

Bài 6. Hệ thức lượng trong tam giác

Mở đầu trang 38 SGK Toán 10 tập 1: Ngắm Tháp Rùa từ bờ, chỉ với những dụng cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?



Tháp Rùa nằm trong lòng hồ Hoàn Kiếm ở Thủ đô Hà Nội

Lời giải:

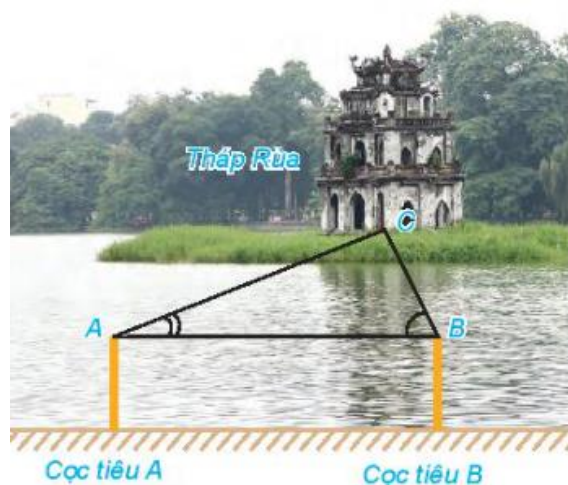
Sau bài này ta sẽ trả lời được:

Đặt cọc tiêu (vật cố định) tại vị trí đứng, kí hiệu là điểm A.

Sau đó, di chuyển một đoạn d (m) đến vị trí B. Gọi C là vị trí của tháp Rùa.

Tại A và B xác định góc A và góc B của tam giác ABC.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh AC.

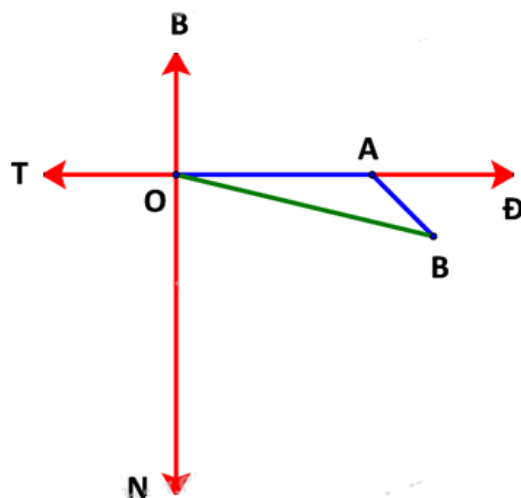


Hoạt động 1 trang 38 SGK Toán 10 tập 1: Một tàu biển xuất phát từ cảng Vân Phong (Khánh Hòa) theo hướng đông với vận tốc 20km/h. Sau khi đi được 1 giờ, tàu chuyển sang hướng Đông Nam rồi giữ nguyên vận tốc và đi tiếp.

- Hãy vẽ sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát (1 km trên thực tế ứng với 1 cm trên bản vẽ).
- Hãy đo trực tiếp trên bản vẽ và cho biết sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng Vân Phong bao nhiêu kilômét (số đo gần đúng).
- Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì có thể dùng Định lí Pythagore (Pi-ta-go) để tính chính xác các số đo trong câu b hay không?

Lời giải:

- Giả sử tàu xuất phát từ điểm O như hình dưới đây.



Trong 1 giờ, tàu di chuyển theo hướng đông từ O đến A với quãng đường là:

$20 \cdot 1 = 20$ (km) tương ứng với 20 cm trên sơ đồ.

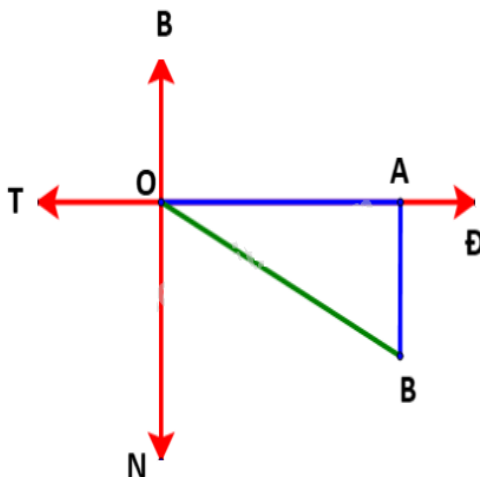
Trong 0,5 giờ tiếp theo, tàu di chuyển theo hướng đông nam từ A đến B với quãng đường là:

$20 \cdot 0,5 = 10$ (km) tương ứng với 10 cm trên sơ đồ.

b) Trên sơ đồ, khoảng cách từ cảng đến tàu là đoạn OB dài khoảng 28 cm.

Do đó, khoảng cách từ cảng đến tàu thực tế khoảng 28 km.

c) Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì sơ đồ đường đi của tàu như sau:



Trong 2 giờ, tàu di chuyển từ điểm xuất phát O theo hướng đông đi đến A với quãng đường OA là $20 \cdot 2 = 40$ (km) tương ứng với 40 cm trên sơ đồ.

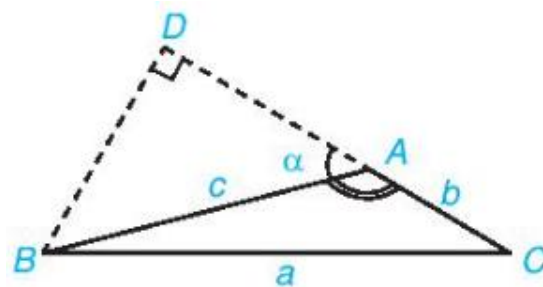
Sau đó tàu di chuyển từ A theo hướng nam tới vị trí điểm B. Ta có thể tính được quãng đường AB khi biết thời gian di chuyển.

Ta có: $AB \perp OA$ nên tam giác OAB vuông tại A.

Khi đó áp dụng định lý Pythagore ta có thể tính được chính xác OB với $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{1600 + AB^2}$, do đó ta có thể xác định được chính xác khoảng cách từ điểm B nơi tàu đến tới cảng Vân Phong.

Hoạt động 2 trang 38 SGK Toán 10 tập 1: Trong Hình 3.8, hãy thực hiện các bước sau để thiết lập công thức tính a theo b, c và giá trị lượng giác của góc A.

- Tính a^2 theo BD^2 và CD^2 .
- Tính a^2 theo b, c và DA.
- Tính DA theo c và $\cos A$.
- Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.



Hình 3.8

Lời giải

a) Xét tam giác BDC vuông tại D, theo định lý Pythagore ta có:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

$$\text{Hay } a^2 = BD^2 + DC^2 \quad (1)$$

b) Xét $\triangle BDA$ vuông tại D, ta có:

$$BA^2 = BD^2 + DA^2$$

$$\text{Suy ra } BD^2 = BA^2 - DA^2 = c^2 - DA^2 \quad (*)$$

$$\text{Mà } DC = DA + AC = DA + b \text{ nên } DC^2 = (DA + b)^2 \quad (**)$$

Thay (*) và (**) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - DA^2 + (DA + b)^2 = c^2 - DA^2 + DA^2 + 2b \cdot DA + b^2 \\ &= c^2 + b^2 + 2b \cdot DA. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^2 = c^2 + b^2 + 2b \cdot DA \quad (2)$$

c) Xét $\triangle BDA$ vuông tại D, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{DA}{c} \Rightarrow DA = c \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Mà } \cos \alpha = \cos (180^\circ - A) = -\cos A \text{ (do góc } \alpha \text{ và góc } A \text{ bù nhau).}$$

$$\text{Do đó } DA = -c \cdot \cos A.$$

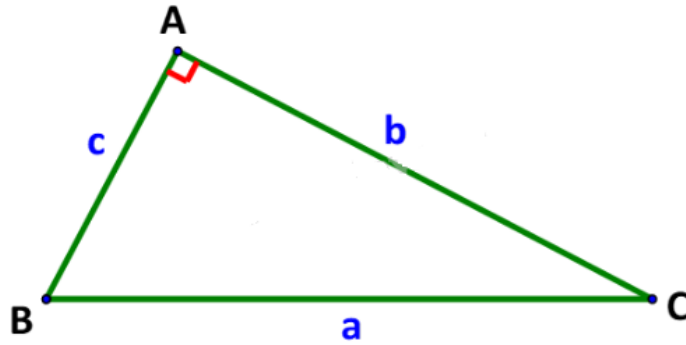
d) Thay $DA = -c \cdot \cos A$ vào biểu thức (2), ta được:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 + 2b \cdot (-c \cdot \cos A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \text{ (đpcm).}$$

Câu hỏi trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Định lí Pythagore có phải là một trường hợp đặc biệt của định lí côsin hay không?

Lời giải:



Giả sử ta có tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Theo định lý côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Mà $A = 90^\circ$ nên $\cos A = 0$.

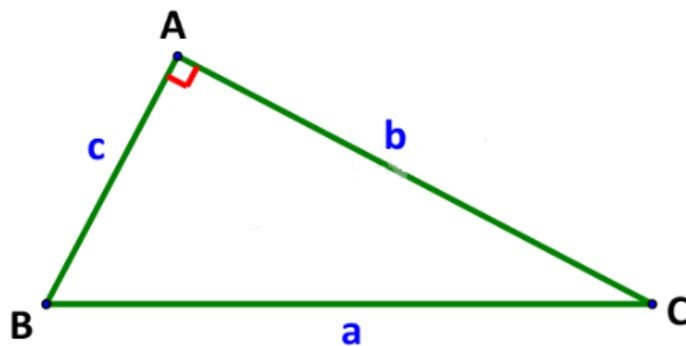
Do đó, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2$.

Khi đó: $a^2 = b^2 + c^2$ hay bình phương cạnh huyền bằng tổng các bình phương hai cạnh góc vuông. (nội dung của định lý Pythagore).

Vậy định lý Pythagore là một trường hợp đặc biệt của định lý côsin.

Khám phá trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Từ định lý côsin, hãy viết các công thức tính $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo độ dài các cạnh a , b , c của tam giác ABC.

Lời giải:



Theo định lý côsin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \quad (2)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C \quad (3)$$

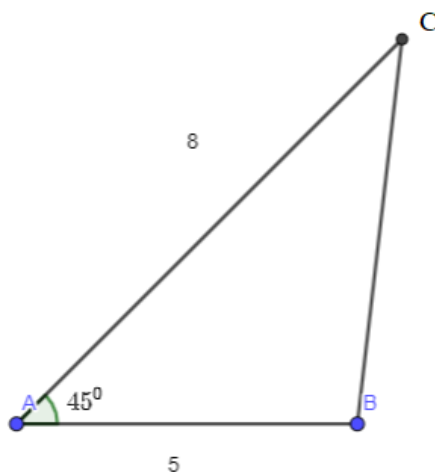
Ta có (1) $\Leftrightarrow 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Tương tự từ (2) và (3) suy ra $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$.

Vậy $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$.

Luyện tập 1 trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC, có $AB = 5$, $AC = 8$ và $A = 45^\circ$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

Lời giải:



Theo định lí côsin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \quad (*)$$

(trong đó: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$)

Khi đó, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$

$$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 89 - 40\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC \approx 5,7 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Từ (*) suy ra } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\text{Mà } a = BC = 5,7; b = AC = 8; c = AB = 5.$$

$$\text{Suy ra } \cos B = \frac{5,7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 5,7 \cdot 5} = -\frac{217}{1900} \approx -0,11$$

$$\Rightarrow B \approx 97^\circ.$$

$$\text{Ta có: } A + B + C = 180^\circ$$

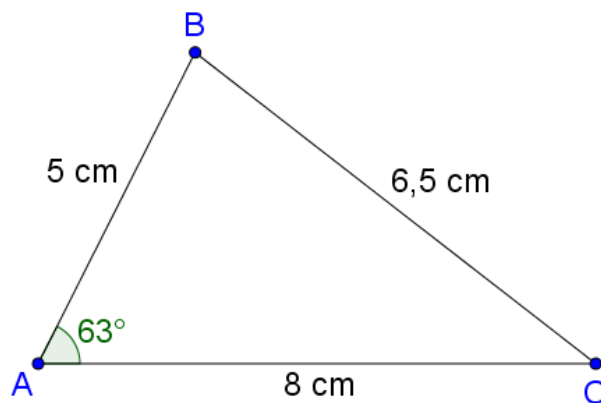
$$\text{Suy ra } C = 180^\circ - A - B$$

$$\text{Do đó } C \approx 180^\circ - 45^\circ - 97^\circ = 38^\circ.$$

$$\text{Vậy } BC \approx 5,7 \text{ cm; } B \approx 97^\circ; C \approx 38^\circ.$$

Trải nghiệm trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Vẽ một tam giác ABC, sau đó đo độ dài các cạnh, số đo góc A và kiểm tra tính đúng đắn của định lí cosin tại đỉnh A đối với tam giác đó.

Lời giải:



Tiến hành đo các cạnh của tam giác và góc A, ta được:

$AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$, $BC = 6,5 \text{ cm}$ và $A = 63^\circ$.

Khi đó, ta có:

$$\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 6,5^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} \approx 0,45.$$

$$\cos A = \cos 63^\circ \approx 0,45.$$

$$\text{Do đó } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}.$$

Vì vậy định lí côsin là đúng.

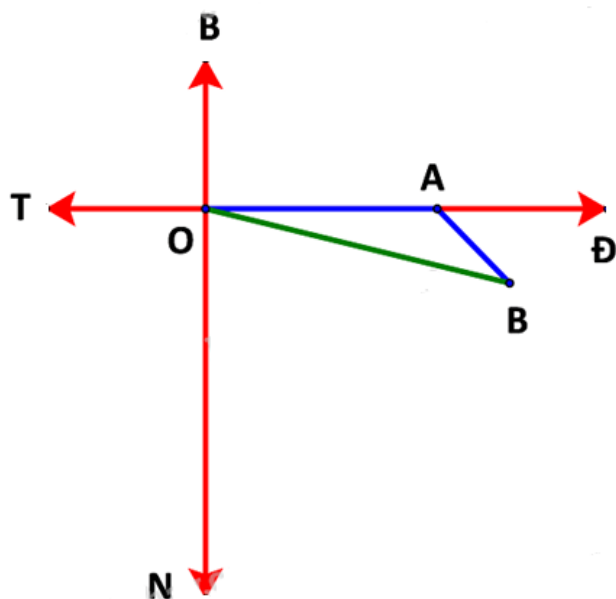
Vận dụng 1 trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Dùng định lí côsin, tính khoảng cách được đề cập trong HĐ 1b.

Lời giải:

Tàu xuất phát từ cảng Vân Phong, đi theo hướng Đông với vận tốc 20km/h.

Sau khi đi 1 giờ, tàu chuyển sang hướng đông nam rồi giữ nguyên vận tốc.

Giả sử sau 1,5 giờ tàu ở vị trí điểm B.



Ta đã có: quãng đường $OA = 20$ (km) và quãng đường $AB = 10$ (km).

Mà $\angle OAB = 135^\circ$ (do tàu đi theo hướng đông nam).

Áp dụng định lí côsin tại đỉnh A, ta được:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos \angle OAB$$

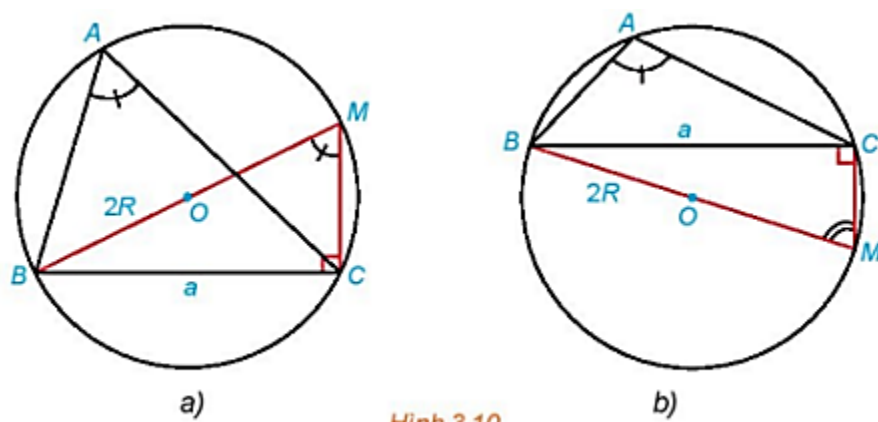
$$\Leftrightarrow OB^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow OB^2 \approx 782,84$$

$$\Leftrightarrow OB \approx 27,98.$$

Vậy khoảng cách từ tàu tới cảng Vân Phong xấp xỉ 27,98 km.

Hoạt động 3 trang 39 SGK Toán 10 tập 1: Trong mỗi hình dưới đây, hãy tính R theo a và sin A.



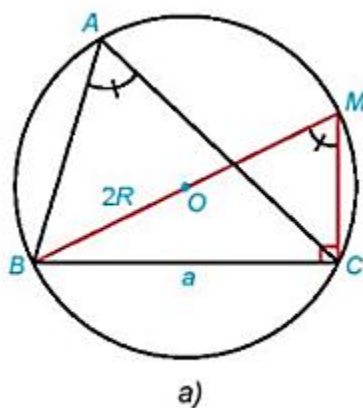
Hình 3.10

Lời giải:

Xét $\triangle BCM$ vuông tại C, ta có:

$$\sin M = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin M}.$$

Hình 3.10a):

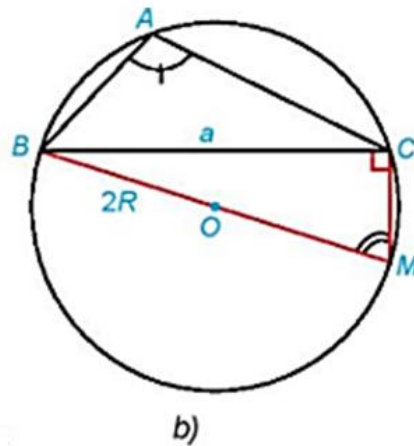


Ta có $M = A$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BC)

$$\Rightarrow \sin A = \sin M$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}.$$

Hình 3.10b):



Ta có: $A + M = 180^\circ$ (vì tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn $(O; R)$).

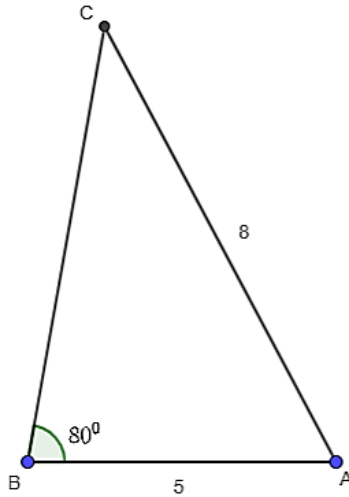
$$\Rightarrow \sin A = \sin M$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}.$$

$$\text{Vậy ở cả hai hình ta đều có } R = \frac{a}{2\sin A}.$$

Luyện tập 2 trang 40 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có $b = 8$, $c = 5$ và $B = 80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài các cạnh còn lại của tam giác.

Lời giải:



Áp dụng định lý sin cho ΔABC , ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{5 \cdot \sin 80^\circ}{8} \approx 0,6155$$

$$\Leftrightarrow C \approx 38^\circ.$$

$$\text{Lại có } A + B + C = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow A = 180^\circ - B - C$$

$$\Leftrightarrow A \approx 180^\circ - 80^\circ - 38^\circ = 62^\circ.$$

Theo định lý sin, ta suy ra:

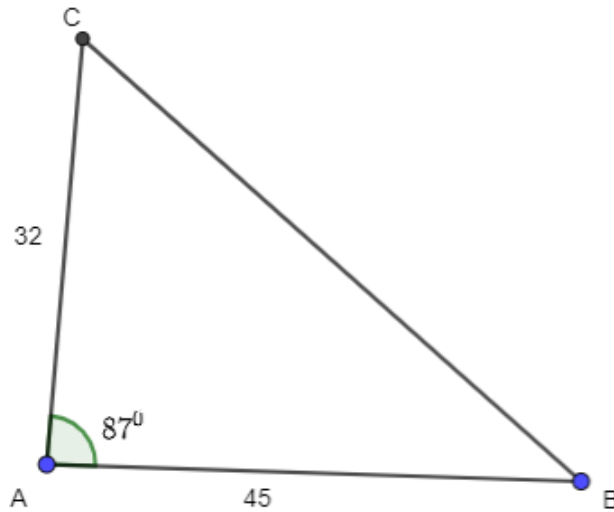
$$a = \sin A \cdot \frac{b}{\sin B} = \sin 62^\circ \cdot \frac{8}{\sin 80^\circ} \approx 7,17$$

$$\text{Và } 2R = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{8}{2 \sin 80^\circ} \approx 4,062.$$

Vậy $a \approx 7,17$; $R \approx 4,062$; $A \approx 62^\circ$; $C \approx 38^\circ$.

Luyện tập 3 trang 40 SGK Toán 10 tập 1: Giải tam giác ABC, biết $b = 32$, $c = 45$;
 $A = 87^\circ$.

Lời giải:



Áp dụng định lý cosin tại đỉnh A, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \cos 87^\circ$$

$$\Leftrightarrow BC^2 \approx 2898,27$$

$$\Leftrightarrow BC \approx 53,84.$$

Theo định lý sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{32 \cdot \sin 87^\circ}{53,8} \approx 0,594$$

$$\Rightarrow B \approx 36,44^\circ \text{ hoặc } B \approx 143,56^\circ \text{ (loại vì } A + B \approx 230,56^\circ > 180^\circ \text{)}.$$

Ta có: $A + B + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow C = 180^\circ - A - B$$

$$\Rightarrow C \approx 180^\circ - 87^\circ - 36,44^\circ = 56,56^\circ.$$

Vậy $BC = 53,84$; $B = 36,44^\circ$; $C = 56,56^\circ$.

Vận dụng 2 trang 40 SGK Toán 10 tập 1: Từ một khu vực có thể quan sát hai đỉnh núi, ta có thể ngắm và đo để xác định khoảng cách giữa hai đỉnh núi đó. Hãy thảo luận để đưa ra các bước cho một cách đo.

Lời giải:

Bước 1: Tại khu vực quan sát, đặt một cọc tiêu cố định tại vị trí A. Kí hiệu hai đỉnh núi lần lượt là điểm B và điểm C.

Đứng tại A, ngắm điểm B và điểm C để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

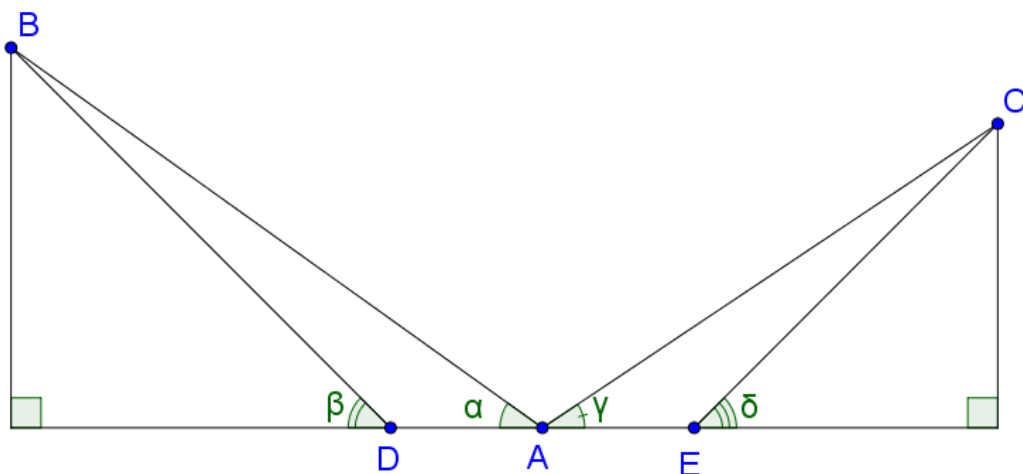
Bước 2: Đo khoảng cách từ vị trí ngắm đến từng đỉnh núi, tức là tính AB, AC.

* Tính AB bằng cách:

+ Đứng tại A, ngắm đỉnh núi B để xác định góc ngắm so với mặt đất, kí hiệu là góc α .

+ Theo hướng ngắm, đặt tiếp cọc tiêu tại D gần đỉnh núi hơn và đo đoạn AD. Xác định góc ngắm tại điểm D, kí hiệu là góc β .

Ta có hình vẽ:



Ta có: $\angle ADB = 180^\circ - \beta$; $\angle DBA = \beta - \alpha$.

Áp dụng định lí sin vào $\triangle ABD$, ta được: $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{DA}{\sin \angle DBA}$

$$\Rightarrow AB = \sin \angle ADB \cdot \frac{DA}{\sin \angle DBA}$$

$$\Rightarrow AB = \sin(180^\circ - \beta) \cdot \frac{DA}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

* Tương tự ngắm và đo để xác định AC.

Ta có: $\angle AEC = 180^\circ - \delta$; $\angle ACE = \delta - \gamma$.

Áp dụng định lí sin vào $\triangle ACE$, ta được: $\frac{AC}{\sin \angle AEC} = \frac{AE}{\sin \angle ACE}$

$$\Rightarrow AC = \sin \angle AEC \cdot \frac{AE}{\sin \angle ACE}$$

$$\Rightarrow AC = \sin(180^\circ - \delta) \cdot \frac{AE}{\sin(\delta - \gamma)}.$$

Bước 3: Tính khoảng cách giữa hai đỉnh núi, bằng cách áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh BC.

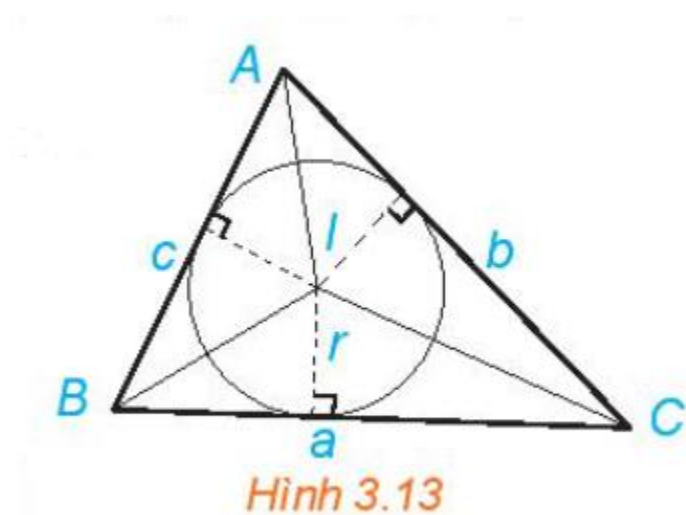
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC$.

Với AB , AC , góc BAC đã biết ở các bước trên, thay vào ta tính được BC chính là khoảng cách giữa hai đỉnh núi.

Hoạt động 4 trang 41 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Nêu mối liên hệ giữa diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác IBC , ICA , IAB .

b) Tính diện tích tam giác ABC theo r , a , b , c .

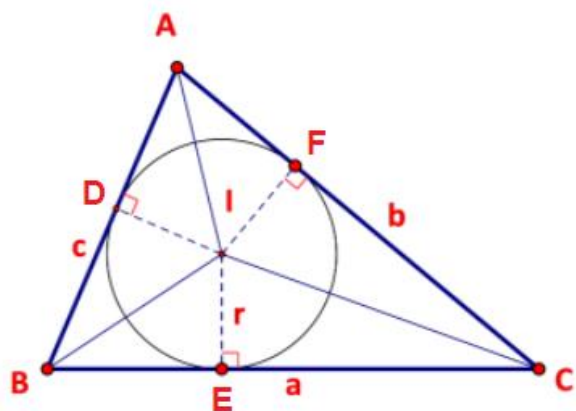


Lời giải:

a) Diện tích tam giác ABC bằng tổng diện tích tam giác IAB , IAC , IBC .

Do đó $S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$.

b) Gọi D , E , F lần lượt là hình chiếu của I trên AB , BC , AC .



Ta có:

$$S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot ID \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot c;$$

$$S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot IE \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot a;$$

$$S_{ICA} = \frac{1}{2} \cdot IF \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot b.$$

Do đó: $S_{ABC} = S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICA}$

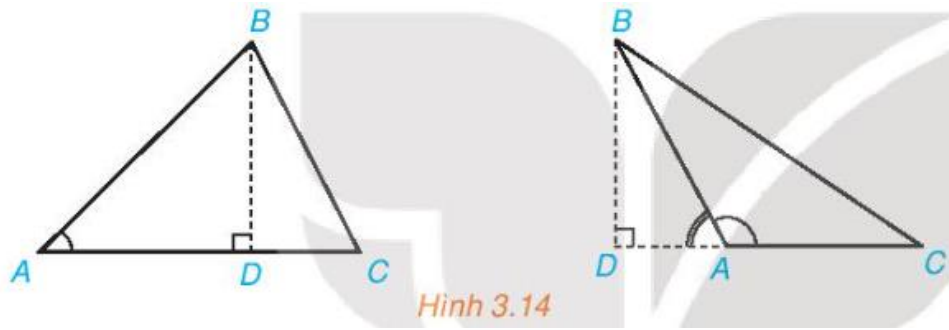
$$= \frac{1}{2} r \cdot a + \frac{1}{2} r \cdot b + \frac{1}{2} r \cdot c = \frac{1}{2} r \cdot (a + b + c).$$

Vậy diện tích tam giác ABC tính theo r, a, b, c là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} r \cdot (a + b + c).$

Hoạt động 5 trang 41 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC với đường cao BD.

a) Biểu thị BD theo AB và sin A.

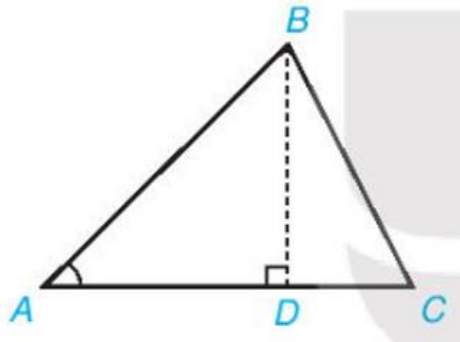
b) Viết công thức tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c, sin A.



Lời giải:

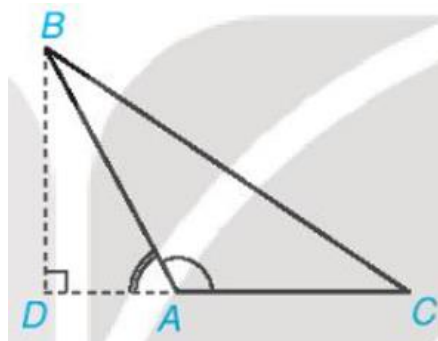
a) Xét $\triangle ABD$ vuông tại D, ta có:

TH1: Góc A là góc nhọn.



$$\text{Ta có: } \sin A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \cdot \sin A.$$

TH2: Góc A là góc tù.

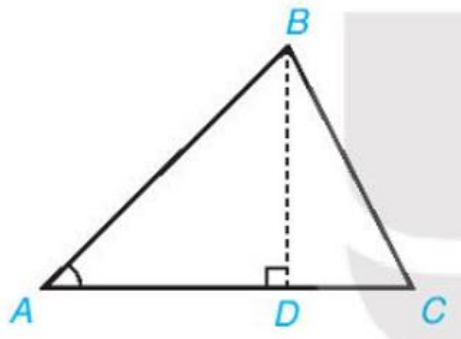


$$\sin A = \sin(180^\circ - A) = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow BD = AB \cdot \sin A.$$

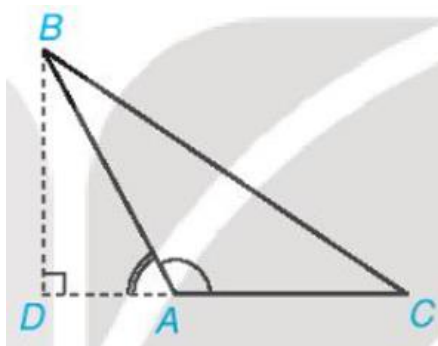
Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $BD = AB \cdot \sin A$.

b) TH1. Đường cao BD nằm trong tam giác ABC.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A.$$

TH2. Đường cao BD nằm ngoài tam giác ABC.



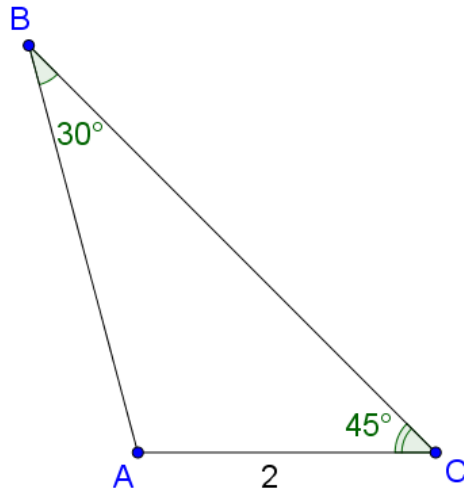
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A.$$

Vậy diện tích S của tam giác ABC theo b, c, $\sin A$ là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A$.

Luyện tập 4 trang 41 SGK Toán 10 tập 1: Tính diện tích tam giác ABC có $b = 2$,

$B = 30^\circ, C = 45^\circ$.

Lời giải:



Áp dụng định lí sin cho ΔABC , ta có: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow c = \sin C \cdot \frac{b}{\sin B} = \sin 45^\circ \cdot \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

Ta có: $A + B + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 1 + \sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

Vậy diện tích tam giác ABC là $1 + \sqrt{3}$ đvdt.

Thảo luận trang 41 SGK Toán 10 tập 1: Ta đã biết tính $\cos A$ theo độ dài các cạnh của tam giác ABC. Liệu $\sin A$ và diện tích S có tính được theo độ dài cạnh của tam giác ABC hay không?

Lời giải:

Từ định lí cosin trong tam giác ABC, ta suy ra:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\text{Mà } \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\Rightarrow \sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\text{Do } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ nên } \sin A > 0 \text{ hay } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc} \end{aligned}$$

Khi đó diện tích tam giác ABC là:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[a^2 - (b - c)^2][b + c + a]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}. \end{aligned}$$

Vậy $\sin A$ và diện tích S có tính được theo độ dài cạnh của tam giác ABC.

Vận dụng 3 trang 42 SGK Toán 10 tập 1: Công viên Hòa Bình (Hà Nội) có dạng hình ngũ giác ABCDE như Hình 3.17. Dùng chế độ tính khoảng cách giữa hai điểm của Google Maps, một người xác định được các khoảng cách như trong hình vẽ. Theo số liệu đó, em hãy tính diện tích của công viên Hòa Bình.



Lời giải



Xét tam giác CDB, ta có: $CD = 441$ m, $CB = 575$ m và $DB = 538$ m.

Nửa chu vi tam giác CDB là:

$$(441 + 575 + 538) : 2 = 777 \text{ (m)}.$$

Do đó:

$$S_{CDB} = \sqrt{777 \cdot (777 - 441) \cdot (777 - 575) \cdot (777 - 538)} \approx 112\,267,7 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Xét tam giác DBE, ta có: $DE = 217$ m, $EB = 476$ m và $DB = 538$ m.

Nửa chu vi tam giác DBE là:

$$(217 + 476 + 538) : 2 = 615,5 \text{ (m)}.$$

Do đó:

$$S_{DBE} = \sqrt{615,5 \cdot (615,5 - 217) \cdot (615,5 - 476) \cdot (615,5 - 538)} \approx 51\,495,13 \text{ (m}^2\text{)}$$

Xét tam giác ABE, ta có: $AE = 401$ m, $EB = 476$ m và $BA = 256$ m.

Nửa chu vi tam giác ABE là:

$$(401 + 476 + 256) : 2 = 566,5 \text{ (m)}$$

Do đó:

$$S_{ABE} = \sqrt{566,5 \cdot (566,5 - 401) \cdot (566,5 - 476) \cdot (566,5 - 256)}$$

$$\approx 51\,327,97 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích ngũ giác ABCDE là:

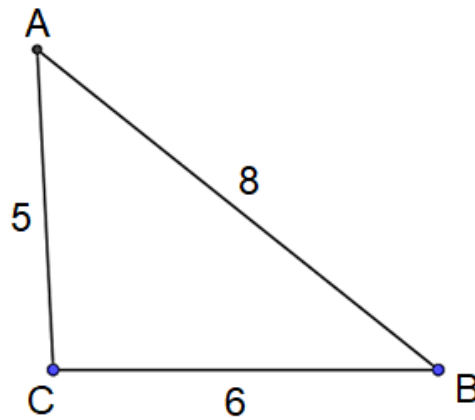
$$S_{ABCDE} = S_{CDB} + S_{DBE} + S_{ABE}$$

$$\approx 112\,267,7 + 51\,495,13 + 51\,327,97 = 215\,090,8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích của công viên Hòa Bình khoảng $215\,090,79 \text{ m}^2$.

Bài 3.5 trang 42 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có $a = 6$, $b = 5$, $c = 8$. Tính $\cos A$, S , r .

Lời giải:



Từ định lí cosin, ta suy ra:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = 0,6625.$$

Nửa chu vi tam giác ABC là:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{6 + 5 + 8}{2} = 9,5$$

Theo công thức Herong, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{9,5 \cdot (9,5 - 6) \cdot (9,5 - 5) \cdot (9,5 - 8)} \approx 14,98. \end{aligned}$$

Ta có: $S = pr$

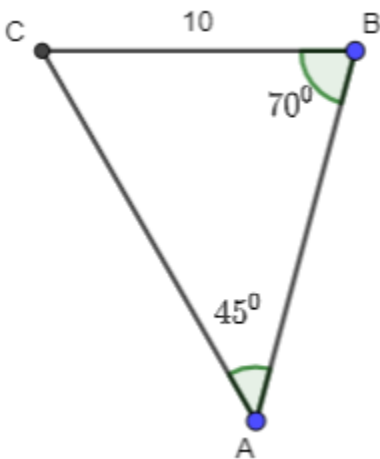
$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} \approx \frac{14,98}{9,5} \approx 1,577.$$

Vậy $\cos A = 0,6625$, $S \approx 14,98$ đvdt, $r \approx 1,577$.

Bài 3.6 trang 42 SGK Toán 10 tập 1: Cho tam giác ABC có $a = 10$, $A = 45^\circ$, $B = 70^\circ$.

Tính R, b, c.

Lời giải:



Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}; b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}.$$

Mà $a = 10$, $A = 45^\circ$; $B = 70^\circ$

$$\Rightarrow R = \frac{10}{2\sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}; b = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,29.$$

Ta có: $A + B + C = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow C = 180^\circ - A - B$$

$$\Leftrightarrow C = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ.$$

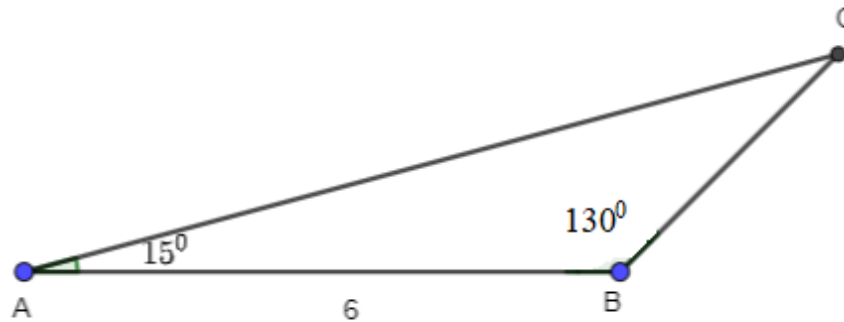
Từ định lí sin ta suy ra:

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82.$$

Vậy $R = 5\sqrt{2}$, $b \approx 13,29$, $c \approx 12,82$.

Bài 3.7 trang 42 SGK Toán 10 tập 1: Giải tam giác ABC và tính diện tích tam giác đó, biết $A = 15^\circ, B = 130^\circ, c = 6$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$, ta có: $A + B + C = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow C = 180^\circ - A - B$$

$$\Leftrightarrow C = 180^\circ - 130^\circ - 15^\circ = 35^\circ.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}; a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}.$$

Mà $A = 15^\circ; B = 130^\circ; C = 35^\circ; c = 6$

$$\Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8; a = \frac{6 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,7.$$

Diện tích tam giác ABC là:

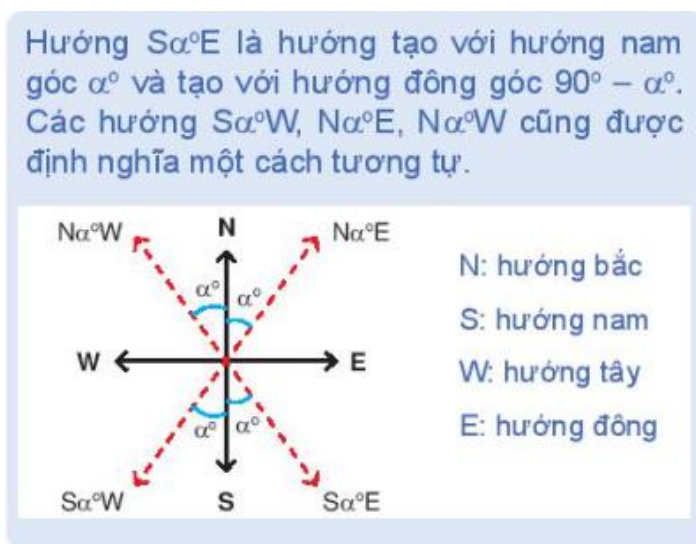
$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}8 \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 6,212.$$

Vậy $a \approx 2,7$; $b \approx 8$; $C = 35^\circ$; $S \approx 6,212$.

Bài 3.8 trang 42 SGK Toán 10 tập 1: Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A, đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam theo vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

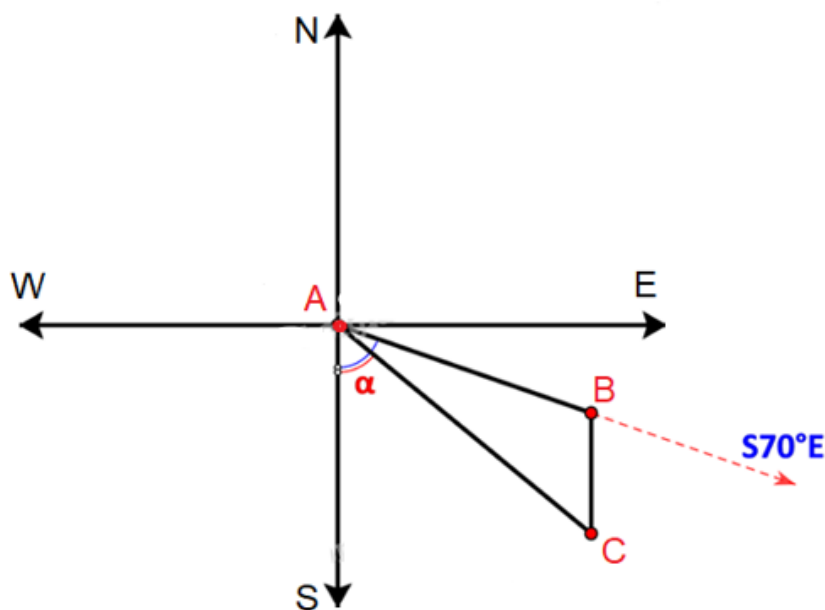
a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.



Lời giải:

Ta có sơ đồ đường đi như sau:



Trong đó: B là nơi động cơ bị hỏng, C là vị trí neo đậu của tàu trên hòn đảo.

Khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là đoạn AC (hay b).

Ban đầu tàu di chuyển theo hướng $S70^\circ E$ nên $BAS = 70^\circ$.

Sau khi động cơ bị hỏng, tàu trôi theo hướng Nam nên $BC \parallel AS$.

$$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAS = 110^\circ.$$

Quãng đường tàu đi được sau 90 phút hay 1,5 giờ (ngay trước khi hỏng động cơ) là:

$$70 \cdot 1,5 = 105 \text{ (km) hay } c = 105.$$

Quãng đường tàu trôi tự do là:

$$8 \cdot 2 = 16 \text{ (km) hay } a = 16.$$

a) Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC, ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow b^2 = 16^2 + 105^2 - 2 \cdot 16 \cdot 105 \cdot \cos 110^\circ \approx 12\,430,18$$

$$\Rightarrow b \approx 111,49.$$

Vậy khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là khoảng 111,49 km.

b) Theo sơ đồ, hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S\alpha^\circ E$ với $\alpha = CAS$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}.$$

Mà $B = 110^\circ$; $b \approx 111,49$; $a = 16$.

$$\Rightarrow \sin A = \frac{16 \cdot \sin 110^\circ}{111,49} \approx 0,135$$

$$\Rightarrow A \approx 8^\circ \text{ (do } A < 90^\circ \text{)}.$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 70^\circ - 8^\circ = 62^\circ.$$

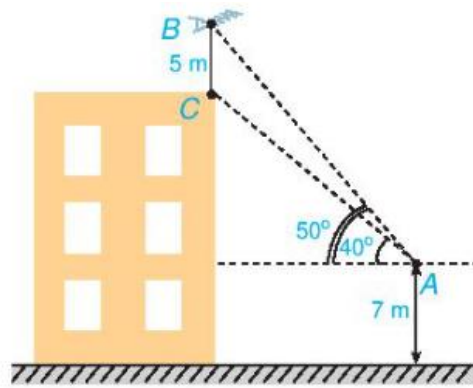
Vậy hướng từ cảng A đến đảo nơi tàu neo đậu là $S62^\circ E$.

Bài 3.9 trang 43 SGK Toán 10 tập 1: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5m.

Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác ABC.

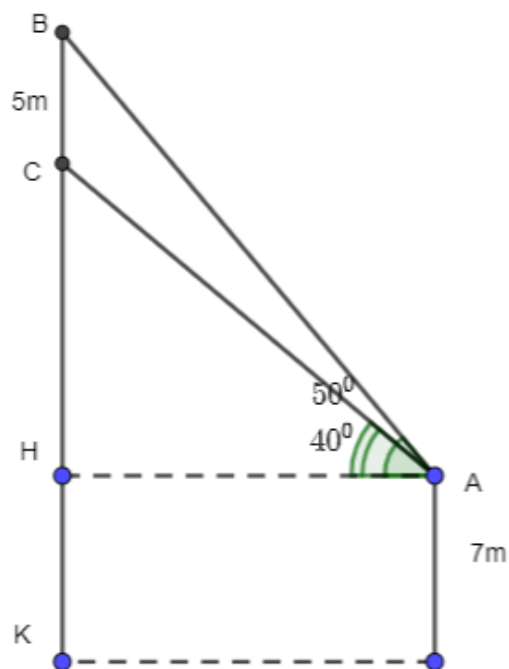
b) Tính chiều cao của tòa nhà.



Hình 3.18

Lời giải:

Ta có hình vẽ sau:



a) Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

Ta có: $\angle HAB = 50^\circ$; $\angle HAC = 40^\circ$

Ta có: $\angle BAC = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có:

$$\text{CBA} + \text{BAH} = 90^\circ \text{ (hai góc phụ nhau)}$$

$$\Rightarrow \text{CBA} = 90^\circ - \text{BAH} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có: } \text{ACB} + \text{BAC} + \text{CBA} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \text{ACB} = 180^\circ - \text{BAC} - \text{CBA}$$

$$\Leftrightarrow \text{ACB} = 180^\circ - 10^\circ - 40^\circ = 130^\circ.$$

Vậy các góc của tam giác ABC là $\text{BAC} = 10^\circ$; $\text{ABC} = 40^\circ$; $\text{ACB} = 130^\circ$.

b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta được:

$$\frac{\text{BC}}{\sin \text{BAC}} = \frac{\text{AC}}{\sin \text{ABC}} = \frac{\text{AB}}{\sin \text{ACB}}$$

$$\Rightarrow \text{AB} = \frac{\text{BC} \cdot \sin \text{C}}{\sin \text{BAC}}$$

$$\text{Mà } \text{BC} = 5 \text{ m, } \text{BAC} = 10^\circ; \text{ACB} = 130^\circ.$$

$$\Rightarrow \text{AB} = \frac{5 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 22,06 \text{ (m)}.$$

Xét $\triangle ABH$ có:

$$\text{BH} = \text{AB} \cdot \sin \text{BAH} \approx 22,06 \cdot \sin 50^\circ \approx 16,9 \text{ (m)}.$$

Do đó chiều cao của tòa nhà là:

$$\text{CK} = \text{BH} - \text{BC} + \text{HK} \approx 16,9 - 5 + 7 = 18,9 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của tòa nhà xấp xỉ bằng 18,9 m.

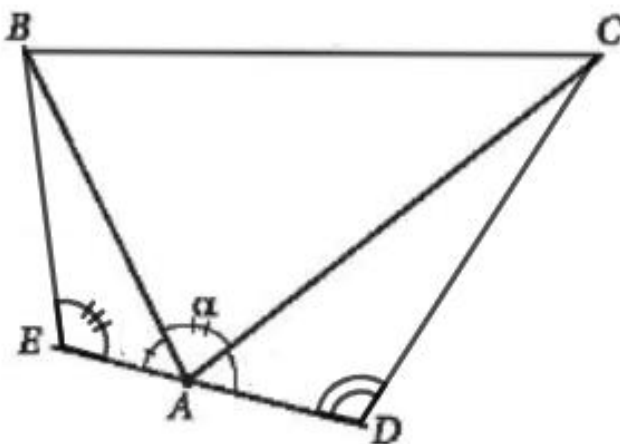
Bài 3.10 trang 43 SGK Toán 10 tập 1: Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).



Đảo Yến, nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

Lời giải:

- Giả sử từ một điểm A trên bãi biển Vũng Chùa ta nhìn thấy Đảo Yến với đỉnh bên trái là B và đỉnh bên phải là C nên chiều rộng của hòn đảo là đoạn BC.



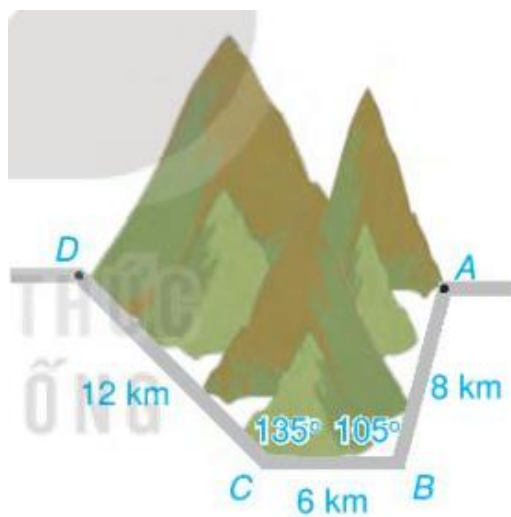
- Lấy các điểm D và E bất kì trên bãi biển Vũng Chùa sao cho E, A, D thẳng hàng và ta đo được các khoảng cách AD và AE.

Ngắm và đo các góc BAC , BAE , BEA , CAD , CDA .

Áp dụng định lí sin trong các tam giác ABE và ACD, ta tính được các khoảng cách AB và AC.

Sau đó, áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC với góc BAC, các cạnh AB, AC đã biết, tính được khoảng cách BC (bề rộng của Đảo Yến mà ta nhìn thấy).

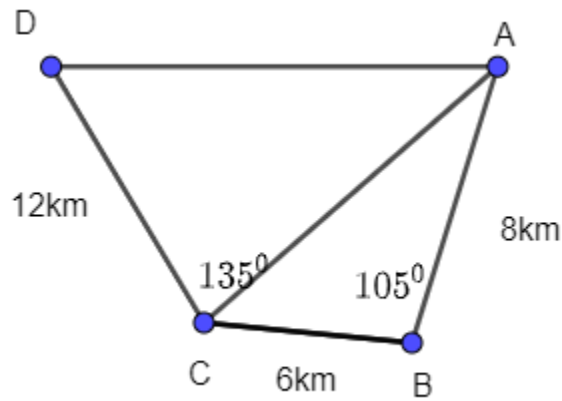
Bài 3.11 trang 43 SGK Toán 10 tập 1: Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ.



Hình 3.19

Lời giải:

Ta có hình vẽ sau:



Bước 1: Áp dụng định lí côsin trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \\ &= 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 105^\circ \approx 124,85 \\ \Rightarrow AC &\approx 11,2 \text{ km.} \end{aligned}$$

Bước 2: Áp dụng định lí sin trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin ACB} &= \frac{AC}{\sin ABC} \\ \Rightarrow \sin ACB &= \frac{8 \cdot \sin 105^\circ}{11,2} \approx 0,69 \\ \Rightarrow ACB &\approx 43,6^\circ \\ \Rightarrow ACD &\approx 135^\circ - 43,6^\circ = 91,4^\circ \end{aligned}$$

Bước 3:

Áp dụng định lí côsin trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos ACD \\ &= 11,2^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11,2 \cdot \cos 91,4^\circ \\ \Rightarrow AD &\approx 16,6 \text{ (km).} \end{aligned}$$

Bước 4: Độ dài đường mới giảm so với đường cũ là:

$$12 + 6 + 8 - 16,6 = 9,4 \text{ (km)}.$$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm 9,4 kilômét so với đường cũ.