

Công thức tính tổng n số hạng của cấp số cộng

1. Lý thuyết

Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Trong đó: u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng

d là công sai của cấp số cộng.

2. Công thức

$$\text{Tổng } n \text{ số hạng đầu tiên } S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Tổng của số hạng thứ k đến số hạng thứ n của dãy (với $k < n$):

$$S = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n = S_n - S_{k-1}$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$; $u_{20} = 60$.

a) Tính tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Tính tổng $S = u_{21} + u_{22} + u_{23} + \dots + u_{200}$.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có:

$$u_{20} - u_5 = u_1 + 19d - u_1 - 4d = 15d.$$

Khi đó: $15d = 60 - (-15) = 75$. Suy ra: $d = 5$.

Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = -15 \Leftrightarrow u_1 = -15 - 4d = -35$.

a) Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng:

$$S_{20} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{20[2 \cdot (-35) + 19 \cdot 5]}{2} = 250$$

$$\text{b) } S_{200} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{200[2 \cdot (-35) + 199 \cdot 5]}{2} = 92500$$

$$S = u_{21} + u_{22} + u_{23} + \dots + u_{200} = S_{200} - S_{20} = 92500 - 250 = 92250.$$

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) có dạng $u_n = 4n - 1$.

a) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Tính tổng $S = u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + \dots + u_{301}$.

Lời giải

Ta có $u_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$ và $d = u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - (4n - 1) = 4$

a) Tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng

$$S_{100} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{100[2.3 + 99.4]}{2} = 20100$$

b) Dãy số là (v_n) : $u_1; u_4; u_7; u_{10}; \dots u_{301}$ là cấp số cộng với số hạng đầu tiên là u_1 và công sai $d' = u_4 - u_1 = 3d = 12$.

Dãy (v_n) có $\frac{301-1}{3} + 1 = 101$ số hạng

$$S = u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + \dots + u_{301}$$

$$= \frac{101.[2.3 + 100.12]}{2} = 60903.$$