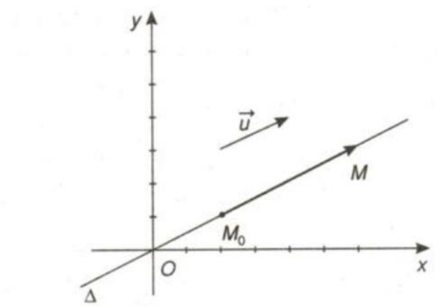
Phương trình đường thẳng và cách giải bài tập

A. Lí thuyết tổng hợp

1. Các vectơ của đường thẳng:

+) **Vectơ chỉ phương**: Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



+) **Vectơ pháp tuyến:** Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

+) Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ.

- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ chỉ phương hoặc một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.

- Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương, vô số vectơ pháp tuyến.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng:

+) Định nghĩa: Phương trình Δ: ax + by + c = 0 $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là phương trình tổng quát của đường thẳng Δ nhận $\vec{n}$(a; b) làm vectơ pháp tuyến.

+) Các dạng đặc biệt:

Δ: ax + c = 0 , $a \neq 0$ $\Rightarrow \Delta$ song song với Oy hoặc trùng với Oy khi a = 1 và c = 0.

Δ: ay + c = 0 , $a \neq 0$ $\Rightarrow \Delta$ song song với Ox hoặc trùng với Ox khi a = 1 và c = 0.

Δ: ax + by = 0 , $a^2 + b^2 \neq 0$ $\Rightarrow \Delta$ đi qua gốc tọa độ O(0; 0)

3. Phương trình tham số của đường thẳng:

+) Định nghĩa: Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(x_0; y_0\right)$ và nhận vectơ $\vec{u}(a;b)$ làm vectơ chỉ phương, với t là tham số.

+) Chú ý:

Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ thay vào phương trình tham số ta được một điểm M (x; y) $\in \Delta$

Một đường thẳng có vô số phương trình tham số.

- Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ $(a.b \neq 0)$ là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M $\left(x_0; y_0\right)$ và nhận $\vec{u}(a;b)$ làm vectơ chỉ phương.

- Phương trình đoạn chắn: Đường thẳng Δ cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm A (a; 0), B (0; b) với $a.b \neq 0$ có phương trình đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

4. Hệ số góc:

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ có hệ số góc k thỏa mãn: $y - y_0 = k(x - x_0)$

+ Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k = \frac{u_2}{u_1}$

+ Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; k)$

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

+) Xét hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ với ${a_1}^2 + {b_1}^2 \neq 0, {a_2}^2 + {b_2}^2 \neq 0$. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Hệ (1) có duy nhất một nghiệm $\left(x_0;y_0\right) \Rightarrow d_1 \cap d_2$ tại M $\left(x_0;y_0\right)$

TH2: Hệ (1) có vô số nghiệm $\Rightarrow d_1$ trùng với d_2

TH3: Hệ (1) vô nghiệm $\Rightarrow d_1 // d_2$

+) Chú ý: Với $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ ta có:

$$d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

6. Góc giữa hai đường thẳng:

+ Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$ với ${a_1}^2 + {b_1}^2 \neq 0, {a_2}^2 + {b_2}^2 \neq 0$, góc giữa hai đường thẳng đó được kí hiệu là (d_1, d_2), (d_1, d_2) luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^o. Đặt $\alpha = (d_1, d_2)$ ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}.\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$$

+ Chú ý:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

Nếu d_1 và d_2 có phương trình đường thẳng là $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

7. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình ax + by + c = 0 và điểm $M\left(x_0;y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được kí hiệu là d (M, Δ) và tính bằng công thức:

$d(M,\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B. Các dạng bài.

Dạng 1: Cách viết các dạng phương trình đường thẳng.

Phương pháp giải:

a) Cách viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ

+ Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ của đường thẳng Δ

+ Tìm một điểm M $\left(x_0;y_0\right)$ thuộc Δ

+ Viết phương trình Δ theo công thức: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

+ Biến đổi thành dạng ax + by + c = 0

Nếu đường thẳng Δ_1 song song với đường thẳng Δ_2: ax + by + c = 0 thì Δ_1 có phương trình tổng quát ax + by + c’ = 0, c $\neq$ c’.

Nếu đường thẳng Δ_1 vuông góc với đường thẳng Δ_2: ax + by + c = 0 thì Δ_1 có phương trình tổng quát -bx + ay + c’ = 0, c $\neq$ c’.

b) Cách viết phương trình tham số của đường thẳng Δ

+ Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2)$ của đường thẳng Δ

+ Tìm một điểm M $\left(x_0;y_0\right)$ thuộc Δ

+ Viết phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+u_1t \\ y=y_0+u_2t \end{cases}$

Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;k)$

Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-b;a)$ hoặc $\vec{u}=(b;-a)$ và ngược lại.

c) Cách viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ. (chỉ áp dụng khi có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$ với $a.b\neq 0$)

+ Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b)$ ($a.b \neq 0$) của đường thẳng Δ

+ Tìm một điểm M $\left(x_0;y_0\right)$ thuộc Δ

+ Viết phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$

d) Cách viết phương trình đoạn chắn của đường thẳng Δ (chỉ áp dụng khi đường thẳng cắt hai trục Ox, Oy)

+ Tìm hai giao điểm của Δ với trục Ox, Oy lần lượt là A(a; 0), B(0; b)

+ Viết phương trình đoạn chắn $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ($a.b \neq 0$).

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho đường thẳng d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A(0; 5) và B(6; 0). Viết phương trình tổng quát và phương trình đoạn chắn của đường thẳng d.

Lời giải:

Vì A(0; 5) và B(6; 0) thuộc đường thẳng d nên ta có $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

$\overrightarrow{AB} = (6-0;0-5) = (6;-5)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (5;6)$

Chọn điểm A(0; 5) thuộc đường thẳng d, ta có phương trình tổng quát của đường thẳng d:

5.(x – 0) + 6.(y – 5) = 0

$\Leftrightarrow$ 5x + 6y – 30 = 0

Vì đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A(0; 5) và B(6; 0) nên ta có phương trình đoạn chắn: $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{5} = 1$.

Bài 2: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm M(5; 8) và N(3; 1). Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d.

Lời giải:

Vì M(5; 8) và N(3; 1) thuộc đường thẳng d nên ta có $\overrightarrow{MN}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d, có $\overrightarrow{MN}$ = (3 – 5; 1 – 8) = (-2; -7)

Chọn điểm N(3; 1) thuộc đường thẳng d ta có phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$

Chọn điểm M(5; 8) thuộc đường thẳng d ta có phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-8}{-7}$

Dạng 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Phương pháp giải:

Áp dụng lí thuyết về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng: $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ với $a_1{}^2 + b_1{}^2 \neq 0, a_2{}^2 + b_2{}^2 \neq 0$.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ ta có:

$$d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

a) $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2 : x + y + 2 = 0$

b) $d_3 : 12x - 6y + 10 = 0$ và $d_4 : 2x - y + 5 = 0$

c) $d_5: 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_6: 4x + 5y - 6 = 0$.

Lời giải:

a) Xét hai đường thẳng $d_1: 4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2: x + y + 2 = 0$ có:

$\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1} \Rightarrow d_1$ và d_2 cắt nhau.

b) Xét hai đường thẳng $d_3: 12x - 6y + 10 = 0$ và $d_4: 2x - y + 5 = 0$ có:

$\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} = 6 \neq \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow d_3 // d_4$

c) Xét hai đường thẳng $d_5: 8x + 10y - 12 = 0$ và $d_6: 4x + 5y - 6 = 0$ có:

$\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{-12}{-6} = 2 \Rightarrow d_5 \equiv d_6$.

Bài 2: Cho hai đường thẳng: $d_1: x - 2y + 5 = 0$ và $d_2: 3x - y = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2.

Lời giải:

Xét tỉ số: $\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-1} \Rightarrow d_1 \cap d_2$. Gọi tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là M(x; y) với x và y là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $d_1 \cap d_2$ tại M (1; 3).

Dạng 3: Tính góc giữa hai đường thẳng.

Phương pháp giải:

Áp dụng lí thuyết về góc giữa hai đường thẳng:

- Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$ với ${a_1}^2 + {b_1}^2 \neq 0, {a_2}^2 + {b_2}^2 \neq 0$, góc

giữa hai đường thẳng được kí hiệu là (d_1, d_2), (d_1, d_2) luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^o
Đặt $\alpha = (d_1, d_2)$ ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}}.\sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}}$$

- Chú ý:

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ với $\overrightarrow{u_1} = (x_1; y_1)$ là vectơ chỉ phương của d_1, $\overrightarrow{u_2} = (x_2; y_2)$ là vectơ chỉ phương của d_2.

Nếu d_1 và d_2 có phương trình đường thẳng là $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$ và d’: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 3t' \end{cases}$. Xác định số đo góc giữa d và d’.

Lời giải:

Xét $d: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$ ta có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}$ = (-2; -1)

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}$ = (1; -2).

Xét d’: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 3t' \end{cases}$ ta có vectơ chỉ phương của d’ là $\overrightarrow{u'}$ = (1; 3)

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của d’ là $\overrightarrow{n'}$ = (-3; 1).

Ta có:

$$\cos(d, d') = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{n'})\right| = \frac{|-2.1 + (-1).3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}.\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng $90^o \Rightarrow (d, d') = 45^o$.

Bài 2: Cho hai đường thẳng d: 4x – 2y + 6 = 0 và d’: x + 2y + 1 = 0. Xác định số đo góc giữa d và d’.

Lời giải:

Xét d: 4x – 2y + 6 = 0 ta có vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}$ = (4; -2)

Xét d’: x + 2y + 1 = 0 ta có vectơ pháp tuyến của d’ là $\overrightarrow{n'}$ = (1; 2)

Ta có: $\vec{n}.\overrightarrow{n'}$ = 4.1 + (-2).2 = 0

$\Rightarrow d \perp d'$

$\Rightarrow (d, d') = 90^o$

Dạng 4: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

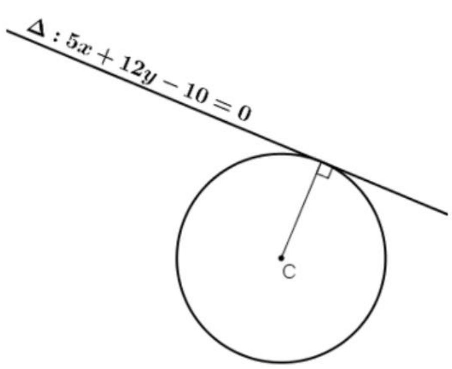
Phương pháp giải:

Áp dụng lí thuyết về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng Δ có phương trình ax + by + c = 0 và điểm M $\left(x_0; y_0\right)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được kí hiệu là d (M, Δ), tính bằng công thức:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Tìm bán kính của đường tròn tâm C(-2; -2) . Biết đường tròn tiếp xúc với đường thẳng Δ : 5x + 12y -10 = 0.



Lời giải:

Vì đường tròn tiếp xúc với đường thẳng Δ : 5x + 12y – 10 = 0 nên ta có bán kính của đường tròn bằng khoảng từ tâm C đến đường thẳng Δ. Ta có:

$$R = d(C, \Delta) = \frac{|5.(-2) + 12(-2) - 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{44}{13}.$$

Bài 2: Cho điểm A (3; 6). Tìm khoảng cách từ A đến đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$

Lời giải:

Xét đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$ ta có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}$ = (-3; 2)

$\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}$ = (2; 3)

Chọn điểm M (4; 7) thuộc d ta có phương trình tổng quát của d là:

2.(x – 4) + 3.(y – 7) = 0

$\Leftrightarrow$ 2x – 8 + 3y – 21 = 0

$\Leftrightarrow$ 2x + 3y – 29 = 0

Khoảng cách từ A (3; 6) đến đường thẳng d là:

$$d(A, d) = \frac{|2.3 + 3.6 - 29|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

C. Bài tập tự luyện.

Bài 1: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d biết d đi qua 2 điểm A (3; 5) và B (4; 6).

Đáp án: d: - x + y = 2

Bài 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng d’ biết d’ đi qua 2 điểm A (2; 7) và B (0; 5).

Đáp án: d’: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 7 - 2t \end{cases}$

Bài 3: Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua hai điểm M (1; 6) và N (2; 3)

Đáp án: d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-6}{-3}$

Bài 4: Viết phương trình đoạn chắn của đường thẳng d biết d song song với đường thẳng d’: 4x – 3y + 2 = 0 và d đi qua điểm (2; 3)

Đáp án: d: 4x - 3y + 1 = 0

Bài 5: Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d: 3x – 5y + 2 = 0 và đường thẳng d’: 3x – 5y = 0.

Đáp án: d // d’

Bài 6: Cho đường thẳng d: 2x – 6y + 3 = 0 và đường thẳng d’: x – m + 7 = 0. Tìm m để d // d’.

Đáp án: m = 3

Bài 7: Cho hai đường thẳng d: 6x – y = 0 và d’: 2x + 8y – 1 = 0. Tìm tọa độ giao điểm I của d và d’.

Đáp số: $I\left(\frac{1}{50};\frac{3}{25}\right)$

Bài 8: Cho hai đường thẳng d: 8x – 3y + 2 = 0 và d’: x = 4. Tìm số đo góc giữa d và d’.

Đáp án: $(d,d')=20^{o}33'$

Bài 9: Cho điểm A (4; 7) và đường thẳng d’: x – 6 = 0. Tìm khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

Đáp án: d (A, d’) = 2

Bài 10: Cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=2+2t\\y=3+t\end{cases}$. Tìm m để khoảng cách giữa A (2; m) và đường thẳng d là 5.

Đáp số: $m=\frac{3-5\sqrt{5}}{2}$