos BAC$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos A$

Vậy $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos A$ hay $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$.

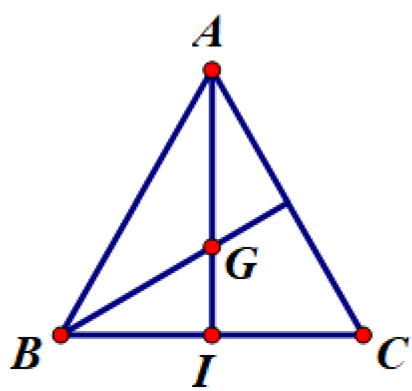
B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a và trọng tâm G. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải



a) Tam giác ABC đều nên ta có AB = AC = BC = a và $BAC = 60°$.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB.AC.\cos BAC = a.a.\cos 60° = \frac{a^2}{2}$.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Nên AG là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Do đó AG cũng là đường phân giác và cũng là đường cao của tam giác ABC.

Ta suy ra $\widehat{GAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Gọi I là giao điểm của AG và BC.

Ta suy ra I là trung điểm BC.

Do đó BI = $\frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác ABI vuông tại I: $AI^2 = AB^2 - BI^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều có G là trọng tâm.

Ta suy ra AG = $\frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AG}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}\right) = AG.AB.\cos\widehat{GAB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} \quad (3)$

Lấy (1) + (2) + (3) vế theo vế, ta được: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

Theo đề ta có: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 + \frac{2}{5}\vec{a}.\vec{b} - 3\vec{a}.\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}|\vec{a}|^2 - \frac{13}{5}\vec{a}.\vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}.1^2 - \frac{13}{5}|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - 3.1^2 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{13}{5} - \frac{13}{5}.1.1.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180°$.

Vậy góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 180°.