Bài 4. Phép thử và biến cố.

A. Lý thuyết

I. Phép thử, không gian mẫu

1. Phép thử.

Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là phép thử. Một thí nghiệm, một phép đo, hay một sự quan sát hiện tượng nào đó… được hiểu là phép thử.

- **Ví dụ 1**. Gieo ba đồng tiền xu liên tiếp, chọn ba cây tú lơ khơ từ bộ bài 52 cây tứ lơ khơ, chọn 3 bông hoa từ 10 bông hoa trong lọ… đây đều là phép thử.

- Khi gieo một đồng tiền, ta không thể đoán trước được mặt xuất hiện là sấp hay ngửa. Đó là ví dụ về **phép thử ngẫu nhiên**.

- Tổng quát. Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu.

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là ***không gian mẫu*** của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga).

- Ví dụ 2. Nếu phép thử là gieo một con súc sắc một lần, thì không gian mẫu gồm 6 phần tử là: Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

- Ví dụ 3. Nếu phép thử là gieo một đồng tiền ba lần thì không gian mẫu gồm tám phần tử là:

$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

II. Biến cố.

- Một cách tổng quát, mỗi biến cố liên quan đến một phép thử được mô tả bởi một tập con của không gian mẫu.

- **Định nghĩa**: Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A; B; C…

- Tập $\varnothing$ được gọi là **biến cố không thể** (gọi tắt là biến cố không). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

- Ví dụ 4. Gieo con súc sắc liên tiếp hai lần thì biến cố: “lần thứ nhất ra mặt 5 chấm, lần thứ 2 ra mặt 8 chấm” là biến cố không. (vì súc sắc không có mặt 8 chấm)

Còn biến cố: “Tổng số chấm hai lần gieo lớn hơn 1 và nhỏ hơn 13” là biến cố chắc chắn.

- Ta nói rằng biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi các kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A).

Như vậy, biến cố không thể không bao giờ xảy ra. Trong khi đó, biến cố chắc chắn luôn luôn xảy ra.

III. Phép toán trên các biến cố.

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử

- Tập $\Omega \backslash A$ được gọi là **biến cố đối** của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

$\overline{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

- Ví dụ 5. Nếu phép thử là chọn một học sinh trong lớp làm lớp trường thì:

Biến cố A: “bạn đó là nữ”.

Biến cố B: “bạn đó là nam”.

Ta thấy, B là biến cố đối của biến cố A: $B = \overline{A}$.

- Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có định nghĩa:

Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của các biến cố A và B.

Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của các biến cố A và B.

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta còn nói A và B **xung khắc**.

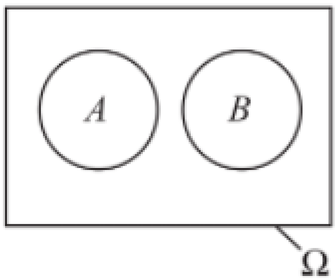
- Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra.

Biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra.

Biến cố $A \cap B$ còn được viết là A.B.

A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra.

- Ta có bảng sau:



Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố : “A hoặc B”
$C = A \cap B$	C là biến cố : “A và B”
$A \cap B = \varnothing$	A và B là biến cố xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B là biến cố đối.

- Ví dụ 6. Xét phép thử: gieo súc sắc hai lần liên tiếp, với các biến cố:

A: “Kết quả hai lần gieo giống nhau”.

B. “Lần đầu xuất hiện mặt 5 chấm”.

Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến A và B.

Lời giải:

A = {(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6)}.

B = {(5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6)}.

B. Bài tập tự luyện

Bài 1. Xét phép thử, gieo đồng tiền hai lần:

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố:

A: “Lần đầu xuất hiện mặt sấp”.

B: “Hai lần xuất hiện giống nhau”.

C: “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

Lời giải:

a) Không gian mẫu là: Ω = {SS; SN; NS; NN}.

b) Các biến cố A; B; C là:

A = {SN; SS}.

B = {SS; NN}.

C = {NS; SN; NN} .

Bài 2. Gieo con súc sắc cân đối và đồng chất liên tiếp hai lần, xác định các biến cố sau:

A: “Tổng số chấm trong hai lần gieo lớn hơn 9”.

B: “Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm”.

C: “Hiệu số chấm hai lần gieo là 2”.

Lời giải:

Ta xác định các biến cố:

A = {(5; 5); (5; 6); (6; 5); (6; 6)}.

B = {(6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4); (6; 5); (6; 6)}.

C = {(3; 1); (4; 2); (5; 3); (6; 4); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 6)}.

Bài 3. Một hộp đựng 8 thẻ, đánh số từ 1 đến 8. Chọn lần lượt ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác định các biến cố sau:

A: “Tổng số của 3 thẻ được chọn không vượt quá 7”.

B: “Ba thẻ được chọn là ba số chẵn”

C: “Thẻ thứ nhất là 7 và tổng hai thẻ thứ 2; thứ 3 nhỏ hơn 5”.

Lời giải:

Ta xác định các biến cố:

A = {(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1); (1; 2; 4); (1; 4; 2);

(2; 4; 1); (2; 1; 4); (4; 1; 2); (4; 2; 1)}.

B = {(2; 4; 6); (2; 6; 4); (4; 2; 6); (4; 6; 2); (6; 2; 4); (6; 4; 2)}.

C = {(7; 1; 2) ; (7; 2; 1); (7; 1; 3); (7; 3; 1)}.

Bài 4. Trong một chiếc hộp đựng 6 viên bi đỏ, 8 viên bi xanh, 10 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính số phần tử của:
a) Không gian mẫu.
b) Các biến cố:
A: “4 viên bi lấy ra có đúng hai viên bi màu trắng”
B: “4 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ”
Lời giải:
a) Ta có: $n(\Omega) = C_{24}^{4} = 10626$
b)
- Số cách chọn 4 viên bi có đúng hai viên bi màu trắng là: $C_{10}^{2}.C_{14}^{2} = 4095$
Suy ra, số phần tử của biến cố A là 4095.
- Số cách lấy 4 viên bi mà không có viên bi màu đỏ được chọn là: C_{18}^{4}
Suy ra : số phần tử của biến cố B là $C_{24}^{4} - C_{18}^{4} = 7566$.