

Bài 2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

A. Lý thuyết

1. Hoán vị

– Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi cách sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự gọi là một **hoán vị** các phần tử đó (gọi tắt là hoán vị của A hay của n phần tử).

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử.

– Số các hoán vị của n phần tử ($n \geq 1$) bằng:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1.$$

Chú ý:

+ Ta đưa vào kí hiệu $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$ và đọc là *n giai thừa* hoặc *giai thừa của n*.

Khi đó $P_n = n!$.

+ Quy ước: $0! = 1$.

Ví dụ: Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau từ các chữ số 1; 2; 3; 5; 6; 7? Trong những số đó có bao nhiêu số lẻ?

Hướng dẫn giải

• Mỗi số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được lập từ 6 chữ số 1; 2; 3; 5; 6; 7 là một hoán vị của 6 chữ số này. Do đó, số số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau lập được là:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (số)}.$$

Vậy lập được 720 số.

Ta lập số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau từ các chữ số 1; 2; 3; 5; 6; 7.

- Bước 1: Chọn chữ số hàng đơn vị là chữ số lẻ.

Có 4 cách chọn (chọn một trong các chữ số 1; 3; 5; 7).

Bước 2: Chọn năm chữ số còn lại.

Có $P_5 = 5!$ cách chọn.

Từ đó, theo quy tắc nhân, số số tự nhiên lẻ có sáu chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho là:

$$4 \cdot 5! = 480 \text{ (số)}.$$

2. Chỉnh hợp

– Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$) và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi cách lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử.

– Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nhận xét: Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là chỉnh hợp chập n của n phần tử đó.

Ta có $P_n = A_n^n$, $n \geq 1$.

Ví dụ: Trên bàn có 10 quả cam to nhỏ khác nhau. Chọn 3 quả cam trong 10 quả đó, và đặt mỗi quả vào một giỏ nhựa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 quả cam đó.

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn 3 quả cam trong 10 quả cam đó và đặt vào 3 giỏ nhựa được gọi là một chỉnh hợp chập 3 của 10 quả cam. Ta thấy số các chỉnh hợp này bằng:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Vậy có 720 cách chọn 3 quả cam đó.

3. Tổ hợp

– Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi tập con gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) của A được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử.

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$).

– Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chú ý: Người ta quy ước $C_n^0 = 1$.

Nhận xét: $C_n^k = C_n^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$).

Ví dụ: Lớp 10A có 20 học sinh. Trong tuần sau có 5 bạn được cử đi dự đại hội Đoàn Thanh niên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh trong lớp đi dự đại hội Đoàn Thanh niên?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn 5 bạn học sinh trong lớp từ 20 bạn học sinh là một tổ hợp chập 5 của 20 học sinh. Do đó số cách chọn 5 bạn học sinh trong lớp đi dự đại hội Đoàn Thanh niên là:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{5!.15!} = 15\,504 \text{ (cách).}$$

Vậy có 15 504 cách chọn 5 bạn học sinh trong lớp đi dự đại hội Đoàn Thanh niên.

Ví dụ: Tính:

a) C_{14}^{11} ;

b) $C_{24}^{22} + C_{24}^2$;

c) $C_{27}^2 - C_{26}^2$.

Hướng dẫn giải

a) $C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!.3!} = \frac{14.13.12.11!}{11!.3.2.1} = \frac{14.13.12}{3.2.1} = 364.$

b) $C_{24}^{22} + C_{24}^2 = C_{24}^{24-2} + C_{24}^2 = C_{24}^2 + C_{24}^2 = 2C_{24}^2$

$$= 2 \cdot \frac{24!}{2!.22!} = 2 \cdot \frac{24.23.22!}{2.1.22!} = 24.23 = 552.$$

c) $C_{27}^2 - C_{26}^2 = \frac{27!}{2!.25!} - \frac{26!}{2!.24!} = \frac{27.26.25!}{2.1.25!} - \frac{26.25.24!}{2.1.24!}$

$$= \frac{27.26}{2.1} - \frac{26.25}{2.1} = \frac{26}{2} \cdot (27 - 25) = 13.2 = 26.$$

4. Tính số các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp bằng máy tính cầm tay

Với một số máy tính cầm tay, ta có thể tính toán nhanh các số các hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Ví dụ:

- Để tính P_{10} ta ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{10} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^{-1}} \boxed{(x!)} \boxed{=}$

Ta nhận được kết quả là 3 628 800.

- Để tính A_6^4 ta ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{6} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times} \boxed{(nPr)} \boxed{4} \boxed{=}$

Ta nhận được kết quả là 360.

- Để tính C_8^4 ta ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{8} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\div} \boxed{(nCr)} \boxed{4} \boxed{=}$

Ta nhận được kết quả là 70.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Có 6 chiếc ghế ở trong một phòng học. Hỏi có 6 học sinh ngồi vào thì có bao nhiêu cách xếp? Nếu có một bạn An (có trong 6 học sinh trên) muốn ngồi vào chiếc ghế ngoài cùng bên trái thì có bao nhiêu cách xếp?

Hướng dẫn giải

- Mỗi cách xếp 6 học sinh vào 6 chiếc ghế là một hoán vị của 6 học sinh. Do đó, số cách sắp xếp 6 học sinh vào 6 chiếc ghế trông là:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ cách.}$$

Vậy có 720 cách xếp 6 học sinh vào 6 ghế trống.

- Bạn An muốn ngồi vào chiếc ghế ngoài cùng bên trái nên chỉ còn 5 ghế trống và 5 học sinh.

Do đó, số cách xếp 5 học sinh vào 5 chiếc ghế trống là:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ cách.}$$

Vậy bạn An muốn ngồi vào chiếc ghế bên trái cùng thì có 120 cách xếp.

Bài 2. Trong một đại hội Đoàn gồm có 10 ứng viên. Người ta cần bầu ra một chủ tịch, một phó chủ tịch, một ủy viên và một thư kí. Hỏi có bao nhiêu khả năng có thể về kết quả bầu này?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách chọn 4 người trong số 10 ứng viên để vào 4 vị trí (chủ tịch, phó chủ tịch, ủy viên và thư kí) là một chỉnh hợp chập 4 của 10 ứng viên. Do đó có số khả năng có thể về kết quả bầu này là:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{4!} = 5\,040.$$

Vậy có 5 040 khả năng có thể về kết quả bầu.

Bài 3. Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên trong tập hợp các số tự nhiên có 2 chữ số chia hết cho 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 số tự nhiên đó.

Hướng dẫn giải

Các số tự nhiên có 2 chữ số chia hết cho 10 là: 10; 20; 30; ...; 90.

Do đó có 9 số tự nhiên có 2 chữ số chia hết cho 10.

Mỗi cách chọn 3 số trong 9 số tự nhiên ở trên là một tổ hợp chập 3 của 9 số tự nhiên. Do đó, số cách chọn 3 số trong 9 số này là:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!.6!} = 84 \text{ cách.}$$

Vậy có 84 cách chọn 3 số tự nhiên trong tập hợp các số tự nhiên có 2 chữ số chia hết cho 10.

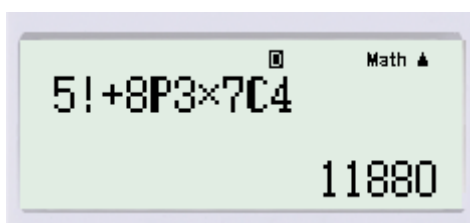
Bài 4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính biểu thức sau: $P_5 + A_8^3.C_7^4$.

Hướng dẫn giải

Ta ấn lần lượt các phím sau:

5 ; Shift ; x^{-1} ; + ; 8 ; Shift ; \times ; 3 ; \times ; 7 ; Shift ; \div ; 4 ; =.

5 [SHIFT] x^{-1} + 8 [SHIFT] \times 3 \times 7 [SHIFT] \div 4 [=]



Ta được kết quả là: 11880.

Bài 5. Trong một chiếc hộp đựng 6 viên bi đỏ, 8 viên bi xanh, 10 viên bi trắng. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi trong mỗi trường hợp sau:

- 4 viên bi có màu bất kì.
- 4 viên bi được chọn có đúng hai viên bi màu trắng.

Hướng dẫn giải

a) Có tất cả: $6 + 8 + 10 = 24$ viên bi trong hộp.

Chọn ra 4 viên bi trong tổng số 24 viên bi là tổ hợp chập 4 của 24.

Do đó số cách chọn ra 4 viên bi có màu bất kì trong hộp là: $C_{24}^4 = 10626$ (cách).

Vậy có 10 626 cách chọn ra 4 viên bi có màu bất kì.

b) Chọn ra 4 viên bi trong đó có đúng hai viên bi màu trắng ta chia làm hai công đoạn:

Công đoạn 1: chọn ra 2 viên bi màu trắng trong 10 viên bi màu trắng là tổ hợp chập 2 của 10. Do đó có $C_{10}^2 = 45$ (cách).

Công đoạn 2: chọn ra 2 viên bi trong 14 viên bi còn lại là tổ hợp chập 2 của 14. Do đó có $C_{14}^2 = 91$ (cách).

Theo quy tắc nhân ta có: $45.91 = 4\,095$ cách chọn ra 4 viên bi trong đó có đúng 2 viên bi màu trắng.