Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Lý thuyết

a) Định nghĩa đạo hàm

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a;b)$. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0.

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Như vậy ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

- Nhận xét:

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Trong đó Δx được gọi là số gia của biến số tại x_0

Δy gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại x_0.

b) Đạo hàm một bên

- Đạo hàm bên trái của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^-)$ được định nghĩa là:

$$f'(x_0^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

trong đó $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x < x_0$.

- Đạo hàm bên phải của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$ được định nghĩa là:

$$f'(x_0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

trong đó $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x > x_0$.

- Định lí: Hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu $f'\left(x_0^-\right)$ và $f'\left(x_0^+\right)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó ta có:

$f'\left(x_0\right)=f'\left(x_0^+\right)=f'\left(x_0^-\right)$.

c) Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số y = f(x) có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên (a; b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a; b).

- Hàm số y = f(x) có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên [a; b] nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a; b) đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

d) Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Muốn tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta có 2 cách:

- Cách 1:

Bước 1: Với Δx là số gia của đối số tại x_0 ta tính $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

Bước 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

- Cách 2: Đạo hàm của hàm số tại x_0 là $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$

e) Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Định lí: Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0.

2. Các dạng bài tập

Dạng 1: Tìm số gia của hàm số

Phương pháp giải:

Để tính số gia của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức: $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tìm số gia của hàm số y = f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2$, biết rằng:

a) $x_0 = 1;\ \Delta x = 1$

b) $x_0 = 1;\ \Delta x = -0,1$.

Lời giải

a) Số gia của hàm số là:

$\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(2\right) - f\left(1\right)$

$= 2^3 - 3.2^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = -2$.

b) Số gia của hàm số là:

$\Delta y = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(0,9\right) - f\left(1\right)$

$= 0,9^3 - 3.0,9^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = 0,299$.

Ví dụ 2: Tìm số gia của hàm số:

a) y = 2x + 3

b) y = $2x^2$ – 3x + 1 tại x_0 = 1

Lời giải

a) Số gia của hàm số là:

$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

$= 2\left(x_0 + \Delta x\right) + 3 - \left(2x_0 + 3\right) = 2\Delta x$

b) Số gia của hàm số là:

$\Delta y = f\left(1 + \Delta x\right) - f\left(1\right)$

$= 2\left(1 + \Delta x\right)^2 - 3\left(1 + \Delta x\right) + 1 - \left(2.1^2 - 3.1 + 1\right)$

$= 2 + 4\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - 3 - 3\Delta x + 1 - 0$

$= 2\left(\Delta x\right)^2 + \Delta x$.

Dạng 2: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp giải:

Muốn tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta có 2 cách:

Cách 1:

Bước 1: Với Δx là số gia của đối số tại x_0 ta tính $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

Bước 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Cách 2: Đạo hàm của hàm số tại x_0 là $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Chú ý: Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

b) $y = \sqrt{2x+1}$ tại $x_0 = 1$.

c) $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

a) Cách 1: Với Δx là số gia của đối số $x_0 = 2$.

Khi đó hàm số số gia tương ứng:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= 2(2 + \Delta x)^2 + (2 + \Delta x) + 1 - (2.2^2 + 2 + 1)$

$= 8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2 + \Delta x + 1 - 11$

$= 9\Delta x + 2(\Delta x)^2 = \Delta x(9 + 2\Delta x)$

Ta có $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(9 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (9 + 2\Delta x) = 9$.

Cách 2: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 + x + 1 - 11}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 5) = 9$.

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 2$ và $f'(2) = 9$.

b) Cách 1: Với Δx là số gia của đối số $x_0 = 1$.

Khi đó hàm số số gia tương ứng:

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(1 + \Delta x\right) - f\left(1\right)$$

$$= \sqrt{2(1+\Delta x)+1} - \sqrt{3} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{3+2\Delta x} + \sqrt{3}}$$

Ta có $f'\left(1\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3+2\Delta x} + \sqrt{3}\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{3+2\Delta x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f\left(x\right) - f\left(1\right)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}\right)}$

$$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $f'\left(1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) Cách 1: Với Δx là số gia của đối số $x_0 = 3$.

Khi đó hàm số số gia tương ứng:

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(3 + \Delta x\right) - f\left(3\right)$$

$$= \frac{2(3+\Delta x) - 1}{3 + \Delta x + 1} - \frac{5}{4} = \frac{5 + 2\Delta x}{4 + \Delta x} - \frac{5}{4} = \frac{3\Delta x}{4(4+\Delta x)}$$

Ta có $f'\left(3\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x.4(4+\Delta x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3}{4(4+\Delta x)} = \frac{3}{16}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f\left(x\right) - f\left(3\right)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\frac{2x-1}{x+1} - \frac{5}{4}}{x - 3}$

$$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)4} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{3}{(x+1)4} = \frac{3}{16}.$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 3$ và $f'\left(3\right) = \frac{3}{16}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của các hàm số sau:

a) $y = x^3$ tại x_0

b) $y=\sqrt{x}$ tại x_0

Lời giải

a) Với Δx là số gia của đối số x_0.

Khi đó hàm số số gia tương ứng:

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^3-x_0^3$$

$$=x_0^3+3x_0^2.\Delta x+3x_0.\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3-x_0^3$$

$$=3x_0^2.\Delta x+3x_0.\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3$$

Ta có: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x_0^2.\Delta x+3x_0.\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2+3x_0.\Delta x+\left(\Delta x\right)^2\right)=3x_0^2$$

Vậy đạo hàm của hàm số tại x_0 là $f'\left(x_0\right)=3x_0^2$

b) Với Δx là số gia của đối số x_0.

Khi đó hàm số số gia tương ứng:

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$$

Ta có: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Dạng 3: Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Phương pháp giải:

Định lí: Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) liên tục tại x_0.

Chú ý: Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại x_0.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Hàm số y = f(x) = |x| liên tục tại x = 0 nhưng không tồn tại đạo hàm tại x = 0:

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}|x| = \lim\limits_{x\to 0^-}|x| = 0 = f\left(0\right)$ nên hàm số f(x) = |x| liên tục tại x = 0.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = -1$

Nên $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại x = 0.

3. Bài tập tự luyện

Câu 1. Số gia của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0 = -1$ là

A. $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2 - \Delta x.$

B. $\dfrac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2 - \Delta x\right].$

C. $\dfrac{1}{2}\left[\left(\Delta x\right)^2 + \Delta x\right].$

D. $\dfrac{1}{2}\left(\Delta x\right)^2 + \Delta x.$

Câu 2. Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số f(x) = 2x(x – 1) theo x và Δx là

A. $4x + 2\Delta x + 2.$

B. $4x + 2\left(\Delta x\right)^2 - 2.$

C. $4x + 2\Delta x - 2.$

D. $4x\Delta x + 2\left(\Delta x\right)^2 - 2\Delta x.$

Câu 3. Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

A. – 19 . **B.** 7 . **C.** 19. **D.** –7.

Câu 4. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo x và Δx.

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x+\Delta x}$.

D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x+\Delta x}$.

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ tại $x_0 = 1$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại $x_0 = 1$

A. 4 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x - 2$ tại $x_0 = -2$ là

A. 13. **B.** 12. **C.** 10. **D.** – 8.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ tại điểm $x_0 = 2$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{5}{2\sqrt{7}}$ **C.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{41}$

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $-\frac{2}{9}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{3x+1}{4-5x}$ tại $x_0 = 1$ là

A. 15. **B.** – 15. **C.** – 17. **D.** 17.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$ tại $x_0 = -1$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** Đáp án khác

Câu 12. Đạo hàm của hàm số f(x) = $x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x\right)$.

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x + 2x - 1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x + 2x + 1)$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^2 + x + \dfrac{5}{x}$. Khẳng định nào là đúng:

A. Hàm số liên tục trên R, không có đạo hàm trên R.

B. Hàm số liên tục trên R, có đạo hàm trên R.

C. Hàm số không liên tục trên R, không có đạo hàm trên R.

D. Hàm số không liên tục trên R, có đạo hàm trên R.

Câu 14. Cho hàm số y = |2x – 3|. Khẳng định nào là đúng:

A. Hàm số liên tục tại $x = \dfrac{3}{2}$, không có đạo hàm tại $x = \dfrac{3}{2}$.

B. Hàm số liên tục tại $x = \dfrac{3}{2}$, có đạo hàm tại $x = \dfrac{3}{2}$.

C. Hàm số không liên tục tại $x = \dfrac{3}{2}$, không có đạo hàm tại $x = \dfrac{3}{2}$.

D. Hàm số không liên tục tại $x = \dfrac{3}{2}$, có đạo hàm tại $x = \dfrac{3}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số y = f(x) =x^2 - 2|x + 3|. Khẳng định nào là đúng:

A. Hàm số liên tục trên R, không có đạo hàm trên R.

B. Hàm số liên tục trên R, có đạo hàm trên R.

C. Hàm số không liên tục trên R, không có đạo hàm trên R.

D. Hàm số không liên tục trên R, có đạo hàm trên R.

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	C	B	A	B	A	B	B	D	D	A	C	A	A