

Dạng 4: Tập hợp, cách xác định tập hợp và cách giải bài tập

1. Lý thuyết:

a. Tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Giả sử đã cho tập hợp A. Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A). Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A).
- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu \emptyset .

b. Cách xác định tập hợp

- Có 2 cách xác định tập hợp:

Cách 1: Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Cách 2: Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

- Người ta thường minh họa tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven.

c. Tập hợp con

- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một tập hợp con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).
- Nếu A không phải là một tập con của B ta viết $A \not\subset B$.
- Tính chất:

$$+) A \subset A, \forall A.$$

$$+) \emptyset \subset A, \forall A.$$

$$+) A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

d. Tập hợp bằng nhau

- Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là $A = B$.

2. Phương pháp giải:

- Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

- Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

- Nếu tập hợp có n phần tử thì nó có 2^n tập hợp con.

3. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Liệt kê các phần tử của tập hợp:

a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20 \text{ và } x \text{ chia hết cho } 3\}$.

b. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.

Hướng dẫn:

a. Tập hợp A gồm các phần tử là số tự nhiên nhỏ hơn 20 và chia hết cho 3.

Vậy $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

b. Tập hợp B gồm các phần tử là các số thực thỏa mãn phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ta có: phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$.

Vậy $B = \{1\}$.

Ví dụ 2: Tìm một tích chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp sau:

$$A = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30} \right\}$$

Hướng dẫn:

Ta có: $2 = 1.2$; $6 = 2.3$; $12 = 3.4$; $20 = 4.5$; $30 = 5.6$

Suy ra dạng tổng quát của dãy trên là: $\frac{1}{n.(n+1)}$ với n là số tự nhiên và $1 \leq n \leq 5$.

$$\text{Vậy } A = \left\{ \frac{1}{n.(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 5 \right\}.$$

Ví dụ 3: Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Tìm tất cả các tập hợp con của X .

Hướng dẫn:

- Số tập con không có phần tử nào là: \emptyset
- Số tập con có 1 phần tử là: $\{a\}; \{b\}; \{c\}$.
- Số tập con có 2 phần tử là: $\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$.
- Số tập con có ba phần tử là: $\{a; b; c\}$.

Vậy các tập con của X là: $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}$.

Ví dụ 4: Cho tập hợp $A = \{1; 3\}; B = \{3; x\}; C = \{x; y; 3\}$. Xác định x, y để $A = B = C$

Hướng dẫn:

Để $A = B$ thì $x = 1$. Khi đó $B = \{3; 1\}$.

Để $B = C$ thì $x = 1; y = 3$ hoặc $y = 1$. Khi đó $C = \{1; 3; 3\}$ hoặc $C = \{1; 1; 3\}$.

Vậy để $A = B = C$ thì $x = 1; y = 3$ hoặc $y = 1$.

4. Bài tập tự luyện:

Câu 1: Cho tập hợp $A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A :

- A. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
- B. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- C. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
- D. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Hướng dẫn:

Chọn D.

Vì $x \in \mathbb{N}, x \leq 5$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow (x + 1) \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 2: Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$:

- A. $X = 0$.
- B. $X = \{0\}$.
- C. $X = \emptyset$.

D. $X = \{\emptyset\}$.

Hướng dẫn:

Chọn C.

Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên $X = \emptyset$.

Câu 3: Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

A. $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 1\}$.

B. $B = \{x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.

C. $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 4x + 2 = 0\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 = 0\}$

Hướng dẫn:

Chọn C.

Ta có: $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ (không thỏa mãn $x \in \mathbb{Q}$). Vậy tập hợp C là tập rỗng.

- Đáp án A: $x \in \mathbb{Z}, |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x = 0$. Vậy tập hợp A không là tập rỗng.

- Đáp án B: Giải phương trình: $6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$.

Vậy tập hợp B không là tập rỗng.

- Đáp án D: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn $x \in \mathbb{R}$). Vậy tập hợp D không là tập rỗng.

Câu 4: Cho tập hợp $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 0\}$. Khi đó tập hợp M có bao nhiêu phần tử?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Hướng dẫn

Chọn B.

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên } x^2 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Khi đó tập hợp M có 1 phần tử duy nhất là $\{(0;0)\}$.

Câu 5: Cho các mệnh đề sau:

(I): $\{2; 1; 3\} = \{1; 2; 3\}$

(II): $\emptyset \subset \emptyset$

(III): $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (I) và (II) đúng.

C. Chỉ (I) và (III) đúng.

D. Cả (I), (II); (III) đều đúng.

Hướng dẫn:

Chọn D.

(I) đúng do hai tập hợp đã cho có tất cả các phần tử giống nhau.

(II) đúng do mọi tập hợp đều là tập con của chính nó.

(III) đúng vì phần tử \emptyset thuộc tập hợp $\{\emptyset\}$.

Câu 6: Cho các tập hợp E, F, G, K thỏa mãn: $E \subset F, F \subset G$ và $G \subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $G \subset F$.

B. $K \subset G$.

C. $E = F = G$.

D. $E \subset K$.

Hướng dẫn:

Chọn D.

Theo tính chất của tập hợp con, ta thấy:

Do $E \subset F$ và $F \subset G$ nên $E \subset G$.

Do $E \subset G$ và $G \subset K$ (theo đề bài) nên $E \subset K$.

Câu 7: Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Tập A có mấy tập con?

A. 16.

B. 15.

C. 12.

D. 10.

Hướng dẫn:

Chọn A.

Nếu tập hợp có n phần tử thì nó có 2^n tập hợp con.

Vậy số tập con của tập A là: $2^4 = 16$.

Câu 8: Trong các tập sau đây, tập hợp nào có đúng hai tập hợp con?

A. $\{x; y\}$.

B. $\{x\}$.

C. $\{\emptyset; x\}$.

D. $\{\emptyset; x; y\}$.

Hướng dẫn:

Chọn B.

Xét đáp án B: $\{x\}$ có $2^1 = 2$ tập con là $\{x\}$ và \emptyset .

Xét đáp án A: $\{x; y\}$ có $2^2 = 4$ tập con.

Xét đáp án C: $\{\emptyset; x\}$ có $2^2 = 4$ tập con.

Xét đáp án D: $\{\emptyset; x; y\}$ có $2^3 = 8$ tập con.

Câu 9: Số phần tử của tập hợp $A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn:

Chọn C.

$$A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}.$$

Ta có $|k| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 2$. Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Suy ra $(k^2 + 1) \in \{5; 2; 1; 2; 5\}$. Vậy $A = \{1; 2; 5\}$. Số phần tử của tập A là 3.

Câu 10: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{0; 2; 4\}$; $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Quan hệ nào sau đây là đúng?

A. $B \subset A \subset C$.

B. $B \subset A = C$.

C. $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases}$.

D. $A \cup B = C$.

Hướng dẫn:

Chọn C. Ta thấy mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp C và mọi phần tử của tập hợp B đều thuộc tập hợp C. Vậy A và B đều là tập hợp con của tập hợp C.