CHUYÊN ĐỀ 2. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON.

Bài cuối chuyên đề 2

Trang 38

Bài 2.19 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có

$2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + (n + 1).2^n = n.2^{n+1}$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $2.2^1 = 4 = 1.2^{1+1}$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có:

$2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + (k + 1).2^k = k.2^{k+1}$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh:

$2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + (k + 1).2^k + [(k + 1) + 1].2^{k+1} = (k + 1)2^{(k+1)+1}$.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + (k + 1).2^k + [(k + 1) + 1].2^{k+1}$

$= k.2^{k+1} + [(k + 1) + 1].2^{k+1}$

$= (2k + 2).2^{k+1}$

$= (k + 1).2.2^{k+1}$

$= (k + 1)2^{k+2}$

$= (k + 1).2^{(k+1)+1}$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.20 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Đặt $S_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh nó bằng quy nạp.

Lời giải:

a) $S_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}, S_2 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} = \frac{2}{5}, S_3 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} = \frac{3}{7}.$

b) Từ a) ta có thể dự đoán $S_n = \frac{n}{2n+1}.$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 1 ta có $S_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2.1+1}.$

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 1.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $S_k = \frac{k}{2k+1}.$

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $S_{k+1} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}.$

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]}$$

$$= S_k + \frac{1}{\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}.$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2.21 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có $10^{2n+1} + 1$ chia hết cho 11.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 0 ta có $10^{2.0+1} + 1 = 11 \vdots 11$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 0.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $10^{2k+1} + 1$ chia hết cho 11.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $10^{2(k+1)+1} + 1$ chia hết cho 11.

Thật vậy, ta có:

$10^{2(k+1)+1} + 1$

$= 10^{(2k+1)+2} + 1$

$= 100.10^{2k+1} + 1$

$= 100.10^{2k+1} + 100 – 100 + 1$

$= 100(10^{2k+1} + 1) – 100 + 1$

$= 100(10^{2k+1} + 1) – 99$.

Vì $10^{2k+1} + 1$ và 99 đều chia hết cho 11 nên $100(10^{2k+1} + 1) – 99$ chia hết cho 11. Do đó $10^{2(k+1)+1} + 1$ chia hết cho 11.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 2.22 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có $5^n \geq 3^n + 4^n$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Bước 1. Với n = 2 ta có $5^2 = 25 = 3^2 + 4^2$.

Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp n = 2.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với n = k, tức là ta có: $5^k \geq 3^k + 4^k$.

Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đủng với n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh: $5^{k+1} \geq 3^{k+1} + 4^{k+1}$.

Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp ta có:

$5^{k+1} = 5.5^k \geq 5(3^k + 4^k) = 5.\ 3^k + 5.4^k \geq 3.\ 3^k + 4.4^k = 3^{k+1} + 4^{k+1}$.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 2.23 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

a) Khai triển $(1 + x)^{10}$.

b) $(1,1)^{10}$ và 2.

Lời giải:

a) $\left(1+x\right)^{10} = C_{10}^{0}1^{10} + C_{10}^{1}1^{9}x + C_{10}^{2}1^{8}x^{2} + ... + C_{10}^{9}1x^{9} + C_{10}^{10}x^{10}$

$= 1 + C_{10}^{1}x + C_{10}^{2}x^{2} + ... + C_{10}^{9}x^{9} + x^{10}$.

b) Áp dụng câu a) ta có:

$\left(1,1\right)^{10} = \left(1+0,1\right)^{10}$

$= 1 + C_{10}^{1}.0,1 + C_{10}^{2}\left(0,1\right)^{2} + ... + C_{10}^{9}\left(0,1\right)^{9} + \left(0,1\right)^{10} > 1 + C_{10}^{1}.0,1 = 2.$

Bài 2. trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Tìm hệ số của x^9 trong khai triển thành đa thức của $(2x – 3)^{11}$.

Lời giải:

Số hạng chứa x^9 trong khai triển thành đa thức của $(2x – 3)^{11}$ là

$C_{11}^{11-9}\left(2x\right)^{9}\left(-3\right)^{11-9} = C_{11}^{2}2^{9}x^{9}\left(-3\right)^{2} = C_{11}^{2}2^{9}3^{2}x^{9} = 253440x^{9}$.

Vậy hệ số của x^9 trong khai triển thành đa thức của $(2x – 3)^{11}$ là 253440.

Bài 2.25 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Khai triển đa thức $(1 + 2x)^{12}$ thành dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{12}x^{12}$.

Tìm hệ số a_k lớn nhất.

Lời giải:

Số hạng chứa x^k trong khai triển thành đa thức của $(1 + 2x)^{12}$ hay $(2x + 1)^{12}$ là

$C_{12}^{12-k}\left(2x\right)^k 1^{12-k} = C_{12}^k 2^k x^k$.

Do đó $a_k = C_{12}^k 2^k$.

Thay các giá trị của k từ 0 đến 12 vào a_k ta thấy a_8 có giá trị lớn nhất và bằng 126720.

Bài 2.26 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Chứng minh rằng $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}$.

Áp dụng: Tìm số nguyên dương n thoả mãn $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

Lời giải:

Xét:

$$M = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n};$$
$$N = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n};$$
$$P = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n};$$
$$Q = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1}.$$

+) Ta có:

$$(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1}1 + C_{2n}^2 x^{2n-2}1^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x 1^{2n-1} + C_{2n}^{2n}1^{2n}$$
$$= C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.$$

Cho x = 1, ta được:

$$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 1^{2n} + C_{2n}^1 1^{2n-1} + C_{2n}^2 1^{2n-2} + \ldots + C_{2n}^{2n-1}1 + C_{2n}^{2n}$$
$$= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.$$

Vậy $M = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

+) Ta có:

$$(x-1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1}1 + C_{2n}^2 x^{2n-2}1^2 - \ldots - C_{2n}^{2n-1} x 1^{2n-1} + C_{2n}^{2n}1^{2n}$$
$$= C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} - \ldots - C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.$$

Cho x = 1, ta được:

$$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 1^{2n} - C_{2n}^1 1^{2n-1} + C_{2n}^2 1^{2n-2} - \ldots - C_{2n}^{2n-1}1 + C_{2n}^{2n}$$
$$= C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.$$

Vậy $N = (1-1)^{2n} = 0$

Ta có: $P+Q=M=2^{2n}$ và $P-Q=N=0$ nên $P=Q=2^{2n}:2=2^{2n-1}$.

Áp dụng: $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}=2048\Rightarrow 2^{2n-1}=2048\Rightarrow 2n-1=11\Rightarrow n=6.$

Bài 2.27 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

Áp dụng: Tìm hệ số lớn nhất của khai triển $(a + b)^n$, biết rằng tổng các hệ số của khai triển bằng 4096.

Lời giải:

+) Ta có:

$$C_n^k \le C_n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \le \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)!(n-k-1)! \le k!(n-k)!$$

$\Leftrightarrow k+1 \le n-k \Leftrightarrow 2k \le n-1$ (*).

– Nếu n lẻ thì $(*) \Leftrightarrow k \le \frac{n-1}{2}$. Từ đây ta có $C_n^k \ge C_n^{k+1} \Leftrightarrow k \ge \frac{n-1}{2}$.

$$\Rightarrow C_n^0 \le C_n^1 \le \ldots \le C_n^{\frac{n-1}{2}} \le C_n^{\frac{n+1}{2}} \le \ldots \le C_n^n.$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $k=\frac{n-1}{2}$.

Do đó có hai số có giá trị lớn nhất là $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ và $C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

– Nếu n chẵn thì $(*) \Leftrightarrow k \le \left[\frac{n-1}{2}\right] = \frac{n}{2}-1$. Từ đây ta có $C_n^k \ge C_n^{k+1} \Leftrightarrow k \ge \frac{n}{2}-1$.

$$\Rightarrow C_n^0 \le C_n^1 \le \ldots \le C_n^{\frac{n}{2}} \le \ldots \le C_n^n.$$

Dấu "=" không xảy ra với bất kì giá trị k nào.

Do đó chỉ có đúng một số có giá trị lớn nhất là $C_n^{\frac{n}{2}}$.

+) Áp dụng:

Tổng các hệ số của khai triển $(a + b)^n$ bằng 4096

$$\Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 4096 \Rightarrow 2^n = 4096 \Rightarrow n = 12$$

$\Rightarrow$ Hệ số lớn nhất của khai triển là $C_{12}^6 = 924$.

Bài 2.28 trang 38 Chuyên đề Toán 10:

Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khai triển $(p + q)^n$ với $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$.

Lời giải:

SAI ĐỀ!