Bài 1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

A. Lý thuyết

I. Khái niệm mở đầu.

1. Mặt phẳng

- Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.

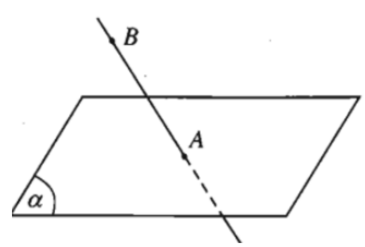
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Ví dụ: mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β)…

2. Điểm thuộc mặt phẳng.

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

- Khi điểm A *thuộc mặt phẳng* (α) ta nói A *nằm trên* (α) hay (α) *chứa* A, hay (α) *đi qua* A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.

- Khi điểm A *không thuộc mặt phẳng* (α) ta nói điểm A *nằm ngoài* (α) hay (α) *không chứa* A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$.

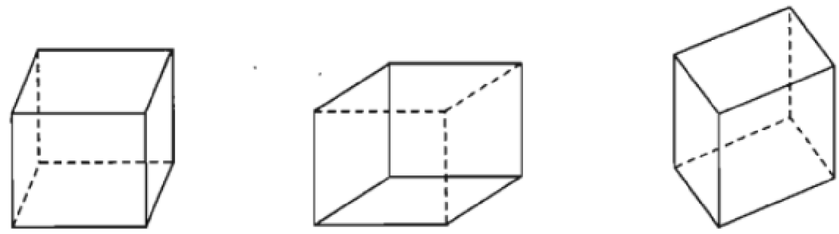


Hình trên cho ta hình biểu diễn của điểm A thuộc mặt phẳng (α), còn điểm B không thuộc (α).

3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để nghiên cứu hình học không gian người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

- Dưới đây là một vài hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật.



Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây:

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

- Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

II. Các tính chất thừa nhận

- **Tính chất 1.** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

- **Tính chất 2.** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là mặt phẳng (ABC) hoặc mp(ABC) hoặc (ABC).

- **Tính chất 3**. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

- **Tính chất 4.** Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

- **Tính chất 5**. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

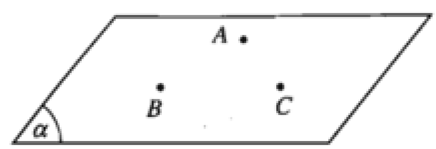
Từ đó suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là giao tuyến của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

- **Tính chất 6.** Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

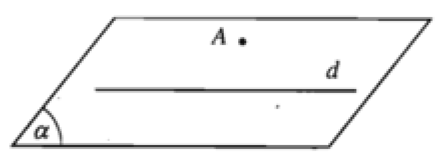
III. Cách xác định mặt phẳng

1) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



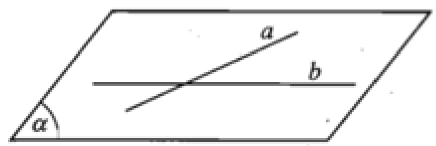
2) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp(A, d) hay (A, d) hoặc mp(d, A) hay (d, A).



3) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp(a, b) hay (a, b) hoặc mp(b, a) hay (b, a).



IV. Hình chóp và hình tứ diện

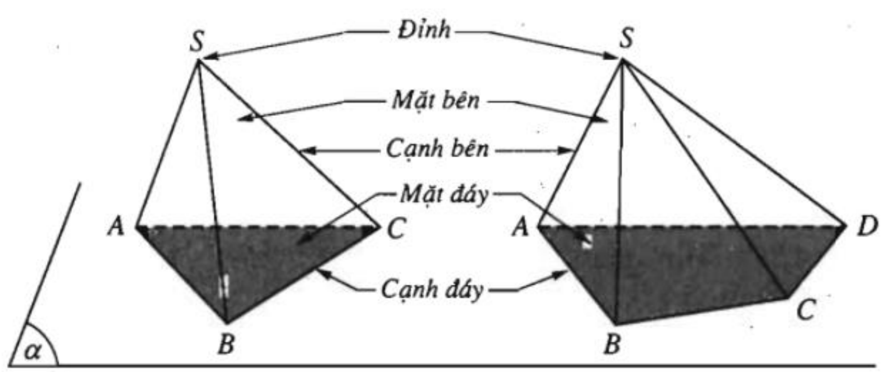
1. Hình chóp

Trong mp(α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2,..,A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,\ldots, SA_nA_1$.

Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,\ldots, SA_nA_1$ gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2\ldots A_n$.

Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,\ldots, SA_nA_1$ gọi là các *mặt bên*, các đoạn $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ là các *cạnh bên*; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,.. lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác…



2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD.

Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh* của tứ diện.

Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh* của tứ diện.

Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện.

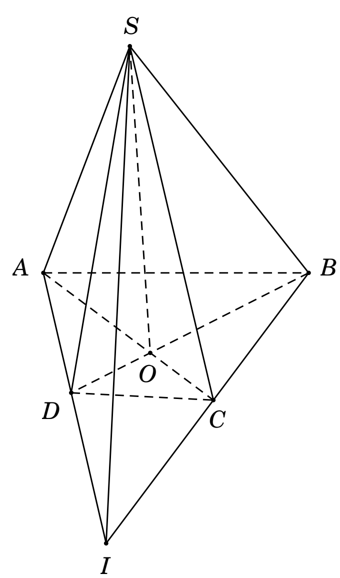
Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

Hình tứ diện có 4 mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.

- Chú ý. Khi nói đến tam giác ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của tam giác đó. Tương tự có thể hiểu như vậy đối với đa giác.

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB // CD).
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
a) (SAC) và (SBD).
b) (SAD) và (SBC).
Lời giải:



a) Trong mp(ABCD), gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
Lại có: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$
Suy ra, O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

b) Trong mp(ABCD), gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

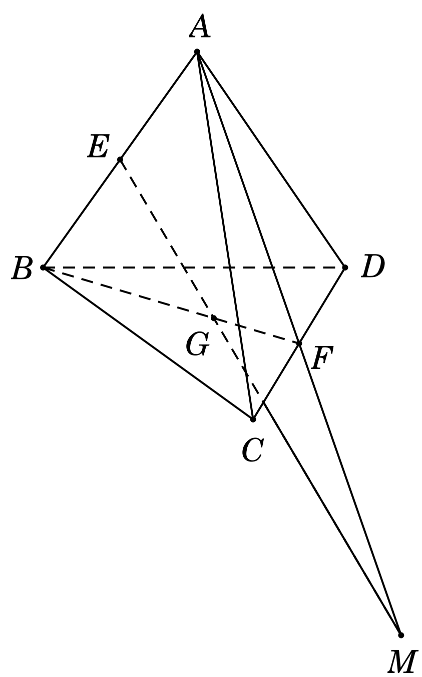
Lại có: $\begin{cases} I \in AD \subset (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \\ I \in BC \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC) \end{cases}$

Suy ra, I là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD)?

Lời giải:



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của CD nên $G \in$ mp(ABF)

Ta có E là trung điểm của AB nên $E \in (ABF)$.

Chọn mp phụ chứa EG là (ABF)

+ Tìm giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) ta có:

A là điểm chung thứ nhất.

$\begin{cases} F \in (ABF) \\ F \in CD \subset (ACD) \Rightarrow F \in (ACD) \end{cases}$

Suy ra F là điểm chung thứ hai .

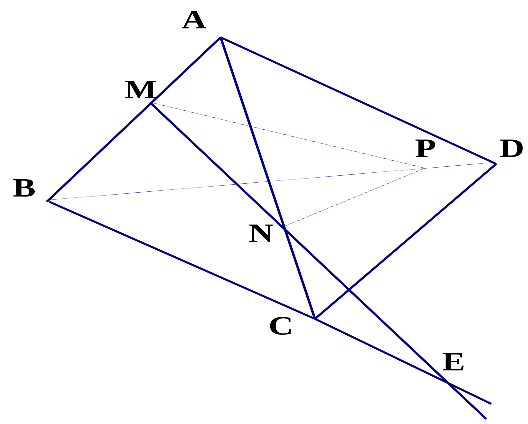
Do đó, giao tuyến của mp(ABF) và mp(ACD) là AF.

Trong mp(ABF), kéo dài AF cắt EG tại M. Khi đó, M là giao điểm của EG và mp(ACD).

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải:



- Ta có:

$P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$

$P \in MP \subset (MNP)$

Suy ra, P là điểm chung của mp(BCD) và mp(MNP). (1)

- Trong mp (ABC), gọi E là giao điểm MN và BC

$E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

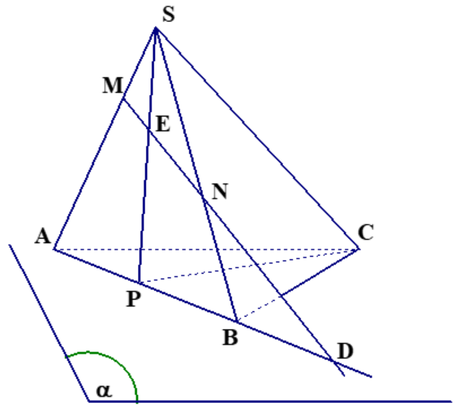
Suy ra, E là điểm chung của mp(BCD) và mp(MNP). (2)

- Từ (1), (2) suy ra PE là giao tuyến của mp(BCD) và mp(MNP).

Bài 2. Trong mp(α) cho tam giác ABC. Một điểm S không thuộc (α). Trên cạnh AB lấy một điểm P và rên các đoạn thẳng SA, SB ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho MN không song song với AB.

Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC).

Lời giải:



Cách 1: Trong (SAB) , gọi E = SP $\cap$ MN ta có:

E $\in$ SP mà SP $\subset$ (SPC) $\Rightarrow$ E $\in$(SPC)

E $\in$ MN

Vậy E = MN $\cap$ (SPC)

Cách 2: Chọn mp phụ chứa MN là mp(SAB).

Ta có: (SAB) $\cap$ (SPC) = SP

Trong (SAB), gọi E = MN $\cap$ SP ta có:

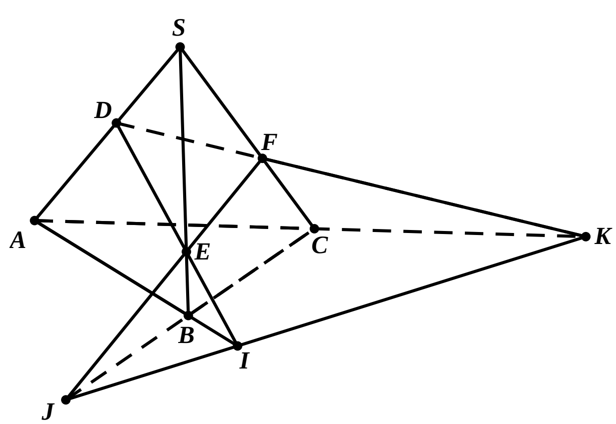
E $\in$ MN

E $\in$ SP mà SP $\subset$ (SPC)

Vậy : E = MN $\cap$ (SPC).

Bài 3. Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:



Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$I \in AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$.

Suy ra, I thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (1)

Tương tự :

$$J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \subset (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$$

Suy ra, J thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (2)

$$K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$$

Suy ra, K thuộc giao tuyến của hai mp(DEF) và (ABC). (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (DEF) và (ABC) nên chúng thẳng hàng.