Bài tập Cấp số nhân - Toán 11

I. Bài tập trắc nghiệm

Bài 1: Cho cấp số nhân có $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_5 = 16$. Tìm q và u1

A. $q = \frac{1}{2};\ u_1 = \frac{1}{2}.$

B. $q = -\frac{1}{2};\ u_1 = -\frac{1}{2}.$

C. $q = 4;\ u_1 = \frac{1}{16}.$

D. $q = -4;\ u_1 = -\frac{1}{16}.$

Lời giải:

Ta có:

$$u_2 = u_1.q \Leftrightarrow \frac{1}{4} = u_1.q \ ;$$

$$u_5 = u_1.q^4 \Leftrightarrow 16 = u_1.q^4$$

Suy ra:

$$\frac{u_5}{u_2} = \frac{u_1q^4}{u_1q} = q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4\ .$$

Từ đó: $u_1 = \frac{1}{16}.$

Chọn đáp án C

Bài 2: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases}$

a. Tìm công bội và số hạng tổng quát của cấp số

A. $q = 3; u_n = \frac{3^{n-1}}{11}$

B. $q = \frac{1}{3}; u_n = \frac{81}{11}.\frac{1}{3^{n-1}}$

C. Cả A, B đúng

D. Cả A, B sai

b. Tính tổng S_{2011}

A. $q = \frac{1}{3}; S_{2011} = \frac{243}{22}\left(1 - \frac{1}{3^{2011}}\right)$

B. $q = 3; S_{2011} = \frac{1}{22}\left(3^{2011} - 1\right)$

C. Cả A, B đúng

D. Cả A, B sai

Lời giải:

a. Gọi q là công bội của cấp số. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{39}{11} \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(q + q^2 + q^3\right) = \frac{39}{11} \\ u_1\left(1 + q^4\right) = \frac{82}{11} \end{cases}$$

Suy ra: $\frac{q^4 + 1}{q^3 + q^2 + q} = \frac{82}{39} \Leftrightarrow 39q^4 - 82q^3 - 82q^2 - 82q + 39 = 0$

$\Leftrightarrow (3q-1)(q-3)(13q^2 + 16q + 13) = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}, q = 3$

- $q = \frac{1}{3} \Rightarrow u_1 = \frac{81}{11} \Rightarrow u_n = \frac{81}{11}.\frac{1}{3^{n-1}}$
- $q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{11} \Rightarrow u_n = \frac{3^{n-1}}{11}$.

Chọn đáp án C

b. Ta có: $S_{2011} = u_1 \dfrac{q^{2011} - 1}{q - 1}$

- $q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow S_{2011} = \dfrac{243}{22}\left(1 - \dfrac{1}{3^{2011}}\right)$
- $q = 3 \Rightarrow S_{2011} = \dfrac{1}{22}\left(3^{2011} - 1\right)$

Chọn đáp án C

Bài 3: Cho cấp số nhân: $\dfrac{-1}{5};\ a;\ \dfrac{-1}{125}$. Giá trị của a là:

A. $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $a = \pm\dfrac{1}{25}$.

C. $a = \pm\dfrac{1}{5}$.

D. $a = \pm 5$.

Lời giải:

Ta có:

$$a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{25}$$

Chọn đáp án B

Bài 4: Tính tổng sau $S_n = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$

A. $\dfrac{4^n-1}{3}\left(4-\dfrac{1}{4^n}\right)+n.$

B. $\dfrac{1-4^n}{3}\left(4-\dfrac{1}{4^n}\right)+2n.$

C. $\dfrac{4^n-1}{3}\left(\dfrac{1}{4^n}-4\right)+n.$

D. $\dfrac{4^n-1}{3}\left(4-\dfrac{1}{4^n}\right)+2n.$

Lời giải:

$$S_n=2^2+\frac{1}{2^2}+2+2^4+\frac{1}{2^4}+2+\ldots+2^{2n}+\frac{1}{2^{2n}}+2$$

$$=\left(2^2+2^4+\ldots+2^{2n}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}\right)+2n$$

$$=4.\frac{1-4^n}{1-4}+\frac{1}{4}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}+2n$$

$$=\frac{4^n-1}{3}\left(4-\frac{1}{4^n}\right)+2n.$$

Chọn đáp án D

Bài 5: Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Dãy số 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64 là một cấp số nhân.

B. Dãy số 7; 0; 0; 0;... là một cấp số nhân.

C. Dãy số (un):u_n = n.6n + 1 là một cấp số nhân.

D. Dãy số (vn):v_n = (-1)n.32n là một cấp số nhân.

Lời giải:

Kiểm tra các đáp án

A. Dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội q = -2.

B. Dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội q= 0.

C. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1.6^{n+1+1}}{n.6^{n+1}} = \frac{6(n+1)}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

không phải là hằng số.

Vậy $(u_n): u_n = n.6^{n+1}$ không phải là cấp số nhân.

D. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{2(n+1)}}{(-1)^n 3^{2n}} = -9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(v_n): v_n = (-1)^n.3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án C

Bài 6: Dãy số (u_n) có phải là cấp số nhân không ? Nếu phải hãy xác định số công bội ? Biết rằng u_n = 4.3n

A. q = 3

B. q = 2

C. q = 4

D. q = ∅

Lời giải:

Ta có:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4.3^{n+1}}{4.3^n} = 3$ không phụ thuộc vào n

Suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân

Với công bội q = 3.

Chọn đáp án A

Bài 7: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$; $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

A. Số hạng thứ 5.

B. Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7.

D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải:

Ta có:

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow (-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6 \Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

Chọn đáp án C

Bài 8: Cho các dãy số sau

$(1): u_n = -\dfrac{3^{n-1}}{5}$ $\qquad$ $(2): u_n = 3n - 1$

$(3): u_n = \dfrac{2^n - 1}{3}$ $\qquad$ $(4): u_n = n^3$

Hỏi có bao nhiêu dãy số là cấp số nhân ?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải:

(1) Xét dãy số : $u_n = -\frac{3^{n-1}}{5}$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{3^{n+1-1}}{5} : \left(-\frac{3^{n-1}}{5}\right) = 3$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với công bội q= 3.

(2). Xét dãy số: $u_n = 3n - 1$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)-1}{3n-1} = \frac{3n+2}{3n-1}$

$\Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân.

(3) Xét dãy số : $u_n = \frac{2^n - 1}{3}$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1}$

$\Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân

(4) xét dãy số $u_n = n^3$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$

$\Rightarrow (u_n)$không phải là cấp số nhân

Chọn đáp án A

Bài 9: Cho cấp số nhân (u_n) với

$$u_1 = -\frac{1}{2};\ u_7 = -32$$

. Tìm q ?

A. $q = \pm\frac{1}{2}$.

B. $q = \pm 2$.

C. $q = \pm 4$.

D. $q = \pm 1$.

Lời giải:

Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân

Ta có:

$$u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_7 = u_1.q^6$$

$$\Rightarrow q^6 = -32 : \frac{-1}{2} = 64 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B

Bài 10: Cho cấp số nhân (un) với $u_1 = 4$; q = - 4 Viết 3 số hạng tiếp theo và số hạng tổng quát u_n?

A. 16; -64; 256; (-4)n.

B. 16; -64; 256; (-4)n.

C. -16; 64; 256; 4.(-4)n - 1.

D. -16; 64; -256; 4n.

Lời giải:

Ta có : $u_2 = u_1.q = 4.(-4) = -16;$

$u_3 = u_2.q = -16.(-4) = 64;$

$u_4 = u_3.q = 64.(-4) = -256$.

Số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1} = 4.(-4)^{n-1}$.

Chọn đáp án C

II. Bài tập tự luận có lời giải

Bài 1: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -1$; q = $\frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

Lời giải:

Ta có:

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{10^{103}} = -1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}.$$

$$\Rightarrow n-1 = 103 \Rightarrow n = 104$$

Bài 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^{\frac{n}{2}+1}$

a. Tìm công bội của dãy số (u_n).

b. Tính tổng $S = u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{20}$

c. Số 19683 là số hạng thứ mấy của dãy số.

Lời giải:

a. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{\frac{n+1}{2}+1}}{3^{\frac{n}{2}+1}} = \sqrt{3}$, $\forall n \in N^*$

Dãy số là cấp số nhân với $u_1 = 3\sqrt{3}; q = \sqrt{3}$.

b. Ta có $u_2; u_4; u_6; \ldots; u_{20}$ lập thành cấp số nhân số hạng đầu $u_2 = 9; q = 3$ và có 10 số hạng nên

$$S = u_2.\frac{1-3^{10}}{1-3} = 9.\frac{3^{10}-1}{2} = \frac{9}{2}(3^{10}-1)$$

c. Ta có:

$$u_n = 19683 \Leftrightarrow 3^{\frac{n}{2}+1} = 3^9 \Leftrightarrow \frac{n}{2}+1 = 9 \Leftrightarrow n = 16$$

Vậy số 19683 là số hạng thứ 16 của cấp số.

Bài 3: Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ 7 gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

Lời giải:

Gọi cấp số nhân đó là (u_n), $n = \overline{1,7}$.

Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases} u_4 = 6 \\ u_7 = 243u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 = 6 \\ u_1.q^6 = 243u_1.q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{9} \\ q = 3 \end{cases}$$

Do đó các số hạng còn lại của cấp số nhân là

$$u_1 = \frac{2}{9}; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = 2; u_5 = 18; u_6 = 54; u_7 = 162$$

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

Lời giải:

+ *Điều kiện cần:*

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 x_2 x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân

Ta có $x_1 x_3 = x_2^2$.

Suy ra ta có $x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Với nghiệm x = 2

Ta có $m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -7 \end{array}\right.$

+ *Điều kiện đủ:*

Với m= 1 hoặc m = -7 thì $m^2 + 6m = 7$

Nên ta có phương trình

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là $1, 2, 4$.

Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân

Với công bội $q = 2$.

Vậy m= 1 và m= -7 là các giá trị cần tìm.

Bài 5: Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội q ≠ 0 Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Lời giải:

Do 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân

Nên ta có :

$ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$

Bài 6: Tìm x để các số 2; 8; x; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải:

Ta có 8 = 2. 4 nên công bội q = 4

Do đó, x = $2.q^2 = 2.4^2 = 32$

Bài 7: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

Lời giải:

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow u_{k+2} = u_{k+1}q = 36.\frac{9}{4} = 81$$

Bài 8: Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + ... + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$.

Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$3S = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + 11.3^{11}$.

Do đó:

$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} - 11.3^{11}$

$= 1.\dfrac{1-3^{11}}{1-3} - 11.3^{11} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{21.3^{11}}{2}$

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{4}.3^{11}$.

Vì $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{21.3^{11}}{4} = a + \dfrac{21.3^b}{4}$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{4}, b = 11 \Rightarrow P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} = 3$.

Bài 9: Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 ; đồng thời các số x ; 2y ; 3z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} y = xq;\ z = xq^2 \\ x + 3z = 2(2y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow x(3q^2 - 4q + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = z = 0$

$\Rightarrow$ công sai của cấp số cộng:

x ; 2y ; 3z bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}\ (q \neq 1).$

Bài 10: Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2 ; 3 ; 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải:

*Theo tính chất của cấp số cộng

Ta có x+ z = 2y.

Kết hợp với giả thiết, x+ y + z = 21

Ta suy ra 3y = 21 nên y = 7.

* Gọi d là công sai của cấp số cộng

Thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số 2 ; 3 ; 9 vào ba số x ; y ; z

Ta được ba số là x+ 2 ; y + 3 ; z + 9

Hay 9- d ; 10 ; 16+ d.

* Theo tính chất của cấp số nhân

Ta có $(9-d)(16+d) = 10^2 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0$.

Giải phương trình ta được d = -11 hoặc d = 4.

Với d = -11 ; cấp số cộng 18 ; 7 ; - 4.

Lúc này F = 389.

Với d= 4, cấp số cộng 3 ; 7 ; 11.

Lúc này F = 179.

III. Bài tập vận dụng

Bài 1 Các số x + 6y ; 5x + 2y ; 8x + y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số x + $\frac{5}{3}$; y - 1; 2x – 3y theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y

Bài 2 Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q ?

Bài 3 Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

Bài 4 Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \dfrac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$. Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số ?

Bài 5 Xác định x để 3 số 2x - 1; x; 2x + 1 lập thành một cấp số nhân?

Bài 6 Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

Bài 7 Tính các tổng sau: $S_n = 8 + 88 + 888 + ... + \underbrace{88...8}_{n\ so\ 8}$

Bài 8 Cho cấp số nhân với công bội q.

a) Biết $u_1=2, u_6=486$. Tìm q

b) Biết $q = \dfrac{2}{3}, u_4 = \dfrac{8}{21}$. Tìm u1

c) Biết $u_1=3, q=-2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

Bài 9 Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết:

a) $u_3=3$ và $u_5=27$;

b) $u_4-u_2=25$ và $u_3-u_1=50$

Bài 10 Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là và tổng của năm số hạng sau là ?